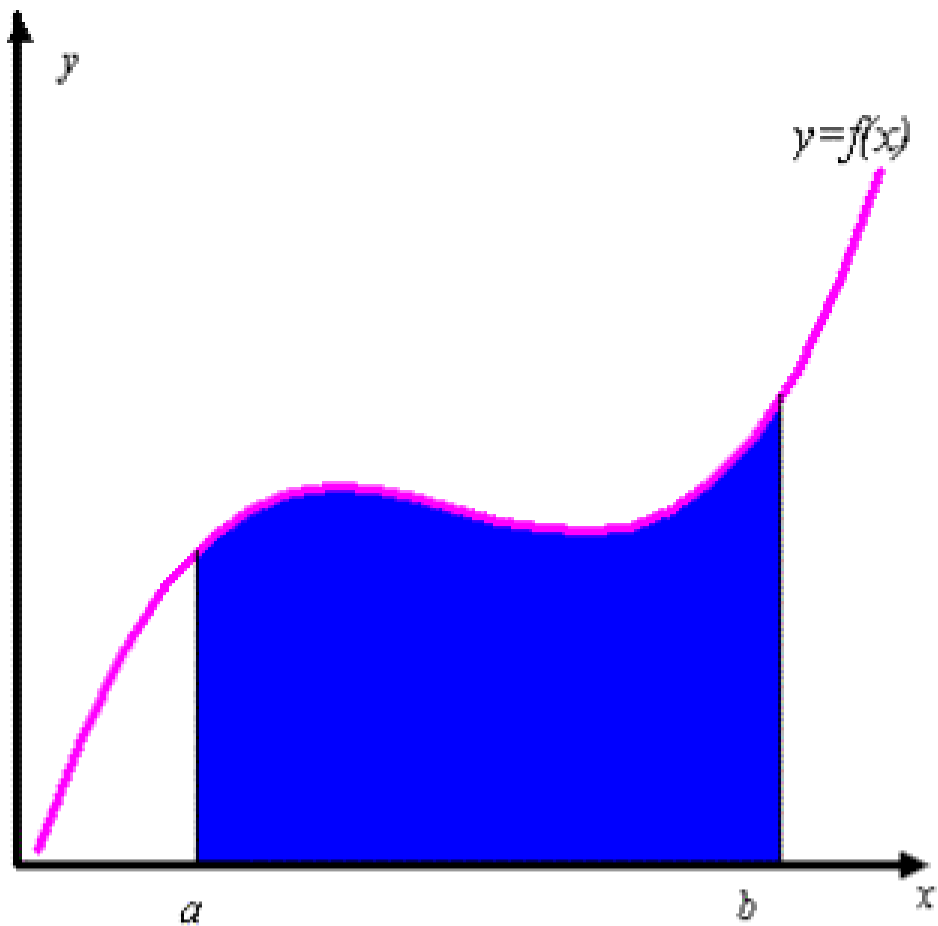
Integração

Introdução

Cálculo de áreas: Seja o seguinte problema

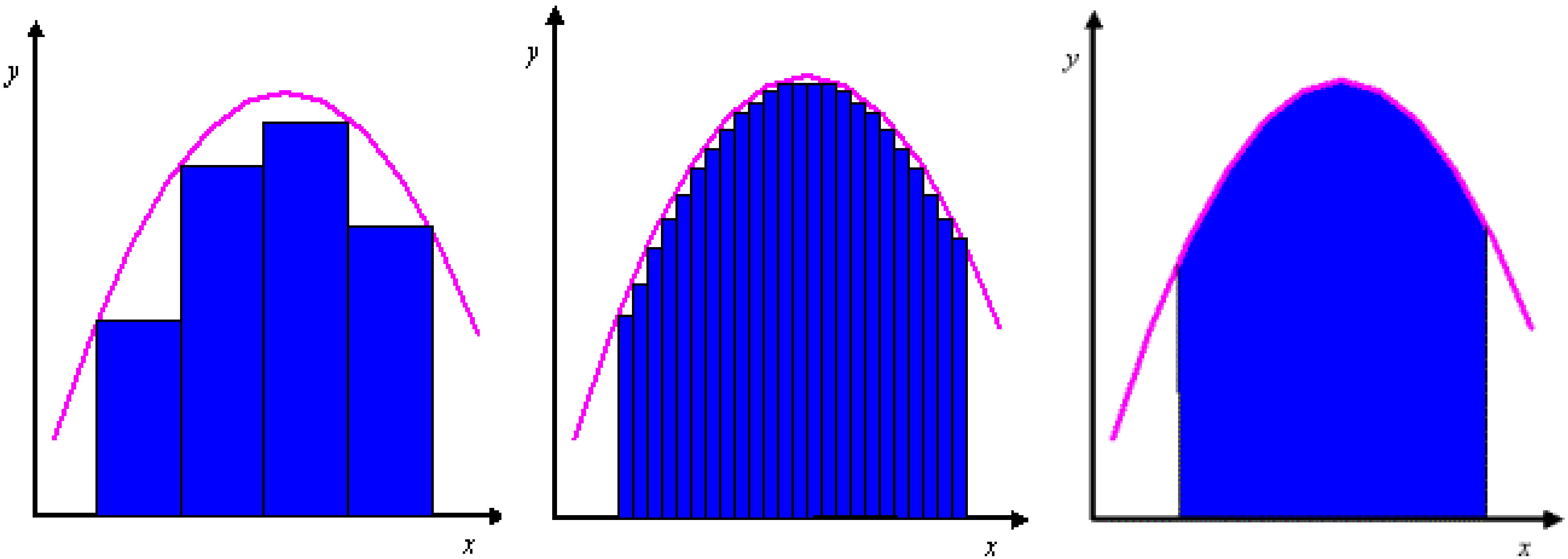
Dada $f(x)$ contínua, $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$, achar a área entre o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ e o eixo x.



Cálculo de áreas: Método dos retângulos;

Método das antiderivadas.

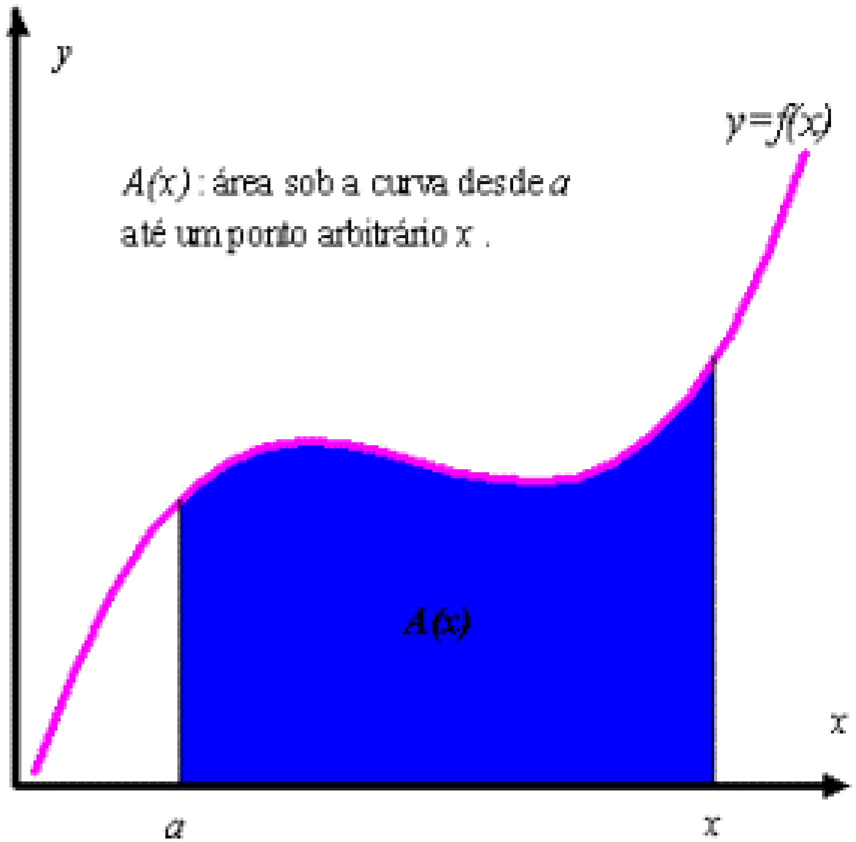
Método dos retângulos



Cálculo de áreas: Método dos retângulos;

Método das antiderivadas.

Método das antiderivadas

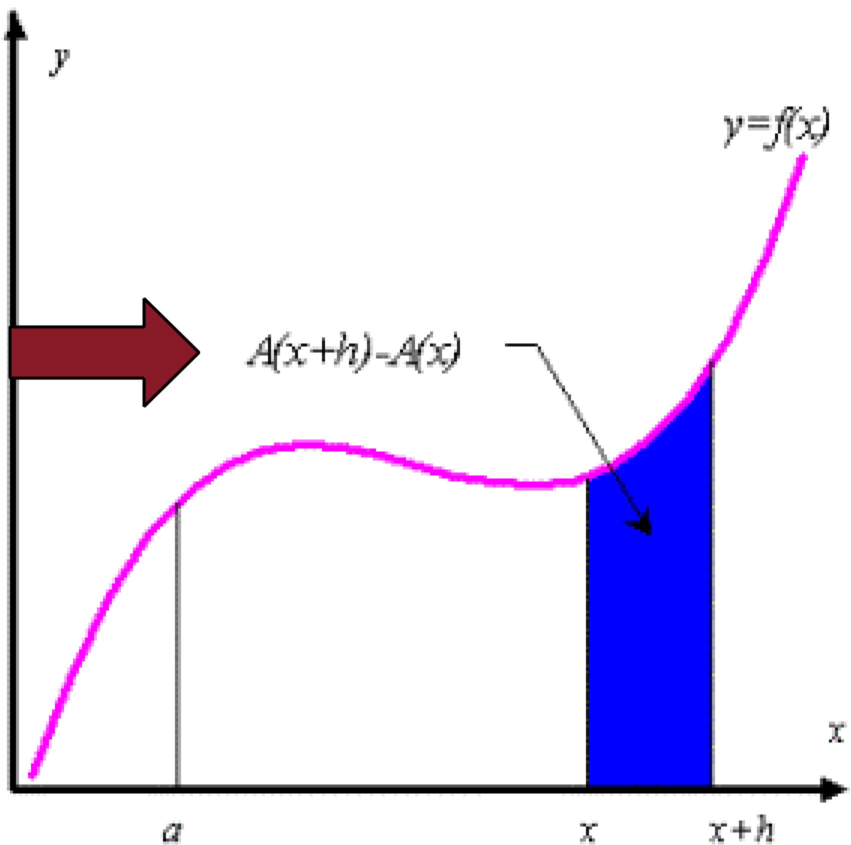


$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Cálculo de áreas: Método dos retângulos;

Método das antiderivadas.

<u>Método das antiderivadas</u>

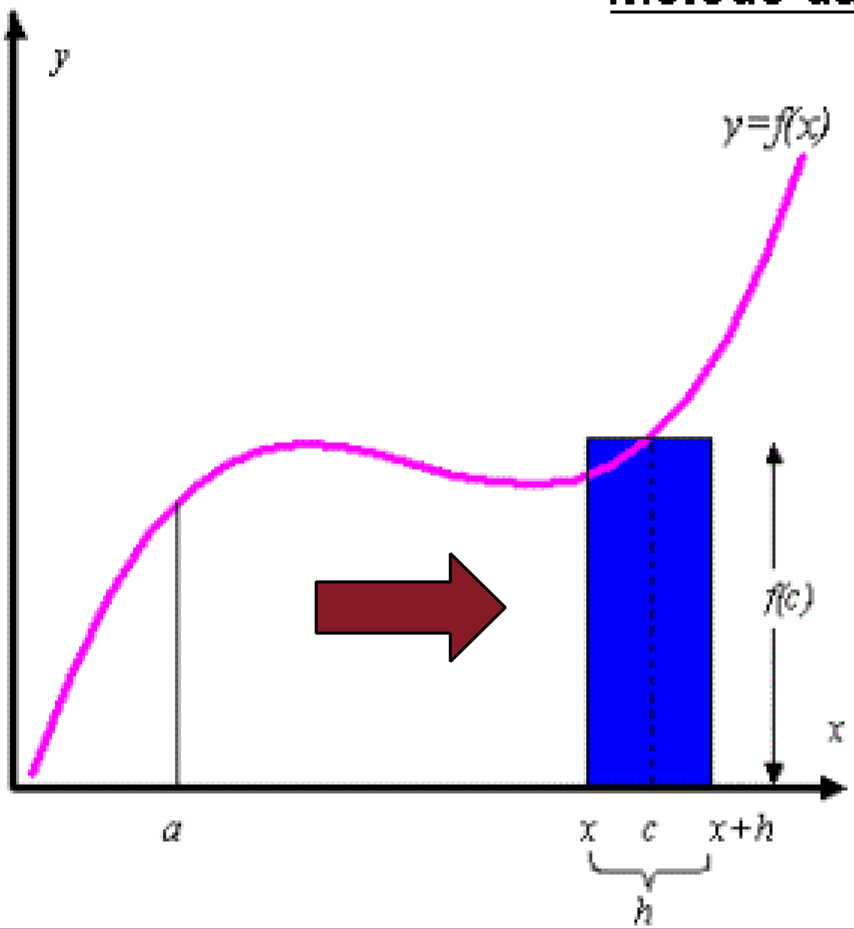


$$A'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

Cálculo de áreas: Método dos retângulos;

Método das antiderivadas.

Método das antiderivadas



$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h} \approx \frac{f(c).h}{h} = f(c)$$

$$A'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A(x+h)-A(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$$

mas, $\lim_{h\to 0} f(c) = f(x)$

$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$

Cálculo de áreas: Método dos retângulos;

Método das antiderivadas.

Método das antiderivadas

Vimos da relação $A'(x) = f(x)$ que a derivada da função área $A(x)$ é a função $f(x)$.

Portanto, se encontrarmos a função cuja derivada é $f(x)$ saberemos a expressão para a área $A(x)$.

Veremos, a partir de agora, como isto é feito.

A Integral Indefinida

Definição 5.1: Seja f uma função real de uma variável real. Uma função F é chamada *antiderivada de f em um intervalo I* se $F'(x) = f(x)$ para todo x em I.

Exemplo 5.1

As funções $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$ e $G(x) = \frac{x+1}{x-1} + 6$

são antiderivadas da função $f(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$ no intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

De fato, para todo x no intervalo $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$$F'(x) = G'(x) = \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} \quad \leftarrow \text{regra do quociente e da constante}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

■

Teorema 5.1: Seja f uma função real de uma variável real. Se F é uma antiderivada de f no intervalo I, então para qualquer constante c a função cuja lei é $F(x) + c$ é também uma antiderivada de f em I. Além disso, cada antiderivada de f no intervalo I pode ter sua lei expressa na forma $F(x) + c$, escolhendo-se apropriadamente a constante c.

O processo de encontrar antiderivadas é chamado *integração* ou *antidiferenciação*.

Logo se, para todo x no intervalo I, $\frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$, então integrando-se (ou antidiferenciando-se) $f(x)$, obtém-se as antiderivadas $F(x)+c$, para todo x em I. Denota-se este procedimento do seguinte modo:

integração de $f(x)$ em relação a x

$$\int \overbrace{f(x)\,dx}^{} = F(x) + c, \text{ para todo } x \text{ em } I$$

sinal de integração
ou
integral indefinida

constante de integração

integrando

"a integração de $f(x)$ em relação a x é igual a $F(x) + c$"

Exemplo 5.2

No Exemplo 5.1 verificamos que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x+1}{x-1}\right]=\frac{-2}{(x-1)^2},\text{ para todo } x \text{ em } (-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

Logo,

$$\int\frac{-2}{(x-1)^2}\,dx=\frac{x+1}{x-1}+c,\quad \text{para todo } x \text{ em } (-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$ ■

Ressaltamos que:

$$\underbrace{\forall\, x \in I,\ \frac{d}{dx}\left[F(x)\right]=f(x)}_{\text{Regra de Diferenciação}} \Rightarrow \underbrace{\int f(x)\,dx = F(x)+c, \forall\, x \in I.}_{\text{Regra de Integração}}$$

Exemplo 5.3

Pela regra da potência (Teorema 3.3) sabemos que:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\alpha}\right)=\alpha\, x^{\alpha-1}, \text{ na qual } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Logo, tomando $\alpha := \beta + 1$, na qual $\beta\in\mathbb{R}$ com $\beta\neq -1$, obtém-se

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\right)=\frac{(\beta+1)\,x^{(\beta+1)-1}}{\beta+1}=x^{\beta},$$

e portanto a ***regra da potência para integração*** é:

$$\boxed{\int x^{\beta}\,dx=\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}+c, \text{ na qual } \beta\in\mathbb{R} \text{ com } \beta\neq -1.}$$

■

Exemplo 5.4

Vamos aplicar a regra da potência para integração.

1) $$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c$$

$$= \frac{x^4}{4} + c.$$

2) $$\int 1\,dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c$$ $\longrightarrow$ $\int 1\,dx$ **pode ser escrito como** $\int dx$

$$= x + c.$$

3) $$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$ $\longrightarrow$ $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ **pode ser escrito como** $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$

$$= \frac{t^{\frac{-1+2}{2}}}{\frac{-1+2}{2}} + c = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{t} + c. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.1: Sejam f e g duas funções reais de um variável real.

1) Regra da homogeneidade: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$,

na qual $c \in \mathbb{R}$ é constante.

2) Regra da adição: $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

3) Regra da diferença: $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$.

Exemplo 5.5

$$\boxed{\int \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2}\,dx = ?}$$

Notamos, em primeiro lugar que

$$\frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2} = x^2 + 3 + 5x^{-2}$$

e portanto

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 + 5}{x^2}\,dx = \int \left(x^2 + 3 + 5x^{-2}\right)dx$$

$$= \int x^2\,dx + \int 3\,dx + \int 5x^{-2}\,dx \leftarrow \text{ regras da adição.}$$

Mas:

1) $\int x^2\,dx = \dfrac{x^3}{3} + c_1 \leftarrow$ regra da potência,

2) $\int 3\,dx = 3\int dx \leftarrow$ regra da homogeneidade,

$= 3\left(x + c_2\right) \leftarrow$ regra da potência (ver Exemplo 5.4),

3) $\int 5x^{-2}\,dx = 5\int x^{-2}\,dx \leftarrow$ regra da homogeneidade,

$= 5\left(\dfrac{x^{-1}}{-1} + c_3\right) \leftarrow$ regra da potência.

Logo, obtém-se

$$\int \frac{x^4 + 3x^2 - 5}{x^2}\,dx = \frac{x^3}{3} + 3x - \frac{5}{x} + c. \qquad \blacksquare$$

Integração por Substituição

Suponha que conhecemos a função real de uma variável real $\hat{f}$ e que *sabemos calcular a função* $\hat{F}$ tal que

$$\int \hat{f}(u)\,du = \hat{F}(u) + c_1, \text{ para todo } u \text{ em } \hat{I}.$$

Suponha, também, que conhecemos a função real de uma variável real f e que *queremos calcular a função* F tal que

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c_2, \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

Se *encontramos* uma função real de uma variável real g,

$$g : I \to \hat{I}$$
$$x \mapsto u = g(x),$$

diferenciável em I, tal que

$$\boxed{f(x) = (\hat{f} \circ g)(x)\,g'(x), \text{ para todo } x \text{ em } I,}$$

então $\boxed{F(x) = (\hat{F} \circ g)(x), \text{ para todo } x \text{ em } I.}$

De fato. Para todo x em I

$$(\hat{F}\circ g)'(x) = \hat{F}'\big(g(x)\big)g'(x) \;\leftarrow\; \text{Regra da Cadeia (Teorema 3.6)}$$

$$= \hat{f}\big(g(x)\big)g'(x) \;\leftarrow\; \text{pois } \int \hat{f}(u)\,du = \hat{F}(u) + c$$

$$= \big(\hat{f}\circ g\big)(x)\,g'(x).$$

Conseqüentemente

$$\int \big(\hat{f}\circ g\big)(x)\,g'(x)\,dx = (\hat{F}\circ g)(x) + c.$$

Logo, uma vez que $\boxed{f(x) = (\hat{f}\circ g)(x)\,g'(x), \text{ para todo } x \text{ em } I,}$ **então**

$$\int \big(\hat{f}\circ g\big)(x)\,g'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = (\hat{F}\circ g)(x) + c.$$

Neste caso $f(x)=\sqrt{7x+2}$.

Vamos escolher $u=g(x):=7x+2 \;\Rightarrow\; g'(x)=7$.

Vamos definir $\hat{f}(u):=\dfrac{\sqrt{u}}{7}$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(x)\,g'(x)=\underbrace{\left[\frac{\sqrt{(7x+2)}}{7}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(x)}\underbrace{7}_{g'(x)}=f(x).$$

Por outro lado,

$$\int \frac{\sqrt{u}}{7}\,du=\frac{1}{7}\int \sqrt{u}\,du \;\leftarrow \text{ regra da homogeneidade}$$

$$=\frac{1}{7}\int u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{7}\,\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)}+c_1 \;\leftarrow \text{ regra da potência}$$

$$=\frac{2}{21}u^{\frac{3}{2}}+c_1 \;\Rightarrow\; \hat{F}(u):=\frac{2}{21}u^{\frac{3}{2}}$$

e portanto

$$\int \sqrt{7x+2}\,dx=\left(\hat{F}\circ g\right)(x)+c=\frac{2}{21}(7x+2)^{\frac{3}{2}}+c=\frac{2}{21}\sqrt{(7x+2)^3}+c. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 5.6

$$\boxed{\int \sqrt{7x+2}\,dx=?}$$

Exemplo 5.7

$$\boxed{\int \frac{x^2\,dx}{\left(x^3+4\right)^5} = ?}$$

Neste caso $f(x) = \dfrac{x^2}{\left(x^3+4\right)^5}$.

Vamos escolher $u = g(x) := x^3 + 4 \;\Rightarrow\; g'(x) = 3x^2$.

Vamos definir $\hat{f}(u) := \dfrac{1}{3u^5}$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(x)\,g'(x) = \underbrace{\left[\frac{1}{3\left(x^3+4\right)^5}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(x)}\underbrace{3x^2}_{g'(x)} = f(x).$$

Por outro lado,

$$\int \frac{1}{3u^5}du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^5}du \;\leftarrow \text{regra da homogeneidade}$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{-5}\,du = \frac{1}{3}\,\frac{u^{-5+1}}{\left(-5+1\right)} + c_1 \;\leftarrow \text{regra da potência}$$

$$= -\frac{1}{12}u^{-4} + c_1 \;\Rightarrow\; \hat{F}(u) := -\frac{1}{12}u^{-4}$$

e portanto

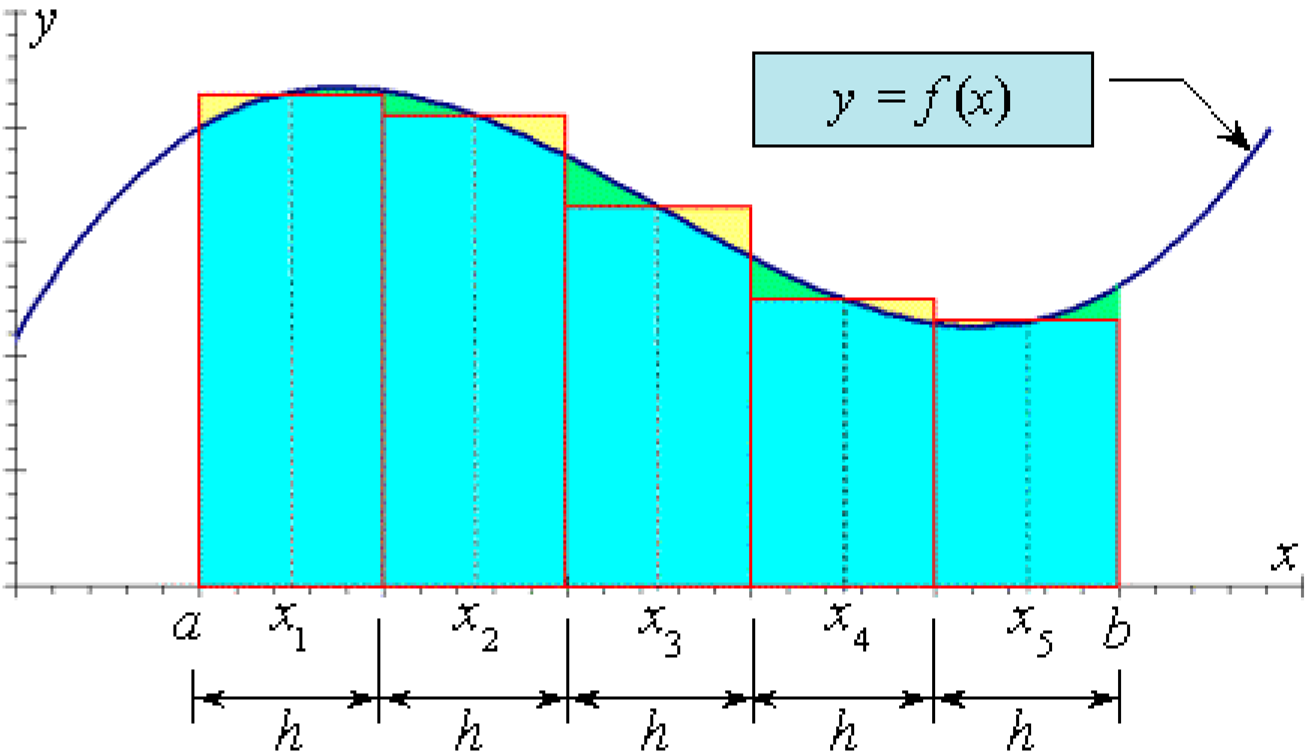
$$\int \frac{x^2}{\left(x^3+4\right)^5}dx = \left(\hat{F}\circ g\right)(x) + c = -\frac{1}{12}\left(x^3+4\right)^{-4} + c = -\frac{1}{12\left(x^3+4\right)^4} + c.$$

■

A Integral Definida

Definição 5.2: Seja f uma função real de uma variável real. Se f é contínua em $I=[a,b]$ e $f(x)\geq 0$ para todo x em I, então a *área* sob a curva $y=f(x)$ no intervalo I é definida por

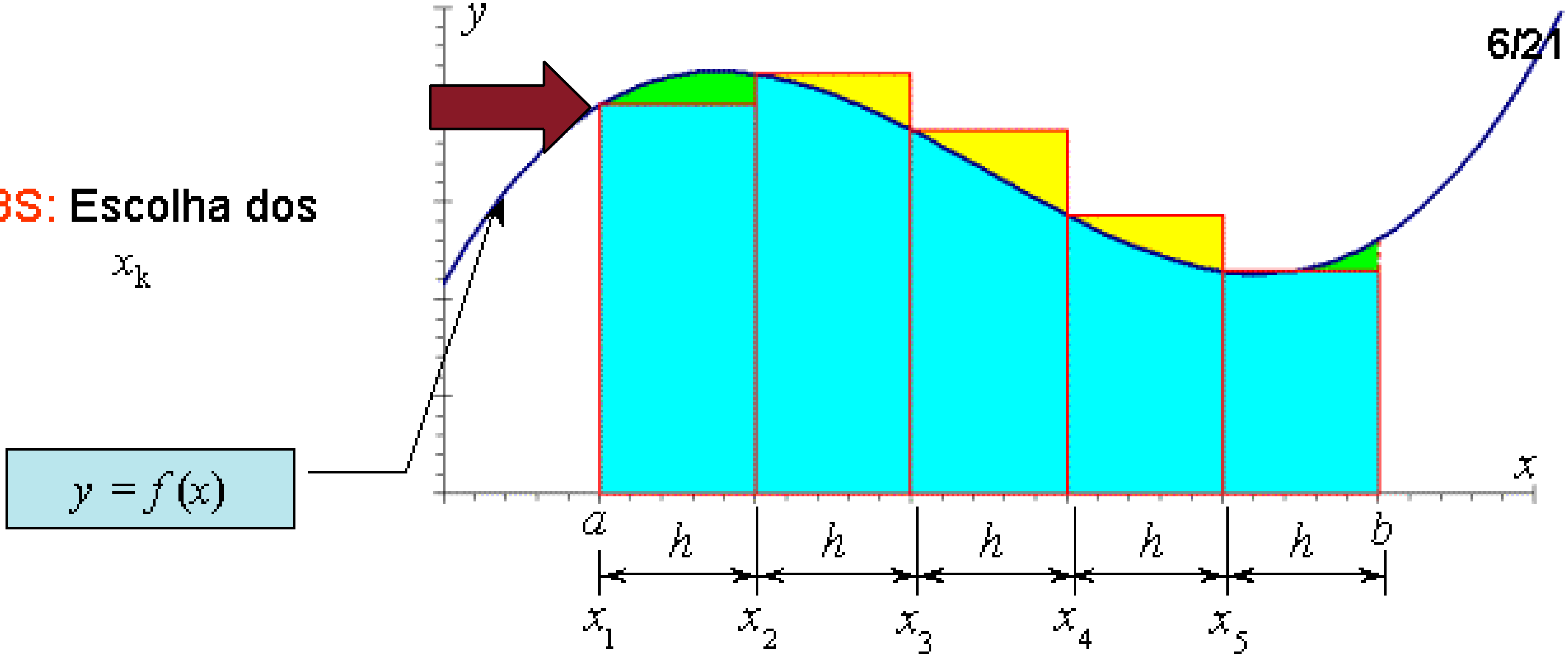
$$A := \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right].$$

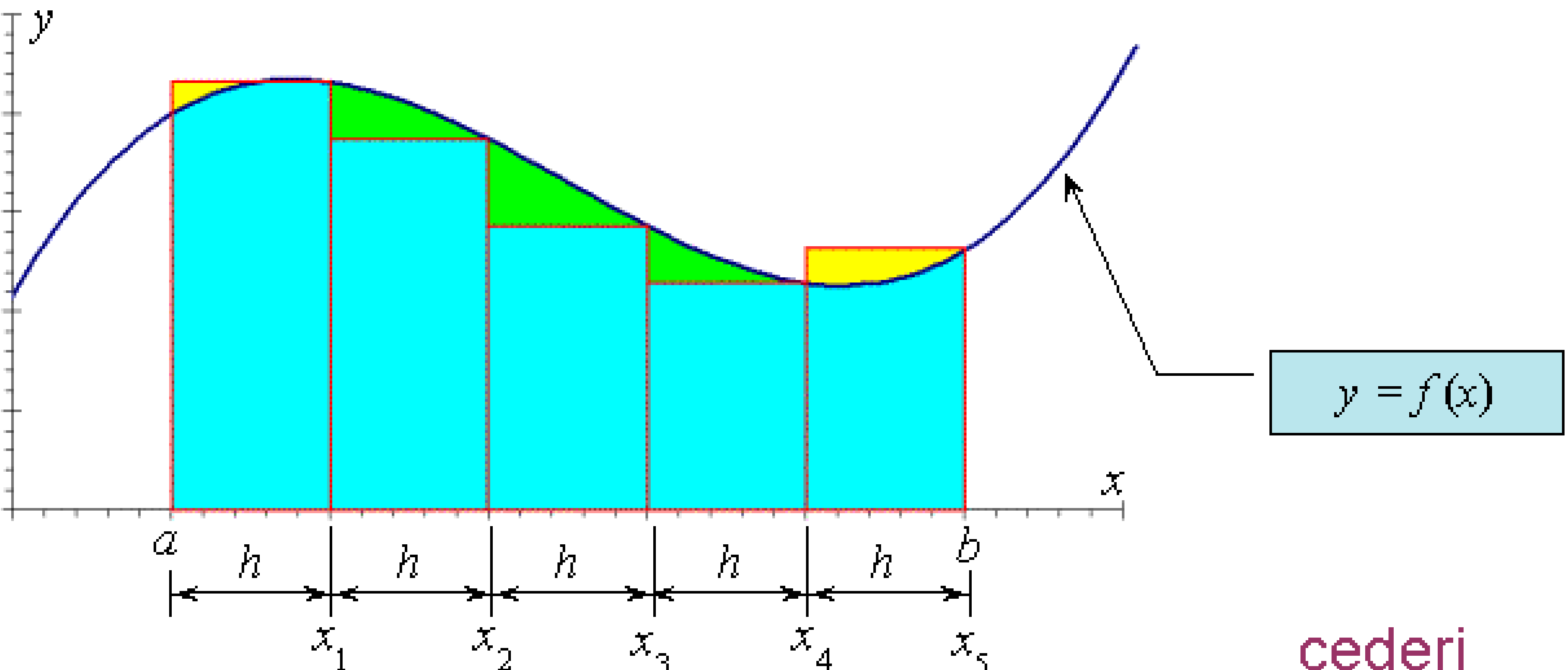


Na figura:

$$h=\frac{b-a}{5}$$

OBS: Escolha dos x_k

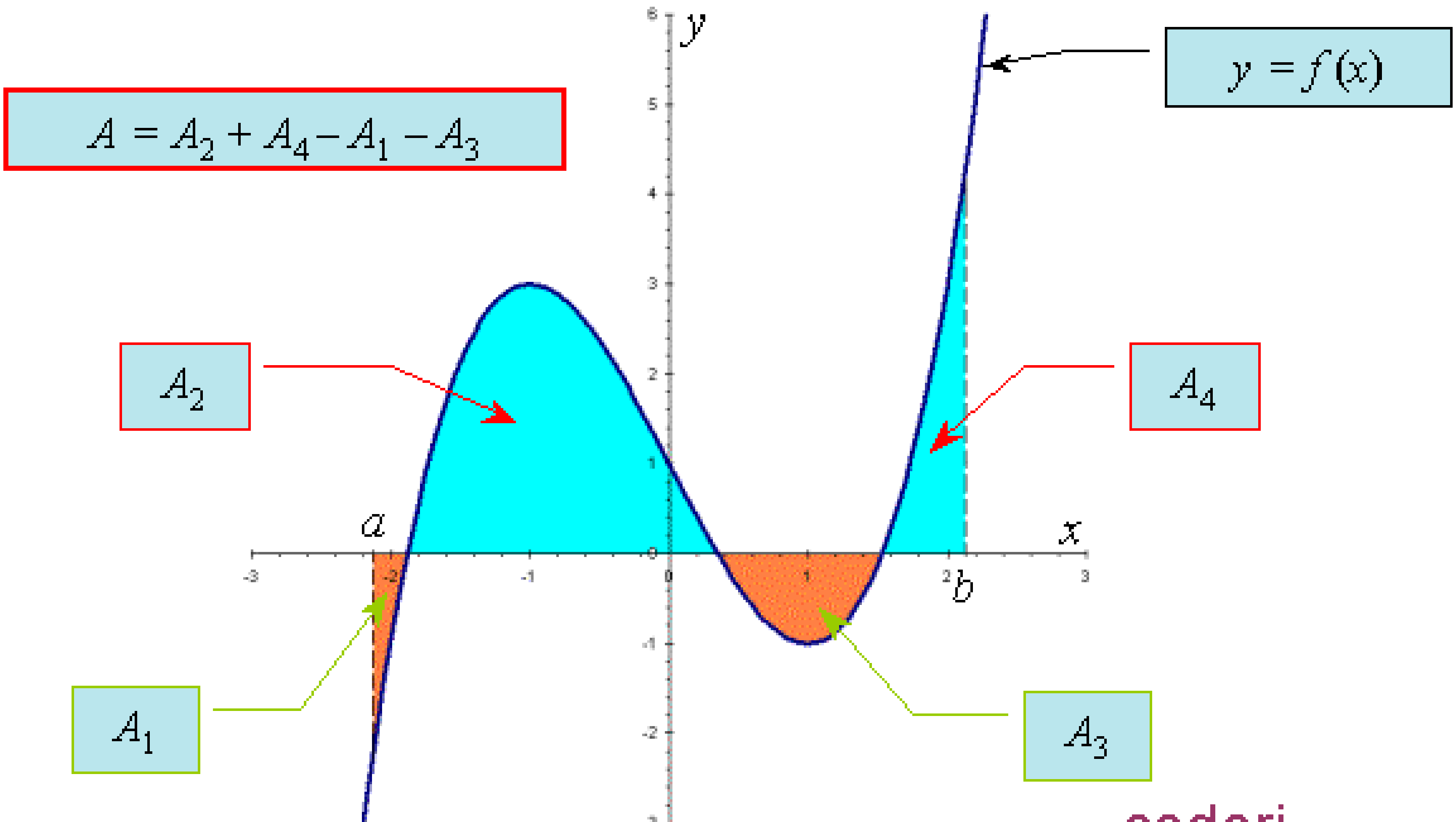




Definição 5.3: Seja f uma função real de uma variável real. Se f é contínua em $I = [a,b]$, então

$$A := \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

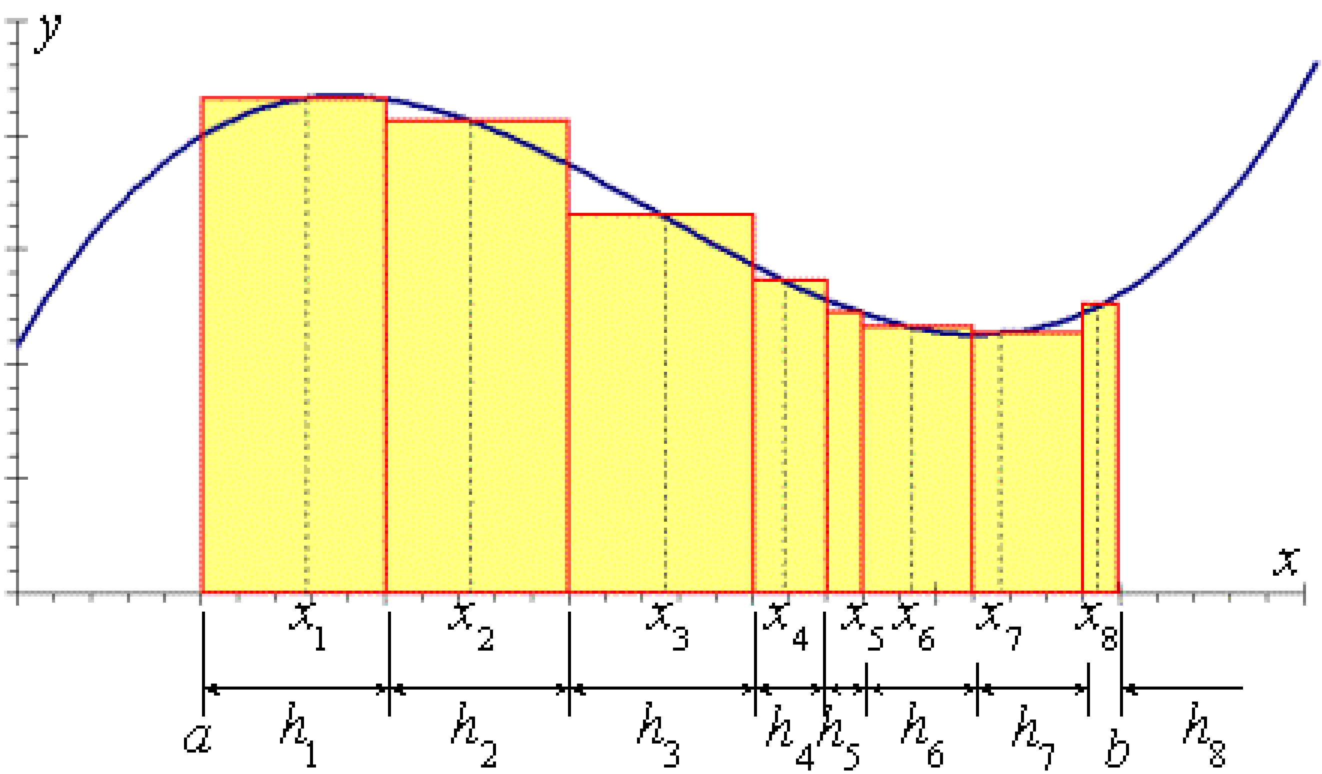
é chamado *área líquida com sinal da curva $y = f(x)$ no intervalo I*.



Uma *partição* de um intervalo $[a,b]$ é o conjunto constituído por todos os intervalos fechados obtidos ao subdividir-se $[a,b]$ em n subintervalos.

Denotaremos por h_k o comprimento do k-ésimo subintervalo da partição. Denotaremos por h_{max} o maior h_k da partição. h_{max} é chamado *tamanho da malha da partição*.

Exemplo de uma partição de um intervalo $[a,b]$, mostrando os retângulos construídos a partir dela para aproximar a área sob a curva $y = f(x)$ de $x = a$ até $x = b$, é ilustrado abaixo.



OBS:

$h_{max} = h_1$

Definição 5.4: Seja f uma função real de uma variável real. Dizemos que f é *integrável à Riemann* ou, simplesmente, *integrável em um intervalo finito e fechado* $[a,b]$, se o limite

$$\lim_{h_{max} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) h_k$$

existir e não depender da escolha da partição de $[a,b]$ ou do ponto x_k do k-ésimo subintervalos, de comprimento h_k, da partição.

O limite da definição acima é denotado pelo símbolo

limite superior de integração

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

limite inferior de integração

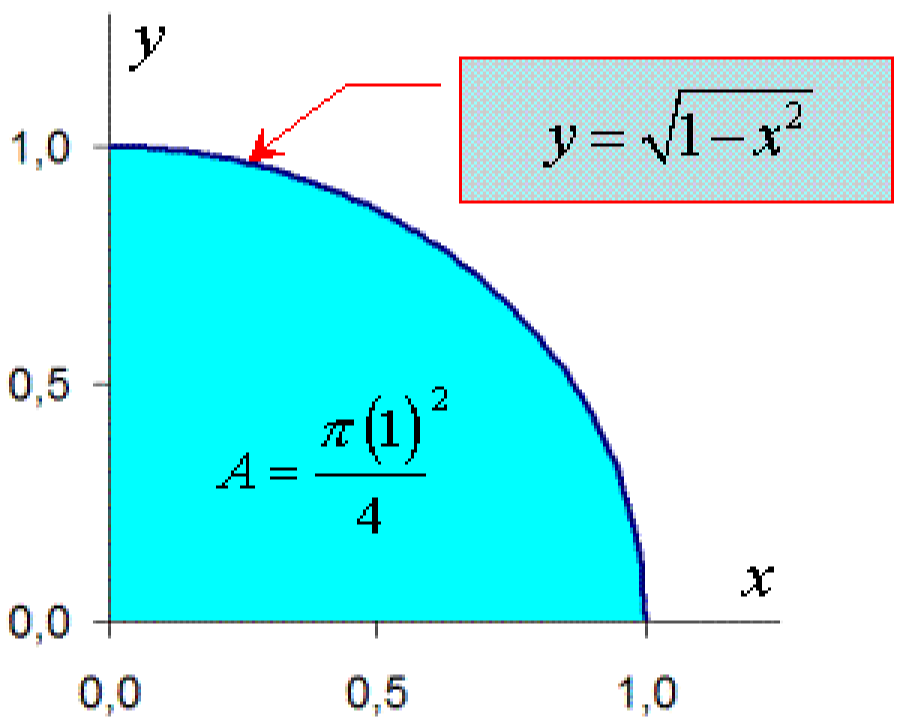
integrando

que é chamado de *integral definida* de f de a até b.

Interpretação geométrica da *integral definida de f de a até b*

Geometricamente, a integral definida de f de a até b é a **área líquida com sinal** da curva $y = f(x)$ no intervalo $[a,b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo x em $[a,b]$, então a integral definida de f de a até b é a *área* sob a curva $y = f(x)$ no intervalo $[a,b]$.

Exemplo 5.8



$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

■

Definição 5.5: Seja f uma função real de uma variável real.

a) Se a estiver no domínio de f, define-se:

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0.$$

b) Se f for integrável em $[a,b]$, então define-se:

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemplo 5.9

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx := -\int_1^0 \sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}. \qquad \blacksquare$$

Definição 5.5 - b

Exemplo 5.8

Condições para a *integrabilidade*

Definição 5.6: Seja f uma função real de uma variável real. Dizemos que f é *limitada em um intervalo I* se existir um número M positivo tal que

$$-M \leq f(x) \leq M$$

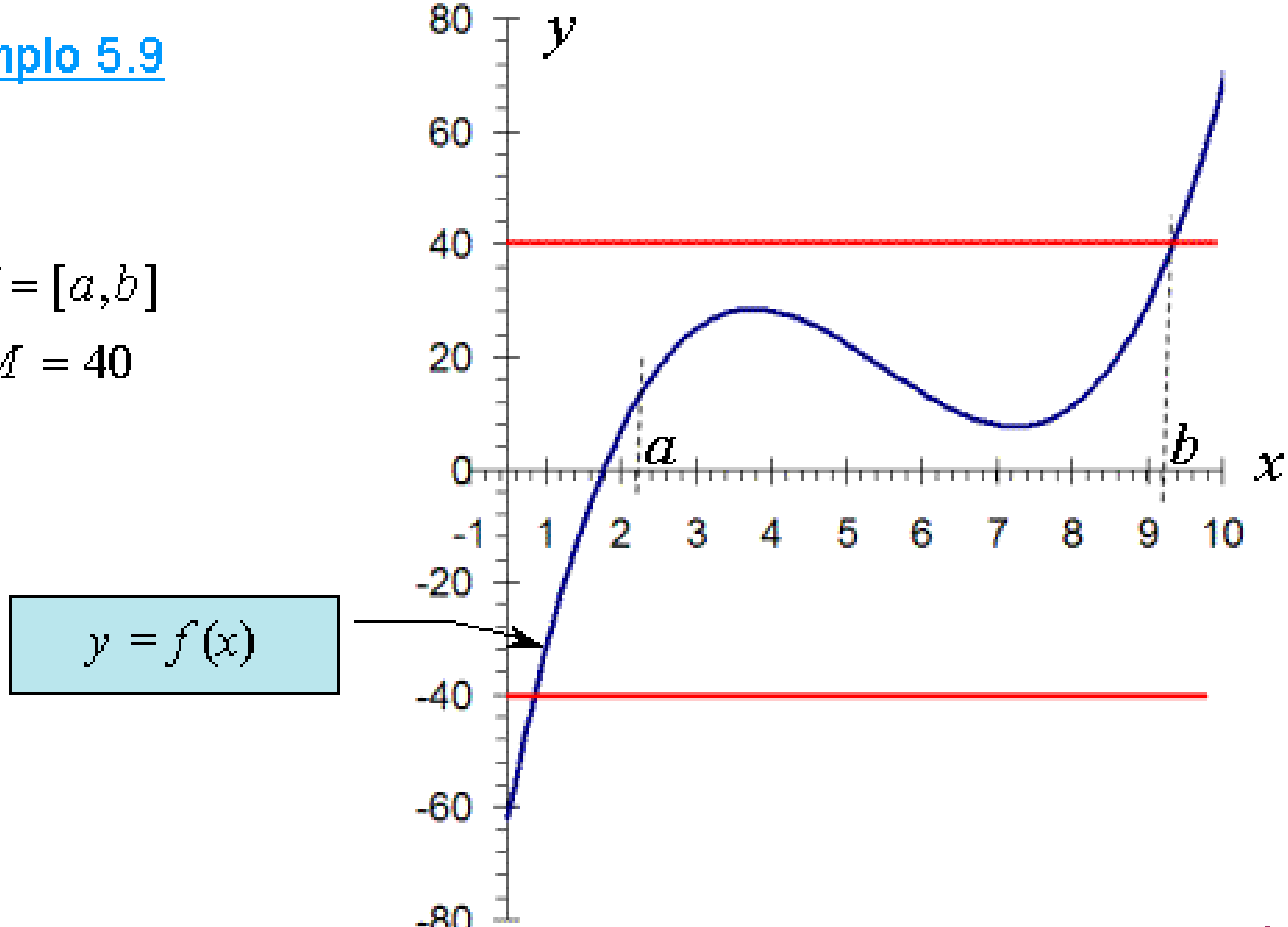
para todo x em I.

Geometricamente, dizer que f é *limitada* em um intervalo I, significa que o gráfico de f no intervalo I fica entre as retas $y = -M$ e $y = M$.

Exemplo 5.9

$I = [a,b]$

$M = 40$



Teorema 5.2: Seja f uma função real de uma variável real e seja $[a,b]$ um intervalo fechado contido no domínio de f.

a) Se f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

b) Se f tem um número finito de descontinuidades em $[a,b]$, mas é limitada em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.

c) Se f não é limitada em $[a,b]$, então f não é integrável em $[a,b]$.

Propriedades da *integral definida*

Teorema 5.3: Sejam f e g funções reais de uma variável real e c uma constante. Se f e g são integráveis em $[a,b]$, então as funções $cf, f+g$ e $f-g$ são também integráveis em $[a,b]$ e

a) $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$$

b) $$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

c) $$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx.$$

Teorema 5.4: Seja f uma função real de uma variável real. Se f é integrável em um intervalo fechado que contém os pontos a, b e c, então

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

não importando como os pontos estão ordenados.

Teorema 5.5: Seja f e g funções reais de uma variável real.

a) Se f é integrável em $[a,b]$ e $f(x) \geq 0$ para do x em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

b) Se f e g são integráveis em $[a,b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para do x em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Resumo

- Cálculo de áreas;
- Antiderivadas;
- Integração (antiderivação);
- Regras de integração;
- Integração por substituição;
- Integrais definidas;
- Integral de Riemann;
- Áreas e integrais definidas;
- Condições para integrabilidade;
- Propriedades da integral definida.