Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
Gabarito AP3 - 2° semestre de 2008

Nome –

Assinatura –

Observações:
1.Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.
2.Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
3.Você pode usar lápis para responder as questões.
4.Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
5.Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

1. (2.0 pontos)
Faça um gráfico da função $f(x) = -x^2 + x + 2$. Calcule todos os pontos de interseção com os eixos X e Y, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão.

Solução:

Interseções com o eixo Y, $(x = 0)$:

$$f(0) = -0^2 + 0 + 2 = 2$$

Interseções com o eixo X, $(y = 0)$:

$$f(x) = 0$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$-(x+1)(x-2)=0$

$x=-1$ ou $x=2$

pontos $(-1,0)$ e $(2,0)$

Estudo das derivadas:

$f(x)=-x^2+x+2$

$f'(x)=-2x+1$

$f''(x)=-2$

Pontos de máximos e mínimos:

$f'(x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$f'(x)<0$

$-2x+1<0$

$-2x<-1$

$2x>1$

$x>\frac{1}{2}$

$f'(x)>0$

$-2x+1>0$

$-2x>-1$

$2x<1$

$x<\frac{1}{2}$

logo:

$$f'(x) < 0 \longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

$$f'(x) > 0 \longleftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

existe um ponto de máximo em $x = \frac{1}{2}$, ponto $(\frac{1}{2}, 0)$.

Pontos de Inflexão:

$$f''(x) = 0$$

$-2 = 0$ não existe ponto de inflexão

2. (1.0 ponto)

Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, calcule a função composta $(f \circ g)(x)$ e sua derivada de segunda ordem:

$$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = 2x + 1$$

$$\frac{d^2(f \circ g(x))}{dx^2} =?$$

Solução:

$$f(x) = x^2 \ ; g(x) = 2x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{d(f \circ g(x))}{dx} =?$$

$$\frac{d(f \circ g(x))}{dx} = 8x + 4$$

$$\frac{d^2(f \circ g(x))}{dx^2} = 8$$

3. (1.0 ponto)

Calcule as integrais definidas:

(a) $$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx =$$

(b) $$\int_0^1 (x^2 - x^3)dx =$$

Solução:

(a) $$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 4 \times \frac{x^2}{2} - 3x + C$$

$$= -\frac{3^3}{3} + 4 \times \frac{3^2}{2} - 3.3 - \left(-\frac{1^3}{3} + 4 \times \frac{1^2}{2} - 3.1\right)$$

$$= -9 + 4 \times \frac{9}{2} - 9 - \left(-\frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} - 3\right)$$

$$= -9 + 18 - 9 + \frac{1}{3} - 2 + 3$$

$$= \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{4}{3}$$

(b) $$\int_0^1 (x^2 - x^3)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)_0^1$$

$$= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right) - \left(\frac{0^3}{3} - \frac{0^4}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{12}$$

4. (1.5 ponto)

Calcule a derivada de ordem superior da função inversa de $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\frac{d^3(f^{-1}(x))}{dx} = ?$$

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) = ?$$

$$y = \frac{1}{x}$$

trocando a variável x pela variável y, obtemos:

$$x = \frac{1}{y}$$

isolando y, temos:

$$y = \frac{1}{x}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

Dessa forma, a derivada $\frac{d^3}{dx^3}$ de $f^{-1}(x)$ é dada por:

$$\frac{d(f^{-1}(x))}{dx} =$$

$$= \frac{(1)'(x) - (x)'.1}{x^2}$$

$$= \frac{0'(x) - 1.1}{x^2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d^2(f^{-1}(x))}{dx^2} =$$

$$= -\left[\frac{(1)'(x^2) - (x^2)'.1}{x^4}\right]$$

$$= -\left[\frac{0.(x^2) - (2x).1}{x^4}\right]$$

$$= \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{d^3(f^{-1}(x))}{dx^3} =$$

$$= \frac{(2)'.x^3 - (x^3)'.(2)}{x^6}$$

$$= \frac{0.x^3 - (3x^2).(2)}{x^6}$$

$$= \frac{-6x^2}{x^6}$$

$$= -\frac{6}{x^4}$$

5. (1.5 ponto)

Seja R a região sob a curva da função $f(x) = 2x + 1$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$. Calcule a área da região R.

Solução:

$$A = \int_1^3 (2x+1)dx = \left[2\frac{x^2}{2} + x + C\right]_1^3$$

$$= \left[x^2 + x + C\right]_1^3$$

$$= 3^2 + 3 + C - (1^2 + 1 + C)$$

$$= 9 + 3 - (1 + 1)$$

$$= 10$$

6. (1.5 ponto)

Seja R a região entre o eixo X, a curva $y = x^3$ e $x = 1$. Encontre o volume do sólido obtido quando esse gráfico é girado em torno do eixo X. Esboce o sólido.

Solução:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2$$

$$= \pi \int_0^1 [y]^2$$

$$= \pi \int_0^1 [x^3]^2$$

$$= \pi \int_0^1 x^6$$

$$= \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{1^7}{7} - \frac{0^7}{7}\right]$$

$$= \pi \frac{1}{7}$$

7. (1.5 ponto)

Calcule os limites abaixo utilizando a regra de L'Hopital:

(a) $\lim_{x \to 3} \left(\frac{x^3 - 27}{x - 3}\right) =$

(b) $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) =$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^3-27}{x-3}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{(x^3-27)'}{(x-3)'}\right)$$

$$=\lim_{x\to 3}\left(\frac{3x^2}{1}\right)$$

$$=3.3^2$$

$$=27$$

(b) $$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}-\frac{\frac{1}{x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}-x$$

$$=0$$