Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2^o semestre de 2014 - Gabarito

Questões

1. (2,50 pontos) ————————————————————————————

Esboce o gráfico da função $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$.

Solução:

Primeira Derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

Os candidatos a extremos locais são os pontos aonde a primeira derivada da função se anula ou aonde não está definida. Isto é

$$f'(x) = 0 \implies f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \implies f' \text{ não está definida para } x = 0$$

$$\text{e } f' \text{ se anula para } x = -1 \text{ e } x = 1$$

logo os extremos locais podem ocorrer em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$. O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada na região de interesse.

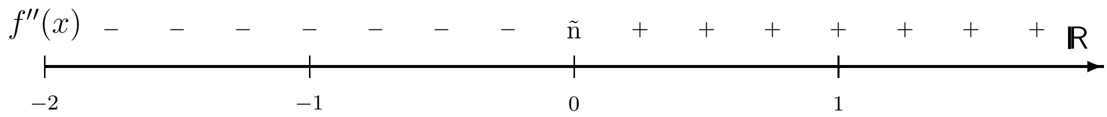
$f'(x)$	+	+	+	0	−	−	−	ñ	−	−	−	0	+	+	+	$\mathbb{R}$
-2				-1				0				1				

Logo $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1)$ e $(1, \infty)$ e é decrescente em $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. O ponto de máximo local é $(-1,\ -2)$. O ponto de mínimo local é $(1,\ 2)$.

Segunda Derivada:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

Não há pontos de inflexão já que f'' nunca se anula. Vejamos agora o sinal da segunda derivada. $f''(x) > 0$ quando $x > 0$ e $f''(x) < 0$ quando $x < 0$. O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada no região de interesse.



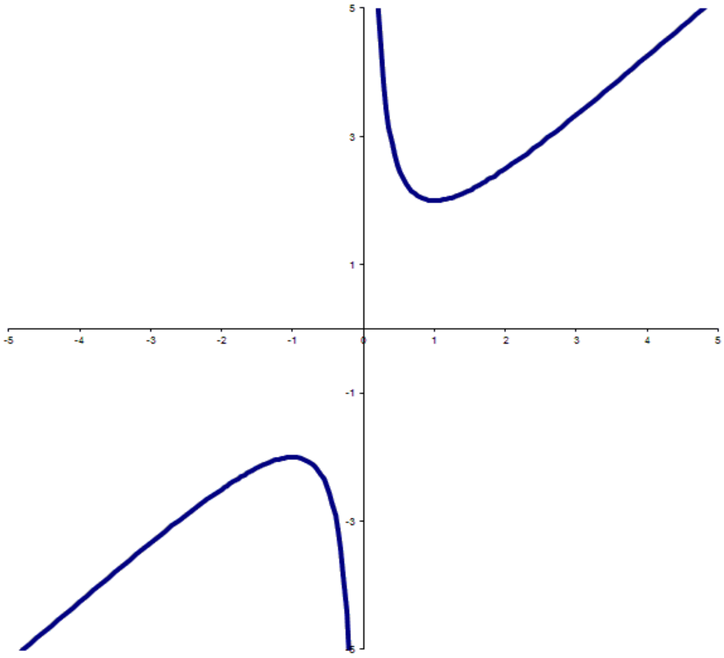
Portanto $f(x)$ é concava para cima quando $x > 0$.
E $f(x)$ é concava para baixo quando $x < 0$.

Observe ainda que

$$\lim_{x\to 0^-} \left[x + \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^-} x + \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \left[x + \frac{1}{x}\right] = \lim_{x\to 0^+} x + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



2. (2,50 pontos)

Ache as seguintes antiderivadas:

(a) $\displaystyle\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx$

(c) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$

Solução:

(a)
$$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (1-x)x^{1/2}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

(b) $$\int (x^3+2)^{1/2} x^2\, dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{1/2} 3x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{(x^3+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left\{\frac{(x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right\} + C$$

$$= \frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{2}} + C$$

(c) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}\; x\, dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{1-x^2}\;(-2x)\, dx$$

Com $u = 1 - x^2$, $\frac{du}{dx} = -2x$ e substituindo na integral

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}\; x\, dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4}\right] + C$$

$$= -\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{8} + C$$

$$= -\frac{3\,(1-x^2)^{\frac{4}{3}}}{8} + C$$

(d) $$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C$$

3. (2,50 pontos)

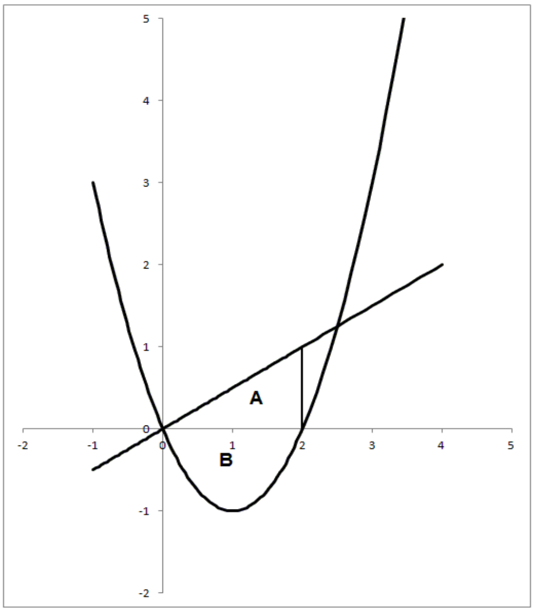
No plano cartesiano xy seja $\mathcal{R}$ a região entre o eixo x, a curva $y = x^3$ e a linha $x = 2$. Ache o volume do sólido gerado por revolução da região $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

Solução:

$$V = \int_0^2 \pi y^2\, dx = \int_0^2 \pi\left[x^3\right]^2\, dx = \pi\int_0^2 x^6\, dx = \pi\left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{\pi}{7}\left[\; 2^7 \;-\; 0^{78} \;\right] = \frac{\pi 128}{7}$$

4. (2,50 pontos)

Ache a área da região entre os gráficos de f e g no intervalo $[0, 2]$ onde $f(x) = x(x-2)$ e $g(x) = x/2$.



Solução:

Interseções entre as duas curvas:

$$f(x) = g(x) \implies x(x-2) = \frac{x}{2} \implies 2x^2 - 4x = x \implies 2x^2 - 5x = 0$$

$$x(2x-5) = 0 \implies x = 0 \text{ ou } x = \frac{5}{2}$$

A Área total será a soma das áreas das regiões A e B.

$$\text{Área} = \underbrace{\int_0^2 \left[\frac{x}{2}\right] dx}_{\text{área de A}} - \underbrace{\int_0^2 [x(x-2)]\, dx}_{\text{área de B}}$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{x}{2}\right] dx - \int_0^2 \left[x^2 - 2x\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2^2}{4} - \frac{0^2}{4}\right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 - \frac{0^3}{3} + 0^2\right]$$

$$= \left[\frac{2^2}{4}\right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2\right]$$

$$= \left[\frac{4}{4}\right] - \left[\frac{8}{3} - 4\right]$$

$$= \left[\frac{4}{4}\right] - \left[-\frac{4}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{4}{4}\right] + \left[\frac{4}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{12}{12}\right] + \left[\frac{16}{12}\right]$$

$$= \frac{12 + 16}{12}$$

$$= \frac{28}{12}$$

$$= \frac{7}{3}$$