Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática Para Computação
AP2 - 1º semestre de 2007 - Gabarito

1. (2,0 pontos) ———

   Verifique os intervalos onde as funções abaixo são crescentes ou decrescentes e dê os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de cada uma delas:

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

   (b) $f(x) = x^3$

   Solução: ———

   (a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

   $f^{'}(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

   $f^{'}(x) < 0 \; se \; -\infty < x < 2$

   $f^{'}(x) > 0 \; se \; 2 < x < +\infty$

   Como f é contínua em $x = 2$, deduz-se do Teorema 5.1.2 que:

   f é decrescente em $(-\infty, 2]$

   f é crescente em $[2, \infty)$

   Concavidade

   $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f''(x) = 2$$

$$f''() > 0, \quad ' \forall x \in (-\infty, \infty)$$

Logo, a função f é côncava para cima no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e não possui ponto de inflexão.

(b)

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad 0 < x < +\infty$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{se} \quad -\infty < x < 0$$

pois f é contínua em $x = 0$.

f é crescente em $(-\infty, 0]$
f é crescente em $[0, +\infty)$

Logo,

f é crescente em todo o eixo x.

Concavidade

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{se} \quad x > 0$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{se} \quad x < 0$$

Logo, a função f é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 0)$ e côncava para cima em $(0, +\infty)$, possuindo ponto de inflexão em $(0, 0)$.

2. (1,5 ponto)

Calcule as seguintes antiderivadas:

(a) $$\int \frac{1}{x^5} dt =$$

(b) $$\int (x + x^2) dx =$$

(c) $$\int \cos(6x) dx =$$

Solução:

(a) $$\int \frac{1}{x^5} dx =$$

$$\int x^{-5} dx =$$

$$\frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4x^4} + C$$

(b) $$\int (x + x^2) dx =$$

$$= \int x dx + \int x^2 dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + C$$

(c) $$\int \cos(6x) dx =$$

$$= \int \cos u \frac{du}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \int \cos u \, du$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{sen} u + C$$

$$= \frac{1}{6} \operatorname{sen}(6x) + C$$

3. (1,5 ponto)

Utilizando as propriedades básicas da integral definida, calcule:

(a) $$\int_1^4 [3f(x) - g(x)]\, dx =$$

sabendo-se que $\int_1^4 f(x)dx = 2$ e $\int_1^4 g(x)dx = 10$

(b) $$\int_0^1 \left(5 - 3\sqrt{1-x^2}\right) dx =$$

Solução: ____

(a) $$\int_1^4 [3f(x) - g(x)]\, dx =$$

sabendo-se que $\int_1^4 f(x)dx = 2$ e $\int_1^4 g(x)dx = 10$

$$= 3\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx$$

$$= 3 \times (2) - (10) = 6 - 10 = -4$$

(b) $$\int_0^1 \left(5 - 3\sqrt{1-x^2}\right) dx =$$

$$= \int_0^1 5dx - 3\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \left.(5x)\right|_0^1 - 3.(\frac{\pi}{4})$$

$$= 5 - 3.\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{20 - 3\pi}{4}$$

onde: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx =$ é a área de um quarto de círculo de raio 1, que vale $\frac{1}{4}\pi(1^2) = \frac{\pi}{4}$

4. (2,0 pontos) ____

Esboce as regiões e calcule suas áreas:

(a) Região A: região entre a curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo x.

(b) Região B: região limitada pelas parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Solução: ____

(a) Região A: região entre a curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo x.

$$x^3 - 6x^2 + 8x = x(x^2 - 6x + 8) = x(x-2)(x-4)$$

Essa curva intercepta o eixo x em $x = 0, x = 2, x = 4$.

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]\Big|_0^2 - \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]\Big|_2^4$$

$$= 4 + 4 = 8$$

Calculamos 2 integrais separadamente uma vez que a parte da região com $2 \leq x \leq 4$ fica abaixo do eixo x; uma integral em relação a y entre $x = 0$ e $x = 2$ e outras com respeito a $-y$ entre $x = 2$ e $x = 4$.

Logo, a área da curva é dada por:

$$\int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)dx =$$

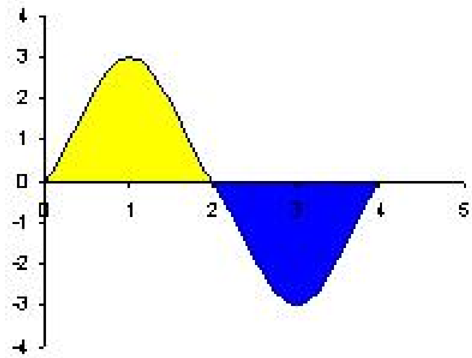
$$\int_0^2 x^3 dx - \int_0^2 6x^2 dx + \int_0^2 8x dx - \left[\int_2^4 x^3 - \int_2^4 6x^2 dx + \int_2^4 8x dx\right] =$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - 6\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + 8\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 - \left(\frac{x^4}{4}\Big|_2^4 - 6\frac{x^3}{3}\Big|_2^4 + 8\,\frac{x^2}{2}\Big|_2^4\right) =$$

$$= \frac{16}{4} - 6 \times \frac{8}{3} + 8 \times \frac{4}{2} - \left(\frac{256}{4} - \frac{16}{4} - 6 \times \left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right) + 8 \times \frac{16}{2} - 8 \times \frac{4}{2}\right)$$

$$= 4 - 16 + 16 - (64 - 4 - 128 + 64 + 16 - 16)$$

$$= 4 + 4 = 8$$



(b) Região B: região limitada pelas parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$.

Resolvendo $6x - x^2 = x^2 - 2x$, vemos que as parábolas se interceptam quando $x = 0$ e $x = 4$, isto é, $(0, 0),\ (4, 8)$. Completando quadrados, a primeira parábola tem a equação $y = 9 - (x - 3)^2$ que possui vértice em $(3, 9)$.

Dessa mesma forma, a segunda parábola possui a equação $y = (x - 1)^2 - 1$ que possui vértice $(1, -1)$.

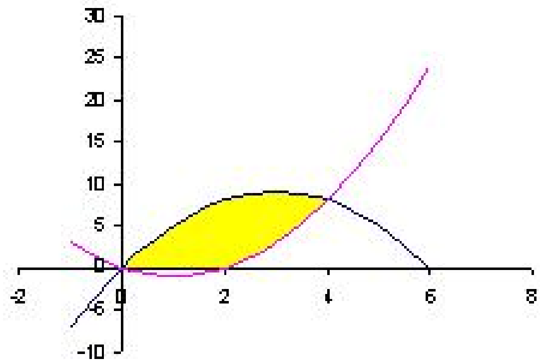
$$\int_0^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))\, dx =$$

$$= \int_0^4 (8x - 2x^2)\, dx$$

$$= 4x^2 - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^4$$

$$= 64 - \frac{128}{3}$$

$$= \frac{64}{3}$$



5. (1,5 ponto)

Ache o volume do sólido gerado quando a região limitada por: $y = 4x^2$, $x = 0$ e $y = 16$, é girada em torno do eixo y. Utilize o método dos discos integrando ao longo do eixo y. Esboce o sólido.

Solução:

$$V = \pi \int_0^{16} x^2 dy$$

$$= \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy$$

$$= \left. \frac{\pi}{8} y^2 \right|_0^{16}$$

$$= \frac{\pi}{8}(256) = 32\pi$$

6. (1,5 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{7x^2 - 2x + 1} =$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} x \ln x =$

Solução:

(a)
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{14x-2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{14}$$
$$= \frac{3}{7}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$