Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 2^o semestre de 2019

Questões

1. (2,5 pontos)

   Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, utilizando as ferramentas do cálculo.

   Solução:

   $$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$$

   $$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 = 2(3x^2 - 5x + 2) = 2(3x - 2)(x - 1)$$

   $$f'(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = 1$$

   $$f''(x) = 12x - 10$$

   $$f''(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{6}$$

   Da segunda derivada concluímos que o grafíco de f tem concavidade voltada para cima quando $x > \frac{5}{6}$ e concavidade voltada para baixo quando $x < \frac{5}{6}$, sendo $x = \frac{5}{6}$ um ponto de inflexão.

   Da primeira derivada verificamos que são pontos críticos $x = \frac{2}{3}$ e $x = 1$. Como $f''(2/3) = -2$ e $f''(1) = 2$, há em $x = 2/3$ um máximo relativo e em $x = 1$ um mínimo relativo.

   Interseções:

   Eixo x:

   $$f(x) = 0 \longrightarrow f(2) = -3 \text{ e } f(3) = 14 \longrightarrow \text{ Logo } f \text{ se anula entre 2 e 3}$$

Eixo y:

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = -7$$

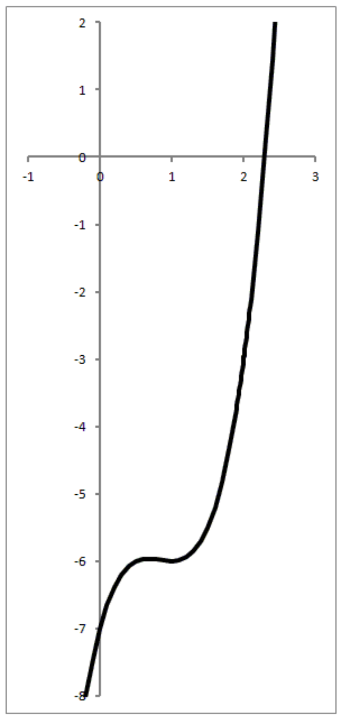
Não há assíntotas verticais posto que a função polinomial é contínua em toda a reta real.

Não há assíntotas horizontais já que

$$\lim_{x\to-\infty} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = \infty$$



2. (2,5 pontos)

Encontre as derivadas de primeira e segunda ordens das seguintes funções:

(a) $f(x) = 5x^6 - 2x^3 + x^{-5}$

(b) $f(x) = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^5$

Solução:

(a) $f(x) = 5x^6 - 2x^3 + x^{-5}$

$$f'(x) = 30x^5 - 6x^2 - 5x^{-6}$$

$$f''(x) = 150x^4 - 12x + 30x^{-7} = 150x^4 - 12x + \frac{30}{x^7}$$

(b) $$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^5$$

$$f'(x) = 5\left(\frac{x}{x+1}\right)^4\left(\frac{x}{x+1}\right)' = 5\left(\frac{x}{x+1}\right)^4\left(\frac{(x)'(x+1)-(x)(x+1)'}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = 5\left(\frac{x}{x+1}\right)^4\left(\frac{1(x+1)-(x)1}{(x+1)^2}\right) = 5\left(\frac{x^4}{(x+1)^4}\right)\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = 5\frac{x^4}{(x+1)^6}$$

$$f''(x) = 5\frac{(x^4)'((x+1)^6)-(x^4)((x+1)^6)'}{((x+1)^6)^2}$$

$$f''(x) = 5\frac{(4x^3)((x+1)^6)-(x^4)(6(x+1)^5(1))}{(x+1)^{12}}$$

$$f''(x) = 5\frac{4x^3(x+1)^6-6x^4(x+1)^5}{(x+1)^{12}}$$

$$f''(x) = 5\frac{4x^3(x+1)-6x^4}{(x+1)^7} = 5\frac{4x^4+4x^3-6x^4}{(x+1)^7} = 5\frac{4x^3-2x^4}{(x+1)^7}$$

$$f''(x) = 10\frac{2x^3-x^4}{(x+1)^7}$$

3. (2,5 pontos)

Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$ e $x = 0$.

Solução:

A área em questão se assemelha a uma fatia de torta.

Precisamos determinar as interseções entre o arco de cículo ($y = \sqrt{1-x^2}$) e as retas $y = x$ e $x = 0$

$$\sqrt{1-x^2} = x \implies 1-x^2 = x^2 \implies 2x^2 = 1 \implies x^2 = \frac{1}{2}$$

Portanto a abcissa x da interseção é

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Integrando

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\sqrt{1-x^2} - x\right]\, dx &= \left[\frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Observe que este valor corresponde a um oitavo da área de um círculo de raio igual a 1.

4. (2,5 pontos) ————————————————————————————

Ache as seguintes antiderivadas.

(a) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx$$

(b) $$\int (x^3+2)^2(3x^2)dx$$

Solução:

(a) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2} + 5\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right] dx = \int \left[x + 5 - 4\frac{1}{x^2}\right] dx$$

$$= \int x\, dx + 5\int 1\, dx - 4\int x^{-2}\, dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 4(-1)x^{-1} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4}{x} + C$$

(b) $$\int (x^3+2)^2(3x^2)dx$$

com $u = x^3 + 2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$

$$\int (x^3+2)^2(3x^2)dx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$$