Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 1º semestre de 2013 - Gabarito

Questões

1. (2,50 pontos) ————————————————————

   Ache os extremos relativos da função $f(x) = 2 + x^{2/3}$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

   Solução:

   $$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

   Logo, $x = 0$ é um ponto crítico desde que $f'(0)$ não é definido, embora $x = 0$ esteja no domínio de f. Observe que $f'(x)$ tende a ∞ quando x tende a 0. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativa e, portanto f é decrescente para $x \in (-\infty, 0)$ e quando $x > 0$, $f'(x)$ é positiva e, portanto f é crescente para $x \in (0, \infty)$. Daí podemos concluir que f tem um mínimo relativo em $x = 0$.

2. (2,50 pontos) ————————————————————

   Calcule as integrais abaixo:

   (a)

   $$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$$

(b)

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$$

(c)

$$\int \cos 3x\,dx$$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \frac{(1+2x+x^2)}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx \\
&= \int \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\right]\,dx \\
&= \int \left[x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]\,dx \\
&= \int \left[x^{-\frac{1}{2}}\right]\,dx + \int \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]\,dx + \int \left[x^{\frac{3}{2}}\right]\,dx \\
&= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + 2\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C \\
&= \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + C \\
&= 2x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \\
&= 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= \int \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= \int \left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right]\,dx \\
&= \int \left[1-(x+1)^{-2}\right]\,dx \\
&= x - \frac{1}{(-2+1)}(x+1)^{-2+1} + C \\
&= x + (x+1)^{-1} + C
\end{aligned}$$

$$= x + \frac{1}{(x+1)} + C$$

$$= \frac{x(x+1)+1}{(x+1)} + C$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x+1} + C = \frac{x^2}{x+1} + C$$

(c)

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{3}{3} \int \cos 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int 3 \cos 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + C$$

3. (2,50 pontos) ———————————————————————————

Calcule as seguintes integrais definidas,

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \mid x \mid \, dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{4} (1-u)\sqrt{u} \, du$

Solução:

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} \mid x \mid \, dx$

Sabemos que

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Podemos então dividir a integral da seguinte maneira

$$\int_{-2}^{3} \mid x \mid \, dx = \int_{-2}^{0} \mid x \mid \, dx + \int_{0}^{3} \mid x \mid \, dx = \int_{-2}^{0} -x \, dx + \int_{0}^{3} x \, dx$$

$$\int_{-2}^{3} \mid x \mid \, dx = -\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3} = -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right] + \left[\frac{(3)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]$$

$$\int_{-2}^{3} \mid x \mid \, dx = -\left[-\frac{(-2)^2}{2}\right] + \left[\frac{(3)^2}{2}\right] = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

(b) $$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \int_1^4 (\sqrt{u} - u\sqrt{u})\,du = \int_1^4 (u^{1/2} - uu^{1/2})\,du$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \int_1^4 (u^{1/2} - u^{3/2})\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right]_1^4$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}\sqrt{u^3} - \frac{2}{5}\sqrt{u^5}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} + \frac{2}{5}\sqrt{1^5}\right]$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{2}{5}\sqrt{1024} - \frac{2}{3}\sqrt{1} + \frac{2}{5}\sqrt{1}\right] = \left[\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 1\right]$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \left[\frac{16}{3} - \frac{64}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right] = \frac{80 - 192 - 10 + 6}{15} = -\frac{116}{15}$$

4. (2,50 pontos) ————————————————————————————————

Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das equações $2y^2 = x + 4$ e $x = y^2$.

Solução:

Considerando as funções na variável y, teremos $f(y) = y^2$ e $g(y) = 2y^2 - 4$. A área desejada será igual a integral da diferença entre as duas funções.

A interseção entre os dois gráficos se dá quando $f(y) = g(y)$ ou

$$y^2 = 2y^2 - 4 \Longrightarrow y^2 - 4 = 0 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Portanto,

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2} [f(y) - g(y)]dy = \int_{-2}^{2} [y^2 - 2y^2 + 4]dy = \int_{-2}^{2} [4 - y^2]dy$$

$$\text{Área} = \left[4x - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 - \frac{-8}{3}\right] =$$

$$\text{Área} = \frac{24 - 8 + 24 - 8}{3} = \frac{32}{3}$$