



Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática para Computação

AP3 - 1º semestre de 2016 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos) _____

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, utilizando as ferramentas do cálculo.

Solução:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 = 2(3x^2 - 5x + 2) = 2(3x - 2)(x - 1)x = 1$$

$$f'(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = 1$$

$$f''(x) = 12x - 10$$

$$f''(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{5}{6}$$

Da segunda derivada concluímos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima quando $x > \frac{5}{6}$ e concavidade voltada para baixo quando $x < \frac{5}{6}$, sendo $x = \frac{5}{6}$ um ponto de inflexão.

Da primeira derivada verificamos que são pontos críticos $x = \frac{2}{3}$ e $x = 1$. Como $f''(2/3) = -2$ e $f''(1) = 2$, há em $x = 2/3$ um máximo relativo e em $x = 1$ um mínimo relativo.

Interseções:

Eixo x :

$$f(x) = 0 \longrightarrow f(2) = -3 \text{ e } f(3) = 14 \longrightarrow \text{Logo } f \text{ se anula entre } 2 \text{ e } 3$$

Eixo y :

$$x = 0 \longrightarrow f(0) = -7$$

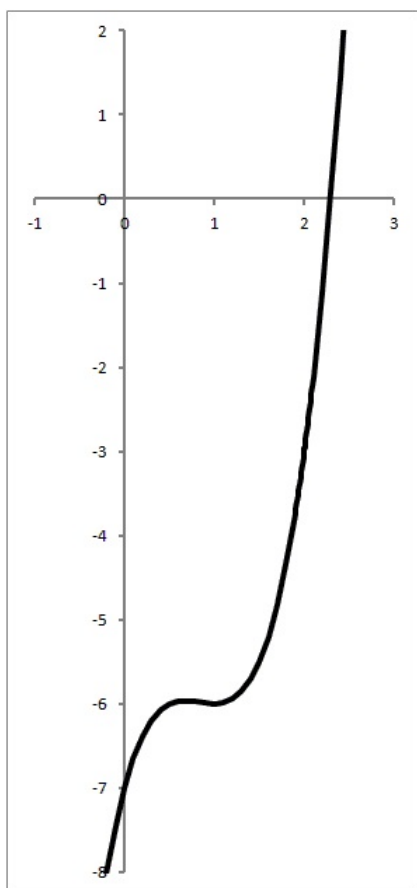
Não há assíntotas verticais posto que a função polinomial é contínua em toda a reta real.

Não há assíntotas horizontais já que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = -\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = \infty$$



2. (2,5 pontos) _____

Calcule as derivadas abaixo:

(a) $\frac{df}{dx}$ onde $f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}}$

(b) $\frac{df}{dx}$ onde $f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$

(c) $\frac{dy}{dx}$ onde $y(u) = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ e $u(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

Solução:

(a) $f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}}$

$$\frac{df}{dx} = \left[2 \cdot x^{-1/2} + 6 \cdot x^{-1/3} - 2 \cdot x^{-3/2} - 4 \cdot x^{-3/4} \right]'$$

$$\frac{df}{dx} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-1/2-1} + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-1/3-1} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot x^{-3/2-1} - 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot x^{-3/4-1}$$

$$\frac{df}{dx} = -1 \cdot x^{-3/2} - 2 \cdot x^{-4/3} + 3 \cdot x^{-5/2} + 3 \cdot x^{-7/4}$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$

$$\frac{df}{dx} = [\sqrt[3]{3x^2}]' = [3^{1/3}x^{2/3}]' = \sqrt[3]{3} [x^{2/3}]' = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{(2/3-1)}$$

$$\frac{df}{dx} = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-1/3} = \sqrt[3]{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3} \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{x}}$$

(c) $y(u) = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ e $u(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{du} \left(\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right) \cdot \frac{d}{dx} (\sqrt[3]{x^2 + 2})$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(u^2 - 1)'(u^2 + 1) - (u^2 - 1)(u^2 + 1)'}{(u^2 + 1)^2} \right) \cdot ((x^2 + 2)^{1/3})'$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{(2u)(u^2 + 1) - (u^2 - 1)(2u)}{(u^2 + 1)^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} (x^2 + 2)^{1/3-1} (x^2 + 2)' \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2u^3 + 2u - 2u^3 + 2u}{(u^2 + 1)^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} (x^2 + 2)^{-2/3} 2x \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{4u}{(u^2 + 1)^2} \right) \cdot \left(\frac{2x}{3(x^2 + 2)^{2/3}} \right) = \left(\frac{4u}{(u^2 + 1)^2} \right) \cdot \left(\frac{2x}{3(u)^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{8x}{3u(u^2 + 1)^2} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{8x}{3\sqrt[3]{x^2 + 2}((\sqrt[3]{x^2 + 2})^2 + 1)^2} \right)$$

3. (2,5 pontos) _____

Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x , da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x = -1$ e $x = 1$.

Solução:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 \pi(x^2 + 1)^2 dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (x^4 + 2x^2 + 1) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^1 \\ &= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right] \\ &= \pi \frac{56}{15} \end{aligned}$$

4. (2,5 pontos) _____

Calcular as seguintes integrais.

(a) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

(b) $\int (s^3 + 2)^2 (3s^2) ds$

Solução:

(a) $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$

Com $u = x^2 + 1 \rightarrow u' = 2x$ e substituindo na integral, teremos

$$\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C = \ln(x^2 + 1) + C$$

(b) $\int (s^3 + 2)^2 (3s^2) ds = \frac{1}{3}(s^3 + 2)^3 + C$

Com $u = s^3 + 2 \rightarrow u' = 3s^2$ e substituindo na integral, teremos

$$\int (s^3 + 2)^2 (3s^2) ds = \int (u)^2 u' du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}(s^3 + 2)^3 + C$$