Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 2^o semestre de 2011 - Gabarito

Questões

1. (1,5 pontos) ———————————————————

   Determine o domínio e a imagem das seguintes funções.

   (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-9}$

   (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

   Solução:

   (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   Para que $f(x)$ tenha valores reais é necessário que a expressão sob radiciação seja maior ou igual a zero. Isto é,

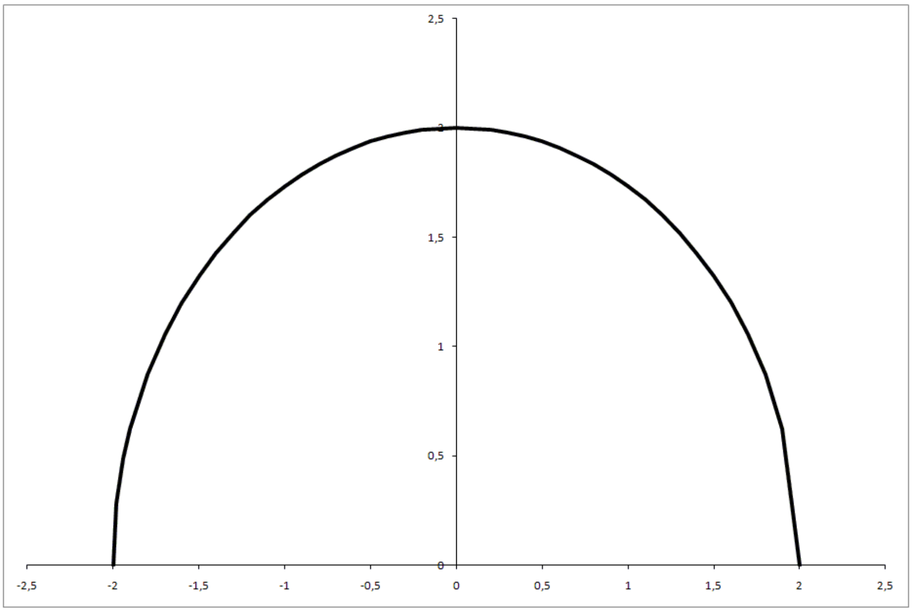
   $$4 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \quad \text{ou} \quad -2 \leq x \leq 2$$

O domínio será então

$$\text{Dom. de } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -2 \leq x \leq 2\}$$

e sua imagem

$$\text{Im. de } f(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 \leq y \leq 2\}$$



$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

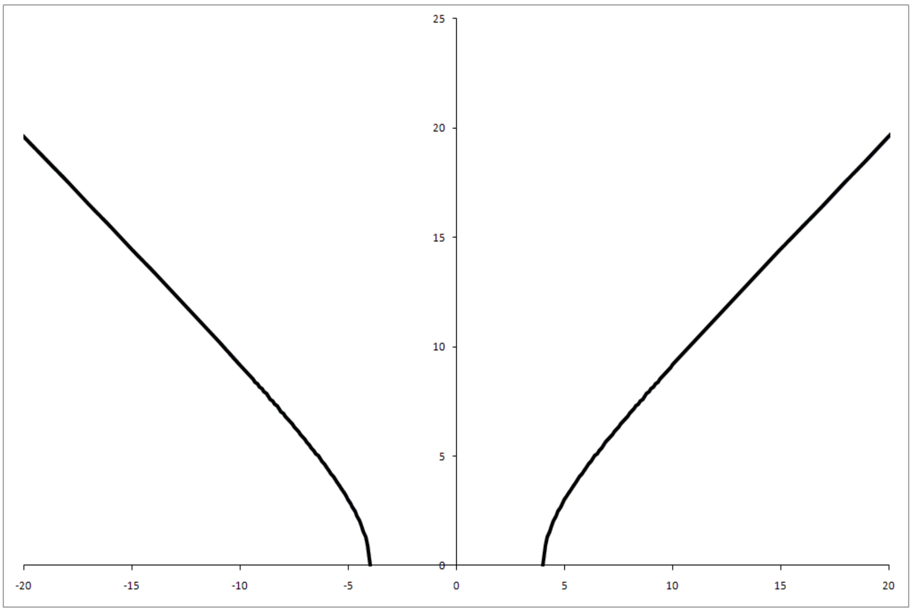
$$x^2 - 16 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq 16 \quad \text{ou} \quad x \geq 4 \text{ ou } x \leq -4$$

O domínio será então

$$\text{Dom. de } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \geq 4 \text{ ou } x \leq -4\}$$

e sua imagem

$$\text{Im. de } f(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 \leq y < +\infty\}$$



$f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

(c) $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Como o denominador não pode ser anular,

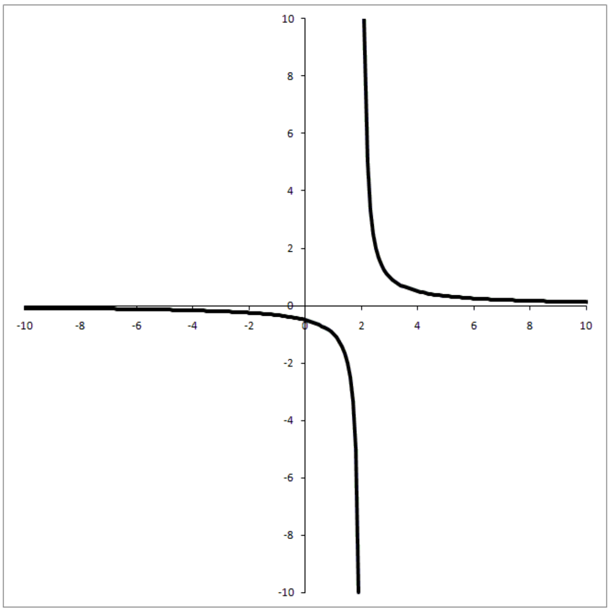
$$x - 2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2$$

O domínio é

$$\text{Dom. de } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq 2\}$$

e a imagem

$$\text{Im. de } f(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } -\infty < y < 0 \text{ e } 0 < y < +\infty\}$$



$f(x) = \frac{1}{x-2}$

(d) $$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

Como o denominador não pode ser anular,

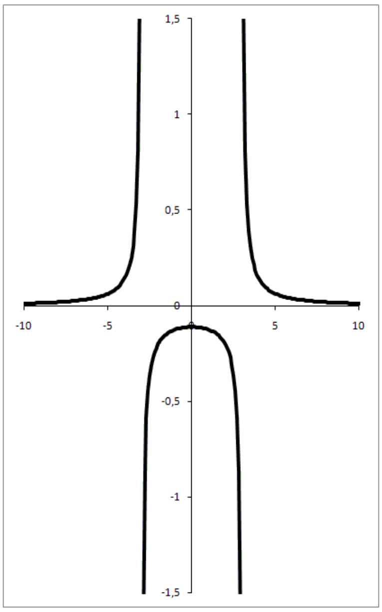
$$x^2 - 9 \neq 0 \Longrightarrow x^2 \neq 9 \Longrightarrow x \neq \pm 3$$

O domínio é

$$\text{Dom. de } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \neq -3 \text{ e } x \neq 3\}$$

e a imagem

$$\text{Im. de } f(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } -\infty < y \leq -\frac{1}{9} \text{ e } 0 < y < +\infty\}$$



$f(x) = \frac{1}{x^2-9}$

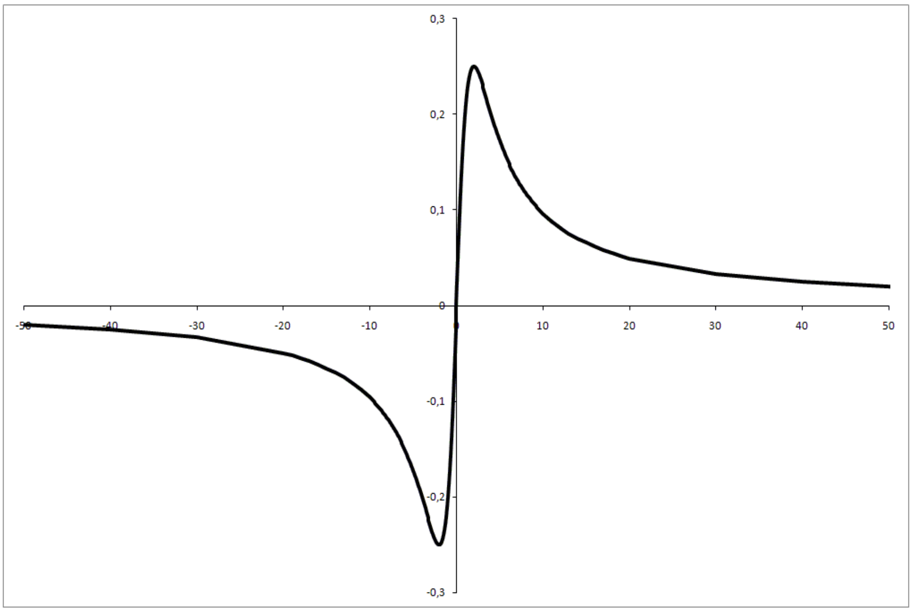
(e) $\quad f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

O denominador não pode ser anular. Mas $x^2 + 4$ é sempre maior do que zero para qualquer valor de x. Portanto o domínio de $f(x)$ é toda a reta real.

$$\text{Dom. de } f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$$

e a imagem

$$\text{Im. de } f(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } -\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{1}{4}\}$$



$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

2. (1,5 pontos)

Determine a inversa das seguintes funções, assim como seus domínios e suas imagens.

(a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

(b) $f(x) = \log_{10}(10^x)$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} \quad x \geq 2$

Solução:

(a)

$$f(x) = \sqrt{x-2} \implies \text{com } x - 2 \geq 0 \text{ ou } x \geq 2$$

com

$$y = \sqrt{x-2}$$

resolvendo para x

$$y^2 = x - 2 \implies y^2 + 2 = x \implies x = y^2 + 2$$

Portanto

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

Com

$$\text{Dom. de } f^{-1}(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{Im. de } f^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{R} \text{ tal que } y \geq 2\}$$

(b)

$$f(x) = \log_{10}(10^x) \implies y = \log_{10}(10^x) = x$$

Explicitando x

$$x = y$$

Logo

$$f^{-1}(x) = x$$

Com

Dom. de $f^{-1}(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$

Im. de $f^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}\}$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad x \geq 2$$

$$y = \frac{1}{x+1} \implies y(x+1) = 1 \implies yx + y = 1 \implies yx = 1 - y$$

$$x = \frac{1-y}{y}$$

logo

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x}$$

Dom. de $f^{-1}(x) = \{x \in \mathbb{R}$ tais que $x \geq \frac{1}{3}\}$

Im. de $f^{-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}$ tais que $y \geq 2\}$

3. (1,5 pontos)

Calcule os limites abaixo.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^5 - 7x^4 - 2x + 5)$

Solução:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+2}{x-1} = \infty$ Logo, o limite não existe

(b) $$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\cdot\frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2-5} = \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = (3+\sqrt{2^2+5}) = 3+\sqrt{9} = 3+3 = 6$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}\cdot\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}} = +\infty$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty}(x^5-7x^4-2x+5) = \lim_{x\to-\infty}x^5\left(1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^5\right)\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x^5\right)\cdot 1 = -\infty$$

4. (1,5 pontos)

Calcule os limites laterais — pela esquerda $\left(\lim_{x\to a^-} f(x)\right)$ e direita $\left(\lim_{x\to a^+} f(x)\right)$ — para as funções abaixo, nos pontos aonde o denominador de cada função se anula. Por exemplo a primeira função tem denominador nulo em $x=0$, portanto calcule os limites $\left(\lim_{x\to 0^-} f(x)\right)$ e $\left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\right)$.

(a) $$f(x) = \frac{2}{x}$$

(b) $$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

(c) $$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2}$$

Solução:

(a) f se anula em $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x} = \infty$$

(b) f se anula em $x=-3$ e $x=2$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{(x+3)(x-2)} = +\infty$$

(c) f se anula em $x=3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)^2} = +\infty$$

5. (2,0 pontos) ———————————————————————————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$$

(b) $$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$$

(c) $$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+3)(x+1)} = \frac{(x+2)}{(x+3)}$$

Logo f tem uma descontinuidade em $x=-1$ que pode ser removida e uma descontinuidade em $x=-3$ que não pode ser removida. Formalmente, temos

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+2)}{(x+3)} = \frac{1}{2} = f(-1)$$

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+2)}{(x+3)} =?????$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{(x+2)}{(x+3)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{(x+2)}{(x+3)} = +\infty$$

Logo o limite não existe em $x=-3$, sendo f descontínua neste ponto.

(b) $$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x+2}$$

Logo f tem uma descontinuidade em $x = +2$ que pode ser removida e uma descontinuidade em $x = -2$ que não pode ser removida.

(c) $$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2+3-4}$$

$$= \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x^2-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$$

f tem uma descontinuidade em $x = +1$ que pode ser removida e uma descontinuidade em $x = -1$ que não pode ser removida.

6. (2,0 pontos) ———————————————————————

Mostre que se as funções f e g são contínuas, são também contínuas $f+g$ e $f-g$.

Solução:

Sabemos que uma função F é contínua em um ponto a se ele pertence ao domínio de F, se o limite de F em a existe e se seu valor é igual a $F(a)$. Isto é,

F é contínua em $x = a$, se e somente se:

- $a \in D(F)$
- $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ existe (possui um valor)
- $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$

Para que um ponto pertença ao domínio de $f+g$ deve pertencer ao domínio de f e de g.

Mas,

$$\lim_{x \to a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

e o limite acima existe, e seu valor é igual ao valor da função $f+g$ no ponto $x = a$, pois as funções f e g são contínuas em $x = a$. Que mostra que se f e g são contínuas sua soma $f+g$ também é.

Para a função $f-g$ o desenvolvimento é inteiramente análogo.