Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2^o semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

Se $y = x^2 - 4x$ e $x = \sqrt{2t^2+1}$, ache dy/dt quando $t = \sqrt{2}$.

Solução:

Sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4 \qquad \text{e} \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

Logo pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = (2x-4)\cdot\frac{2t}{(2t^2+1)^{1/2}} = \frac{4t(x-2)}{(2t^2+1)^{1/2}} = \frac{4t(\sqrt{2t^2+1}-2)}{(2t^2+1)^{1/2}}$$

$$\text{Em } \; t = \sqrt{2} \Longrightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{2(\sqrt{2})^2+1}-2)}{(2(\sqrt{2})^2+1)^{1/2}} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{2\cdot 2+1}-2)}{(2\cdot 2+1)^{1/2}} = \frac{4\sqrt{2}(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}}$$

2. (1,0 ponto)

Ache as derivadas de primeira e segunda ordens das seguintes funções:

(a) $$y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$$

(b) $$y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$$

(c) $$y = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

(d) $$y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$$

Solução:

(a) $$y = x^5 + 5x^4 - 10x^2 + 6$$

$$y' = 5x^4 + 20x^3 - 20x$$

$$y'' = 20x^3 + 60x^2 - 20$$

(b) $$y = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}3x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} + 2\frac{-1}{2}x^{-3/2}$$

$$y' = \frac{3}{2}x^{-1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2} - x^{-3/2}$$

$$y' = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$y'' = \frac{3}{2}\frac{-1}{2}x^{-3/2} - \frac{3}{2}\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{3}{2}x^{-5/2}$$

$$y'' = -\frac{3}{4}x^{-3/2} - \frac{3}{4}x^{-1/2} + \frac{3}{2}x^{-5/2}$$

$$y'' = -\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x^5}}$$

$$y'' = -\frac{3}{4}\frac{1}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left[-\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\right]$$

$$y'' = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}\right]$$

(c) $$y = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{1}{2}x^{-2} + 4x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}(-2)x^{-3} + 4\frac{-1}{2}x^{-3/2}$$

$$y' = -x^{-3} - 2x^{-3/2}$$

$$y' = -\frac{1}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$$

$$y'' = -(-3)x^{-4} - 2(-\frac{3}{2})x^{-5/2}$$

$$y'' = \frac{3}{x^4} + \frac{3}{x^2\sqrt{x}}$$

$$y'' = \frac{3}{x^2}\left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right]$$

(d) $$y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x}$$

$$y = (2x)^{1/2} + 2x^{1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}(2x)^{-1/2}(2) + 2\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$y' = (2x)^{-1/2} + x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}(2x)^{-3/2}(2) - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$y'' = -(2x)^{-3/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$y'' = -\frac{1}{\sqrt{(2x)^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

3. (1,0 ponto) ---

Ache os extremos relativos de $f(x) = 2 + x^{2/3}$ e os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Solução:

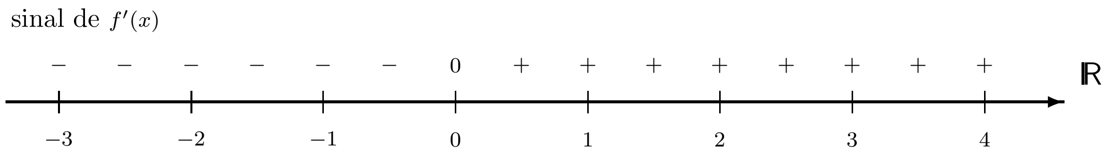
Calculando a derivada de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2}{3x^{1/3}} = 0$$

A derivada nunca se anula, entretanto, $x = 0$ é um ponto crítico, já que $f'(0)$ não é definido, mas 0 está no domínio de f.

Vejamos o sinal da primeira derivada, o diagrama abaixo nos mostra o comportamento do sinal de $f'(x)$.



Quando $x < 0$, f' é negativa e, portanto, f é decrescente para $x < 0$ e quando $x > 0$, f' é positiva e, portanto, f é crescente para $x > 0$.

Portanto f tem um mínimo absoluto em $x = 0$.

4. (1,0 ponto) ———

Construa o gráfico de função

$$y = \frac{x^4}{1 - x^2}$$

Solução:

É fácil verificar que a função é simétrica em relação ao eixo y.

Solução:

1. **Domínio**

   O domínio da função é $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$ visto que a função não está definida em $x = -1$ e $x = 1$.

2. **Interseções com os eixos x e y**

   Claramente a função (que passaremos a chamar de f) se anula no ponto $x = 0$, logo $(0, 0)$ pertence ao gráfico de f.

3. **Assíntotas verticais e horizontais**

   Existem assíntotas verticais nos pontos $x = -1$ e $x = 1$, já que

   $$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^4}{1 - x^2} = -\infty$$

   $$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^4}{1 - x^2} = +\infty$$

   $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^4}{1 - x^2} = +\infty$$

   $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^4}{1 - x^2} = -\infty$$

   Não existem assíntotas horizontais, já que

   $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{1 - x^2} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{1-x^2} = -\infty$$

4. **Máximos e mínimos locais**

São pontos aonde a primeira derivada se anula, isto é,

$$f'(x) = 0$$

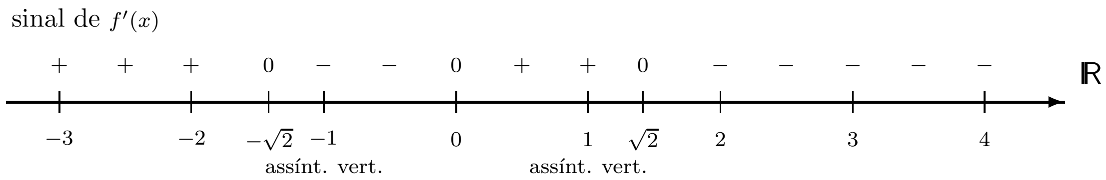
$$f'(x) = \left(\frac{x^4}{1-x^2}\right)' = \frac{(x^4)'(1-x^2) - (x^4)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2} = \frac{(4x^3)(1-x^2) - (x^4)(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(4x^3 - 4x^5) + (2x^5)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x^3 - 2x^5}{(1-x^2)^2} = \frac{2x^3(2-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

logo, os pontos críticos são $x = 0$ (onde $y = 0$) e $x = \pm\sqrt{2}$ (onde $y = -2$), isto é são pontos críticos $(0,0)$, $(-\sqrt{2},-2)$ e $(\sqrt{2},-2)$.

Para verificar se são pontos de mínimo ou de máximo vamos verificar o sinal da primeira derivada.

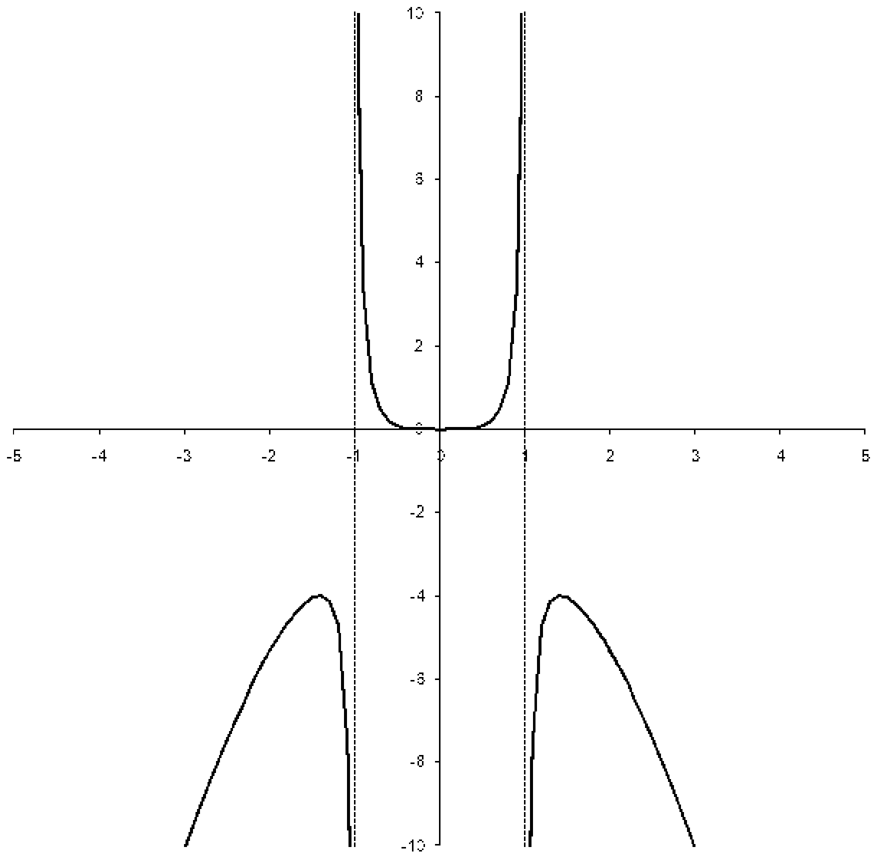
O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no intervalo estudado.



Logo $f(x)$ é crescente em $(-\infty,-\sqrt{2})$ e $(0,\sqrt{2})$ e é decrescente em $(-\sqrt{2},0)$ e $(\sqrt{2},+\infty)$.

Um ponto de mínimo local é $(x,y) = (0,0)$.

Os pontos de máximo locais são $(x, y) = (-\sqrt{2}, -2)$ e $(x, y) = (\sqrt{2}, -2)$.



5. (1,0 ponto)

Uma lata cilíndrica com base circular deve ser construída para conter um volume V. Ache as dimensões (raio (r) e altura (l)) tais que a quantidade de chapa metálica necessária a sua construção seja mínima quando:

(a) a lata for aberta, isto é, não tiver uma tampa,

(b) a lata for fechada, isto é, tiver uma tampa.

Solução:

Seja r e h respectivamente o raio e a altura da lata cilíndrica, A a área metálica necessária a construção da lata e V o volume que a lata armazena.

(a) Quando a lata for aberta, o volume $V =$ (Área da base) $\cdot$ (Altura), logo

$$V = \pi r^2 h$$

A área total de material para confecção da lata é $A =$ (Área lateral)+(Área da base), logo

$$A = 2\pi rh + \pi r^2$$

Podemos reescrever a expressão para a área A em função de uma única variável usando a relação para V. isto é

$$V = \pi r^2 h \Longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Substituindo na relação para A

$$A = 2\pi r h + \pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + \pi r^2 = \frac{2V}{r} + \pi r^2$$

Sabemos que o ponto de mínimo é um ponto crítico, aonde a derivada se anula. Derivando A em relação a r, que é a única variável independente.

$$\frac{dA}{dr} = \left[2Vr^{-1} + \pi r^2\right]' = (-1)2Vr^{-2} + 2\pi r = -\frac{2V}{r^2} + 2\pi r$$

$$\text{Pontos críticos} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dA}{dr} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2V}{r^2} + 2\pi r = 0$$

ou

$$\frac{2V}{r^2} = 2\pi r \quad \Longrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{\pi} \quad \Longrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

e o valor para h associado é

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}\right)} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V^{2/3}}{\pi^{2/3}}\right)} = \frac{V\pi^{2/3}}{\pi V^{2/3}} = \frac{V^{1/3}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Note que $dA/dr > 0$ a esquerda do ponto crítico acima e $dA/dr < 0$ a direita desse ponto, logo $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ é um ponto de mínimo. Como não existem outros pontos críticos este é um ponto de mínimo absoluto.

Enfim, as dimensões da lata que usa menos material são:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \qquad \text{e} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

(b) Quando a lata for fechada, o volume $V =$ (Área da base) $\cdot$ (Altura), logo com uma análise semelhante ao item anterior

$$V = \pi r^2 h$$

Agora a área total de material para confecção da lata é $A =$ (Área lateral) + 2(Área da base), logo

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

Podemos reescrever a expressão para a área A em função de uma única variável usando a relação para V. isto é

$$V = \pi r^2 h \Longrightarrow h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Substituindo na relação para A

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

Sabemos que o ponto de mínimo é um ponto crítico, aonde a derivada se anula. Derivando A em relação a r, que é a única variável independente.

$$\frac{dA}{dr} = \left[2Vr^{-1} + 2\pi r^2\right]' = (-1)2Vr^{-2} + 4\pi r = -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r$$

$$\text{Pontos críticos} \implies \frac{dA}{dr} = 0 \implies -\frac{2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

ou

$$\frac{2V}{r^2} = 4\pi r \implies r^3 = \frac{V}{2\pi} \implies r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

e o valor para h associado é

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V^2}{2^2\pi^2}}\right)} = \frac{V^{1/3}}{2^{2/3}\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

Como no item anterior $dA/dr > 0$ a esquerda do ponto crítico acima e $dA/dr < 0$ a direita desse ponto, logo $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ é um ponto de mínimo. Como não existem outros pontos críticos este é um ponto de mínimo absoluto.

Enfim, as dimensões da lata que usa menos material são:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \qquad \text{e} \qquad h = \sqrt[3]{\frac{V}{4\pi}}$$

6. (1,0 ponto) ---

Ache a inclinação da reta tangente às seguintes curvas no ponto $x = 1$

(a) $y = 8 - 5x^2$

(b) $y = \dfrac{4}{x+1}$

(c) $y = \dfrac{2}{x+3}$

Solução:

A inclinação da reta tangente é igual ao valor da derivada da função.

(a) $y = 8 - 5x^2$

$$y' = \left(8 - 5x^2\right)' = -10x$$

$$y' = -10x \quad \text{em} \quad x = 1 \implies y' = -10(1) = -10$$

(b) $$y = \frac{4}{x+1}$$

$$y' = \left(\frac{4}{x+1}\right)' = \left(4(x+1)^{-1}\right)' = -4(x+1)^{-2} = -\frac{4}{(x+1)^2}$$

$$y' = -\frac{4}{(x+1)^2} \quad \text{em} \quad x = 1 \Longrightarrow y' = -\frac{4}{((1)+1)^2} = -\frac{4}{2^2} = -1$$

(c) $$y = \frac{2}{x+3}$$

$$y' = \left(\frac{2}{x+3}\right)' = \left(2(x+3)^{-1}\right)' = \left(-2(x+3)^{-2}\right) = -\frac{2}{(x+3)^2}$$

$$y' = -\frac{2}{(x+3)^2} \quad \text{em} \quad x = 1 \Longrightarrow y' = -\frac{2}{(1+3)^2} = -\frac{2}{4^2} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8}$$

7. (1,0 ponto)

Encontre as seguintes antiderivadas:

(a) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}x\,dx$$

(b) $$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$$

Solução:

(a) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}x\,dx$$

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/3}(-2x)\,dx$$

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}x\,dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4/3}(1-x^2)^{4/3}\right) + C$$

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}x\,dx = -\frac{3}{8}\left(1-x^2\right)^{4/3} + C$$

(b) $$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx$$

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{x^2}{x+1} + C$$

Considerando $u = x + 1$, teremos $x = u - 1$, $x + 2 = u + 1$ e $dx = du$. Substituindo na integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}\,dx &&= \int \frac{(u-1)(u+1)}{u^2}\,du \\
&= \int \frac{u^2-1}{u^2}\,du &&= \int \left[\frac{u^2}{u^2} - \frac{1}{u^2}\right] du \\
&= \int \left[1 - u^{-2}\right] du &&= u + u^{-1} + C \\
&= u + \frac{1}{u} + C &&= (x+1) + \frac{1}{(x+1)} + C \\
&= \frac{(x+1)(x+1)+1}{x+1} + C &&= \frac{(x^2+2x+1)+1}{x+1} + C \\
&= \frac{x^2+2x+2}{x+1} + C
\end{aligned}$$

8. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Use o *Teorema Fundamental do Cálculo* para avaliar as seguintes integrais:

(a) $\displaystyle\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du$

(b) $\displaystyle\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 t^2\,dt\right)$

Solução:

(a) $\displaystyle\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \int_1^4 (\sqrt{u} - u\sqrt{u})\,du = \int_1^4 (u^{1/2} - uu^{1/2})\,du$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \int_1^4 (u^{1/2} - u^{3/2})\,du = \left[\frac{2}{3}u^{3/2} - \frac{2}{5}u^{5/2}\right]_1^4$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}\sqrt{u^3} - \frac{2}{5}\sqrt{u^5}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{5}\sqrt{4^5} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} + \frac{2}{5}\sqrt{1^5}\right]$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}\sqrt{64} - \frac{2}{5}\sqrt{1024} - \frac{2}{3}\sqrt{1} + \frac{2}{5}\sqrt{1}\right] = \left[\frac{2}{3}\cdot 8 - \frac{2}{5}\cdot 32 - \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 1\right]$$

$$\int_1^4 (1-u)\sqrt{u}\,du = \left[\frac{16}{3} - \frac{64}{5} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5}\right] = \frac{80-192-10+6}{15} = -\frac{116}{15}$$

(b) $\displaystyle\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx$

$$\int_4^8 (x^2-15)^{-1/2}x\,dx = \int_4^8 \frac{1}{2}(x^2-15)^{-1/2}(2)x\,dx = \int_4^8 \frac{1}{2}(x^2-15)^{-1/2}(2x)\,dx =$$

$$\int_4^8 (x^2-15)^{-1/2}x\,dx = \left[(x^2-15)^{1/2}\right]_4^8 = (8^2-15)^{1/2} - (4^2-15)^{1/2}$$

$$\int_4^8 (x^2-15)^{-1/2}x\,dx = \sqrt{8^2-15} - \sqrt{4^2-15} = \sqrt{64-15} - \sqrt{16-15} =$$

$$\int_4^8 (x^2-15)^{-1/2}x\,dx = \sqrt{49} - \sqrt{1} = 7-1 = 6$$

(c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 t^2\,dt\right) = -x^2$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_x^0 t^2\,dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\left[\frac{1}{3}t^3\right]_x^0\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}0^3 - \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{3}\right) = -x^2$$

9. (1,0 ponto)

Ache a função primeira derivada de:

(a) $f(x) = \ln(x^4+7x)$

(b) $f(x) = \ln(x+3)^2$

(c) $f(x) = (\ln(x+3))^2$

Solução:

(a) $\displaystyle f(x) = \ln(x^4+7x) \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^4+7x}(4x^3+7) = \frac{4x^3+7}{x^4+7x}$

(b) $\displaystyle f(x) = \ln(x+3)^2 \Longrightarrow f(x) = 2\ln(x+3) \Longrightarrow f'(x) = 2\frac{1}{x+3} = \frac{2}{x+3}$

(c) $\displaystyle f(x) = (\ln(x+3))^2 \Longrightarrow f'(x) = 2\ln(x+3)\frac{1}{x+3} = \frac{2\ln(x+3)}{x+3}$

10. (1,0 ponto)

Considere a região $\mathcal{R}$ limitada pela parábola $y = 4x^2$ e as linhas $x = 0$ e $y = 16$. Ache o volume do sólido obtido por rotação da região $\mathcal{R}$ em torno da linha $y = -2$.

Solução:

Para resolver este problema podemos reduzi-lo a uma revolução em torno do eixo x. Para tal elevaremos a região $\mathcal{R}$ de 2 unidades. Isto muda a região $\mathcal{R}$ para $\mathcal{R}^*$ que é limitada inferiormente pela parábola $y = 4x^2+2$, pela esquerda pelo eixo y e superiormente pela linha $y = 18$. Assim, o sólido de revolução original tem o mesmo volume do sólido de revolução gerado por rotação de $\mathcal{R}^*$ em torno do eixo x. Logo calculando o volume do último,

$$V = \pi \int_0^2 (18^2 - (4x^2+2)^2)dx = \pi \int_0^2 (256 - 16x^4 - 16x^2 - 4)dx$$

$$V = \pi \left(252x - \frac{16}{5}x^5 - \frac{16}{3}x^3)\right]_0^2 = \pi(504 - \frac{512}{5} - \frac{128}{3}) = \pi\frac{5384}{15}$$