Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2^o semestre de 2018 - Gabarito

Questões

1. (2,50 pontos)

   Determine os extremos relativos da função $f(x) = (x-2)^{2/3}$.

   Solução:

$$f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

   logo o único ponto crítico é $x = 2$. Mas,

$$\begin{array}{ll} \text{para } x < 2 & \rightarrow f'(x) < 0 \\ \text{para } x > 2 & \rightarrow f'(x) > 0 \end{array}$$

   Portanto, em $x = 2$ ocorre um mínimo relativo.

2. (2,50 pontos)

   Encontre as seguintes antiderivadas:

   (a)

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$$

   (b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\, dx$$

   Solução:

(a)

$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right]dx = \int \left[x+5-4x^{-2}\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+5x-4\frac{x^{-1}}{-1}+C\right] = \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$$

$$= \frac{x^3+10x^2+8}{2x}+C$$

(b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int (\underbrace{x^3+2}_{v})^{-1/4}\underbrace{3x^2\,dx}_{dv} = \frac{1}{3}\int v^{-1/4}\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3/4}v^{3/4}\right)+C = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3/4}(x^3+2)^{3/4}\right)+C$$

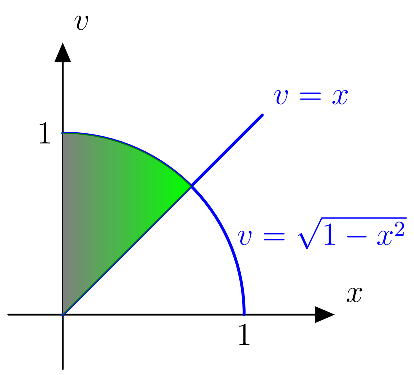
$$= \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4}+C$$

3. (2,50 pontos)

Use integrais definidas para achar a área entre o semicírculo $v=\sqrt{1-x^2}$ e a linha em 45° definida por $v=x$, no primeiro quadrante.

Solução:

A figura abaixo ilustra a área desejada (preenchida na cor verde)



Temos que encontrar a interseção das duas curvas para definir os limites de integração,

$$\sqrt{1-x^2}=x \quad \longrightarrow \quad 1-x^2=x^2 \quad \longrightarrow \quad 2x^2=1 \quad \longrightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

a intersecção se dá em $x=\sqrt{1/2}$ no primeiro quadrante, logo

$$A=\int_0^{\sqrt{1/2}}\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$$

Vamos calcular a integral

$$\int\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$$

que pode ser escrita

$$\int\left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx=\int\sqrt{1-x^2}\,dx-\int x\,dx$$

Vejamos primeiramente a integral

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx$$

usando a mudança de variável $x=\operatorname{sen}t$, teremos

$$x=\operatorname{sen}t\quad\Longrightarrow\quad\frac{dx}{dt}=\cos t\quad\Longrightarrow\quad dx=\cos t\,dt$$

ademais

$$\operatorname{sen}^{-1}x=t$$

substituindo na integral

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\;\cos t\,dt=\int\cos t\;\cos t\,dt=\int\cos^2 t\,dt$$

mas das relações trigonométricas

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\&\operatorname{sen}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\&\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1\end{aligned}$$

é fácil verificar que

$$\begin{aligned}&\cos 2t=\cos t\cos t-\operatorname{sen}t\operatorname{sen}t=\cos^2 t-\operatorname{sen}^2 t=\cos^2 t-(1-\cos^2 t)=2\cos^2 t-1\\&\operatorname{sen}2t=\operatorname{sen}t\cos t+\cos t\operatorname{sen}t=2\operatorname{sen}t\cos t\end{aligned}$$

assim

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))\ dt = \frac{1}{2}\left[\int 1\,dt + \int \cos(2t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\text{sen}\,(2t)}{2}\right] + C = \frac{1}{2}\left[t + \frac{2\,\text{sen}\,t\cos t}{2}\right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \text{sen}\,t\sqrt{1-\text{sen}^2\,t}\ \right] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left[\text{sen}^{-1}\,x + x\sqrt{1-x^2}\ \right] + C$$

---

e agora a integral

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

---

e finalmente

$$\int (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \int x\,dx = \frac{1}{2}\left[\text{sen}^{-1}\,x + x\sqrt{1-x^2}\ - x^2\right] + C$$

voltando ao cálculo da área pedida

$$A = \int_0^{\sqrt{1/2}} (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\text{sen}^{-1}\,x + x\sqrt{1-x^2} - x^2\right]_0^{\sqrt{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}^2} - \sqrt{\frac{1}{2}}^2\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

4. (2,50 pontos)

Use a regra de L'Hôpital uma ou mais vezes para avaliar os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2}$$

(b) $$\lim_{x \to 0} \frac{x + \text{sen } 2x}{x - \text{sen } 2x}$$

Solução:

(a) $$\frac{0}{0} \implies \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

(b) $$\frac{0}{0} \implies \lim_{x \to 0} \frac{x + \text{sen } 2x}{x - \text{sen } 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2\cos\ 2x}{1 - 2\cos\ 2x} = \frac{1 + 2(1)}{1 - 2(1)} = -3$$