Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 — 1^o semestre de 2019 — Gabarito

Questões

1. (1,25 pontos) ———————————————————————

Calcule as derivadas das seguintes funções usando a definição. Isto é

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

(b) $f(x) = \sqrt{x^3}$

(c) $f(x) = |\, x \,|$

Solução:

(a) $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^3 - 5(x+h)^2 + 4(x+h) + 1] - [3x^3 - 5x^2 + 4x + 1]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[3(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 5(x^2 + 2xh + h^2) + 4(x+h) + 1] - [3x^3 - 5x^2 + 4x + 1]}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3x^3 + 9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 5x^2 - 10xh - 5h^2 + 4x + 4h + 1 - 3x^3 + 5x^2 - 4x - 1}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{9x^2h + 9xh^2 + 3h^3 - 10xh - 5h^2 + 4h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h(9x^2 + 9xh + 3h^2 - 10x - 5h + 4)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} 9x^2 - 10x + 4 + h(9x + 3h - 5)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}(9x^2 - 10x + 4) + \lim_{h\to 0} h(9x + 3h - 5)$$

$$f'(x) = (9x^2 - 10x + 4) + 0$$

$$f'(x) = 9x^2 - 10x + 4$$

(b) $f(x) = \sqrt{x^3}$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^3} - \sqrt{x^3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x\sqrt{x+h} + h\sqrt{x+h} - x\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x\sqrt{x+h} - x\sqrt{x} + h\sqrt{x+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}) + h\sqrt{x+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt{x+h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} x \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} + \lim_{h\to 0} \sqrt{x+h} \\
&= \lim_{h\to 0} x \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} + \lim_{h\to 0} \sqrt{x+h} \\
&= \lim_{h\to 0} x \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} + \lim_{h\to 0} \sqrt{x+h} \\
&= \lim_{h\to 0} x \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} + \lim_{h\to 0} \sqrt{x+h} \\
&= \lim_{h\to 0} x \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} + \lim_{h\to 0} \sqrt{x+h}
\end{aligned}$$

$$= x \cdot \frac{1}{(\sqrt{x}+\sqrt{x})} + \sqrt{x}$$

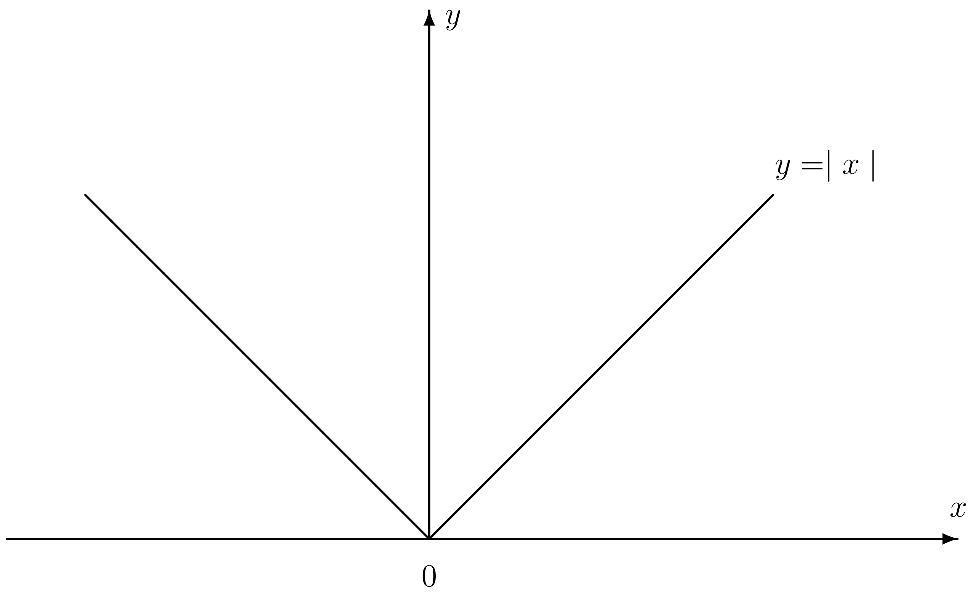
$$= \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2} + \sqrt{x}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

(c) $f(x) = \mid x \mid$

A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x) = \mid x \mid$ em torno do ponto $x = 0$. Vê-se que geometricamente f não possui derivada em 0, posto que neste ponto há um *bico* no gráfico. Para mostrar isso vamos encontrar as derivadas à direita e à esquerda do ponto 0 e verificar que não são iguais.



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e lembre-se que

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mid h \mid}{h} = \frac{+h}{h} = 1$$

e

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\mid h \mid}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

e portanto, $f'(0)$ não existe e $y =| x |$ não tem derivada neste ponto.
Para $x < 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{| 0+h | - | 0 |}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{| h |}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

e para $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{| 0+h | - | 0 |}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{| h |}{h} = \frac{+h}{h} = 1$$

2. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Seja o **Teorema do Valor Médio:**
Se uma função é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e é diferenciável no intervalo aberto (a, b), então existe um número c em (a, b), tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Prove que a função f definida por $f(x) = x^3 - 8x^2 + 1$ verifica as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo $[0, 8]$ e determine c no intervalo $(0, 8)$ que satisfaça à conclusão do teorema.

Solução:

Precisamos incialmente mostrar que o função é contínua no intervalo em questão. Para que $f(x)$ seja contínua em um ponto a, o limite da função nesse ponto precisa existir e ser igual ao valor da função.
Assim $\forall x \in [0, 8]$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a} x^3 - 8x^2 + 1 \\
&= \lim_{x\to a} x^3 + \lim_{x\to a}(-8x^2) + \lim_{x\to a} 1 \\
&= \lim_{x\to a} x^3 + \lim_{x\to a}(-8) \lim_{x\to a}(x^2) + \lim_{x\to a} 1 \\
&= \lim_{x\to a} x^3 - 8 \lim_{x\to a}(x^2) + 1 \\
&= a^3 - 8a^2 + 1 \\
&= f(a)
\end{aligned}$$

assim $f(x)$ é contínua e diferenciável em $(0, 8)$. Então de acordo com o *Teorema do Valor Médio*, existe um número c em $(0, 8)$ tal que

$$f(8) - f(0) = f'(c)(8 - 0)$$

como $f'(x) = 3x^2 - 16x$, isto significa que

$$1 - 1 = (3c^2 - 16c)(8 - 0)$$

$$0 = c(3c - 16)8$$

$$8c(3c - 16) = 0$$

$$c = 7 \quad \text{ou} c = \frac{16}{3}$$

Enfim, o número procurado no intervalo $[0, 8]$ é $c = 8$.

3. (1,25 pontos) ———

Se $f(x) = 2x^{2/3}(x^2 - 8)$, determine o máximo e o mínimo absolutos de f em cada um dos intervalos

(a) $[-1, 1]$
(b) $[1, 7]$
(c) $[-6, -1]$

Solução:

Vamos analisar a função

$$f(x) = 2x^{2/3}(x^2 - 8)$$

Primeira derivada

$$f'(x) = 2\left[x^{2/3}\right]'(x^2 - 8) + 2x^{2/3}[x^2 - 8]'$$

$$f'(x) = 2\left[\frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}}\right](x^2 - 8) + 2x^{2/3}[2x]$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 - 8)}{3\sqrt[3]{x}} + 4x\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 - 8) + 4x\sqrt[3]{x^2} \cdot 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{4(x^2 - 8) + 12x\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 32 + 12x \cdot x}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{16x^2 - 32}{3\sqrt[3]{x}}$$

Observe que $f'(x)$ não está definida em $x = 0$.

$$f'(x) = 0 \implies \frac{16x^2 - 32}{3\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$16x^2 - 32 = 0 \implies 16x^2 = 32 \implies x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Para:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & x & < & -\sqrt{2} & \longrightarrow & f'(x) < 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é decrescente} \\
-\sqrt{2} & < & x & < & 0 & \longrightarrow & f'(x) > 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é crescente} \\
0 & < & x & < & \sqrt{2} & \longrightarrow & f'(x) < 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é decrescente} \\
\sqrt{2} & < & x & & & \longrightarrow & f'(x) > 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é crescente}
\end{array}$$

Segunda derivada

$$f''(x) = \left[\frac{16x^2 - 32}{3\sqrt[3]{x}}\right]' = \frac{[16x^2 - 32]'[3\sqrt[3]{x}] - [16x^2 - 32][3\sqrt[3]{x}]'}{[3\sqrt[3]{x}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{[32x][3\sqrt[3]{x}] - 3[16x^2 - 32]\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]}{[3\sqrt[3]{x}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{\left\{[32x][9\sqrt[3]{x^3}] - 3[16x^2 - 32]\right\}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{[3\sqrt[3]{x}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left\{[32x][9x] - 48[x^2 - 2]\right\}}{[3\sqrt[3]{x}]^2 3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{\left\{(9 \cdot 32)x^2 - 48(x^2 - 2)\right\}}{27[\sqrt[3]{x^4}]}$$

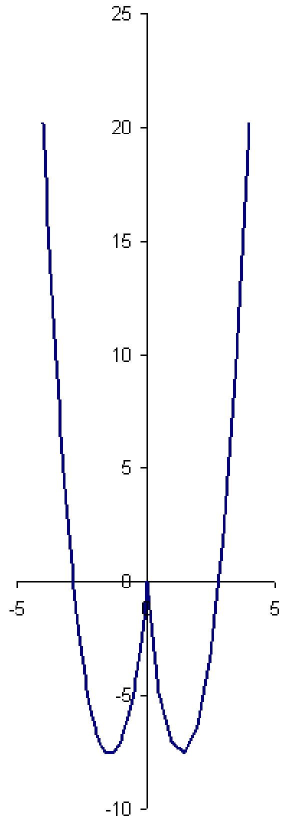
$$f''(x) = \frac{(240x^2 + 48)}{27[\sqrt[3]{x^4}]}$$

$$f''(x) = \frac{(80x^2 + 16)}{9[\sqrt[3]{x^4}]} \qquad \text{que é sempre positiva.}$$

Portanto, em:

$$\begin{array}{rcrcccc} x & = & -\sqrt{2} & \longrightarrow & f''(x) > 0 & \longrightarrow & \text{concavidade para cima} \\ x & = & \sqrt{2} & \longrightarrow & f''(x) > 0 & \longrightarrow & \text{concavidade para cima} \end{array}$$

Portanto, o gráfico de $f(x)$ tem a forma



(a) No intervalo $[-1, 1]$

$$-\sqrt{2} \notin [-1, 1] \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \notin [-1, 1]$$

Logo o máximo e mínimos (que são 2) globais neste intervalo são respectivamente

$$f(0) = 2(0)^{2/3}((0)^2 - 8) = 0,\ f(-1) = 2(-1)^{2/3}((-1)^2 - 8) = -14 \text{ e } f(-1) = 2(1)^{2/3}((1)^2 - 8) = -14$$

(b) No intervalo $[1, 7]$

$$-\sqrt{2} \notin [1, 7] \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \in [1, 7]$$

Logo o máximo e mínimo global neste intervalo são respectivamente

$$f(7) = 2(7)^{2/3}((7)^2 - 8) = 2\sqrt[3]{49}41 = 82\sqrt[3]{49} \quad \text{e} \quad f(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2})^{2/3}((\sqrt{2})^2 - 8) = -12\sqrt[3]{2}$$

(c) No intervalo $[-6, -1]$

$$-\sqrt{2} \in [-6, -1] \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \notin [-6, -1]$$

Logo o máximo e mínimo global neste intervalo são respectivamente

$$f(-6) = 2(-6)^{2/3}((-6)^2 - 8) = 56\sqrt[3]{36} \quad \text{e} \quad f(-\sqrt{2}) = -12\sqrt[3]{49}$$

Resumindo os máximos e mínimos globais dos intervalos são:

Intervalo	Mínimo	Máximo
$[-6, -1]$	$f(-\sqrt{2}) = -12\sqrt[3]{2}$	$f(-6) = 56\sqrt[3]{36}$
$[-1, 1]$	$f(-1) = -14$ e $f(1) = -14$	$f(0) = 0$
$[1, 7]$	$f(\sqrt{2}) = -12\sqrt[3]{49}$	$f(7) = 82\sqrt[3]{49}$

4. (1,25 pontos)

Um projetista foi contratado para dimensionar uma lata cilíndrica, aberta no topo (sem tampa), que será usada como embalagem de um determinado produto. O volume armazenado na lata será de 500 ml. O projetista deve informar o raio (r) e a altura (h) da lata. Sabendo que o custo de fabricação da base é três vezes o custo de fabricação da superfície lateral, determine as dimensões de forma que o custo de fabricação da lata seja mínimo.

Solução:

Seja c o custo unitário de fabricação da superfície lateral, logo o custo unitário de fabricação da base será $3c$. Seja V o volume da lata, logo

$$V = \pi r^2 h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} \quad \text{que relaciona a altura e o raio da lata}$$

Assim o custo total de fabricação da superfície lateral de uma lata será $c(2\pi rh)$ e o custo total de fabricação da base de uma lata será $3c(\pi r^2)$. O custo total da lata (C) é igual a soma dois custos, isto é

$$C = c(2\pi rh) + 3c(\pi r^2)$$

substituindo a relação entre h e r.

$$C = c(2\pi r\frac{V}{\pi r^2}) + 3c(\pi r^2) = \pi c\left[\frac{2V}{\pi r} + 3r^2\right]$$

Esta igualdade relaciona o custo total de uma lata em função de r, posto que o custo de fabricação unitário c é fixo. Para determinar o valor de r que fornece o menor custo devemos encontrar os pontos críticos, isto é, derivar a útima equação em relação a r. Obtemos,

$$\frac{dC}{dr} = \pi c\left[-\frac{2V}{\pi r^2} + 6r\right] = 2\pi c\left[3r - \frac{V}{\pi r^2}\right] = 0$$

ou

$$3r - \frac{V}{\pi r^2} = 0$$

$$3r = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$r^3 = \frac{V}{3\pi}$$

ou

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$$

e

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{3\pi}\right)^{2/3}} = \frac{V\sqrt[3]{3^2}}{V^{2/3}\left(\frac{\pi}{\pi^{2/3}}\right)} = \frac{V^{1/3}\sqrt[3]{9}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}}$$

Como $V = 500$ ml, então

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}} = \sqrt[3]{\frac{500}{3\pi}} \approx 3{,}8 \text{ cm}$$

e

$$h = \sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{9\cdot 500}{\pi}} \approx 11{,}3 \text{ cm}$$

5. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Calcule a integral definida abaixo

$$\int_0^{10} \frac{3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$$

Questão anulada!

6. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das equações $y^2 = x + 4$ e $x = y^2$.

Questão anulada!

7. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Usando a integral definida calcule o volume de um cone reto de altura h e raio da base r.

Solução:

Considerando um eixo coordenado x ao longo do eixo do cone, com origem O em seu vértice, então as seções transversais ao eixo x serão cículos. Sendo $A(x)$ a área da seção transversa determinada pelo plano que intercepta o eixo a x unidades do vértice O, então

$$A(x) = \pi(y)^2 \quad \text{sendo } y \text{ o raio do cículo}$$

por semelhança de triângulos

$$\frac{y}{x} = \frac{r}{h}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{xr}{h}$$

daí

$$A(x) = \pi y^2 = \pi\left[\frac{xr}{h}\right]^2 = \pi\frac{x^2r^2}{h^2}$$

Para calcular o volume da pirâmide vamos integrar a área de $x = 0$ até $x = h$.

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \pi\frac{r^2x^2}{h^2}\,dx$$

$$V = \pi\frac{r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \pi\frac{r^2}{h^2}\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \pi\frac{r^2}{h^2}\left[\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \pi\frac{r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \pi\frac{r^2h^3}{3h^2} = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

8. (1,25 pontos)

Calcule os seguintes limites, se existirem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$$

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

É uma forma indeterminada ∞/∞. Pela Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$$

É uma forma indeterminada ∞/∞. Pela Regra de L'Hôpital aplicada 2 vezes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$$

Reescrevendo o limite

$$\lim_{x\to 0} (e^x + e^{-x}) \frac{1}{x^2}$$

É uma forma indeterminada $2 \cdot \infty$. Pela Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} (e^x + e^{-x}) \frac{1}{x^2} = \infty$$

Erroneamente poderíamos fazer:

É uma forma indeterminada $0/0$. Pela Regra de L'Hôpital 2 vezes

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$
