Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2^o semestre de 2013 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Se $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, calcule $f'(x)$, usando a definição de derivada, isto é,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Qual o domínio de $f'(x)$? Calcule também $f'(2)$, $f'(-\sqrt{2})$ e $f'(a)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4) - (3x^2 - 5x + 4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(3(x^2 + 2xh + h^2) - 5x - 5h + 4) - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{6xh}{h} + \frac{3h^2}{h} - \frac{5h}{h} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \{6x - 5 + 3h\} = \lim_{h\to 0} \{6x - 5 + 3h\} = 6x - 5 + 3 \cdot 0 \\
&= 6x - 5
\end{aligned}$$

O domínio de $f'(x)$ é toda a reta dos reais, ou seja,

$$\text{Dom } f'(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$f'(2) = 6 \cdot 2 - 5 = 7$$

$$f'(-\sqrt{2}) = 6\left(-\sqrt{2}\right) - 5 = -6\sqrt{2} - 5$$

$$f'(a) = 6a - 5$$

2. (2,5 pontos)

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

3. (2,5 pontos)

Calcule as primeiras derivadas das funções:

(a) $$f(x) = \frac{(x^2+4)^2}{(2x^3-1)^3}$$

(b) $$f(z) = \frac{3-2z}{3+2z}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{(x^2+4)^2}{(2x^3-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{[(x^2+4)^2]' \cdot [(2x^3-1)^3] - [(x^2+4)^2] \cdot [(2x^3-1)^3]'}{[(2x^3-1)^3]^2}$$

$$f'(x) = \frac{[2(x^2+4)(2x)] \cdot [(2x^3-1)^3] - [(x^2+4)^2] \cdot [3(2x^3-1)^2(6x)]}{[2x^3-1]^6}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+4)(2x^3-1)^3 - 18x(x^2+4)^2(2x^3-1)^2}{[2x^3-1]^6}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2+4)(2x^3-1) - 18x(x^2+4)^2}{(2x^3-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4)}{(2x^3-1)^4}\left[\ 4(2x^3-1) - 9(x^2+4)\right]$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4)}{(2x^3-1)^4}\left[\ 8x^3 - 4 - 9x^2 - 36\right]$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+4)}{(2x^3-1)^4}\left[\ 8x^3 - 9x^2 - 40\right]$$

(b)

$$f(z) = \frac{3-2z}{3+2z}$$

$$f'(z) = \frac{[3-2z]' \cdot [3+2z] - [3-2z] \cdot [3+2z]'}{[3+2z]^2}$$

$$f'(z) = \frac{[-2] \cdot [3+2z] - [3-2z] \cdot [2]}{[3+2z]^2} = \frac{-6-4z-6+4z}{[3+2z]^2}$$

$$f'(z) = -\frac{12}{[3+2z]^2}$$

4. (2,5 pontos)

Ache o valor intermediário descrito no Teorema do Valor Médio para a função $f(x) = x^3 - 12x$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\sqrt{3}$.

Solução:

Existe c entre 0 e $2\sqrt{3}$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2\sqrt{3}) - f(0)}{2\sqrt{3} - 0}$$

$$f(0) = 0^3 - 12 \cdot 0 = 0$$

$$f(2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3})^3 - 12 \cdot (2\sqrt{3}) = 8\sqrt{3^3} - 12 \cdot (2\sqrt{3}) = 24\sqrt{3} - 24\sqrt{3} = 0$$

logo

$$f'(c) = \frac{f(2\sqrt{3}) - f(0)}{2\sqrt{3} - 0} = \frac{0-0}{2\sqrt{3}} = \frac{0}{2\sqrt{3}} = 0$$

mas

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

e

$$f'(c) = 3c^2 - 12 = 0 \Longrightarrow c^2 = 4 \Longrightarrow c = \pm 2$$

No intervalo considerado

$$c = 2$$