Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática para Computação

AP1 - 2º semestre de 2008.

Nome –

Assinatura –

Observações:

1.Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.

2.Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

3.Você pode usar lápis para responder as questões.

4.Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

5.Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

1. (1.0 ponto)

   Determine o domínio das funções abaixo. Justifique:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

   (b) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

   Solução:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

   $x - 2$ está no denominador. Portanto, deve assumir valores diferentes de zero para que essa razão esteja definida.

   $x - 2 \neq 0$

   $x \neq 2$

Logo, o domínio da função $f(x)$ é dado por:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$$

(b) $$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$$

A expressão $4 - x^2$ está no interior de uma raiz quadrada. Dessa forma, deve assumir somente valores positivos ou nulos, ou seja, $4 - x^2 \geq 0$

$$4 - x^2 \geq 0$$

$$-x^2 \geq -4$$

$$x^2 \leq 4$$

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

Logo, o domínio da função $f(x)$ é dado por:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x \leq 2\}$$

2. (1.0 ponto) ______________________________

Calcule $(f + g)$, $(f - g)$, $(f.g)$, (f/g) e dê o domínio de cada uma dessas funções:

$$f(x) = x^2 + 4 \ , \ g(x) = x - 3$$

Solução:

(a) $$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 4 + x - 3 = x^2 + x + 1$$

$$D(f + g) = \mathbb{R}$$

(b) $$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 + 4 - (x - 3) = x^2 + 4 - x + 3 = x^2 - x + 7$$

$$D(f - g) = \mathbb{R}$$

(c) $$(f.g)(x) = f(x).g(x) = \left(x^2 + 4\right).(x - 3) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$$

$$D(f.g) = \mathbb{R}$$

(d) $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = \left(x^2+4\right)/(x-3)$

$D(f/g) = \mathbb{R} - \{+3\}$

3. (1,0 ponto)

Calcule as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ e determine seus domínios:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\ ,\ g(x) = 2x+1$$

Solução:

- $f \circ g$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\ ,\ g(x) = 2x+1$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x+1) = \frac{1}{(2x+1)^2}$$

Como a expressão $(2x+1)^2$ está no denominador, essa deve assumir valores diferentes de zero. Dessa forma, $(2x+1)$ deve ser não nulo, ou seja,

$$2x+1 \neq 0$$

$$2x \neq -1$$

$$x \neq -\frac{1}{2}$$

Logo, o domínio da função $(f \circ g)$ é dado por:

$$D(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

- $g \circ f$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\ ,\ g(x) = 2x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x^2}\right) = 2\left(\frac{1}{x^2}\right) + 1 = \frac{2}{x^2} + 1 = \frac{2 + x^2}{x^2}$$

Dessa forma, para que a função esteja definida, o denominador (x^2) deve ser diferente de zero.

$$x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

Logo, o domínio é dado por:

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

4. (2.0 pontos)

Determine cada um dos tópicos abaixo utilizando as ferramentas do cálculo. Justifique. A partir disso, esboce o gráfico da função f:

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

1 - Intersecções com eixos X e Y
2 - Assíntotas Horizontais e Verticais
3 - Domínio

Solução:

1 - Intersecções com eixos X e Y

Intersecções com eixo X (y = 0)

$$0 = \frac{1}{x - 2}$$

Não existem valores de x que tornem a igualdade acima verdadeira. Dessa forma, não existem intersecções com o eixo X.

Intersecções com eixo Y (x = 0)

$$y = \frac{1}{0-2}$$

$$y = -\frac{1}{2}$$

A Intersecção com o eixo Y ocorre em $y = -\frac{1}{2}$, ou seja, no ponto $(0, -\frac{1}{2})$

2 - Assíntotas Horizontais e Verticais

Assíntotas Horizontais

são os valores y_0 tais que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_0$$

ou

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = y_0$$

Logo, para essa questão:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Dessa forma, $y_0 = 0$ é a única assíntota horizontal existente para a função $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Assíntotas Verticais

são os valores a tais que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

ou

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Para essa questão, temos que:

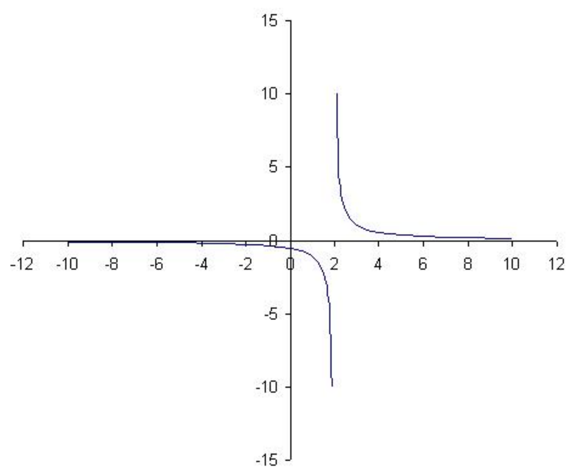
O único valor que faz a função $f(x) = \frac{1}{x-2}$ tender a $+\infty$ ou $-\infty$ é o valor $a = 2$, ou seja,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{0} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{0} = -\infty$$

3 - Domínio

Como $x - 2$ está no denominador, temos que a função $f(x)$ não está definida somente no valor de $x = 2$. Dessa forma, o domínio da função é $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.



5. (1.0 ponto)

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine seus domínios:

(a) $f(x) = \sqrt{x}\ ;\ x \geq 0$

(b) $g(x) = 2x - 1$

Solução:

(a) $f(x) = \sqrt{x}\ ;\ x \geq 0$

$y = \sqrt{x}\ ;\ x \geq 0$

mudança de variáveis $x \Leftrightarrow y$

$x = \sqrt{y}$

$y = x^2$

$f^{-1}(x) = x^2$

$D(f^{-1}(x)) = \mathbb{R}$

(b) $g(x) = 2x - 1$

$y = 2x - 1$

mudança de variáveis $x \Leftrightarrow y$

$x = 2y - 1$

$x + 1 = 2y$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

$D(g^{-1}(x)) = \mathbb{R}$

6. (1.5 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) =$

(c) $\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} =$

Solução:

(a)
$$\lim_{x\to 2} x^3 - 3x + 5 =$$
$$= \lim_{x\to 2} x^3 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$
$$= 2^3 - 3.2 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$= 7$$

(b)
$$\lim_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) =$$
$$= \lim_{x\to +\infty} 2 + \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= 2 + 0$$
$$= 2$$

(c)
$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} =$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+3}$$
$$= \frac{1}{7}$$

7. (0.5 ponto)

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Solução:

Utilizando a definição de continuidade, a função f(x) é contínua se verificar todas as três condições abaixo:

$$(i) f(x_0) \text{ está definida }; \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

(ii) existe o limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x); \forall x_0 \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0); \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Podemos verificar que:

o primeiro ítem não é verdadeiro para $x = 2$, ou seja, $f(x)$ não está definida nesse valor de x. Contudo, o segundo ítem é verdadeiro, ou seja,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Concluimos que, mediante a não verificação de todos os itens (i), (ii), (iii) simultaneamente, a função $f(x)$ não é contínua, uma vez que, não é contínua em $x = 2$.

8. (0.5 ponto) ___

Utilizando a definição de derivada, calcule:

$$\frac{dy}{dx} =? \;, \quad y = x^2 + 3x + 5$$

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

desenvolvemos $f(x + \Delta x)$ e $f(x)$ separadamente, da seguinte forma:

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 + 3(x + \Delta x) + 5 =$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 5$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 5$$

Logo, a derivada da função $y = x^2 + 3x + 5$, é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x + 5) - (x^2 + 3x + 5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x + 3$$

$$= 2x + 3$$

9. (1.5 ponto)

Calcule as derivadas abaixo:

(a) $\dfrac{dy}{dx} =?\ ,\ y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4$

(b) $\dfrac{dy}{dx} =?\ ,\ y = \dfrac{2}{x}$

(c) $\dfrac{dx}{dy} =?\ ,\ x = \sqrt{1 - y}$

Solução:

(a) $\dfrac{dy}{dx} =?\ ,\ y = 4 + 2x - 3x^2 - 5x^3 - 8x^4$

$$= 2 - 6x - 15x^2 - 32x^3$$

(b) $\dfrac{dy}{dx} =?\ ,\ y = \dfrac{2}{x}$

$$= \frac{2'.x - x'.2}{x^2}$$

$$= \frac{0.x - 1.2}{x^2}$$

$$= -\frac{2}{x^2}$$

(c) $$\frac{dx}{dy} =? \ , \ x = \sqrt{1-y} \ ; \ y \leq 1$$

$$= (1-y)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,.(-1)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-y}}$$