Integral Definida

1. Introdução

O cálculo diferencial e integral, também chamado de cálculo infinitesimal, ou simplesmente Cálculo é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo das taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como a área debaixo de uma curva ou o volume de um sólido), calculados respectivamente pela derivada e integral.
O cálculo envolve inicialmente o conceito de limites e somatórias para depois fundamentar o conceitos de derivadas e integrais de funções. A integral também pode ser chamada de antidiferenciação, porque o processo de integração de uma função inverte o processo de diferenciação.

1.1. Integral

A integral é um operador aplicado sobre uma **diferencial**, com o objetivo de recuperar a função que foi diferenciada ou derivada; a operação matemática que esse operador executa chama-se **integração**. O objetivo de uma integração é obter um número ou uma relação explícita entre variáveis.
As integrais podem ser classificadas em três tipos:
a) integrais indefinidas;
b) integrais definidas;
c) integrais impróprias.

As propriedades e características desses tipos de integração surgem dos processos de obtenção das regras de integração.

2. Integral Definida

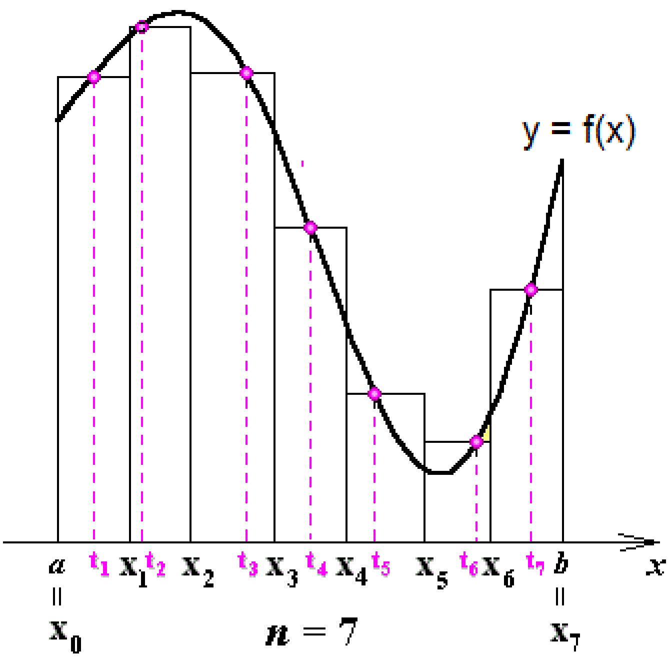
É o cálculo da área do grafico de uma função entre dois número dados. A Geometria é ineficaz para o cálculo da área do gráfico de uma função, para esse fim utiliza-se o conceito integrais definidas.

2.1. Soma de Riemann

Soma de Riemann é a soma da área do gráfico de uma função, curva ou gráfico formada por vários retângulos cuja as bases são formadas por $a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x7 = b$ e altura $t_1, t_2 \ldots t_7$.
Esta área é uma aproximação da área delimitada por uma função, curva ou gráfico através de retângulos.

$\boxed{\text{Área} = \Sigma\ f(x).\Delta x.}$

Calcula-se a área de cada retângulo e soma-se todas essas áreas juntas para aproximar ao valor de área pretendido para a função em questão.



Dada uma função **f** limitada num intervalo [a,b], e uma partição P = {x_o = a < x_1 < x_2 < ... < x_{n-2} < b = x_n} desse intervalo, uma soma de Riemman é

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta_k x,\ \ onde\ \ t_k \in [x_{k-1}, x_k]\ \ e\ \ \Delta_k x = x_k - x_{k-1}$$

2.2. Interpretação Geométrica

Suponha que y = f(x) seja contínua e positiva em um intervalo [a,b]. Dividindo este intervalo em n sub-intervalos de comprimento iguais, ou seja, de comprimento $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, de modo que a = $a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n$ = b. Seja x_i um ponto qualquer no sub-intervalo [a_{k-1}, a_k], k = 1,2,...,n. Constuímos em cada um desses sub-intervalos retângulos com base Δx e altura f(x_i), conforme a figura do item 2.1.

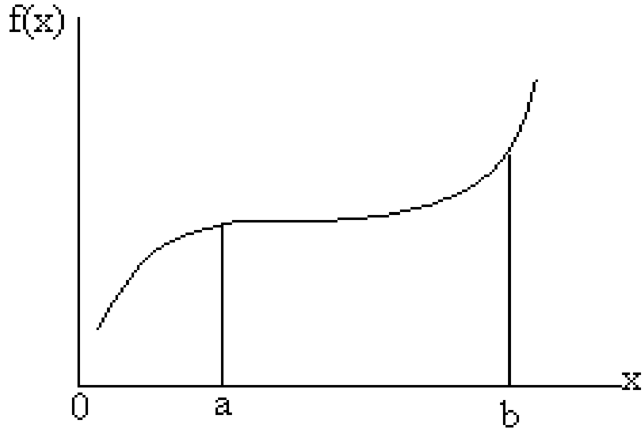
A soma das áreas dos n retângulos construídos é dado por: A = $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)].\Delta x$ = $\int_a^b f(x)dx$, mas este limete é exatamente igual à definição de integral definida e com isso observamos que a **integral definida** de uma função contínua e **positiva**, para **x** variando de **a** até **b**, fornece a área da região limitada pelo gráfico de **f**, pelo **eixo-x** e pelas retas **x=a** e **x=b**.

Observação: Na definição de integral definida consideramos um função contínua qualquer, podendo assumir valores negativos. Nesse caso o produto f(x_i).Δx representa o negativo da área do retângulo. Se f(x) < 0 para x ∈ [a,b], então A = - $\int_a^b f(x)dx$.

2.3. Pelo Método da Antidiferenciação

A eliminação da constante de integração pode ser obtida através de um tipo de integral chamado de integral definida, que é uma integral cujo processo de integração deve ser realizado **entre dois**

valores da variável de integração.
Suponha que você conheça a taxa f(x) = dF/dx = F', na qual uma certa grandeza F está variando e deseje encontrar a quantidade pela qual a grandeza F variará entre x = a e x = b. Você pode primeiro encontrar F por antidiferenciação, e então calcular a diferença:
Variação em F entre x= a e x = b = F(b) – F(a)



O resultado numérico deste cálculo é chamado de integral definida da função **f** e é denotado pela fórmula:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

Leitura: integral definida de f de a até b.
Os números a e b são denominados limites de integração.
Se f é uma função de x, então a sua integral definida é uma integral restrita à valores em um intervalo específico, digamos, a ≤ x ≤ b. O resultado é um número que depende apenas de a e b, e não de x. Vejamos a definição:

Definição: Seja f uma função contínua no intervalo [a, b]. Supondo que este intervalo seja dividido em n partes iguais de largura Δx = (b - a)/n e seja xi um número pertencente ao i-mésimo intervalo, para i = 1, 2, ..., n. Nesse caso, a integral definida de f em [a,b], denotada por

$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$, é dado por $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)].\Delta x$, se este limite existir.

Pode-se mostrar que se a função y = f(x) é contínua em um intervalo [a,b], então ela é integrável em [a,b].

3. Teorema Fundamental do Cálculo

I) Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a, b] e seja x qualquer número neste intervalo.

Se F for uma função tal que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, então **F'(x) = f(x)**.

Leitura:
A integral da derivada de **f(x)** é igual a **F(x)** chamada de antiderivada.

Análise:
Se F(x) = f(x) + C, derivando os dois lados da equação, tem-se: F'(x) = f'(x), então: F(x) é a

antiderivada de f(x).

Observe que a integração da derivada de uma constante **não** reproduz a função original que é uma constante, pois derivada de constante é zero, portanto, ao fazer uma integração soma-se uma constante a função original, este tipo de integral é denominado **integral indefinida**.
A integração indefinida ou antiderivação é a operação inversa da diferenciação.

Conclusão: a antiderivação é o processo pelo qual operamos a deferencial de uma função para encontrar a sua exata função primitiva.

Exemplo:
Se $f(x) = x^3/3$, então sua derivada é: $f'(x) = 3x^2/3 = x^2$. Nesse caso, uma das anti-derivadas de x^2 é $x^3/3$.

II) Se f uma função contínua no intervalo fechado [a, b] e seja F uma primitiva de f . Então:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a)}$$

Este segundo teorema estabelece uma conexão entre as integrais indefinidas e as integrais definidas. Esta conexão é a fórmula também conhecida como **fórmula de Newton-Leibniz**.

4. Propriedades da Integral Definida

Nas propriedades enunciadas a seguir consideremos, **f** e **g**, funções contínuas nos intervalos fechados sugeridos pelos limites de integração.

1) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \ \forall a, b, c \in R;$

3) $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx, \ \forall c \in R;$

4) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$

5) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \geq 0;$

6) Se $f(x) \leq g(x)$ em $[a, b]$ então $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$

7) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$ se $a \leq b$

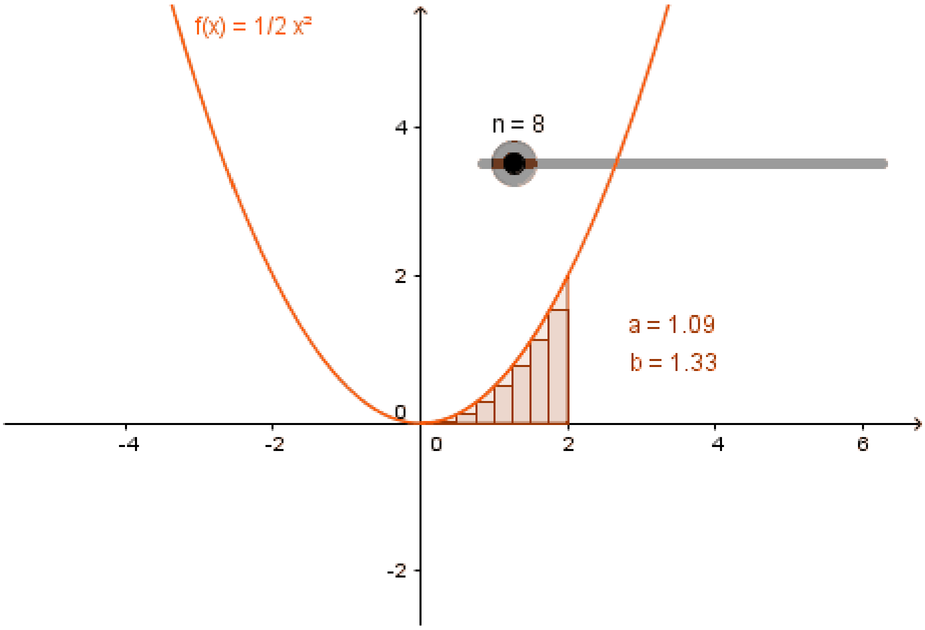
8) Se $m \leq f(x) \leq M$, para todo x em $[a, b]$ então $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

5. Laboratório de Integral

Calcule a área da região plana compreendida pelo gráfico da função $f(x)=1/2x^2$, pelo eixo x e pela reta vertical x = 2.

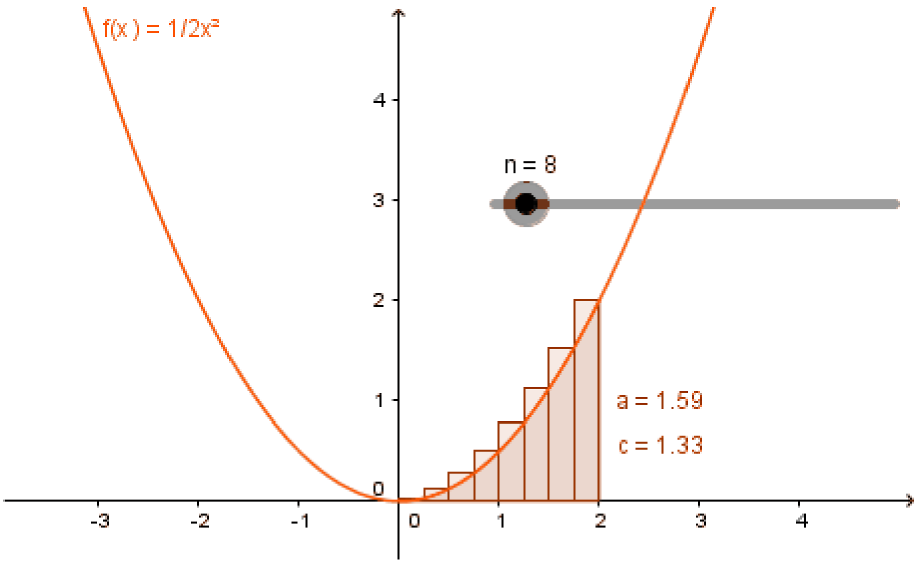
Observe que $\int_0^2 \frac{1}{2}x^2 = 1.33$ que pode ser obtido em uma calculadora, a medida que aumenta o número de retângulos na área abaixo do gráfico entre o intervalo [0,2], mais se aproxima de 1.33.

Pela Soma de Riemann Inferior:



Reload Image

Pela Soma de Riemann Superior:



Reload Image

6. Exercícios
6.1. Calcule os Integrais Efetuando a Substituição de Variáveis

Exercício 1:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx \cdot cos^2 x \cdot dx .$$

Fazemos a substituição $senx = t$. Então temos:

$$senx = t \quad \Rightarrow \quad x = arcsen\,t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad \text{e} \quad cos^2 x = 1 - sen^2 x = 1 - t^2 .$$

Determinamos os limites de integração para a variável t:

$$x_{inf} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{inf} = sen(0) = 0 , \qquad x_{sup} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{sup} = sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

Portanto

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} senx \cdot cos^2 x \cdot dx = \int_0^1 t \cdot (1-t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt = \int_0^1 t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cdot d(t^2)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \sqrt{1-t^2} \cdot d(1-t^2) = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot d(1-t^2) = -\frac{1}{2} \cdot \left. \left(\frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right) \right|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \left. \left(\frac{\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \right|_0^1 = -\frac{1}{3} \cdot \left. \left(\left(1-t^2\right)^{\frac{3}{2}} \right) \right|_0^1 = -\frac{1}{3} \cdot \left[\left(1-1^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1-0^2\right)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{1}{3} .$$

Exercício 2:

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot dx .$$

Fazemos a substituição $e^x = t$. Então temos:

$$e^x = t \quad \Rightarrow \quad x = ln\,t \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{t} .$$

Determinamos os limites de integração para a variável t:

$$x_{inf} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{inf} = e^0 = 1 , \qquad x_{sup} = 1 \quad \Rightarrow \quad t_{sup} = e^1 = e .$$

Portanto

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} \cdot dx = \int_0^1 \frac{1}{e^x + \frac{1}{e^x}} \cdot dx = \int_1^e \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} \cdot dt = \int_1^e \frac{1}{t^2+1} \cdot dt = \left(arctg\,t\right)\Big|_1^e =$$

$$= arctg\,e - arctg\,1 = arctg\,e - \frac{\pi}{4} .$$

Exercício 3:

$$\int_0^4 x \cdot \sqrt{x^2+9} \cdot dx .$$

Fazemos a substituição $\sqrt{x^2+9} = t$. Então temos:

$$\sqrt{x^2+9} = t \quad \Rightarrow \quad x^2+9 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{t^2-9} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{t \cdot dt}{\sqrt{t^2-9}} .$$

Determinamos os limites de integração para a variável t:

$$x_{inf} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{inf} = \sqrt{9} = 3, \qquad x_{sup} = 4 \quad \Rightarrow \quad t_{sup} = \sqrt{4^2+9} = 5 .$$

Portanto

$$\int_0^4 x \cdot \sqrt{x^2+9} \cdot dx = \int_3^5 \sqrt{t^2-9} \cdot t \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2-9}} \cdot dt = \int_3^5 t^2 \cdot dt = \left(\frac{t^3}{3} \right) \Bigg|_3^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{3^3}{3} = \frac{98}{3} .$$

Exercício 4:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} .$$

Fazemos a substituição $\sqrt{x+1} = t$. Então temos:

$$\sqrt{x+1} = t \quad \Rightarrow \quad x+1 = t^2 \quad \Rightarrow \quad x = t^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t \cdot dt .$$

Determinamos os limites de integração para a variável t:

$$x_{inf} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{inf} = \sqrt{1} = 1, \qquad x_{sup} = 2 \quad \Rightarrow \quad t_{sup} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} .$$

Portanto

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + (\sqrt{x+1})^3} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t \cdot dt}{t + t^3} = 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t \cdot dt}{t(1+t^2)} =$$

$$= 2 \cdot \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = 2 \cdot (arctg\, t) \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2 \cdot \left(arctg \sqrt{3} - arctg 1 \right) = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6} .$$

Exercício 5:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

Fazemos a substituição $\sqrt{x}=t$. Então temos:
$\sqrt{x}=t \quad \Rightarrow \quad x=t^2 \quad \Rightarrow \quad dx=2t\cdot dt$.

Determinamos os limites de integração para a variável t:

$x_{inf}=0 \quad \Rightarrow \quad t_{inf}=\sqrt{0}=0, \qquad x_{sup}=4 \quad \Rightarrow \quad t_{sup}=\sqrt{4}=2$.

Portanto

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}=\int_0^2 \frac{2t\cdot dt}{1+t}=2\cdot\int_0^2 \frac{t\cdot dt}{1+t}=2\cdot\int_0^2 \frac{1+t-1}{1+t}\cdot dt=2\cdot\int_0^2\left(\frac{1+t}{1+t}-\frac{1}{1+t}\right)\cdot dt=$$

$$=2\cdot\int_0^2 dt-2\cdot\int_0^2 \frac{1}{1+t}\cdot d(1+t)=2\cdot(t)\Big|_0^2-2\cdot\left(ln\left|1+t\right|\right)\Big|_0^2=$$

$$=2\cdot(2-0)-2\cdot\left(ln\left|1+2\right|-ln\left|1+0\right|\right)=4-2\cdot ln\,3.$$

Exercício 6:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}.$$

Fazemos a substituição $e^x=t$. Então temos:
$e^x=t \quad \Rightarrow \quad x=ln\,t \quad \Rightarrow \quad dx=\frac{dt}{t}$.

Determinamos os limites de integração para a variável t:

$x_{inf}=0 \quad \Rightarrow \quad t_{inf}=e^0=1, \qquad x_{sup}=1 \quad \Rightarrow \quad t_{sup}=e^1=e$.

Portanto

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1}=\int_1^e \frac{dt}{(t+1)\cdot t}=\int_1^e \frac{1+t-t}{(t+1)\cdot t}\cdot dt=\int_1^e\left(\frac{1+t}{(t+1)\cdot t}-\frac{t}{(t+1)\cdot t}\right)\cdot dt=$$

$$=\int_1^e\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{(t+1)}\right)\cdot dt=\int_1^e \frac{1}{t}\cdot dt-\int_1^e \frac{1}{t+1}\cdot d(t+1)=\left(ln\left|t\right|\right)\Big|_1^e-\left(ln\left|t+1\right|\right)\Big|_1^e=$$

$$=(lne-ln1)-(ln(e+1)-ln2)=lne+ln2-ln(e+1)=ln(2e)-ln(e+1)=ln\frac{2e}{e+1}$$

6.2. Calcular os Integrais pelo Método da Integração por Partes
Exercício 1:

$$\int_0^1 xe^{-x}dx.$$

Fazemos:

$U = x \;\Rightarrow\; dU = dx, \quad dV = e^{-x}dx \;\Rightarrow\; V = \int e^{-x}dx = -e^{-x}.$

Portanto

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left(x\cdot\left(-e^{-x}\right)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(-e^{-x}\right)dx = -\left(x\cdot\left(e^{-x}\right)\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}\,dx = -\left(x\cdot\left(e^{-x}\right)\right)\Big|_0^1 + \left(-e^{-x}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= -\left(x\cdot\left(e^{-x}\right)\right)\Big|_0^1 - \left(e^{-x}\right)\Big|_0^1 = -\left(1\cdot e^{-1} - 0\cdot e^{0}\right) - \left(e^{-1} - e^{0}\right) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

Exercício 2:

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot dx}{sen^2 x}.$$

Fazemos:

$U = x \;\Rightarrow\; dU = dx, \quad dV = \dfrac{dx}{sen^2 x} \;\Rightarrow\; V = \int \dfrac{dx}{sen^2 x} = -ctg\,x.$

Portanto

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\cdot dx}{sen^2 x} = \left(-x\cdot ctg\,x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (-ctg\,x)\cdot dx = \left(-x\cdot ctg\,x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{cos\,x}{sen\,x}\cdot dx =$$

$$= -\left(x\cdot ctg\,x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d(sen\,x)}{sen\,x} = -\left(x\cdot ctg\,x\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \left(ln\left|senx\right|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\left(\frac{\pi}{3}\cdot ctg\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{4}\cdot ctg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \left(ln\left|sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| - ln\left|sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|\right) = \frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2}\cdot ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Exercício 3:

$$\int_0^1 \frac{arcsen\,x}{\sqrt{1+x}} \cdot dx.$$

Fazemos:

$$U = arcsen\,x \quad \Rightarrow \quad dU = (arcsen\,x)' \cdot dx = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx,$$

$$dV = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad V = \int \frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot dx = \int (1+x)^{-\frac{1}{2}} \cdot d(1+x) = \frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{1+x}.$$

Portanto

$$\int_0^1 \frac{arcsen\,x}{\sqrt{1+x}} \cdot dx = \left(2\sqrt{1+x} \cdot arcsen\,x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx =$$

$$= \left(2\sqrt{1+1} \cdot arcsen(1) - 2\sqrt{1+0} \cdot arcsen(0)\right) - \int_0^1 2\sqrt{1+x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}} \cdot dx =$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot dx = \sqrt{2}\pi + 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot d(1-x) = \sqrt{2}\pi + 2 \cdot \left(\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \sqrt{2}\pi + 4 \cdot \left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^1 = \sqrt{2}\pi + 4 \cdot \left((1-1)^{\frac{1}{2}} - (1-0)^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{2}\pi - 4.$$

Exercício 4:

$$\int_0^1 arctg\sqrt{x}\cdot dx.$$

Fazemos:

$$U = arctg\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad dU = \left(arctg\sqrt{x}\right)'\cdot dx = \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'\cdot dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)},$$

$$dV = dx \quad \Rightarrow \quad V = x.$$

Portanto

$$\int_0^1 arctg\sqrt{x}\cdot dx = \left(x\cdot arctg\sqrt{x}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}\cdot(1+x)}\cdot dx =$$

$$= \left(1\cdot arctg\sqrt{1} - 0\cdot arctg\sqrt{0}\right) - \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{1+x}\cdot dx =$$

Fazemos a substituição

$$\sqrt{x} = t \quad \Rightarrow \quad x = t^2 \quad \Rightarrow \quad dx = 2t\,dt;$$

Determinamos os limites de integração para a variável t:

$$x_{inf} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{inf} = \sqrt{0} = 0, \qquad x_{sup} = 1 \quad \Rightarrow \quad t_{sup} = \sqrt{1} = 1.$$

Na continuação temos:

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\cdot 2t\cdot dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1\frac{t^2}{1+t^2}\cdot dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\cdot dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_0^1\left(\frac{1+t^2}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)\cdot dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\cdot dt = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 dt + \int_0^1\frac{1}{1+t^2}\cdot dt =$$

$$= \frac{\pi}{4} - (t)\Big|_0^1 + (arctg\,t)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - (1-0) + \left(arctg\,(1) - arctg\,(0)\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercício 5:

$$\int_0^1 ln(1+x)\cdot dx\,.$$

Fazemos:

$$U = ln(1+x) \quad \Rightarrow \quad dU = \left(ln(1+x)\right)' \cdot dx = \frac{1}{1+x}\cdot dx\,,$$
$$dV = dx \quad \Rightarrow \quad V = x\,.$$

Portanto

$$\int_0^1 ln(1+x)\cdot dx = \left(x\cdot ln(1+x)\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\cdot dx = \left(1\cdot ln(1+1) - 0\cdot ln(1+0)\right) - \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x^2}\cdot dx =$$

$$= ln(2) - \int_0^1\left(1 - \frac{1}{1+x}\right)\cdot dx = ln(2) - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\cdot d(1+x) =$$

$$= ln(2) - \int_0^1 dx + \int_0^1 \frac{1}{1+x}\cdot d(1+x) = ln(2) - (x)\Big|_0^1 + \left(ln(1+x)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= ln(2) - (1-0) + \left(ln(1+1) - ln(1+0)\right) = 2\cdot ln(2) - 1\,.$$

6.3. Calcular os Integrais

Exercício 1:

$$\int_1^2 (x^3 - 2x)\cdot ln\,x\cdot dx\,.$$

Integramos por partes. Fazemos:

$$U = ln\,x \quad \Rightarrow \quad dU = (ln\,x)' \cdot dx = \frac{1}{x}\cdot dx\,,$$

$$dV = (x^3 - 2x)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad V = \int (x^3-2x)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad V = \frac{x^4}{4} - x^2\,.$$

Portanto

$$\int_1^2 (x^3-2x)\cdot ln\,x\cdot dx = \left(\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\cdot ln\,x\right)\Bigg|_1^2 - \int_1^2\left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx =$$

$$= \left(\left(\frac{2^4}{4} - 2^2\right)\cdot ln\,2 - \left(\frac{1^4}{4} - 1^2\right)\cdot ln\,1\right) - \int_1^2\left(\frac{x^3}{4} - x\right)\cdot dx = -\int_1^2\left(\frac{x^3}{4} - x\right)\cdot dx =$$

$$= -\int_1^2 \frac{x^3}{4}\cdot dx + \int_1^2 x\cdot dx = -\left(\frac{x^4}{16}\right)\Bigg|_1^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2 = -\left(\frac{2^4}{16} - \frac{1^4}{16}\right) + \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = -\frac{15}{16} + \frac{3}{2} = \frac{9}{16}\,.$$

Exercício 2:

Calcular o comprimento da linha dada pela função $f(x)=\sqrt{x^3}$, com $x\in\left[0,\frac{4}{3}\right]$.

Para calcular o comprimento da linha utilizamos a fórmula $l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$.

Temos: $a=0$, $b=\frac{4}{3}$, $f'(x)=\left(\sqrt{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}$.

Portanto

$$l=\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\cdot dx=\int_0^{\frac{4}{3}}\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\cdot dx=\frac{4}{9}\cdot\int_0^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}}\cdot d\left(1+\frac{9}{4}x\right)=$$

$$=\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_0^{\frac{4}{3}}=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{4}{3}}=\frac{8}{27}\cdot\left(\left(1+\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+\frac{9}{4}\cdot 0\right)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{56}{27}.$$

Exercício 3:

Calcular o comprimento da linha dada pela função $f(x)=\sqrt{1-x^2}+arcsenx$, com $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Para calcular o comprimento da linha utilizamos a fórmula $l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\cdot dx$.

Temos: $a=0$, $b=\frac{1}{2}$,

$$f'(x)=\left(\sqrt{1-x^2}+arcsenx\right)'=\left(\sqrt{1-x^2}\right)'+\left(arcsenx\right)'=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)\cdot(1+x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Portanto

$$l=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}\cdot dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1-x}{1+x}}\cdot dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+x+1-x}{1+x}}\cdot dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{1+x}}\cdot dx=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\cdot dx=\sqrt{2}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\cdot d(1+x)=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)=2(\sqrt{3}-\sqrt{2}).$$