Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática Para Computação

AP 1 - 2° semestre de 2007 - gabarito

1. (1.0 ponto)

   Determine o domínio das funções abaixo. Justifique:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x}$

   (b) $f(x) = \sqrt{2x}$

   Solução:

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x}$

   $x^2 - x \neq 0$

   $x(x-1) \neq 0$

   $x \neq 0 \; x \neq 1$

   $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0 \, , \; x \neq 1\}$

   (b) $f(x) = \sqrt{2x}$

   $2x \geq 0$

   $x \geq 0$

   $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

2. (1.0 ponto)

Calcule $(f+g)$, $(f-g)$, $(f.g)$, (f/g) e dê o domínio da cada uma dessas funções:

$$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = 2x$$

Solução:

$$f(x) = x^2 \ , \ g(x) = 2x$$

$$(f+g)(x) = x^2 + 2x$$

$$D(f+g) = \mathbb{R}$$

$$(f-g)(x) = x^2 - x$$

$$D(f-g) = \mathbb{R}$$

$$(f.g)(x) = (x^2).(2x) = 2x^3$$

$$D(f.g) = \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = \frac{x^2}{2x}$$

$$2x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$D(f/g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

3. (1,0 ponto)

Calcule as funções compostas fog e gof e determine seus domínios:

$$f(x) = 3x - 2 \ , \ g(x) = 2x + 3$$

Solução:

$$f(x) = 3x - 2 \ , \ g(x) = 2x + 3$$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3(2x+3) - 2 = 6x + 9 - 2 = 6x + 7$

$D(f \circ g) = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(3x-2) + 3 = 6x - 4 + 3 = 6x - 1$

$D(g \circ f) = \mathbb{R}$

4. (2.0 pontos)

Determine cada um dos tópicos abaixo utilizando as ferramentas do cálculo. Justifique. A partir disso, esboce o gráfico da função f:

$$f(x) = x^2(1 - x^2)$$

1 - Intersecções com eixos x e y
2 - Assíntotas Horizontais
3 - Domínio

Solução:

$$f(x) = (x^2).(1 - x^2)$$

iii) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f = \mathbb{R}$).

ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to\infty} (x^2)(1-x^2) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (-x^4 + x^2)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \left(\lim_{x\to\infty} -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \cdot (-1 + 0)$$

$$\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty} (x^2)(1-x^2) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (-x^4 + x^2)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^4 \left(-1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^4 \left(\lim_{x \to -\infty} -1 + \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^4 \cdot (-1 + 0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.

E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.

Não existem assíntotas verticais posto que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

i) Intersecções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^2(1 - x^2)$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (intersecção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

$$0 = x^2(1 - x^2)$$

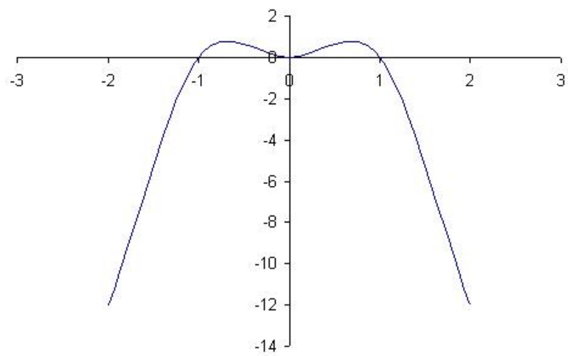
$$x^2 = 0 \ (1 - x^2) = 0$$

$$x = 0 \ x = 1/; x = -1$$

Portanto, as intersecções com o Eixo x são: $x = 0, x = 1, x = -1$.

Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 0.(1 - 0) = 0$



5. (1.0 ponto)

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine seus domínios:

(a) $$f(x) = x^2$$

(b) $$g(x) = \frac{1}{x}$$

Solução:

(a)
$$y = x^2$$
$$x = y^2$$
$$y = \pm\sqrt{x}$$
$$D(y^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$$

(b)
$$g(x) = \frac{1}{x}$$
$$y = \frac{1}{x}$$
$$x = \frac{1}{y}$$
$$y = \frac{1}{x}$$
$$D(y^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

6. (1.5 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{y \to 5} \frac{3y-5}{y-2} =$

(b) $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$

(c) $\lim_{t \to 0} \frac{3t-5}{t+2} =$

Solução:

(a) $\lim_{y \to 5} \frac{3y-5}{y-2} =$

$$\frac{\lim_{y\to 5}(3y-5)}{\lim_{y\to 5}(y-2)}$$

$$= \frac{\lim_{y\to 5} 3y - \lim_{y\to 5} 5}{\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 2}$$

$$= \frac{3\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 5}{\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 2}$$

$$= \frac{3\lim_{y\to 5} y - 5}{\lim_{y\to 5} y - 2}$$

$$= \frac{3.5-5}{5-2}$$

$$= \frac{15-5}{5-2}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(b) $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$

$$= \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} x^3 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} 2^3 - 3\lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} 8 - 3\lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 8 - 3.2 + 5$$

$$= 7$$

7. (0.5 ponto)

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 16}$$

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 16}$$

a função f possui descontinuidade infinita em $x = +2$ e em $x = -2$ pois $f(+2)$ e $f(-2)$ não estão definidas:

$$x \to 2^- \to f(x) \to -\infty$$

$$x \to 2^+ \to f(x) \to +\infty$$

$$x \to -2^- \to f(x) \to +\infty$$

$$x \to -2^+ \to f(x) \to -\infty$$

A função f é contínua para valores de x tais que $x \neq +2$ e $x \neq -2$.

8. (0.5 ponto)

Utilizando a definição de derivada, calcule:

$$\frac{dy}{dx} =? \ , \quad y = 4x + 1$$

Solução:

$$\frac{dy}{dx} =? \ , \quad y = 4x + 1$$

$$f(x) = 4x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4(x+\Delta x)+1)-(4x+1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4x+4\Delta x+1)-(4x+1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 4$$

$$= 4$$

9. (1.5 ponto)

Calcule as derivadas abaixo:

(a) $\frac{dy}{dx} =? \ , \ y = x^3 - 12x + 13$

(b) $\frac{dy}{dx} =? \ , \ y = x^2 + \frac{1}{x} \ , x \neq 0$

(c) $\frac{dx}{dy} =? \ , \ y = \sqrt{2x}$

Solução:

(a) $\frac{dy}{dx} =? \ , \ y = x^3 - 12x + 13$

$$y = x^3 - 12x + 13$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12$$

(b) $\frac{dy}{dx} =? \ , \ y = x^2 + \frac{1}{x} \ , x \neq 0$

$$y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \left(\frac{0.x - 1.1}{x^2}\right)$$

$$= 2x + \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= 2x - \frac{1}{x^2}$$

(c) $$\frac{dx}{dy} =? \ , \ y = \sqrt{2x}$$

$$y = \sqrt{2x}$$

$$\frac{dx}{dy} = (2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}(2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x}}$$