Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 1^o semestre de 2013

Nome:

Assinatura:

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.
2. Use caneta para preencher seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
3. Você pode usar lápis para responder as questões.
4. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
5. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.
6. Justifique suas respostas.

Questões

1. (2,5 pontos)

   Para as seguintes funções verifique se elas tem inversas. Para as funções que tem inversa ache sua expressão (f^{-1}) e calcule sua derivada.

   (a) $f(x) = x^2 + 2$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

   Solução:

(a) $f(x) = x^2 + 2$

$$y = x^2 + 2 \Longrightarrow y - 2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{y-2} = x$$

A função inversa seria $f^{-1}(y) = \sqrt{y-2}$. Entretanto o domínio da inversa é $\mathbb{R}$ tal que $y > 2$ e não coincide com a imagem de f. Logo f não tem inversa.

(b) $f(x) = x^3$

$$y = x^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

$$x = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(y^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

(c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \Longrightarrow y(x+2) = 2x - 1 \Longrightarrow yx + 2y = 2x - 1$$

$$\Longrightarrow yx - 2x = -1 - 2y \Longrightarrow (y-2)x = -1 - 2y \Longrightarrow x = -\frac{2y+1}{y-2}$$

$$x = -\frac{2y+1}{y-2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(-\frac{(2y+1)}{(y-2)}\right)' = -\frac{(2y+1)'(y-2) - (2y+1)(y-2)'}{(y-2)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2 \cdot (y-2) - (2y+1) \cdot 1}{(y-2)^2} = -\frac{2y - 4 - 2y - 1}{(y-2)^2} = \frac{5}{(y-2)^2}$$

2. (2,5 pontos)

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^4 - 6x + 2$, utilizando as ferramentas do cálculo.

Solução:

$$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Os candidatos a máximos e mínimos locais são:

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$$

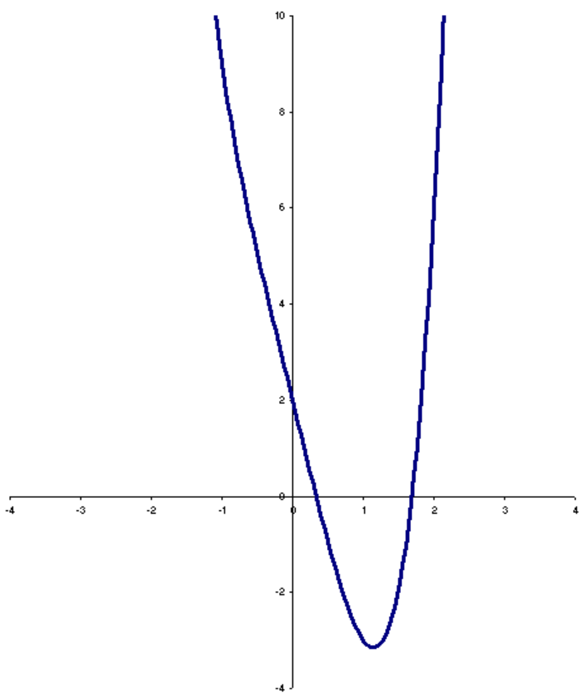
Vamos estudar o sinal da primeira derivada para verificar as regiões aonde $f(x)$ cresce e decresce.

Intervalo	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, \sqrt[3]{\frac{6}{4}})$	$-$	decrescente
$(\sqrt[3]{\frac{6}{4}}, \infty)$	$+$	crescente

Da segunda derivada surgem os candidatos a pontos de inflexão.

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Entretanto para $x > 0$ e para $x < 0$ $f''(x) > 0$, logo a função é concava para cima para $x > 0$ e para $x < 0$, e não existe ponto de inflexão em $x = 0$.



3. (2,5 pontos)

Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x = -1$ e $x = 1$.

Solução

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi(x^2+1)^2\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (x^4+2x^2+1)\, dx \\
&= \pi \left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^2 + x\right]_{-1}^{1} \\
&= \pi \left[\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right) - \left(-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{3}-1\right)\right] \\
&= \pi \tfrac{56}{15}
\end{aligned}
$$

4. (2,5 pontos)

Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$ e $x = 0$.

Solução:

A área em questão se assemelha a uma fatia de torta.

Precisamos determinar as interseções entre o arco de cículo ($y = \sqrt{1-x^2}$) e as retas $y = x$ e $x = 0$

$$
\sqrt{1-x^2} = x \implies 1 - x^2 = x^2 \implies 2x^2 = 1 \implies x^2 = \frac{1}{2}
$$

Portanto a abcissa x da interseção é

$$
x = \frac{1}{\sqrt{2}}
$$

Integrando

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\sqrt{1-x^2} - x\right]\, dx &= \left[\frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}
$$

Observe que este valor corresponde a um oitavo da área de um círculo de raio igual a 1.