Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1^o semestre de 2017 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Mostre em que intervalos da reta real a função $f(x) = -x^5 - 3x^3 - x + 10$ é uma função decrescente.

   Solução:

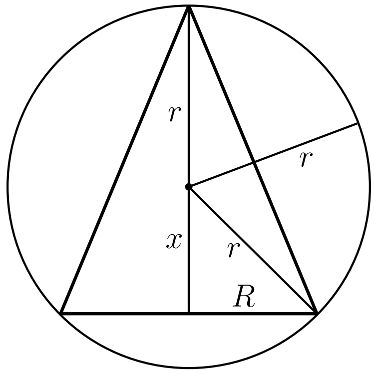
   $$f'(x) = -5x^4 - 9x^2 - 1 < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

   Logo, $f(x)$ é decrescente em toda a reta real.

2. (1,0 ponto)

   Ache as dimensões de um cone circular reto com volume mínimo V que seja envolvido por esfera de raio r.

   Solução:



Considere um corte no eixo de simetria do cone como mostra a figura

Considerando, V o volume do cone, h a altura do cone, A_b a área da base do cone e R o raio da base do cone, então o volume de um cone circular reto é dado pela expressão:

$$V = \frac{1}{3}hA_b = \frac{1}{3}h(\pi R^2)$$

Seja x o comprimento do segmento que liga o centro da esfera à base do cone. Logo,

$$h = x + r$$

e

$$r^2 = x^2 + R^2 \quad \longrightarrow \quad R^2 = r^2 - x^2 \quad \longrightarrow \quad R = \sqrt{r^2 - x^2}$$

logo o volume do cone pode ser escrito em função de x,

$$V = \frac{1}{3}h(\pi R^2) = \frac{1}{3}(x+r)\left(\pi\left(r^2 - x^2\right)\right) = \frac{\pi}{3}(x+r)\left(r^2 - x^2\right)$$

$$V' = \frac{\pi}{3}\left\{-2x(x+r) + \left(r^2 - x^2\right)\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left\{-2x^2 - 2xr + r^2 - x^2\right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}\left\{-3x^2 - 2xr + r^2\right\}$$

$$V' = 0 \quad \longrightarrow \quad -3x^2 - 2xr + r^2 = 0$$

ou

$$x = \frac{2r \pm \sqrt{4r^2 + 12r^2}}{-6} = \frac{2r \pm \sqrt{16r^2}}{-6} = \frac{2r \pm 4r}{-6}$$

portanto

$$x = -r \quad \text{ou} \quad x = \frac{r}{3}$$

olhando agora o sinal da primeira derivada

$$\begin{array}{lccc} \text{Para} & x < -r & \to & f'(x) < 0 \\ \text{Para} & -r < x < \frac{r}{3} & \to & f'(x) > 0 \\ \text{Para} & \frac{r}{3} < x & \to & f'(x) < 0 \end{array}$$

portanto,

$$x = -r \text{ é um ponto de mínimo}$$

e

$$x = \frac{r}{3} \text{ é um ponto de máximo}$$

Logo as dimensões de um cone com volume mínimo são $h = 0$ e $R = 0$, e de um cone com volume máximo são $h = 4r/3$ e $R = \sqrt{2r^2/3}$.

3. (1,0 ponto)

Calcule as seguintes antiderivadas.

(a) $$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 2}}\, dx$$

(b) $$\int \sin^2 x \cos x\, dx$$

(c) $$\int x \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx$$

Solução:

(a) $$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$$

$$u = x^3 + 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = 3x^2$$

substituindo na integral

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx = \int \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[4]{\ u\ }}\,du = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^{1/4}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\int \ u^{-1/4}\ \ du = \frac{1}{3}\frac{u^{-1/4+1}}{-\frac{1}{4}+1}\ \ +C$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{3/4}}{\frac{3}{4}}\ \ +C = \frac{4}{9}u^{3/4} + C =$$

$$= \frac{4}{9}\left(x^3+2\right)^{3/4} + C = \frac{4}{9}\sqrt[4]{\ (x^3+2)^3\ } + C =$$

(b) $$\int \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$u = \sin x \quad \longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = \cos x$$

substituindo na integral

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

(c) $$\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

$$u = 1 - x^2 \quad \longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = -2x$$

substituindo na integral

$$\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \int -\frac{1}{2}\sqrt[3]{\ u\ }\,du = -\frac{1}{2}\int u^{1/3}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{1/3+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = -\frac{1}{2}\frac{u^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{8}u^{4/3} + C = -\frac{3}{8}\left(1-x^2\right)^{4/3} + C =$$

$$= -\frac{3}{8}\sqrt[3]{(\ 1-x^2\ )^4} + C$$

4. (1,0 ponto)

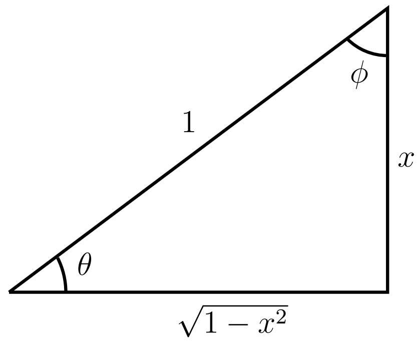
Ache a área sob o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e o eixo x, entre $x = 0$ e $x = 1$.

Solução:

A área é dada por

$$\text{Área} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Considere o triângulo retângulo



Logo,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{1} \quad \longrightarrow \quad \operatorname{sen}\theta = x$$

e

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \quad \longrightarrow \quad \cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

mas

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta$$

substituindo na integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{\cos\theta}{\cos\theta}\, d\theta = \int 1\, d\theta = \theta + C = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

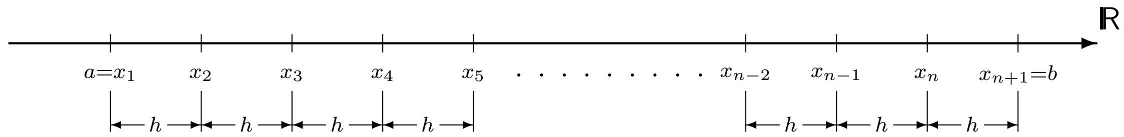
Portanto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1} x\Big|_0^1 = \operatorname{sen}^{-1} 1 - \operatorname{sen}^{-1}(0) = \pi - 0 = \pi$$

5. (1,5 ponto)

Regra dos Trapézios:

Seja $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$; divida o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos com o mesmo comprimento $h = \dfrac{(b-a)}{n}$, sendo estes subintervalos delimitados pelos pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Como ilustra a seguinte figura.



Construa uma regra de integração definida pela soma das áreas dos trapézios definidos pelas extremidades dos subintervalos e pelos valores de $f(x)$ nestes extremos. Isto é, para um subintervalo qualquer $[x_i, x_{i+1}]$ a área do trapézios será

$$A_i = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

(a) Use a regra dos trápezios com $n = 10$ para calcular a integral abaixo e compare com o valor exato.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

Solução:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]}_{\text{área de um trapézio}}$$

onde

- n - quantidade de subintervalos no intervalo de integração $[a,b]$
- $h = \frac{b-a}{n}$

A integral a ser avaliada é

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = -0 + 1 = 1$$

Neste caso $n = 10$, $a = 0$ e $b = \pi$, portanto

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{10} = \frac{\pi}{10}$$

$$x_i = a + ih\ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

$$x_i = 0 + ih = ih\ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 11$$

$$\Rightarrow x_1 = 0{,}0; \quad x_2 = 0{,}1\pi; \quad x_3 = 0{,}2\pi; \quad x_4 = 0{,}3\pi; \quad x_5 = 0{,}4\pi; \quad x_6 = 0{,}5\pi;$$

$$\Rightarrow x_7 = 0{,}6\pi; \quad x_8 = 0{,}7\pi; \quad x_9 = 0{,}8\pi; \quad x_{10} = 0{,}9\pi; \quad x_{11} = 1{,}0\pi;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$\int_0^1 \sin^2 x\,dx \approx \sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\sin^2 x_i + \sin^2 x_{i+1}\right]$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad = \quad & \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]}_{i=1} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_2) + f(x_3)\right]}_{i=2} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_3) + f(x_4)\right]}_{i=3} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_4) + f(x_5)\right]}_{i=4} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_5) + f(x_6)\right]}_{i=5} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_6) + f(x_7)\right]}_{i=6} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_7) + f(x_8)\right]}_{i=7} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_8) + f(x_9)\right]}_{i=8} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_9) + f(x_{10})\right]}_{i=9} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_{10}) + f(x_{11})\right]}_{i=10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad = \quad & \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + \right. \\
& 2f(x_5) + 2f(x_6) + 2f(x_7) + 2f(x_8) + \\
& \left. 2f(x_9) + 2f(x_{10}) + f(x_{11})\right]
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\sin^2 x_i + \sin^2 x_{i+1}\right] = \frac{h}{2}\Big[\sin^2 x_1 + 2\sin^2 x_2 + 2\sin^2 x_3 + 2\sin^2 x_4 + 2\sin^2 x_5 + 2\sin^2 x_6 + 2\sin^2 x_7 + 2\sin^2 x_8 + 2\sin^2 x_9 + 2\sin^2 x_{10} + \sin^2 x_{11}\Big]$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\sin^2 x_i + \sin^2 x_{i+1}\right] = \frac{0{,}1\pi}{2}\Big[\sin^2(0\pi) + 2\cdot\Big[\sin^2(0{,}1\pi) + \sin^2(0{,}2\pi) + \sin^2(0{,}3\pi) + \sin^2(0{,}4\pi) + \sin^2(0{,}5\pi) + \sin^2(0{,}6\pi) + \sin^2(0{,}7\pi) + \sin^2(0{,}8\pi) + \sin^2(0{,}9\pi)\ \Big] + \sin^2(1{,}0\pi)\Big]$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\sin^2 x_i + \sin^2 x_{i+1}\right] = \frac{0{,}1\pi}{2}[0{,}00000 + 2\cdot[0{,}09549 + 0{,}34549 + 0{,}65451 + 0{,}90451 + 1{,}00000 + 0{,}90451 + 0{,}65451 + 0{,}34549 + 0{,}09549\ ] + 0{,}00000] = 0{,}94248$$

Logo, pela chamada regra dos trapézios

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx \approx 0{,}94248$$

enquanto que o valor exato é

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = 1$$

6. (1,0 ponto)

O valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a, b]$ é definido por

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx$$

Calcule o valor médio das seguintes funções nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \sqrt[4]{x+2} \quad \text{em} \quad [0,1]$

(b) $f(x) = \sin x \quad \text{em} \quad [0, \frac{\pi}{3}]$

(c) $f(x) = 3x^4 - 1 \quad \text{em} \quad [-1, 4]$

(d) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x} \quad \text{em} \quad [0, \pi]$

Solução:

(a) $$\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[4]{x+2}\,dx$$

com

$$u = x+2 \quad \longrightarrow \quad \frac{du}{dx} = 1$$

$$\int \sqrt[4]{x+2}\,dx = \int \sqrt[4]{u}\,du = \int u^{1/4}\,du = \frac{u^{1/4+1}}{\frac{1}{4}+1} + C = \frac{5}{4}u^{5/4} + C = \frac{5}{4}(x+2)^{5/4} + C$$

e

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[4]{x+2}\,dx = \frac{5}{4}(1+2)^{5/4} - \frac{5}{4}(0+2)^{5/4} = \frac{5}{4}(3)^{5/4} - \frac{5}{4}(2)^{5/4}$$
$$= \frac{5}{4}\left[3^{5/4} - 2^{5/4}\right]$$

(b) $$\frac{1}{\frac{\pi}{3}-0}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{3}-0}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = \frac{3}{\pi}\ -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}\left[-\cos\frac{\pi}{3} + \cos 0\right] = \frac{3}{\pi}\left[1 - \cos\frac{\pi}{3}\right]$$

(c) $$\frac{1}{4-(-1)}\int_{-1}^{4}(3x^2-1)\,dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4}(3x^2-1)\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{5}\left[x^3 - x\right]_{-1}^{4}$$
$$= \frac{1}{5}\left[64 - 4 - (-1) + (-1)\right] = \frac{1}{5}\cdot 60 = 12$$

(d) $$\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen } x}{\cos x}\,dx$$

com

$$u = \frac{1}{\text{sen } x} \longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\text{sen } x \cdot 0 - \cos x}{\cos^2 x} = -\frac{\cos x}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x}$$

substituindo na integral

$$\int \frac{\text{sen } x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{1}{u}\,du = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln u + C = -\ln\left[\frac{1}{\text{sen } x}\right] + C$$

logo

$$\frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \frac{\text{sen } x}{\cos x}\, dx = \frac{1}{\pi - 0}\left[-\ln \frac{1}{\text{sen } x}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi - 0}\left[-\ln \frac{1}{\text{sen } \pi} + \ln \frac{1}{\text{sen } 0}\right]$$

Como sen $0 = 0$ não existe este valor médio.

7. (1,5 pontos)

Seja $\mathcal{R}$ a região entre o eixo x, a curva $y = x^5$, a linha $x = 4$.

(a) Ache o volume do sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

(b) Ache o volume do sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

Solução:

(a)
$$V = \int_0^4 \pi y^2\, dx = \pi \int_0^4 \left(x^5\right)^2\, dx = \pi \int_0^4 x^{10}\, dx = \pi \left[\frac{x^{11}}{11}\right]_0^4$$
$$= \frac{\pi}{11}[4194304 - 0] = \frac{4194304\pi}{11}$$

(b)
$$V = \int_0^4 y \cdot 2\pi x\, dx = \int_0^4 (x^5) \cdot 2\pi x\, dx = 2\pi \int_0^4 x^6\, dx = 2\pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^4$$
$$= 2\pi \left[\frac{4^7}{7} - \frac{0^7}{5}\right] = \frac{32768\pi}{7}$$

ou

$$V = \int_0^8 \left[\pi \cdot 2^2 - \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right] dy = \pi \int_0^8 \left[4 - y^{\frac{2}{3}}\right] dy = \pi \left[4y - \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8$$
$$= \pi \left[32 - \frac{3}{5}32 - 0 + 0\right] = 32\pi \left[1 - \frac{3}{5}\right] = 32\pi \left[\frac{2}{5}\right] = \frac{64\pi}{5}$$

8. (2,0 pontos)

A soma de dois números positivos é 20. Ache os números se:

(a) seu produto é um máximo;

(b) a soma de seus quadrados é um mínimo.

Solução:

Sejam a e b os números.

(a) seu produto é um máximo;

$$a + b = 20 \quad \longrightarrow \quad b = 20 - a$$

$$\max(a \times b) \quad \longrightarrow \quad f = a \times b = a \times (20 - a) = 20a - a^2$$

$$f' = 20 - 2a \quad \longrightarrow \quad f' = 0 \quad \longrightarrow \quad 20 - 2a = 0 \quad \longrightarrow \quad a = 10$$

logo

$$b = 20 - a = 20 - 10 = 10$$

$$a = 10 \ \text{ e } \ b = 10$$

(b) a soma de seus quadrados é um mínimo.

$$a + b = 20 \quad \longrightarrow \quad b = 20 - a$$

$$\min(a^2 + b^2) \quad \longrightarrow \quad f = a^2 + (20 - a)^2 = a^2 + (20 - a)^2$$
$$= a^2 + 400 - 40a + a^2 = 2a^2 - 40a + 400$$

$$f' = 4a - 40 \quad \longrightarrow \quad f' = 0 \quad \longrightarrow \quad 4a - 40 = 0 \quad \longrightarrow \quad a = 10$$

ogo

$$b = 20 - a = 20 - 10 = 10$$

$$a = 10 \ \text{ e } \ b = 10$$