Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1^o semestre de 2015 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

Ache a equação das retas tangente e normal a $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 8$ em $x = 2$.

Solução:

$$f'(x) = 3x^2 - 10x$$

Logo a inclinção da reta tangente no ponto $(x, y) = (2, -4)$ é $m = f'(2) = -8$ e a reta tangente

$$y + 4 = -8(x - 2) \Longrightarrow y = -8x + 12$$

A equação da reta normal será

$$y + 4 = -\frac{1}{-8}(x - 2) = \frac{1}{8}(x - 2) \Longrightarrow y = \frac{1}{8}x - \frac{17}{4}$$

2. (1,0 ponto)

Seja $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

Encontre:

(a) os pontos críticos de f;

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Solução:

(a) os pontos críticos de f;

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{16}}{6}$$

Logo são pontos críticos -1 e $\frac{1}{3}$.

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

Estudando o sinal da primeira derivada

$$\begin{array}{lccc} \text{Para} & x < -1 & \rightarrow & f'(x) > 0 \\ \text{Para} & -1 < x < \frac{1}{3} & \rightarrow & f'(x) < 0 \\ \text{Para} & \frac{1}{3} < x & \rightarrow & f'(x) > 0 \end{array}$$

logo $x = -1$ é um ponto de máximo relativo e $x = \frac{1}{3}$ é um ponto de mínimo relativo.

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Do item anterior $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1)$, descrescente em $(-1, \frac{1}{3})$ e novamente crescente em $(\frac{1}{3}, \infty)$.

3. (1,0 ponto) ---

Ache os extremos relativos da função $f(x) = 1 + x^{\frac{1}{3}}$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[2 + x^{\frac{1}{3}}\right]' \\ &= \left[0 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right] \\ &= \left[\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}\right] \\ &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{aligned}$$

logo $x = 0$ é um ponto crítico de $f(x)$. Porque $f'(0)$ não está definido, mas 0 está no domínio da função. Observe que $f'(x)$ tende a ∞ quando x tende a 0. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é positiva e portanto crescente, e quando $x > 0$, $f'(x)$ é positiva e portanto crescente. Desta forma $f(x)$ não tem mínimo relativo nem máximo relativo no ponto $x=0$. Resumindo,

Para	$x<0$	$\rightarrow$	$f(x)$ é crescente;
para	$x>0$	$\rightarrow$	$f(x)$ é crescente;

Se olharmos a segunda derivada

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \left[\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right]' \\
&= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \\
&= -\frac{2}{9}\frac{1}{x^{\frac{5}{3}}} \\
&= -\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}
\end{aligned}
$$

Logo $x=0$ é candidato a ponto de inflexão

Para	$x<0$	$\rightarrow$	$f''(x)<0$	concavidade para baixo;
para	$x>0$	$\rightarrow$	$f''(x)>0$	concavidade para cima;

portanto $x=0$ é um ponto de inflexão.

4. (1,0 ponto)

Determine as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito na região delimitada pela parábola $y^2=4px$ e a reta $x=2a$.

Solução:

Seja $\boldsymbol{ABCD}$ o retângulo e (x,y) as coordenadas do ponto $\boldsymbol{A}$. Logo a área $\mathcal{A}$ do retângulo vale

$$\mathcal{A} = 2y(2a-x) = 2y\left(2a-\frac{y^2}{4p}\right) = 4ay - \frac{y^3}{2p}$$

e

$$\frac{d\mathcal{A}}{dy} = 4a - \frac{3y^2}{2p}$$

mas

$$\frac{d\mathcal{A}}{dy} = 0 \Longrightarrow 4a - \frac{3y^2}{2p} = 0 \Longrightarrow y = \sqrt{8ap/3}$$

logo $y = \sqrt{8ap/3}$ é um ponto crítico. A altura do retângulo é

$$2y = 2\sqrt{8ap/3}$$

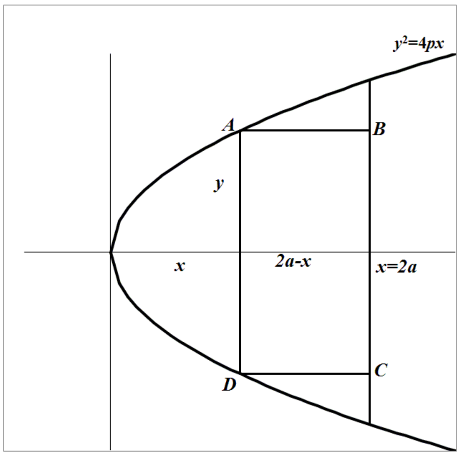
e a largura

$$2a - x = \left(2a - \frac{y^2}{4p}\right) = \frac{23a}{12}$$

A segunda derivada nos dá

$$\frac{d^2\mathcal{A}}{dy^2} = -\frac{6y}{2p} = -\frac{3y}{p} < 0$$

que garante que o ponto crítico é um ponto de máximo.



5. (1,0 ponto)

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x + 2$.
Solução:

$$f(x) = x^3 - 6x + 2$$

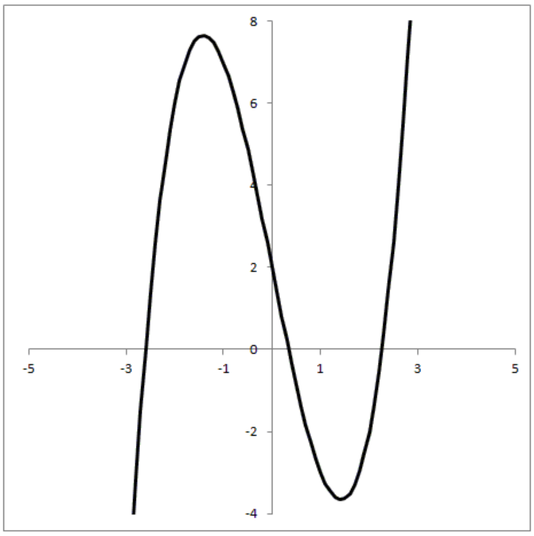
$$f'(x) = 3x^2 - 6 \quad \rightarrow \text{ pontos críticos } \rightarrow \quad x = -\sqrt{2} \text{ e } x = \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 6x \quad \rightarrow \text{ possível ponto de inflexão } \rightarrow \quad x = 0$$

Estudemos a primeira derivada.:

Para	$x < -\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$f'(x) > 0$	$f(x)$ é crescente;
Em	$x = -\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$f'(x) = 0$	é um ponto de máximo local;
Para	$-\sqrt{2} < x\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$f'(x) < 0$	$f(x)$ é decrescente;
Em	$x = \sqrt{2}$	$\rightarrow$	$f'(x) = 0$	é ponto de mínimo local;
Para	$\sqrt{2} < x$	$\rightarrow$	$f'(x) > 0$	$f(x)$ é crescente;

analisando o sinal da segunda derivada vemos que $f''(x)$ é negativa para $x < 0$ e positiva para $x > 0$. Logo $x = 0$ um ponto de inflexão.



6. (1,0 ponto)

Encontre as antiderivadas:

(a) $\displaystyle\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$

(c) $\displaystyle\int (s^3+2)^2(3s^2)\,ds$

(d) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx$

(f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

Solução:

(a) $$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (1-x)x^{1/2}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)}x^{\left(\frac{1}{2}+1\right)} - \frac{1}{\left(1+\frac{3}{2}\right)}x^{\left(\frac{3}{2}+1\right)} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

(b) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right] dx = \int \left[\ x\ +\ 5\ -\ 4x^{-2}\ \right] dx$$

$$= \left[\frac{x^{(1+1)}}{(1+1)} +\ 5x\ - \frac{4x^{(-2+1)}}{(-2+1)} + C\right]$$

$$= \frac{x^2}{2} +\ 5x\ - \frac{4x^{-1}}{(-1)} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} +\ 5x\ + \frac{4}{x} + C$$

(c) Com

$$u = s^3+2 \Longrightarrow \frac{du}{ds} = 3s^2$$

$$\int (s^3+2)^2(3s^2)\,ds = \int (u)^2\,du = \frac{1}{(2+1)}u^{(2+1)} + C$$

$$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{(u)^3}{3} + C = \frac{(s^3+2)^3}{3} + C$$

(d) $$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int \left[-4x\sqrt{1-2x^2}\right] dx$$

com

$$u = 1-2x^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -4x$$

substituindo na integral

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int \left[\sqrt{u}\right] du = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}\,du$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}+1)}u^{(\frac{1}{2}+1)} + C$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{u^3}}{2} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{2} + C$$

(e)

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}\, x\, dx = -\frac{1}{2}\int \left[\sqrt[3]{1-x^2}\right][-2x]\ dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \left[\sqrt[3]{1-x^2}\right][-2x]\ dx$$

com

$$u = 1 - x^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -2x$$

substituindo na integral

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}\, x\, dx = -\frac{1}{2}\int \left[\sqrt[3]{u}\right]\ du = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)}u^{\left(\frac{1}{3}+1\right)} + C$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}}u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= -\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{8} + C$$

$$= -\frac{3\sqrt[3]{u^4}}{8} + C$$

$$= -\frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{8} + C$$

(f)

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int [\operatorname{sen} x]^2 \cos x\, dx$$

com

$$u = \operatorname{sen} x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

substituindo na integral

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int u^2\, du$$

$$= \frac{1}{(1+2)}u^{(2+1)} + C$$

$$= \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$$

7. (1,0 ponto) ---

Ache a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$, acima do eixo x e entre 0 e 4.

Solução:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right]\Bigg|_0^4 = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{4}{\sqrt{2}}\right] - \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{0}{\sqrt{2}}\right]$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left[\sqrt{8}\right] - \operatorname{sen}^{-1}[0]$$

Mas $\sqrt{8}$ não pertence ao domínio da função sen^{-1}. Logo a integral não pode ser calculada.

8. (1,0 ponto) ---

(a) Se f é uma função par, mostre que, para $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(b) Se f é uma função ímpar, mostre que, para $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Solução:

Lembretes:

- Uma função é dita par se para qualquer ponto x no seu domínio, $-x$ também pertence ao domínio e $f(-x) = f(x)$.
- Uma função é dita ímpar se para qualquer ponto x no seu domínio, $-x$ também pertence ao domínio e $f(-x) = -f(x)$.

(a)

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\
&= -\int_0^{-a} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\
&= -\int_0^a f(-u)(-1)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \qquad \text{com } u = -x \text{ e } du = -dx \\
&= \int_0^a f(-u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \\
&= \int_0^a f(u)\,du + \int_0^a f(x)\,dx \qquad f(x) \text{ é par} \\
&= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\
&= 2\int_0^a f(x)\,dx
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= -\int_{0}^{a} f(-u)(-1)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{com } u = -x \text{ e } du = -dx \\
&= \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{0}^{a} -f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad f(x) \text{ é ímpar} \\
&= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

9. (1,0 ponto)

Avalie as integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (2-t^2)t\,dt$

(b) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{1+5x}\,dx$

Solução:

(a) $\displaystyle\int_0^2 (2-t^2)t\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^2 (2-t^2)(-2t)\,dt$

com

$$u = 2 - t^2 \Longrightarrow \frac{du}{dt} = -2t$$

substituindo na integral

$$\begin{aligned}
\int (2-t^2)t\,dt &= -\frac{1}{2}\int u\,du \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2} + C \\
&= -\frac{u^2}{4} + C
\end{aligned}$$

ou

$$= -\frac{(2-t^2)^2}{4} + C$$

calculando a integral definida

$$\int_0^2 (2-t^2)t\,dt = \left[-\frac{(2-t^2)^2}{4}\right]_0^2$$

$$= \left[-\frac{(2-2^2)^2}{4} + \frac{(2-0^2)^2}{4} \right]$$

$$= \left[-\frac{(-2)^2}{4} + \frac{(2)^2}{4} \right]$$

$$= \frac{-(-2)^2 + (2)^2}{4}$$

$$= \frac{0}{4} = 0$$

(b) $$\int_1^5 \sqrt{1+5x}\, dx = \frac{1}{5} \int_1^5 \sqrt{1+5x}\,(5)\, dx$$

com

$$u = 1 + 5x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 5$$

substituindo na integral

$$\int \sqrt{1+5x}\, dx = \frac{1}{5} \int \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{5} \int u^{1/2}\, du$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2}+1)} u^{(\frac{1}{2}+1)} + C$$

$$= \frac{2u^{3/2}}{15} + C$$

$$= \frac{2(1+5x)^{3/2}}{15} + C$$

e a integral definida vale

$$\int_1^5 \sqrt{1+5x}\, dx = \left[\frac{2(1+5x)^{3/2}}{15} \right]_1^5$$

$$= \left[\frac{2(1+5\cdot 5)^{3/2}}{15} \right] - \left[\frac{2(1+5\cdot 1)^{3/2}}{15} \right]$$

$$= \left[\frac{2(26)^{3/2}}{15} \right] - \left[\frac{2(6)^{3/2}}{15} \right]$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{17576}}{15} \right] - \left[\frac{2\sqrt{216}}{15} \right]$$

$$= \frac{2\sqrt{17576} - 2\sqrt{216}}{15}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2^3 \cdot 13^3} - \sqrt{2^3 \cdot 3^3})}{15}$$

$$= \frac{2(2\cdot 13\sqrt{2\cdot 13} - 2\cdot 3\sqrt{2\cdot 3})}{15}$$

$$= \frac{4(13\sqrt{26} - 3\sqrt{6})}{15}$$

10. (1,0 ponto)

Seja a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{para } x < 0 \\ 1 - x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

calcule

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\, dx.$$

Solução:

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\, dx = \int_{-\pi/2}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{1} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \cos x\, dx + \int_{0}^{1} (1 - x)\, dx$$

$$= [\text{sen}\, x]_{-\pi/2}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[\text{sen}(0) - \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right)\right]$$

$$= [0 - (-1)] + \left[\frac{1}{2} - 0\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$