Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2º semestre de 2015 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Ache a equação das retas tangente e normal a $y = f(x) = 4x^4 - 3x^3 + 8$ em $x = 2$.

   Solução:

   $$f'(x) = 16x^3 - 9x^2$$

   Logo a inclinação da reta tangente no ponto $(x, y) = (2, 48)$ é $m = f'(2) = 92$ e a reta tangente

   $$y - 48 = 92(x - 2) \Longrightarrow y = 92x - 136$$

   A equação da reta normal será

   $$y - 48 = -\frac{1}{92}(x - 2) = \frac{1}{92}x - \frac{1}{46} \Longrightarrow y = \frac{1}{92}x - \frac{2207}{46}$$

2. (1,0 ponto)

   Seja $f(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^2 + x - 1$.

   Encontre:

(a) os pontos críticos de f;

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Solução:

(a) os pontos críticos de f;

$$f'(x) = 4x^3 - \frac{10}{2}x + 1 \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{4} \text{ e } x = 1$$

Logo são pontos críticos 1, $\dfrac{5-\sqrt{21}}{4}$ e $\dfrac{5+\sqrt{21}}{4}$.

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

Estudando o sinal da primeira derivada

$$\begin{array}{lcccccl}
\text{Para} & & & x & < & \dfrac{5-\sqrt{21}}{4} & \rightarrow f'(x) > 0 \\[2ex]
\text{Para} & \dfrac{5-\sqrt{21}}{4} & < & x & < & 1 & \rightarrow f'(x) < 0 \\[2ex]
\text{Para} & 1 & < & x & < & \dfrac{5+\sqrt{21}}{4} & \rightarrow f'(x) > 0 \\[2ex]
\text{Para} & \dfrac{5+\sqrt{21}}{4} & < & x & & & \rightarrow f'(x) < 0
\end{array}$$

logo $x = \dfrac{5-\sqrt{21}}{4}$ é um ponto de máximo relativo, 1 é um ponto de mínimo relativo e $x = \dfrac{5+\sqrt{21}}{4}$ é um ponto de máximo relativo.

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Do item anterior $f(x)$ é crescente em $(-\infty, \frac{5-\sqrt{21}}{4})$, decrescente em $(\frac{5-\sqrt{21}}{4}, 1)$, novamente crescente em $(1, \frac{5+\sqrt{21}}{4})$ e finalmente decrescente em $(\frac{5+\sqrt{21}}{4}, \infty)$.

3. (1,0 ponto)

Ache os extremos relativos da função $f(x) = 10 + (\cos x)^3$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

Solução:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \Big[10 + (\cos x)^3\Big]' \\
&= \Big[0 + 3(\cos x)^2(-\operatorname{sen} x)\Big] \\
&= -3(\operatorname{sen} x)(\cos x)^2
\end{aligned}
$$

que se anula aonde $(\operatorname{sen} x)$ se anula ou aonde $(\cos x)$ se anula. Portanto, $f'(x)$ se anula nos pontos

$$\ldots, -3\pi, -\frac{5\pi}{2}, -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \ldots$$

como o período das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ é igual a 2π, basta estudarmos o comportamento da função nas proximidades do intervalo $[0, \pi]$. Os pontos críticos neste intervalo são: 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. Logo precisamos estudar o sinal da primeira derivada entre pontos críticos sucessivos.

$$
\begin{array}{rcccl}
-\pi & < & x & < & -\frac{\pi}{2} & \rightarrow & f'(x) > 0 & \rightarrow & f(x) \text{ crescente;} \\
-\frac{\pi}{2} & < & x & < & 0 & \rightarrow & f'(x) > 0 & \rightarrow & f(x) \text{ crescente;} \\
0 & < & x & < & \frac{\pi}{2} & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \text{ decrescente;} \\
\frac{\pi}{2} & < & x & < & \pi & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \text{ decrescente;} \\
\pi & < & x & < & \frac{3\pi}{2} & \rightarrow & f'(x) > 0 & \rightarrow & f(x) \text{ crescente;} \\
\frac{3\pi}{2} & < & x & < & 2\pi & \rightarrow & f'(x) > 0 & \rightarrow & f(x) \text{ crescente;} \\
2\pi & < & x & < & \frac{5\pi}{2} & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \text{ decrescente;} \\
\frac{5\pi}{2} & < & x & < & 3\pi & \rightarrow & f'(x) < 0 & \rightarrow & f(x) \text{ decrescente.}
\end{array}
$$

logo $x = -2\pi$, $x = 0$, $x = 2\pi$, $x = 4\pi$, são pontos de máximo, assim como todos os múltiplos pares de π. Da mesma forma $x = -3\pi$, $x = -\pi$, $x = \pi$, $x = 3\pi$, são pontos de mínimo, assim como todos os múltiplos ímpares de π.

4. (1,0 ponto)

O custo do combustível para movimentar um ônibus é proporcional ao quadrado da velocidade do ônibus e vale R$ 25,00 por hora para uma velocidade igual a 50 km/h. Os outros custos necessários ao movimento do ônibus somam R$ 100,00 por hora, independentemente da velocidade. Ache qual é a velocidade que minimiza o custo por quilômetro rodado.

Solução:

Seja v a velocidade a ser determinada, e seja C o custo total por quilômetro. O custo de combustível por hora — c_h — pode então ser escrito na forma kv^2, já que é proporcional ao quadrado da velocidade do ônibus, e onde k é uma constante de proporcionalidade que pode ser determinada, já que conhecemos o valor do custo para a velocidade igual a 50 km/h, ou seja

$$c_h = kv^2 \Longrightarrow 25 = k(50)^2 \Longrightarrow k = \frac{25}{(50)^2} = \frac{1}{100}$$

$$C = \frac{\text{custo em R\$/h}}{\text{velocidade em km/h}} = \frac{v^2/100 + 100}{v} = \frac{v}{100} + \frac{100}{v}$$

Para encontrar o ponto de mínimo:

$$C' = \frac{dC}{dv} = \frac{1}{100} - \frac{100}{v^2} = \frac{v^2 - 100}{100v^2} = \frac{(v+100)(v-100)}{100v^2}$$

Que possui dois zeros, a saber, $v = 100$ e $v = -100$. Como v representa uma velocidade, a única raiz relevante é $v = 100$.

Olhando agora a segunda derivada:

$$C'' = \frac{d^2C}{dv^2} = \frac{200}{v^3}$$

e que é positiva quando $v = 100$, significando que esta velocidade representa um ponto de mínimo. Logo a velocidade que minimiza o custo é 100 km/h.

5. (1,0 ponto)

Esboce o gráfico da função $f(x) = x - e^{-\frac{x}{2}}$.

Solução:

$$f(x) = x - e^{-\frac{x}{2}}$$

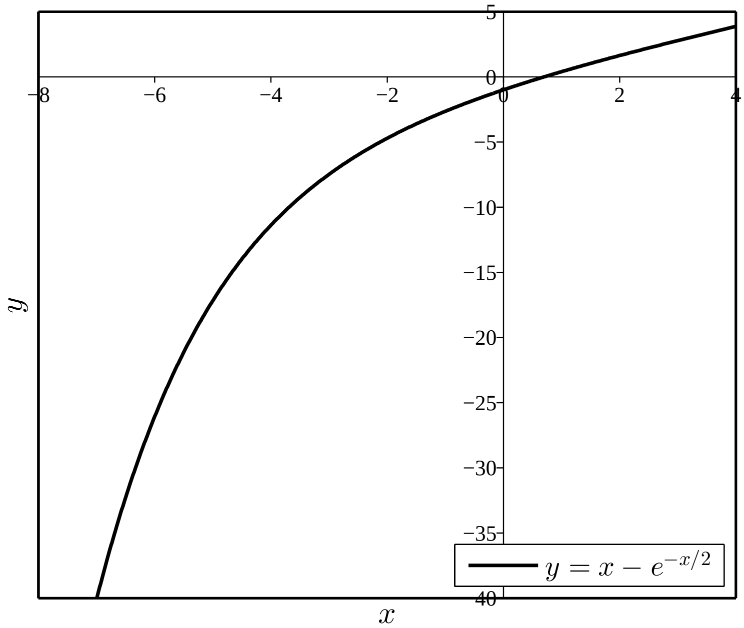
$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \text{ que nunca se anula } \rightarrow \quad \text{não há pontos críticos}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \text{ que também nunca se anula } \rightarrow \quad \text{não há pontos de inflexão}$$

$$f(0) = 0 - e^0 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,4 > 0$$

Portanto, o gráfico da curva corta o eixo x entre 0 e 1.
Estudemos a primeira derivada.:
$f'(x)$ é sempre positiva. Logo, $f(x)$ é crescente em toda a reta real.
Estudemos agora a segunda derivada.:
$f''(x)$ é sempre negativa. Logo, $f(x)$ é côncava para baixo em toda a reta real.



6. (1,0 ponto)

Encontre as antiderivadas:

(a) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

(b) $$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}\,dx$$

(c) $$\int \frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2}\,dx$$

(d) $$\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

(e) $$\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$$

(f) $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solução:

(a) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

Seja $u = x+1$. Portanto, $du = dx$ e $x = u-1$, e substituindo na integral, temos

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\,dx = \int (u^2-2u+1)u^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \int (u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 2\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(b) $$\int \frac{1+x^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1+x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\right]dx = \int \left[x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right]dx =$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

(c) $$\int \frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x)}{(x^2+2x+1)}\,dx$$

Com $u = x^2+2x+1 \rightarrow du = 2(x+1)dx = 2\sqrt{u}dx$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{(x^2+2x)}{(x+1)^2}\,dx &= \int \frac{u-1}{u}\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du = \int \frac{u-1}{2u\sqrt{u}}\,du \\
&= \int \frac{u-1}{2u^{\frac{3}{2}}}\,du = \int \left[\frac{u}{2u^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2u^{\frac{3}{2}}}\right] du \\
&= \frac{1}{2}\int \left[u^{-\frac{1}{2}} - u^{-\frac{3}{2}}\right] du = \frac{1}{2}\left[2u^{\frac{1}{2}} + 2u^{-\frac{1}{2}} + C\right] \\
&= u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}} + C = \sqrt{u} + \frac{1}{\sqrt{u}} + C = \frac{u+1}{\sqrt{u}} + C = \\
&= \frac{(x+1)^2+1}{(x+1)} + C
\end{aligned}$$

(d) $$\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

Com $u = 1-x^2$, $du = -2x$. Substituindo na integral,

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx &= -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\,du = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right] + C = -\frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + C \\
&= -\frac{3}{8}(1-x^2)^{\frac{4}{3}} + C
\end{aligned}$$

(e) $$\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx = \int (\operatorname{sen} x)^2\cos x\,dx = (\operatorname{sen} x)^3 + C = \operatorname{sen}^3 x + C$$

(f) $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Com $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Logo, $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$. Ou $2\,du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$. E substituindo na integral

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\cos u\,du = 2\int \cos u\,du = 2\,\mathrm{sen}\,u + C$$
$$= 2\,\mathrm{sen}\,\sqrt{x} + C$$

7. (1,0 ponto)

Ache a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, acima do eixo x e entre 0 e 1.

Solução:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \mathrm{sen}^{-1}\left[\frac{x}{2}\right]\Bigg|_0^1 = \mathrm{sen}^{-1}\left[\frac{1}{2}\right] - \mathrm{sen}^{-1}\left[\frac{0}{2}\right]$$
$$= \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

8. (1,0 ponto)

Ache o valor médio $f(x) = 4 - x^2$ no intervalo $[0,2]$.

Observação:

O valor médio é definido por:

$$\text{Valor médio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Solução:

$$\text{Valor médio} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 [4-x^2]\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 [4-x^2]\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - \frac{1}{2}\left[4\cdot 0 - \frac{0^3}{3}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[8 - \frac{8}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{24-8}{3}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{16}{3}\right] = \frac{8}{3}$$

9. (1,0 ponto)

Avalie as integrais indefinidas:

(a) $$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

(b) $$\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx$$

(c) $$\int \tan x \, dx$$

Solução:

(a) $$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$$

Com $u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx$. Substituindo na integral,

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln \mid u \mid + C$$

Logo

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = \ln(x^2+1) + C$$

(b) $$\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx$$

Com $u = x^3 + 5 \Longrightarrow du = 3x^2dx$. Substituindo na integral,

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^3+5}\, dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\, du = \ln \mid u \mid + C = \ln \mid x^3+5 \mid + C$$

(c) $$\int \tan x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx$$

Com $u = \cos x \Longrightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx$. Substituindo na integral,

$$\int \tan x\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|\, u\,| + C = -\ln|\cos x\,| + C$$
$$= \ln|\,(\cos x)^{-1}\,| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = \ln|\sec x\,| + C$$

10. (1,0 ponto)

Considere o sólido obtido por revolução em torno do eixo x da região no primeiro quadrante limitada pela parábola $y^2 = 8x$ e pela linha $x = 2$. Calcule o volume deste sólido.

Solução:

$$V = \pi \int_0^2 y^2\, dx = \pi \int_0^2 8x\, dx = \pi \left[8 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \pi \left[4x^2\right]_0^2 = \pi[16 - 0] = 16\pi$$