Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2^o semestre de 2017 - Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Se $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 4x$, calcule $f'(x)$, usando a definição de derivada, isto é,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Qual o domínio de $f'(x)$? Calcule também $f'(2)$, $f'(-\sqrt{2})$ e $f'(a)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4(x+h)^3 - 5(x+h)^2 + 4(x+h)) - (4x^3 - 5x^2 + 4x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - 5(x^2 + 2xh + h^2) + 4(x+h)) - 4x^3 + 5x^2 - 4x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3 - 5x^2 - 10xh - 5h^2 + 4x + 4h - 4x^3 + 5x^2 - 4x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{12x^2h + 12xh^2 + 4h^3 - 10xh - 5h^2 + 4h}{h}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(12x^2 - 10x + 4) + h^2(12x - 5) + 4h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \Big(\, (12x^2 - 10x + 4) + h(12x - 5) + 4h^2 \, \Big)$$

$$= \lim_{h \to 0} (12x^2 - 10x + 4) + \lim_{h \to 0} h(12x - 5) + \lim_{h \to 0} 4h^2$$

$$= (12x^2 - 10x + 4) + 0 + 0$$

$$= 12x^2 - 10x + 4$$

O domínio de $f'(x)$ é toda a reta dos reais, ou seja,

$$\text{Dom } f'(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$f'(2) = 12(2)^2 - 10(2) + 4 = 12 \cdot 4 - 20 + 4 = 32$$

$$f'(-\sqrt{2}) = 12(-\sqrt{2})^2 - 10(-\sqrt{2}) + 4 = 28 + 10\sqrt{2}$$

$$f'(a) = 12a^2 - 10a + 4$$

2. (2,5 pontos)

Calcule os limites:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{(x+2)^5}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{-4}{(x-2)^3}$

(c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$

Solução:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{(x+2)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(0+2)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(2)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{-4}{(x-2)^3} = \frac{-4}{0^3} = -\infty$

(c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$

3. (2,5 pontos)

Calcule as primeiras derivadas das funções:

(a) $$f(x) = \frac{(x^4+4)^2}{(2x^6-1)^3}$$

(b) $$f(z) = \frac{3+2z}{3-2z}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{(x^4+4)^2}{(2x^6-1)^3}$$

$$f'(x) = \frac{[(x^4+4)^2]' \cdot [(2x^6-1)^3] - [(x^4+4)^2] \cdot [(2x^6-1)^3]'}{[(2x^6-1)^3]^2}$$

$$= \frac{[2(x^4+4)^1(4x)] \cdot [(2x^6-1)^3] - [(x^4+4)^2] \cdot [3(2x^6-1)^2(12x^5)]}{[(2x^6-1)^3]^2}$$

$$= \frac{8x(x^4+4)(2x^6-1)^3 - 36x^5(x^4+4)^2(2x^6-1)^2}{(2x^6-1)^6}$$

$$= \frac{8x(x^4+4)(2x^6-1) - 36x^5(x^4+4)^2}{(2x^6-1)^4}$$

$$= \frac{4x(x^4+4)\left[4(2x^6-1) - 9x^4(x^4+4)\right]}{(2x^6-1)^4}$$

$$= \frac{4x(x^4+4)\left[-9x^8+8x^6-36x^4-4\right]}{(2x^6-1)^4}$$

(b) $$f(z) = \frac{3-2z}{3+2z}$$

$$f'(z) = \frac{[3-2z]' \cdot [3+2z] - [3-2z] \cdot [3+2z]'}{[3+2z]^2}$$

$$f'(z) = \frac{[-2] \cdot [3+2z] - [3-2z] \cdot [2]}{[3+2z]^2} = \frac{-6-4z-6+4z}{[3+2z]^2}$$

$$f'(z) = -\frac{12}{[3+2z]^2}$$

4. (2,5 pontos)

Estude a continuidade na reta real da função $f(x)$ onde:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Solução:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

No ponto $x = 3$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 81$$

já que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^4 = 81$$

e

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^4 = 81$$

mas

$$f(3) = 0$$

sendo então o valor do limite diferente do valor da função no ponto. Daí f é descontínua no ponto $x = 3$. Nos demais pontos da reta real a função é contínua.