**Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina: Matemática para Computação**
**AD1 - $1^o$ semestre de 2018 - Gabarito**

## Questões

1. (0,5 ponto)

Determine as inversas das seguintes funções

(a)

$$f(x) = \frac{x-4}{x+3}$$

(b)

$$f(x) = \sqrt[3]{x+10}$$

(c)

$$f(x) = \frac{2}{x^3+10} \quad x \geq 0$$

**Solução:**

(a)

$$f(x) = \frac{x-4}{x+3}$$

$$y = \frac{x-4}{x+3} \Longrightarrow y(x+3) = x-4 \Longrightarrow yx+3y = x-4 \Longrightarrow yx - x = -3y-4$$

$$yx - x = -3y - 4 \Longrightarrow x(y-1) = -3y-4 \Longrightarrow x = \frac{(-3y-4)}{(y-1)}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = -\frac{(3x+4)}{(x-1)}$

(b)

$$f(x) = \sqrt[3]{x+10}$$

$$y = \sqrt[3]{x+10} \Longrightarrow y^3 = x+10 \Longrightarrow y^3 - 10 = x \Longrightarrow y^3 - 10 = x$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = x^3 - 10$

(c)

$$f(x) = \frac{2}{x^3+10} \quad x \geq 0$$

$$y = \frac{2}{x^3+10} \Longrightarrow x^3 + 10 = \frac{2}{y} \Longrightarrow x^3 = \frac{2}{y} - 10 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{2}{y} - 10}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{x} - 10}$

2. (0,5 ponto) ———————————————————

Dadas as funções $f$ e $g$ encontre $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ e $(g \circ g)$.

(a) $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 5x + \sqrt[3]{x}$

(b) $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = 3x + 1$

(c) $f(x) = \cos x + x^2$ e $g(x) = x^3 + x$

**Solução:**

(a) $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = 5x + \sqrt[3]{x}$

$$(f \circ g)(x) = \left(5x + \sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 = 25x^2 + 10x\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - 2 = 25x^2 + 10\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} - 2$$

$$(g \circ f)(x) = 5(x^2 - 2) + \sqrt[3]{x^2 - 2} = 5x^2 - 10 + \sqrt[3]{x^2 - 2}$$

$$(f \circ f)(x) = \left(x^2 - 2\right)^2 - 2 = x^4 - 4x^2 + 4 - 2 = x^4 - 4x^2 + 2$$

$$(g \circ g)(x) = 5\left(5x + \sqrt[3]{x}\right) + \sqrt[3]{5x + \sqrt[3]{x}} = 25x + 5\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{5x + \sqrt[3]{x}}$$

(b) $$f(x) = x^3 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 1$$

$$(f \circ g)(x) = (3x+1)^3 - 1 = 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 - 1 = 27x^3 + 27x^2 + 9x$$

$$= 9x(3x^2 + 3x + 1)$$

$$(g \circ f)(x) = 3(x^3 - 1) + 1 = 3x^3 - 3 + 1 = 3x^3 - 2$$

$$(f \circ f)(x) = (x^3 - 1)^3 - 1 = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1 - 1 = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 2$$

$$(g \circ g)(x) = 3(3x+1) + 1 = 9x + 4$$

(c) $$f(x) = \cos x + x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + x$$

$$(f \circ g)(x) = \cos(x^3 + x) + (x^3 + x)^2 = \cos(x^3 + x) + x^6 + 2x^4 + x^2$$

$$(g \circ f)(x) = (\cos x + x^2)^3 + (\cos x + x^2)$$

$$= \cos^3 x + 3\cos^2 x \cdot x^2 + 3\cos x \cdot x^4 + x^6 + \cos x + x^2$$

$$(f \circ f)(x) = \cos(\cos x + x^2) + (\cos x + x^2)^2 = \cos(\cos x + x^2) + \cos^2 x + 2\cos x \cdot x^2 + x^4$$

$$(g \circ g)(x) = (x^3 + x)^3 + (x^3 + x) = x^9 + 3x^6 x + 3x^3 x^2 + x^3 + x^3 + x$$

$$= x^9 + 3x^7 + 3x^5 + 2x^3 + x$$

3. (0,5 ponto) ---

Para as seguintes funções obtenha uma expressão para suas inversas.

(a) $y = x^4 - 4, \quad x \geq 0$
(b) $y = \sqrt[5]{x}, \qquad x \geq 0$
(c) $y = 5x - 4$

**Solução:**

(a) $y = x^4 - 4, \quad x \geq 0$

$$x = y^4 - 4 \quad \longrightarrow y^4 = x + 4 \quad \longrightarrow y = \pm\sqrt[4]{x+4}$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será o ramo positivo, isto é

$$y^{-1} = \sqrt[4]{x+4}$$

(b) $y = \sqrt[5]{x}, \quad x \geq 0$

$$x = \sqrt[5]{y} \quad \longrightarrow x^5 = y$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será

$$y^{-1} = x^5 \qquad x \geq 0$$

(c) $y = 5x - 4$

$$x = 5y - 4 \quad \longrightarrow \quad x + 4 = 5y \quad \longrightarrow \quad y = \frac{x+4}{5}$$

logo

$$y^{-1} = \frac{x+4}{5}$$

4. (0,5 ponto)

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{9x^2 + 7}$$

(b) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4}{x^3 + 1}$$

(c) $$\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

**Solução:**

(a)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2}{9x^2 + 7} \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 2/x^2}{9 + 7/x^2} = \frac{3 - 0}{9 + 0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(b)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4}{x^3 + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4/x^3}{x^3/x^3 + 1/x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{1 + 1/x^3} = -\infty$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}\\
&= \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})\\
&= 6
\end{aligned}$$

5. (1,0 ponto) ———————————————————————

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x)=\begin{cases} 4x & \text{se} \quad x\le 2\\ x^3 & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

(b) $$f(x)=\begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x\le 2\\ 24-4x & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

**Solução:**

(a) $$f(x)=\begin{cases} 4x & \text{se} \quad x\le 2\\ x^3 & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 4x = 8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^3 = 8$$

(b) $$f(x)=\begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x\le 2\\ 24-2x & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^4 = 16$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 24-2x = 20$$

6. (1,0 ponto)

Ache os limites infinitos.

(a) $$\lim_{x\to+\infty} -\frac{5}{x}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left(4+\frac{1}{x^3}\right)$$

**Solução:**

(a) $$\lim_{x\to+\infty} -\frac{5}{x} = 0$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left(4+\frac{1}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} 4 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 4+0 = 4$$

7. (1,0 ponto)

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x-2}$$

(b) $$f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x-2 & \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ x-1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

**Solução:**

(a) $$f(x) = \frac{x^2-3x-10}{x-2}$$

$f$ claramente tem uma descontinuidade em $x = 2$, já que este ponto sequer pode pertencer ao domínio de $f$.

(b) $$f(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1}$$

Como o denominador nunca se anula, $f$ está definida em toda a reta real. O numerador é um polinômio e é contínua em $\mathbb{R}$.

Não há descontinuidades em $f$.

(c) $$f(x) = \begin{cases} 4-x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x-2 & \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ x-1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

$f$ tem uma descontinuidade em $x = 0$, posto que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x-1) = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-2) = -2$$

Como os limites laterais são diferentes, existe uma descontinuidade em $x = 0$.

8. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Mostre que se as funções $f$ e $g$ são contínuas, são também contínuas $f+g$ e $f-g$.

**Solução:**

Sabemos que uma função $F$ é contínua em um ponto $a$ se ele pertence ao domínio de $F$, se o limite de $F$ em $a$ existe e se seu valor é igual a $F(a)$. Isto é,

$F$ é contínua em $x = a$, se e somente se:

- $a \in D(F)$
- $\lim_{x \to a} F(x)$ existe (possui um valor)
- $\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$

Qualquer ponto $a$ pertencerá ao domínio de $f+g$ ou de $f-g$, já que sendo $f$ e $g$ contínuas $a$ pertence ao domínio de $f$ e de $g$. Além disso, claramente, $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ e $(f-g)(a) = f(a) - g(a)$.

Os limites $\lim_{x \to a}(f+g)(x)$ e $\lim_{x \to a}(f-g)(x)$ existem, pois sendo $f$ e $g$ contínuas os limites $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} g(x)$ existem, e

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

e

$$\lim_{x \to a}(f-g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

e como os limites existem e vale $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ e $(f-g)(a) = f(a) - g(a)$.

$$\lim_{x \to a}(f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

e

$$\lim_{x \to a}(f-g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = f(a) - g(a) = (f-g)(a)$$

9. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Dada a função $f(x) = x^3 - 3x$, ache

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e dada a função $f(x) = \sqrt{2x+10}$, ache

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{quando} \quad x > -5$$

**Solução:**

Para $f(x) = x^3 - 3x$ temos

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^3 - 3(x+h)) - (x^3 - 3x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x - 3h) - (x^3 - 3x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x - 3h - x^3 + 3x}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0}(3x^2 + 3xh + h^2 - 3)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 + \lim_{h\to 0} -3$$

$$= 3x^2 + 0 + 0 - 3$$

$$= 3x^2 - 3$$

Para $f(x) = \sqrt{2x+10}$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+2h+10}\right) - \left(\sqrt{2x+10}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+2h+10}\right) - \left(\sqrt{2x+10}\right)}{h} \cdot \frac{\left(\sqrt{2x+2h+10}\right) + \left(\sqrt{2x+10}\right)}{\left(\sqrt{2x+2h+10}\right) + \left(\sqrt{2x+10}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2x+2h+10) - (2x+10)}{h\left(\sqrt{2x+2h+10}\right) + \left(\sqrt{2x+10}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h\left(\sqrt{2x+2h+10}\right) + \left(\sqrt{2x+10}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{2x+2h+10}\right) + \left(\sqrt{2x+10}\right)}$$

$$= \frac{2}{\left(\sqrt{2x+10}\right) + \left(\sqrt{2x+10}\right)} = \frac{2}{2\sqrt{2x+10}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+10}}$$

10. (1,0 ponto)

Ache a primeira derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{4}{x^4}$

(b) $f(x) = \sqrt[4]{4x^4}$

(c) $f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

(d) $f(x) = \cos(\tan x)$

**Solução:**

(a) $$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \frac{4}{x^4} = x^{-1} + 2x^{-2} + 3x^{-3} + 4x^{-4}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} + 2(-2)x^{-3} + 3(-3)x^{-4} - 4(-4)x^{-5} = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4} - \frac{16}{x^5}$$

(b) $$f(x) = \sqrt[4]{4x^4} = \sqrt[4]{4}\sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{4}x^{\frac{4}{4}} = \sqrt[4]{4}x$$

$$f'(x) = \sqrt[4]{4} \cdot 1 = \sqrt[4]{4}$$

(c) $$f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x^2+4)^2\right]'(2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2\left[(2x^3-1)^3\right]' \\ &= \left[2(x^2+4)(2x)\right](2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2\left[3(2x^3-1)^2(2\cdot 3x^2)\right] \\ &= 4x(x^2+4)(2x^3-1)^3 + 18x^2(x^2+4)^2(2x^3-1)^2 \\ &= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2\left[2(2x^3-1)^2 + 9x(x^2+4)\right] \end{aligned}$$

(d) $$f(x) = \cos(\tan x)$$

$$f'(x) = -\text{sen }(\tan x) \cdot \sec^2 x$$

11. (1,0 ponto) ———

Ache as equações das retas normal e tangente a $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ no ponto $(1,1)$.

**Solução:**

$$x^2 + 3xy + y^2 - 5 = 0$$

$$2x + 3(y + xy') + 2yy' - 0 = 0$$

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0$$

$$(3x+2y)y' = -2x - 3y$$

ou

$$y' = -\frac{2x+3y}{3x+2y}$$

a inclinação da reta tangente no ponto $(x, y) = (1, 1)$ é

$$y' = -\frac{2+3}{3+2} = -1$$

assim a equação da reta tangente é:

$$y - 1 = (-1)(x-1) \implies y = -x+2$$

e a reta normal

$$y - 1 = x - 1 \implies y = x$$

12. (1,0 ponto)

Calcule as primeiras e segundas derivadas das seguintes funções:

**(a)** $f(x) = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$

**(b)** $f(x) = 2x^2\sqrt{2-x}$

**(c)** $f(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^4$

**Solução:**

**(a)**

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2} \\ f'(x) &= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} - \frac{3}{2} \cdot x^{3/2-1} + 2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot x^{-1/2-1} \\ &= \frac{3}{2} \cdot x^{-1/2} - \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} - \frac{2}{2} \cdot x^{-3/2} \\ &= \frac{3}{2x^{1/2}} - \frac{3x^{1/2}}{2} - \frac{1}{x^{3/2}} \\ f''(x) &= \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot x^{-3/2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} - \frac{-3}{2} \cdot x^{-5/2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot x^{-3/2} - \frac{3}{4} \cdot x^{-1/2} + \frac{3}{2} \cdot x^{-5/2}$$

$$= -\frac{3}{4x^{3/2}} - \frac{3}{4x^{1/2}} + \frac{3}{2x^{5/2}}$$

$$= -\frac{3}{4\sqrt[2]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt[2]{x^5}}$$

**(b)** $f(x) = 2x^2\sqrt{2-x}$

$$f'(x) = \left[2x^2\sqrt{2-x}\right]'$$

$$= 2\left[\left(x^2\right)'\sqrt{2-x} + x^2\left(\sqrt{2-x}\right)'\right]$$

$$= 2\left[2x\sqrt{2-x} + x^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)(-1)\right]$$

$$= 2\left[2x\sqrt{2-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{2-x}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{4x(2-x) - x^2}{2\sqrt{2-x}}\right]$$

$$= \frac{8x - 5x^2}{\sqrt{2-x}}$$

$$f''(x) = \left[\frac{8x-5x^2}{\sqrt{2-x}}\right]'$$

$$= \left[\frac{[8x-5x^2]' \cdot \left[\sqrt{2-x}\right] - [8x-5x^2] \cdot \left[\sqrt{2-x}\right]'}{\left[\sqrt{2-x}\right]^2}\right]$$

$$= \frac{[8-10x] \cdot \left[\sqrt{2-x}\right] - [8x-5x^2] \cdot \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2-x}}(-1)\right]}{\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{[8-10x] \cdot \left[\sqrt{2-x}\right] + [8x-5x^2] \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\right]}{\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2-x}\,[8-10x]\cdot\left[\sqrt{2-x}\right]+[8x-5x^2]}{2\sqrt{2-x}\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{2(2-x)\,[8-10x]+[8x-5x^2]}{2\sqrt{2-x}\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{2(16-20x-8x+10x^2)+8x-5x^2}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{32-40x-16x+20x^2+8x-5x^2}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{32-48x+15x^2}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

**(c)** $$f(x) = \left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^4$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right]'$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{(x^2-1)'\cdot(2x^3+1)-(x^2-1)\cdot(2x^3+1)'}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{(2x)\cdot(2x^3+1)-(x^2-1)\cdot(6x^2)}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{(4x^4+2x)-(6x^4-6x^2)}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{2x-2x^4+6x^2}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= \frac{8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)}{(2x^3+1)^5}$$

$f''(x) =$ Item dispensado. Não é necessário fazer.

$$f''(x) = \left[\frac{8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)}{(2x^3+1)^5}\right]'$$

$$f''(x) = \left[ \frac{[8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)]' \cdot [(2x^3+1)^5] - [8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)] \cdot [(2x^3+1)^5]'}{(2x^3+1)^{10}} \right]$$

Mas

$$\begin{aligned}
\Big[8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)\Big]' &= \Big[8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)\Big]' \\
&= 8\Big[(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)\Big]' \\
&= 8\Big\{\Big[(x^2-1)^3\Big]'\Big[(x-x^4+3x^2)\Big] + \Big[(x^2-1)^3\Big]\Big[(x-x^4+3x^2)\Big]'\Big\} \\
&= 8\Big\{3(x^2-1)^2(2x)(x-x^4+3x^2) + (x^2-1)^3(1-4x^3+6x)\Big\} \\
&= 8\Big\{3(x^2-1)^2(2x)(x-x^4+3x^2) + (x^2-1)^3(1-4x^3+6x)\Big\} \\
&= 8\Big\{(x^4-2x^2+1)(6x^2-6x^5+18x^3)+ \\
&\quad (x^6-3x^4+3x^2-1)(1-4x^3+6x)\Big\} \\
&= 8\Big\{(6x^6-12x^4+6x^2-6x^9+12x^7-6x^5+18x^7-36x^5+18x^3)+ \\
&(x^6-3x^4+3x^2-1-4x^9+12x^7-12x^5+4x^3+6x^7-18x^5+18x^3-6x)\Big\} \\
&= 8\Big\{6x^6-12x^4+6x^2-6x^9+12x^7-6x^5+18x^7-36x^5+18x^3+ \\
&x^6-3x^4+3x^2-1-4x^9+12x^7-12x^5+4x^3+6x^7-18x^5+18x^3-6x\Big\} \\
&= 8\Big\{-10x^9+48x^7+7x^6-72x^5-15x^4+40x^3+9x^2-6x-1\Big\}
\end{aligned}$$

e

$$\Big[(2x^3+1)^5\Big]' = 5(2x^3+1)^4(6x^2)$$

Substituindo na expressão da derivada

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left[ \frac{[8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)]' \cdot [(2x^3+1)^5] - [8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)] \cdot [(2x^3+1)^5]'}{(2x^3+1)^{10}} \right] \\
&= \left[ \frac{[8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)]' \cdot [(2x^3+1)^5]}{(2x^3+1)^{10}} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{[8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)] \cdot [(2x^3+1)^5]'}{(2x^3+1)^{10}} \right]
\end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{8\left\{-10x^9 + 48x^7 + 7x^6 - 72x^5 - 15x^4 + 40x^3 + 9x^2 - 6x - 1\right\} \cdot [(2x^3+1)^5]}{(2x^3+1)^{10}} \right.$$

$$\left. - \frac{[8(x^2-1)^3(x - x^4 + 3x^2)] \cdot [5(2x^3+1)^4(6x^2)]}{(2x^3+1)^{10}} \right]$$

$$= \left[ \frac{8\left\{-10x^9 + 48x^7 + 7x^6 - 72x^5 - 15x^4 + 40x^3 + 9x^2 - 6x - 1\right\} \cdot [(2x^3+1)^5]}{(2x^3+1)^{10}} \right.$$

$$\left. - \frac{[8(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)(x - x^4 + 3x^2)] \cdot [5(2x^3+1)^4(6x^2)]}{(2x^3+1)^{10}} \right]$$

$$= \frac{8(2x^3+1)^4}{(2x^3+1)^{10}} \left\{ \left[-10x^9 + 48x^7 + 7x^6 - 72x^5 - 15x^4 + 40x^3 + 9x^2 - 6x - 1\right] \cdot \left[2x^3 + 1\right] \right.$$

$$\left. - \left[(x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1)(x - x^4 + 3x^2)\right] \cdot \left[30x^2\right] \right\}$$

$$= \frac{8(2x^3+1)^4}{(2x^3+1)^{10}} \cdot \{$$

$$\left[-20x^{12} + 96x^{10} + 4x^9 - 144x^8 + 18x^7 + 87x^6 - 54x^5 - 27x^4 + 38x^3 + 9x^2 - 6x - 1\right]$$

$$+ \left[(30x^{12} - 180x^{10} - 30x^9 + 270x^8 + 90x^7 - 210x^6 - 90x^5 + 90x^4 + 30x^2)\right] \}$$

$$= \frac{8(2x^3+1)^4}{(2x^3+1)^{10}} \cdot \left\{ 10x^{12} - 84x^{10} - 26x^9 \right.$$

$$\left. + 126x^8 + 108x^7 - 123x^6 - 144x^5 + 63x^4 + 38x^3 + 39x^2 - 6x - 1 \right\}$$