Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
Gabarito – AP3 - 1° semestre de 2006.

1ª Questão) (2,5 pontos) Faça um esboço do gráfico da função $y = x^2\left(1-x^2\right)$, utilizando as ferramentas do cálculo.

$y = x^2\left(1-x^2\right)$

Dom f = $\mathbb{R}$

Assíntotas Horizontais:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\left(1-x^2\right) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{\left(1-x^2\right)}_{-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty}\underbrace{\left(1-x^2\right)}_{-\infty} = -\infty$$

não existe assíntota horizontal.

Assíntotas Verticais:

$$\lim_{x\to a} x^2\left(1-x^2\right) = a^2\left(1-a^2\right) = a^2 - a^4 \in \mathbb{R} \text{ , } \forall a \in \mathbb{R}$$

não existe assíntota vertical

Máximos e Mínimos Locais:

$$f(x) = x^2\left(1-x^2\right) = x^2 - x^4$$

$$f'(x) = 2x - 4x^3 = 2x(1-2x^2)$$

$$f'(x) = 0$$

$2x(1-2x^2)=0$

$2x=0$ **ou** $(1-2x^2)=0$

$x=0$ **ou** $x^2=\frac{1}{2} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x_1=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ **e** $x_2=\sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **e** $x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$$

$f(x)$ **é crescente para** $x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f(x)$ **é decrescente para** $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

Pontos de Máximo Locais:

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{4}\right)$$

Pontos de Mínimos Locais:

$$(0, f(0))=(0,0)$$

Pontos de Inflexão:

$$f(x)=x^2\left(1-x^2\right)=x^2-x^4 \rightarrow f'(x)=2x-4x^3 \rightarrow f''(x)=2-12x^2=2\left(1-6x^2\right)$$

$$f''(x)=0 \rightarrow 2\left(1-6x^2\right)=0 \rightarrow \left(1-6x^2\right)=0 \rightarrow x^2=\frac{1}{6} \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{6}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ **e** $x_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, +\infty\right)$ **concavidade para baixo**

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ **concavidade para cima**

pontos de inflexão: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, f\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right)\right)$ **e** $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, f\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right) \rightarrow \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$ **e** $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{5}{36}\right)$

eixo x:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x^2 - x^4 \\
&0 = x^2 - x^4 \\
&0 = x^2\left(1 - x^2\right) \\
&x = 0 \text{ ou } x = \pm 1
\end{aligned}
$$

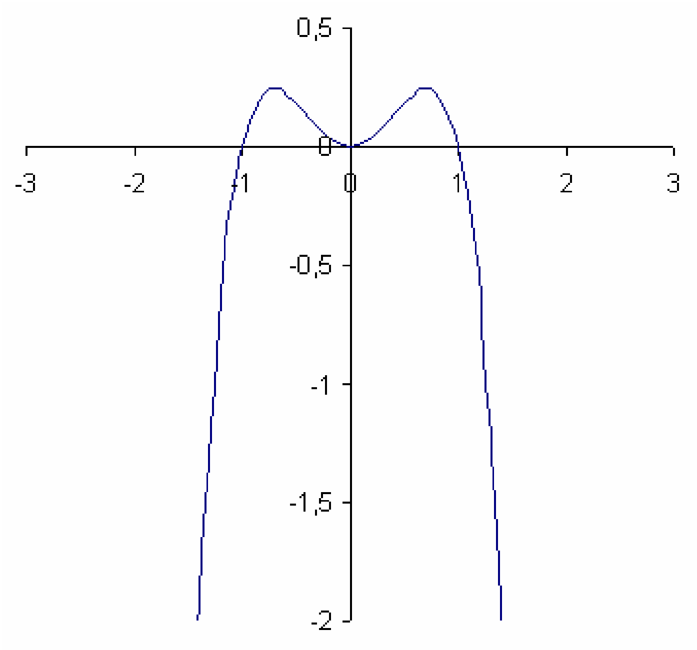
$$
\begin{aligned}
&f(-1) = (-1)^2 - (-1)^4 = 1 - 1 = 0 \\
&f(0) = (0)^2 - (0)^4 = 0 \\
&f(1) = (1)^2 - (1)^4 = 1 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

$\rightarrow (-1,0), (0,0), (1,0)$

eixo y:

$f(0) = 0^2 - 0^4 = 0$

$\rightarrow (0,0)$



2ª Questão) (2,5 pontos) Calcule as derivadas abaixo:

a) $\frac{d^2y}{dx^2}$ onde $y = \frac{1}{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.\left(1-x^2\right)-1.\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2\left(1-x^2\right)^2-\left(2x\right)\left(2\right)\left(1-x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(1-x^2\right)^4} = \frac{2\left(1-x^2\right)^2+8x^2\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^4} =$$

$$\frac{2\left(1-x^2\right)+8x^2}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{2-2x^2+8x^2}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{6x^2+2}{\left(1-x^2\right)^3}$$

b) $\frac{dx}{dy}$ onde $x^2 + y^2 = 9$

$$x = \sqrt{9 - y^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left(9 - y^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2y)$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{9 - y^2}}$$

3ª Questão) (2,5 pontos) Utilize as propriedades básicas de integral definida para calcular as seguintes integrais:

a) anulada

b) $\int_0^1 (2x+5)^2\, dx = \int_0^1 \left(4x^2 + 20x + 25\right) dx = \left[4\left(\frac{x^3}{3}\right) + 20\left(\frac{x^2}{2}\right) + 25x\right]_0^1 =$

$$\frac{4}{3} + 10 + 25 = 35 + \frac{4}{3} = \frac{105+4}{3} = \frac{109}{3}$$

4ª Questão) (2,5 pontos) Calcule a área da região limitada pelos gráficos das seguintes funções: $y = x^2$ e $y = x + 6$

O esboço da região mostra que o contorno inferior é $y = x^2$, o superior é $y = x + 6$. Nos extremos da região, os contornos têm as mesmas coordenadas y. Assim para encontrar os extremos, equacionamos a intersecção entre as curvas:

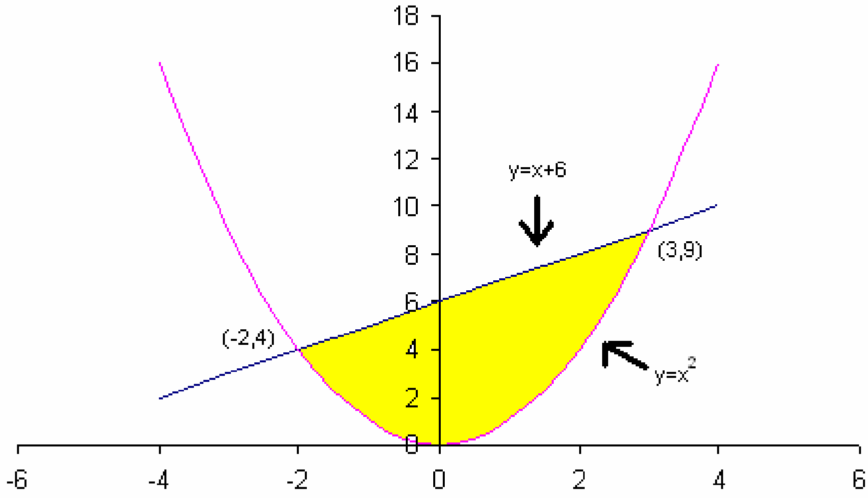
$$y = x + 6 \quad \text{e} \quad y = x^2$$

O que dá lugar a:

$$x^2 = x + 6 \quad \text{ou} \quad x^2 - x - 6 = 0 \quad \text{ou} \quad (x+2)(x-3) = 0$$

de onde obtém-se: $x=-2$ e $x=3$

Substituindo-se estes valores na equação $y=x^2$ e na equação $y=x+6$, tem-se que os valores correspondentes de y são $y=4$ e $y=9$. Assim sendo os pontos de intersecção superior e inferior dos contornos são $(-2,4)$ e $(3,9)$.



Aplicando a equação $A=\int_a^b [f(x)-g(x)]\ dx$, com $f(x)=x+6$ e $g(x)=x^2$, $a=-2,\ b=3$ obtém-se:

$$A=\int_{-2}^{3}\left[(x+6)-(x^2)\right]\ dx=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-2}^{3}=\left(\frac{9}{2}+18-\frac{27}{3}\right)-\left(\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)-\frac{(-2)^3}{3}\right)$$

$$=\left(\frac{9}{2}+9\right)-\left(2-12-\frac{(-8)}{3}\right)=\frac{27}{2}-\left(-10+\frac{8}{3}\right)=\frac{27}{2}+\frac{22}{3}=\frac{125}{6}$$