Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2^o semestre de 2007 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) ———

   Dada a função $y = x^{\frac{1}{3}}$, verifique onde essa função é crescente, decrescente e dê os pontos de máximo e mínimo, caso existam.

   1) intervalos onde a função é crescente e decrescente (0,5 ponto);
   2) pontos de máximo e mínimo (0,5 ponto);

   Solução:

   1) intervalos onde a função é crescente e decrescente (0,5 ponto);

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

   a)$\dfrac{dy}{dx}$ é discontínua em $x = 0$

   b) Se $x < 0$ então $\dfrac{dy}{dx} > 0$

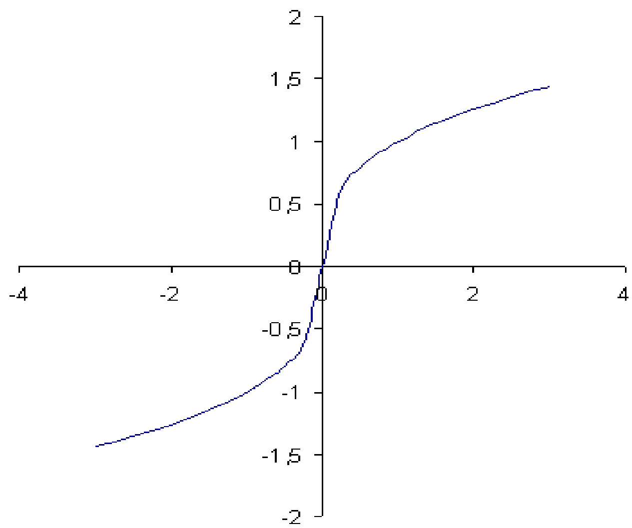
   c) Se $x > 0$ então $\dfrac{dy}{dx} > 0$

   Pelos itens a), b) e c), a função é crescente para qualquer valor de $x \neq 0$.

   2) pontos de máximo e mínimo (0,5 ponto);

   Pelos itens a), b) e c) não existe máximo ou mínimo em $x = 0$ pois $\dfrac{dy}{dx} > 0$ para todo $x \neq 0$.

Gráfico: $y = x^{\frac{1}{3}}$



2. (1,0 ponto)

Calcule a antiderivada:

$$\int (x+2)^2 dx =$$

Solução:

$$\int (x+2)^2 dx =$$

$$u = x + 2$$

$$du = dx$$

logo,

$$\int (x+2)^2 dx =$$

$$= \int (u)^2 du$$

$$= \frac{u^3}{3} + C$$

$$= \frac{(x+2)^3}{3} + C$$

3. (1,5 ponto)

Utilizando a definição de integral definida, calcule:

$$\int_1^4 \left(\frac{v+1}{\sqrt{v}} \right) dv =$$

Solução:

$$\int_1^4 \left(\frac{v+1}{\sqrt{v}} \right) dv =$$

$$= \int_1^4 \left(v^{\frac{1}{2}} + v^{-\frac{1}{2}} \right) dv$$

$$= \left[\left(\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) + \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \right]_1^4$$

$$= \left[\left(\frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + \left(\frac{2v^{\frac{1}{2}}}{1} \right) \right]_1^4$$

$$= \left[\left(\frac{2v^{\frac{3}{2}}}{3} \right) + 2v^{\frac{1}{2}} \right]_1^4$$

$$= \frac{16}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 2$$

$$= \frac{14}{3} + 2$$

$$= \frac{20}{3}$$

4. (2,0 pontos) ———————————————————————————-

Calcule a área limitada pelas curvas $x = y^2 - 2y$ e $x = 2y - 3$. Esboce seu gráfico.

Integral - (1,0 ponto);
Gráfico - (1,0 ponto).

Solução:

$$g(y) = y^2 - 2y$$

$$f(y) = 2y - 3$$

Observamos que:

$$f(y) = g(y)$$

$$y^2 - 2y = 2y - 3$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0 \leftrightarrow y = 1 \text{ ou } y = 3$$

Para todo $y \in [1, 3]$, $f(y) \geq g(y)$

A área da região é dada por:

$$A = \int_1^3 \left[(2y - 3) - (y^2 - 2y)\right] dy = \int_1^3 (-y^2 + 4y - 3) dy$$

$$= -\int_1^3 y^2 dy + 4 \times \int_1^3 y dy - 3 \times \int_1^3 1 dy$$

$$= -\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3 + 4 \times \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 - 3 \times [y]_1^3$$

$$= -\left[\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right] + 4 \times \left[\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right] - 3 \times [3 - 1]$$

$$= -\frac{26}{3} + 4 \times 4 - 3 \times 2$$

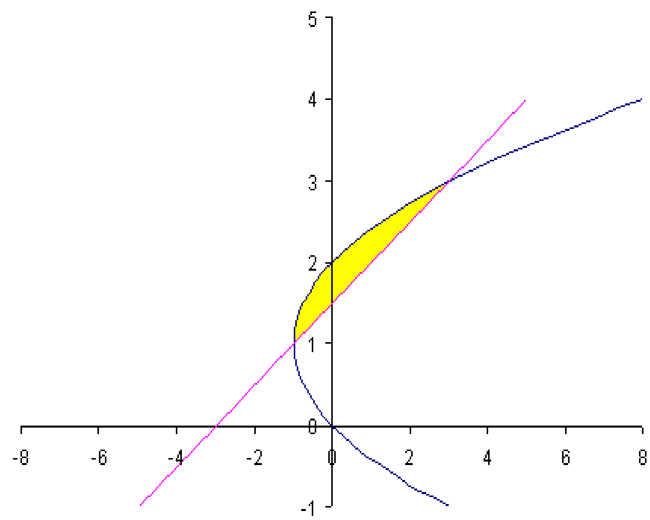
$$= -\frac{26}{3} + 16 - 6$$

$$= -\frac{26}{3} + 10$$

$$= -\frac{26}{3} + \frac{30}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

Gráfico:



5. (1,5 ponto) ———

Ache o volume do sólido gerado quando a região limitada por $y = 4$, pelo eixo y, e pela parte da curva $y = x^2$ relativa ao 1^o quadrante, é girada em torno do eixo y. Utilize o método dos discos. Esboce o gráfico.

Integral - (0,75 ponto);
Gráfico - (0,75 ponto).

Solução:

$$V(\Omega) = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dy$$

Escrevendo x em função de y:

$$y = x^2 \to |x| = \sqrt{y}$$

$$V(\Omega) = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dy$$

$$= \int_0^4 \pi[\sqrt{y}]^2 dy$$

$$= \pi \int_0^4 y dy$$

$$= \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$= 8\pi$$

6. (1,5 ponto) ———

Utilizando as propriedades dos logaritmos e sabendo-se que $\log z = 2$, $\log y = 3$ e $\log x = 4$, calcule:

$$\log \frac{xy^3}{\sqrt{z}} =$$

Solução:

$$\log \frac{xy^3}{\sqrt{z}} = \log xy^3 - \log \sqrt{z}$$

$$= \log x + \log y^3 - \log \sqrt{z}$$

$$= \log x + 3 \log y - \frac{1}{2} \log z$$

$$= (4) + 3 \times (3) - \frac{1}{2}(2)$$

$$= 4 + 9 - 1$$

$$= 12$$

7. (1,5 ponto)

Determine o limite abaixo:

Obs: Utilize L'Hôpital.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} =$$

Solução:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

$$= \frac{0}{1}$$

$$= 0$$