Matemática para Computação

Gabarito da Avaliação à Distância 2

2º Semestre de 2005

1º Questão (2,0 pontos) - Calcule as seguintes antiderivadas:

a) $\int \left(y\sqrt[3]{y}+1\right)^2 dy = \int \left(y^{\frac{4}{3}}+1\right)^2 dy = \int \left(y^{\frac{8}{3}}+2y^{\frac{4}{3}}+1\right)dy = \int y^{\frac{8}{3}}dy + 2\int y^{\frac{4}{3}}dy + \int dy$

$$= \frac{y^{\frac{8}{3}+1}}{\frac{8}{3}+1} + 2\left(\frac{y^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1}\right) + y + c = \frac{3}{11}y^{\frac{11}{3}} + \frac{6}{7}y^{\frac{7}{3}} + y + c.$$ (0,3 pontos)

b) $\int x^2\sqrt{3-2x}\,dx = ?$ (0,4 pontos)

Seja $f(x) =: x^2\sqrt{3-2x}$. Vamos escolher $u = g(x) := 3-2x \;\Rightarrow\; g'(x) = -2$ e $x = g^{-1}(u) = \dfrac{3-u}{2}$. Definimos $\hat{f}(u) := -\left(\dfrac{3-u}{2}\right)^2 \dfrac{\sqrt{u}}{2}$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(x)\,g'(x) = \underbrace{\left[-\frac{x^2\sqrt{3-2x}}{2}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(x)} \underbrace{-2}_{g'(x)} = f(x).$$

Por outro lado,

$$\int -\left(\frac{3-u}{2}\right)^2\frac{\sqrt{u}}{2}\,du = -\frac{1}{8}\int \left(9-6u+u^2\right)u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{1}{8}\int\left(9u^{\frac{1}{2}} - 6u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}}\right)du$$

$$= -\frac{1}{8}\left(9\int u^{\frac{1}{2}}\,du - 6\int u^{\frac{3}{2}}\,du + \int u^{\frac{5}{2}}\,du\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left[9\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} - 6\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\left(\frac{3}{2}+1\right)} + \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\left(\frac{5}{2}+1\right)}\right] =$$

$$= -\frac{3}{4}u^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{10}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}u^{\frac{7}{2}} + c \;\Rightarrow\; \hat{F}(u) := -\frac{3}{4}u^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{10}u^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}u^{\frac{7}{2}} + c$$

e portanto

$$\int x^2\sqrt{3-2x}\,dx = \left(\hat{F}\circ g\right)(x) + c = -\frac{3}{4}(3-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{10}(3-2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}(3-2x)^{\frac{7}{2}} + c.$$

c) $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t+5}} = ?$ (0,4 pontos)

Seja $f(t) =: \frac{t}{\sqrt{t+5}}$. Vamos escolher $u = g(t) := \sqrt{t+5} \;\Rightarrow\; g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+5}}$ e $t = g^{-1}(u) = u^2 - 5$. Definimos $\hat{f}(u) := 2\left(u^2-5\right)$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(t)\,g'(t) = \underbrace{[2t]}_{(\hat{f}\circ g)(t)}\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t+5}}}_{g'(t)} = f(t).$$

Por outro lado,

$$\int 2\left(u^2-5\right)du = 2\left(\int u^2\,du - 5\int du\right) = 2\left[\frac{u^{2+1}}{2+1} - 5u\right] + c = \frac{2}{3}u^3 - 10u + c$$

$$\Rightarrow\; \hat{F}(u) := \frac{2}{3}u^3 - 10u + c$$

e portanto

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t+5}} = \left(\hat{F}\circ g\right)(t) + c = \frac{2}{3}\left(\sqrt{t+5}\right)^3 - 10\sqrt{t+5} + c.$$

d) $\int \left(x^2 - 6x + 9\right)^{\frac{11}{3}} dx = ?$ (0,3 pontos)

Notamos que $\int \left(x^2-6x+9\right)^{\frac{11}{3}} dx = \int \left[\left(x-3\right)^2\right]^{\frac{11}{3}} dx = \int \left(x-3\right)^{\frac{22}{3}} dx.$

Seja $f(x) =: \left(x-3\right)^{\frac{22}{3}}$. Vamos escolher $u = g(x) := x - 3 \;\Rightarrow\; g'(x) = 1.$

Definimos $\hat{f}(u) := u^{\frac{22}{3}}$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(x)\,g'(x) = \underbrace{\left[\left(x-3\right)^{\frac{22}{3}}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(x)}\underbrace{1}_{g'(x)} = f(x).$$

Por outro lado,

$$\int u^{\frac{22}{3}}\,du = \frac{u^{\frac{22}{3}+1}}{\frac{22}{3}+1} + c = \frac{3}{25}u^{\frac{25}{3}} + c \;\Rightarrow\; \hat{F}(u) := \frac{3}{25}u^{\frac{25}{3}} + c$$

e portanto

$$\int \left(x^2-6x+9\right)^{\frac{11}{3}} dx = \left(\hat{F}\circ g\right)(x) + c = \frac{3}{25}\left(x-3\right)^{\frac{25}{3}} + c.$$

e) $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = ?$ (0,3 pontos)

Seja $f(x) =: \frac{(\ln x)^2}{x}$.   Vamos escolher $u = g(x) := \ln x \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{1}{x}$.

Definimos $\hat{f}(u) := u^2$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(x)\,g'(x) = \underbrace{\left(\ln x\right)^2}_{(\hat{f}\circ g)(x)}\;\underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} = f(x).$$

Por outro lado,

$$\int u^2\,du = \frac{u^{2+1}}{2+1} + c = \frac{1}{3}u^3 + c \;\Rightarrow\; \hat{F}(u) := \frac{1}{3}u^3 + c$$

e portanto

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \left(\hat{F}\circ g\right)(x) + c = \frac{1}{3}\left(\ln x\right)^3 + c.$$

f) $\int z^2 e^{z^3}\,dz = ?$ (0,3 pontos)

Seja $f(z) =: z^2 e^{z^3}$.   Vamos escolher $u = g(z) := z^3 \;\Rightarrow\; g'(z) = 3z^2$.

Definimos $\hat{f}(u) := \frac{1}{3}e^u$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(z)\,g'(z) = \underbrace{\left[\frac{1}{3}e^{z^3}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(x)}\underbrace{3z^2}_{g'(x)} = f(z).$$

Por outro lado,

$$\int \frac{1}{3}e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + c \;\Rightarrow\; \hat{F}(u) := \frac{1}{3}e^u + c$$

e portanto

$$\int z^2 e^{z^3}\,dz = \left(\hat{F}\circ g\right)(x) + c = \frac{1}{3}e^{z^3} + c.$$

2^o Questão (1,0 ponto) – Utilizando as propriedades básicas da integral definida:

a) calcule $\int_{2}^{7,2} 49 f(x)\, dx$ sabendo que $\int_{2}^{7,2} f(x)\, dx = -10$ (0,25 pontos)

$$\int_{2}^{7,2} 49 f(x)\, dx = 49 \int_{2}^{7,2} f(x)\, dx \leftarrow \text{Teorema 5.3 a) (propriedade da homogeneidade)}$$

$$= 49(-10) = -490.$$

b) calcule $\int_{-2}^{31} [2f(x) + 2g(x)]dx$ sabendo que $\int_{-2}^{31} f(x)\, dx = -2,2$ e que $\int_{-2}^{31} \frac{g(x)}{2}\, dx = 4$ (0,25 pontos)

$$\int_{-2}^{31} [2f(x) + 2g(x)]dx = 2\int_{-2}^{31} f(x)dx + 2\int_{-2}^{31} g(x)dx \leftarrow \text{Teorema 5.3 a) e b) (propriedade linear)}$$

$$= 2(-2,2) + 2(8) = 11,6$$

uma vez que

$$\int_{-2}^{31} \frac{g(x)}{2}\, dx = 4 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-2}^{31} g(x)\, dx = 4 \Rightarrow \int_{-2}^{31} g(x)\, dx = 8.$$

c) calcule $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ sabendo que $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 7$ e $\int_{2}^{3} f(x)dx = -5$ (0,25 pontos)

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} f(x)dx \leftarrow \text{Teorema 5.4 (aditividade geral com respeito ao intervalo de integração)}$$

$$= 7 + (-5) = 2$$

d) mostre que $\int_{0}^{1} x^3 dx \le \int_{0}^{1} x\, dx$ (0,25 pontos)

Para todo x no intervalo fechado $[0,1]$ $x^3 \le x$. Logo a desigualdade é verificada de acordo com o Teorema 5.5 b).

3º Questão (2,0 pontos) – Usando a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo calcule:

a) $\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 3\right) dx = ?$ (0,3 pontos)

O integrando é uma função polinomial e, portanto, é contínua (Teorema 2.11) em todo o seu domínio natural que é $\mathbb{R}$. Logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I:

$$\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 3\right) dx = \left[\int \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 3\right) dx \right]_1^2 .$$

Além disso

$$\int \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 3\right) dx = 4\int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 2\int x\, dx + 3\int dx$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 3x + c.$$

Portanto

$$\int_1^2 \left(4x^3 - 3x^2 + 2x + 3\right) dx = \left[x^4 - x^3 + x^2 + 3x\right]_1^2 = 14.$$

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^2dt}{\left(t^3+2\right)^2} = ?$ (0,4 pontos)

Seja $f(t) =: \dfrac{t^2}{\left(t^3+2\right)^2}$.   Vamos escolher $u = g(t) := t^3+2 \;\Rightarrow\; g'(t) = 3t^2$.

Definimos $\hat{f}(u) := \dfrac{1}{3u^2}$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(t)\, g'(t) = \underbrace{\left[\frac{1}{3\left(t^3+2\right)^2}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(t)} \underbrace{3t^2}_{g'(t)} = f(t).$$

Usando o Teorema 5.3 concluímos que

$$\int_1^2 \frac{t^2dt}{\left(t^3+2\right)^2} = \int_{g(1)}^{g(2)} \frac{1}{3u^2}du = \int_3^{10} \frac{1}{3u^2}du.$$

A função $\hat{f}$ é contínua em $[3{,}10]$. Logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I:

$$\int_3^{10} \frac{1}{3u^2}du = \left[\int \frac{1}{3u^2}du\right]_3^{10}.$$

Por outro lado,

$$\int \frac{1}{3u^2}du = \frac{1}{3}\int u^{-2}du \;\; = \frac{1}{3}\left(\frac{u^{-2+1}}{-2+1}\right) + c = -\frac{1}{3u} + c.$$

Portanto:

$$\int_1^2 \frac{t^2dt}{\left(t^3+2\right)^2} = \int_3^{10} \frac{1}{3u^2}du = \left[\int \frac{1}{3u^2}du\right]_3^{10} = \left[-\frac{1}{3u}\right]_3^{10} = \frac{7}{90}.$$

c) $\int_0^1 x\sqrt{9-5x^2}\,dx = ?$ (0,4 pontos)

Seja $f(x) =: x\sqrt{9-5x^2}$. Vamos escolher $u = g(x) := 9-5x^2 \Rightarrow g'(x) = -10x$.

Definimos $\hat{f}(u) := -\frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(x)\,g'(x) = \underbrace{\left[-\frac{1}{10}\left(9-5x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(x)}\underbrace{\left(-10x\right)}_{g'(x)} = f(x).$$

Usando o Teorema 5.3 concluímos que

$$\int_0^1 x\sqrt{9-5x^2}\,dx = \int_{g(0)}^{g(1)} -\frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du = \int_9^4 -\frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du.$$

A função $\hat{f}$ é contínua em $[4,9]$. Logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I:

$$\int_9^4 -\frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du = \int_4^9 \frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du = \left[\int \frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du\right]_4^9.$$

Por outro lado,

$$\int \frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{10}\int u^{\frac{1}{2}}du \;= \frac{1}{10}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right) + c = \frac{1}{15}u^{\frac{3}{2}} + c.$$

Portanto:

$$\int_0^1 x\sqrt{9-5x^2}\,dx = \int_4^9 \frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du = \left[\int \frac{1}{10}u^{\frac{1}{2}}du\right]_4^9 = \left[\frac{1}{15}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^9 = \frac{19}{15}.$$

d) $\int_0^2 |1-x|\,dx = ?$ (0,3 pontos)

$$\begin{aligned}\int_0^2 |1-x|\,dx &= \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx \\ &= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 -(1-x)\,dx \\ &= \int_0^1 dx - \int_0^1 x\,dx - \int_1^2 dx + \int_1^2 x\,dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I:

1) $\int_0^1 dx = \left[\int dx\right]_0^1 = [x]_0^1 = 1$ e $\int_1^2 dx = \left[\int dx\right]_1^2 = [x]_1^2 = 1;$

2) $\int_0^1 x\,dx = \left[\int x\,dx\right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$ e $\int_1^2 x\,dx = \left[\int x\,dx\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3}{2}.$

Logo:

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = 1 - \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1.$$

e) $\int_{-9}^{-5} \frac{1}{x+1} dx = ?$ (0,3 pontos)

Seja $f(x) =: \frac{1}{x+1}$. Vamos escolher $u = g(x) := x+1 \Rightarrow g'(x) = 1$.

Definimos $\hat{f}(u) := \frac{1}{u}$, porque com esta escolha

$$(\hat{f} \circ g)(x)\, g'(x) = \underbrace{\left[\frac{1}{x+1}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(x)} \underbrace{(1)}_{g'(x)} = f(x).$$

Usando o Teorema 5.3 concluímos que

$$\int_{-9}^{-5} \frac{1}{x+1} dx = \int_{g(-9)}^{g(-5)} \frac{1}{u} du = \int_{-8}^{-4} \frac{1}{u} du.$$

A função $\hat{f}$ é contínua em $[-8,-4]$. Logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I:

$$\int_{-8}^{-4} \frac{1}{u} du = \left[\int \frac{1}{u} du\right]_{-8}^{-4}.$$

Por outro lado,

$$\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c.$$

Portanto:

$$\int_{-9}^{-5} \frac{1}{x+1} dx = \int_{-8}^{-4} \frac{1}{u} du = \left[\int \frac{1}{u} du\right]_{-8}^{-4} = \left[\ln|u|\right]_{-8}^{-4} = -0,6931.$$

f) $\displaystyle\int_0^1 3^{-t}\,dt = ?$ (0,3 pontos)

Seja $f(t) =: 3^{-t}$. Vamos escolher $u = g(t) := -t \;\Rightarrow\; g'(t) = -1.$

Definimos $\hat{f}(u) := -3^u$, porque com esta escolha

$$(\hat{f}\circ g)(t)\,g'(t) = \underbrace{\left[-3^{-t}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(t)}\underbrace{\left[-1\right]}_{g'(t)} = f(t).$$

Usando o Teorema 5.3 concluímos que

$$\int_0^1 3^{-t}\,dt = \int_{g(0)}^{g(1)} -3^u\,du = -\int_0^{-1} 3^u\,du = \int_{-1}^0 3^u\,du.$$

A função $\hat{f}$ é contínua em $[-1,0]$. Logo pelo Teorema Fundamental do Cálculo - Parte I:

$$\int_{-1}^0 3^u\,du = \left[\int 3^u\,du\right]_{-1}^0.$$

Por outro lado,

$$\int 3^u\,du = \frac{3^u}{\ln 3} + c.$$

Portanto:

$$\int_0^1 3^{-t}\,dt = \int_{-1}^0 3^u\,du = \left[\int 3^u\,du\right]_{-1}^0 = \left[\frac{3^u}{\ln 3}\right]_{-1}^0 = \frac{2}{3\ln 3}.$$

4º Questão (2,0 pontos) – Esboce as regiões especificadas e calcule suas áreas utilizando a metodologia indicada.

a) Região limitada pelos gráficos das funções $x := \frac{y^2}{2}$ e $y := x - 4$.

Calcule a área usando a técnica "área por fatiamento".

Para determinarmos os pontos de interseção dos dois gráficos, resolveremos as duas equações $y^2 = 2x$ e $y = x - 4$ simultaneamente. Substituindo $y = x - 4$ em $y^2 = 2x$, temos $(x - 4)^2 = 2x$; isto é, $x^2 - 8x + 16 = 2x$; ou $x^2 - 10x + 16 = 0$. Fatorando a última equação obtemos $(x - 2)(x - 8) = 0$, de modo que $x = 2$ e $x = 8$. Quando $x = 2$, então $y = x - 4 = 2 - 4 = -2$. Quando $x = 8$, então $y = x - 4 = 8 - 4 = 4$. Logo, os dois gráficos se interceptam em $(2, -2)$ e em $(8,4)$.

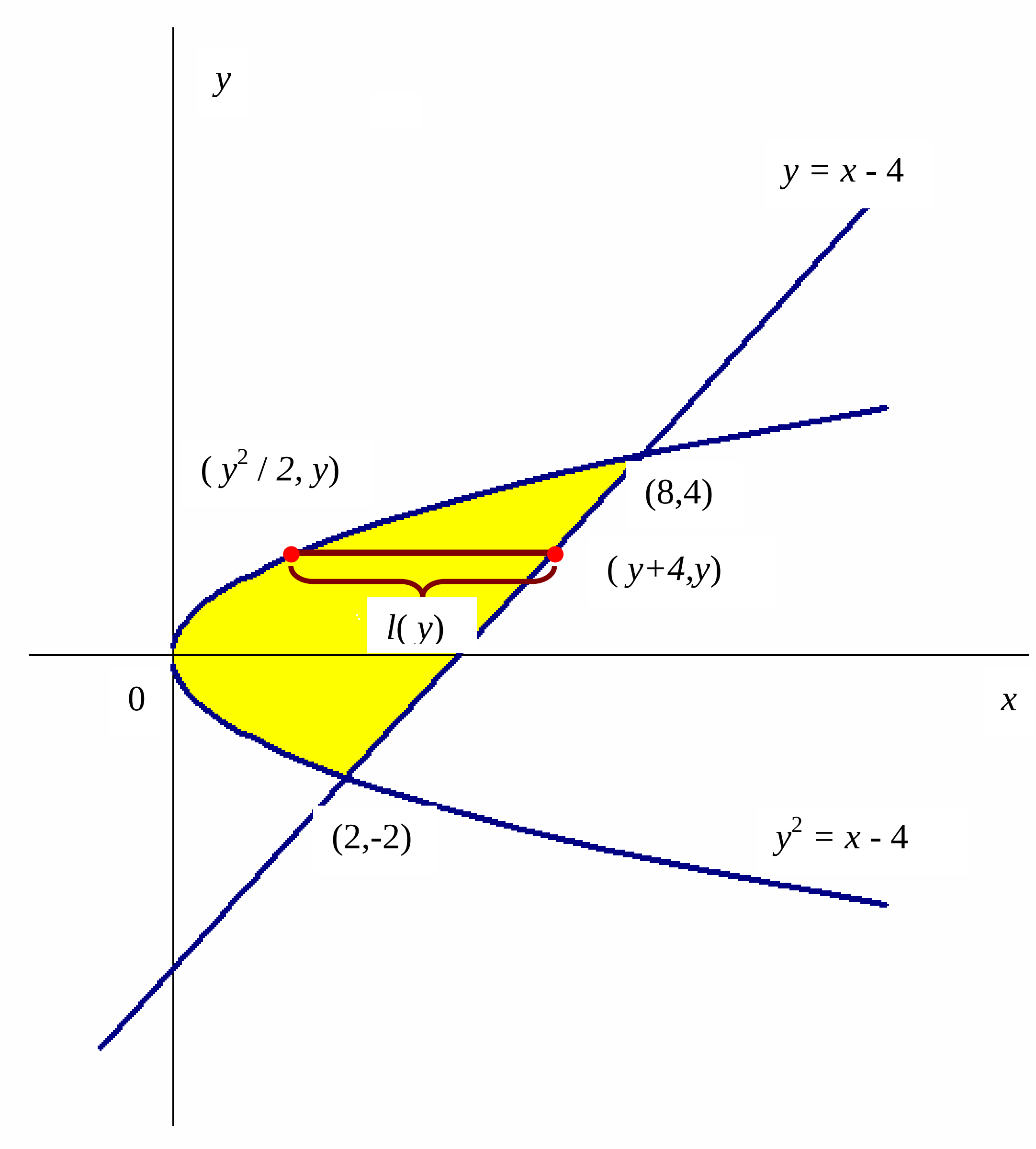
O ponto no gráfico de $y^2 = 2x$ com ordenada y tem abcissa $x = y^2/2$, enquanto que o ponto no gráfico de $y = x - 4$ com ordenada y tem abcissa $x = y + 4$. Logo,

$$l(y) = (y+4) - \frac{y^2}{2} \qquad \text{para} \qquad -2 \leq y \leq 4.$$

Mas

$$A(R) = \int_{-2}^{4} l(y)\ dy = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left(\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^3}{6} \right)_{-2}^{4} = \frac{40}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right) = 18$$

$A(R) = 18$ unidades quadradas



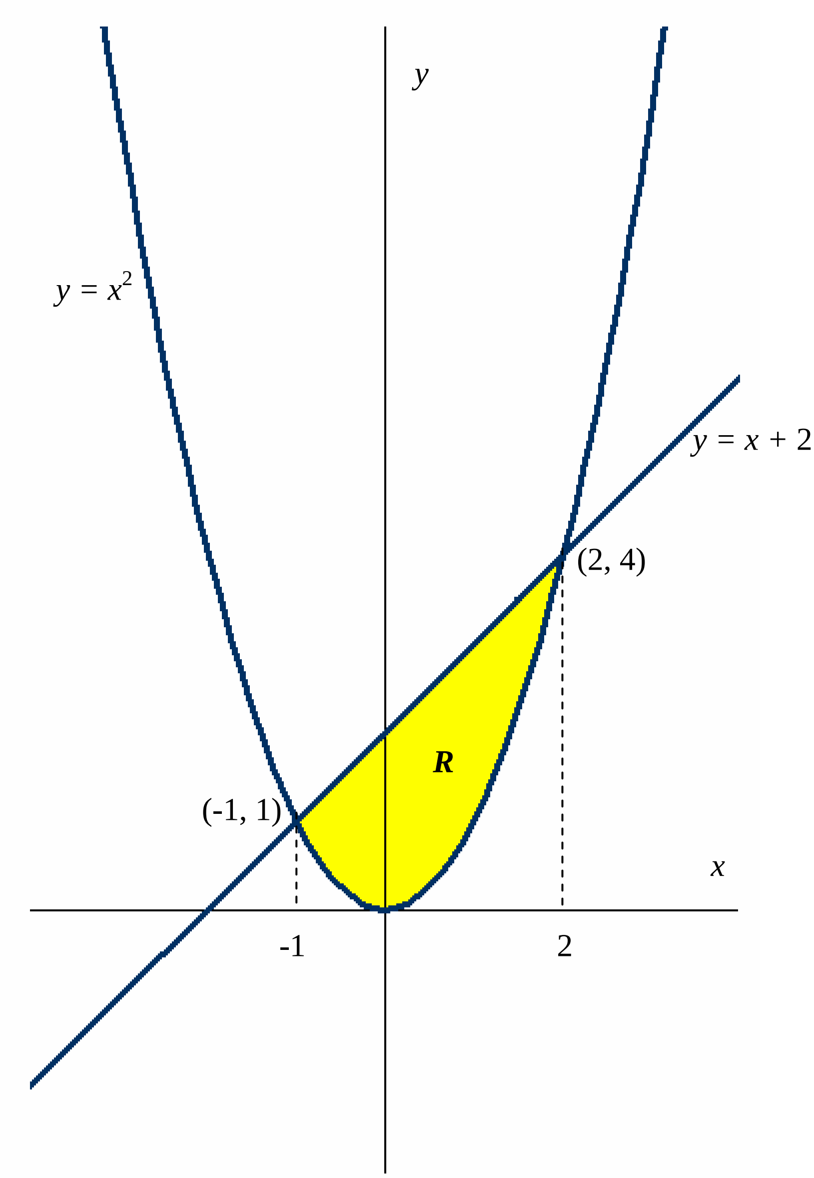
b) Região limitada pelos gráficos das funções $y := x^2$ e $y := x + 2$.

Calcule a área usando a técnica "área entre duas curvas".

Para determinar os pontos de interseção dos dois gráficos, resolvemos as duas equações $y = x^2$ e $y = x + 2$ simultaneamente, e obtemos os pontos (-1,1) e (2,4). Evidentemente, o gráfico de $y = x + 2$ está acima do gráfico de $y = x^2$ entre $x = -1$ e $x = 2$.

$$A(R) = \int_{-1}^{2} \left|(x+2) - x^2\right| \; dx = \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) \; dy =$$

$$A(R) = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right)_{-1}^{2} = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6} \right) = \frac{9}{2} \text{ unidades quadradas}$$



5º Questão (1,0 ponto) – Use o método “volume por discos” para calcular o volume do sólido gerado pela revolução da região sob o gráfico da função

$$f(x) := \sqrt{4 - x^2},$$

no intervalo [-2,2], em torno do eixo *x*. Trace o gráfico de f e do sólido.

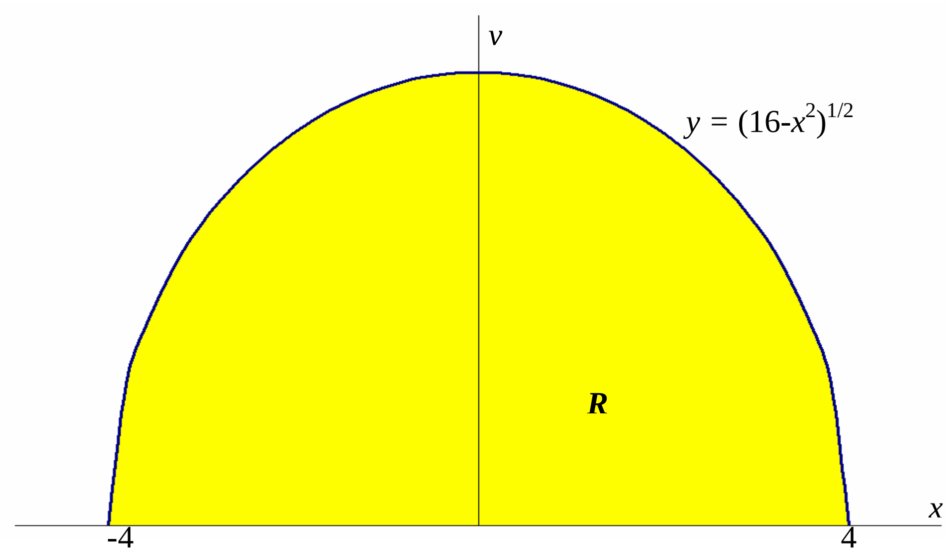
$$V = \pi \int_{-4}^{4} \left[f(x) \right]^2 \; dx = \pi \int_{-4}^{4} \left[\sqrt{4^2 - x^2} \; \right]^2 \; dx = \pi \int_{-4}^{4} \left(16 - x^2 \right) \; dx =$$

$$V = \pi \left[16x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^{4} = \pi \left[\left(16 \cdot 4 - \frac{4^3}{3} \right) - \left(16 \cdot (-4 \_ - \frac{(-4)^3}{3} \right) \right] = \pi \frac{4 \cdot 4^3}{3} = \pi \frac{4^4}{3}$$

Observe que o gráfico de *f(x)* em [-4,4] é um semicírculo e o sólido de revolução correspondente é uma esfera de raio 4. Assim, pelo método dos discos circulares, obteríamos a fórmula familiar

$$V = \pi \frac{4}{3} a^3$$

para o volume de uma esferar de raio *a*.



6º Questão (1,0 ponto) – Use o método “volume por anéis” para calcular o volume do sólido de revolução *S* gerado pela revolução da região *R* em torno do eixo *y*, sendo *R* a região plana limitada à direita pelo gráfico de $x = 2$, à esquerda pelo gráfico de $y = x^2$ e abaixo pelo eixo *x*. Trace *R* e *S*.

Resolução 6º Questão:

A região R e o sólido S são mostrados na figura adiante. Sejam

$$F(y) = 2 \quad \text{e} \quad G(y) = \sqrt{y}$$

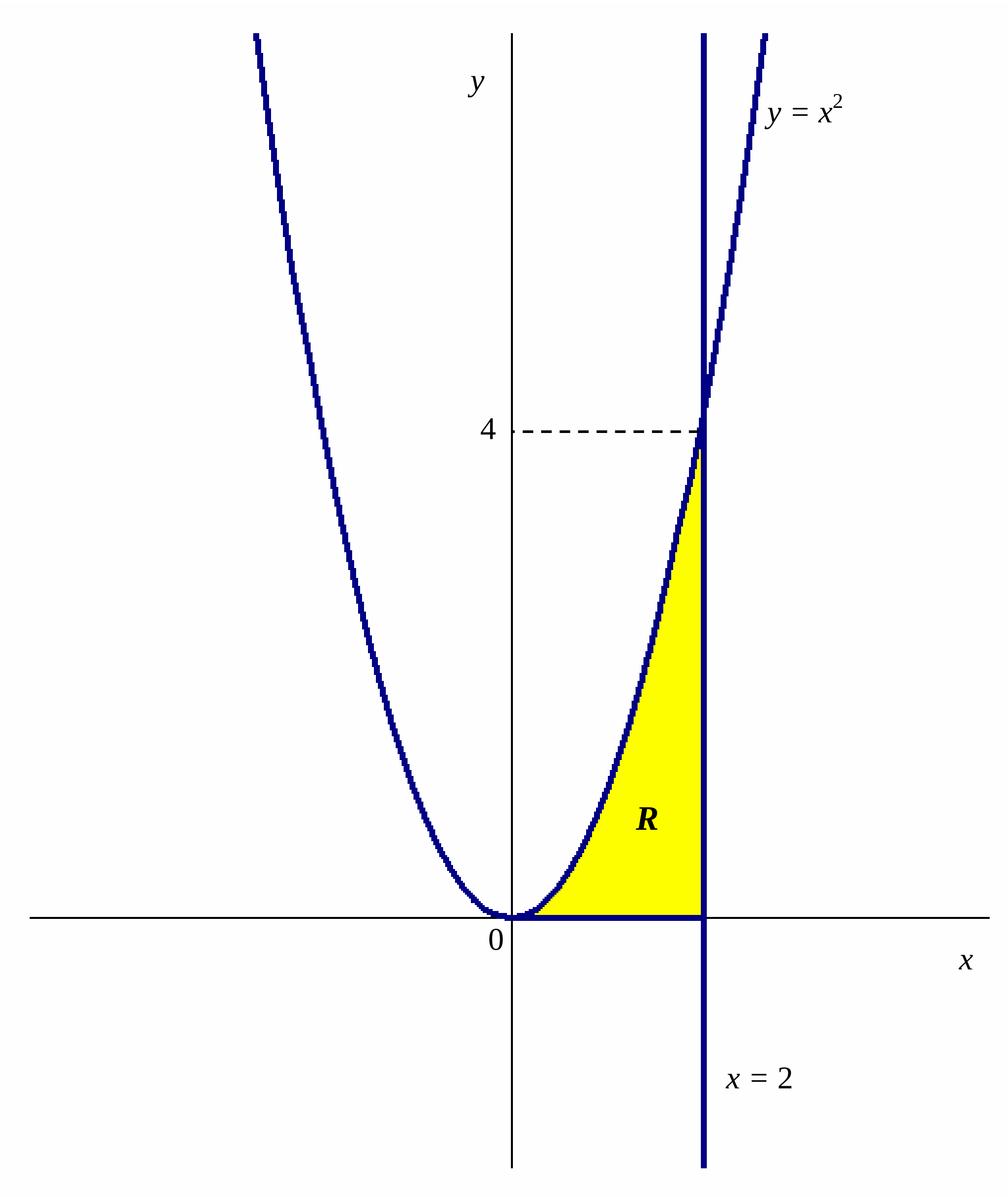
Pelo método dos anéis circulares

$$V = \pi \int_0^4 \left\{ [F(y)]^2 - [G(y)]^2 \right\} dy$$

Então

$$V = \pi \int_0^4 \left\{ 4 - \left[\sqrt{y} \right]^2 \right\} dy = \pi \int_0^4 \{4 - y\} \, dy =$$

$$V = \pi \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi \left[16 - \frac{16}{2} \right] - \pi \left[0 - \frac{0}{2} \right] = \pi [8] - \pi [0] = \pi 8$$



y
$y = x^2$
4
R
0
x
$x = 2$

7º Questão (1,0 ponto) – Calcule os seguintes limites:

Item a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x+1)} = ?$$

esta é uma forma indeterminada do tipo 0/0 em $x = 0$, logo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{D_x(e^x - e^{-x})}{D_x(\ln(x+1))} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1/(x+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0} (x+1)(e^x + e^{-x}) = (0+1)(e^0 + e^{-0}) = 2.$$

Item b)

$$\lim_{x\to \pi/2^+} \frac{7\tan x}{5+\sec x} = ?$$

É uma forma indeterminada do tipo ∞/∞ em $x = \pi/2$, logo

Pelo Teorema de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to \pi/2^+} \frac{7\tan x}{5+\sec x} = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{D_x(7\tan x)}{D_x(5+\sec x)} = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{7\sec^2 x}{\sec x \tan x} =$$

$$\lim_{x\to \pi/2^+} \frac{7\sec x}{\tan x} = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{7/\cos x}{\sin x/\cos x} = \lim_{x\to \pi/2^+} \frac{7}{\sin x} = 7.$$

Item c)

$$\lim_{x\to \pi/2} (2x - \pi)\sec x = ?$$

É uma forma indeterminada do tipo $0\cdot\infty$ em $x = \pi/2$, logo

vamos reescrevê-la para transformar em outra forma indeterminada

do tipo 0/0 ou ∞/∞.

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{2x-\pi}{1/\sec x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{2x-\pi}{\cos x}$$

Que é uma forma indeterminada do tipo 0/0 em $x = \pi/2$, logo

podemos aplicar o Teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{2x-\pi}{1/\sec x} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{D_x(2x-\pi)}{D_x(\cos x)} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{2}{-\sin x} = -2.$$

Item d)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=?$$

É uma forma indeterminada do tipo $\infty-\infty$ em $x=0$, logo vamos modificar a expressão de forma a chegar a uma forma onde poderemos aplicar o Teorema de L'Hôpital (do tipo 0/0 ou ∞/∞).

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\right)$$

Que é uma forma indeterminada do tipo 0/0 em $x=\pi/2$, logo podemos agora aplicar o Teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-e^x+1}{xe^x-x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{D_x(x-e^x+1)}{D_x(xe^x-x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}\right)$$

Que é também uma forma indeterminada do tipo 0/0 em $x=\pi/2$, logo podemos agora aplicar novamente o Teorema de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{D_x(1-e^x)}{D_x(xe^x+e^x-1)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^x}{xe^x+2e^x}\right)=-\frac{1}{2}.$$