Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2019 - Gabarito

Questões

1. (1,50 pontos)

   Determine as inversas das seguintes funções

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

   Solução:

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   $$y = x^3 + 1 \Longrightarrow x^3 = 1 - y \Longrightarrow x = \sqrt[3]{1-y}$$

   Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x}$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

   $$y = \sqrt[3]{x-2} \Longrightarrow y^3 = x - 2 \Longrightarrow y^3 + 2 = x$$

   Logo a inversa é $f^{-1}(x) = x^3 + 2$

2. (2,00 pontos)

   Calcule os limites abaixo.

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{3^2+3\cdot 3+9}{3+3} = \frac{9}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \infty$$

3. (1,50 pontos) ———————————————————————

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Solução:

O denominador é zero em $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

4. (1,50 pontos) ———————————————————————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

Aparentemente há uma descontinuidade no ponto $x = 2$, já que $x = 2$ não pertenceria ao domínio da função.

Entretanto, esta descontinuidade pode ser removida se reescrevermos a função da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$$

o que elimina a descontinuidade em $x = 2$.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 2$ parece haver uma descontinuidade. Vamos mostrar que esta descontinuidade existe.

O ponto $x = 2$ pertence ao domínio da função. Os limites laterais neste ponto são:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

entretanto o valor da função em $x = 2$ é $f(2) = 0$.

Logo

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 0$$

Portanto $f(x)$ é descontinua em $x = 2$.

5. (2,00 pontos) ————————————————————————

Para a função a seguir mostre que ela é contínua no intervalo indicado.

$$f(x) = 1 \quad \text{em} \quad (0, 1]$$

Solução:

Para ser contínua no intervalo a função deve ser contínua em cada ponto do intervalo.

Para ser contínua em um ponto a este ponto deve pertencer ao domínio da função, o limite da função neste ponto deve existir e o valor do limite deve coincidir com o valor da função no ponto, isto é

$$\begin{cases} 1. & a \in D(f) \\ 2. & \lim_{x \to a} f(x) \;\text{ existe (é igual a um número)} \\ 3. & \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Cada ponto do intervalo pertence ao domínio da função o que satifaz a condição 1. em todos os pontos do intervalo. Ademais o limite da função para cada ponto no intervalo existe, já que

$$\lim_{x \to a} 1 = 1 \qquad \forall x \in (0, 1]$$

Logo são satisfeitas as condições 2. e 3..

Consequentemente, $f(x) = 1$ é contínua no intervalo $(0, 1]$.

6. (1,50 pontos) ————————————————————————

Ache as segundas derivadas das funções:

(a) $f(x) = x^{-9}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

Solução:

(a) $$f(x) = x^{-9}$$

$$f'(x) = -9 \cdot x^{-10}$$

$$f''(x) = 90 \cdot x^{-11} = \frac{90}{x^{11}}$$

(b) $$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}}$$