Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática Para Computação

AD2 - 1º semestre de 2007 - Gabarito

1. (2,0 pontos)

Verifique se as funções abaixo são crescentes ou decrescentes e dê os pontos de máximo, mínimo e de inflexão de cada uma delas:

(a) $f(x) = 3x^2 + 9$

(b) $f(x) = x^2(12 - x^2)$

Solução:

(a) $f(x) = 3x^2 + 9$

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente:

Pontos críticos:

$f^{'}(x) = 0$

$f^{'}(x) = 6x$

$6x = 0$

$x = 0$

Estudo do sinal da derivada:

$f^{'}(x) > 0, \; , x > 0$

$f^{'}(x) < 0, \; , x < 0$

$f(x)$ é uma função crescente de x para $x > 0$;
$f(x)$ é uma função decrescente de x para $x < 0$.

Pontos de Máximo e Mínimo
A partir do valor de x : $x = 0$ e da variação do sinal da derivada nesse valor de x podemos obter os pontos de máximo e mínimo relativos da função:

$$x = 0$$

$$x < 0 \rightarrow f^{'}(x) < 0$$

$$x > 0 \rightarrow f^{'}(x) > 0$$

Existe um ponto de mínimo em $x = 0$; (0, f(0)) = (0,9)

(b) $$f(x) = x^2(12 - x^2)$$

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente:
Pontos críticos:

$$f(x) = 12x^2 - x^4$$

$$f^{'}(x) = 24x - 4x^3 = 4x(6 - x^2)$$

$$f^{'}(x) = 0$$

$$4x(6 - x^2) = 0$$

$$x = 0, \ , x = +\sqrt{6}, \ , x = -\sqrt{6}$$

Estudo do sinal da derivada:

$$f^{'}(x) > 0, \ , -\infty < x < -\sqrt{6}, \ , 0 < x < \sqrt{6}$$

$$f^{'}(x) < 0, \ , -\sqrt{6} < x < 0, \ , \sqrt{6} < x < +\infty$$

$f(x)$ é uma função crescente de x para $-\infty < x < -\sqrt{6}, \ , 0 < x < \sqrt{6}$;

$f(x)$ é uma função decrescente de x para $-\sqrt{6} < x < 0, \ , \sqrt{6} < x < +\infty$.

Máximo local: $(-\sqrt{6}, 36)$ e $(\sqrt{6}, 36)$.

Mínimo local: $(0, 0)$.

Ponto de Inflexão:

$$f''(x) = 24 - 12x^2 = 12(2 - x^2)$$

Os pontos de inflexão ocorrem em $x = -\sqrt{2}$ *e* $x = +\sqrt{2}$.

Estudo do sinal da segunda derivada:

$$f''(x) > 0, \ , -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

$$f''(x) < 0, \ , -\infty < x < -\sqrt{2}, \ , \sqrt{2} < x < +\infty$$

$f(x)$ *é côncava para cima em* $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$;

$f(x)$ *é côncava para baixo em* $-\infty < x < -\sqrt{2}, \ , \sqrt{2} < x < +\infty$.

Pontos de inflexão: $(-\sqrt{2}, 20)e(\sqrt{2}, 20)$

2. (1,5 ponto)

Calcule as seguintes antiderivadas:

(a) $$\int \frac{t}{\sqrt{t+3}} dt =$$

(b) $$\int x^2(\sqrt{1-2x}) dx =$$

Solução

(a) $$\int \frac{t}{\sqrt{t+3}} dt =$$

$$f(t) = \frac{t}{\sqrt{t+3}}$$

$$u = g(t) = \sqrt{t+3}$$

$u = g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+3}}$ e $t = g^{-1}(u) = u^2 - 3$

definindo $f(\widehat{u}) = 2(u^2-3)$ tem-se que:

$$(\widehat{f}og)(t)g^{'}(t) = \underbrace{2t}_{(\widehat{f}og)(t)} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{t+3}}}_{g^{'}(t)} = f(t)$$

$$\int 2(u^2-3)du = 2\left[\int u^2 du - 3\int du\right]$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3} - 3u\right) + C = \frac{2}{3}u^3 - 2u + C$$

$$\rightarrow \widehat{F}(u) = \frac{2}{3}u^3 - 2u + C$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{t+3}}dt = (\widehat{F}og)(t) + C = \frac{2}{3}\left(\sqrt{t+3}\right)^3 - 2\left(\sqrt{t+3}\right) + C$$

(b) $$\int x^2(\sqrt{1-2x})dx =$$

Seja $f(x) = x^2\sqrt{1-2x}$, escolhemos: $x = g^{-1}(u) = \frac{1-u}{2}$.
Reescrevendo $x^2(\sqrt{1-2x})$ em função de u, obtém-se:

$$\rightarrow \widehat{f}(u) = -\left(\frac{1-u}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{u}}{2}$$

A partir dessa escolha, $(\widehat{f}og)(x)g^{'}(x)$ fica definida da seguinte forma:

$$(\widehat{f}og)(x)g^{'}(x) = \underbrace{\left[-\frac{x^2\sqrt{1-2x}}{2}\right]}_{(\widehat{f}og)(x)} \underbrace{(-2)}_{g^{'}(x)} = f(x)$$

$$\int -\left(\frac{1-u}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{u}}{2}du =$$

$$= -\frac{1}{8}\int \left(1-2u+u^2\right)u^{\frac{1}{2}}du =$$

$$= -\frac{1}{8}\int \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{5}{2}}\right)du =$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{12}(u)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{10}(u)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}u^{\frac{7}{2}} + C$$
$$= -\frac{1}{12}(1-2x)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{10}(1-2x)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}(1-2x)^{\frac{7}{2}} + C$$

3. (1,0 ponto) ———

Utilizando as propriedades básicas da integral definida, calcule:

(a) $$\int_{-1}^{4} f(x)dx =$$

sabendo-se que $\int_{-1}^{2} f(x) = 10$ e $\int_{2}^{4} f(x) = -7$

(b) $$\int_{2}^{6} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

Solução ———

(a) $$\int_{-1}^{4} f(x)dx =$$

sabendo-se que $\int_{-1}^{2} f(x) = 10$ e $\int_{2}^{4} f(x) = -7$

$$\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{4} f(x)dx = 10 - 7 = 3$$

(b) $$\int_{2}^{6} \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \int_{2}^{6} xdx + \int_{2}^{6} \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{2}^{6} + \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{2}^{6}$$

$$= \frac{1}{2}(36-4) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(32) - \left(-\frac{2}{6}\right)$$

$$= 16 + \left(\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{49}{3}$$

4. (1,5 ponto) ———

Utilizando a primeira parte do Teorema Fundamental do Cálculo, calcule:

(a) $$\int_0^3 \left(4x^3 - 2x^2 + 2\right) dx =$$

(b) $$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+3} dt =$$

Solução ———

(a) $$\int_0^3 \left(4x^3 - 2x^2 + 2\right) dx =$$

$$2\int_0^3 \left(2x^3 - x^2 + 1\right) dx =$$

pelo TFC, as funções polinomiais são contínuas em todo o conjunto dos números Reais ($\mathbb{R}$).

$$= 2\int_0^3 2x^3 dx - 2\int_0^3 x^2 dx + 2\int_0^3 dx$$

$$= \; 4\left(\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^3 - 2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 + 2x\Bigg|_0^3$$

$$= 4\frac{81}{4} - \frac{54}{3} + 6$$

$$= 81 - 18 + 6$$

$$= 69$$

(b) $$\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+3} dt =$$

OBS:

$$u = g(t) = t^4 + 3$$

$$g'(t) = 4t^3$$

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{4u}$$

$$(\hat{f} \circ g)(t)g'(t) = \underbrace{\left[\frac{1}{4(t^4+3)}\right]}_{(\hat{f}\circ g)(t)} \underbrace{(4t^3)}_{g'(t)} = f(t)$$

Logo,

$$= \int_{g(1)}^{g(2)} \frac{1}{4u}$$

$$= \int_{4}^{19} \frac{1}{4u}$$

$$= [\ln|u|]_4^{19}$$

$$= \ln 19 - \ln 4$$

5. (1,5 ponto) ―――――――――――――――――――――――――――――――――

Esboce as regiões e calcule suas áreas:

(a) Região A: limitada pelas curvas $x = y^2$ e $y = x - 2$, integrando em relação a y.

(b) Região B: limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e pela reta $y = 2x - 4$.

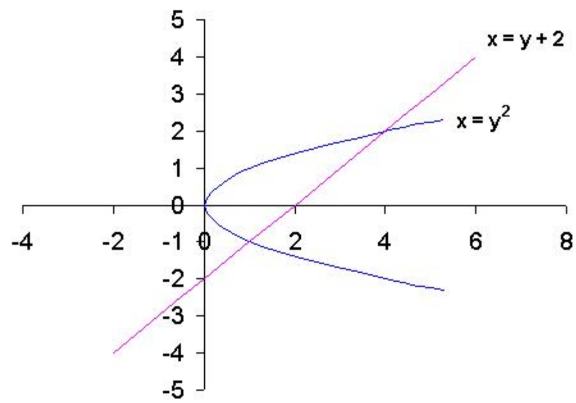
Solução: ―――――――――――――――――――――――――――――――――

(a) A partir da figura, pode-se observar que a curva à esquerda é $x = y^2$, à direita é $y = x - 2$ e a região é limitada ao intervalo $-1 \leq y \leq 2$.

Para aplicar a fórmula $A = \int [w(y) - v(y)]$, as equações devem ser dadas em função de y. Dessa forma, a equação $y = x - 2$ é reescrita como $x = y + 2$.

Logo, a área da região é dada por:

$$A = \int_{-1}^{2} [(y+2) - y^2]dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$



(b) Intersecções entre as curvas:

resolvendo simultaneamente as equações, obtemos:

$$(2x-4)^2 = 4x$$

$$4x^2 - 16x + 16 = 4x$$

$$x^2 - 4x + 4 = x$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

ou

$$(x-1)(x-4) = 0$$

as curvas se interceptam em: $x = 1$ ou $x = 4$, isto é, nos pontos: $(1, -2)$, $(4, 4)$.

Note que nenhuma curva está acima da outra em toda a região. Dessa forma, é melhor tomar y como variável independente e reescrever as curvas como: $x = \frac{1}{4}y^2$ e $x = \frac{1}{2}(y+4)$. A reta está sempre a direita da parábola.

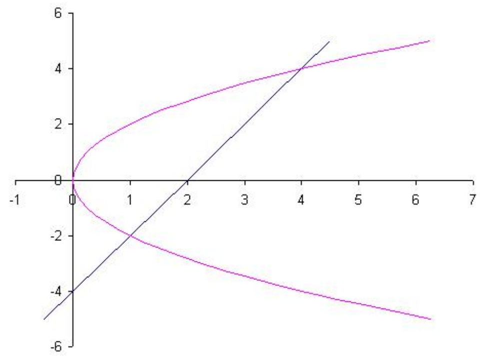
A área é obtida pela integração ao longo do eixo y:

$$\int_{-2}^{4} \left(\frac{1}{2}(y+4) - \frac{1}{4}y^2 \right) dy = \frac{1}{4} \int_{-2}^{4} (2y + 8 - y^2) dy$$

$$= \frac{1}{4} \left(y^2 + 8y - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_{-2}^{4}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\left(16 + 32 - \frac{64}{3} \right) - \left(4 - 16 + \frac{8}{3} \right) \right)$$

$$= 9$$

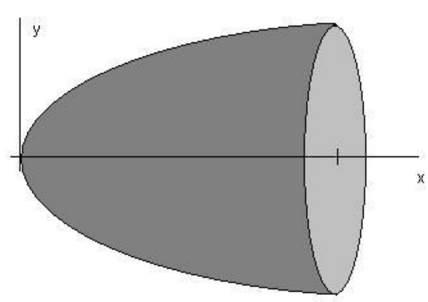


6. (1,0 ponto)

Ache o volume do sólido gerado quando a região limitada pelos gráficos das equações $y^2 = 8x$ e $x = 2$, no primeiro quadrante, é girada em torno do eixo x. Utilize o método dos discos. Esboce o sólido.

Solução:

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 8x dx = \pi (4x^2)\Big|_0^2 = \pi(16 - 0) = 16\pi$$



7. (1,5 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{tanx}{x} =$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} =$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{tanx}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(tanx)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{sec^2 x}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0} sec^2 x$$

$$= 1$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{(x^3 - x^2 - x - 2)'}{(x^3 - 3x^2 + 3x - 2)'} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(3x^2 - 2x - 1)}{(3x^2 - 6x + 3)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(12 - 4 - 1)}{(12 - 12 + 3)} =$$

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{7}{3}\right) =$$

$$= \frac{7}{3}$$