Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2011 - Gabarito

Questões

1. (1,5 pontos) ————————————————————

   Determine as inversas das seguintes funções

   (a)
   $$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$
   (b)
   $$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$
   (c)
   $$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad x \geq 0$$

   Solução:

   (a)
   $$f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

com

$$y = \frac{2x+1}{x-2}$$

resolvendo para x

$$y(x-2) = 2x+1 \implies xy - 2y = 2x+1 \implies xy - 2x = 2y+1$$

$$\implies x(y-2) = 2y+1 \implies x = \frac{2y+1}{y-2}$$

Portanto

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$$

(b)

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$$

com

$$y = \sqrt[3]{x^2+1}$$

resolvendo para x

$$y^3 = x^2+1 \implies y^3 - 1 = x^2 \implies \sqrt{y^3-1} = x$$

Enfim,

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x^3-1}$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad x \geq 0$$

com

$$y = \frac{1}{x+1} \quad x \geq 0$$

resolvendo para x

$$y(x+1) = 1 \implies yx + y = 1 \implies yx = 1 - y \implies x = \frac{1-y}{y}$$

Daí

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{x} \quad 0 < x \leq 1$$

2. (1,5 pontos) ---

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

(b) $$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

(c) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{para} \quad f(x)=x^2-3$$

(d) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{para} \quad f(x)=\sqrt{5x+1}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x-1)}=\infty, \quad \text{o limite não existe}$$

(b) $$\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}=\lim_{x\to 2}\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}\,\frac{(3+\sqrt{x^2+5})}{(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(\sqrt{x^2+5})^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-x^2+5}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5})=6$$

(c) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{para} \quad f(x)=x^2-3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((x+h)^2-3)-(x^2-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{((x^2+2xh+h^2)-3)-(x^2-3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3-x^2+3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}2x+h$$

$$=2x$$

(d) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{para} \quad f(x)=\sqrt{5x+1}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5(x+h)+1}-\sqrt{5x+1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5x+5h+1-5x-1}{h(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{5}{(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})}$$

$$= \frac{5}{(\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+1})}$$

$$= \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

3. (1,5 pontos) ———————————————————————————

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to\infty^-} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x) = \frac{3x-2}{9x+7}$$

(b) $$f(x) = \frac{x^2+x-2}{4x^3-1}$$

(c) $$f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to\infty^\pm} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{3x-2}{9x+7}\,\frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty^\pm} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1} = \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{x^2+x-2}{4x^3-1}\,\frac{x^3}{x^3} = \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{1/x+1/x^2-2/x^3}{4-1/x^3}$$

$$= \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{1/x+1/x^2-2/x^3}{4-1/x^3} = \frac{0+0-0}{4-0} = \frac{0}{4} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to\infty^\pm} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{2x^3}{x^2+1}\,\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty^\pm} \frac{2x}{1+1/x^2} = \pm\infty$$

4. (2,0 pontos) ———————————————————————————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$$

(b) $$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x - 2 & \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$$

f claramente tem uma descontinuidade em $x = -2$, já que este ponto sequer pode pertencer ao domínio de f. Entretanto podemos retirar a descontinuidade reescrevendo $f(x)$ da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 5)}{x + 2} = x - 5$$

(b) $$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

Assim como no item anterior f tem descontinuidades em $x = \pm 1$, mas pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x - 2 & \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

f tem uma descontinuidade em $x = 0$, posto que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$$

Como os limites laterais são diferentes, existe uma descontinuidade em $x = 0$.

5. (2,0 pontos) ——————————————————————

Mostre que as funções a seguir são contínuas em toda a reta dos reais.

(a) $$f(x) = x$$

(b) $$f(x) = |\, x \,|$$

Solução:

(a) $f(x) = x$

$$\lim_{x \to a} x = \lim_{x \to a^-} x = \lim_{x \to a^+} x = a = f(a), \quad \text{para todo} \;\; x \in \mathbb{R}$$

Que mostra que $f(x) = x$ é contínua em toda a reta dos reais.

(b) $f(x) = \mid x \mid$

Sabemos que

$$f(x) = \mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

logo para $x > 0$ e $x < 0$, a função $\mid x \mid$ é contínua como já nos mostra o item (a). Resta somente verificar a continuidade em $x = 0$. Mas,

$$\lim_{x \to 0^-} \mid x \mid = \mid 0 \mid = -0 = 0$$

$$\lim_{x \to a^+} \mid x \mid = \mid 0 \mid = +0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \mid x \mid = \mid 0 \mid = 0$$

$$\mid 0 \mid = 0$$

logo, $\mid x \mid$ é contínua em toda a reta dos reais.

6. (1,5 pontos) ---

Ache os limites infinitos.

(a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)$

Solução:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 2 + 0 = 2$