Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2018 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

Determine as inversas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^3 - 2$

(b) $f(x) = \sqrt[6]{x-1}$

Solução:

(a) $f(x) = 2x^3 - 2$

$$y = 2x^3 - 2 \implies y + 2 = 2x^3 \implies \frac{y+2}{2} = x^3 \implies \sqrt[3]{\frac{y+2}{2}} = x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}}$$

(b) $f(x) = \sqrt[6]{x-1}$

$$y = \sqrt[6]{x-1} \implies y^6 = x - 1 \implies x = y^6 + 1$$

$$f^{-1}(x) = x^6 + 1$$

2. (2,50 pontos)

Calcule os limites abaixo.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^4 - 27}{x^3 - 9}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-27}{x^3-9}=\frac{3^4-27}{3^3-9}=\frac{81-27}{27-9}=\frac{54}{18}=\frac{27}{9}=3$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x-1)}=\infty$$

3. (2,50 pontos)

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}$$

Solução:

$f(x)$ não é definida se o denominador $x-2$ se anular ou se o radicando x^2-7 for negativo, isto é, se $x=2$ ou se $-\sqrt{7}<x<\sqrt{7}$. Qualquer outro número real está em um dos intervalos $(-\infty,-\sqrt{7}]$ ou $[\sqrt{7},\infty)$. Temos então que provar a continuidade de $f(x)$ em todo o domínio. Ou seja, no interior dos intervalos (*usando limites*) e nos extremos (*usando limites laterais*).

Intervalos $(-\infty,-\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7},\infty)$:

nos pontos interiores

$$\lim_{x\to c}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}=\frac{\sqrt{c^2-7}}{c-2}=f(c)\qquad \forall c\in(-\infty,-\sqrt{7})\cup(\sqrt{7},\infty)$$

nos extremos dos intervalos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x^2-7)(x-2)}}{\sqrt{(x-2)^3}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^3-2x^2-7x+14}}{\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}}=\sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-2x^2-7x+14}{x^3-6x^2+12x-8}}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{7}}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}=\frac{\lim_{x\to-\sqrt{7}}\sqrt{x^2-7}}{\lim_{x\to-\sqrt{7}}x-2}=\frac{\sqrt{(-\sqrt{7})^2-7}}{-\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7-7}}{-\sqrt{7}-2}=0=f(-\sqrt{7})$$

$$\lim_{x\to\sqrt{7}}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}=\frac{\lim_{x\to\sqrt{7}}\sqrt{x^2-7}}{\lim_{x\to\sqrt{7}}x-2}=\frac{\sqrt{(\sqrt{7})^2-7}}{\sqrt{7}-2}=\frac{\sqrt{7-7}}{\sqrt{7}-2}=0=f(\sqrt{7})$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(x^2-7)(x-2)}}{\sqrt{(x-2)^3}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^3-2x^2-7x+14}}{\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}}=\sqrt{\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-7x+14}{x^3-6x^2+12x-8}}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

enfim, $f(x)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, a saber $(-\infty,-\sqrt{7}]\cup[\sqrt{7},\infty)$.

4. (2,50 pontos) ————————————————————

Calcule as derivadas de primeira ($f'(x)$) e segunda ($f''(x)$) ordens das funções

(a)

$$f(x)=\frac{2}{x^{1/3}}+\frac{6}{x^{1/4}}-\frac{2}{x^{3/2}}-\frac{4}{x^{3/4}}$$

(b)

$$f(x)=\frac{3+2x}{3-2x}$$

Solução:

(a) $$f(x)=\frac{2}{x^{1/3}}+\frac{6}{x^{1/4}}-\frac{2}{x^{3/2}}-\frac{4}{x^{3/4}}$$

$$f(x)=2x^{-1/3}+6x^{-1/4}-2x^{-3/2}-4x^{-3/4}$$

Primeira Derivada:

$$f'(x)=-\frac{1}{3}2x^{-1/3-1}-\frac{1}{4}6x^{-1/4-1}+\frac{3}{2}2x^{-3/2-1}+\frac{3}{4}4x^{-3/4-1}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{3}2x^{-4/3}-\frac{1}{4}6x^{-5/4}+\frac{3}{2}2x^{-5/2}+\frac{3}{4}4x^{-7/4}$$

$$f'(x)=-\frac{2}{3x^{4/3}}-\frac{6}{4x^{5/4}}+\frac{3}{x^{5/2}}+\frac{3}{x^{7/4}}$$

$$f'(x)=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^4}}-\frac{6}{4\sqrt[4]{x^5}}+\frac{3}{\sqrt[2]{x^5}}+\frac{3}{\sqrt[4]{x^7}}$$

Segunda Derivada:

$$f''(x)=-\frac{1}{3}\left[-\frac{4}{3}\right]2x^{-4/3-1}-\frac{1}{4}\left[-\frac{5}{4}\right]6x^{-5/4-1}+\frac{3}{2}\left[-\frac{5}{2}\right]2x^{-5/2-1}+\frac{3}{4}\left[-\frac{7}{4}\right]4x^{-7/4-1}$$

$$f''(x) = \frac{8}{9}x^{-10/3} + \frac{30}{16}x^{-9/4} - \frac{30}{4}x^{-7/2} + \frac{84}{16}x^{-11/4}$$

$$f''(x) = \frac{8}{9x^{10/3}} + \frac{30}{16x^{9/4}} - \frac{30}{4x^{7/2}} + \frac{84}{16x^{11/4}}$$

$$f''(x) = \frac{8}{9\sqrt[3]{x^{10}}} + \frac{15}{8\sqrt[4]{x^{9}}} - \frac{15}{2\sqrt{x^{7}}} + \frac{21}{4\sqrt[4]{x^{11}}}$$

(b) $$f(x) = \frac{3+2x}{3-2x}$$

Da regra do quociente:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Primeira Derivada:

$$f'(x) = \frac{(3+2x)'(3-2x) - (3+2x)(3-2x)'}{(3-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6-4x+6+4x}{(3-2x)^2} = \frac{12}{(3+2x)^2}$$

Segunda Derivada:

$$f''(x) = \frac{(12)'(3-2x)^2 - (12)\left[(3-2x)^2\right]'}{(3-2x)^4} = \frac{0 \cdot (3-2x)^2 - 12\left[9-12x+4x^2\right]'}{(3-2x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{0 - 12\left[-12+8x\right]}{(3-2x)^4} = \frac{144-96x}{(3-2x)^4}$$