Limites e Continuidade de Funções

Parte 1

Limites de Funções

Limites

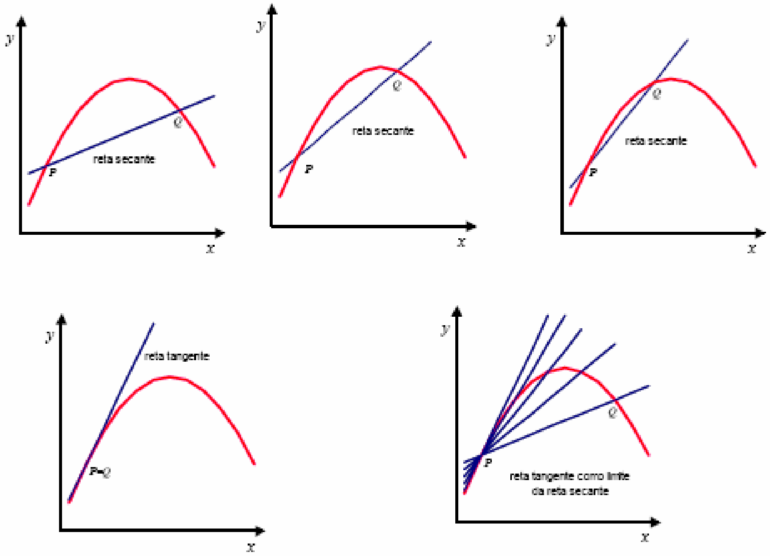
Limites

- Limites
- Propriedades de limites
- Limites Laterais
- Limites infinitos
- Limites no infinito

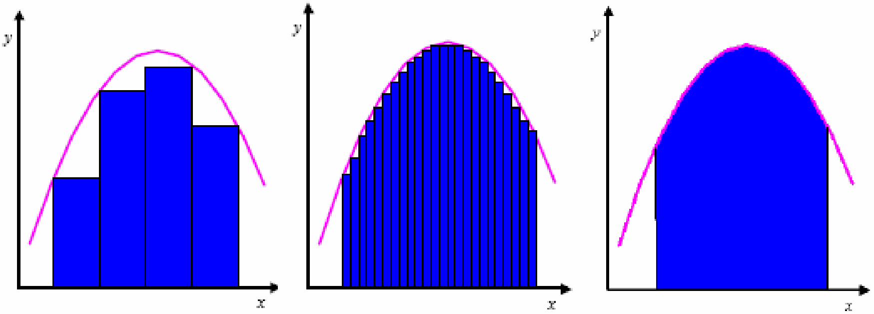
Motivações:

- Reta tangente a uma curva;
- Área de uma região genérica;
- Deslocamento, velocidade e aceleração.

Reta tangente a uma curva



Área de uma região genérica



Limites

Definição 2.1: Considere um conjunto W. Uma ***métrica*** em W é uma *função*, que associa a cada par ordenado (u,v) de elementos de W um número real $d(u,v)$, chamado ***distância*** de u a v, que verifica as seguintes condições: para quaisquer elementos u, v e w de W

1) $d(u,u)=0$,
2) se $u \neq v$ então $d(u,v)>0$,
3) $d(u,v)=d(v,u)$,
4) $d(u,w)\leq d(u,v)+d(v,w)$.

Exemplo 2.1

Se $W=\mathbb{R}$, então $d(x,y):=|x-y|$.

Distância do número x ao número y. ■

Definição 2.2: Seja W um conjunto de números reais. Um número real a é denominado *ponto de acumulação de W* quando todo intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$, de centro a, contém algum ponto x de W diferente de a.

A condição de a ser um ponto de acumulação de W pode ser expressa do seguinte modo:

para cada número real $\delta>0$, dado arbitrariamente, existe um número x de W tal que $0<d(x,a)<\delta$.

Exemplo 2.2

Seja $W=X\cup Y$ no qual $X=\{x\in\mathbb{R};\ \ 1\leq x<2\}$ e $Y=\{3,4\}$.

- todos os números de X e o número 2 são pontos de acumulação de W,
- os números 3 e 4 não são pontos de acumulação de W. ■

Definição 2.3: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação do domínio de f, $D(f)$.

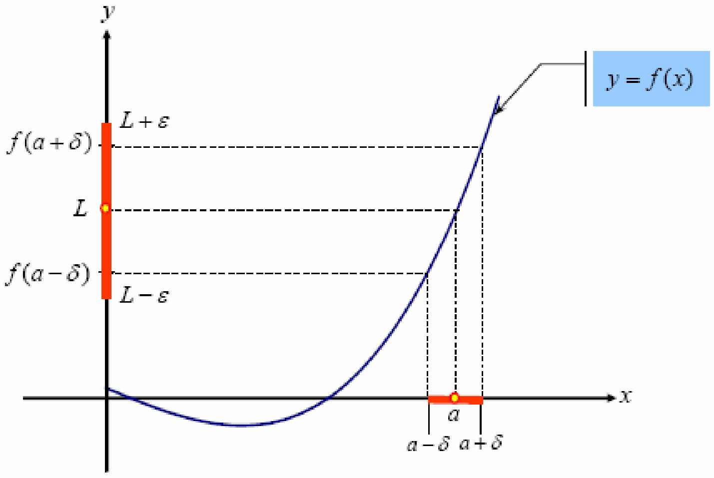
Diz-se que *o limite de f(x) quando x tende a a é L*, e escrevemos

$$\lim_{x\to a} f(x)=L,$$

se para cada número real $\varepsilon>0$, dado arbitrariamente, existir um número $\delta>0$ de modo que se tenha:

$$d(f(x),L)<\varepsilon \ \text{ sempre que } x\in D(f) \ \text{ e } \ 0<d(x,a)<\delta.$$

Recordamos que $d(f(x),L)=|f(x)-L|$ e $d(x,a)=|x-a|$ e, também, que a condição $0<d(x,a)<\delta$ significa que x se encontra no intervalo $(a-\delta,a+\delta)$, mas é diferente de a. Analogamente, a condição $d(f(x),L)<\varepsilon$ significa que $f(x)$ se encontra no intervalo aberto $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.



Geometricamente, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que, para $x \neq a$ podemos garantir que *f(x)* se encontra em qualquer pequeno intervalo aberto em torno de L, desde que x se encontre em um intervalo aberto escolhido em torno de a.

Exemplo 2.3

Usando a Definição 2.3 vamos provar que $\lim_{x \to -2} (3x+7) = 1$.

Solução:

Neste exemplo $f(x) = 3x+7$, $L = 1$, $a = -2$ e devemos mostrar que:

existe

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $x \in D(f)$ e $0 < d(x,-2) < \delta \Rightarrow d(f(x),1) < \varepsilon$.

qualquer que seja

Para isto notamos, em primeiro lugar, que:

$$d(f(x),1) = |(3x+7)-1| = |3x+6| = 3|x+2|.$$

Seja $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, na qual ε é um número real positivo arbitrário, e seja x um número arbitrário do domínio de f $(D(f) = \mathbb{R})$ tal que $x \neq -2$ e $d(x,-2) < \delta$. Logo:

$$0 < d(x,-2) = |x+2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \varepsilon > 3|x+2| = d(f(x),1). \quad \blacksquare$$

Ressalta-se que se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então, exatamente um dos três casos abaixo é válido:

Caso 1 – f está definida em a e $f(a) = L$.

Caso 2 – f não está definida em a.

Caso 3 – f está definida em a e $f(a) \neq L$.

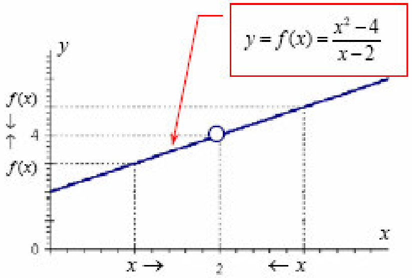
Exemplo 2.4

Nestes três casos

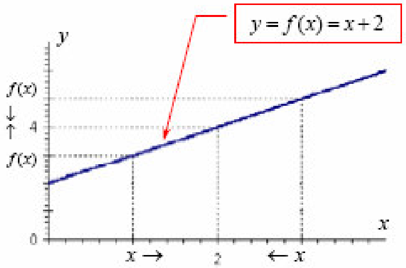
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4.$$

Entretanto, ...

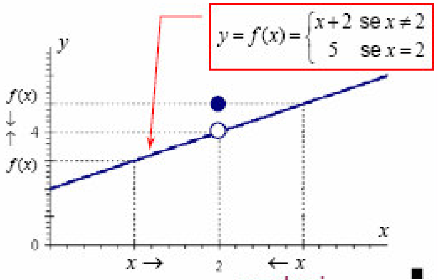
Caso 2 – f não está definida em a.



Caso 1 – f está definida em a e $f(a) = L$.



Caso 3 – f está definida em a e $f(a) \neq L$.



$\blacksquare$

Propriedades dos Limites de Funções

Teorema 2.1: Sejam f e g duas funções reais de um variável real.

Suponha que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então:

1) $\lim_{x\to a}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = L + M$ e

$\lim_{x\to a}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = L - M$;

2) $\lim_{x\to a}\left[cf(x)\right] = c\lim_{x\to a} f(x) = cL$ (c é uma constante qualquer);

3) $\lim_{x\to a}\left[f(x)g(x)\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right] = LM$;

4) se $M \neq 0$, então $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$;

5) $\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$ (n é um inteiro positivo qualquer);

Continuação do Teorema 2.1

6) se $L > 0$ e n é um inteiro positivo ou se $L \leq 0$ e n é um inteiro positivo ímpar, então $\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$;

7) $\lim_{x\to a}\left|f(x)\right| = \left|\lim_{x\to a} f(x)\right| = |L|$;

8) $\lim_{x\to a} c = c$ (c é uma constante qualquer);

9) $\lim_{x\to a} x = a$.

Teorema 2.2: Sejam f e g funções reais de uma variável real cujos domínios têm uma interseção, não vazia, W. Se $f(x) = g(x)$ em W exceto no ponto de acumulação a de W e se

$\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} g(x) = L$

Exemplo 2.5

Seja $\lim_{x\to 3} f(x) = 9$ e $\lim_{x\to 3} g(x) = 4$. Logo:

a) $\lim_{x\to 3}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to 3} f(x) + \lim_{x\to 3} g(x)$ (Teorema 2.1, prop. 1)

$= 9 + 4 = 13.$

b) $\lim_{x\to 3}\left[3f(x)-2g(x)\right] = \lim_{x\to 3} 3f(x) - \lim_{x\to 3} 2g(x)$ (Teorema 2.1, prop. 1)

$= 3\lim_{x\to 3} f(x) - 2\lim_{x\to 3} g(x)$ (Teorema 2.1, prop. 2)

$= 3(9) - 2(4) = 19.$

c) $\lim_{x\to 3}\sqrt{f(x)g(x)} = \sqrt{\lim_{x\to 3}\left[f(x)g(x)\right]}$ (Teorema 2.1, prop. 6)

$= \sqrt{\left[\lim_{x\to 3} f(x)\right]\left[\lim_{x\to 3} g(x)\right]}$ (Teorema 2.1, prop. 3)

$= \sqrt{9(4)} = \sqrt{36} = 6.$

continuação do Exemplo 2.5.

d) $\lim_{x\to 3}\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\lim_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ (Teorema 2.1, prop. 7)

$= \left|\dfrac{\lim_{x\to 3} f(x)}{\lim_{x\to 3} g(x)}\right|$ (Teorema 2.1, prop. 4)

$= \left|\dfrac{9}{4}\right| = \dfrac{9}{4}.$ ■

Exemplo 2.6

Calcular $\lim\limits_{t\to 2}\left(4t^2+5t-7\right)$.

Solução: Em primeiro lugar, temos que:

$\lim\limits_{t\to 2}(-7)=-7$ (Teorema 2.1, prop. 8) e

$\lim\limits_{t\to 2} t=2$ (Teorema 2.1, prop. 9),

logo,

$\lim\limits_{t\to 2} 5t=5\lim\limits_{t\to 2} t=5(2)$ (Teorema 2.1, prop. 2),

$\lim\limits_{t\to 2} t^2=\left(\lim\limits_{t\to 2} t\right)^2=2^2$ (Teorema 2.1, prop. 5),

$\lim\limits_{t\to 2} 4t^2=4\lim\limits_{t\to 2} t^2=4(4)$ (Teorema 2.1, prop. 2),

e portanto

$$\lim_{t\to 2}\left(4t^2+5t-7\right)=\lim_{t\to 2}4t^2+\lim_{t\to 2}5t+\lim_{t\to 2}(-7) \quad \text{(Teorema 2.1, prop. 1)}$$

$$=16+10-7=19. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.3: Seja f uma função real de uma variável real e seja a um ponto de acumulação do domínio de f. Se f é uma função polinomial então:

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

OBS: Função *polinomial*

$$f(x)=a_o+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

na qual n é um número natural e os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são números reais constantes. Se a_n é diferente de zero diz-se que a função polinomial é de *grau* n.

Exemplo 2.7

Calcular $\lim\limits_{y\to 3}\sqrt[3]{\dfrac{y^2+5y+3}{y^2-1}}$.

Solução:

Notamos que:

$\lim\limits_{y\to 3}\left(y^2+5y+3\right)=3^2+5(3)+3=27$ (Teorema 2.3) e

$\lim\limits_{y\to 3}\left(y^2-1\right)=3^2-1=8$ (Teorema 2.3).

Logo,

$$\lim_{y\to 3}\frac{y^2+5y+3}{y^2-1}=\frac{\lim\limits_{y\to 3}\left(y^2+5y+3\right)}{\lim\limits_{y\to 3}\left(y^2-1\right)}=\frac{27}{8} \quad \text{(Teorema 2.1, prop. 4) e}$$

$$\lim_{y\to 3}\sqrt[3]{\frac{y^2+5y+3}{y^2-1}}=\sqrt[3]{\lim_{y\to 3}\frac{y^2+5y+3}{y^2-1}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2} \quad \text{(Teorema 2.1, prop. 6).}$$

$\blacksquare$

Exemplo 2.8

Calcular $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x-7}$.

Solução:

Notamos, em primeiro lugar, que

$$\overbrace{\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}\neq\frac{\lim\limits_{x\to 7}\left(x^2-49\right)}{\lim\limits_{x\to 7}\left(x-7\right)}}^{\text{Teorema 2.1, prop. 4}} \quad \text{pois} \quad \overbrace{\lim_{x\to 7}\left(x-7\right)=7-7}^{\text{Teorema 2.3}}=0.$$

Entretanto,

$$\overbrace{\frac{x^2-49}{x-7}}^{=:g(x)}=\frac{(x-7)(x+7)}{x-7}=\overbrace{x+7}^{=:f(x)}$$ e, portanto, $f(x)=g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$, exceto em $x=7$. Logo, usado o Teorema 2.2 concluímos que:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x-7}=\lim_{x\to 7}\left(x+7\right).$$

Finalmente, $\lim\limits_{x\to 7}(x+7)=14$ (Teorema 2.3). $\blacksquare$

Exemplo 2.9

Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

Solução:

Observamos que:

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\frac{\left(\sqrt{4+x}-2\right)\left(\sqrt{4+x}+2\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{4+x}\right)^2-2^2}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{4+x-4}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}$$

$$=\frac{x}{x\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}\text{ para } x\neq 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.2:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}.$$

Continuação do Exemplo 2.9

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=?$$

Mas,

$\lim_{x\to 0}1=1$ (Teorema 2.1, prop. 8),

$\lim_{x\to 0}2=2$ (Teorema 2.1, prop. 8),

$\lim_{x\to 0}(4+x)=4$ (Teorema 2.3) e

logo

$\lim_{x\to 0}\sqrt{4+x}=\sqrt{\lim_{x\to 0}(4+x)}=\sqrt{4}=2$ (Teorema 2.1, prop. 6),

$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}+2\right)=\lim_{x\to 0}\sqrt{4+x}+\lim_{x\to 0}2=2+2=4$ (Teorema 2.1, prop. 1) e

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\dfrac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{4+x}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$ (Teorema 2.1, prop. 4). ■

Resumo

Limites

- Limites
- Propriedades de limites