Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 2^o semestre de 2016 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Determine o domínio da função f; Justifique.

   $$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{(-5x+10)}}$$

   Solução:
   Claramente o denominador deve ser maior do que zero para que a função esteja definida, isto é

   $$(-5x+10) > 0 \implies 10 > 5x \implies x < 2$$

   logo o domínio natural da função é:

   $$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x < 2\} = (-\infty, 2)$$

2. (1,0 ponto) ———————————————————————

Calcule as funções $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x), (f/g)(x)$. Determine o domínio de cada uma delas.

(a) $f(x) = 2x \quad g(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = 2\sqrt{(x-1)} \quad g(x) = \sqrt{(x-1)}$

Solução:

(a)
- $(f+g)(x) = 2x + x^2 + 1 \implies \text{Dom } (f+g) = \mathbb{R}$
- $(f-g)(x) = 2x - x^2 - 1 \implies \text{Dom } (f-g) = \mathbb{R}$
- $(f.g)(x) = 2x.(x^2+1) = 2x^3 + 2x \implies \text{Dom } (f.g) = \mathbb{R}$
- $(f/g)(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \implies \text{Dom } (f.g) = \mathbb{R}$
  já que $x^2 + 1 \neq 0$ ou $x^2 \neq -1$ para todo x real.

(b)
- $(f+g)(x) = 2\sqrt{(x-1)} + \sqrt{(x-1)} = 3\sqrt{(x-1)}$
  $(x-1) > 0 \quad \text{ou} \quad x > 1$
  Logo Dom $(f+g) = x \in \mathbb{R} \mid x > 1$.
- $(f-g)(x) = 2\sqrt{(x-1)} - \sqrt{(x-1)} = \sqrt{(x-1)}$
  $(x-1) > 0 \quad \text{ou} \quad x > 1$
  Logo Dom $(f-g) = x \in \mathbb{R} \mid x > 1$.
- $(f.g)(x) = 2\sqrt{(x-1)}.\sqrt{(x-1)} = 2(x-1)$
  Logo Dom $(f.g) = x \in \mathbb{R}$.
- $(f/g)(x) = \dfrac{2\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x-1)}} = 2;$
  Logo Dom $(f/g) = x \in \mathbb{R}$

3. (1,0 ponto) ———————————————————————

Calcule as funções compostas $(f \circ g)(x), (g \circ f)(x)$ e determine o domínio de $f \circ g$ e $g \circ f$:

(a) $f(x) = 2x + 1 \qquad g(x) = x^2 - x$

(b) $f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sqrt{(1-x)}$

(c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x} \qquad g(x) = \dfrac{x}{1-x}$

Solução:

(a) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2 - x\right) = 2\left(x^2 - x\right) + 1$$

$$= 2x^2 - 2x + 1$$

Logo, Dom $(f \circ g) = \mathbb{R}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+1) = (2x+1)^2 - (2x+1)$$

$$= 4x^2 + 4x + 1 - 2x - 1 = 4x^2 + 6x$$

Logo, Dom $(g \circ f) = \mathbb{R}$.

(b) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{(1-x)}) = \left(\sqrt{(1-x)}\right)^2 = 1 - x$$

Logo, Dom $(f \circ g) = \mathbb{R}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (\sqrt{(1-x^2)})$$

mas para ser definida:

$$1 - x^2 > 0$$

$$-x^2 > -1$$

$$x^2 < 1$$

$$-1 < x < 1$$

Logo, Dom $(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$.

(c) $$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x}{1-x}) = \frac{1 + \frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} =$$

$$\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1-2x}{1-x}} = \frac{1}{1-2x}$$

para ser definida:

$$1 - 2x \neq 0$$

$$-2x \neq -1$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

logo, Dom $(f \circ g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1+x}{1-x})$$

$$\frac{\frac{1+x}{1-x}}{\frac{1-x-1-x}{1-x}} = \frac{1+x}{-2x} = -\frac{1+x}{2x}$$

para ser definida:

$$2x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

logo, Dom $(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

4. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Pede-se para a função $f: f = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

1 - Domínio;
2 - Interseções com os eixos x e y;
3 - Assíntotas verticais e horizontais;

Solução:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$$

i) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f = \mathbb{R}$).

ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{x^2} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 + 0) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 + 0) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.
E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.
Não existem assíntotas verticais posto que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

iii) Interseções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (interseção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} f(-1) & = & (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) + 1 & = & -15 < 0 \\ f(0) & = & (0)^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 1 & = & 1 > 0 \end{cases}$$

como f é contínua em $(-1, 0)$ então f corta o eixo x em algum ponto deste intervalo, já que há troca de sinal da função f.

Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 1$

5. (1,0 ponto) ——————————————————

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine o domínio:

(a) $y = \dfrac{2-x}{x} + 4$

(b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2} \quad (x \neq 2)$

(c) $y = 2x - 4$

Solução:

(a)
$$y = \frac{2 - x + 4x}{x}$$
$$y = \frac{2 + 3x}{x}$$
$$x = \frac{2 + 3y}{y}$$
$$xy = 2 + 3y$$
$$xy - 3y = 2$$
$$y(x - 3) = 2$$
$$y = \frac{2}{x - 3}$$

o domínio de $f^{-1}(x)$ é Dom $(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

(b)
$$f(x) = \frac{x + 2}{x - 2} \quad (x \neq 2)$$
$$x = \frac{y + 2}{y - 2}$$
$$xy - 2x = y + 2$$
$$xy - y = 2 + 2x$$
$$y(x - 1) = 2 + 2x$$
$$y = \frac{2x + 2}{x - 1}$$

o domínio de $f^{-1}(x)$ é Dom $f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

(c)
$$y = 2x - 4$$
$$x = 2y - 4$$
$$-2y = -x - 4$$
$$y = \frac{-(x + 4)}{-2}$$
$$y = \frac{x + 4}{2}$$

o domínio de $f^{-1}(x)$ é Dom $f^{-1} = \mathbb{R}$.

6. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2}{x^2+a}$

(b) $\lim\limits_{x\to 5} 10\sqrt{(x^2+2)}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} 1+3^{\dfrac{1}{x}}$

Solução:

(a) $\dfrac{\lim\limits_{x\to -1} x^2}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+a)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1} x^2}{\lim\limits_{x\to -1} x^2 + \lim\limits_{x\to -1} a} = \dfrac{1}{1+a}$

(b) $\lim\limits_{x\to 5} 10(x^2+2)^{\frac{1}{3}} =$

$\lim\limits_{x\to 5} 10.(\lim\limits_{x\to 5}(x^2+2))^{\frac{1}{3}} =$

$10.(27)^{\frac{1}{3}} =$

$10.3 = 30$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} 1+3^{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to \infty} 1 + \lim\limits_{x\to \infty} 3^{\dfrac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to \infty} 1+3^{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}} = 1+3^0 = 1+1 = 2$

7. (1,5 pontos)

Verifique se as funções abaixo são contínuas nos pontos indicados: (utilize a definição de continuidade)

(a) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-3x+6}{x-2}, x = 2$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}, x = -3$

(c) $f(x) = x^2-3, x = 4$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2}, x = 2$$

Pode-se observar que $f(x)$ não tem seu denominador definido quando $x = 2$, logo, $f(x)$ é descontínua em $x = 2$.

Mas,

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^2 - 3)(x - 2)$$

logo:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} = \frac{(x^2 - 3)(x - 2)}{x - 2}, x \neq 2$$

$$f(2) = 2^2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^-} x^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} x^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

portanto, $f = x^2 - 3$ é contínua em 2.

(b) $$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, x = -3$$

Pode-se observar que $f(x)$ não tem seu denominador definido quando $x = -3$, logo, $f(x)$ é descontínua em $x = -3$.

Mas,

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3}$$

$$f(x) = (x - 3)$$

$$f(-3) = -3 - 3 = -6$$

$$\lim_{x \leftarrow (-3)^-} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$$

$$\lim_{x \leftarrow (-3)^-} x - 3 = -3 - 3 = -6$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} x - 3 = -3 - 3 = -6$$

portanto, $f = x - 3$ é contínua em -3.

(c) $$f(4) = (4)^2 - 3 = 13$$

$$\lim_{x \leftarrow 4^-} x^2 - 3 =$$

$$4^2 - 3 = 13$$

$$\lim_{x \leftarrow 4^+} x^2 - 3 =$$

$$4^2 - 3 = 13$$

portanto, $f = x^2 - 3$ é contínua em 4.

8. (1,5 pontos) ———————————————————————

Calcule a derivada da seguinte função: (utilize a definição de derivada por limite)

$$f(x) = x^2 - x + 1$$

Solução:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x+h) + 1 - (x^2 - x + 1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + (h)^2 - x - h + 1 - x^2 + x - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2xh + (h)^2 - h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} 2x + h - 1 =$$

$$= 2x - 1$$

9. (1,0 ponto)

Calcule a derivada das seguintes funções:

(a) $y = (x^3 + 4)(x + 3)$

(b) $y = \dfrac{4}{x^6}$

(c) $y = x^5$

Solução:

(a) $y = (x^3 + 4)(x + 3)$

$$\frac{dy}{dx}(uv) = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + 4)1 + (x + 3).(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + 4) + 3x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 9x^2 + 4$$

(b) $y = \dfrac{4}{x^6}$

$$u = 4 \qquad v = x^6$$

$$\frac{dy}{dx}(uv) = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = 6x^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4.6x^5 + 0.x^6}{x^{12}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-24x^5}{x^{12}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-24}{x^7}$$

ou

$$y = 4x^{-6}$$

$$\frac{dy}{dx} = -6.4.x^{-7}$$

$$\frac{du}{dx} = -24.x^{-7}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-24}{x^7}$$

(c) $y = x^5$

$$x = y^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}y^{\frac{-3}{5}}$$