Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2016 - Gabarito

Questões

1. (0,5 ponto)

   Determine as inversas das seguintes funções

   (a)

   $$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

   (b)

   $$f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$$

   (c)

   $$f(x) = \frac{5}{x^2+1} \quad x \geq 0$$

   Solução:

   (a)

   $$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y(x-1) = x+1 \Longrightarrow yx - y = x+1 \Longrightarrow yx - x = y+1$$

$$yx - x = y+1 \Longrightarrow x(y-1) = y+1 \Longrightarrow x = \frac{(y+1)}{(y-1)}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+1)}{(x-1)}$

(b)

$$f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$$

$$y = \sqrt[5]{4x+2} \Longrightarrow y^5 = 4x+2 \Longrightarrow y^5 - 2 = 4x \Longrightarrow \frac{y^5-2}{4} = x$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{x^5-2}{4}$

(c)

$$f(x) = \frac{5}{x^2+1} \quad x \geq 0$$

$$y = \frac{5}{x^2+1} \Longrightarrow x^2+1 = \frac{5}{y} \Longrightarrow x^2 = \frac{5}{y} - 1 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{y} - 1}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{5}{x} - 1}$

2. (0,5 ponto)

Dadas as funções f e g encontre $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ e $(g \circ g)$.

(a) $f(x) = x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x + \sqrt{x}$

(b) $f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 5$

(c) $f(x) = \cos x + x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + x$

Solução:

(a) $f(x) = x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x + \sqrt{x}$

$$(f \circ g)(x) = (5x + \sqrt{x}) - 2 = 5x + \sqrt{x} - 2$$

$$(g \circ f)(x) = 5(x-2) + \sqrt{x-2} = 5x + \sqrt{x-2} - 10$$

$$(f \circ f)(x) = (x-2) - 2 = x - 4$$

$$(g \circ g)(x) = 5(5x + \sqrt{x}) + \sqrt{5x + \sqrt{x}} = 25x + 5\sqrt{x} + \sqrt{5x + \sqrt{x}}$$

(b) $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = 3x + 5$

$$(f \circ g)(x) = (3x+5)^2 - 1 = 9x^2 + 30x + 25$$

$$(g \circ f)(x) = 3(x^2 - 1) + 5 = 3x^2 - 3 + 5$$

$$(f \circ f)(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$(g \circ g)(x) = 3(3x+5) + 5 = 9x + 20$$

(c) $f(x) = \cos x + x^2$ e $g(x) = x^2 + x$

$$(f \circ g)(x) = \cos(x^2 + x) + (x^2 + x)^2 = \cos(x^2 + x) + x^4 + 2x^3 + x^2$$

$$(g \circ f)(x) = (\cos x + x^2)^2 + (\cos x + x^2) = \cos^2 x + 2\cos x \cdot x^2 + x^4 + \cos x + x^2$$

$$(f \circ f)(x) = \cos(\cos x + x^2) + (\cos x + x^2)^2 = \cos(\cos x + x^2) + \cos^2 x + 2\cos x \cdot x^2 + x^4$$

$$(g \circ g)(x) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + x = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$$

3. (0,5 ponto) ---

Para as seguintes funções obtenha uma expressão para suas inversas.

(a) $y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$
(b) $y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$
(c) $y = 2x - 1$

Solução:

(a) $y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$

$$x = y^2 - 3 \longrightarrow y^2 = x + 3 \longrightarrow y = \pm\sqrt{x+3}$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será o ramo positivo, isto é

$$y^{-1} = \sqrt{x+3}$$

(b) $y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$

$$x = \sqrt{y} \longrightarrow x^2 = y$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será

$$y^{-1} = x^2 \quad x \geq 0$$

(c) $y = 2x - 1$

$$x = 2y - 1 \quad \longrightarrow \quad x + 1 = 2y \quad \longrightarrow \quad y = \frac{x+1}{2}$$

logo

$$y^{-1} = \frac{x+1}{2}$$

4. (0,5 ponto)

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

(c) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

Solução:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+1/x^2} = -\infty$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2} \\
&= \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5}) \\
&= 6
\end{aligned}$$

5. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4-2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x = 6$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4-2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 = 8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 4-2x = 0$$

6. (1,0 ponto)

Ache os limites infinitos.

(a) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}$$

(b) $$\lim_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 2 + 0 = 2$$

7. (1,0 ponto)

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$$

(b) $$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x - 2 & \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$$

f claramente tem uma descontinuidade em $x = -2$, já que este ponto sequer pode pertencer ao domínio de f. Entretanto podemos retirar a descontinuidade reescrevendo $f(x)$ da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 5)}{x + 2} = x - 5$$

(b) $$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

Assim como no item anterior f tem descontinuidades em $x = \pm 1$, mas pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x - 2 & \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

f tem uma descontinuidade em $x = 0$, posto que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x - 1) = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$$

Como os limites laterais são diferentes, existe uma descontinuidade em $x = 0$.

8. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Mostre que se as funções f e g são contínuas, são também contínuas $f + g$ e $f - g$.

Solução:

Sabemos que uma função F é contínua em um ponto a se ele pertence ao domínio de F, se o limite de F em a existe e se seu valor é igual a $F(a)$. Isto é,

F é contínua em $x = a$, se e somente se:

- $a \in D(F)$
- $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ existe (possui um valor)
- $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$

9. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$, ache

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e dada a função $f(x) = \sqrt{5x + 1}$, ache

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{quando} \quad x > -\frac{1}{5}$$

Solução:

Para $f(x) = x^2 - 3x$ temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 - 3(x+h)) - (x^2 - 3x)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h) - (x^2 - 3x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h-3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x-3$$

Para $f(x)=\sqrt{5x+1}$ temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)-\left(\sqrt{5x+1}\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)-\left(\sqrt{5x+1}\right)}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{h\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5}{\left(\sqrt{5x+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}=\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

10. (1,0 ponto) ____

Ache a primeira derivada das seguintes funções:

(a) $$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}$$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$

(c) $f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

(d) $f(x) = \cos(\text{sen } x)$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} + 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

(b) $$f(x) = \sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{3}\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1} = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$$

(c) $$f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[(x^2+4)^2\right]'(2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2\left[(2x^3-1)^3\right]' \\ &= \left[2(x^2+4)(2x)\right](2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2\left[3(2x^3-1)^2(2\cdot 3x^2)\right] \\ &= 4x(x^2+4)(2x^3-1)^3 + 18x^2(x^2+4)^2(2x^3-1)^2 \\ &= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2\left[2(2x^3-1)^2 + 9x(x^2+4)\right] \end{aligned}$$

(d) $$f(x) = \cos(\text{sen } x)$$

$$f'(x) = -\text{sen } (\text{sen } x) \cdot \cos x$$

11. (1,0 ponto) ———————————————————

Ache as equações das retas normal e tangente a $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ no ponto $(1,1)$.

Solução:

$$x^2 + 3xy + y^2 - 5 = 0$$

$$2x + 3(y + xy') + 2yy' - 0 = 0$$

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0$$

$$(3x + 2y)y' = -2x - 3y$$

ou

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

a inclinação da reta tangente no ponto $(x, y) = (1, 1)$ é

$$y' = -\frac{2 + 3}{3 + 2} = -1$$

assim a equação da reta tangente é:

$$y - 1 = (-1)(x - 1) \implies y = -x + 2$$

e a reta normal

$$y - 1 = x - 1 \implies y = x$$

12. (1,0 ponto) ————————————————————

Calcule as primeiras e segundas derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$

(b) $f(x) = 2x^2\sqrt{2 - x}$

(c) $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$

Solução:

(a) $f(x) = 3x^{1/2} - x^{3/2} + 2x^{-1/2}$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{1/2-1} - \frac{3}{2} \cdot x^{3/2-1} + 2 \cdot \frac{-1}{2} \cdot x^{-1/2-1}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot x^{-1/2} - \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} - \frac{2}{2} \cdot x^{-3/2}$$

$$= \frac{3}{2x^{1/2}} - \frac{3x^{1/2}}{2} - \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot x^{-3/2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2} - \frac{-3}{2} \cdot x^{-5/2}$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot x^{-3/2} - \frac{3}{4} \cdot x^{-1/2} + \frac{3}{2} \cdot x^{-5/2}$$

$$= -\frac{3}{4x^{3/2}} - \frac{3}{4x^{1/2}} + \frac{3}{2x^{5/2}}$$

$$= -\frac{3}{4\sqrt[2]{x^3}} - \frac{3}{4\sqrt{x}} + \frac{3}{2\sqrt[2]{x^5}}$$

(b) $f(x) = 2x^2\sqrt{2-x}$

$$f'(x) = \left[2x^2\sqrt{2-x}\right]'$$

$$= 2\left[\left(x^2\right)'\sqrt{2-x} + x^2\left(\sqrt{2-x}\right)'\right]$$

$$= 2\left[2x\sqrt{2-x} + x^2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}\right)(-1)\right]$$

$$= 2\left[2x\sqrt{2-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{2-x}}\right]$$

$$= 2\left[\frac{4x(2-x)-x^2}{2\sqrt{2-x}}\right]$$

$$= \frac{8x-5x^2}{\sqrt{2-x}}$$

$$f''(x) = \left[\frac{8x-5x^2}{\sqrt{2-x}}\right]'$$

$$= \left[\frac{[8x-5x^2]' \cdot \left[\sqrt{2-x}\right] - [8x-5x^2] \cdot \left[\sqrt{2-x}\right]'}{\left[\sqrt{2-x}\right]^2}\right]$$

$$= \frac{[8-10x] \cdot \left[\sqrt{2-x}\right] - [8x-5x^2] \cdot \left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2-x}}(-1)\right]}{\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{[8-10x]\cdot\left[\sqrt{2-x}\right] + [8x-5x^2]\cdot\left[\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\right]}{\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2-x}\,[8-10x]\cdot\left[\sqrt{2-x}\right] + [8x-5x^2]}{2\sqrt{2-x}\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{2(2-x)\,[8-10x] + [8x-5x^2]}{2\sqrt{2-x}\left[\sqrt{2-x}\right]^2}$$

$$= \frac{2(16-20x-8x+10x^2)+8x-5x^2}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{32-40x-16x+20x^2+8x-5x^2}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

$$= \frac{32-48x+15x^2}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$$

(c) $$f(x) = \left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^4$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right]'$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{(x^2-1)'\cdot(2x^3+1)-(x^2-1)\cdot(2x^3+1)'}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{(2x)\cdot(2x^3+1)-(x^2-1)\cdot(6x^2)}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{(4x^4+2x)-(6x^4-6x^2)}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= 4\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)^3\left[\frac{2x-2x^4+6x^2}{(2x^3+1)^2}\right]$$

$$= \frac{8(x^2-1)^3(x-x^4+3x^2)}{(2x^3+1)^5}$$

$f''(x) =$ Item dispensado. Não é necessário fazer.