Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2008

Questões

1. (2,0 pontos)

   Para a função composta $(f \circ g \circ h)(x)$ abaixo encontre seu domínio e sua imagem (1,0 ponto). A seguir verifique se $(f \circ g \circ h)(x)$ possui assíntotas verticais ou horizontais (1,0 ponto).

   $$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x^3$$

   Solução:

   Domínio e Imagem:

   $$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x^3$$

   logo

   $$(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\frac{1}{x^3}}$$

Claramente o denominador da fração não pode ser igual a zero, logo $x = 0$ não está no domínio da função composta.

De forma semelhante o argumento da radiciação não pode ser negativo, logo, estão excluídos do domínio os valores negativos de x.

Domínio $= (0, \infty)$.

Imagem $= (0, \infty)$.

Assíntotas:

Assíntota vertical do gráfico de uma função $z(x)$ em $x = a$ é a reta vertical que satisfaz uma das seguintes condições:

$$\lim_{x \to a^+} z(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} z(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} z(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} z(x) = -\infty$$

Assíntota horizontal do gráfico de uma função $z(x)$ é a reta horizontal $y = b$ que satisfaz pelo menos uma das seguintes condições:

$$\lim_{x \to +\infty} z(x) = b$$

$$\lim_{x \to -\infty} z(x) = b$$

Vamos verificar estas condições para $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x^3}}$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{1}{x^3}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{\frac{1}{x^3}} = \text{não está definido}$$

Logo há uma assíntota vertical em $x = 0^+$.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3}} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\frac{1}{x^3}} = \text{não está definido}$$

Logo $(f \circ g \circ h)(x)$ tem uma assíntota horizontal.

2. (2,00 pontos)

Calcule os seguintes limites:

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Solução

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8}$$

Dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que aparece no denominador, ito é $x^1 = x$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+5}{x}}{\frac{6x-8}{x}}$$

e usando as técnicas para calcular limites

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x+5}{x}}{\frac{6x-8}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} \frac{6x-8}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6 - \frac{8}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 3 + \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6 - \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3 + 5 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6 - 8 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}} = \frac{3 + 5\cdot 0}{6 - 8\cdot 0} \\
&= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Resumindo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \frac{1}{2}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Vejamos inicialmente o limite pela esquerda, isto é,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2 - 5 = (3)^2 - 5 = 4$$

e agora o limite pela direita,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$$

Como os limites laterais são iguais, temos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

3. (2,0 pontos)

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$$

Solução:

$f(x)$ não é definida se o denomindador $x-4$ se anular ou se o radicando x^2-9 for negativo, isto , se $x=4$ ou se $-3 < x < 3$. Qualquer outro número real está em um dos intervalos $(-\infty,-3]$, $[3,4)$ ou $(4,\infty)$. Temos então que provar a continuidade de $f(x)$ em todo o domínio. Ou seja, no interior dos intervalos (*usando limites*) e nos extremos (*usando limites laterais*).

Intervalo $(-\infty,-3]$:

nos pontos interiores

$$\lim_{x\to c} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{c^2-9}}{c-4} = f(c) \qquad \forall c \in (-\infty,-3] \cup [3,4) \cup (4,\infty)$$

nos extremos dos intervalos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x^2-9)(x-4)}}{\sqrt{(x-4)^3}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x^3-4x^2-9x+36)}}{\sqrt{(x-4)(x^2-8x+16)}}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{(x^3-4x^2-9x+36)}}{\sqrt{(x^3-12x^2+48x-64)}}\\
&= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^3-4x^2-9x+36)}{(x^3-12x^2+48x-64)}}\\
&= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{(x^3-4x^2-9x+36)}{x^3}}{\frac{(x^3-12x^2+48x-64)}{x^3}}}\\
&= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{36}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{12x^2}{x^3}+\frac{48x}{x^3}-\frac{64}{x^3}}}\\
&= \sqrt{\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{36}{x^3}}{1-\frac{12}{x}+\frac{48}{x^2}-\frac{64}{x^3}}}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{36}{x^3}\right]}{\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{12}{x}+\frac{48}{x^2}-\frac{64}{x^3}\right]}}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{36}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{12}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{48}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{64}{x^3}}}\\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty}1-4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-9\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}+36\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty}1-12\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+48\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}-64\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}}\\
&= \sqrt{\frac{1-4\cdot0-9\cdot0+36\cdot0}{1-12\cdot0+48\cdot0-64\cdot0}}=\sqrt{\frac{1-0-0+0}{1-0+0-0}}=\sqrt{\frac{1}{1}}=\sqrt{1}=1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{(-3)^2-9}}{(-3)-4} = \frac{\sqrt{9-9}}{-7} = 0$$

Intervalo $[3,4)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{(3)^2-9}}{(3)-4} = \frac{\sqrt{9-9}}{-7} = 0$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$$

4. (2,0 pontos)

Ache a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $x = 0$.

Solução:

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

A derivada não existe em $x = 0$.

Para verificar a continuidade da função

5. (2,0 pontos)

Calcule as derivadas de primeira ($f'(x)$), segunda ($f''(x)$) e terceira ($f'''(x)$) ordens das funções

(a) (1,00 ponto)

$$f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}}$$

(b) (1,00 ponto)

$$f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$$

Solução:

(a)
$$f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{6}{x^{1/3}} - \frac{2}{x^{3/2}} - \frac{4}{x^{3/4}}$$

$$f(x) = 2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} - 2x^{-3/2} - 4x^{-3/4}$$

Primeira Derivada:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}2x^{-1/2-1} - \frac{1}{3}6x^{-1/3-1} + \frac{3}{2}2x^{-3/2-1} + \frac{3}{4}4x^{-3/4-1}$$

$$f'(x) = -x^{-3/2} - 2x^{-4/3} + 3x^{-5/2} + 3x^{-7/4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^{3/2}} - \frac{2}{x^{4/3}} + \frac{3}{x^{5/2}} + \frac{3}{x^{7/4}}$$

Segunda Derivada:

$$f''(x) = -\left(-\frac{3}{2}x^{-3/2-1}\right) - 2\left(-\frac{4}{3}x^{-4/3-1}\right) + 3\left(-\frac{5}{2}x^{-5/2-1}\right) + 3\left(-\frac{7}{4}x^{-7/4-1}\right)$$

$$f''(x) = \frac{3}{2}x^{-5/2} + \frac{8}{3}x^{-7/3} - \frac{15}{2}x^{-7/2} - \frac{21}{4}x^{-11/4}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2x^{5/2}} + \frac{8}{3x^{7/3}} - \frac{15}{2x^{7/2}} - \frac{21}{4x^{11/4}}$$

Terceira Derivada:

$$f'''(x) = \frac{3}{2}\left(-\frac{5}{2}x^{-5/2-1}\right) + \frac{8}{3}\left(-\frac{7}{3}x^{-7/3-1}\right) - \frac{15}{2}\left(-\frac{7}{2}x^{-7/2-1}\right) - \frac{21}{4}\left(-\frac{11}{4}x^{-11/4-1}\right)$$

$$f'''(x) = -\frac{15}{4}x^{-7/2} - \frac{56}{9}x^{-10/3} + \frac{105}{4}x^{-9/2} + \frac{231}{16}x^{-15/4}$$

$$f'''(x) = -\frac{15}{4x^{7/2}} - \frac{56}{9x^{10/3}} + \frac{105}{4x^{9/2}} + \frac{231}{16x^{15/4}}$$

(b) $$f(x) = \frac{3-2x}{3+2x}$$

Da regra do quociente:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Primeira Derivada:

$$f'(x) = \frac{(3-2x)'(3+2x) - (3-2x)(3+2x)'}{(3+2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-6-4x-6+4x}{(3+2x)^2} = \frac{-12}{(3+2x)^2}$$

Segunda Derivada:

$$f''(x) = \frac{(-12)'(3+2x)^2 - (-12)\left[(3+2x)^2\right]'}{(3+2x)^4} = \frac{0\cdot(3+2x)^2 + 12\left[9+12x+4x^2\right]'}{(3+2x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{0 + 12\left[12 + 4(2x)\right]}{(3+2x)^4} = \frac{144+96x}{(3+2x)^4}$$

Terceira Derivada:

$$f'''(x) = \frac{(144+96x)'(3+2x)^4 - (144+96x)\left[(3+2x)^4\right]'}{(3+2x)^8}$$

$$f'''(x) = \frac{96(3+2x)^4 - (144+96x)\left[4\cdot(3+2x)^3\cdot(3+2x)'\right]}{(3+2x)^8}$$

$$f'''(x) = \frac{96(3+2x)^4 - 48(3+2x)\left[8(3+2x)^3\right]}{(3+2x)^8}$$

$$f'''(x) = \frac{96(3+2x)^4 - 48 \cdot 8(3+2x)^4}{(3+2x)^8}$$

$$f'''(x) = \frac{-288(3+2x)^4}{(3+2x)^8}$$

$$f'''(x) = \frac{-288}{(3+2x)^4}$$