Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (1,25 pontos)

Determine as inversas das seguintes funções

(a)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

(b)

$$f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$$

(c)

$$f(x) = \frac{5}{x^2+1} \quad x \geq 0$$

Solução:

(a)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y(x-1) = x+1 \Longrightarrow yx - y = x+1 \Longrightarrow yx - x = y+1$$

$$yx - x = y + 1 \Longrightarrow x(y-1) = y+1 \Longrightarrow x = \frac{(y+1)}{(y-1)}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{(x+1)}{(x-1)}$

(b)

$$f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$$

$$y = \sqrt[5]{4x+2} \Longrightarrow y^5 = 4x+2 \Longrightarrow y^5 - 2 = 4x \Longrightarrow \frac{y^5-2}{4} = x$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{x^5-2}{4}$

(c)

$$f(x) = \frac{5}{x^2+1} \quad x \geq 0$$

$$y = \frac{5}{x^2+1} \Longrightarrow x^2 + 1 = \frac{5}{y} \Longrightarrow x^2 = \frac{5}{y} - 1 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{y} - 1}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x} - 1}$

2. (1,25 pontos)

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12}$$

(b) $$\lim_{x \to 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}}$$

(c) $$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{7}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) = 6$$

(c) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2)-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

3. (1,25 pontos)

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4-2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x = 6$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4-2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^3 = 8$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 4-2x = 0$$

4. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 2$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 2 & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 2$$

Esta é uma função polinomial e portanto contínua em todo o domínio.

(b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 2 & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$f(x)$ é descontínua em $x = 0$, posto que, embora $x = 0$ pertença ao domínio de $f(x)$ e o limite quando $x \to 0$ exista e seja igual a 2, o valor de $f(0)$ é igual a 0, ou seja

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \neq 0 = f(0)$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$ $f(x)$ é contínua já que é polinomial em cada um dos subintervalos.

Resta verificar a continuidade em $x = 0$ e $x = 1$,

Em $x = 0$, $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ e $f(0) = 0$, logo $f(x)$ é contínua em $x = 0$

Em $x = 1$, $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$ e $f(1) = 1$, logo $f(x)$ é contínua em $x = 1$

5. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Para as funções a seguir mostre que elas são contínuas nos intervalos indicados.

(a) $$f(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{em} \quad [4,8]$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{em} \quad [1,3]$$

Solução:

(a) $$f(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{em} \quad [4,8]$$

Claramente $f(x)$ é contínua dentro do intervalo, basta então verificar se

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 8^+} f(x) = f(8)$$

mas

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = f(8) \lim_{x\to 8^-} \sqrt{x-4} = \sqrt{8-4} = \sqrt{4} = 2$$

Logo $f(x)$ é contínua no intervalo $[4,8]$

(b) *Questão Anulada*

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{em} \quad [1,3]$$

A função $f(x)$ não é contínua no ponto $x = 1$, que não pertence ao domínio de $f(x)$, logo não é contínua no intervalo $[1,3]$.

6. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Ache a inclinação da reta tangente a curva $x = y^2 - 4y$ nos pontos aonde a curva corta o eixo-y.

Solução:

Uma **primeira interpretação** considera o plano yx — e não xy, o que é mas frequente — ou seja, y é a variável independente e x a variável dependente.

Primeiramente vamos determinar os pontos aonde a curva corta o eixo-y, isto é aonde $x = 0$. Com $x = 0$

$$0 = y^2 - 4y \implies y(y-4) = 0$$

Logo estes pontos são $(y,x) = (0,0)$ e $(y,x) = (4,0)$.

A inclinação da reta tangente é o valor da derivada no ponto. Logo a expressão para esta reta é

$$x - x_0 = f'(y_0)(y - y_0)$$

onde (y_0, x_0) é o ponto desejado e

$$f'(y) = 2y - 4$$

Para o ponto $(0, 0)$

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4$$

e para o ponto $(4, 0)$

$$f'(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$$

Logo no ponto $(0, 0)$ a reta tangente tem a equação $x = -4y$, e no ponto $(4, 0)$ a reta tangente tem a equação $x = 4 + 4y$.

Uma **segunda interpretação** considera o plano xy, como comumente é faito, isto é, x é a variável independente e y a variável dependente. Neste caso

Primeiramente vamos determinar os pontos aonde a curva corta o eixo-y, isto é aonde $x = 0$. Com $x = 0$

$$0 = y^2 - 4y \implies y(y - 4) = 0$$

Logo estes pontos são $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) = (0, 4)$.

A inclinação da reta tangente é o valor da derivada no ponto. Logo a expressão para esta reta é

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

onde (x_0, y_0) é o ponto desejado e de

$$x = y^2 - 4y \implies \frac{dx}{dx} = \frac{d(y^2)}{dx} - 4\frac{dy}{dx} \implies 1 = 2y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} \implies 1 = (2y - 4)\,\frac{dy}{dx}$$

daí

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y - 4}$$

Para o ponto $(0, 0)$

$$f' = \frac{1}{2 \cdot 0 - 4} = -\frac{1}{4}$$

e para o ponto $(0, 4)$

$$f' = \frac{1}{2 \cdot 4 - 4} = \frac{1}{4}$$

Logo no ponto $(0, 0)$ a reta tangente tem a equação $y = -\frac{1}{4}x$, e no ponto $(0, 4)$ a reta tangente tem a equação $y - 4 = \frac{1}{4}x$.

7. (1,25 pontos)

Calcule o valor das derivadas até quarta ordem da função $f(x) = x^{4/3}$ no ponto $x = 0$.

Solução:

$$\begin{cases} f(x) & = & x^{4/3} & = & x^{4/3} & \text{em } x = 0, & f(0) & = & 0 \\ f'(x) & = & \frac{4}{3}x^{1/3} & = & \frac{4x^{1/3}}{3} & \text{em } x = 0, & f'(0) & = & 0 \\ f''(x) & = & \frac{4}{9}x^{-2/3} & = & \frac{4}{9x^{2/3}} & \text{em } x = 0, & & 0 & \notin \text{ domínio de } f''(x) \\ f'''(x) & = & -\frac{8}{27}x^{-5/3} & = & -\frac{8}{27x^{5/3}} & \text{em } x = 0, & & 0 & \notin \text{ domínio de } f'''(x) \\ f''''(x) & = & -\frac{40}{81}x^{-8/3} & = & -\frac{40}{81x^{8/3}} & \text{em } x = 0, & & 0 & \notin \text{ domínio de } f''''(x) \end{cases}$$

8. (1,25 pontos)

Ache as primeiras e segundas derivadas das funções:

(a) $f(x) = (1 - 5x)^6$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3 - x^2}$

(c) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Solução:

(a) $f(x) = (1 - 5x)^6$

$f'(x) = 6(1 - 5x)^5(-5) = -30(1 - 5x)^5$

$f''(x) = -30(5)(1 - 5x)^4(-5) = 750(1 - 5x)^4$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{3 - x^2}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 2)'(3 - x^2) - (x^2 + 2)(3 - x^2)'}{(3 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)(3 - x^2) - (x^2 + 2)(-2x)}{(3 - x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x)(3 - x^2 + x^2 + 2)}{(3 - x^2)^2} = \frac{(2x)(5)}{(3 - x^2)^2} = \frac{(10x)}{(3 - x^2)^2}$$

$$f''(x) = \left(\frac{(10x)}{(3-x^2)^2}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{(10x)'((3-x^2)^2) - (10x)((3-x^2)^2)'}{((3-x^2)^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(10)(3-x^2)^2 - (10x)(2(3-x^2)(-2x))}{(3-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(10)(9-6x^2+x^4) + (40x^2)(3-x^2)}{(3-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(90-60x^2+10x^4) + (120x^2-40x^4)}{(3-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(90+60x^2-30x^4)}{(3-x^2)^4} = \frac{10(9+6x^2-3x^4)}{(3-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-30(x^4-2x^2-3)}{(3-x^2)^4} = \frac{-30(x^2-3)(x^2+1)}{(3-x^2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{30(3-x^2)(x^2+1)}{(3-x^2)^4} = \frac{30(x^2+1)}{(3-x^2)^3}$$

(c) $$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{4}\left(\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-1}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}(-1)\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-2}\left(\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}(-1)\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-2}\left\{\left(\sqrt{x}\right)'\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + \left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-2}\left\{\left(\sqrt{x}\right)'\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + \left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\left[(x)(1+\sqrt{x})\right]^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + \left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+x\sqrt{x})}\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+x\sqrt{x})}\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{8}\frac{1}{x}\frac{1}{(1+\sqrt{x})}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\right\}$$