Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 2^o semestre de 2013 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) ————————————————————————————————

   Seja $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Encontre o domínio e a imagem de $f(x)$, e calcule, $f(3)$, $f(-3)$, $f(-x)$, $f(x+2)$, $f(x-2)$, $f(x+h)$, $f(x+h) - f(x)$, $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}$.

   Solução:

   Claramente $f(x)$ está definida para toda a reta dos reais logo. Para qualquer real a função tem um valor. Logo,

   Domínio de $f(x) = \{\mathbb{R}\}$

   Imagem de $f(x) = \{\mathbb{R}\}$

   $f(3) = (3)^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$

   $f(-3) = (-3)^2 - 2 \cdot (-3) + 3 = 9 + 6 + 3 = 18$

   $f(-x) = (-x)^2 - 2 \cdot (-x) + 3 = x^2 + 2x + 3$

   $f(x+2) = (x+2)^2 - 2 \cdot (x+2) + 3 = x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 + 3 = x^2 + 2x + 3$

$$f(x-2) = (x-2)^2 - 2\cdot(x-2) + 3 = x^2 - 4x + 4 - 2x + 4 + 3 = x^2 - 6x + 11$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 2\cdot(x+h) + 3 = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 3$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \left[x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 3\right] - \left[x^2 - 2x + 3\right] = \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 3 - x^2 + 2x - 3 = \\ &= 2xh + h^2 - 2h = h[2x - 2 + h] \end{aligned}$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h[2x-2+h]}{h} = 2x - 2 + h$$

2. (1,5 pontos) ---

Calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^5 - 7x^4 - 2x + 5)$

(h) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (x^5 - 7x^4 - 2x + 5)$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{1}{(x-2)^3}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1}$

Solução:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{1}{3}$

(c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6+2/x+1/x^2}{5-3/x+4x^2}=\frac{6+0+0}{5-0+0}=\frac{6}{5}$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6+2/x+1/x^2}{5-3/x+4x^2}=\frac{6+0+0}{5-0+0}=\frac{6}{5}$$

(e) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{1+1/x^2}=-\infty$$

(f) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+1/x^2}=+\infty$$

(g) $$\lim_{x\to+\infty}(x^5-7x^4-2x+5)=\lim_{x\to+\infty}x^5\left[1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right]=+\infty$$

visto que

$$\lim_{x\to+\infty}x^5=+\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\left[1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right]=1-0-0+0=1$$

(h) $$\lim_{x\to-\infty}(x^5-7x^4-2x+5)=\lim_{x\to-\infty}x^5\left[1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right]=-\infty$$

visto que

$$\lim_{x\to-\infty}x^5=-\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right]=1-0-0+0=1$$

(i) $$\lim_{x\to2^-}\frac{1}{(x-2)^3}=-\infty$$

(j) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x/x}{x/x+1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+1/x}=1$$

(k) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1/x-1/x^2}=+\infty$$

já que para $x>1$ sempre teremos $x^2>x$ e portanto $1/x>1/x^2$, ambos tendendo a ∞.

3. (1,0 ponto) ————————————————————

Avalie os limites:

(a) $$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};\qquad \text{onde } f(x)=x^2-3x$$

(b) $$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};\qquad \text{onde } f(x)=\sqrt{5x+1}\,,\quad x>-\frac{1}{5}$$

Solução:

(a) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};\qquad \text{onde } f(x)=x^2-3x$$

$$f(x+h)=(x+h)^2-3(x+h)\qquad \text{e} \qquad f(x)=x^2-3x$$

logo

$$f(x+h)-f(x)=\left[(x+h)^2-3(x+h)\right]-\left[x^2-3x\right]$$

$$f(x+h)-f(x)=\left[x^2+2xh+h^2-3x-3h\right]-\left[x^2-3x\right]$$

$$f(x+h)-f(x)=\left[x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x\right]=\left[2xh+h^2-3h\right]=h\left[2x-3+h\right]$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h[2x-3+h]}{h}=2x-3+h$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}2x-3+h=2x-3$$

(b) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};\qquad \text{onde } f(x)=\sqrt{5x+1},\ \ x>-\frac{1}{5}$$

$$f(x+h)=\sqrt{5(x+h)+1}\qquad \text{e} \qquad f(x)=\sqrt{5x+1}$$

logo

$$f(x+h)-f(x)=\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sqrt{5x+5h+1}-\sqrt{5x+1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5h}{h(\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1})}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

4. (1,5 pontos) ―――――――――――――――――――――――――

Estude a continuidade das seguintes funções:

(a) $\quad f(x) = |\ x\ |$

(b) $\quad f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde, $p(x)$ e $q(x)$ são polinomiais com $q(x) \neq 0$

Solução:

(a) $\quad f(x) = |\ x\ |$

Pela definição da função módulo

$$f(x) = |\ x\ | = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$ a função é contínua. Idem para $x > 0$. O único ponto a questionar é $x = 0$.

A função está definida em $x = 0$ e vale 0. Resta verificar o limite,

$$\lim_{x \to 0} |\ x\ |$$

já que

$$\lim_{x \to 0^-} |\ x\ | = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} |\ x\ | = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Como

$$\lim_{x \to 0^-} |\ x\ | = \lim_{x \to 0^+} |\ x\ | = 0$$

então

$$\lim_{x \to 0} |\ x\ | = 0 = |\ 0\ |$$

Portanto $|\ x\ |$ é contínua em toda a reta real.

(b) $\quad f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde, $p(x)$ e $q(x)$ são polinomiais com $q(x) \neq 0$

Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios $p(x)/q(x)$ está definida em todos os pontos da reta real, exceto aqueles aonde $q(x)$ se anula. Estes pontos não pertencem ao domínio de $p(x)/q(x)$. Assim, para todo ponto a em que $q(a) \neq 0$ temos $f(x)$ definida para todo intervalo aberto contendo a. Como neste caso $q(x)$ não se anula, $f(x)$ está definida em toda a reta real. E além disso,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$$

logo $f(x)$ é contínua em toda a reta real.

5. (1,0 ponto) ———

Calcule as derivadas a seguir usando sua definição:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$

Solução:

(a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^3 - (x+h)^2 - 4) - (x^3 - x^2 - 4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{((x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^2 + 2xh + h^2) - 4) - (x^3 - x^2 - 4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^2 - 2xh - h^2 - 4 - x^3 + x^2 + 4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2xh - h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3x^2 - 2x + 3xh + h^2 - h) = (3x^2 - 2x + 0 + 0 - 0) = 3x^2 - 2x
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(x-2) - (x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{(x - 2 - x - h + 2)}{(x+h-2)(x-2)} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{-h}{(x+h-2)(x-2)} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{-1}{(x+h-2)(x-2)} \right) = -\frac{1}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

(c) $$f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$$

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2x+2h-3}{3x+3h+1} - \frac{2x-3}{3x+1}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(2x+2h-3)(3x+1)-(2x-3)(3x+3h+1)}{(3x+3h+1)(3x+1)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{6x^2+2x+6hx+2h-9x-3-6x^2-6xh-2x+9x+9h+3}{(3x+3h+1)(3x+1)}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2h+9h}{(3x+3h+1)(3x+1)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{11}{(3x+3h+1)(3x+1)}\right)$$

$$= \frac{x+4}{(3x+1)^2}$$

6. (1,0 ponto)

Calcule os limites a seguir. Justifique.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,|}{x}$$

Solução:

Para $x > 0$, $|\,x\,| = x$, logo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

e para $x < 0$, $|\,x\,| = -x$, logo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\,x\,|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

Como os limites laterais existem mas são diferentes

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\,x\,|}{x} \quad \text{não existe}$$

7. (1,5 pontos) ———

Encontre y' onde $xy + x - 2y - 1 = 0$
Solução:

$$xy + x - 2y - 1 = 0$$

$$xy - 2y = 1 - x$$

$$y(x-2) = (1-x)$$

$$y = \frac{(1-x)}{(x-2)}$$

$$y' = \frac{(1-x)'(x-2) - (1-x)(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(-1)(x-2) - (1-x)(1)}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{2 - x - 1 + x}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-2)^2}$$

8. (1,5 pontos) ———

Ache as equações das retas normal e tangente a $x^2 + 3xy + y^2 = 5$ no ponto $(1,1)$.
Solução:

$$x^2 + 3xy + y^2 - 5 = 0$$

$$2x + 3(y + xy') + 2yy' - 0 = 0$$

$$2x + 3y + 3xy' + 2yy' = 0$$

$$(3x + 2y)y' = -2x - 3y$$

ou

$$y' = -\frac{2x + 3y}{3x + 2y}$$

a inclinação da reta tangente no ponto $(x, y) = (1, 1)$ é

$$y' = -\frac{2+3}{3+2} = -1$$

assim a equação da reta tangente é:

$$y - 1 = (-1)(x - 1) \quad \Longrightarrow \quad y = -x + 2$$

e a reta normal

$$y - 1 = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad y = x$$