Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2019 — Gabarito

Questões

1. (1,25 pontos)

Determine as inversas das seguintes funções

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

(b) $f(x) = \sqrt[7]{5x+1}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^4+4} \quad x \geq 0$

Solução:

(a)

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$y = \frac{x-1}{x+1} \Longrightarrow y(x+1) = x-1 \Longrightarrow yx + y = x - 1 \Longrightarrow yx - x = -y - 1$$

$$yx - x = -y - 1 \Longrightarrow x(y-1) = -y - 1 \Longrightarrow x = -\frac{(y+1)}{(y-1)}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = -\dfrac{(x+1)}{(x-1)}$

(b)

$$f(x) = \sqrt[7]{5x+1}$$

$$y = \sqrt[7]{5x+1} \Longrightarrow y^7 = 5x+1 \Longrightarrow y^7 - 1 = 5x \Longrightarrow \frac{y^7-1}{5} = x$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \frac{x^7-1}{5}$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{x^4+4} \quad x \geq 0$$

$$y = \frac{1}{x^4+4} \Longrightarrow x^4 + 4 = \frac{1}{y} \Longrightarrow x^4 = \frac{1}{y} - 4 \Longrightarrow x = \sqrt[4]{\frac{1}{y} - 4}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x} - 4}$

2. (1,25 pontos) ---

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12}$$

(b) $$\lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}$$

(c) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to -4} \frac{2x+8}{x^2+x-12} = \lim_{x\to -4} \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-3)} = \lim_{x\to -4} \frac{2}{(x-3)} = \frac{2}{-4-3} = -\frac{2}{7}$$

(b) $$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} &= \lim_{x\to 3} \frac{(9-x^2)}{(4-\sqrt{x^2+7})} \cdot \frac{(4+\sqrt{x^2+7})}{(4+\sqrt{x^2+7})} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(16-x^2-7)} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(9-x^2)(4+\sqrt{x^2+7})}{(9-x^2)} \\ &= \lim_{x\to 3} 4 + \sqrt{x^2+7} \\ &= \lim_{x\to 3} 4 + \sqrt{3^2+7} = 4 + \sqrt{16} = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-x^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)\\
&= \lim_{h\to 0}3x^2+\lim_{h\to 0}3xh+\lim_{h\to 0}h^2\\
&= 3x^2+0+0\\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

3. (1,25 pontos)

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{se} \quad x \le 2 \\ x^4 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^5 & \text{se} \quad x \le 2 \\ 5-3x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{se} \quad x \le 2 \\ x^4 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 5x = 10$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^4 = 16$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^5 & \text{se} \quad x \le 2 \\ 5-3x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^5 = 32$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 5-3x = -1$$

4. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

(b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 5 & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$

Solução:

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

Esta é uma função polinomial e portanto contínua em todo o domínio.

Mais especificamente, para que uma função seja contínua em um ponto x, o limite da função neste ponto deve existir e ser igual ao valor da função no ponto. Isto é se $x = a$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para uma função polinomial sabemos que o limite da função em a é sempre igual a $f(a)$. Vamos, a seguir, verificar esta afirmação.

Uma função polinomial pode ser escrita na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_2, a_1, a_0$ são números reais. O limite da função quando x tende a a é

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$$

aplicando as regras de limites

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n) + \lim_{x \to a} (a_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x \to a} (a_2 x^2) + \lim_{x \to a} (a_1 x) + \lim_{x \to a} (a_0)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = a_n \lim_{x \to a} (x^n) + a_{n-1} \lim_{x \to a} (x^{n-1}) + \cdots + a_2 \lim_{x \to a} (x^2) + a_1 \lim_{x \to a} (x) + a_0 \lim_{x \to a} (1)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = a_n (a^n) + a_{n-1} (a^{n-1}) + \cdots + a_2 (a^2) + a_1 (a) + a_0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Portanto toda função polinomial é contínua em toda a reta dos reais.

(b) $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 5 & \text{se} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

$f(x)$ é descontínua em $x = 0$, posto que, embora $x = 0$ pertença ao domínio de $f(x)$ e o limite quando $x \to 0$ exista e seja igual a 5, o valor de $f(0)$ é igual a 0, ou seja

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 5 \neq 0 = f(0)$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^3 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Nos intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$, $f(x)$ é contínua já que é polinomial em cada um dos subintervalos, como mostra o item (a).

Resta verificar a continuidade em $x = 0$ e $x = 1$,

Em $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 \ \text{ e } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^3 = 0 \ \text{ logo } \ \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

e ainda $f(0) = 0$, logo $f(x)$ é contínua em $x = 0$

Em $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^3 = 1 \ \text{ e } \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - x = 1 \ \text{ logo } \ \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

e ainda $f(1) = 1$, logo $f(x)$ é contínua em $x = 1$

Portanto $f(x)$ é contínua em toda a reta real.

5. (1,25 pontos) ---

Para as funções a seguir mostre que elas são contínuas nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \sqrt{x - 4}$ em $[4, 8]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ em $[1, 3]$

Solução:

(a) $f(x) = \sqrt{x-4} \quad \text{em} \quad [4,8]$

Dentro do intervalo $f(x)$ é contínua, como será verificado a seguir,

Em $(4,8)$, $x-4$ é sempre maior do que zero, logo,

$f(x)$ está definida em $(4,8)$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sqrt{x-4} = \sqrt{a-4} = f(a) \qquad a \in (4,8)$$

basta agora verificar os extremos 4 e 8, isto é, se

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 8^+} f(x) = f(8)$$

mas

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = \sqrt{0} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 8^+} f(x) = f(8) \lim_{x\to 8^-} \sqrt{x-4} = \sqrt{8-4} = \sqrt{4} = 2$$

Logo $f(x)$ é contínua no intervalo $[4,8]$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} \quad \text{em} \quad [1,3]$

A função $f(x)$ não é contínua no ponto $x = 1$, que não pertence ao domínio de $f(x)$, logo não é contínua no intervalo $[1,3]$.

6. (1,25 pontos) ---

Ache a inclinação da reta tangente a curva $x = y^3 - 4y^2$ nos pontos aonde a curva corta o eixo-y.

Solução:

Uma **primeira interpretação** considera o plano yx — e não xy, o que é mais frequente — ou seja, y é a variável independente e x a variável dependente.

Primeiramente vamos determinar os pontos aonde a curva corta o eixo-y, isto é aonde $x = 0$. Com $x = 0$

$$0 = y^3 - 4y^2 \implies y^2(y-4) = 0$$

Logo estes pontos são $(y,x) = (0,0)$ e $(y,x) = (4,0)$.

A inclinação da reta tangente é o valor da derivada no ponto, lembre-se de que a expressão para esta reta é

$$x - x_0 = f'(y_0)(y - y_0)$$

onde (y_0, x_0) são as coordenadas do ponto e

$$f'(y) = 3y^2 - 8y$$

Para o ponto $(0, 0)$

$$f'(0) = 3 \times (0)^2 - 8 \times 0 = 0$$

e para o ponto $(4, 0)$

$$f'(4) = 3 \times (4)^2 - 8 \times 4 = 48 - 32 = 16$$

Logo no ponto $(0, 0)$ a inclinação da reta tangente vale 0, e no ponto $(4, 0)$ a inclinação da reta tangente tem o valor 16.

Uma **segunda interpretação** considera o plano xy, como comumente é feito, isto é, x é a variável independente e y a variável dependente. Neste caso

Vamos determinar os pontos aonde a curva corta o eixo-y, isto é aonde $x = 0$. Com $x = 0$

$$0 = y^2 - 4y \implies y(y - 4) = 0$$

Logo estes pontos são $(x, y) = (0, 0)$ e $(x, y) = (0, 4)$.

A inclinação da reta tangente é o valor da derivada no ponto, lembre-se de que a expressão para esta reta é

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

onde (x_0, y_0) são as coordenadas do ponto e agora

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

e daí

$$\begin{aligned} x = y^3 - 4y^2 \quad &\implies \quad \frac{dx}{dx} = \frac{d(y^3)}{dx} - 4\frac{dy^2}{dx} \\ &\implies \quad 1 = 3y^2\frac{dy}{dx} - 4 \cdot 2y\frac{dy}{dx} \\ &\implies \quad 1 = \left(3y^2 - 8y\right)\frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

e explicitando a derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 - 8y}$$

Para o ponto $(0,0)$

$$f' = \frac{1}{3\cdot(0)^2 - 4\cdot 0} = \frac{1}{0} \longrightarrow \infty$$

e para o ponto $(0,4)$

$$f' = \frac{1}{3\cdot(4)^2 - 8\cdot 4} = \frac{1}{48-32} = \frac{1}{16}$$

Logo no ponto $(0,0)$ a reta tangente tem inclinação infinita (∞), isto é, ela é vertical, e no ponto $(0,4)$ a inclinação da reta tangente vale $\frac{1}{16}$.

7. (1,25 pontos) ---

Calcule o valor das derivadas até quarta ordem da função $f(x) = x^{-5/4}$ no ponto $x = 0$.

Solução:

$$\begin{cases} f(x) & = & x^{-5/4} & = & \dfrac{1}{x^{5/4}} & \text{em } x=0, & 0 & \notin & \text{domínio de } f(x) \\ f'(x) & = & -\dfrac{5}{4}x^{-9/4} & = & -\dfrac{5}{4x^{9/4}} & \text{em } x=0, & 0 & \notin & \text{domínio de } f'(x) \\ f''(x) & = & \dfrac{45}{16}x^{-13/4} & = & \dfrac{45}{16x^{13/4}} & \text{em } x=0, & 0 & \notin & \text{domínio de } f''(x) \\ f'''(x) & = & -\dfrac{585}{64}x^{-17/4} & = & -\dfrac{585}{64x^{17/4}} & \text{em } x=0, & 0 & \notin & \text{domínio de } f'''(x) \\ f''''(x) & = & \dfrac{9945}{256}x^{-21/4} & = & \dfrac{9945}{256x^{21/4}} & \text{em } x=0, & 0 & \notin & \text{domínio de } f''''(x) \end{cases}$$

8. (1,25 pontos) ---

Ache as primeiras e segundas derivadas das funções:

(a) $f(x) = (1-5x)^8$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3+2}{3-x^3}$

(c) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

Solução:

(a)
$$f(x) = (1-5x)^8$$
$$f'(x) = 8(1-5x)^7(-5) = -40(1-5x)^7$$
$$f''(x) = -40(7)(1-5x)^6(-5) = 1400(1-5x)^6$$

(b)
$$f(x) = \frac{x^3+2}{3-x^3}$$
$$f'(x) = \frac{(x^3+2)'(3-x^3) - (x^3+2)(3-x^3)'}{(3-x^3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(3x^2)(3-x^3) - (x^3+2)(-3x^2)}{(3-x^3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(3x^2)(3-x^3+x^3+2)}{(3-x^3)^2} = \frac{(3x^2)(5)}{(3-x^3)^2} = \frac{15x^2}{(3-x^3)^2}$$
$$f''(x) = \left(\frac{15x^2}{(3-x^3)^2}\right)'$$
$$f''(x) = \frac{(15x^2)'((3-x^3)^2) - (15x^2)((3-x^3)^2)'}{((3-x^3)^2)^2}$$
$$f''(x) = \frac{(30x)(3-x^3)^2 - (15x^2)(2(3-x^3)(-3x^2))}{(3-x^3)^4}$$
$$f''(x) = \frac{(30x)(9-6x^3+x^6) + (90x^4)(3-x^3)}{(3-x^3)^4}$$
$$f''(x) = \frac{(270x-180x^4+30x^7) + (270x^4-90x^7)}{(3-x^3)^4}$$
$$f''(x) = \frac{(270x+90x^4-60x^7)}{(3-x^3)^4} = \frac{30(9+3x^4-2x^7)}{(3-x^3)^4}$$
$$f''(x) = \frac{30(9+3x^4-2x^7)}{(3-x^3)^4}$$

(c)
$$f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$
$$f''(x) = \left(\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)' = \frac{1}{4}\left(\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-1}\right)'$$
$$f''(x) = \frac{1}{4}(-1)\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-2}\left(\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}(-1)\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-2}\left\{\left(\sqrt{x}\right)'\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)+\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\left[\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\right]^{-2}\left\{\left(\sqrt{x}\right)'\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)+\left(\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\left[(x)(1+\sqrt{x})\right]^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)+\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)'\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+x\sqrt{x})}\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)+\left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right)\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x+x\sqrt{x})}\left\{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\right\}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{8}\frac{1}{x}\frac{1}{(1+\sqrt{x})}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)\right\}$$