Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2º semestre de 2018 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Ache a equação das retas tangente e normal a $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ em $x = 3$.

   Solução:

   $$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

   Logo a inclinação da reta tangente no ponto $(x, y) = (3, 1)$ é $m = f'(3) = 9$ e a reta tangente

   $$y - 1 = 9(x - 3) \Longrightarrow y = 9x - 27 + 1 = 9x - 26$$

   A equação da reta normal será

   $$y - 1 = -\frac{1}{9}(x - 3) = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3} \Longrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{4}{3}$$

2. (1,0 ponto)

   Seja $f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1$.

   Encontre:

   (a) os pontos críticos de f;

   (b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

   (c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

   Solução:

(a) os pontos críticos de f;

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{10}{2}x + 2 \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

Logo são pontos críticos $\frac{2}{3}$ e 1.

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

Estudando o sinal da primeira derivada

$$\begin{array}{lccccccl} \text{Para} & & & x & < & \frac{2}{3} & \rightarrow & f'(x) > 0 \\ \text{Para} & \frac{2}{3} & < & x & < & 1 & \rightarrow & f'(x) < 0 \\ \text{Para} & 1 & < & x & & & \rightarrow & f'(x) > 0 \end{array}$$

logo $x = \frac{2}{3}$ é um ponto de máximo relativo, 1 é um ponto de mínimo relativo.

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Do item anterior $f(x)$ é crescente em $(-\infty, \frac{2}{3})$, decrescente em $(\frac{2}{3}, 1)$ e novamente crescente em $(1, \infty)$.

3. (1,0 ponto)

Ache os extremos relativos da função $f(x) = 1 + (\operatorname{sen} x)^3$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

Solução:

$$f'(x) = 3 \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos x$$

que se anula aonde $(\operatorname{sen} x)$ se anula ou aonde $(\cos x)$ se anula. Portanto, $f'(x)$ se anula nos pontos

$$\ldots\ldots, -3\pi, -\frac{5\pi}{2}, -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, 3\pi, \ldots\ldots$$

como o período das funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ é igual a 2π, basta estudarmos o comportamento da função nas proximidades de 0. Os pontos críticos nesta região são: ......, $-5\pi/2$, -2π,

$-3\pi/2$, $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π, $5\pi/2$, ... Logo precisamos estudar o sinal da primeira derivada entre pontos críticos sucessivos. Nesta região

$$
\begin{array}{rcccl}
-3\pi & < & x & < & -\frac{5\pi}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrescente;} \\
-\frac{5\pi}{2} & < & x & < & -2\pi \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ crescente;} \\
-2\pi & < & x & < & -\frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ crescente;} \\
-\frac{3\pi}{2} & < & x & < & -\pi \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrescente;} \\
-\pi & < & x & < & -\frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrescente;} \\
-\frac{\pi}{2} & < & x & < & 0 \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ crescente;} \\
0 & < & x & < & \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ crescente;} \\
\frac{\pi}{2} & < & x & < & \pi \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrescente;} \\
\pi & < & x & < & \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrescente;} \\
\frac{3\pi}{2} & < & x & < & 2\pi \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ crescente;} \\
2\pi & < & x & < & \frac{5\pi}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ crescente;} \\
\frac{5\pi}{2} & < & x & < & 3\pi \quad \rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) \text{ decrescente.}
\end{array}
$$

logo ......, $x = -7\pi/2$, $x = -3\pi/2$, $x = \pi/2$, $x = 5\pi/2$, ... são pontos de máximo. Da mesma forma ......, $x = -5\pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = 3\pi/2$, $x = 7\pi/2$, ..., são pontos de mínimo.

Visualizando na reta real:

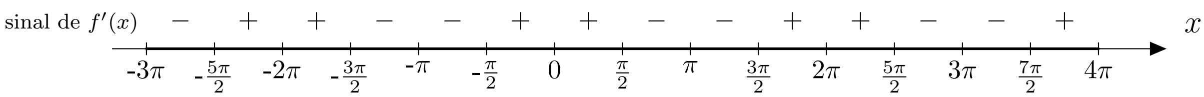
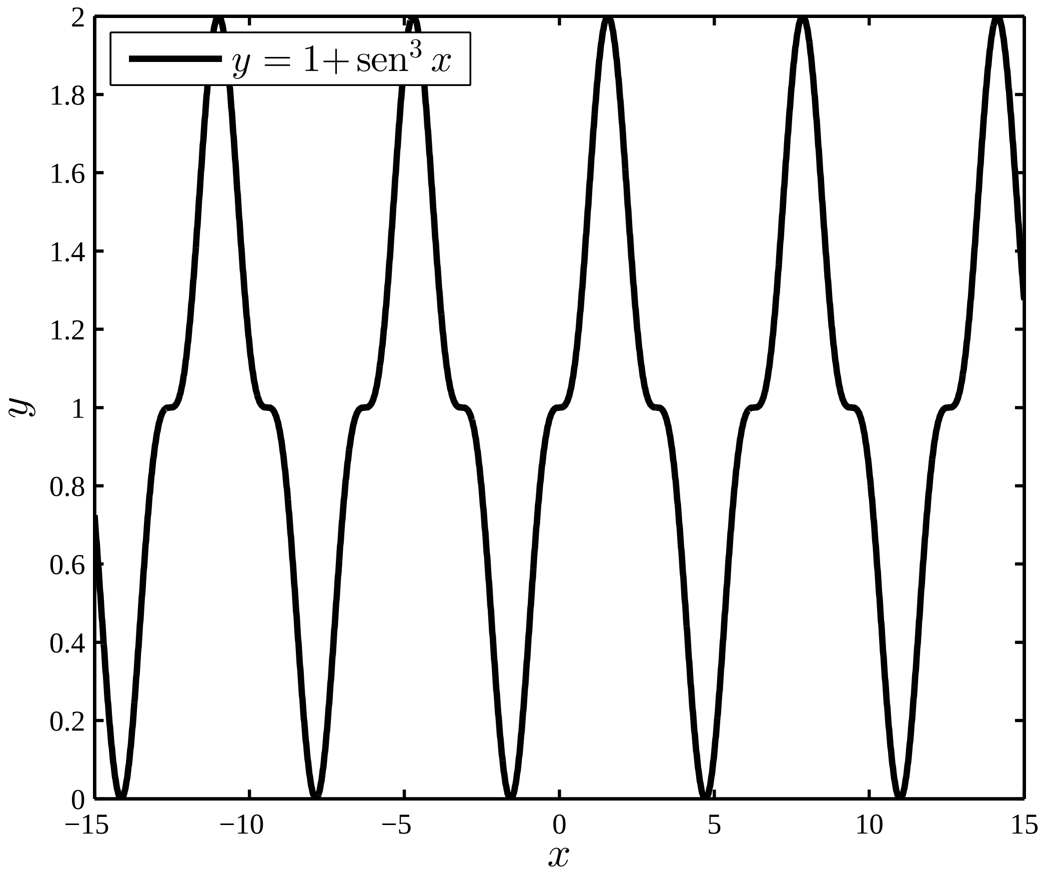


Figure 1: Comportamento da primeira derivada

O gráfico seguinte ilustra a função na proximidades de 0.



4. (1,0 ponto)

O custo do combustível para movimentar um ônibus é proporcional ao quadrado da velocidade do ônibus e vale R$ 51,00 por hora para uma velocidade igual a 80 km/h. Os outros custos necessários ao movimento do ônibus somam R$ 120,00 por hora, independentemente da velocidade. Ache qual é a velocidade que minimiza o custo por quilômetro rodado.

Solução:

Seja v a velocidade a ser determinada, e seja C o custo total por quilômetro. O custo de combustível por hora — c_h — pode então ser escrito na forma kv^2, já que é proporcional ao quadrado da velocidade do ônibus, e onde k é uma constante de proporcionalidade que pode ser determinada, já que conhecemos o valor do custo para a velocidade igual a 80 km/h, ou seja

$$c_h = kv^2 \Longrightarrow 51 = k(80)^2 \Longrightarrow k = \frac{51}{(80)^2} = \frac{51}{6400}$$

$$C = \frac{\text{custo em R\$/h}}{\text{velocidade em km/h}} = \frac{51v^2/6400 + 120}{v} = \frac{51v}{6400} + \frac{120}{v}$$

Para encontrar o ponto de mínimo:

$$C' = \frac{dC}{dv} = \frac{51}{6400} - \frac{120}{v^2} = \frac{51v^2 - 768000}{6400v^2}$$

Que possui dois zeros, a saber, $v = \sqrt{\frac{768000}{51}}$ e $v = -\sqrt{\frac{768000}{51}}$. Como v representa uma velocidade, a única raiz relevante é $v = \sqrt{\frac{768000}{51}}$.

Olhando agora a segunda derivada:

$$C'' = \frac{d^2C}{dv^2} = \frac{240}{v^3}$$

que é positiva quando $v = \sqrt{\frac{768000}{51}}$, significando que esta velocidade representa um ponto de mínimo. Logo a velocidade que minimiza o custo é $\sqrt{\frac{768000}{51}}$ km/h $\approx$ 122,7 km/h.

5. (1,0 ponto) ____

Esboce o gráfico da função $f(x) = x - e^{-2x}$.

Solução:

$$f(x) = x - e^{-2x}$$

$$f'(x) = 1 + 2e^{-2x} \quad \to \text{ que nunca se anula e está definida em toda a reta } \to \text{ não há pontos crít}$$

$$f''(x) = -4e^{-2x} \quad \to \text{ que também nunca se anula } \to \text{ não há pontos de inflexão}$$

$$f(0) = 0 - e^0 = 0 - 1 = -1 < 0$$

$$f(1) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,4 > 0$$

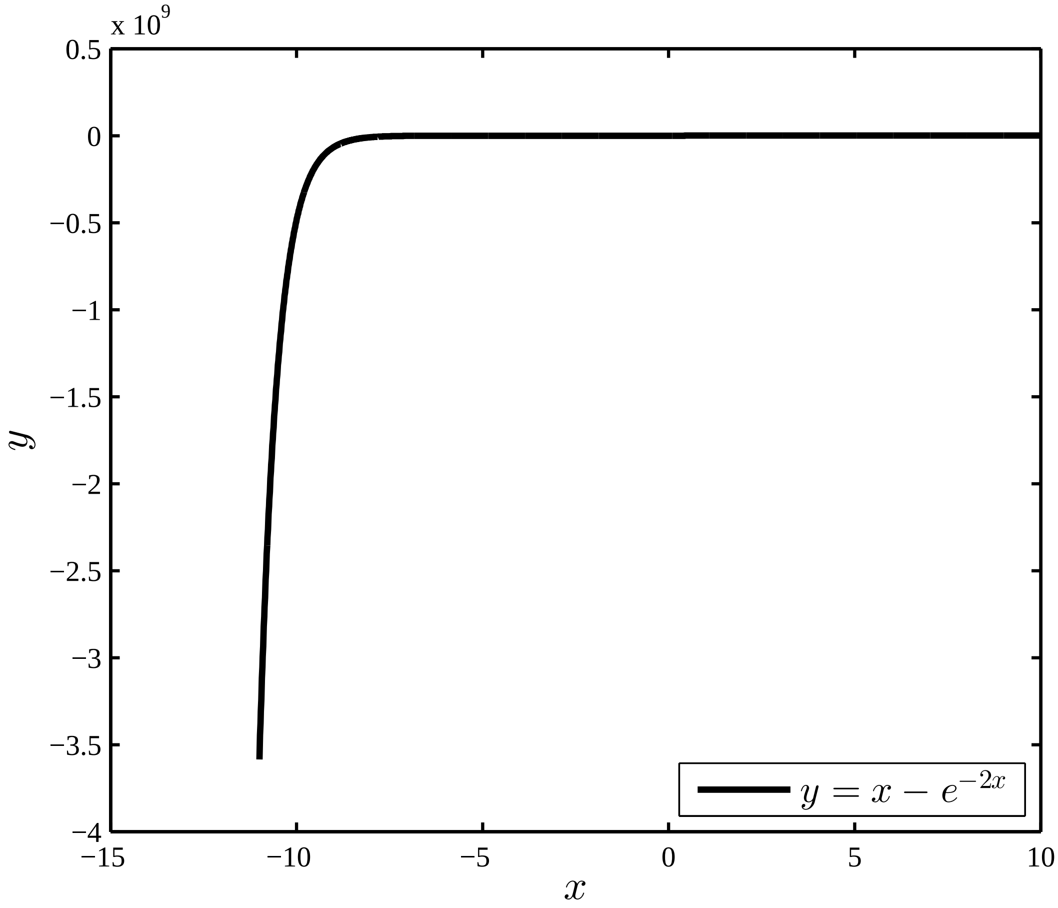
Portanto, o gráfico da curva corta o eixo x entre 0 e 1.

Estudemos a primeira derivada.:

$f'(x)$ é sempre positiva. Logo, $f(x)$ é crescente em toda a reta real.

Estudemos agora a segunda derivada.:

$f''(x)$ é sempre negativa. Logo, $f(x)$ é côncava para baixo em toda a reta real.



6. (1,0 ponto)

Encontre as antiderivadas:

(a) $\int x^3 \sqrt{x+1}\, dx$

(b) $\int \frac{x + x^3}{\sqrt{x}}\, dx$

(c) $\int \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x)}{(x+1)^3}\, dx$

(d) $\int x \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx$

(e) $\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx$

(f) $\int \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

Solução:

(a) $\int x^3 \sqrt{x+1}\, dx$

Seja $u = x + 1$. Portanto, $du = dx$ e $x = u + 1$, e substituindo na integral, temos

$$\int x^3 \sqrt{x+1}\, dx = \int (u-1)^3 \sqrt{u}\, dx = \int (u^3 - 3u^2 + 3u - 1) u^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \int (u^{\frac{7}{2}} - 3u^{\frac{5}{2}} + 3u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}})dx = \frac{2}{9}u^{\frac{9}{2}} - 3\frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} + 3\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{2}{9}(x+1)^{\frac{9}{2}} - 3\frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} + 3\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C$$

(b) $$\int \frac{x + x^3}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{x + x^3}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int \left[x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}}\right]\, dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

(c) $$\int \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x)}{(x+1)^3}\, dx$$ Item anulado!

(d) $$\int x\sqrt[3]{1 - x^2}\, dx$$

Com $u = 1 - x^2$, $du = -2x$. Substituindo na integral,

$$\int x\sqrt[3]{1 - x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int -2x\sqrt[3]{1 - x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\, du = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}}\right] + C = -\frac{3}{8}u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= -\frac{3}{8}(1 - x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

(e) $$\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx$$

com

$$u = \cos x \longrightarrow du = -\operatorname{sen} x\, dx$$

substituindo na integral

$$\int \operatorname{sen} x \cos^2 x\, dx = -\int \cos^2 x\, (-\operatorname{sen} x)dx = -\int u^2\, du = -\frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

(f) $$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Com $u = \sqrt{x} = x^{1/2}$. Logo, $du = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$. Ou $2\,du = \dfrac{1}{\sqrt{x}}dx$. E substituindo na integral

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\operatorname{sen} u\,du = 2\int \operatorname{sen} u\,du = -2\,\cos u + C$$
$$= -2\,\cos\sqrt{x} + C$$

7. (1,0 ponto)

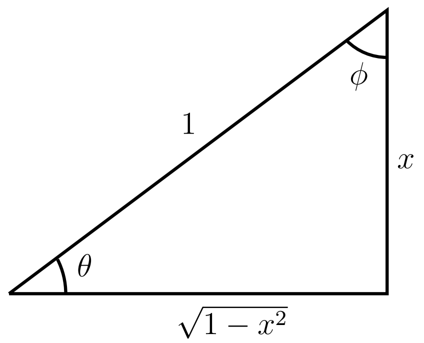
Ache a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, acima do eixo x e entre 0 e 1.

Solução:

A área é dada por

$$\text{Área} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Considere o triângulo retângulo



Logo,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{1} \quad\longrightarrow\quad \operatorname{sen}\theta = x$$

e

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \quad\longrightarrow\quad \cos\theta = \sqrt{1-x^2} \quad\longrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos\theta}$$

mas

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos\theta \quad\longrightarrow\quad dx = \cos\theta\,d\theta$$

substituindo na integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \int 1\,d\theta = \theta + C = \operatorname{sen}^{-1} x + C$$

Portanto

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1} x\Big|_0^1 = \operatorname{sen}^{-1} 1 - \operatorname{sen}^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

8. (1,0 ponto)

Ache o valor médio $f(x) = 8 + 4x - x^4$ no intervalo $[0, 2]$.

Observação:

O valor médio é definido por:

$$\text{Valor médio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Solução:

$$\text{Valor médio} = \frac{1}{2-0}\int_0^2 [8 + 4x - x^4]\,dx = \frac{1}{2}\left[8x + 2x^2 - \frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left[8\cdot 2 + 2\cdot 2^2 - \frac{2^5}{5}\right] - \left[8\cdot 0 + 2\cdot 0^2 - \frac{0^5}{5}\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{5\cdot 8\cdot 2 + 2\cdot 5\cdot 4 - 32}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{80 + 40 - 32}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{88}{5}\right]$$

$$= \frac{44}{5}$$

9. (1,0 ponto)

Avalie as integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+15}\,dx$

(c) $\displaystyle\int \sec x\,dx$

Solução:

(a) $$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx$$

Com $u = x^3 + 5 \Longrightarrow du = 3x^2 dx$. Substituindo na integral,

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx = \int \frac{1}{x^3+5}\,3x^2\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln \mid u \mid +C$$

Logo

$$\int \frac{3x^2}{x^3+5}\,dx = \ln \mid x^3+5 \mid +C$$

(b) $$\int \frac{x^3}{x^4+15}\,dx$$

Com $u = x^4 + 15 \Longrightarrow du = 4x^3 dx$. Substituindo na integral,

$$\int \frac{x^3}{x^4+15}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+15}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{4}\ln \mid u \mid +C = \frac{1}{4}\ln \mid x^4+15 \mid +C$$

(c) $$\int \sec x\,dx$$

Multiplicando e dividindo por $\sec x + \tan x$, teremos

$$\int \sec x\,dx = \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\,dx$$

com $u = \sec x + \tan x$ resulta

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\tan x)$$

Porém

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{(1)'\cos x - 1\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} &= \\ &= \frac{(0)\cos x - 1\cdot(-\mathrm{sen}\,x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} \\ &= \sec x \tan x\end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\right) = \frac{(\mathrm{sen}\,x)'\cos x - \mathrm{sen}\,x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{(\cos x)\cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

assim,

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\tan x) \sec x \tan x + \sec^2 x = \sec x(\sec x + \tan x)$$

ou

$$du = \sec x(\sec x + \tan x)\, dx \qquad \text{que veio de} \qquad u = \sec x + \tan x$$

$$\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}\, dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln \mid u \mid + C$$

$$= \ln \mid \sec x + \tan x \mid + C$$

Resumindo

$$\int \sec x\, dx = \ln \ \mid \sec x + \tan x \mid + C$$

10. (1,0 ponto)

Considere o sólido obtido por revolução em torno do eixo x da região no primeiro quadrante limitada pela parábola $y^2 = x$ e pela linha $x = 4$. Calcule o volume deste sólido.

Solução:

$$V = \pi \int_0^2 y^2\, dx = \pi \int_0^2 x\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \pi[\frac{4}{2} - \frac{0^2}{2}] = 2\pi$$