Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2^o semestre de 2017 - Gabarito

Questões

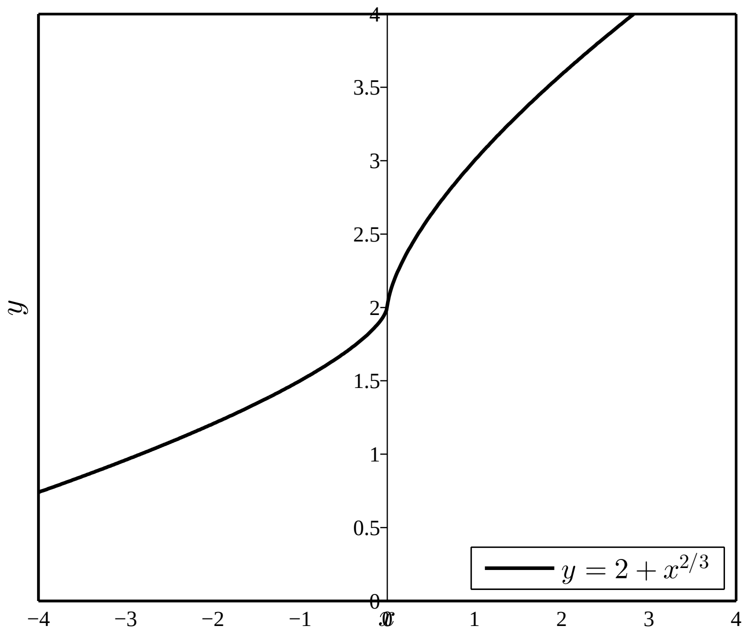
1. (2,5 pontos)

   Ache os extremos relativos da função $f(x) = 2 + x^{2/3}$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

   Solução:

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

   Logo, $x = 0$ é um ponto crítico desde que $f'(0)$ não é definido, embora $x = 0$ esteja no domínio de f. Observe que $f'(x)$ tende a ∞ quando x tende a 0. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativa e, portanto f é decrescente para $x \in (-\infty, 0)$ e quando $x > 0$, $f'(x)$ é positiva e, portanto f é crescente para $x \in (0, \infty)$. Daí podemos concluir que f tem um mínimo relativo em $x = 0$.



2. (2,5 pontos)

Encontre as seguintes antiderivadas:

(a)
$$\int \frac{x^4 + 5x^3 - 4x}{x^2}\, dx$$

(b)
$$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4+2}}\, dx$$

Solução:

(a)
$$\int \frac{x^4 + 5x^3 - 4x}{x^2}\, dx = \int \left[\frac{x^4}{x^2} + \frac{5x^3}{x^2} - \frac{4x}{x^2}\right] dx = \int \left[x^2 + 5x - \frac{4}{x}\right] dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4\ln x + C\right]$$
$$= \frac{2x^3 + 15x^2 - 24\ln x}{6} + C$$

(b)
$$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{x^4+2}}\, dx = \frac{1}{4}\int (x^4+2)^{-1/4} 4x^3\, dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3/4}(x^4+2)^{3/4}\right) + C$$
$$= \frac{4}{12}(x^4+2)^{3/4} + C$$

3. (2,5 pontos)

Usando a regra de L'Hôpital calcule os limites:

(a) $$\lim_{x\to 0^+} x \ln x$$

(b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

(c) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

Solução:

(a) Quando x se aproxima de 0 pela direita, $\ln x$ tende a $-\infty$. E quando x se aproxima de 0 pela direita, $1/x$ tende a $+\infty$. Logo podemos aplicar L'Hôpital.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} x \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} -x = 0
\end{aligned}$$

(b) $$\frac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow \text{L'Hôpital}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} \\
&= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0
\end{aligned}$$

(c) $$\frac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow \text{L'Hôpital}$$

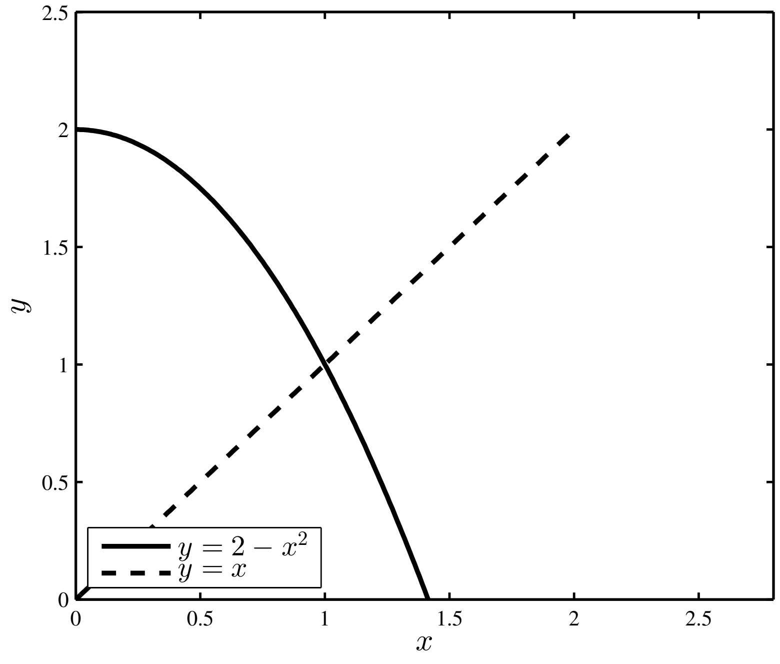
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

4. (2,5 pontos)

Ache o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo y da região no primeiro quadrante limitada superiormente pela parábola $y = 2 - x^2$ e inferiormente pela reta $y = x$.

Solução:

O gráfico mostra as duas curvas e a região a ser rodada em torno do eixo y.



Vamos determinar a interseção das curvas no primeiro quadrante.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \; x = 2 - x^2 \; \Longrightarrow \; x^2 + x - 2 = 0 \; \Longrightarrow \; x = 1 \; \text{ e } \; x = -2$$

No primeiro quadrante a interseção ocorre em $x = 1$, no ponto $(x, y) = (1, 1)$.

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ x = \sqrt{2 - y} \end{cases}$$

$$V = \int_0^1 \pi r^2 \, dy + \int_1^2 \pi r^2 \, dy = \int_0^1 \pi \, (y)^2 \; dy + \int_1^2 \pi \left(\sqrt{2 - y} \right)^2 \; dy$$

$$= \pi \int_0^1 y^2 \, dy + \pi \int_1^2 (2 - y) \, dy = \pi \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] + \pi \left[2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{1^2}{2} \right] = \pi \frac{1}{3} + \pi \left[4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$$