Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática Para Computação
AD1 - 2º semestre de 2006

1. (0,3 ponto)

   Determine o domínio da função f; Justifique.

   $$f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{(-5x+10)}}$$

   - A variável aparece no radicando de um radical de índice par
   - O radical está no denominador de uma fração
   Logo: O radicando deve ser maior do que zero.

   $$-5x + 10 > 0$$

   $$-5x > -10$$

   $$5x < 10$$

   $$x < 2$$

   o domínio de f é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x < 2$).

2. (1,6 ponto)

   Calcule as funções $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f.g)(x)$, $(f/g)(x)$. Determine o domínio de cada uma delas.

   (a) $f(x) = 2x \quad g(x) = x^2 + 1$

(b) $f(x) = 2\sqrt{(x-1)} \quad g(x) = \sqrt{(x-1)}$

Solução:

(a) $(f+g)(x) = 2x + x^2 + 1$

o domínio de $(f+g)(x)$ é (Dom $f = \mathbb{R}$).

$(f-g)(x) = 2x - x^2 - 1$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = \mathbb{R}$).

$(f.g)(x) = 2x.(x^2+1) = 2x^3 + 2x$

o domínio de $(f.g)(x)$ é (Dom $f = \mathbb{R}$).

$$(f/g)(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

pela definição,

$$x^2 + 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq -1$$

como $x^2 \neq -1$ para todo x real, o domínio é (Dom $f = \mathbb{R}$).

(b) $(f+g)(x) = 2\sqrt{(x-1)} + \sqrt{(x-1)} = 3\sqrt{(x-1)}$

$$(x-1) \geq 0$$

$$x \geq 1$$

o domínio de $(f+g)(x)$ é (Dom $(f+g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$).

$$(f-g)(x) = 2\sqrt{(x-1)} - \sqrt{(x-1)} = \sqrt{(x-1)}$$

$$(x-1) \geq 0$$

$$x \geq 1$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $(f-g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$).

$(f.g)(x) = 2\sqrt{(x-1)}.\sqrt{(x-1)} = 2(x-1)$

o domínio de $(f.g)(x)$ é (Dom $(f.g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$).

$$(f/g)(x) = \frac{2\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{(x-1)}} = 2;$$

o domínio é (Dom $(f/g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$)

3. (1,8 ponto) ___

Calcule as funções compostas $(f \circ g)(x), (g \circ f)(x)$ e determine o domínio de $f \circ g$ e $g \circ f$:

(a) $f(x) = 2x + 1 \quad g(x) = x^2 - x$

(b) $f(x) = x^2 \quad g(x) = \sqrt{(1 - x)}$

(c) $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 - x} \quad g(x) = \dfrac{x}{1 - x}$

Solução:

(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(x^2 - x\right) = 2\left(x^2 - x\right) + 1$

$= 2x^2 - 2x + 1$

logo, o domínio é (Dom $(f \circ g) = \mathbb{R}$).

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - (2x + 1)$

$= 4x^2 + 4x + 1 - 2x - 1 = 4x^2 + 6x$

logo, o domínio é (Dom $(g \circ f) = \mathbb{R}$).

(b) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{(1 - x)}) = \left(\sqrt{(1 - x)}\right)^2 = 1 - x$

logo, o domínio é (Dom $(fog) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$).

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = (\sqrt{(1 - x^2)})$

por definição:

$1 - x^2 \geq 0$

$-x^2 \geq -1$

$x^2 \leq 1$

$-1 \leq x \leq 1$

logo, o domínio é (Dom $(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$).

(c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\dfrac{x}{1 - x}) = \dfrac{1 + \frac{x}{1 - x}}{1 - \frac{x}{1 - x}} =$

$$\frac{\frac{1}{1 - x}}{\frac{1 - 2x}{1 - x}} = \frac{1}{1 - 2x}$$

por definição:

$$1 - 2x \neq 0$$

$$-2x \neq -1$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

logo, o domínio é (Dom $(f \circ g) = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}, x \neq 1)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{1+x}{1-x})$$

$$\frac{\frac{1+x}{1-x}}{\frac{1-x-1-x}{1-x}} = \frac{1+x}{-2x} = -\frac{1+x}{2x}$$

por definição:

$$2x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

logo, o domínio é (Dom $(gof) = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq 1)$.

4. (0,8 ponto)

Ache os pontos de máximo e mínimo relativos de:

(a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$

(b) $y = 3x^4 - 4x^3$

Solução:

(a) $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x - 12$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\triangle = (-1)^2 - 4(1)(-2)$$

$$\triangle = 1 + 8$$

$$\triangle = 9$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2}$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{1-3}{2}$$

$$x_2 = -1$$

$$-1 < x < 2 \longrightarrow \frac{dy}{dx} < 0$$

$$x > 2 \longrightarrow \frac{dy}{dx} > 0$$

logo: existe um ponto de mínimo em $x = 2$
ponto de mínimo: (2, -7)

$$x < -1 \longrightarrow \frac{dy}{dx} > 0$$

$$-1 < x < 2 \longrightarrow \frac{dy}{dx} < 0$$

logo: existe um ponto de máximo em $x = -1$
ponto de máximo: (-1, 20)

(b)
$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 12x^2$$

$$12x^3 - 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x-1) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x < 0 \longrightarrow \frac{dy}{dx} < 0$$

$$0 < x < 1 \longrightarrow \frac{dy}{dx} < 0$$

logo: não existe ponto de mínimo nem ponto de máximo em $x = 0$

$$0 < x < 1 \longrightarrow \frac{dy}{dx} < 0$$

$$x > 1 \longrightarrow \frac{dy}{dx} > 0$$

logo: existe um ponto de mínimo em $x = 1$
ponto de mínimo: (1, -1)

5. (1,2 ponto) ———————————————————————————

Esboce o gráfico da seguinte função utilizando as ferramentas do cálculo. Pede-se para a função f : $f = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

1 - Domínio; (0,2 ponto)
2 - Intersecções com os eixos x e y; (0,2 ponto)
3 - Assíntotas verticais e horizontais; (0,3 ponto)
4 - Pontos de máximo de mínimos locais; (0,3 ponto)
5 - Pontos de Inflexão. (0,2 ponto)

Solução:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$$

i) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f = \mathbb{R}$).

ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{x^2} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 + 0) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 + 0) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.
E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.

Não existem assíntotas verticais posto que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

iii) Vejamos os máximos e mínimos locais.

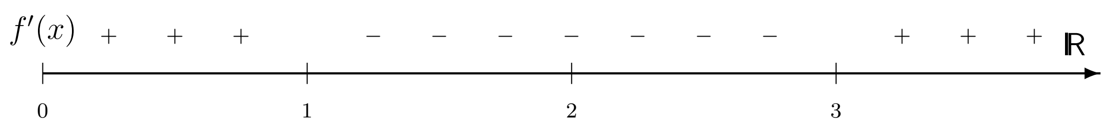
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

e

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1)$$

Os máximos e mínimos locais ocorrem em $x = 1$ e $x = 3$.

O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no intervalo estudado.



Logo $f(x)$ é crescente em $(-\infty, 1)$ e $(3, \infty)$ e é decrescente em $(1, 3)$.

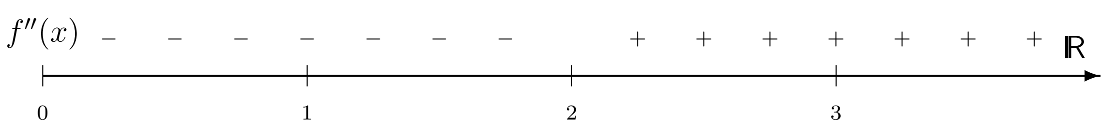
O ponto de máximo local é $(1, 5)$.

O ponto de mínimo local é $(3, 1)$.

iv) Vejamos os pontos de inflexão.

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

portanto o ponto de inflexão ocorre em $x = 2$. O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada em torno do ponto 2.



Logo, pelo sinal da segunda derivada, f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$ e é côncava para cima em $(2, \infty)$. O ponto de inflexão é $(2, 3)$

v) Interseções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (interseção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

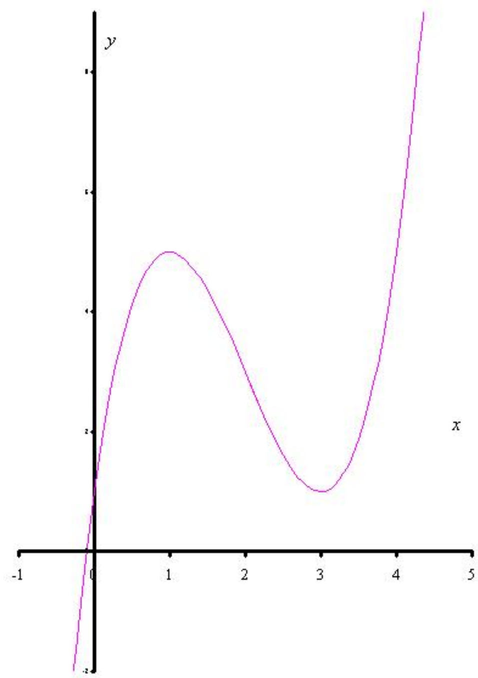
$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} f(-1) & = & (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) + 1 & = & -15 < 0 \\ f(0) & = & (0)^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 1 & = & 1 < 0 \end{cases}$$

como f é contínua em $(-1, 0)$ então f corta o eixo x em algum ponto deste intervalo, já que há troca de sinal da função f.

Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 1$



6. (0,9 ponto)

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine o domínio:

(a) $y = \dfrac{2-x}{x} + 4$

(b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2} \;\; (x \neq 2)$

(c) $y = 2x - 4$

Solução:

(a) $$y = \frac{2 - x + 4x}{x}$$

$$y = \frac{2 + 3x}{x}$$

$$x = \frac{2+3y}{y}$$

$$xy = 2 + 3y$$

$$xy - 3y = 2$$

$$y(x-3) = 2$$

$$y = \frac{2}{x-3}$$

o domínio de $(f^{-1})(x)$ é (Dom $(f^{-1}) = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3$).

(b) $$f(x) = \frac{x+2}{x-2} \;\; (x \neq 2)$$

$$x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$xy - 2x = y + 2$$

$$xy - y = 2 + 2x$$

$$y(x-1) = 2 + 2x$$

$$y = \frac{2x+2}{x-1}$$

o domínio de $(f^{-1})(x)$ é (Dom $f^{-1} = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$).

(c) $$y = 2x - 4$$

$$x = 2y - 4$$

$$-2y = -x - 4$$

$$y = \frac{-(x+4)}{-2}$$

$$y = \frac{x+4}{2}$$

o domínio de $(f^{-1})(x)$ é (Dom $f^{-1} = \mathbb{R}$).

7. (0,9 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2}{x^2 + a}$$

(b) $\lim_{x \to 5} 10\sqrt[3]{x^2+2}$

(c) $\lim_{x \to \infty} 1 + 3^{\frac{1}{x}}$

Solução:

(a) $$\frac{\lim_{x \to -1} x^2}{\lim_{x \to -1}(x^2+a)} = \frac{\lim_{x \to -1} x^2}{\lim_{x \to -1} x^2 + \lim_{x \to -1} a} = \frac{1}{1+a}$$

(b) $$\lim_{x \to 5} 10(x^2+2)^{\frac{1}{3}} =$$

$$\lim_{x \to 5} 10.(\lim_{x \to 5}(x^2+2))^{\frac{1}{3}} =$$

$$10.(27)^{\frac{1}{3}} =$$

$$10.3 = 30$$

(c) $$\lim_{x \to \infty} 1 + 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} 1 + \lim_{x \to \infty} 3^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} 1 + 3^{\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}} = 1 + 3^0 =$$

$$1 + 1 = 2$$

8. (0,9 ponto) ---

Verifique se as funções abaixo são contínuas nos seguintes casos:

Obs: (utilize a definição de continuidade)

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x-2}, x = 2$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x+3}, x = -3$

$f(x) = x^2 - 3, x = 4$

Solução:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x-2}, x = 2$

Pode-se observar que $f(x)$ não tem seu denominador definido quando $x = 2$, logo, $f(x)$ é descontínua em $x = 2$.

Mas,

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^2 - 3)(x - 2)$$

logo:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} = \frac{(x^2 - 3)(x - 2)}{x - 2}, x \neq 2$$

$$f(2) = 2^2 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^-} x^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} =$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} x^2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

portanto, $f = x^2 - 3$ é contínua em 2.

(b) $$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}, x = -3$$

Pode-se observar que $f(x)$ não tem seu denominador definido quando $x = -3$, logo, $f(x)$ é descontínua em $x = -3$.
Mas,

$$x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$$

$$f(x) = \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 3}$$

$$f(x) = (x - 3)$$

$$f(-3) = -3 - 3 = -6$$

$$\lim_{x \leftarrow (-3)^-} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$$

$$\lim_{x \leftarrow (-3)^-} x - 3 = -3 - 3 = -6$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$$

$$\lim_{x \leftarrow 2^+} x - 3 = -3 - 3 = -6$$

portanto, $f = x - 3$ é contínua em -3.

(c) $f(4) = (4)^2 - 3 = 13$

$\lim\limits_{x \leftarrow 4^-} x^2 - 3 =$

$4^2 - 3 = 13$

$\lim\limits_{x \leftarrow 4^+} x^2 - 3 =$

$4^2 - 3 = 13$

portanto, $f = x^2 - 3$ é contínua em 4.

9. (0,4 ponto) ————————————————————————-

Calcule a derivada abaixo: (utilize a definição de derivada)

$f(x) = x^2 - x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 1 - (x^2 - x + 1)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x - \Delta x + 1 - x^2 + x - 1}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x - 1 =$$

$$= 2x - 1$$

10. (1,2 ponto) ——————————————————————————

Calcule as derivadas abaixo:

(a) $\frac{dy}{dx} =$

$y = (x^3 + 4)(x + 3)$

(b) $$\frac{dy}{dx} =$$

$$y = \frac{4}{x^6}$$

(c) $$\frac{dx}{dy} =$$

$$y = x^5$$

Solução:

(a) $$y = (x^3 + 4)(x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx}(uv) = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dv}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + 4)1 + (x + 3).(3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 + 4) + 3x^3 + 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 9x^2 + 4$$

(b) $$y = \frac{4}{x^6}$$

$$u = 4 \qquad v = x^6$$

$$\frac{dy}{dx}(uv) = u.\frac{dv}{dx} + v.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = 6x^5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4.6x^5 + 0.x^6}{x^{12}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-24x^5}{x^{12}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-24}{x^7}$$

ou

$$y = 4x^{-6}$$

$$\frac{dy}{dx} = -6.4.x^{-7}$$

$$\frac{du}{dx} = -24.x^{-7}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-24}{x^7}$$

(c)

$$y = x^5$$

$$x = y^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}y^{\frac{-3}{5}}$$