Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática Para Computação

AD1 - 2° semestre de 2009 - gabarito

1. (1.0 ponto)

   Determine o domínio das funções abaixo. Justifique:

   (a) $$f(x) = \frac{3x-1}{5x+4}$$

   (b) $$f(x) = \frac{7x+1}{\sqrt{2x}}$$

   Solução:

   (a) $$f(x) = \frac{3x-1}{5x+4}$$

   $$5x + 4 \neq 0$$

   $$5x \neq -4$$

   $$x \neq \frac{-4}{5}$$

   $$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} | -\frac{4}{5} \right\}$$

   (b) $$f(x) = \frac{7x+1}{\sqrt{2x}}$$

   $$2x > 0$$

   $$x > 0$$

   $$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$$

2. (1.5 ponto) ---

Calcule $(f+g)$, $(f-g)$, $(f.g)$, (f/g) e dê o domínio da cada uma dessas funções:

(a) $f(x) = 3x + 4\ ,\ g(x) = x^2$

(b) $f(x) = 5x\ ,\ g(x) = x + 10$

Solução:

(a) $f(x) = 3x + 4\ ,\ g(x) = x^2$

$$(f+g)(x) = 3x + 4 + x^2$$

Domínio:

$$D(f+g) = \mathbb{R}$$

$$(f-g)(x) = 3x + 4 - (x^2) = -x^2 + 3x + 4$$

Domínio:

$$D(f-g) = \mathbb{R}$$

$$(f.g)(x) = (3x+4).(x^2) = 3x^3 + 4x^2$$

Domínio:

$$D(f.g) = \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = \frac{3x+4}{x^2}$$

Domínio:

$$x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$D(f/g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

(b) $$f(x) = 5x\ ,\ g(x) = x + 10$$

$$(f+g)(x) = 5x + x + 10 = 6x + 10$$

Domínio:

$$D(f+g) = \mathbb{R}$$

$$(f-g)(x) = 5x - (x+10) = 4x - 10$$

Domínio:

$$D(f-g) = \mathbb{R}$$

$$(f.g)(x) = (5x).(x+10) = 5x^2 + 50x$$

Domínio:

$$D(f.g) = \mathbb{R}$$

$$(f/g)(x) = \frac{5x}{x+10}$$

Domínio:

$$x + 10 \neq 0$$

$$x \neq -10$$

$$D(f/g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -10\}$$

3. (1,0 ponto)

Calcule as funções compostas fog e determine seus domínios:

$$f(x) = 2x^2 + 3\ ,\ g(x) = -\frac{2}{x}$$

Solução:

$$f(x) = 2x^2 + 3\ ,\ g(x) = -\frac{2}{x}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(-\frac{2}{x}\right) = 2\left(\frac{-2}{x}\right) + 3 = 2\left(\frac{4}{x^2}\right) + 3 = \frac{8}{x^2} + 3$$

Domínio:

$$x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$$

4. (2.0 pontos)

Determine cada um dos tópicos abaixo utilizando as ferramentas do cálculo. Justifique. A partir disso, esboce o gráfico da função f:

$$f(x) = x^2(9 - x^2)$$

1 - Intersecções com eixos x e y;
2 - Assíntotas Horizontais e Verticais;
3 - Domínio;

Solução:

$$f(x) = (x^2).(9 - x^2)$$

iii) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f = \mathbb{R}$).

ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2)(9 - x^2) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-x^4 + 9x^2)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \left(-1 + \frac{9}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \left(\lim_{x\to\infty} -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \cdot (-1 + 0)$$

$$\lim_{x\to\infty} x^4 = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2)(9-x^2) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-x^4+9x^2)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1+\frac{9}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\lim_{x\to-\infty} -1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\cdot(-1+0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.

E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.

Não existem assíntotas verticais posto que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

i) Interseções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^2(9-x^2)$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (interseção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

$$0 = x^2(9-x^2)$$

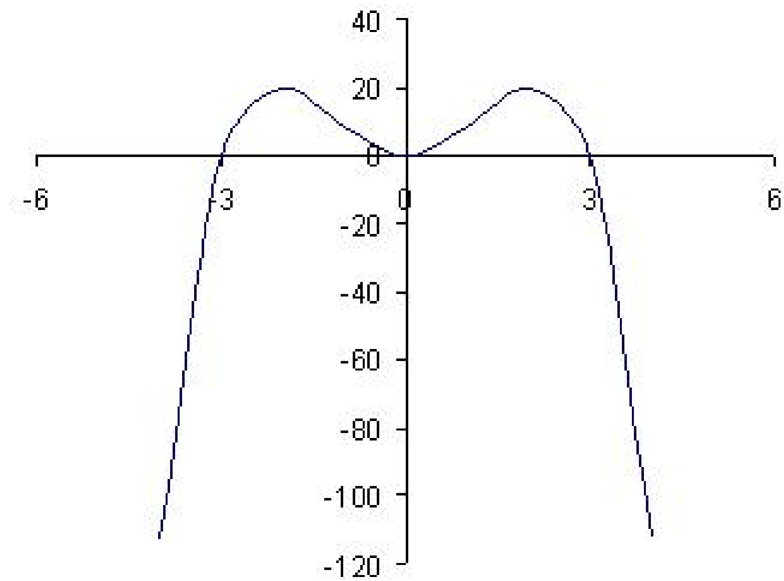
$$x^2 = 0 \ (9-x^2) = 0$$

$$x = 0 \ x = 3 \ x = -3$$

Portanto, as intersecções com o Eixo x são: $x = 0, x = 3, x = -3$.

Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 0.(9-0) = 0$



5. (1.5 ponto)

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine seus domínios:

(a) $y = \dfrac{5x+2}{3x-3}, x \neq 1$

(b) $y = x - 4$

(c) $f(x) = 4x^2 - 16$

Solução:

(a) $y = \dfrac{5x+2}{3x-3}, x \neq 1$

$$x = \frac{5y+2}{3y-3}$$

$$3xy - 3x = 5y + 2$$

$$3xy - 5y = 2 + 3x$$

$$y(3x-5) = 2 + 3x$$

$$y = \frac{2+3x}{3x-5}, x \neq \frac{5}{3}$$

$$D(y^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{5}{3}\}$$

(b) $$y = x - 4$$

$$x = y - 4$$

$$-y = -4 - x$$

$$y = x + 4$$

$$D(y^{-1}) = \mathbb{R}$$

(c) $$f(x) = 4x^2 - 16$$

$$y = 4x^2 - 16$$

$$x = 4y^2 - 16$$

$$-4y^2 = -x - 16$$

$$4y^2 = x + 16$$

$$y^2 = \frac{x+16}{4}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x+16}{4}}$$

Domínio:

$$\frac{x+16}{4} \geq 0$$

$$x + 16 \geq 4$$

$$x \geq -12$$

$$D(f^{-1}(x)) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -12\}$$

6. (1.5 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - a}{x^3} =$$

(b) $$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{10+2^{\frac{1}{y}}} =$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-a}{x^3} =$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3} x^2 - a}{\lim_{x\to 3} x^3}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 3}}{x^2} - \lim_{x\to 3} a \lim_{x\to 3} x^3$$

$$= \frac{9-a}{27}$$

(b) $$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{10+2^{\frac{1}{y}}} =$$

$$= \frac{\lim_{y\to\infty} 1}{\lim_{y\to\infty} \left(10+2^{\frac{1}{y}}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{y\to\infty} 1}{\lim_{y\to\infty} 10 + \lim_{y\to\infty} 2^{\frac{1}{y}}}$$

$$= \frac{1}{10+2^{\frac{1}{\lim_{y\to\infty} y}}}$$

$$= \frac{1}{10+2^0}$$

$$= \frac{1}{11}$$

7. (1.5 ponto)

Verifique se as funções abaixo são contínuas. Justifique:

(a) $$f(x) = \frac{x}{16-x^2}$$

(b) $$f(x) = \frac{2x^3-4x^2-5x+9}{x-3}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x}{16 - x^2}$$

a função f possui descontinuidade infinita em $x = +4$ e em $x = -4$ pois $f(+4)$ e $f(-4)$ não estão definidas e além disso:

$$x \to 4^- \to f(x) \to \infty$$

$$x \to 4^+ \to f(x) \to -\infty$$

$$x \to -4^- \to f(x) \to \infty$$

$$x \to -4^+ \to f(x) \to -\infty$$

A função f é contínua para valores de x tais que $x \neq +42$ e $x \neq -4$.

(b) $$f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 3x + 9}{x - 3}$$

A função f possui descontinuidade infinita em $x = 3$.
Mas,

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{2x^3 - 6x^2 - 3x + 9}{x - 3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(2x^2 - 3)(x - 3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} 2x^2 - 3 = 2(3^2) - 3 = 15$$

e

$$f(3) = \lim_{x \to 2} 2x^2 - 3 = 15$$

Portanto, $f(x)$ é contínua para todo $x \neq 3$.