Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática Para Computação
AD1 - 1º semestre de 2009 - Gabarito

Questões

1. (1,25 pontos)

   Determine a função inversa (e seu domínio) de

   $$f(x) = \sqrt{x}$$

   cujo domínio é (Dom $f = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0\}$).

   Solução:

   $$y = \sqrt{x}$$

   $$y^2 = x$$

   logo a inversa de $f(x)$ é

   $$f^{-1}(x) = x^2$$

   cujo domínio é (Dom $f^{-1} = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x \geq 0\}$).

2. (1,25 pontos)

   Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

(c) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

Solução:

(a)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-2}{9x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-2/x}{9+7/x} = \frac{3-0}{9+0} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

(b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+1/x^2} = -\infty$$

(c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2} \\
&= \lim_{x\to 2}(3+\sqrt{x^2+5}) \\
&= 6
\end{aligned}$$

3. (1,25 pontos)

Ache as equações das retas tangente e normal a curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ no ponto $(2; 4)$.

Solução:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Logo a inclinação da reta tangente em $(2; 4)$ é $m = f'(2) = 4$, e a equação da reta tangente é

$$y - 4 = 4(x-2) \quad \text{ou} \quad y = 4x - 4$$

A equação da reta normal em $(2;4)$ é

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2) \quad \text{ou} \quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{2}$$

4. (1,25 pontos) ____

Se f^{-1} é a inversa da função

$$f(x)=x^3$$

calcule $(f^{-1})'(1)$.

Solução:

Logo

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$$

e

$$(f^{-1}(x))'=(x^{1/3})'=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3x^{2/3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

substituindo -1

$$(f^{-1}(-1))'=\frac{1}{3\sqrt[3]{(-1)^2}}=\frac{1}{3}$$

5. (1,25 pontos) ____

Mostre onde estão (se existirem) as descontinuidades das seguintes funções.

(a)

$$f(x)=\frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

(b)

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{se} \quad x=0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0<x<1 \\ 2-x & \text{se} \quad x\geq 1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$$

Solução:

(a)

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}}$$

Tem uma descontinuidade em $x = \pm 2$. Esta descontinuidade poderia ser removida observando que

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2+5}} = \frac{(4 - x^2)}{(3 - \sqrt{x^2+5})} \frac{(3 + \sqrt{x^2+5})}{(3 + \sqrt{x^2+5})} = 3 + \sqrt{x^2+5}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x = 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

A função f é uma função polinomial em $x = 0$; no intervalo aberto $(0; 1)$, bem como, no intervalo $(1; +\infty)$, logo, contínua em cada um desses subintervalos e em $x = 0$. Para $x = 1$, podemos avaliar a continuidade pela definição:

$$\lim_{x \to 1^-} = \lim_{x \to 1^+} = f(1)?$$

Para responder a essa questão, fazemos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1^2 = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - 1 = 1 = f(1)$$

Logo, a função é contínua em todo o intervalo [0,1].

(c)

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$$

A descontinuidade nesse caso ocorre quando o denominador é zero. Dessa forma, quando $x - 1 = 0$, ou seja, quando $x = 1$.

6. (1,25 pontos)

Ache derivadas de primeira e segunda ordem das seguintes funções:

(a) $$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

(b) $$f(x) = \left[\sqrt{2x^2+1}\right]^2 - 4\left[\sqrt{2x^2+1}\right]$$

(c) $$f(x) = \left(x^2-3\right)^4$$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \\
f'(x) &= \frac{(\sqrt{4-x^2})(x^2)' - (\sqrt{4-x^2})'(x^2)}{(\sqrt{4-x^2})^2} \\
&= \frac{(\sqrt{4-x^2})(2x) - (1/2)((4-x^2)^{-1/2})(-2x)(x^2)}{(4-x^2)} \\
&= \frac{(\sqrt{4-x^2})(2x) + (4-x^2)^{-1/2}(x^3)}{(4-x^2)} \\
&= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + (4-x^2)^{-1/2}(x^3)}{(4-x^2)} \; \frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}} \\
&= \frac{(4-x^2)(2x) + (x^3)}{(4-x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{8x - 2x^3 + x^3}{(4-x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{((4-x^2)^{3/2})(8x-x^3)' - ((4-x^2)^{3/2})'(8x-x^3)}{((4-x^2)^{3/2})^2} \\
&= \frac{(4-x^2)^{3/2}(8-3x^2) - ((3/2)(4-x^2)^{1/2}(-2x))(8x-x^3)}{(4-x^2)^3} \\
&= \frac{(4-x^2)^{3/2}(8-3x^2) + (3x(4-x^2)^{1/2})(8x-x^3)}{(4-x^2)^3}
\end{aligned}$$

(b)

$$f(x) = \left[\sqrt{2x^2+1}\right]^2 - 4\left[\sqrt{2x^2+1}\right]$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\left[\sqrt{2x^2+1}\right]\left[(2x^2+1)^{1/2}\right]' - 4\left[(2x^2+1)^{1/2}\right]' \\
&= 2\left[\sqrt{2x^2+1}\right]\frac{1}{2}\left[(2x^2+1)^{-1/2}\right](4x) - 4\frac{1}{2}\left[(2x^2+1)^{-1/2}\right](4x) \\
&= \left[(2x^2+1)^{1/2}\right]\frac{1}{(2x^2+1)^{1/2}}(4x) - 2\frac{1}{(2x^2+1)^{1/2}}(4x) \\
&= \frac{(4x)(2x^2+1)^{1/2}}{(2x^2+1)^{1/2}} - \frac{(8x)}{(2x^2+1)^{1/2}} \\
&= (4x)\left[1 - \frac{2}{(2x^2+1)^{1/2}}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (4x)\left[1 - \frac{2}{(2x^2+1)^{1/2}}\right]' + (4x)'\left[1 - \frac{2}{(2x^2+1)^{1/2}}\right] \\
f''(x) &= (4x)\left[-2(2x^2+1)^{-1/2}\right]' + (4)\left[1 - \frac{2}{(2x^2+1)^{1/2}}\right] \\
f''(x) &= -(8x)\left[(2x^2+1)^{-1/2}\right]' + \left[4 - \frac{8}{(2x^2+1)^{1/2}}\right] \\
f''(x) &= -(8x)\left(-\frac{1}{2}\right)\left[(2x^2+1)^{-3/2}(4x)\right] + \left[4 - \frac{8}{(2x^2+1)^{1/2}}\right] \\
f''(x) &= \frac{(16x^2)}{(2x^2+1)^{3/2}} + 4 - \frac{8}{(2x^2+1)^{1/2}}
\end{aligned}$$

(c)

$$f(x) = \left(x^2-3\right)^4$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4\left(x^2-3\right)^3(2x) \\
&= (8x)\left(x^2-3\right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (8x)'\left[\left(x^2-3\right)^3\right] + (8x)\left[\left(x^2-3\right)^3\right]' \\
&= (8)\left(x^2-3\right)^3 + (8x)3\left[\left(x^2-3\right)^2\right](2x) \\
&= 8\left(x^2-3\right)^3 + (48x^2)\left(x^2-3\right)^2
\end{aligned}$$

7. (1,25 pontos)

Da função

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Encontre:

(a) O domínio da função;

(b) As intersecções com os eixos x e y;

(c) As assíntotas verticais e horizontais.

Solução:

1 - Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$

2 - Intersecções com os eixos x e y:

Eixo x:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$0 = \frac{1}{x^2}$$

não existe intersecção no eixo x;

Eixo y:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{0}$$

não existe intersecção no eixo y;

3 - Assíntotas verticais e horizontais (0,5 ponto):

Assíntota Vertical:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{a^2} = \pm\infty$$

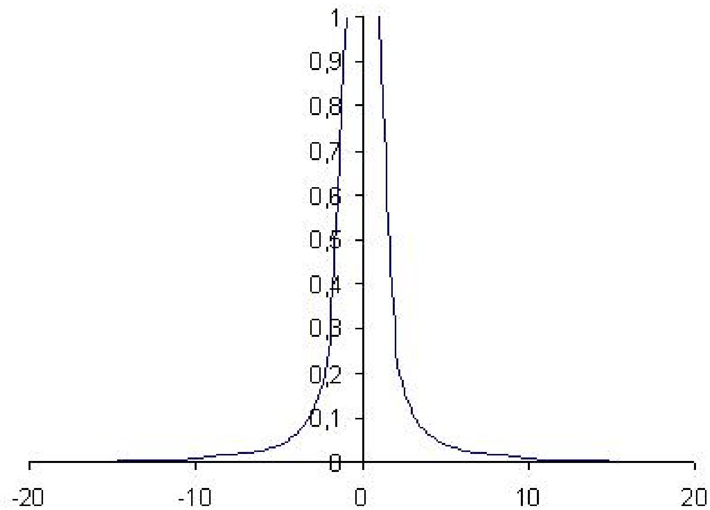
Pela definição acima, temos que a assíntota vertical é $x = 0$.

Assíntota Horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Da mesma forma, a assíntota horizontal é $y = 0$.

Gráfico:



8. (1,25 pontos)

Usando as propriedades de continuidade de funções verifique se a função abaixo é contínua no invervalo $(-1, 1)$.

$f(x) = x- \mid x \mid$

Solução:

Considerando as características da função modular, reescrevemos a função da seguinte forma:

$$f(x) = \begin{cases} x - x = 0; x > 0 \\ \\ 0; x = 0 \\ \\ x + x = 2x; x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

Podemos notar que, de forma análoga à função modular, o único ponto de descontinuidade possível é $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x- \mid x \mid= \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x- \mid x \mid= \lim_{x \to 0^-} 2x = 0$$

Concluimos por meio de $\lim_{x \to 0} = 0 = f(0)$ que, a função $f(x)$ é contínua para qualquer valor de x. Em particular para qualquer valor de x em $(-1; 1)$.