A Derivada (continuação):

- Regra da cadeia, derivada de funções compostas;
- Derivadas de ordem superior.

Análise de Funções:

- Teorema do valor médio;
- Funções crescentes e decrescentes;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Pontos de máximo e mínimo.

A Derivada (continuação)

Teorema 3.6 – Regra da Cadeia:

Sejam f e g duas funções reais de um variável real.

Se g é diferenciável no ponto a e se f for diferenciável no ponto $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ é diferenciável no ponto a. Além disso,

$$\left(f \circ g\right)'(a) = f'\left(g(a)\right)g'(a).$$

A regra da cadeia na notação de *Leibniz*:

denotando-se $y := f\left(u\right)$ sendo $u := g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exemplo 3.6 $D_x\left(\sqrt{x^2+1}\right)=?$

Vamos definir: $y := f(u) := \sqrt{u}$ e $u := g(x) = x^2+1$. Logo,

$$D_x\left(\sqrt{x^2+1}\right) = D_u\left(\sqrt{u}\right) D_x\left(x^2+1\right) \leftarrow \text{regra da cadeia.}$$

Mas

1) $D_u\left(\sqrt{u}\right) = D_u\left(u^{1/2}\right) = \dfrac{1}{2}u^{\frac{1}{2}-1} \leftarrow$ regra da potência

$$= \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

2) $D_x\left(x^2+1\right) = D_x\left(x^2\right) + D_x(1) \leftarrow$ regra da soma

$$= 2x + (0) \leftarrow \text{regras da potência e da constante.}$$

Logo:

$$D_x\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right)2x$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \quad \blacksquare$$

Exemplo 3.7

$$D_x\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\right]=?$$

Vamos definir:

$$z:=h(y):=y^3,\ y:=f(u):=\sqrt{u}\ \text{ e }\ u:=g(x)=x^2+1,$$

e portanto, $z=(h\circ f\circ g)(x)=\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3$. Por outro lado,

$$(h\circ f\circ g)'(x)=(h\circ f)'(g(x))g'(x)\leftarrow \text{regra da cadeia}$$

$$=h'(f(g(x)))f'(g(x))g'(x)\ \leftarrow \text{regra da cadeia},$$

ou $\quad D_x\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\right]=D_y\left(y^3\right)D_u\left(\sqrt{u}\right)D_x\left(x^2+1\right).$

Mas

1) $D_u\left(\sqrt{u}\right)D_x\left(x^2+1\right)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (ver o Exemplo 3.6).

2) $D_y\left(y^3\right)=3y^2\leftarrow$ regra da potência

$$=3\left(\sqrt{u}\right)^2=3\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2.$$

Logo:

$$D_x\left[\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3\right]=3\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=3x\sqrt{x^2+1}.\quad \blacksquare$$

Derivadas de Ordem Superior

Seja f uma função real de uma variável real e suponha que f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b). Neste caso, em algumas situações, queremos saber se f' é diferenciável no intervalo (a,b). Se o for, então sua derivada, $(f')'$, é denotada, por simplicidade, como f'' (lê-se f *duas linhas*).

$f'' \Rightarrow$ *derivada de segunda ordem de f* ou *derivada segunda de f.*

Exemplo 3.8

$f(x) := x^5 + x^3 - 1$ para todo $x \in (0,9)$,

$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 3x^2$ para todo $x \in (0,9)$,

$\Rightarrow f''(x) = 20x^3 + 6x$ para todo $x \in (0,9)$

} regra da potência e da constante.

■

Se f'' for diferenciável no intervalo (a,b) podemos calcular a *derivada de terceira ordem de f*, ou *derivada terceira de f*, $f''':=(f'')'$; se f''' for diferenciável no intervalo (a,b) podemos calcular a *derivada de quarta ordem de f*, ou *derivada quarta de f*, $f'''':=(f''')'$, e assim por diante.

Exemplo 3.9

$$f(x):=x^5+x^3-1 \text{ para todo } x\in(0,9),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\Rightarrow f'(x)=5x^4+3x^2 \text{ para todo } x\in(0,9),\\
&\Rightarrow f''(x)=20x^3+6x \text{ para todo } x\in(0,9),\\
&\Rightarrow f'''(x)=60x^2+6 \text{ para todo } x\in(0,9),\\
&\Rightarrow f''''(x)=120x \text{ para todo } x\in(0,9),\\
&\Rightarrow f'''''(x)=120 \text{ para todo } x\in(0,9),
\end{aligned}\right\}\text{regra da potência e da constante}$$

$$\Rightarrow f''''''(x)=0 \text{ para todo } x\in(0,9), \quad \text{regra da constante.} \quad \blacksquare$$

Notação:

$y = f(x)$	Lagrange	Newton	Leibniz
1. derivada primeira	$f'(x)$	$\dot{y}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[f(x)]$
2. derivada segunda	$f''(x)$	$\ddot{y}$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
3. derivada terceira	$f'''(x)$	$\dddot{y}$	$\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n. derivada n-ésima	$f^{(n)}(x)$	-	$\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d^n}{dx^n}[f(x)]$

Análise de Funções

Teorema 4.1 – Teorema do Valor Médio:

Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b) e é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existe pelo menos um número w no intervalo (a,b) tal que:

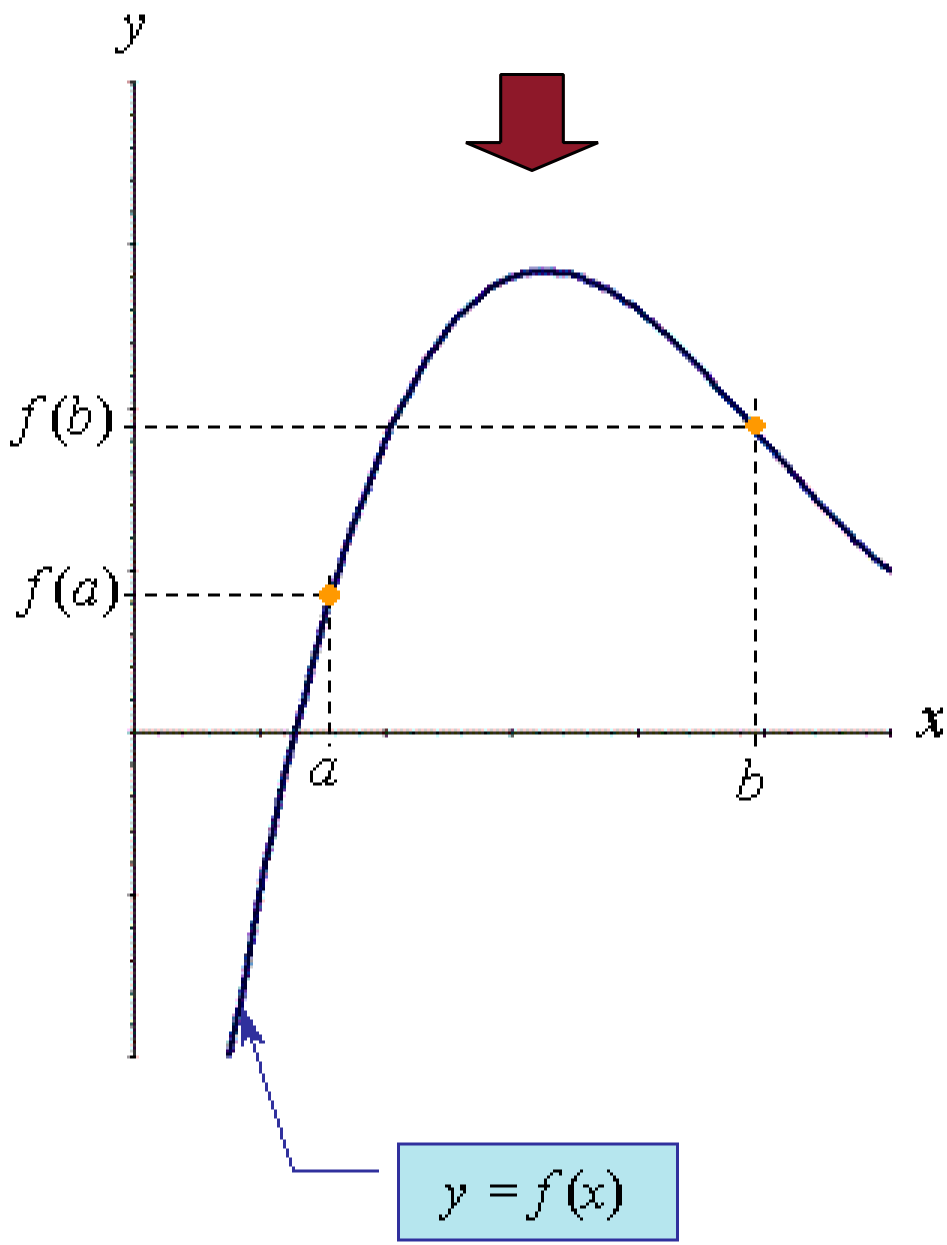
$$f'(w) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema 4.1 – Teorema do Valor Médio:

Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b) e é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existe pelo menos um número w no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(w) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

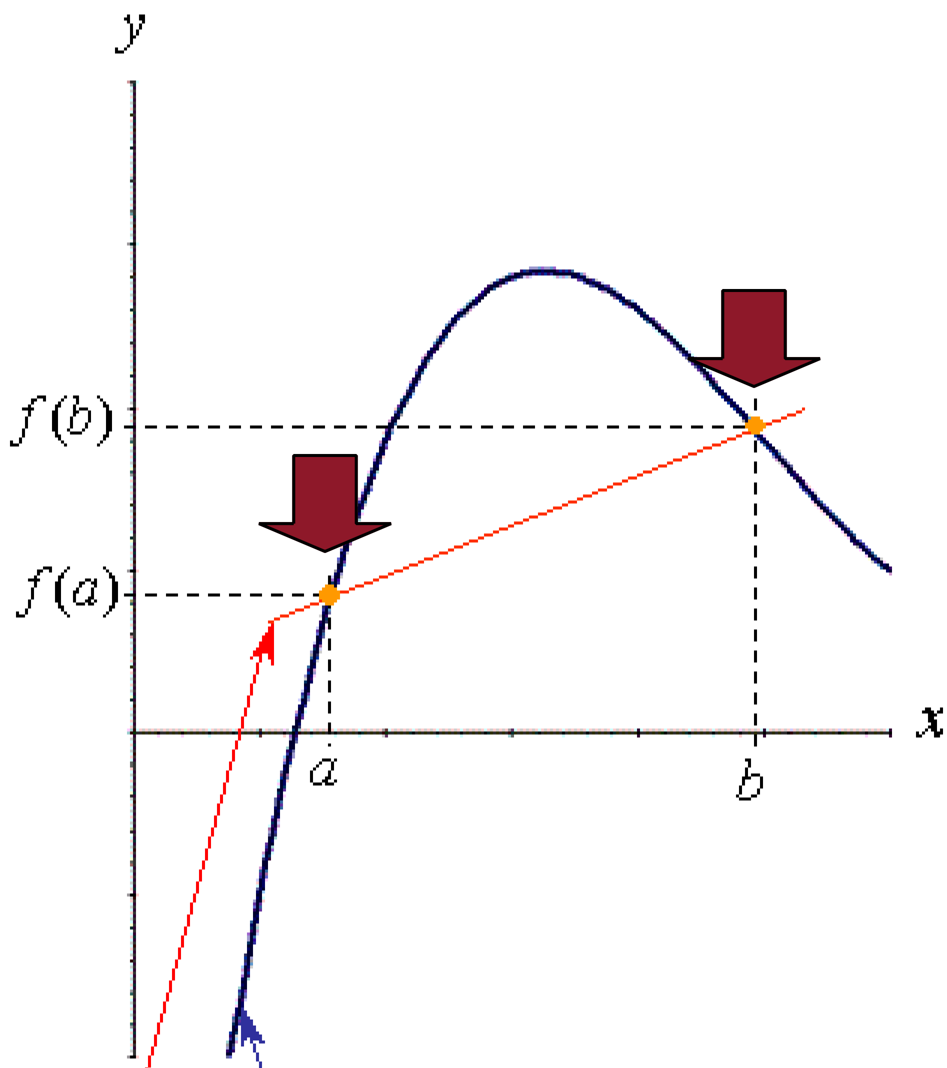


Teorema 4.1 – Teorema do Valor Médio:

Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b) e é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existe pelo menos um número w no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(w) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$



Reta secante ao gráfico da função nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

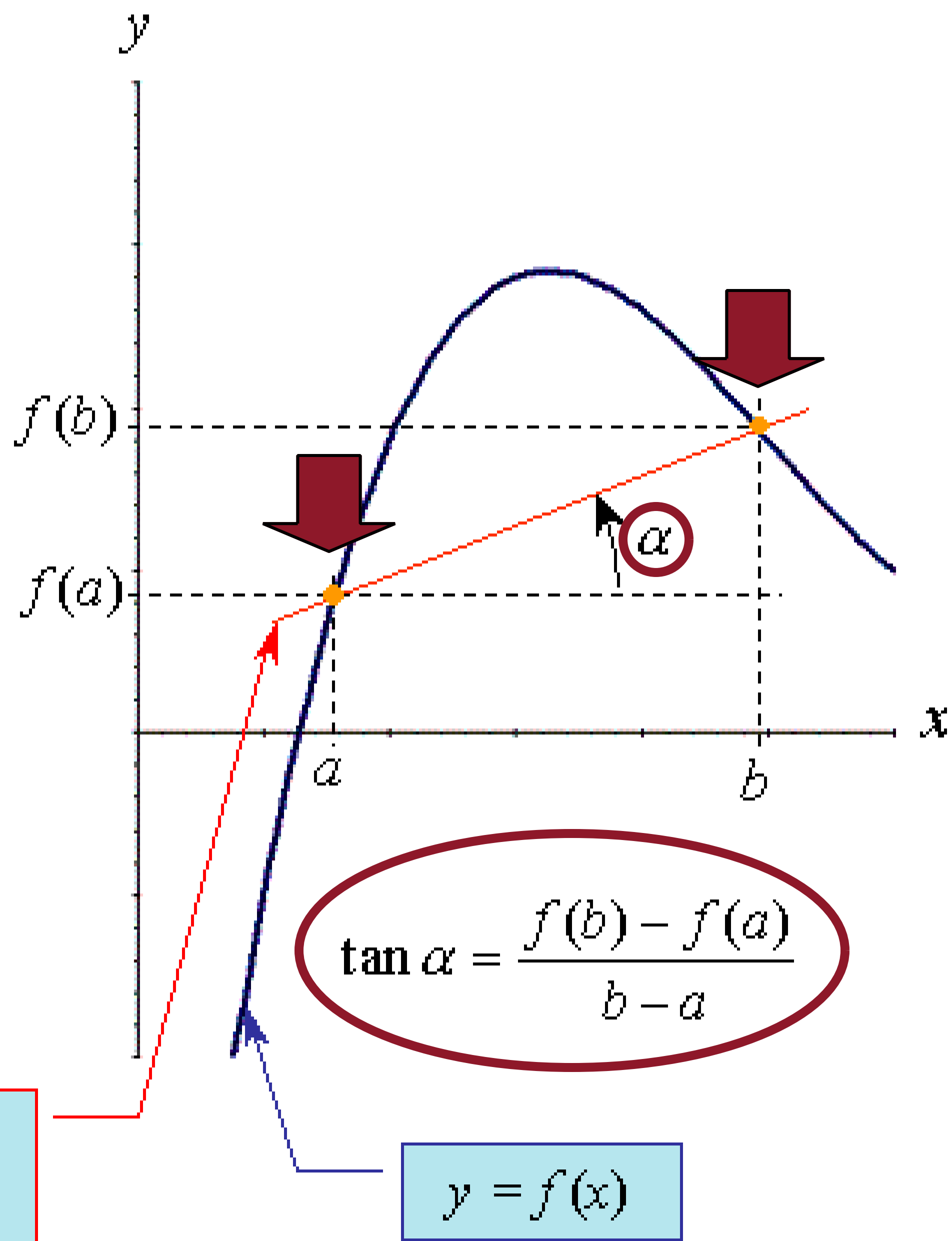
$y = f(x)$

Teorema 4.1 – Teorema do Valor Médio:

Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b) e é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existe pelo menos um número w no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(w) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



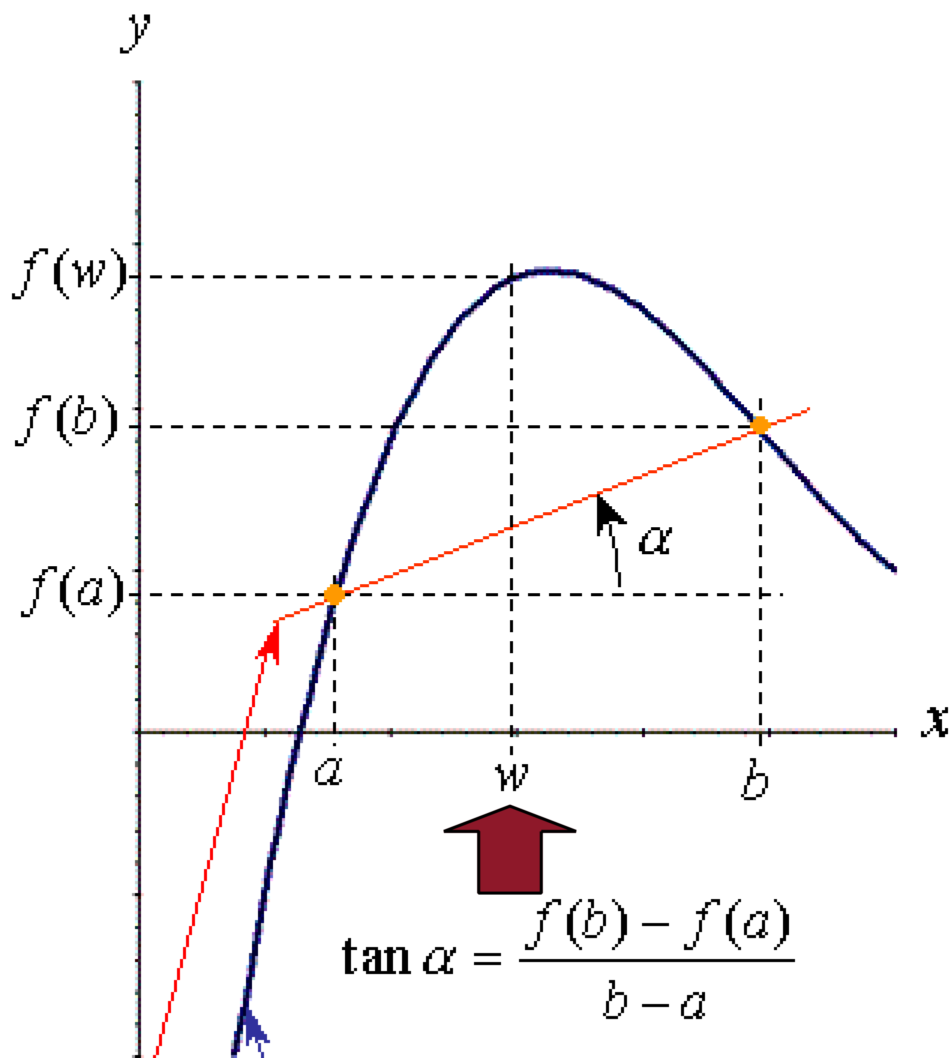
Reta **secante** ao gráfico da função nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Teorema 4.1 – Teorema do Valor Médio:

Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b) e é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existe pelo menos um número w no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(w) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



$$\tan\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Reta **secante** ao gráfico da função nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

$y = f(x)$

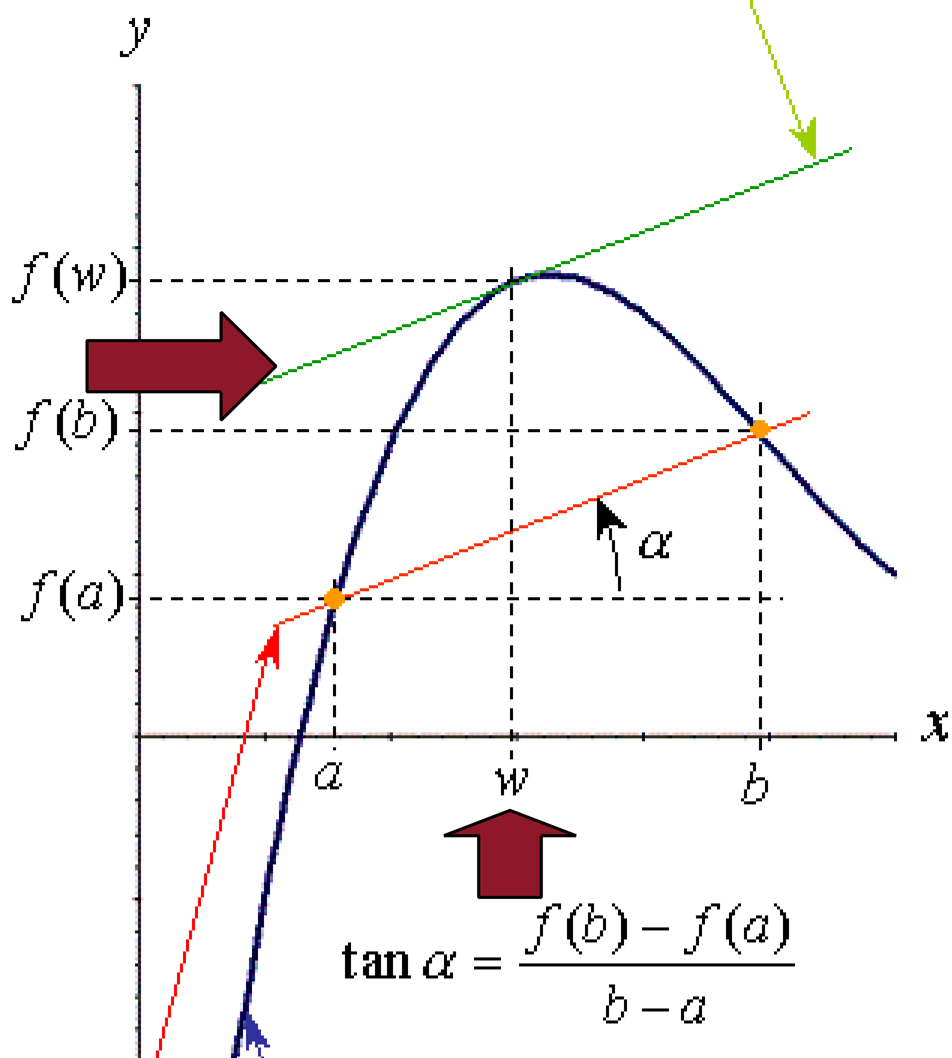
Reta tangente ao gráfico da função no ponto $(w, f(w))$.

Teorema 4.1 – Teorema do Valor Médio:

Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b) e é contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então existe pelo menos um número w no intervalo (a,b) tal que:

$$f'(w) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Reta secante ao gráfico da função nos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

$y = f(x)$

Um caso especial do Teorema do Valor Médio:

Teorema 4.2 – Teorema de Rolle:

Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um intervalo aberto (a,b) e é contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um número w no intervalo (a,b) tal que $f'(w) = 0$.

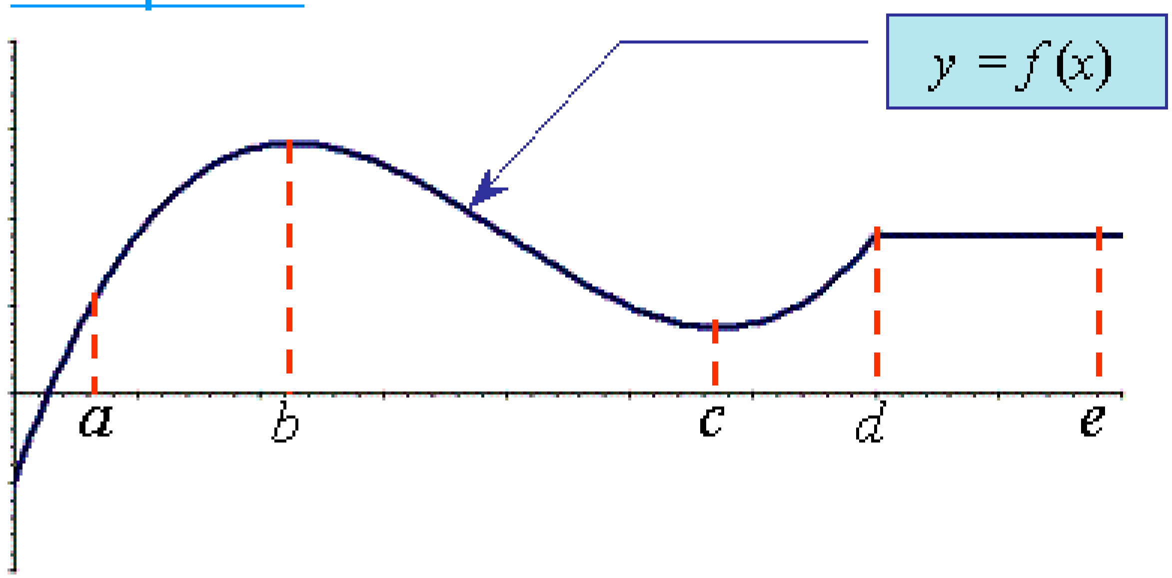
Definição 4.1: Seja f uma função real de uma variável real e seja I um intervalo (aberto ou fechado) contido no domínio de f.

1) A função f é denominada *crescente no intervalo I* se, para todos os números x_1 e x_2 de I, $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$.

2) A função f é denominada *decrescente no intervalo I* se, para todos os números x_1 e x_2 de I, $f(x_1) > f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$.

3) A função f é denominada *constante no intervalo I* se, para todos os números x_1 e x_2 de I, $f(x_1) = f(x_2)$.

Exemplo 4.1



$[a,b]$ – f é crescente

$[b,c]$ – f é decrescente

$[c,d]$ – f é crescente

$[d,e]$ – f é constante ■

Teorema 4.3: Seja f uma função real de uma variável real, diferenciável no intervalo aberto (a,b) e contínua no intervalo fechado $[a,b]$.

1) Se $f'(x) > 0$ para todo número x em (a,b), então f é crescente em $[a,b]$.

2) Se $f'(x) < 0$ para todo número x em (a,b), então f é decrescente em $[a,b]$.

3) Se $f'(x) = 0$ para todo número x em (a,b), então f é constante em $[a,b]$.

Exemplo 4.2

Vamos determinar os intervalos nos quais a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ é monótona (isto é, ou crescente ou decrescente).

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$$

e

1) $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$,

2) $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$,

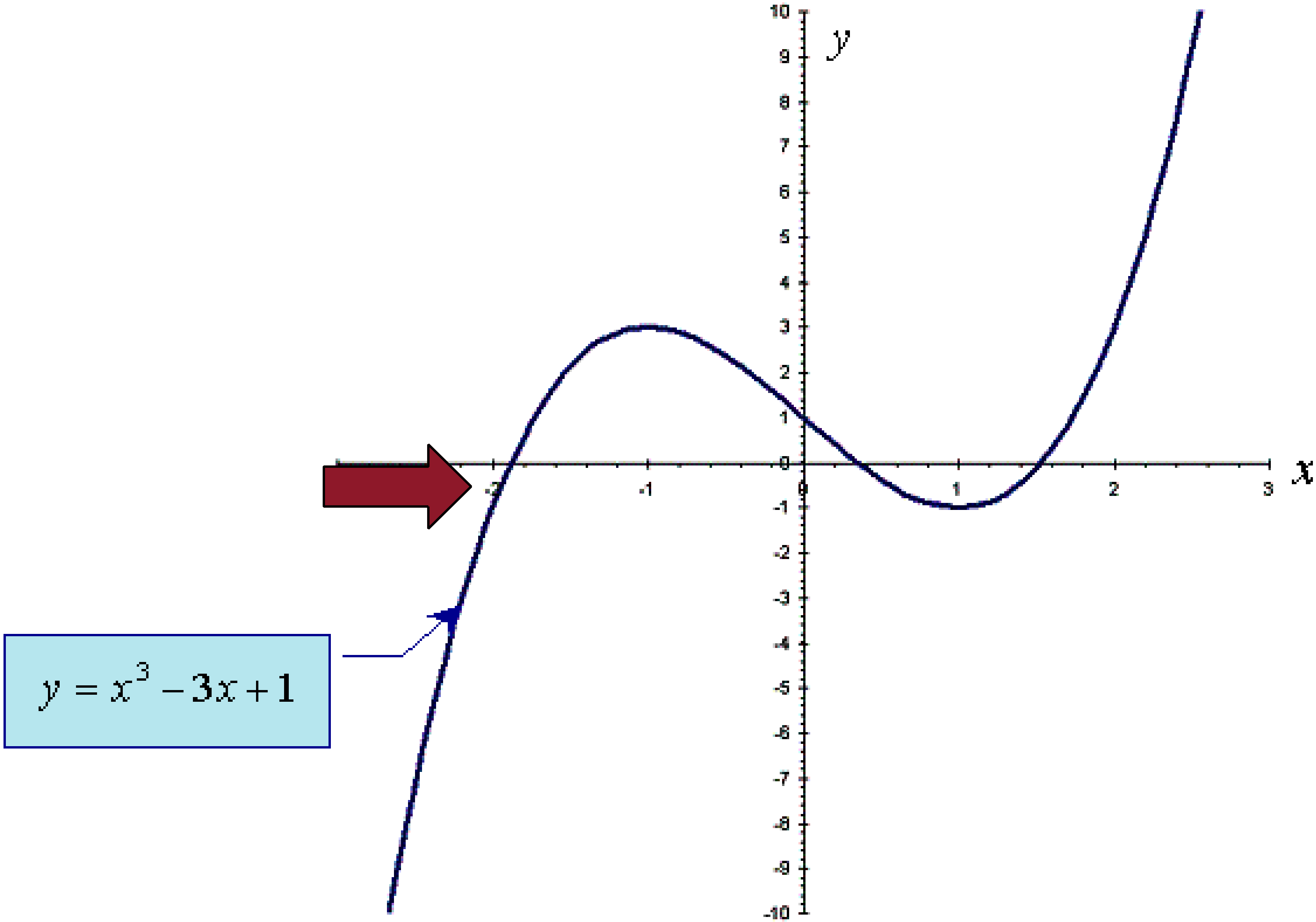
3) $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$.

Portanto

1) se $x \in (-\infty, -1]$ então $f'(x) > 0 \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Teorema 4.3}} f$ é crescente,

2) se $x \in [-1, 1]$ então $f'(x) < 0 \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Teorema 4.3}} f$ é decrescente,

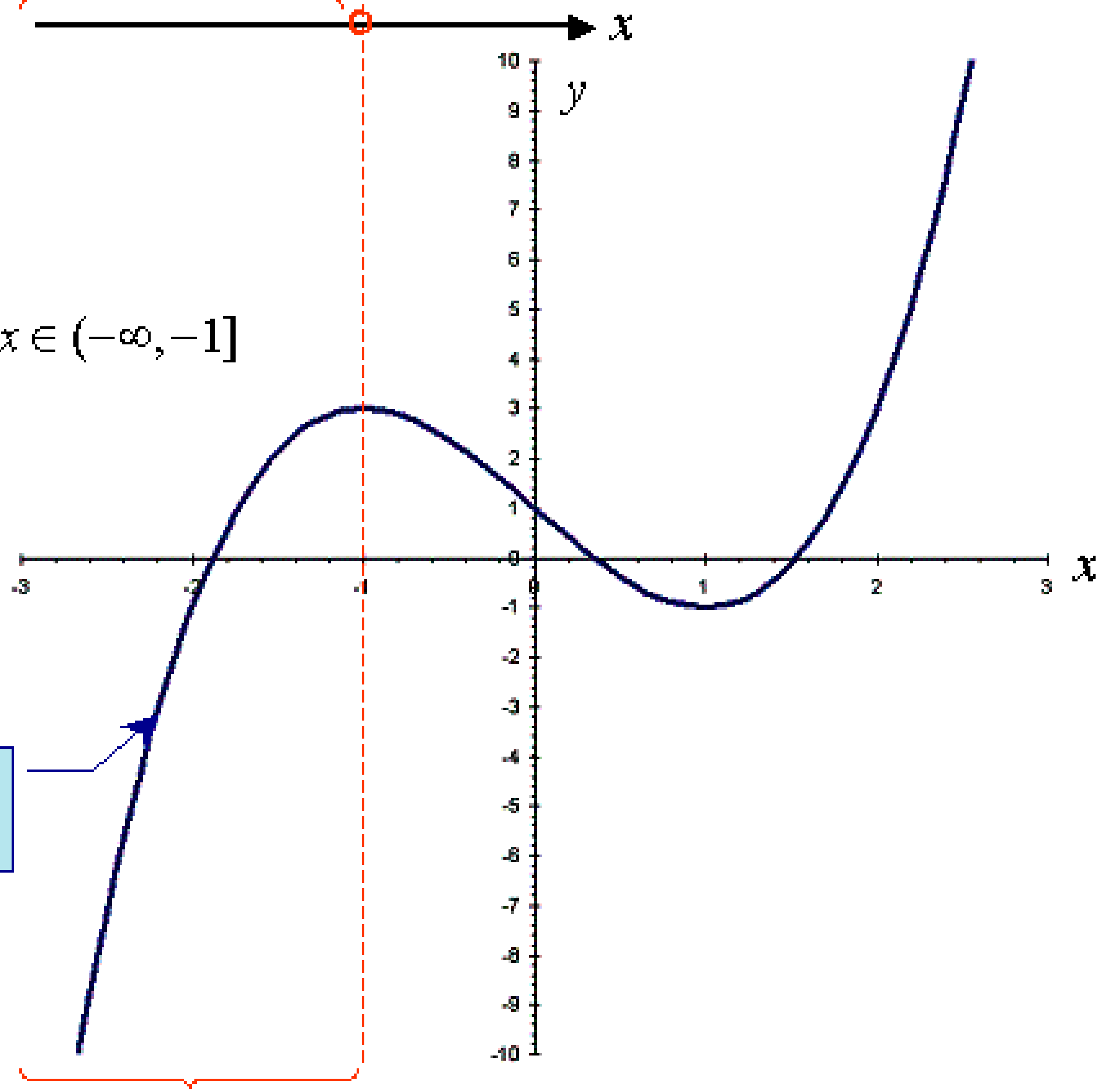
3) se $x \in [1, +\infty)$ então $f'(x) > 0 \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Teorema 4.3}} f$ é crescente.



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
y
-2
-1
0
1
2
3
x
$y = x^3 - 3x + 1$

zero

$f'(x)$ é → positiva

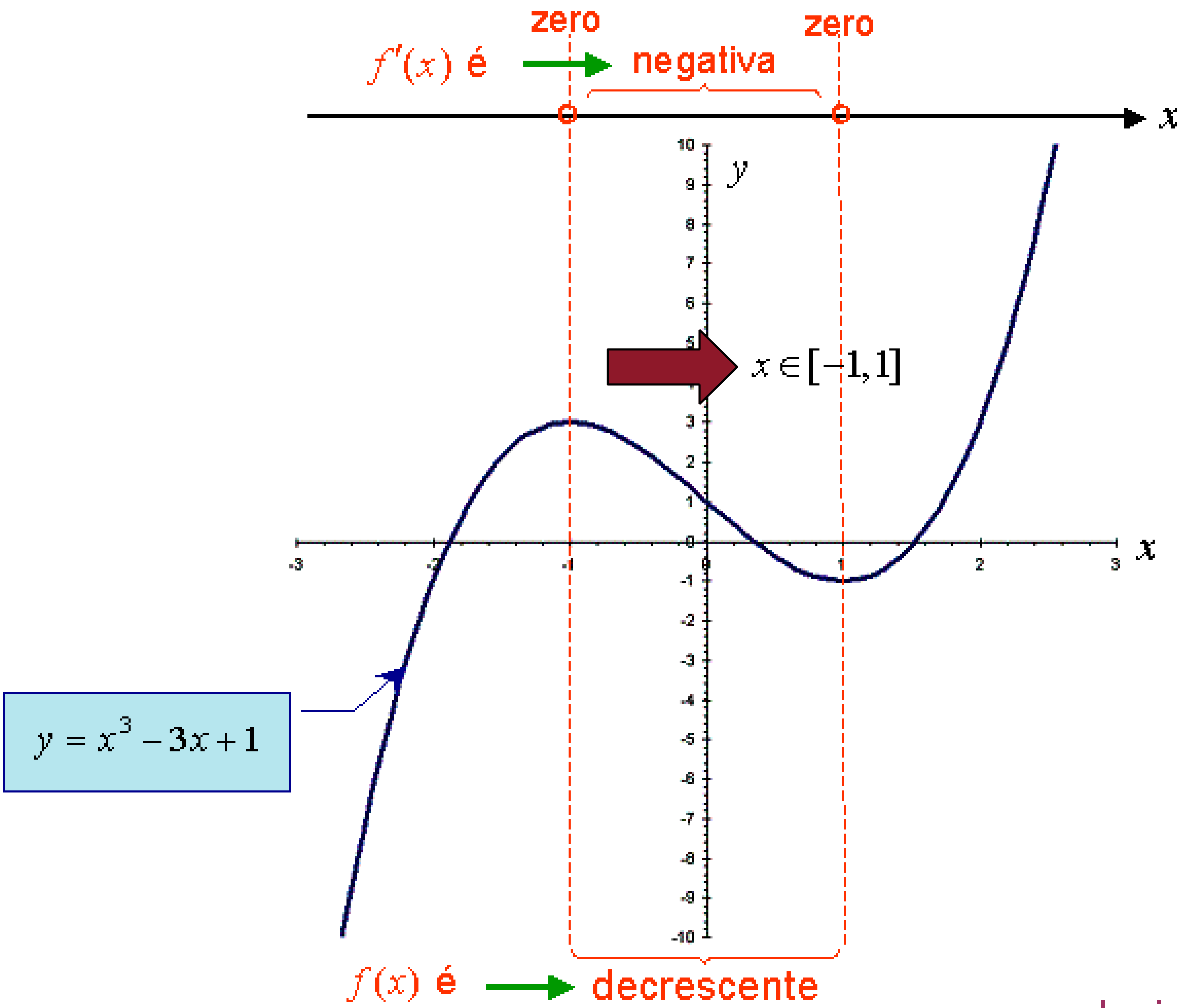


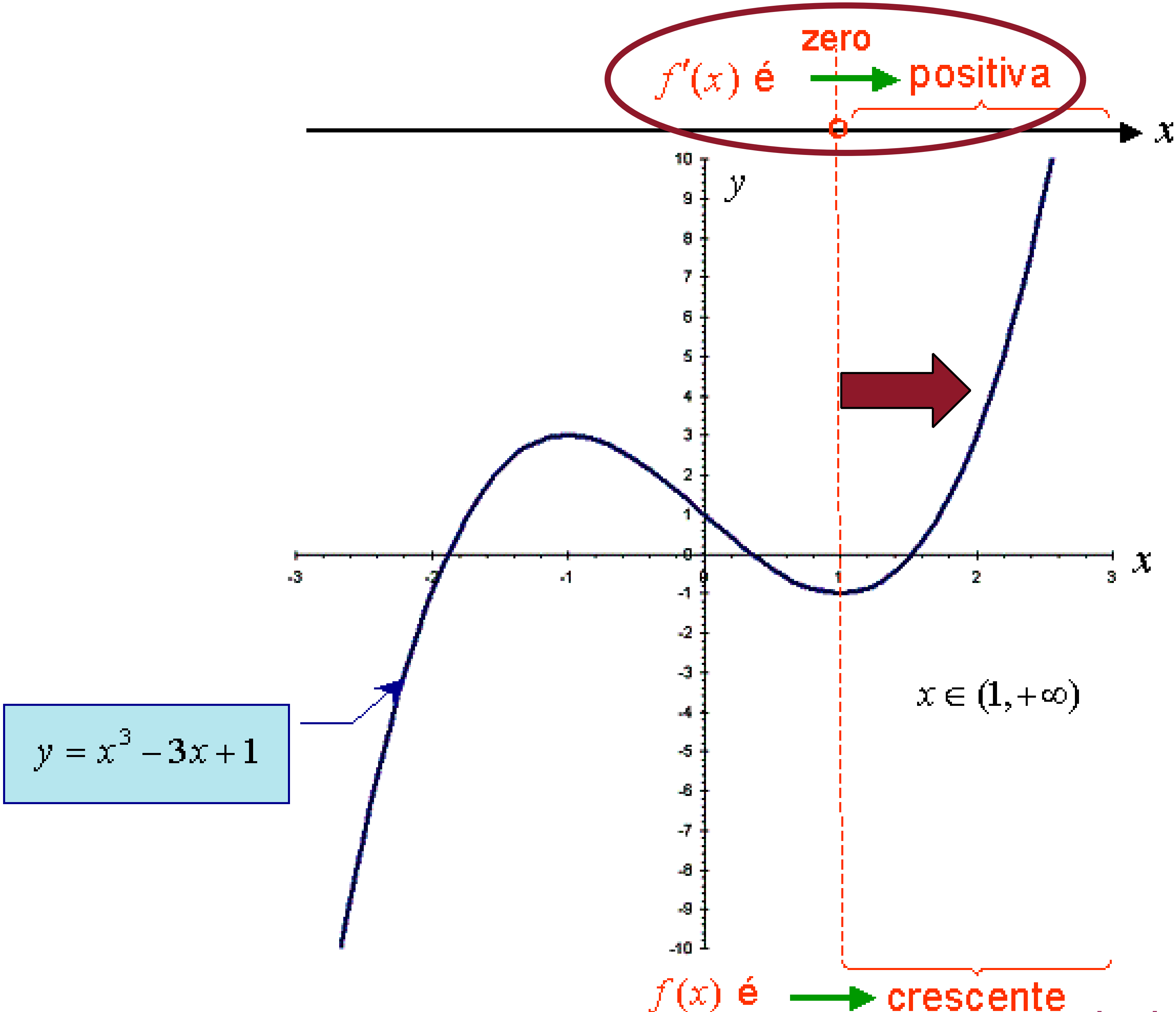
$x \in (-\infty, -1]$

$$y = x^3 - 3x + 1$$

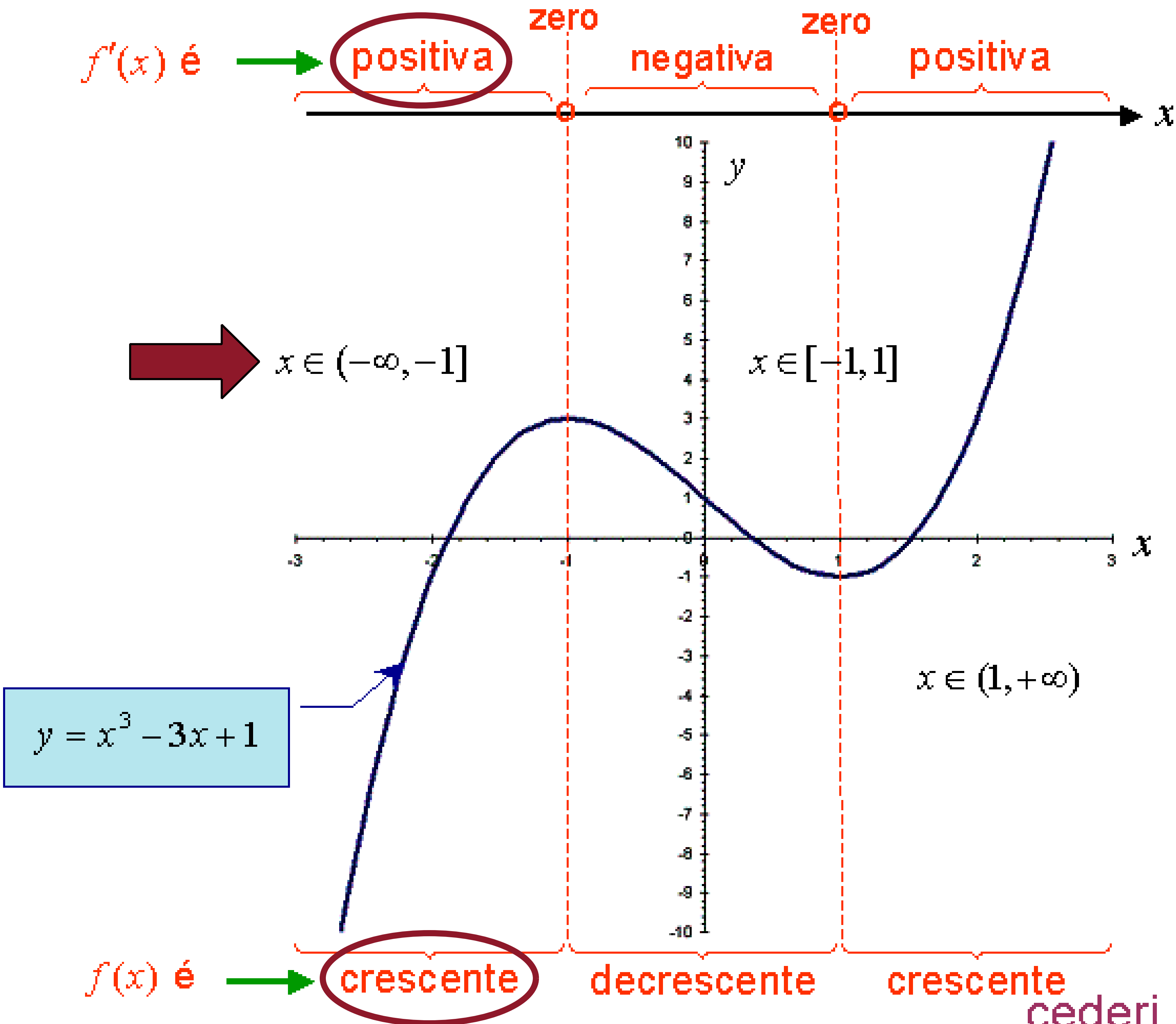
$f(x)$ é → crescente

cederj


zero
zero
$f'(x)$ é
negativa
x
y
$x \in [-1,1]$
$y = x^3 - 3x + 1$
$f(x)$ é
decrescente



zero
f'(x) é
positiva
x
y
y = x^3 − 3x + 1
x ∈ (1,+∞)
f(x) é
crescente

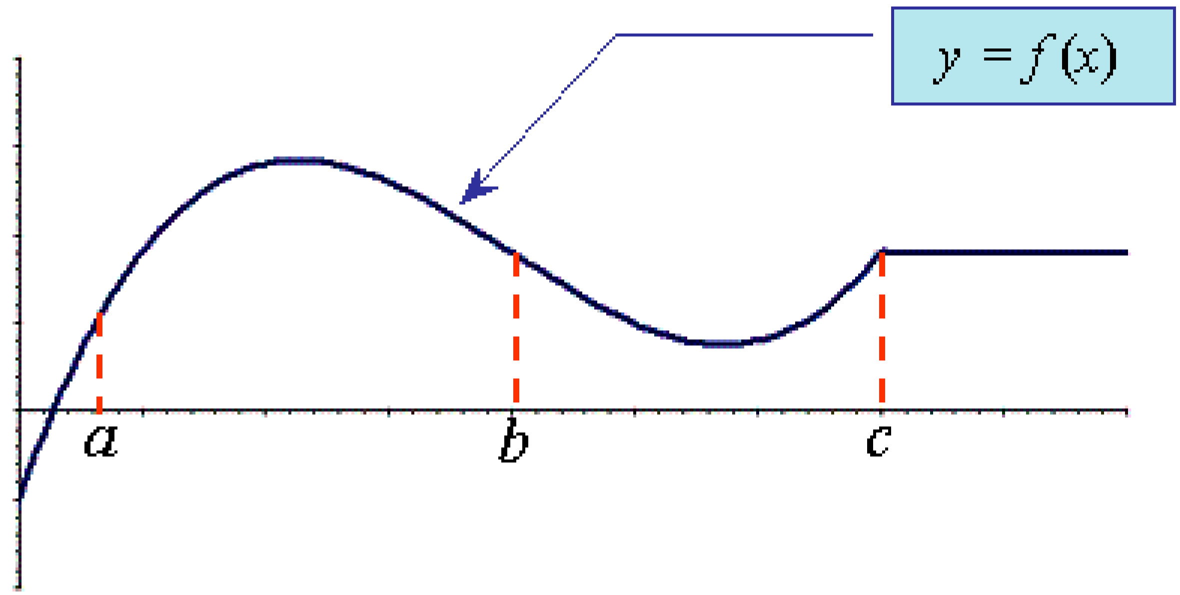


$f'(x)$ é
positiva
zero
negativa
zero
positiva
x
y
$x \in (-\infty, -1]$
$x \in [-1, 1]$
$x \in (1, +\infty)$
$y = x^3 - 3x + 1$
$f(x)$ é
crescente
decrescente
crescente

Definição 4.2: Seja f uma função real de uma variável real. Se f é diferenciável em um intervalo aberto I, então f é classificada em:

1) *côncava para cima* quando f' é crescente no intervalo I,

2) *côncava para baixo* quando f' é decrescente no intervalo I.



$[a,b]$ – f é côncava para baixo

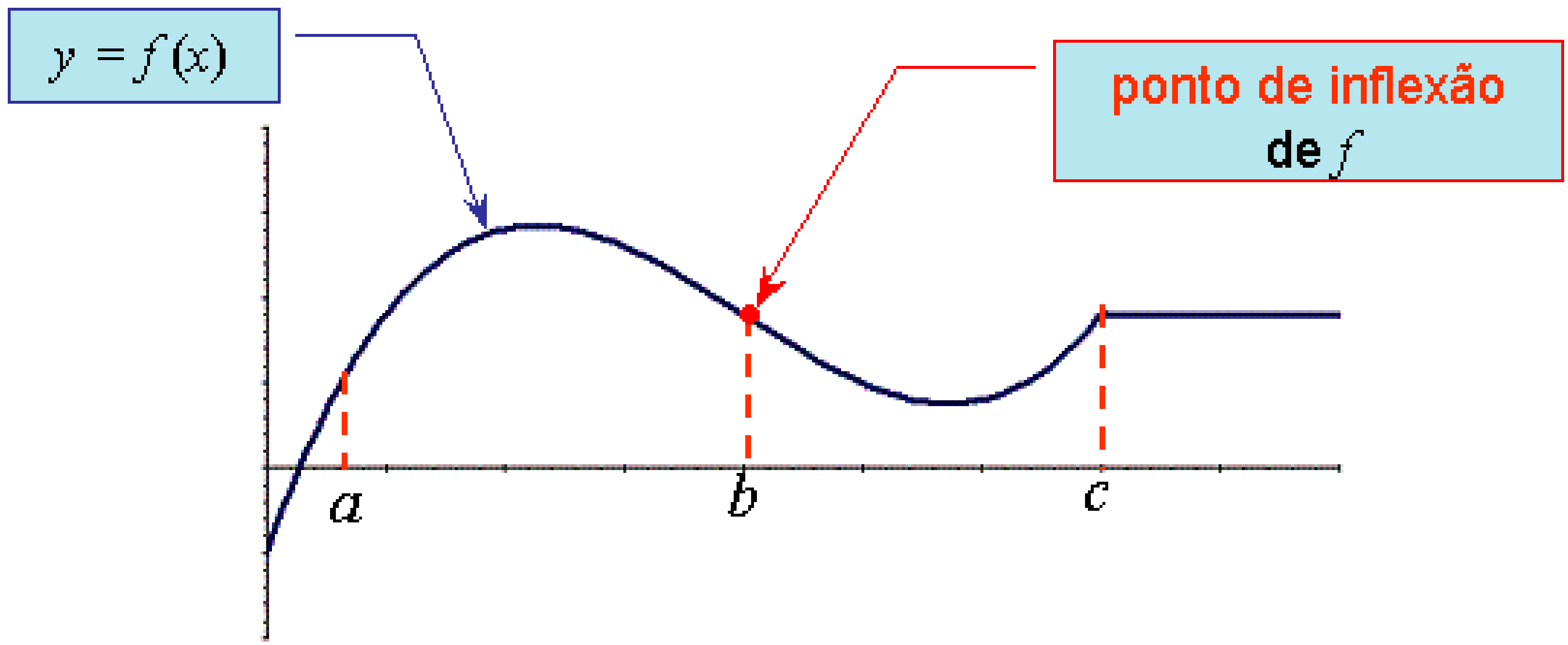
$[b,c]$ – f é côncava para cima

Teorema 4.3: Seja f uma função real de uma variável real, duas vezes diferenciável no intervalo aberto (a,b).

1) Se $f''(x) > 0$ para todo número x em (a,b), então f é côncava para cima em (a,b).

2) Se $f''\ x) < 0$ para todo número x em (a,b), então f é côncava para baixo em (a,b).

Definição 4.3: Seja f uma função real de uma variável real. Se f é uma função contínua em um intervalo aberto que contém o ponto a e se f muda de concavidade neste ponto, dizemos, então, que f tem um *ponto de inflexão* em a e chamamos o ponto $(a, f(a))$ do gráfico de f um *ponto de inflexão* de f.



$[a,b]$ – f é côncava para baixo

$[b,c]$ – f é côncava para cima

Exemplo 4.4

Vamos determinar os intervalos nos quais a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ é côncava para cima e para baixo.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right) \Rightarrow f''(x) = 6x$$

e

1) $6x > 0 \Leftrightarrow x > 0,$

2) $6x < 0 \Leftrightarrow x < 0,$

3) $6x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

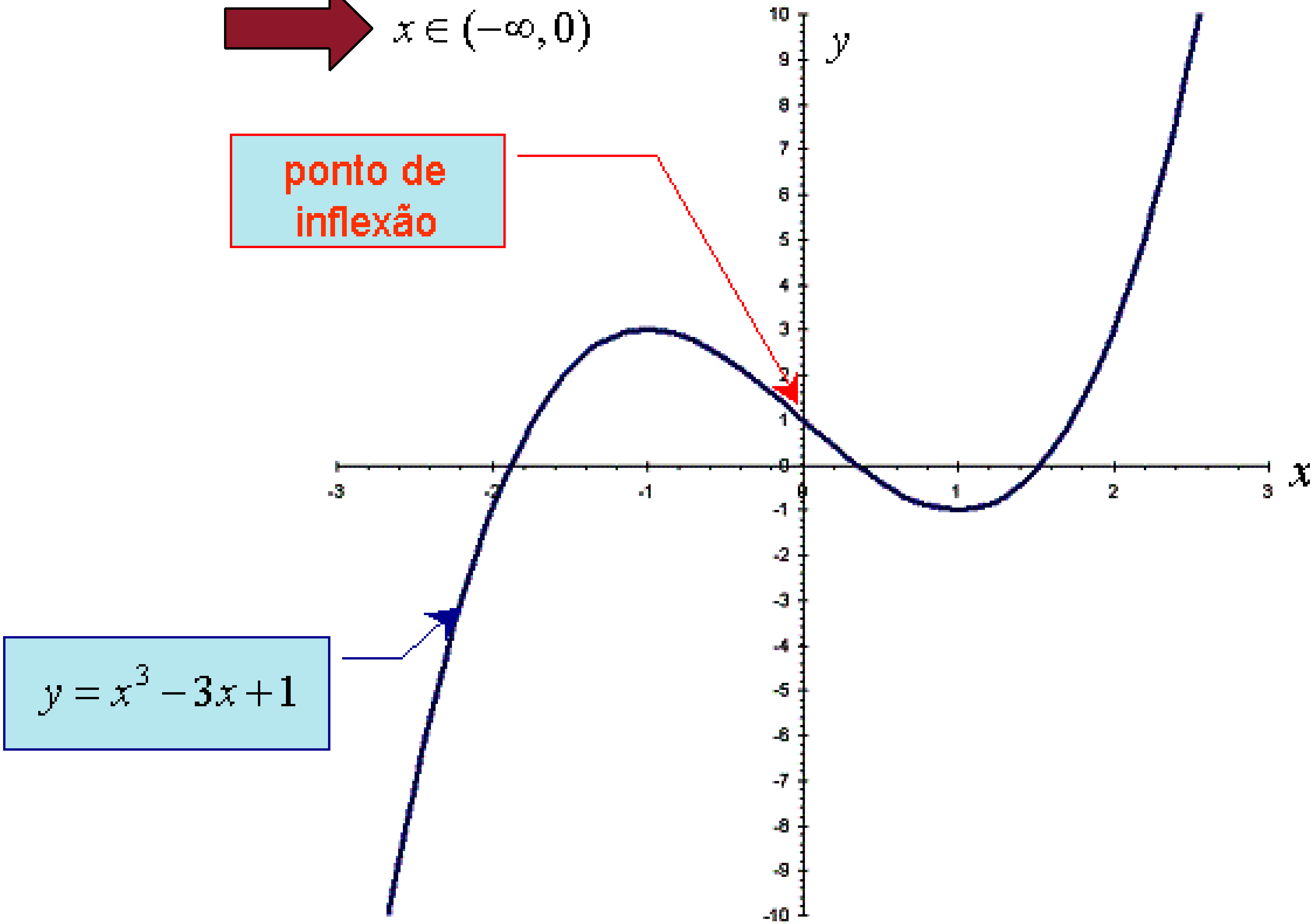
Portanto

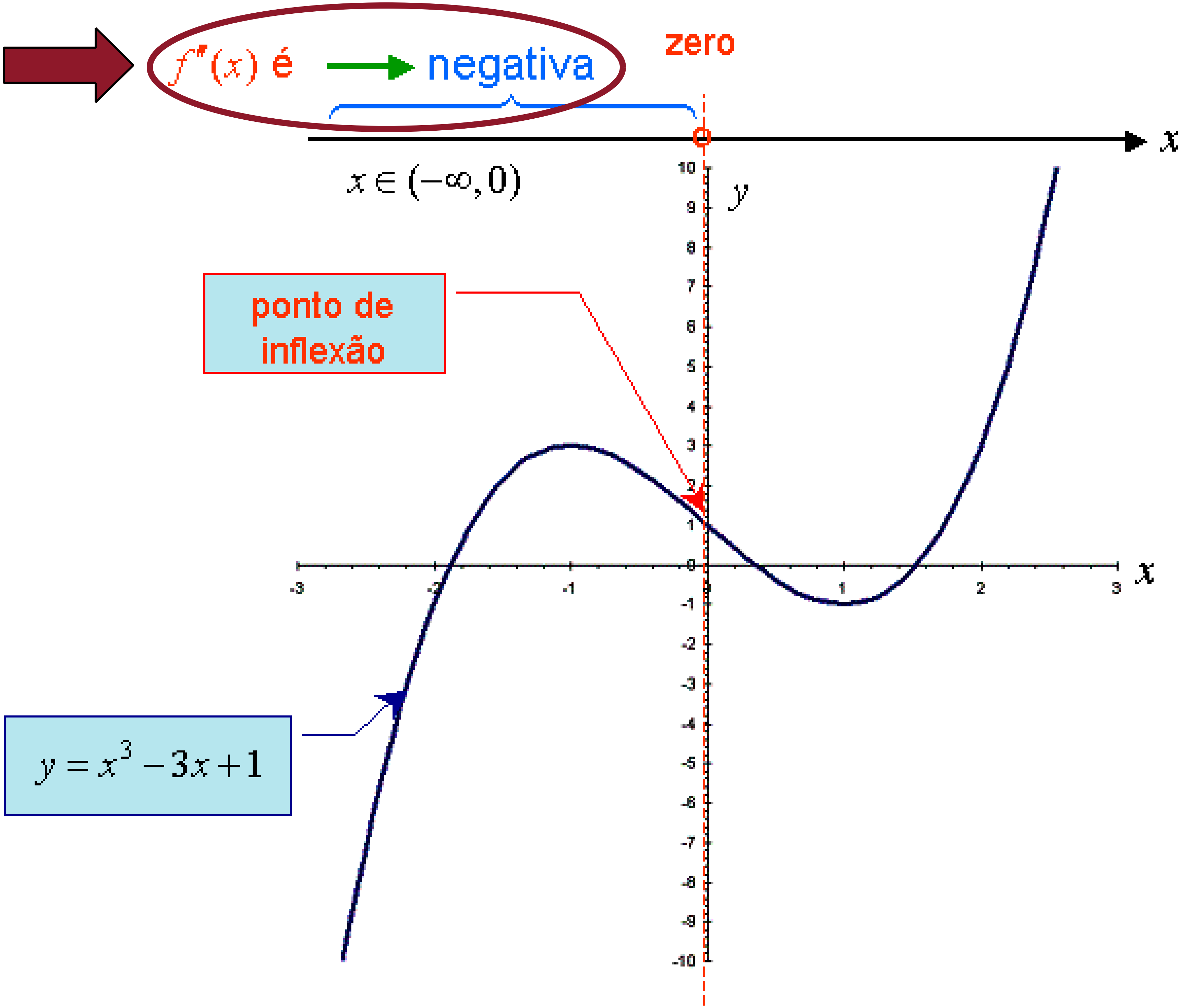
1) se $x \in (-\infty, 0)$ então $f''(x) < 0 \overset{\text{Teorema 4.4}}{\Rightarrow} f$ é côncava para baixo,

2) se $x \in (0, +\infty)$ então $f''(x) > 0 \overset{\text{Teorema 4.4}}{\Rightarrow} f$ é côncava para cima,

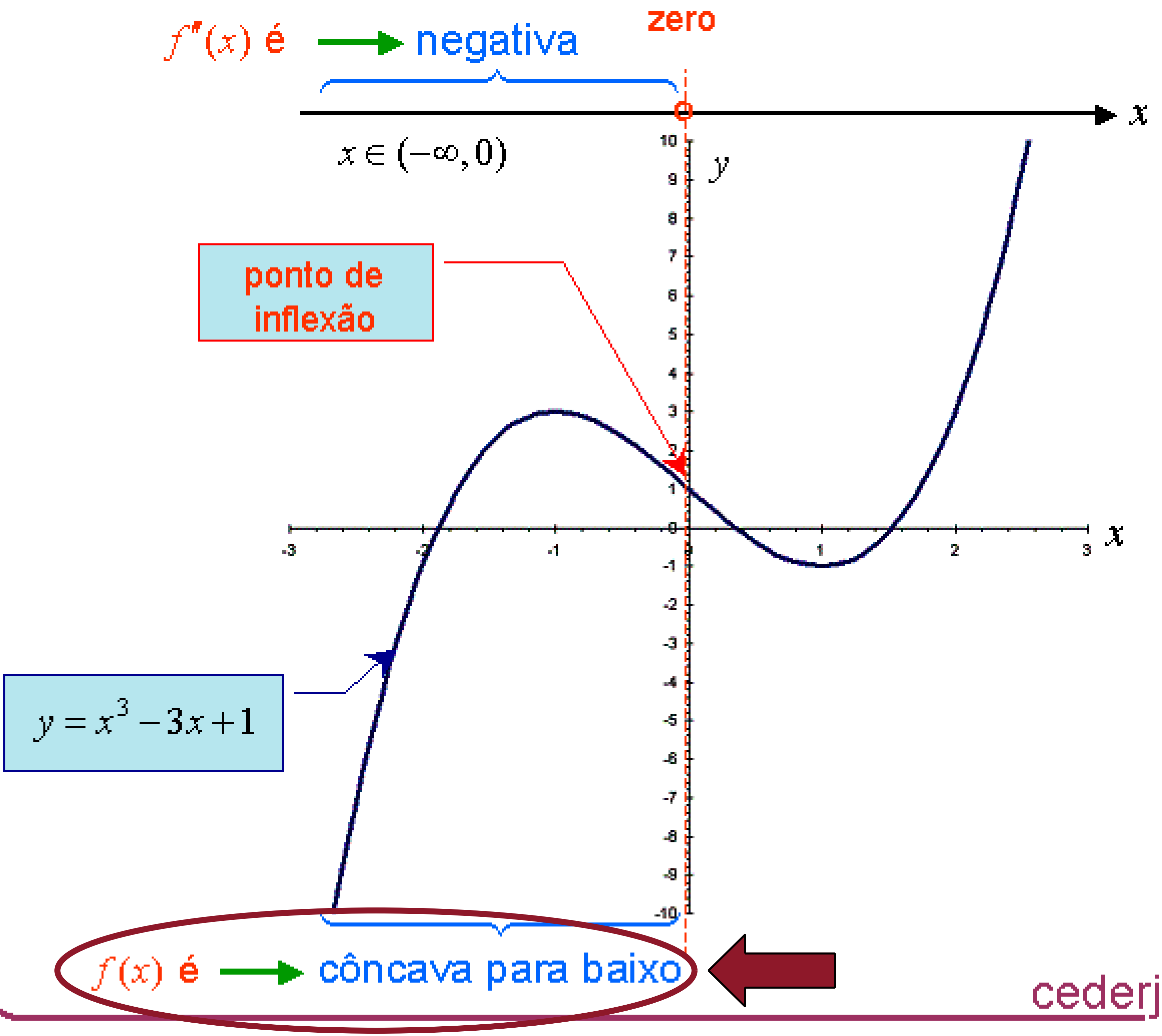
e f tem um ponto de inflexão em $x = 0.$

$x \in (-\infty, 0)$

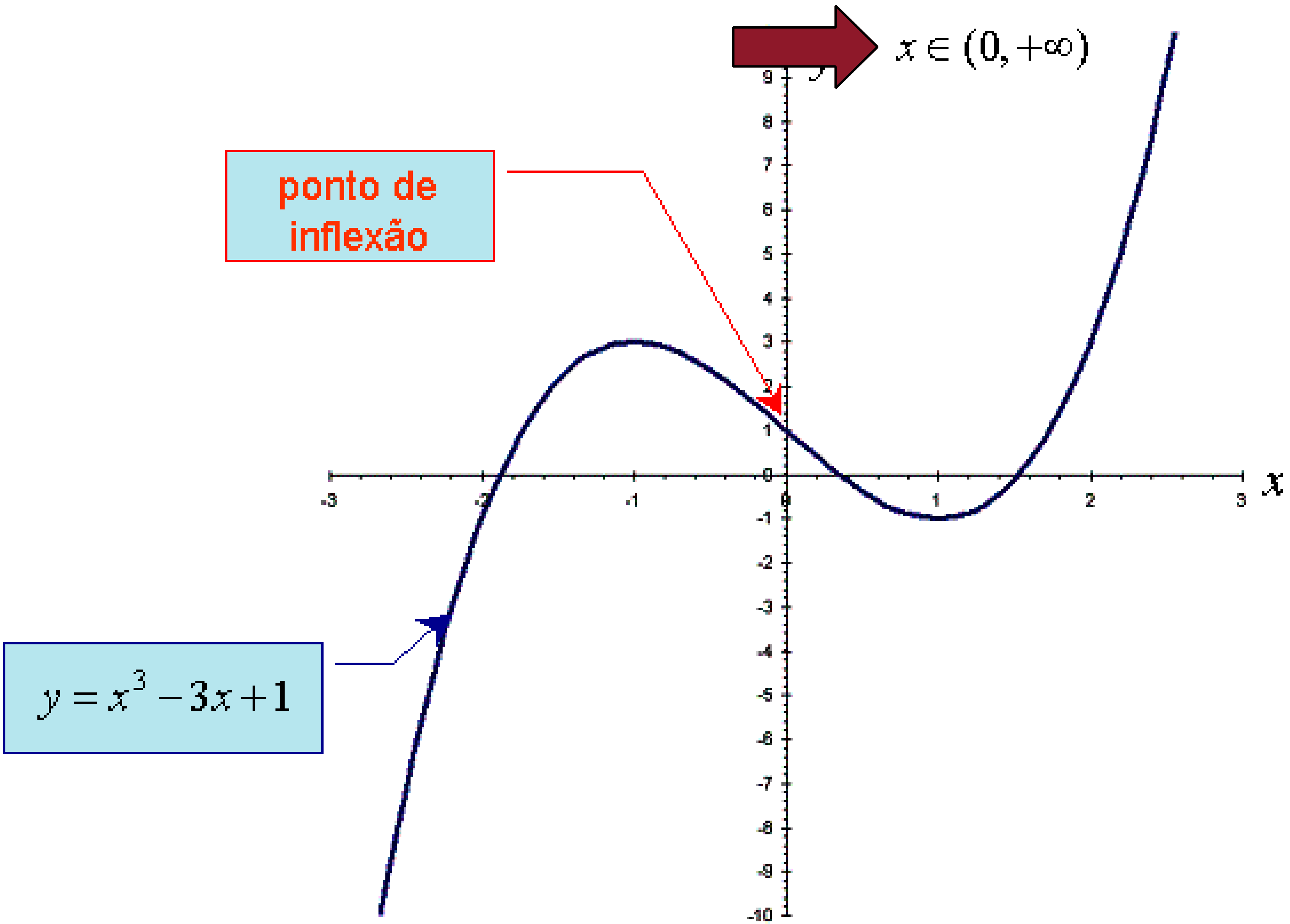

ponto de inflexão
$y = x^3 - 3x + 1$
y
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3



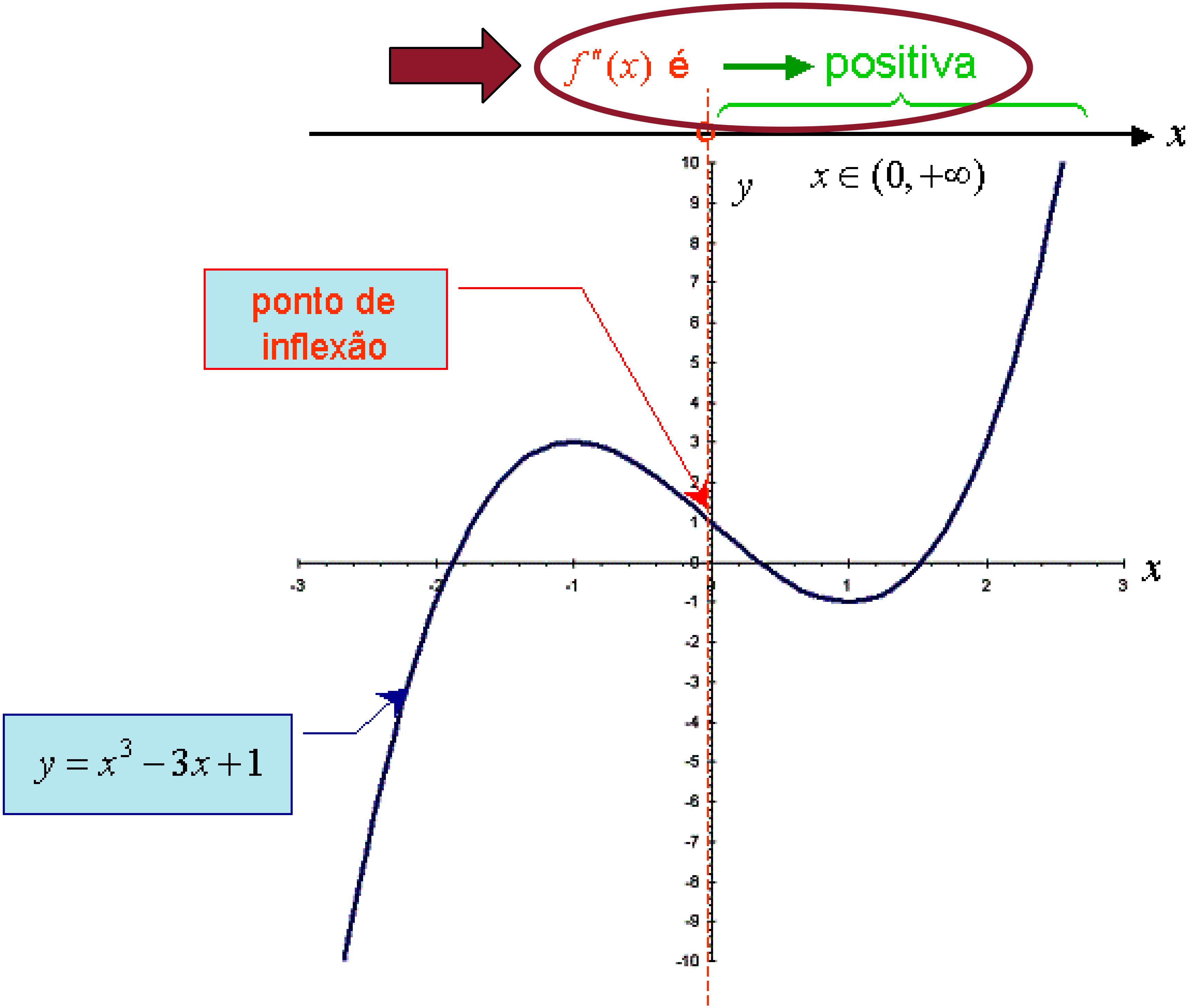
$f''(x)$ é negativa
zero
x
$x \in (-\infty, 0)$
y
ponto de inflexão
$y = x^3 - 3x + 1$

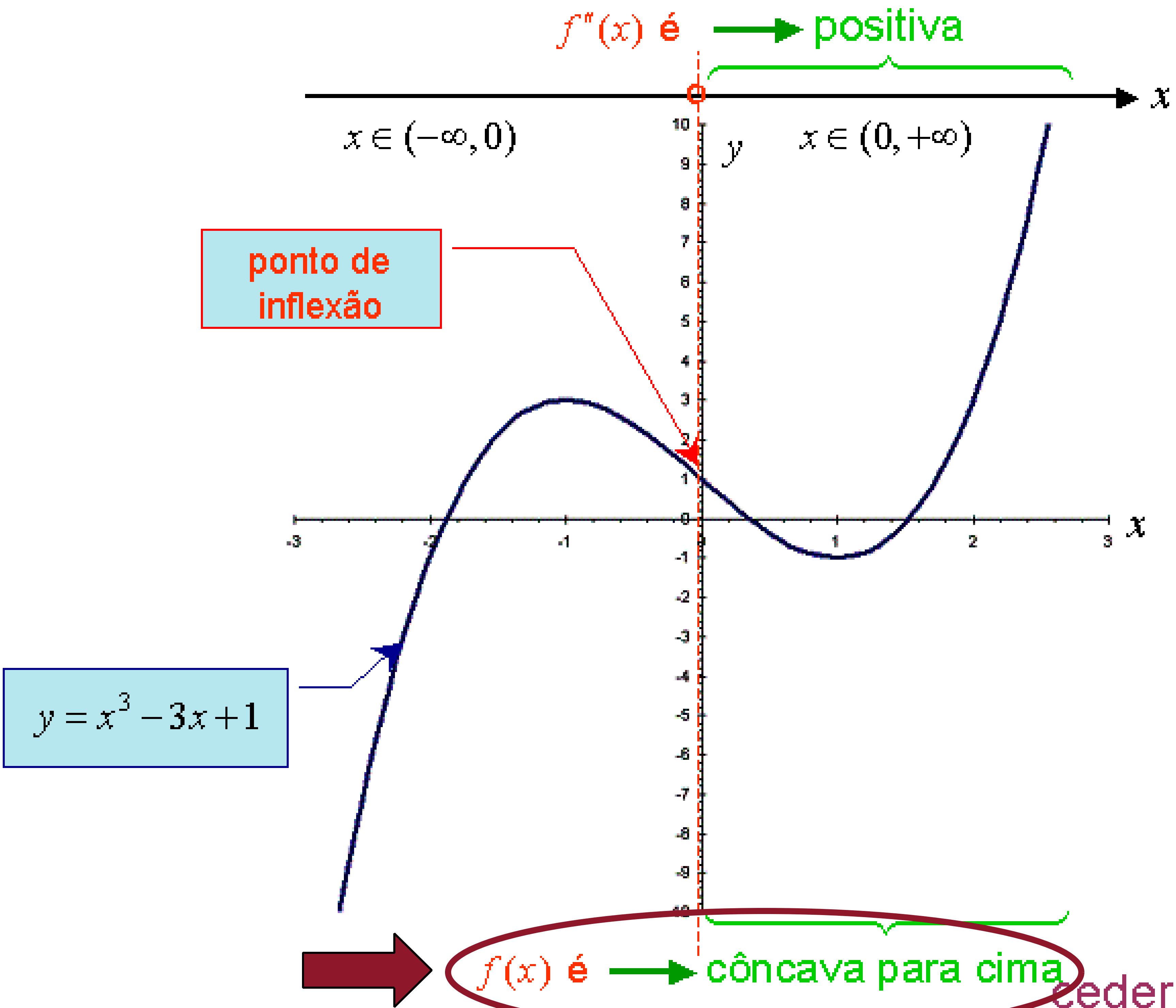


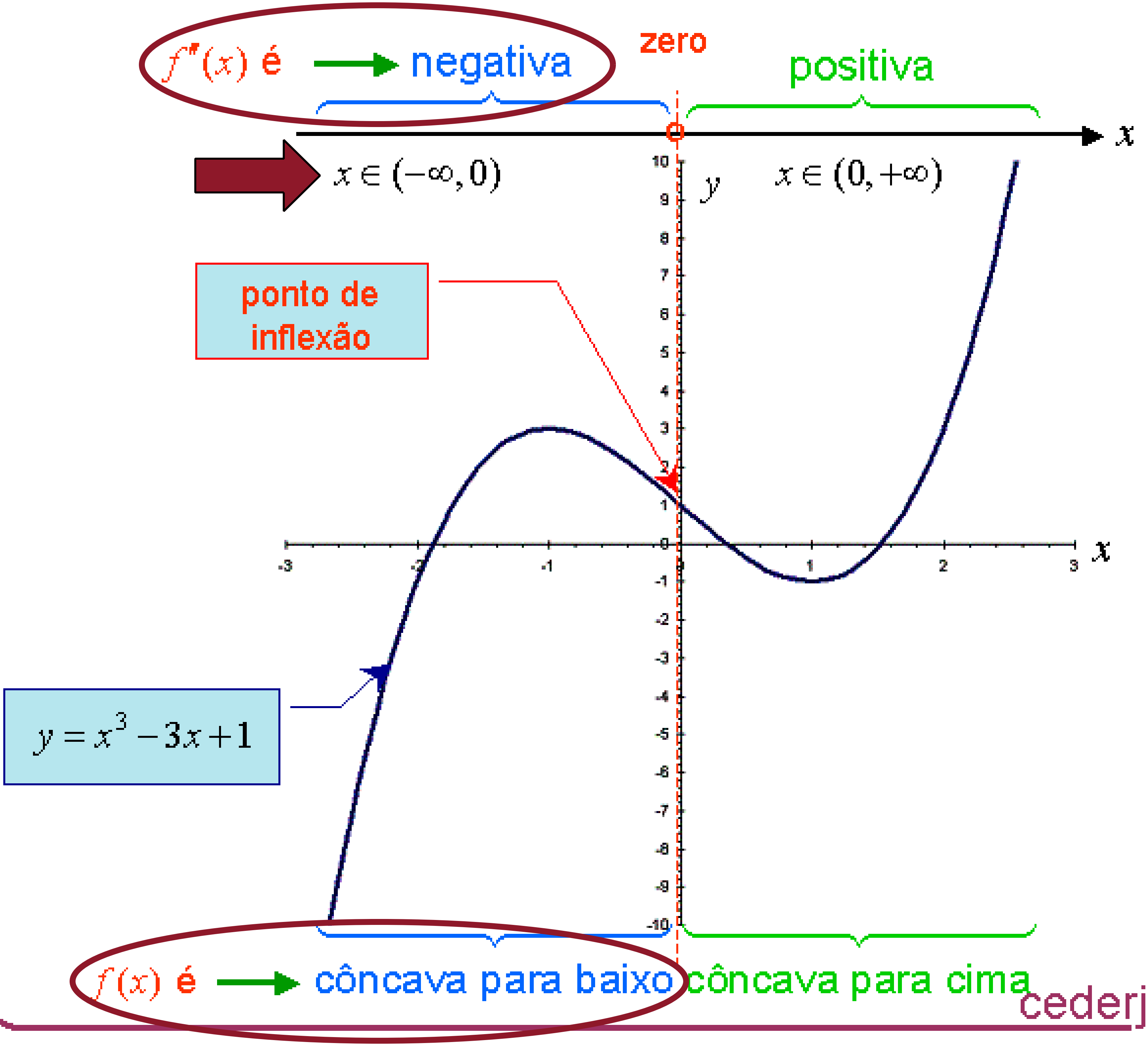
f''(x) é
negativa
zero
x
x ∈ (−∞, 0)
y
ponto de inflexão
y = x³ − 3x + 1
f(x) é
côncava para baixo



$x \in (0, +\infty)$
ponto de inflexão
$y = x^3 - 3x + 1$
x
y


$f''(x)$ é
positiva
x
$x \in (0, +\infty)$
y
ponto de inflexão
$y = x^3 - 3x + 1$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-3
-2
-1
0
1
2
3
x


$f''(x)$ é → positiva
x
$x \in (-\infty, 0)$
$x \in (0, +\infty)$
y
ponto de inflexão
$y = x^3 - 3x + 1$
x
$f(x)$ é → côncava para cima

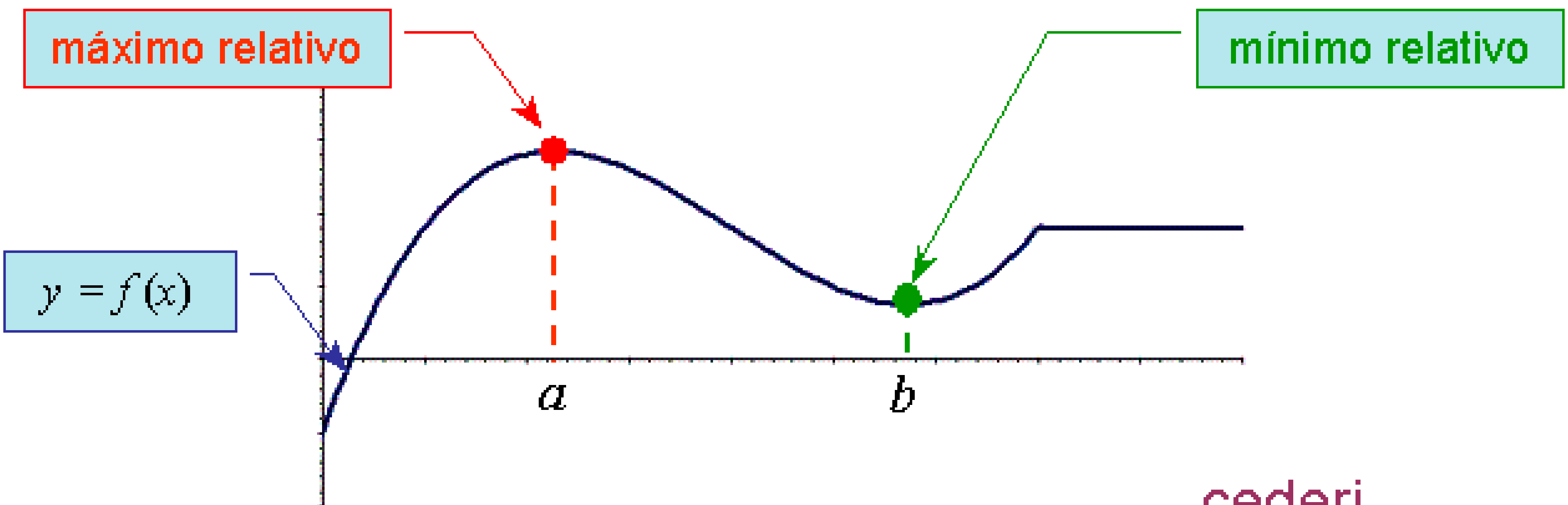

$f''(x)$ é → negativa
zero
positiva
$x \in (-\infty, 0)$
$x \in (0, +\infty)$
ponto de inflexão
$y = x^3 - 3x + 1$
$f(x)$ é → côncava para baixo
côncava para cima

Definição 4.4: Seja f uma função real de uma variável real.

1) Diz-se que uma função f tem um *máximo relativo em* a quando existe um intervalo aberto, I, contendo a e contido no domínio de f, tal que $f(a) > f(x)$, para todo número x de I.

2) Diz-se que uma função f tem um *mínimo relativo em* a quando existe um intervalo aberto, I, contendo a e contido no domínio de f, tal que $f(a) < f(x)$, para todo número x de I.

Quando f tem um máximo ou mínimo relativo em a, diz-se que f tem um *extremo relativo em* a.



Teorema 4.4: Seja f uma função real de uma variável real. Se f tem extremos relativos, então eles ocorrem ou em pontos onde $f'(x) = 0$ ou em pontos de não-diferenciabilidade.

OBS:

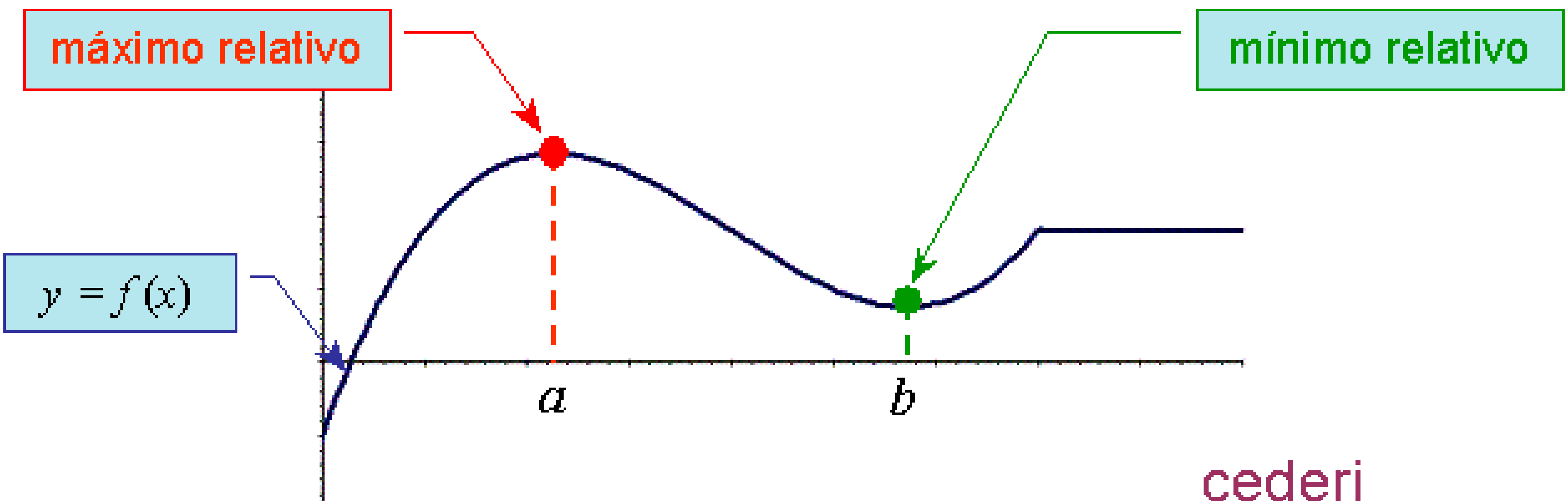
Os pontos do domínio de uma função f nos quais $f'(x) = 0$ ou f é não diferenciável são denominados de *pontos críticos* de f.

Teorema 4.5 – Teste da Derivada Primeira: Seja f uma função real de uma variável real, contínua no intervalo aberto (a,c) e seja b um ponto deste intervalo. Suponha que f é diferenciável em todos os pontos do intervalo (a,c) exceto, possivelmente, no ponto b e suponha, também, que b é um *ponto crítico* de f.

1) Se $f'(x) > 0$ para todo ponto x de (a,b) e se $f'(x) < 0$ para todo ponto x de (b,c), então f tem um máximo relativo em b.

2) Se $f'(x) < 0$ para todo ponto x de (a,b) e se $f'(x) > 0$ para todo ponto x de (b,c), então f tem um mínimo relativo em b.

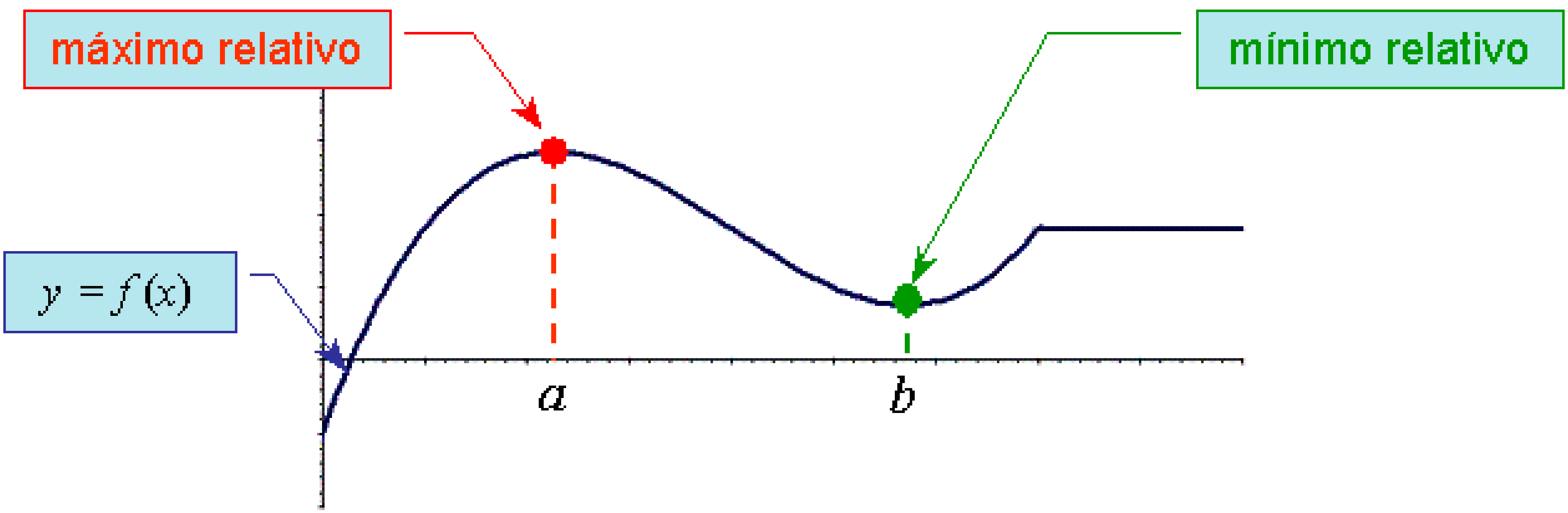
3) Se f' preservar o sinal nos intervalos (a,b) e (b,c), então f não tem extremos relativos em b.



Teorema 4.6 – Teste da Derivada Segunda: Seja f uma função real de uma variável real. Suponha que f é duas vezes diferenciável no ponto b e suponha, também, que $f'(b) = 0$.

1) Se $f''(b) < 0$, então f tem um máximo relativo em b.

2) Se $f''(b) > 0$, então f tem um mínimo relativo em b.



Exemplo 4.5

Para a função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ vamos determinar, analiticamente, os pontos críticos e os pontos nos quais a f têm mínimo e máximo relativo.

Notamos, em primeiro lugar, que o domínio natural de f é a reta real e que f é contínua e diferenciável em todo seu domínio, uma vez que é uma função polinomial. f' também é uma função polinomial e portanto também é diferenciável em $\mathbb{R}$. Além disso,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$$

e

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1,$$

e portanto f tem apenas dois pontos críticos: em $x = -1$ e em $x = 1$. Logo, de acordo com o **Teorema 4.4**, se f tiver extremos locais eles ocorrem nesse pontos.

a) Vamos usar o Teste da Derivada Primeira para analisar o que ocorre nos pontos críticos de f.

Como

$$f'(x) = 3\left(x^2 - 1\right)$$

e

a) $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$,

b) $x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$,

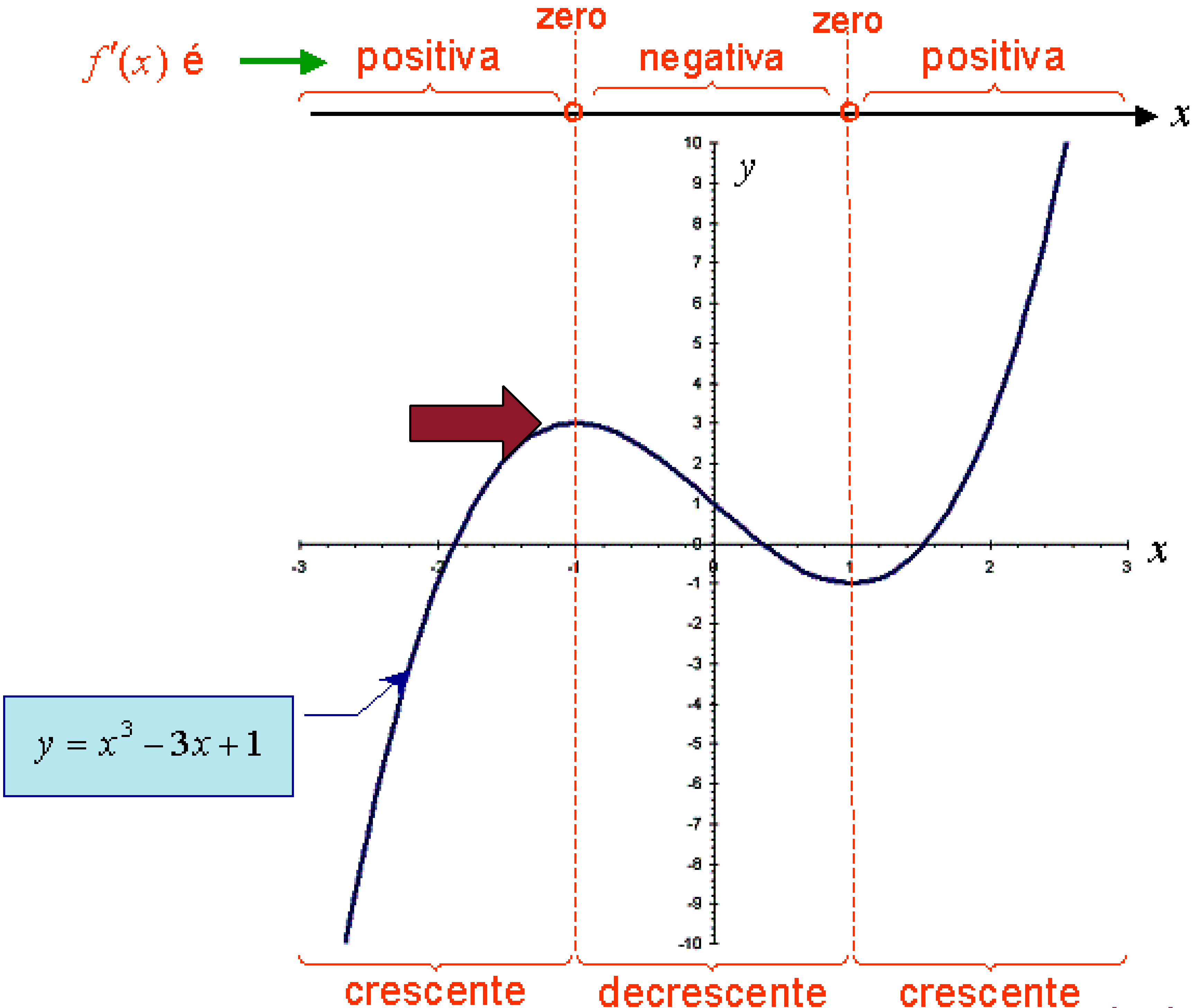
concluímos que:

1)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para todo } x \in (-\infty, -1], & f'(x) > 0 \\ \text{para todo } x \in \left[-1, 1\right], & f'(x) < 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Teorema 4.5}}{\Rightarrow} \quad f \text{ tem um máximo relativo em } x = -1,$$

2)

$$\left.\begin{array}{ll} \text{para todo } x \in \left[-1, 1\right], & f'(x) < 0 \\ \text{para todo } x \in [1, +\infty), & f'(x) > 0 \end{array}\right\} \overset{\text{Teorema 4.5}}{\Rightarrow} \quad f \text{ tem um mínimo relativo em } x = -1.$$


$f'(x)$ é
positiva
zero
negativa
zero
positiva
x
y
x
$y = x^3 - 3x + 1$
crescente
decrescente
crescente

b) Vamos usar o Teste da Derivada Segunda para analisar o que ocorre nos pontos críticos de f.

Como

$$f''(x) = 6x$$

e

a) $6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$,

b) $6x < 0 \Leftrightarrow x < 0$,

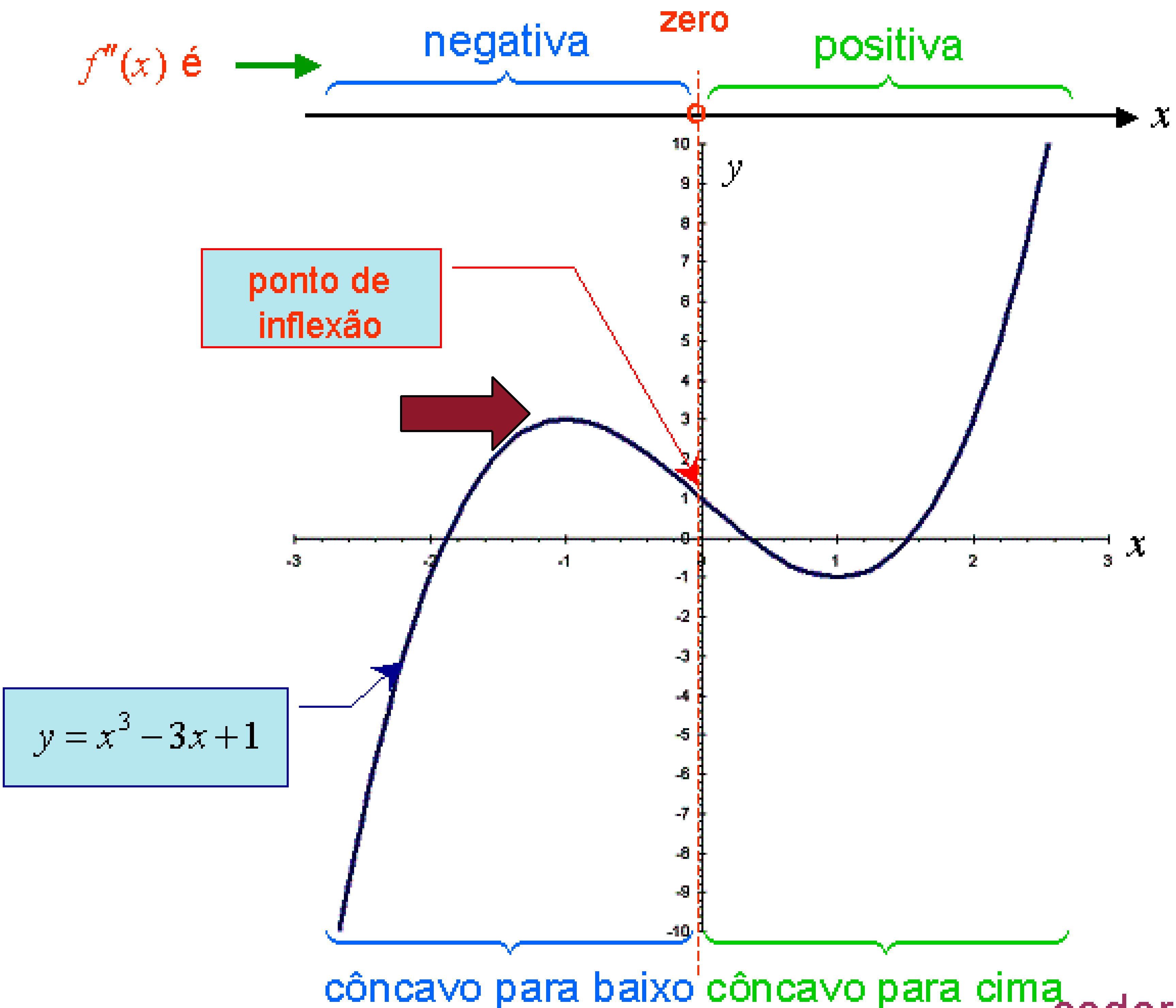
concluímos que:

1) para todo $x \in (-\infty, 0)$, $f''(x) < 0 \Rightarrow f''(-1) < 0$

$\overbrace{\Rightarrow}^{\text{Teorema 4.6}}$ f tem um máximo relativo em $x = -1$,

2) para todo $x \in (0, +\infty)$, $f''(x) > 0 \Rightarrow f''(1) > 0$

$\overbrace{\Rightarrow}^{\text{Teorema 4.6}}$ f tem um mínimo relativo em $x = 1$.

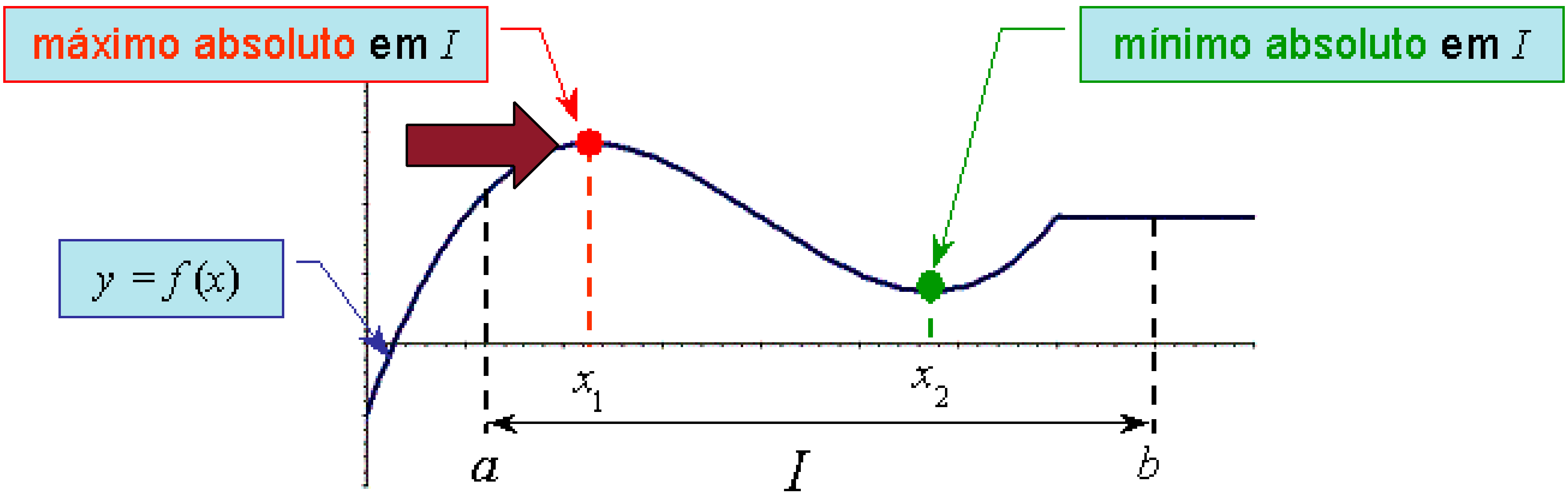

$f''(x)$ é
negativa
zero
positiva
x
y
ponto de inflexão
$y = x^3 - 3x + 1$
côncavo para baixo
côncavo para cima

Definição 4.5: Seja f uma função real de uma variável real. Seja I um intervalo contido no domínio de f e seja a um ponto de I.

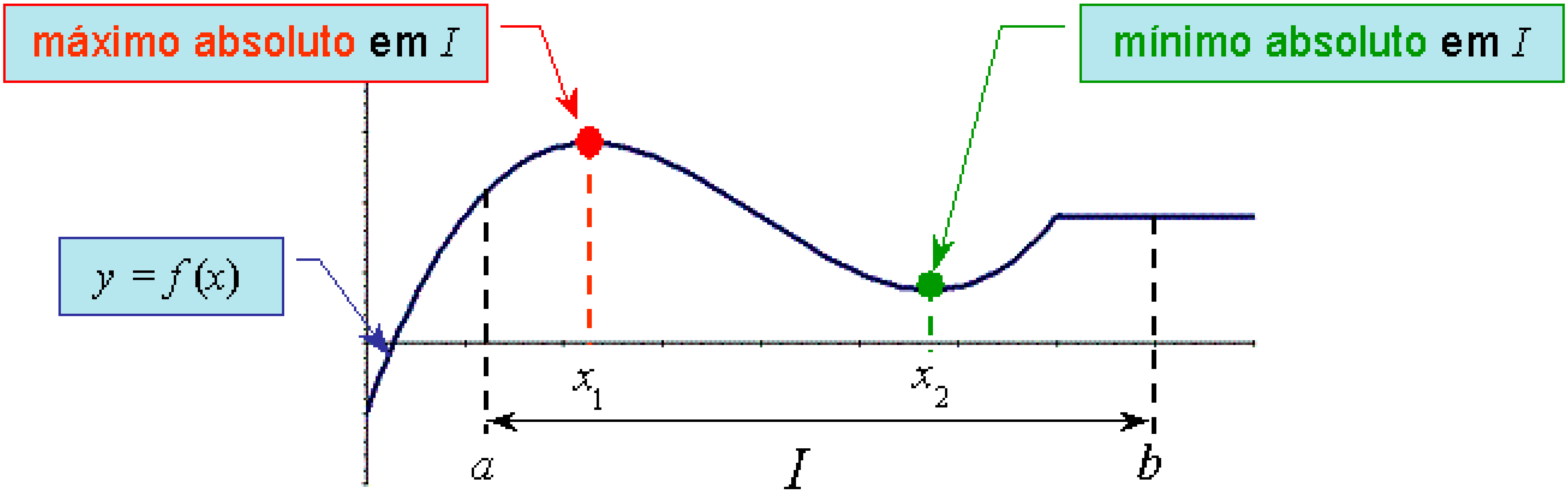
1) Diz-se que uma função f tem um *máximo absoluto no intervalo I em a* quando para todo número x de I, $f(a) > f(x)$.

2) Diz-se que uma função f tem um *mínimo absoluto no intervalo I em a* quando para todo número x de I, $f(a) < f(x)$.

Quando f tem um máximo ou mínimo absoluto no intervalo I em a, diz-se que f tem um *extremo absoluto no intervalo I*.



Teorema 4.7 – Teorema do Valor Extremo: Seja f uma função real de uma variável real. Se f é contínua em um intervalo fechado finito $[a,b]$, então f tem um mínimo e um máximo absolutos em $[a,b]$.



Teorema 4.8: Seja f uma função real de uma variável real. Se f tem um extremo absoluto em um intervalo aberto (a,b), então ele ocorre em um ponto crítico de f.

Procedimento para Encontrar os Extremos Absolutos de uma Função Contínua f em um Intervalo Finito Fechado $[a,b]$

Passo 1: Ache os pontos críticos de f em (a,b).

Passo 2: Ache o valor de f em todos os pontos críticos e nos extremos a e b.

Passo 3: O maior, entre os valores calculados no Passo 2, é o valor máximo absoluto de f em $[a,b]$ e o menor valor é o mínimo absoluto.

Exemplo 4.6

Vamos encontrar os extremos absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ no intervalo fechado [-1,8; 2,4].

f é contínua e diferenciável em [-1,8; 2,4] uma vez que é uma função polinomial. Além disso, recordamos que

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\left(x^2 - 1\right)$$

e

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1,$$

e portanto f tem apenas dois pontos críticos: em x = -1 e em x = 1.

Por outro lado,

$$f(-1{,}8) = (-1{,}8)^3 - 3(-1{,}8) + 1 = 0{,}568$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$$

$$f(2{,}4) = (2{,}4)^3 - 3(2{,}4) + 1 = 7{,}624$$

Exemplo 4.6

Vamos encontrar os extremos absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x + 1$ no intervalo fechado [-1,8; 2,4].

f é contínua e diferenciável em [-1,8; 2,4] uma vez que é uma função polinomial. Além disso, recordamos que

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$

e

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1,$$

e portanto f tem apenas dois pontos críticos: em $x = -1$ e em $x = 1$.

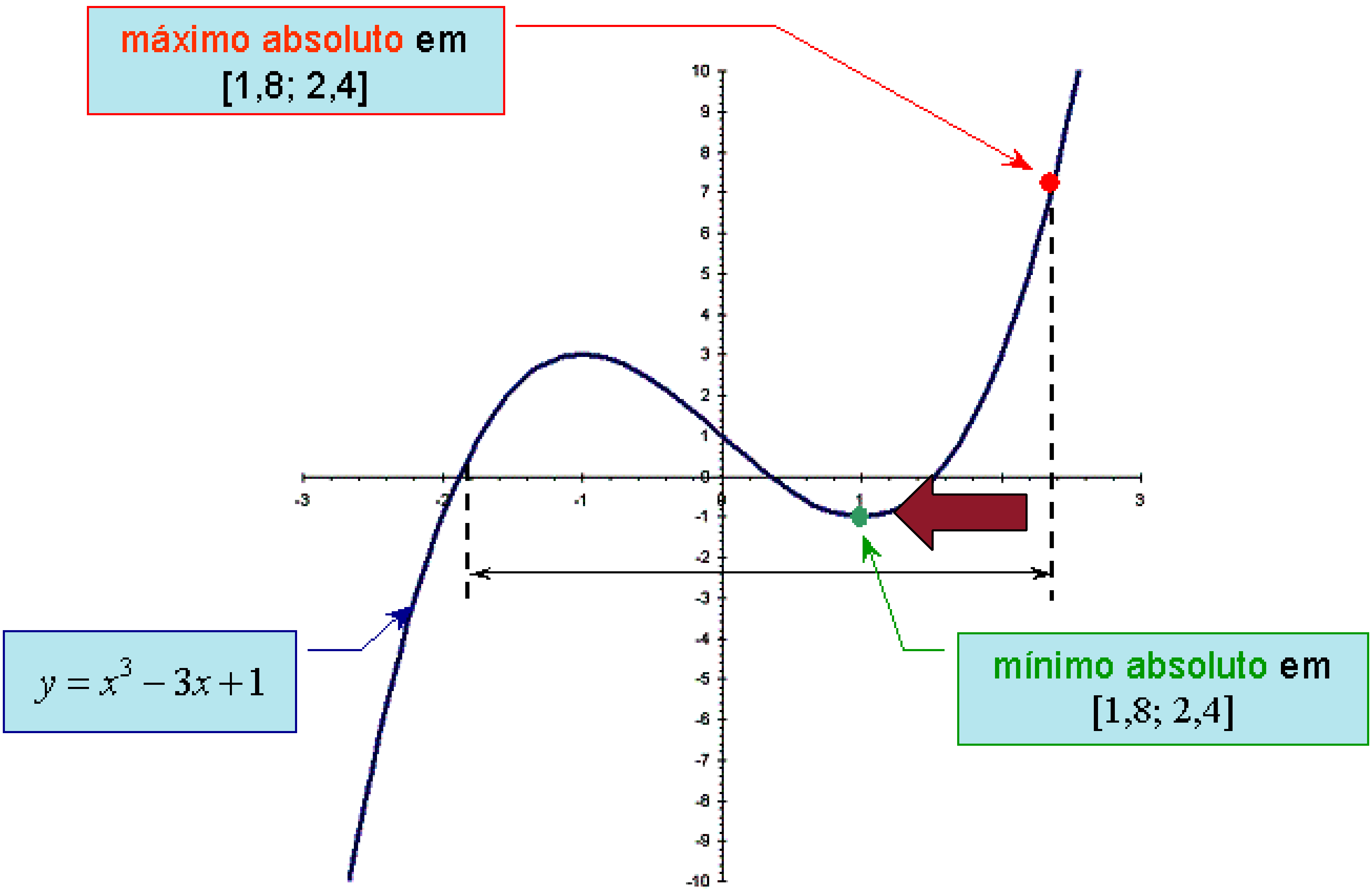
Por outro lado,

$$f(-1{,}8) = (-1{,}8)^3 - 3(-1{,}8) + 1 = 0{,}568$$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1 \Longleftarrow \text{mínimo absoluto}$$

$$f(2{,}4) = (2{,}4)^3 - 3(2{,}4) + 1 = 7{,}624 \Longleftarrow \text{máximo absoluto}$$


máximo absoluto em
[1,8; 2,4]
$y = x^3 - 3x + 1$
mínimo absoluto em
[1,8; 2,4]

Resumo

Derivadas

- Regra da Cadeia;
- Derivadas de ordem superior;

Análise de funções

- Comportamento de funções;
- Uso da derivada no estudo do comportamento de funções;
- Função: crescente, decrescente, concavidade, máximo, mínimo, etc.