Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2017

Questões

1. (1,0 ponto)

Determine o domínio das seguintes funções.

(a) $y = -x^2 + 1$

(b) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

(c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$

(d) $y = \dfrac{2x}{(x-2)(x+1)}$

(e) $y = \dfrac{\ln x}{4x}$

Solução:

(a) $y = -x^2 + 1$

A função está definida para todos os reais, logo o domínio natural é;

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R}\}$$

(b) $$y = \sqrt{x^2 - 16}$$
Não existe raiz quadrada para números negativos, logo devemos ter

$$x^2 - 16 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq 16 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 4$$

assim

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \geq 4\}$$

(c) $$y = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$$
Como no item anterior não podemos ter $9 - x^2 \leq 0$. Logo

$$9 - x^2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad 9 > x^2 \quad \Longrightarrow \quad -3 < x < 3$$

e

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -3 < x < 3\} = (-3, 3)$$

(d) $$y = \frac{2x}{(x-2)(x+1)}$$
O denominador não pode se anular, logo $x \neq 2$ e $x \neq -1$. Assim

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \neq -1 \text{ e } x \neq 2\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$$

(e) $$y = \frac{\ln x}{4x}$$
A função logarítmica só está definida para valores maiores que zero. Assim

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x > 0\} = (0, \infty)$$

2. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Para as seguintes funções, determine seus domínios e imagens.

(a) $y = | x |$
(b) $y = \sqrt{16 - x^2}$
(c) $y = x^2 + 2x + 4$
(d) $y = 2^x - x$

Solução:

(a) $y = | x |$

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$$

$$\text{Im } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \geq 0\} = [0, \infty)$$

(b) $y = \sqrt{16 - x^2}$
Devemos ter $16 - x^2 \geq 0$ ou $16 \geq x^2$, ou ainda $-4 \leq x \leq 4$.

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -4 \leq x \leq 4\} = [-4, 4]$$

$$\text{Im } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 \leq x \leq 4\} = [0, 4]$$

(c) $y = x^2 + 2x + 4$

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$$

$$\text{Im } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \geq 3\} = [3, \infty)$$

(d) $y = 2^x - x$

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R}\} = (-\infty, \infty)$$

$$\text{Im } = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \geq 2^{-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}} + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2} \right\} = [2^{-\frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}} + \frac{\ln(\ln 2)}{\ln 2}, \infty)$$

3. (1,0 ponto) ———————————————

Esboce o gráfico da função

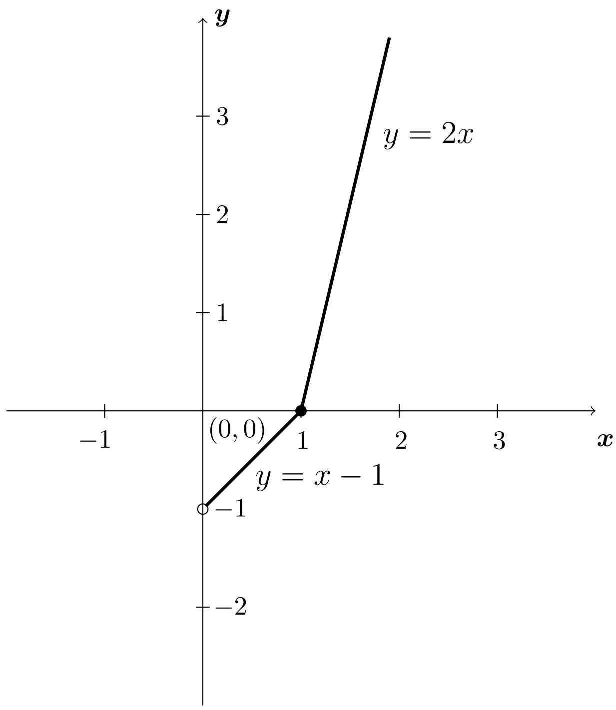
$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2x & \text{se} \quad 1 \leq x \end{cases}$$

e ache o domínio e a imagem da função.

Solução:

$$\text{Dom } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x > 0\} = (0, \infty)$$

$$\text{Im } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x > -1\} = (-1, \infty)$$



4. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites.

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$$

(c) $$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$$

(d) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3} = \frac{(3\cdot 1-1)^2}{(1+1)^3} = \frac{(1)^2}{(2)^3} = \frac{1}{8}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{3^0 - 3^0}{3^0 + 3^0} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)(x-2)}}{\sqrt{(x+2)(x-2)}}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)}}{\sqrt{(x+2)}}\frac{\sqrt{(x-2)}}{\sqrt{(x-2)}}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{(x-2)}}{\sqrt{(x+2)}}\cdot 1=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}=\frac{\sqrt{2-2}}{\sqrt{2+2}}=\frac{\sqrt{0}}{\sqrt{4}}=\frac{0}{2}=0$$

(d) $$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\;[\;3x^2+3xh+h^2\;]=$$

$$[\;3x^2+3x\cdot 0+(0)^2\;]=3x^2$$

5. (1,0 ponto) ---

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+1}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x^2+5x+6}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5x+6}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\frac{1+0+0}{0+0}=+\infty$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{x^2}} =$$

$$= \frac{0+0}{1+0+0} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3^{2x}}{3^{2x}} - \frac{1}{3^{2x}}}{\frac{3^{2x}}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{2x}}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{3^{2x}}}{1 + \frac{1}{3^{2x}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3^{2x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3^{2x}}} =$$

$$= \frac{1-0}{1+0} = 1$$

6. (1,5 pontos) ---

Diga aonde, quais intervalos, as seguintes funções são contínuas ou descontínuas na reta real.

(a) $f(x) = \mid x \mid$

(b) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x-1}$

Solução:

(a) $f(x) = \mid x \mid$

É contínua em toda a reta real. Não possui descontinuidades.

(b) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Só está definida para $9 - x^2 \geq 0$ ou $9 \geq x^2$, ou ainda $-3 \leq x \leq 3$. Neste intervalo é contínua, fora dele não é definida.

(c) $f(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1}$

Possui descontinuidade em $x = 1$ já que não está definida neste ponto. Entretanto esta descontinuidade pode ser removida já que

$$f(x) = \frac{2x^4 - 6x^3 + x^2 + 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(2x^3 - 4x^2 - 3x - 3)}{x - 1} =$$

$$= 2x^3 - 4x^2 - 3x - 3$$

que é contínua em toda a reta real.

7. (1,5 pontos) ---

Ache a primeira derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = 1/\sqrt{2 + x}$

(b) $f(x) = (2x - 1)/(2x + 1)$

(c) $f(x) = \operatorname{sen}^5 x$

(d) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Solução:

(a) $f(x) = 1/\sqrt{2 + x} = (\sqrt{2 + x})^{-1} = (2 + x)^{-1/2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(2 + x)^{-1/2-1} = -\frac{1}{2}(2 + x)^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{(2 + x)^3}}$$

(b) $f(x) = (2x - 1)/(2x + 1)$

$$f'(x) = \left[\frac{(2x - 1)}{(2x + 1)}\right]' = \frac{(2x - 1)'(2x + 1) - (2x - 1)(2x + 1)'}{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{2(2x + 1) - (2x - 1)2}{(2x + 1)^2} = \frac{4x + 2 - 4x + 2}{(2x + 1)^2} = \frac{4}{(2x + 1)^2}$$

(c) $f(x) = \text{sen}^5 x$

$$f'(x) = 5\,\text{sen}^4 x \cos x$$

(d) $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$

$$f'(x) = \left[\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right]' = \frac{(\text{sen}\, x)'(\cos x) - (\text{sen}\, x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\text{sen}\, x)'(\cos x) - (\text{sen}\, x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\text{sen}\, x)(-\text{sen}\, x)}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

8. (2,0 pontos)

Encontre $\dfrac{dy}{dx}$, onde

$$y = \frac{u^3 - 1}{u^3 + 1} \quad \text{e} \quad u = \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

Solução:

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left[\frac{u^3 - 1}{u^3 + 1}\right]\frac{d}{dx}\left[\sqrt[3]{x^3 + 1}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(u^3 - 1)' \cdot (u^3 + 1) - (u^3 - 1) \cdot (u^3 + 1)'}{(u^3 + 1)^2} \cdot \frac{1}{3}\left(x^3 + 1\right)^{-2/3} \cdot (3x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3u^2(u^3 + 1) - 3u^2(u^3 - 1)}{(u^3 + 1)^2} \cdot \frac{3x^2}{3\sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6u^2}{(u^3+1)^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}{\left[\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3+1\right]^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}{\left[x^3+2\right]^2} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^2}{(x^3+2)^2\,\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}$$