Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 2^o semestre de 2017 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

Calcule os limites a seguir:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1}$$

$$\frac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow \text{Regra de L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{14x-2}$$

que também é uma indeterminação do tipo $+\infty/+\infty$, podemos aplicar novamente a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{14x-2} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Novamente temos $\frac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow$ Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

2. (2,5 pontos)

Analise onde a função é crescente ou decrescente e ache os pontos de máximo e mínimo relativos da seguinte função

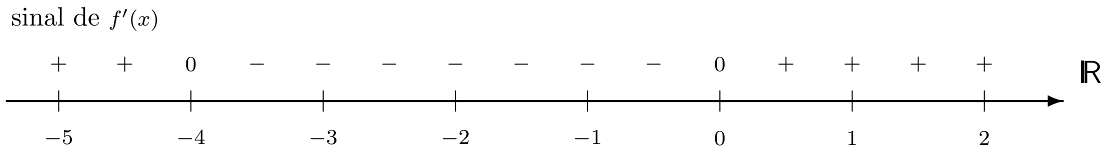
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 7$$

Solução:

Vamos verificar a inclinação da curva e os pontos extremos locais

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Longrightarrow 3x(x+4) = 0$$

Portanto, os pontos aonde a derivada se anula são $x = 0$ e $x = -4$. Vamos agora verificar o sinal da primeira derivada em torno desses pontos. O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada na região de interesse.



Desta forma verificamos que o ponto $(x, y) = (-4, 25)$ é um ponto de máximo e que o ponto $(x, y) = (0, -7)$ é um ponto de mínimo. Além disso, f é crescente em $(-\infty, -4)$ e $(0, \infty)$ e é decrescente em $(-4, 0)$.

3. (2,5 pontos)

Se $f(x) = x^4 + 2$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x = 1$ e $x = 2$.

Solução

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^2 \pi(x^4+2)^2\,dx \\
&= \pi \int_1^2 (x^8 + 4x^4 + 4)\,dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{9}x^9 + \frac{4}{5}x^5 + 4x\right]_1^2 \\
&= \pi \left[\left(\frac{512}{9} + \frac{32}{5} + 4\right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{5} + 4\right)\right] \\
&= \pi \left[\frac{2560 + 288 + 180 - 5 - 9 - 180}{45}\right] \\
&= \pi \frac{2834}{45}
\end{aligned}$$

4. (2,5 pontos)

Calcular a área da região $\mathcal{R}$ situada abaixo da linha $y = \frac{1}{2}x + 2$, acima da parábola $y = x^2$, e entre o eixo y e $x = 1$.

Solução:

$$A = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2}x + 2 \right) - x^2 \right] dx = \left[\frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1^2}{4} + 2 \cdot 1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[\frac{0^2}{4} + 2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} \right] = \left[\frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{3} \right] = \left[\frac{3 + 24 - 4}{12} \right]$$

$$= \frac{23}{12}$$