Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 2^o semestre de 2012 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

   (a) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

   (b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

   Solução:

   (a) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

   Aparentemente há uma descontinuidade no ponto $x = 2$, já que $x = 2$ não pertenceria ao domínio da função.

   Entretanto, esta descontinuidade pode ser removida se reescrevermos a função da seguinte maneira

   $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$$

   o que elimina a descontinuidade em $x = 2$.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 2$ parece haver uma descontinuidade. Vamos mostrar que esta descontinuidade existe.

O ponto $x = 2$ pertence ao domínio da função. Os limites laterais neste ponto são:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

entretanto o valor da função em $x = 2$ é $f(2) = 0$.

Logo

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 0$$

Portanto $f(x)$ é descontinua em $x = 2$.

2. (2,5 pontos) ---

Encontre as derivadas de primeira e segunda ordens das seguintes funções:

(a) $$f(x) = 5x^6 - 2x^3 + x^{-5}$$

(b) $$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^5$$

(c) $$f(w) = \frac{w}{\sqrt[2]{1 - 4w^2}}$$

Solução:

(a) $$f(x) = 5x^6 - 2x^3 + x^{-5}$$

$$f'(x) = 30x^5 - 6x^2 - 5x^{-6}$$

$$f''(x) = 150x^4 - 12x + 30x^{-7} = 150x^4 - 12x + \frac{30}{x^7}$$

(b) $$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^5$$

$$f'(x) = 5\left(\frac{x}{x+1}\right)^4 \left(\frac{x}{x+1}\right)' = 5\left(\frac{x}{x+1}\right)^4 \left(\frac{(x)'(x+1) - (x)(x+1)'}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = 5\left(\frac{x}{x+1}\right)^4 \left(\frac{1(x+1) - (x)1}{(x+1)^2}\right) = 5\left(\frac{x^4}{(x+1)^4}\right)\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

$$f'(x) = 5\frac{x^4}{(x+1)^6}$$

$$f''(x) = 5\frac{(x^4)'((x+1)^6) - (x^4)((x+1)^6)'}{((x+1)^6)^2}$$

$$f''(x) = 5\frac{(4x^3)((x+1)^6) - (x^4)(6(x+1)^5(1))}{(x+1)^{12}}$$

$$f''(x) = 5\frac{4x^3(x+1)^6 - 6x^4(x+1)^5}{(x+1)^{12}}$$

$$f''(x) = 5\frac{4x^3(x+1) - 6x^4}{(x+1)^7} = 5\frac{4x^4 + 4x^3 - 6x^4}{(x+1)^7} = 5\frac{4x^3 - 2x^4}{(x+1)^7}$$

$$f''(x) = 10\frac{2x^3 - x^4}{(x+1)^7}$$

(c) $$f(w) = \frac{w}{\sqrt[2]{1-4w^2}}$$

$$f'(w) = \frac{(w)'(\sqrt[2]{1-4w^2}) - (w)(\sqrt[2]{1-4w^2})'}{[\sqrt[2]{1-4w^2}]^2}$$

$$f'(w) = \frac{1(\sqrt[2]{1-4w^2}) - (w)(1/2)((1-4w^2)^{-1/2}(-8w))}{1-4w^2}$$

$$f'(w) = \frac{(1-4w^2)^{1/2} + 4w^2(1-4w^2)^{-1/2}}{1-4w^2}$$

$$f'(w) = \frac{(1-4w^2)^{1/2} + 4w^2(1-4w^2)^{-1/2}}{1-4w^2} \cdot \frac{(1-4w^2)^{1/2}}{(1-4w^2)^{1/2}}$$

$$f'(w) = \frac{(1-4w^2) + 4w^2}{(1-4w^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}$$

$$f''(w) = \left[\frac{1}{(1-4w^2)^{3/2}}\right]' = \frac{(1)'((1-4w^2)^{3/2}) - (1)((1-4w^2)^{3/2})'}{[(1-4w^2)^{3/2}]^2}$$

$$f''(w) = \frac{-1((1-4w^2)^{3/2})'}{(1-4w^2)^3} = \frac{-1((3/2)(1-4w^2)^{1/2}(-8w))}{(1-4w^2)^3}$$

$$f''(w) = \frac{12w(1-4w^2)^{1/2}}{(1-4w^2)^3} = \frac{12w(1-4w^2)^{1/2}}{(1-4w^2)^3} \cdot \frac{(1-4w^2)^{-1/2}}{(1-4w^2)^{-1/2}}$$

$$f''(w) = \frac{12w}{(1-4w^2)^{5/2}} = \frac{12w}{\sqrt{(1-4w^2)^5}}$$

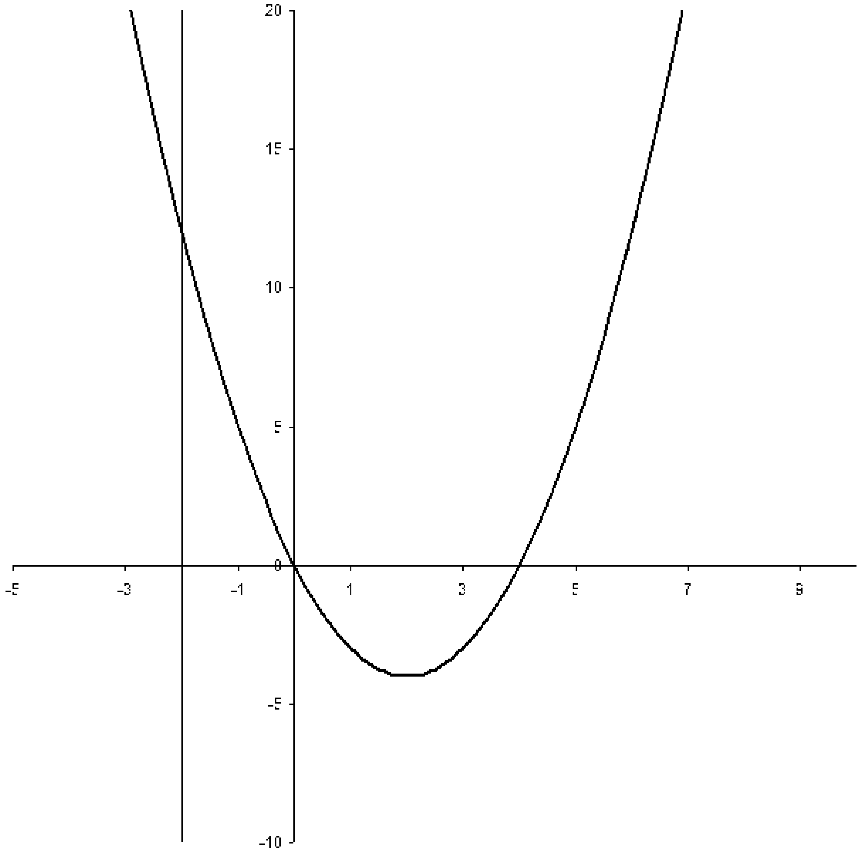
3. (2,5 pontos)

Esboce as regiões e calcule as áreas pedidas.

(a) Ache a área total entre a parábola $y = (x^2 - 4x)$, o eixo x e a reta $x = -2$.

(b) Ache a área total entre $y = x^3$, $y = 3x$ e $y = x$.

Solução:



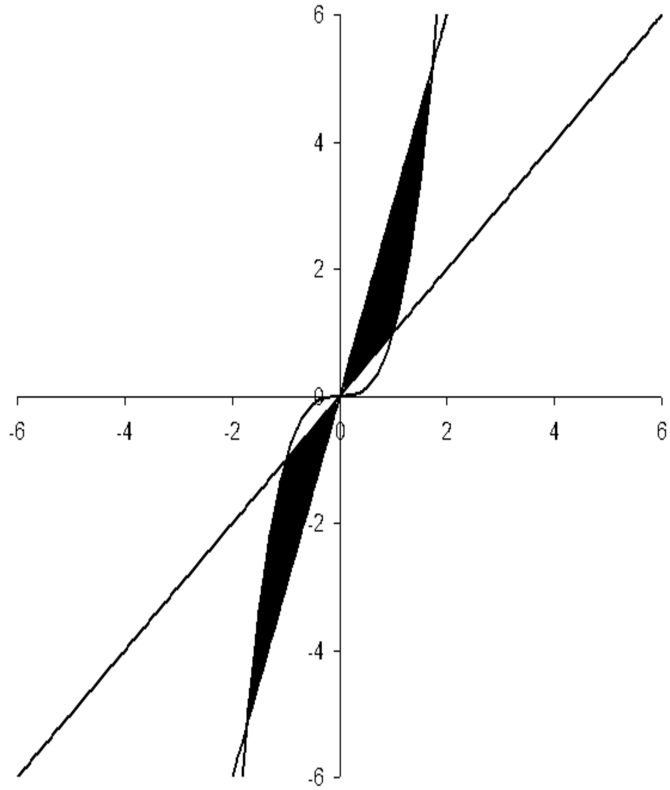
(a)

A área desejada é dada por

$$\int_{-2}^{0}(x^2-4x)\,dx=\int_{-2}^{0}x^2\,dx-\int_{-2}^{0}4x\,dx=\int_{-2}^{0}x^2\,dx-4\int_{-2}^{0}x\,dx=$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0}-4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}=\left[\frac{0^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3}\right]-4\left[\frac{0^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right]=$$

$$\frac{8}{3}+\frac{16}{2}=\frac{16+48}{6}=\frac{64}{6}=\frac{32}{3}$$



(b)

Temos que determinar aonde as curvas se interceptam para definir os limites de integração.

Para as curvas $y = x^3$ e $y = x$:

$$y = x^3 \;\text{ e }\; y = x \implies x^3 = x \implies x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0 \;\text{ ou }\; x = \pm 1$$

Assim as duas curvas se interceptam em $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

Para as curvas $y = x^3$ e $y = 3x$:

$$y = x^3 \;\text{ e }\; y = 3x \implies x^3 = 3x \implies x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0 \implies x = 0 \;\text{ ou }\; x = \pm\sqrt{3}$$

Assim as duas curvas se interceptam em $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$.

Explorando a simetria vamos calcular somente as áreas no primeiro quadrante e depois multiplicar por 2. Assim, metade da área desejada é dada por

$$\int_0^1 [3x - x]\, dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left[3x - x^3\right]\, dx = \int_0^1 [2x]\, dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left[3x - x^3\right]\, dx =$$

$$\left[x^2\right]_0^1 + \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_1^{\sqrt{3}} = \left[1^2 - 0^2\right] + \left[\left\{3\frac{\sqrt{3}^2}{2} - \frac{\sqrt{3}^4}{4}\right\} - \left\{3\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right\}\right] =$$

$$\left[1^2\right] + \left[\left\{3\frac{3}{2} - \frac{3^2}{4}\right\} - \left\{3\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right\}\right] = \left[1^2\right] + \left[\left\{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right\} - \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right\}\right] =$$

$$1 + \frac{18-9}{4} - \frac{6-1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{4+9-5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Enfim, a área total é igual a 2.

4. (2,5 pontos)

Calcule os seguintes limites utilizando a regra de L'Hôpital.

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x-4}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{4x^3}{1} = \lim_{x\to 4} 4x^3 = 4 \cdot 4^3 = 256$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x}{1} = e^2$$