Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2^o semestre de 2011

Questões

1. (2,00 ponto)

   Determine as inversas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   (b) $f(x) = \sqrt[2]{3x-2}$

   Solução:

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   $$y - 1 = x^3$$

   $$\sqrt[3]{y-1} = x$$

   logo

   $$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

   (b) $f(x) = \sqrt[2]{3x-2}$

   $$y = \sqrt[2]{3x-2}$$

   $$y^2 = 3x - 2$$

   $$\frac{y^2+2}{3} = x$$

   logo

   $$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$$

2. (2,00 pontos)

Calcule os limites abaixo:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

3. (2,00 pontos)

Calcule os seguintes limites infinitos. Justifique cada passagem.

(a) $$\lim_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

(b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^3+7}{5x^2-3x-4}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty} 2 + \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 2 + 0 = 2$$

(b) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^3+7}{5x^2-3x-4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^3+7}{5x^2-3x-4}\frac{1/x^2}{1/x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x+7/x^2}{5-3/x-4/x^2} =$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}(-2x+7/x^2)}{\lim_{x\to+\infty}(5-3/x-4/x^2)} = \frac{-\lim_{x\to+\infty} x + \lim_{x\to+\infty} 7/x^2}{\lim_{x\to+\infty} 5 - \lim_{x\to+\infty} 3/x - \lim_{x\to+\infty} 4/x^2} =$$

$$\frac{-\infty+0}{5-0-0} = -\infty$$

4. (2,00 pontos)

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem), justifique sua resposta.

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

Tem descontinuidades em $x = -3$ e $x = 2$ já que claramente estes pontos não pertencem ao domínio da função.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dentro das três regiões a função é polinomial e portanto contínua. Resta somente verificar os pontos limítrofes das regiões, isto é, $x = 0$ e $x = 1$.

Em $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$$

daí

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 0$.

Em $x = 1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2 - x = 1$$

daí

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = 1$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

Portanto $f(x)$ não tem descontinuidades.

5. (2,00 pontos)

Mostre, usando as propriedades de limites, que para toda função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, seu limite é igual ao valor da função no ponto. Isto é

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Solução:

O limite

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lim_{x \to a} a_i x^i$$

Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \to a} a_i x^i = a_i \lim_{x \to a} x^i = a_i a^i$$

substituindo no somatório

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lim_{x \to a} x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = a_0 + a_1 a + \cdots + a_{n-1} a^{n-1} + a_n a^n = f(a)$$