Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2^{o} semestre de 2014 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

Calcule a primeira derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(b) $f(x) = | x |$

(c) $f(x) = \sqrt{1 + 2x}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2x}}$

(e) $f(x) = (2x - 1)(2x + 1)$

(f) $f(x) = \dfrac{(2x + 1)}{(2x - 1)}$

(g) $f(x) = \sqrt{x}$

(h) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(j) $f(x) = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$

Solução:

(a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x + 2 \\ &= 2x + 2 \end{aligned}$$

(b) $$f(x) = | \; x \; |$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{para} \quad x < 0 \\ 0 & \text{para} \quad x = 0 \\ x & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{para} \quad x < 0 \\ \text{ND} & \text{para} \quad x = 0 \\ 1 & \text{para} \quad x > 0 \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \sqrt{\;1+2x\;} = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (1+2x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (2) \\ &= (1+2x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \end{aligned}$$

(d) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\;1+2x}} = \left((1+2x)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (2) \\ &= -(1+2x)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}} \end{aligned}$$

(e) $$f(x) = (2x-1)(2x+1)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x-1)'(2x+1) + (2x-1)(2x+1)' \\ &= (2)(2x+1) + (2x-1)(2) \\ &= 4x+2+4x-2 \\ &= 8x \end{aligned}$$

(f) $$f(x) = \frac{(2x+1)}{(2x-1)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)'(2x-1) - (2x+1)(2x-1)'}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{(2)(2x-1) - (2x+1)(2)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{-4}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

(g)
$$f(x) = \sqrt{x} = (x)^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1}$$
$$= \frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(h)
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = (x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}-1}$$
$$= -\frac{1}{2}(x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

(j)
$$f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$$
$$f'(x) = \frac{[(x^2+4)^2]' \cdot [(2x^3-1)^3] - [(x^2+4)^2] \cdot [(2x^3-1)^3]'}{[(2x^3-1)^3]^2}$$
$$= \frac{[2(x^2+4)^1(2x)] \cdot [(2x^3-1)^3] - [(x^2+4)^2] \cdot [3(2x^3-1)^2(6x^2)]}{(2x^3-1)^6}$$
$$= \frac{[4x(x^2+4)] \cdot [(2x^3-1)^3] - [(x^2+4)^2] \cdot [(18x^2)(2x^3-1)^2]}{(2x^3-1)^6}$$
$$= \frac{4x(x^2+4)(2x^3-1) - (x^2+4)^2(18x^2)}{(2x^3-1)^4}$$
$$= \frac{(4x^3+16x)(2x^3-1) - (x^4+8x^2+16)(18x^2)}{(2x^3-1)^4}$$

2. (1,0 ponto)

Determine $\frac{dy}{dx}$, dado que $y = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ e $u = \sqrt[3]{x^2+2}$

Solução:

$$\frac{dy}{du} = \frac{[u^2-1]' \cdot [u^2+1] - [u^2-1] \cdot [u^2+1]'}{[u^2+1]^2}$$

$$= \frac{[2u] \cdot [u^2+1] - [u^2-1] \cdot [2u]}{[u^2+1]^2}$$

$$= \frac{[2u^3 + 2u] - [2u^3 - 2u]}{[u^2+1]^2}$$

$$= \frac{4u}{[u^2+1]^2}$$

e

$$\frac{du}{dx} = \left[\sqrt[3]{\ x^2+2}\right]' = \left[(\ x^2+2\ )^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$= \frac{1}{3}(\ x^2+2\ )^{\left(\frac{1}{3}-1\right)}(2x)$$

$$= \frac{2x}{3}(\ x^2+2\ )^{\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(\ x^2+2\ )^2}}$$

Mas pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{4u}{[u^2+1]^2} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(\ x^2+2\ )^2}}$$

$$= \frac{4\sqrt[3]{\ x^2+2}}{\left[\left[\sqrt[3]{\ x^2+2}\right]^2+1\right]^2} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(\ x^2+2\ )^2}}$$

$$= \frac{8x}{3\left[\left[\sqrt[3]{\ x^2+2}\right]^2+1\right]^2 \cdot \sqrt[3]{(\ x^2+2\ )}}$$

3. (1,0 ponto) ———

Encontre a equação da reta tangente as seguintes curvas no ponto $x = 1$:

(a) $y = 8 - 5x^2$

(b) $y = \dfrac{4}{x+1}$

Solução:

(a) $$y = 8 - 5x^2$$
$$y' = -10x$$

A equação da reta tangente tem a forma $y = mx + b$, onde
$$m = y'(1) = -10 \cdot 1 = -10$$
além disso a reta tangente passa pelo ponto $(1, y(1)) = (1, (8 - 5 \cdot (1)^2)) = (1, 3)$. Portanto,
$$y = mx + b \longrightarrow 3 = (-10)(1) + b \longrightarrow 3 + 10 = b \longrightarrow b = 13$$
Finalmente a equação da reta tangente é
$$y = -10x + 13$$

(b) $$y = \frac{4}{x+1}$$
$$y' = \frac{-4}{(x+1)^2}$$

A equação da reta tangente tem a forma $y = mx + b$, onde
$$m = y'(1) = \frac{-4}{(1+1)^2} = \frac{-4}{4} = -1$$
além disso a reta tangente passa pelo ponto $(1, y(1)) = (1, \frac{4}{1+1}) = (1, 2)$. Portanto,
$$y = mx + b \longrightarrow 2 = (-1)(1) + b \longrightarrow 2 + 1 = b \longrightarrow b = 3$$
Finalmente a equação da reta tangente é
$$y = -x + 3$$

4. (1,0 ponto)

Avalie todas as derivadas $(f', f'', f''', f'''', \ldots)$ da função $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$ no ponto $x = 0$.

Solução:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\left(\frac{4}{3}-1\right)} = \frac{4}{3}x^{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}x^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{4}{9}x^{\left(-\frac{2}{3}\right)} \quad \Longrightarrow \quad f''(0) \text{ Não Existe}$$

$$f'''(x) = -\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}x^{\left(-\frac{2}{3}-1\right)} = -\frac{8}{27}x^{\left(-\frac{5}{3}\right)} \quad \Longrightarrow \quad f'''(0) \text{ Não Existe}$$

Para todas as derivadas seguintes haverá divisão por zero e elas não serão definidas. Logo,

$$\text{Para} \quad n \geq 2, \;\; f^{(n)}(0) \text{ Não Existe}$$

5. (1,0 ponto)

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$.

Encontre:

(a) os pontos críticos de f;

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Solução:

(a) e (b)

$$f(x) = \frac{1}{x-2} = (x-2)^{-1}$$

$$f'(x) = -1(x-2)^{-2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

Logo f' nunca se anula, e o único ponto aonde a derivada não é definida é $x = 2$, que por sua vez não está no domínio de f. Logo não há pontos críticos. Consequentemente não há extremos relativos.

(c)

Vamos estudar o sinal da primeira derivada. Note que f' é negativa para $x \neq 2$, assim f é decrescente para $x < 2$ e para $x > 2$. Isto f é decrescente em $(-\infty, 2)$ e $(2, \infty)$.

6. (1,0 ponto)

Analise a concavidade e os pontos de inflexão da função $f(x) = x^4 - 6x + 2$ e esboce seu gráfico.

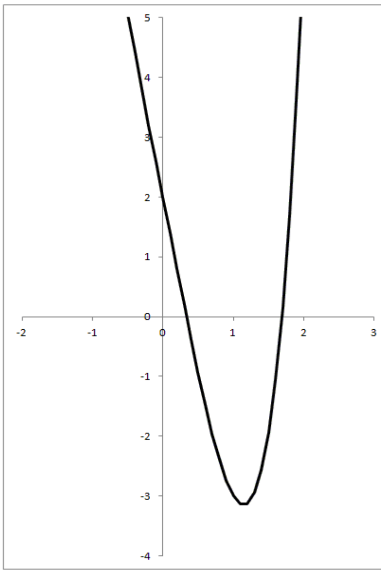
Solução:

$$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6 \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow x^3 = \frac{3}{2} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \text{ que é o único ponto crítico}$$

$$f''(x) = 12x^2 \Longrightarrow f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ que é o único candidato a ponto de inflexão}$$

Mas, tanto para $x < 0$ quanto para $x > 0$, $f'' > 0$. Logo a concavidade nos dois casos é positiva, assim f é côncava para cima em toda a reta real. Portanto $x = 0$ não é um ponto de inflexão. Como f'' é sempre positiva o único ponto crítico é um ponto de mínimo.



7. (1,0 ponto)

Encontre as antiderivadas das funções:

(a) $$\int x^6\,dx$$

(b) $$\int \frac{1}{x^6}\,dx$$

(c) $$\int \sqrt[3]{z}\,dz$$

(d) $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$$

(e) $$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$$

(f) $$\int (3s+4)^2\,ds$$

(g) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$$

(h) $$\int \frac{1}{8x-3}\,dx$$

(i) $$\int \frac{4x^7}{3x^8-2}\,dx$$

Solução:

(a) $$\int x^6\,dx = \frac{x^7}{7} + C$$

(b) $$\int \frac{1}{x^6}\,dx = \int x^{-6}\,dx = \frac{x^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$$

(c) $$\int \sqrt[3]{z}\, dz = \int z^{\frac{1}{3}}\, dz = \frac{z^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{z^4}}{4} + C$$

(d) $$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^{\,2}}}\, dx = \int x^{-\frac{2}{3}}\, dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$$

(e) $$\int (1-x)\sqrt{x}\, dx = \int (1-x)x^{\frac{1}{2}}\, dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}})\, dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

(f) $$\int (3s+4)^2\, ds = \int (9s^2 + 24s + 16)\, ds = 9\frac{s^{2+1}}{2+1} + 24\frac{s^{1+1}}{1+1} + 16s + C$$

$$= 9\frac{s^3}{3} + 24\frac{s^2}{2} + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$$

ou

$$\int (3s+4)^2\, ds = \frac{1}{3}\int (3s+4)^2 3\, ds = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(3s+4)^3\right] + C$$

$$= \frac{1}{9}(3s+4)^3 + C$$

(g) $$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right] dx = \int \left[x + 5 - 4x^{-2}\right] dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - 4\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C$$

(h) $$\int \frac{1}{8x-3}\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{8x-3} 8\, dx = \frac{1}{8}\ln(8x-3) + C$$

(i) $$\int \frac{4x^7}{3x^8-2}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{24x^7}{3x^8-2}\, dx = \frac{1}{6}\ln(3x^8-2) + C$$

8. (1,0 ponto)

Por substituição, encontre as antiderivadas das funções:

(a) $$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$$

(b) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}\, x\, dx$$

(c) $$\int \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\, dz$$

(d) $$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$$

Solução:

(a) $$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$$

Com $u = 1-2x^2$ e $\dfrac{du}{dx} = -4x$, podemos modificar a integral para

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = 3\cdot\frac{-1}{4}\int\sqrt{1-2x^2}\,(-4x)\,dx = -\frac{3}{4}\int\sqrt{u}\,du$$

$$= -\frac{3}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = -\frac{3}{4}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{3}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{3}{4}\frac{2\sqrt{u^3}}{3} + C = -\frac{\sqrt{u^3}}{2} + C = -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{2} + C$$

(b) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx$$

Com $u = 1-x^2$ e $\dfrac{du}{dx} = -2x$, substituindo na integral

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{1-x^2}\,(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt[3]{u}\,du = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{3}}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = -\frac{1}{2}\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{8} + C$$

$$= -\frac{3\,(1-x^2)^{\frac{4}{3}}}{8} + C = -\frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{8} + C$$

(c) $$\int \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,dz$$

Fazendo $u = \sqrt{z} = z^{\frac{1}{2}}$ e $\dfrac{du}{dz} = \dfrac{1}{2}z^{(\frac{1}{2}-1)} = \dfrac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{z}}$, a integral se torna

$$\int \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,dz = 2\int\frac{\cos\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}\,dz = 2\int\cos u\,du = 2\,\mathrm{sen}\,u + C$$

$$= 2\,\mathrm{sen}\left(\sqrt{z}\right) + C$$

(d) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

Com $u = x+1$, portanto $\frac{du}{dx} = 1$ e ainda $x = u-1$ a integral se torna

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du = \int\left(u^2-2u+1\right)u^{\frac{1}{2}}\,du =$$

$$= \int\left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 2\frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} - 2\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + C = 2u^{\frac{3}{2}}\left[\frac{u^2}{7} - \frac{2u}{5} + \frac{1}{3}\right] + C$$

$$= 2\,(x+1)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{(x+1)^2}{7} - \frac{2\,(x+1)}{5} + \frac{1}{3}\right] + C$$

9. (1,0 ponto)

Ache a área sob o gráfico das funções abaixo, entre $x = 0$ e $x = 1$:

$f(x) = x$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^3$

$f(x) = x^4$

$f(x) = x^5$

$f(x) = x^6$

Solução:

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_0^1 x^4\,dx = \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1^5}{5} - \frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\int_0^1 x^5\,dx = \left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1^6}{6} - \frac{0^6}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\int_0^1 x^6\,dx = \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^1 = \frac{1^7}{7} - \frac{0^7}{7} = \frac{1}{7}$$

10. (1,0 ponto)

Usando L'Hôpital calcule os limites:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$$

É uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e por L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$$

Novamente é uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e portanto

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1}$$

Mais uma forma indeterminada do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e novamente por L'Hôpital aplicado duas vezes

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+5x-8}{7x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+5}{14x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$