Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2013 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Determine o domínio das seguintes funções.

   (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

   (b) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

   (c) $y = \dfrac{1}{x - 2}$

   (d) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

   (e) $y = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

   Solução:

   (a) $y = \sqrt{4 - x^2}$

   Logo devemos que ter $(4 - x^2) \geq 0$ ou $4 \geq x^2$ ou $2 \geq x \geq -2$.

   O domínio D é $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -2 \leq x \leq 2\}$

(b) $$y = \sqrt{x^2 - 16}$$

É preciso que $x^2 - 16 \geq 0$ para que a função possa ser avaliada, logo

$$x^2 - 16 \geq 0 \longrightarrow x^2 \geq 16 \longrightarrow x \leq -4 \quad \text{ou} \quad x \geq 4$$

Portanto

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \leq -4 \quad \text{ou} \quad x \geq 4\}$$

(c) $$y = \frac{1}{x-2}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \neq 2\}$$

(d) $$y = \frac{1}{x^2 - 9}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \neq -3 \quad \text{ou} \quad x \neq 3\}$$

(e) $$y = \frac{x}{x^2 + 4}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

2. (1,0 ponto) ———————————————————

Para as seguintes funções, determine seus domínios e imagens.

(a) $y = 2x,$ para todo x
(b) $y = x^4,$ $0 \leq x$
(c) $y = x^2 + 2x - 1,$ $x \geq -1$
(d) $y = 2^x,$ para todo x

Solução:

Seja D o Domínio e I a Imagem da função.

(a) $y = 2x,$ para todo x

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R}\}$$

(b) $y = x^4,$ $0 \leq x$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \geq 0\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } y \geq 0\}$$

(c) $y = x^2 + 2x - 1,$ $x \geq -1$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } x \geq -1\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } y \geq -2\}$$

(d) $y = 2^x$, para todo x

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } y > 0\}$$

3. (1,0 ponto) ———————————————————————

Esboce o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, e ache o domínio e a imagem da função.

Solução:

Domínio:

Para que a função seja definida $4 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -2 \leq x \leq 2\}$

Imagem:

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 2 \geq y \geq 0\}$$

Raízes:

A função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, claramente se anula em $x = -2$ e $x = 2$.

$$\sqrt{4 - x^2} = 0 \iff 4 - x^2 = 0 \iff x^2 = 4 \iff x = \pm 2$$

portanto seu gráfico corta o eixo x em $x = -2$ e $x = 2$.

Máximos e Mínimos Locais:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot (4 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = 0 \Longrightarrow -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = 0$$

O denominador nunca se anula.

$f'(x)$ se anula em $x = 0 \Longrightarrow$ ponto crítico, pode ser máximo, mínimo ou nenhum dos dois.

Vejamos o sinal da primeira derivada.

Para $x < 0 \longrightarrow f' > 0 \longrightarrow f$ é crescente

Para $x > 0 \longrightarrow f' < 0 \longrightarrow f$ é decrescente

Portanto, em $x = 0$ há um ponto de máximo.

Pontos de inflexão:

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \left[-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right]' = 0 \Longrightarrow \left[-x\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]' = 0$$

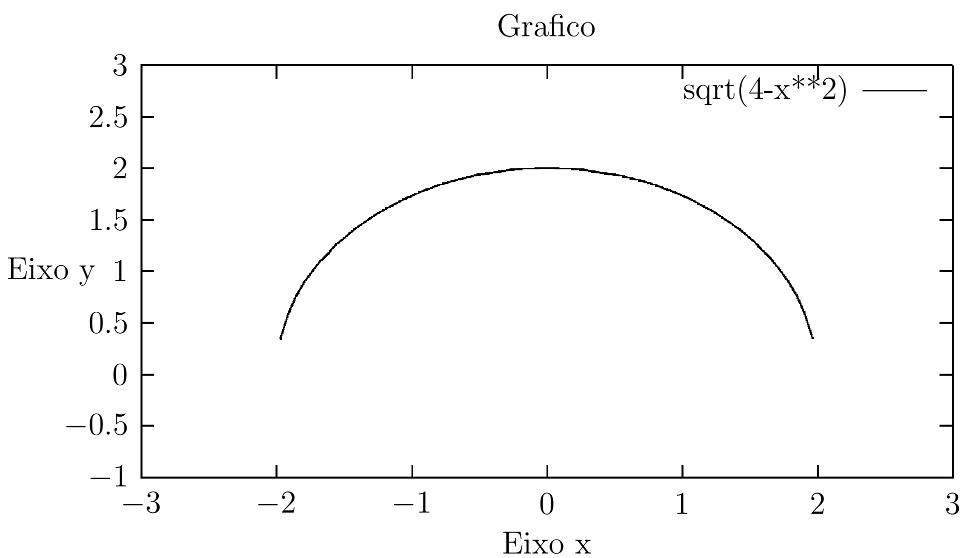
$$-\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x\left(-\frac{1}{2}\right)\left(4-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-2x) = 0$$

$$-\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} - x^2\left(4-x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{x^2}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\left[1 + \frac{x^2}{(4-x^2)}\right] = 0$$

$$1 + \frac{x^2}{(4-x^2)} = 0 \Longrightarrow \frac{4-x^2+x^2}{(4-x^2)} = 0$$



4. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites.

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(b) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$$

(c) $$\lim_{x\to +\infty} 2 + \frac{1}{x^2}$$

(d) $$\lim_{x \to 4} \sqrt{25 - x^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

(b) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \infty$$

(c) $$\lim_{x \to +\infty} 2 + \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 2 + 0 = 2$$

(d) $$\lim_{x \to 4} \sqrt{25 - x^2} = 3$$

5. (1,0 ponto) ———

Avalie os limites

(a) $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\mid x \mid}{x}$$

(b) $$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mid x \mid}{x}$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\mid x \mid}{x}$$

Solução:

Se $x > 0$ então $\mid x \mid = x$ e se $x < 0$ então $\mid x \mid = -x$. Portanto

(a) $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\mid x \mid}{x} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

(b) $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mid x \mid}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

(c) Como

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\mid x \mid}{x} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{\mid x \mid}{x} = 1$$

logo o limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mid x \mid}{x}$$

não existe porque os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes.

6. (1,5 pontos) ———

Mostre que toda função polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ números reais, é contínua em toda a reta dos reais.

Solução:

Para que uma função seja contínua em um ponto x, o limite da função neste ponto deve existir e ser igual ao valor da função no ponto. Isto é se $x = a$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Para uma função polinomial sabemos que o limite da função em a é sempre igual a $f(a)$. Vamos, a seguir, verificar esta afirmação.

Uma função polinomial pode ser escrita na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_2, a_1, a_0$ são números reais. O limite da função quando x tende a a é

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$$

aplicando as regras de limites

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_n x^n) + \lim_{x \to a} (a_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x \to a} (a_2 x^2) + \lim_{x \to a} (a_1 x) + \lim_{x \to a} (a_0)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = a_n \lim_{x \to a} (x^n) + a_{n-1} \lim_{x \to a} (x^{n-1}) + \cdots + a_2 \lim_{x \to a} (x^2) + a_1 \lim_{x \to a} (x) + a_0 \lim_{x \to a} (1)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = a_n (a^n) + a_{n-1} (a^{n-1}) + \cdots + a_2 (a^2) + a_1 (a) + a_0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Portanto toda função polinomial é contínua em toda a reta dos reais.

7. (1,5 pontos) ————————————————————————

Ache a primeira derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2}$

(c) $f(x) = (x^2 + 4)^2 (2x^3 - 1)^3$

(d) $f(x) = \cos(\text{sen } x)$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} + 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4} = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

(b) $$f(x) = \sqrt[3]{3x^2} = \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \sqrt[3]{3}\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{2}{3}-1} = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$$

(c) $$f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[(x^2+4)^2\right]'(2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2\left[(2x^3-1)^3\right]' \\
&= \left[2(x^2+4)(2x)\right](2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2\left[3(2x^3-1)^2(2\cdot 3x^2)\right] \\
&= 4x(x^2+4)(2x^3-1)^3 + 18x^2(x^2+4)^2(2x^3-1)^2 \\
&= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2\left[2(2x^3-1)^2 + 9x(x^2+4)\right]
\end{aligned}$$

(d) $$f(x) = \cos(\text{sen } x)$$

$$f'(x) = -\text{sen }(\text{sen } x)\cdot\cos x$$

8. (2,0 pontos)

Encontre $\frac{dy}{dx}$, onde

$$y = \frac{u^2-1}{u^2+1} \quad \text{e} \quad u = \sqrt[3]{x^2+2}$$

Solução:

Pela regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left[\frac{u^2-1}{u^2+1}\right]\frac{d}{dx}\left[\sqrt[3]{x^2+2}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(u^2-1)'\cdot(u^2+1) - (u^2-1)\cdot(u^2+1)'}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)^{-2/3}\cdot(2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2u(u^2+1) - 2u(u^2-1)}{(u^2+1)^2}\cdot\frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4u}{(u^2+1)^2} \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt[3]{x^2+2}}{((\sqrt[3]{x^2+2})^2+1)^2} \cdot \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8}{3((\sqrt[3]{x^2+2})^2+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+2)}}$$