Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 1^o semestre de 2015 - Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos) ———

   Dada a função $y = x^4 - 4x + 4$, esboce seu gráfico

   Solução:

   Candidatos a pontos críticos $\longrightarrow y' = 0$

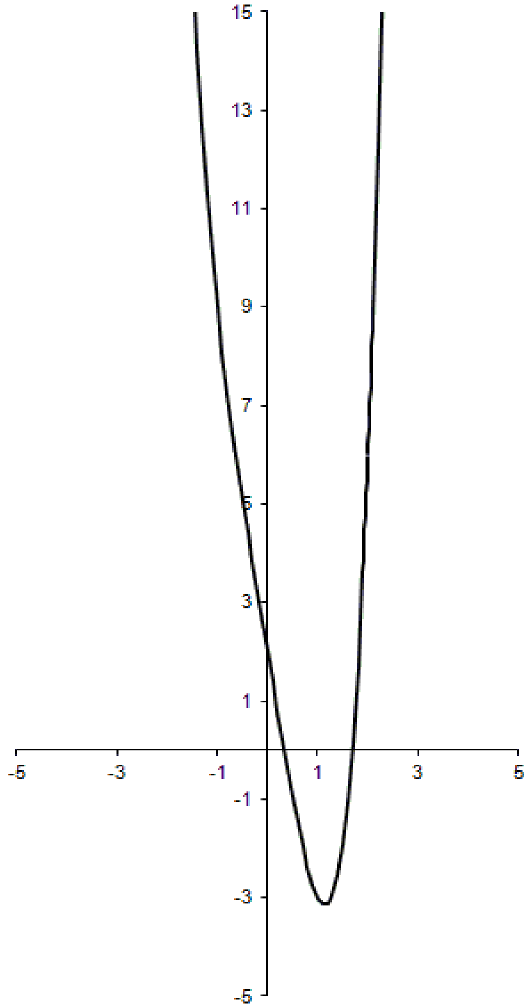
   $$y' = 0 \longrightarrow 4x^3 - 4 = 0 \longrightarrow x = \sqrt[3]{1} = 1$$

   Candidatos a pontos de inflexão $\longrightarrow y'' = 0$

   $$y'' = 0 \longrightarrow 12x^2 = 0 \longrightarrow x = 0$$

   $x = 0$ pode ser um ponto de inflexão, mas y'' é sempre positiva, logo a concavidade da curva tanto para $x < 0$ assim como para $x > 0$ é voltada para cima e portanto $x = 0$ não é um ponto de inflexão.

No único ponto crítico $x = 1$, o valor de $y'' > 0$ que indica ser o ponto crítico um ponto de mínimo relativo. Como só há um ponto crítico este é um ponto de mínimo global.



2. (2,5 pontos)

Calcule as integrais abaixo:

(a)

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$$

(b)

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$$

(c)

$$\int \operatorname{sen} \frac{x}{2}\, dx$$

Solução:

(a)

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{(1+2x+x^2)}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\right] dx$$

$$= \int \left[x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right] dx$$

$$= \int \left[x^{-\frac{1}{2}}\right] dx + \int \left[2x^{\frac{1}{2}}\right] dx + \int \left[x^{\frac{3}{2}}\right] dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} + 2\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

(b)

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int \left[-4x\sqrt{1-2x^2}\right] dx$$

com

$$u = 1-2x^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -4x$$

substituindo na integral

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int \left[\sqrt{u}\right] du = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}\,du$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}+1)}u^{(\frac{1}{2}+1)} + C$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{u^3}}{2} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{2} + C$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx &= \frac{-2}{-2}\int \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx\\ &= -2\int\left[-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right]dx\\ &= -2\cos\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

3. (2,5 pontos)

Usando a regra de L'Hôpital calcule os limites

(a)

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^4-256}{x^2-16}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}$$

(c)

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4+x^2}{e^x+1}$$

Solução:

(a)

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^4-256}{x^2-16}=\lim_{x\to 4}\frac{4x^3}{2x}=\frac{4\cdot 4^3}{2\cdot 4}=32\quad\left(\text{tipo}\ \ \frac{0}{0}\right)$$

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^x-e^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{e^x}{1}=e^2\quad\left(\text{tipo}\ \ \frac{0}{0}\right)$$

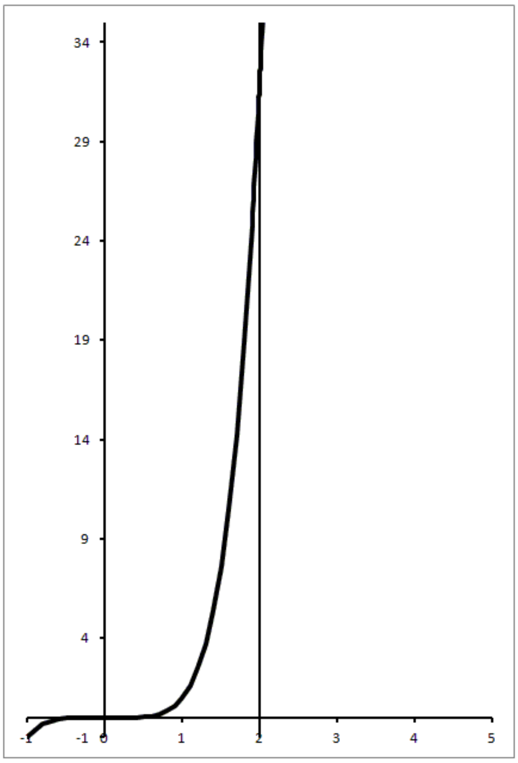
(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty}\frac{x^4+x^2}{e^x+1}&=\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^3+2x}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{12x^2+2}{e^x}=\\ &=\lim_{x\to +\infty}\frac{24x}{e^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{24}{e^x}=0\quad\left(\text{tipo}\ \ \frac{\infty}{\infty}\right)\end{aligned}$$

4. (2,5 pontos)

Seja a região entre o eixo x, a linha $x=2$ e a curva $y=x^5$. Ache o volume do sólido gerado por rotação da região em torno do eixo x.

Solução:
O gráfico ilustra as curvas que definem a região a ser rotacionada.



$$V = \pi \int_0^2 y^2\, dx = \pi \int_0^2 (x^5)^2\, dx = \pi \int_0^2 x^{10}\, dx = \pi \frac{x^{11}}{11}\bigg]_0^2 = \frac{2048\pi}{11}$$