Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1^o semestre de 2014 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

Ache a equação das retas tangente e normal a $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ em $(2, 4)$.

Solução:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

Logo a inclinção da reta tangente no ponto $(x, y) = (2, 4)$ é $m = f'(2) = 4$ e a reta tangente

$$y - 4 = 4(x - 2) \Longrightarrow y = 4x - 4$$

A equação da reta normal será

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \Longrightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

2. (1,0 ponto)

Seja $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$.

Encontre:

(a) os pontos críticos de f;

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Solução:

(a) os pontos críticos de f;

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) \Longrightarrow f'(x) = 0 \Longrightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

Logo são pontos críticos -3 e 2.

(b) os pontos aonde f tem mínimos e máximos relativos;

Estudando o sinal da primeira derivada

$$\begin{array}{lccc} \text{Para} & x < -3 & \rightarrow & f'(x) > 0 \\ \text{Para} & -3 < x < 2 & \rightarrow & f'(x) < 0 \\ \text{Para} & 2 < x & \rightarrow & f'(x) > 0 \end{array}$$

logo $x = -3$ é um ponto de máximo relativo e $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo.

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Do item anterior $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -3)$, descrescente em $(-3, 2)$ e novamente crescente em $(2, \infty)$.

3. (1,0 ponto) ———

Ache os extremos relativos da função $f(x) = 2 + x^{\frac{2}{3}}$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[2 + x^{\frac{2}{3}}\right]' \\ &= \left[0 + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right] \\ &= \left[\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}\right] \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

logo $x = 0$ é um ponto crítico de $f(x)$. Porque $f'(0)$ não está definido, mas 0 está no domínio da função. Observe que $f'(x)$ tende a ∞ quando x tende a 0. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativa e portanto descrescente, e quando $x > 0$, $f'(x)$ é positiva e portanto crescente. Desta forma $f(x)$ tem um mínimo relativo no ponto $x = 0$. Resumindo,

$$\begin{array}{llcl} \text{Para} & x < 0 & \rightarrow & f(x) \text{ é decrescente;} \\ \text{para} & x = 0 & \rightarrow & f(x) \text{ tem um mínimo;} \\ \text{para} & x > 0 & \rightarrow & f(x) \text{ é crescente;} \end{array}$$

4. (1,0 ponto)

Determine as dimensões do retângulo de área máxima que pode ser inscrito na região delimitada pela parábola $y^2 = 4px$ e a reta $x = a$.

Solução:

Seja $\boldsymbol{ABCD}$ o retângulo e (x, y) as coordenadas do ponto $\boldsymbol{A}$. Logo a área $\mathcal{A}$ do retângulo vale

$$\mathcal{A} = 2y(a - x) = 2y\left(a - \frac{y^2}{4p}\right) = 2ay - \frac{y^3}{2p}$$

e

$$\frac{d\mathcal{A}}{dy} = 2a - \frac{3y^2}{2p}$$

mas

$$\frac{d\mathcal{A}}{dy} = 0 \Longrightarrow 2a - \frac{3y^2}{2p} = 0 \Longrightarrow y = \sqrt{4ap/3}$$

logo $y = \sqrt{4ap/3}$ é um ponto crítico. A altura do retângulo é

$$2y = 2\sqrt{4ap/3}$$

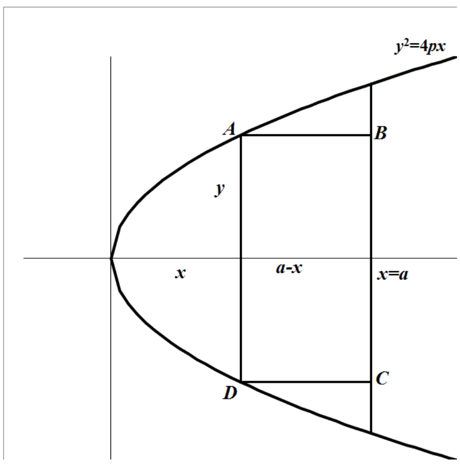
e a largura

$$a - x = \left(a - \frac{y^2}{4p}\right) = \frac{2a}{3}$$

A segunda derivada nos dá

$$\frac{d^2\mathcal{A}}{dy^2} = -\frac{6y}{2p} = -\frac{3y}{p} < 0$$

que garante que o ponto crítico é um ponto de máximo.



5. (1,0 ponto)

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^4 - 6x + 2$.

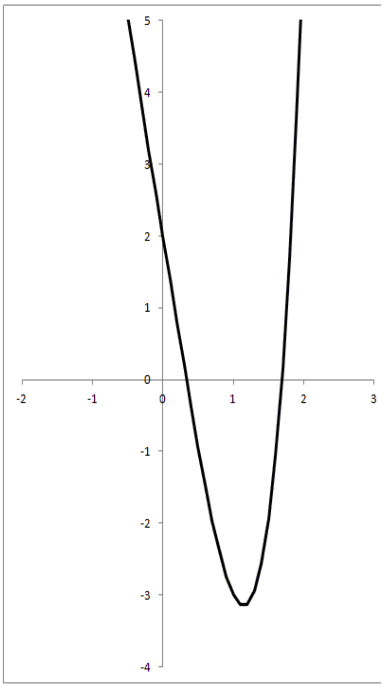
Solução:

$$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6 \quad \rightarrow \text{ ponto crítico } \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{3/2}$$

$$f''(x) = 12x^2 \quad \rightarrow \text{ possível ponto de inflexão } \rightarrow \quad x = 0$$

analisando o sinal da segunda derivada vemos que $f''(x)$ é positiva tanto para $x < 0$ quanto para $x > 0$. Logo $x = 0$ não é um ponto de inflexão. Como $f''(x)$ é positiva para $x \neq 0$, $x = 0$ será um ponto de mínimo absoluto, já que há somente um ponto crítico.



6. (1,0 ponto)

Encontre as antiderivadas:

(a) $\displaystyle\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$

(c) $\displaystyle\int (s^3+2)^2(3s^2)\, ds$

(d) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$

(e) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-x^2}\,x\,dx$

(f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\cos x\,dx$

Solução:

(a)
$$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (1-x)x^{1/2}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx$$
$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)}x^{\left(\frac{1}{2}+1\right)} - \frac{1}{\left(1+\frac{3}{2}\right)}x^{\left(\frac{3}{2}+1\right)} + C$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\frac{5}{2}}x^{\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

(b)
$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right]dx = \int \left[\; x \;+\; 5 \;-\; 4x^{-2}\;\right] dx$$
$$= \left[\frac{x^{(1+1)}}{(1+1)} + \;5x\; - \frac{4x^{(-2+1)}}{(-2+1)} + C\right]$$
$$= \frac{x^2}{2} + \;5x\; - \frac{4x^{-1}}{(-1)} + C$$
$$= \frac{x^2}{2} + \;5x\; + \frac{4}{x} + C$$

(c) Com
$$u = s^3+2 \Longrightarrow \frac{du}{ds} = 3s^2$$
$$\int (s^3+2)^2(3s^2)\,ds = \int (u)^2\,du = \frac{1}{(2+1)}u^{(2+1)} + C$$
$$= \frac{u^3}{3} + C = \frac{(u)^3}{3} + C = \frac{(s^3+2)^3}{3} + C$$

(d)
$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int\left[-4x\sqrt{1-2x^2}\right]dx$$
com
$$u = 1-2x^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -4x$$
substituindo na integral
$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int\left[\sqrt{u}\right]du = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}\,du$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{(\frac{1}{2}+1)} u^{(\frac{1}{2}+1)} + C$$

$$= -\frac{3}{4} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{2} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{u^3}}{2} + C$$

$$= -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{2} + C$$

(e) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}\, x\, dx = -\frac{1}{2} \int \left[\sqrt[3]{1-x^2}\right] [-2x]\; dx$$

$$= -\frac{1}{2} \int \left[\sqrt[3]{1-x^2}\right] [-2x]\; dx$$

com

$$u = 1 - x^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -2x$$

substituindo na integral

$$\int \sqrt[3]{1-x^2}\, x\, dx = -\frac{1}{2} \int \left[\sqrt[3]{u}\right]\; du = -\frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{3}}\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{3}\right)} u^{\left(\frac{1}{3}+1\right)} + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} u^{\frac{4}{3}} + C$$

$$= -\frac{3u^{\frac{4}{3}}}{8} + C$$

$$= -\frac{3\sqrt[3]{u^4}}{8} + C$$

$$= -\frac{3\sqrt[3]{(1-x^2)^4}}{8} + C$$

(f) $$\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx = \int [\operatorname{sen} x]^2 \cos x\, dx$$

com

$$u = \operatorname{sen} x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$$

substituindo na integral

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\, dx &= \int u^2\, du \\ &= \frac{1}{(1+2)} u^{(2+1)} + C \\ &= \frac{u^3}{3} + C \\ &= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C\end{aligned}$$

7. (1,0 ponto) ---

Ache a área sob o gráfico de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$, acima do eixo x e entre 0 e 1.

Solução:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{x}{2}\right]\Big|_0^1 = \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{1}{2}\right] - \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{0}{2}\right]$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left[\frac{1}{2}\right] - \operatorname{sen}^{-1}[0] = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

8. (1,0 ponto) ---

(a) Se f é uma função par, mostre que, para $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$$

(b) Se f é uma função ímpar, mostre que, para $a > 0$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$$

Solução:

Lembretes:

- Uma função é dita par se para qualquer ponto x no seu domínio, $-x$ também pertence ao domínio e $f(-x) = f(x)$.
- Uma função é dita ímpar se para qualquer ponto x no seu domínio, $-x$ também pertence ao domínio e $f(-x) = -f(x)$.

(a)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= -\int_{0}^{a} f(-u)(-1)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{com } u=-x \text{ e } du=-dx\\
&= \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad f(x) \text{ é par}\\
&= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= -\int_{0}^{a} f(-u)(-1)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{com } u=-x \text{ e } du=-dx\\
&= \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= \int_{0}^{a} -f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad f(x) \text{ é ímpar}\\
&= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\
&= 0\end{aligned}$$

9. (0,5 ponto)

Avalie as integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (1-t^2)t\,dt$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{8} \sqrt{1+3x}\,dx$

Solução:

(a) $$\int_{-1}^{2}(1-t^2)t\,dt = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(1-t^2)(-2t)\,dt$$
com

$$u = 1-t^2 \Longrightarrow \frac{du}{dt} = -2t$$

substituindo na integral

$$\begin{aligned}\int (1-t^2)t\,dt &= -\frac{1}{2}\int u\,du\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2}+C\\ &= -\frac{u^2}{4}+C\end{aligned}$$

ou

$$= -\frac{(1-t^2)^2}{4}+C$$

calculando a integral definida

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{2}(1-t^2)t\,dt &= \left[-\frac{(1-t^2)^2}{4}\right]_{-1}^{2}\\ &= \left[-\frac{(1-2^2)^2}{4}+\frac{(1-1^2)^2}{4}\right]\\ &= \left[-\frac{(-3)^2}{4}+\frac{(0)^2}{4}\right]\\ &= -\frac{(-3)^2}{4}\\ &= -\frac{9}{4}\end{aligned}$$

(b) $$\int_{1}^{8}\sqrt{1+3x}\,dx = \frac{1}{3}\int_{1}^{8}\sqrt{1+3x}\,(3)\,dx$$
com

$$u = 1+3x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 3$$

substituindo na integral

$$\begin{aligned}\int\sqrt{1+3x}\,dx &= \frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\int u^{1/2}\,du\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(\frac{1}{2}+1)}u^{(\frac{1}{2}+1)}+C\end{aligned}$$

$$= \frac{2u^{3/2}}{9} + C$$

$$= \frac{2(1+3x)^{3/2}}{9} + C$$

e a integral definida vale

$$\int_1^8 \sqrt{1+3x}\,dx = \left[\frac{2(1+3x)^{3/2}}{9}\right]_1^8$$

$$= \left[\frac{2(1+3\cdot 8)^{3/2}}{9}\right] - \left[\frac{2(1+3\cdot 1)^{3/2}}{9}\right]$$

$$= \left[\frac{2(25)^{3/2}}{9}\right] - \left[\frac{2(4)^{3/2}}{9}\right]$$

$$= \left[\frac{250}{9}\right] - \left[\frac{16}{9}\right]$$

$$= \frac{234}{9}$$

$$= 26$$

10. (1,0 ponto)

Seja a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{para } x < 0 \\ 1 - x & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

calcule

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\,dx.$$

Solução:

$$\int_{-\pi/2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-\pi/2}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \cos x\,dx + \int_0^1 (1-x)\,dx$$

$$= [\operatorname{sen} x]_{-\pi/2}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$= \left[\operatorname{sen}(0) - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] + \left[\left(1 - \frac{1^2}{2}\right) - \left(0 - \frac{0^2}{2}\right)\right]$$

$$= [0 - (-1)] + \left[\frac{1}{2} - 0\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

11. (0,5 ponto) ———

Usando integrais definidas ache o volume de um cilindro de raio da base r e altura h.

Solução:

O cilindro é gerado por rotação da região entre a linha $y = r$ em torno do eixo x, entre $x = 0$ e $x = h$.

$$V = \pi \int_0^h y^2\,dx = \pi \int_0^h r^2\,dx = \pi \cdot r^2 \cdot x\Big]_0^h = \pi r^2 h$$