Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 — 1º semestre de 2008 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

Determinar os extremos locais de $f(x)$, se $f(x) = x^{1/3}(8-x)$ (1,25 pontos).
Esboçar o gráfico de $f(x)$ (1,25 pontos).

Solução:

Primeira parte: Extremos Locais (1,25 pontos).

Claramente $x = 0$ e $x = 8$ são raízes da função, e o gráfico de $f(x)$ corta o eixo x nestes pontos. Além disso o domínio da função é toda a reta dos reais $(-\infty, \infty)$.

Os extremos locais satisfazem $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = [x^{1/3}(8-x)]' = [x^{1/3}]'(8-x) + x^{1/3}[(8-x)]' \quad \text{pela regra do produto}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(8-x) + x^{1/3}[-1] = \frac{(8-x)}{3x^{2/3}} - x^{1/3} = \frac{(8-x)-3x}{3x^{2/3}} = \frac{8-4x}{3x^{2/3}}$$

$$f'(x) = \frac{4(2-x)}{3x^{2/3}}$$

Portanto o ponto estacionário é $x = 2$. Observe que $f'(x)$ não está definida em $x = 0$. Vamos agora verificar o sinal da primeira derivada para estabelecer os intervalos aonde $f(x)$ cresce ou decresce.

Intervalo	$2-x$	$x^{2/3}$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 0)$	$+$	$+$	$+$	crescente
$(0, 2)$	$+$	$+$	$+$	crescente
$(2, \infty)$	$-$	$+$	$-$	decrescente

Logo o ponto estacionário é um ponto de máximo.

Enfim, $(2, 6\sqrt[3]{2})$ é o único extremo local da função.

Segunda parte: Gráfico (1,25 pontos).

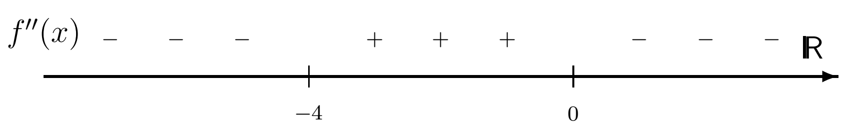
Vejamos agora a segunda derivada.

$$f''(x) = \left[\frac{4(2-x)}{3x^{2/3}}\right]' = \frac{[4(2-x)]'\, 3x^{2/3} - 4(2-x)\left[3x^{2/3}\right]'}{[3x^{2/3}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{[-4]\, 3x^{2/3} - 4(2-x)\left[\dfrac{3\cdot 2}{3x^{1/3}}\right]}{[3x^{2/3}]^2} = \frac{-12x^{2/3} - 4(2-x)\left[\dfrac{2}{x^{1/3}}\right]}{[3x^{2/3}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{\dfrac{-12x^{3/3} - 4(2-x)2}{x^{1/3}}}{9x^{4/3}} = \frac{\dfrac{-12x - 16 + 8x}{x^{1/3}}}{9x^{4/3}} = \frac{-4x-16}{9x^{5/3}}$$

Estudando o sinal da segunda derivada, temos que



Logo, pelo sinal da segunda derivada, $f(x)$ é côncava para baixo em $(-\infty, -4)$ e $(0, \infty)$, e é côncava para cima em $(-4, 0)$.

Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty} x^{1/3}(8-x) = \lim_{x\to-\infty} (\underbrace{x^{1/3}}_{\to-\infty}\underbrace{(8-x)}_{\to+\infty}) = -\infty$$

e

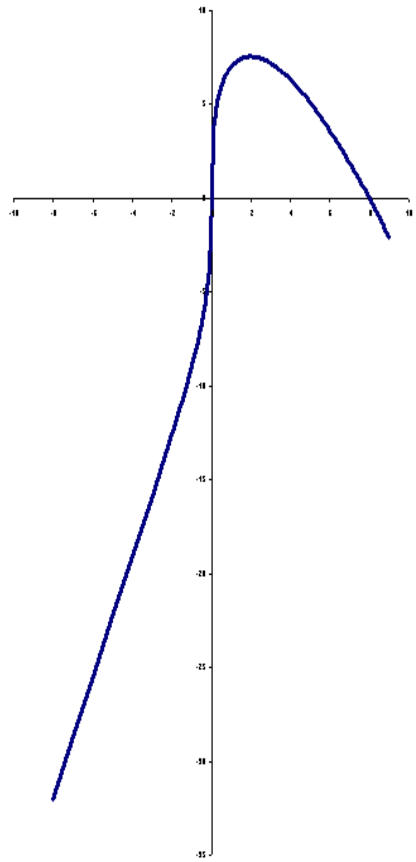
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/3}(8-x) = \lim_{x\to+\infty} (\underbrace{x^{1/3}}_{\to+\infty}\underbrace{(8-x)}_{\to-\infty}) = -\infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.

E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.

$$\lim_{x\to a}(x^{1/3}(8-x)) = (a^{1/3}(8-a)) \in \mathbb{R}, \;\; \forall a \in \mathbb{R}$$

Logo também não existem assíntotas verticais.



2. (2,5 pontos)

Calcule as integrais abaixo por substituição:

(a) (1,25 ponto)

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx$$

(b) (1,25 ponto)

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx$$

Solução

(a)

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx$$

Com $u = 7 - 6x^2$, temos $du = -12x\,dx$, e
para $x = 0 \longrightarrow u = 7$
para $x = 1 \longrightarrow u = 1$

Substituindo na integral

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx &= -\frac{1}{12}\int \sqrt[3]{7-6x^2}(-12)x\,dx &= -\frac{1}{12}\int \sqrt[3]{u}\,du \\
&= -\frac{1}{12}\int u^{1/3}\,du &= -\frac{1}{12}\frac{u^{4/3}}{(4/3)}+C \\
&= -\frac{1}{16}(7-6x^2)^{4/3}+C
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{16}(7-6x^2)^{4/3}\right]_0^1 \\
&= \left[-\frac{1}{16}(7-6\cdot 1^2)^{4/3}\right]-\left[-\frac{1}{16}(7-6\cdot 0^2)^{4/3}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{16}(1)^{4/3}\right]-\left[-\frac{1}{16}(7)^{4/3}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-1+7^{4/3}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[7^{4/3}-1\right] \\
&= \frac{7^{4/3}-1}{16}
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_2^{10}\frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx$$

Com $u=5x-1$, temos $du=5\,dx$ e
para $x=2 \longrightarrow u=9$
para $x=10 \longrightarrow u=49$
Substituindo na integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx &= 3\int\frac{1}{\sqrt{5x-1}}\,dx &= \frac{3}{5}\int\frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \frac{3}{5}\int u^{-1/2}\,du &= \frac{3}{5}\cdot 2u^{1/2}+C \\
&= \frac{6}{5}u^{1/2}+C
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx &= \left[\frac{6}{5}u^{1/2}\right]_9^{49} &&= \left[\frac{6}{5}49^{1/2}\right] - \left[\frac{6}{5}9^{1/2}\right] \\
&= \left[\frac{6}{5}7\right] - \left[\frac{6}{5}3\right] &&= \frac{6}{5}\left[7-3\right] \\
&= \frac{6}{5}\cdot 4 &&= \frac{24}{5}
\end{aligned}$$

3. (2,5 pontos)

Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y - x = 6$, $y - x^3 = 0$ e $2y + x = 0$.

Solução:

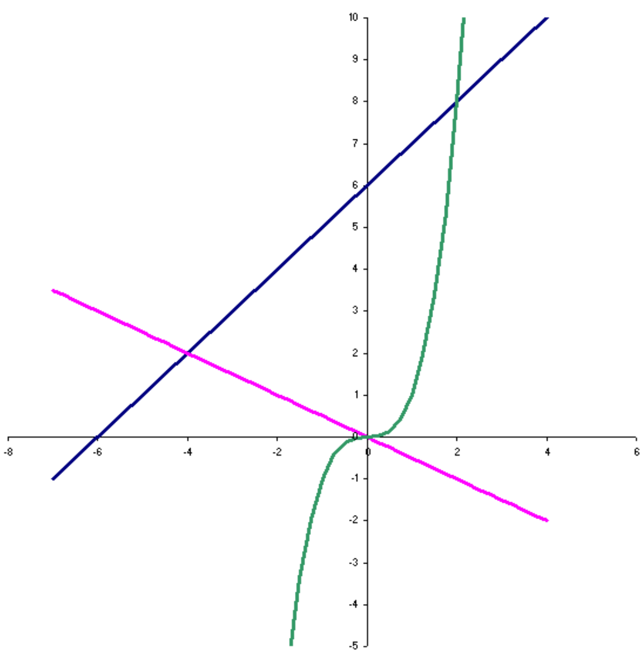
São três funções:

$$y = x + 6$$

$$y = -\frac{x}{2}$$

$$y = x^3$$

veja o esboço de seus gráficos:



Precisamos encontrar as interseções das seguintes curvas:

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = -\dfrac{x}{2} \end{cases} \quad \text{interseção} \quad \Longrightarrow (-4, -2)$$

$$\begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^3 \end{cases} \quad \text{interseção} \quad \Longrightarrow (2, 8)$$

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{2} \\ y = x^3 \end{cases} \quad \text{interseção} \quad \Longrightarrow (0, 0)$$

Vamos dividir o cálculo da área (A) em duas etapas. Na primeira calcularemos a área da região à direita do eixo y (A_d) e na segunda a área da região à esquerda do eixo y (A_e).

$$A = A_d + A_e$$

Onde

$$A_d = \int_0^2 \left[(x+6) - (x^3)\right] \, dx = \int_0^2 \left[-x^3 + x + 6\right] \, dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2$$

$$A_d = \left[-\frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{2} + 6 \cdot 2\right] - \left[-\frac{0^4}{4} + \frac{0^2}{2} + 6 \cdot 0\right] = \left[-\frac{16}{4} + \frac{4}{2} + 12\right] = [-4 + 2 + 12]$$

$$A_d = 10$$

e

$$A_e = \int_{-4}^0 \left[(x+6) - \left(-\frac{x}{2}\right)\right] \, dx = \int_{-4}^0 \left[x + 6 + \frac{x}{2}\right] \, dx = \int_{-4}^0 \left[\frac{3}{2}x + 6\right] \, dx$$

$$A_e = \left[\frac{3}{2}\frac{x^2}{2} + 6x\right]_{-4}^0 = \left[\frac{3}{2}\frac{0^2}{2} + 6 \cdot 0\right] - \left[\frac{3}{2}\frac{(-4)^2}{2} + 6 \cdot (-4)\right] = -\left[\frac{3}{2}\frac{16}{2} - 24\right] =$$

$$A_e = -\left[\frac{48}{4} - 24\right] = -[12 - 24] = -[-12]$$

$$A_e = 12$$

Enfim,

$$A = A_d + A_e = 10 + 12 = 22$$

4. (2,5 pontos)

Use a *Regra de L'Hôpital* para calcular os seguintes limites:

(a) (1,25 ponto)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x$$

(b) (1,25 ponto)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Solução:

(a)

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x$$

Quando x se aproxima de 0 pela direita $\ln x$ tende a $+\infty$ logo temos uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$, e pela Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

(b)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Quando x se aproxima de $+\infty$, $\ln x$ tende a $+\infty$ logo temos uma indeterminação do tipo ∞/∞, e pela Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$