Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2^o semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (1,00 ponto)

   Determine as inversas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = 2x^3 + 1$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

   Solução:

   (a) $f(x) = 2x^3 + 1 \quad \text{ou} \quad y = 2x^3 + 1$

   explicitando para x,

   $$y - 1 = 2x^3 \Longrightarrow \frac{y-1}{2} = x^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}} = x$$

   portanto a inversa de $f(x)$ é

   $$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{ou} \quad y = \sqrt[3]{x}$

   explicitando para x,

   $$y^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \Longrightarrow y^3 = x$$

   portanto a inversa de $f(x)$ é

   $$f^{-1}(x) = x^3$$

2. (1,50 pontos)

Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{25 - x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2}$

Solução:

(a) $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim\limits_{x\to 4}(25 - x^2)} = \sqrt{25 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

(b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 3}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 3}(x+2)} = \dfrac{3-2}{3+2} = \dfrac{1}{5}$

3. (1,50 pontos)

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x), \quad \lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) \ \text{ e } \ \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

onde

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$$

Solução:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)(x-1)} = \frac{2^- - 3}{(2^- + 2)(2^- - 1)} = \frac{-1}{(4)(1)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^+}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)(x-1)} = \frac{2^+ - 3}{(2^+ + 2)(2^+ - 1)} = \frac{-1}{(4)(1)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)(x-1)} = \frac{(1^- - 3)}{(1^- + 2)(1^- - 1)} = \frac{(-2)}{(3)(0^-)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)(x-1)} = \frac{(1^+ - 3)}{(1^+ + 2)(1^+ - 1)} = \frac{(-2)}{(3)(0^+)} = -\infty$$

4. (2,00 pontos)

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

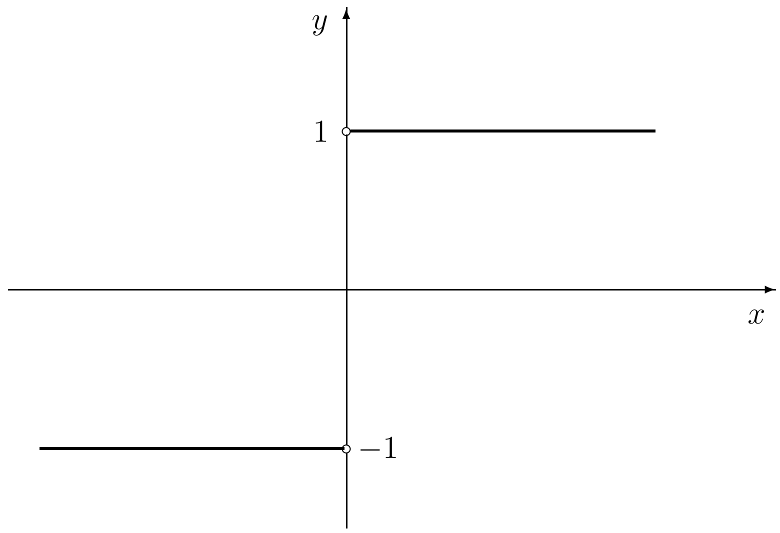
(a) $f(x) = \dfrac{|\, x \,|}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

Solução:

(a) $f(x) = \dfrac{|\, x \,|}{x}$

O gráfico de $f(x)$ está esboçado na figura a seguir.



$f(x)$ é descontínua em $x = 0$ porque $f(0)$ não está definida e porque o limite de $f(x)$ em $x = 0$ não existe, isto é

$$f(0) = \frac{|\, 0 \,|}{0} \Longrightarrow f(x) \text{ não é definida em } x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|\, x \,|}{x} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\, x \,|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \neq -1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) \text{ não existe}$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$f(x)$ é descontínua em $x = 2$ porque $f(2)$ não está definida e porque o limite de $f(x)$ em $x = 2$ não existe, isto é

$$f(2) = \frac{1}{2-2} = \frac{1}{0} \Longrightarrow f(x) \text{ não é definida em } x = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^- - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2^+ - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x) \Longrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) \text{ não existe}$$

5. (2,00 pontos)

Mostre que toda função polinomial é contínua em toda a reta dos números reais.

Solução:

Para que uma função seja contínua em um ponto x, o limite da função neste ponto deve existir e ser igual ao valor da função no ponto. Isto é se $x = a$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Para uma função polinomial sabemos que o limite da função em a é sempre igual a $f(a)$. Vamos, a seguir, verificar esta afirmação.

Uma função polinomial pode ser escrita na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_2, a_1, a_0$ são números reais. O limite da função quando x tende a a é

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

aplicando as regras de limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_n x^n) + \lim_{x\to a}(a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x\to a}(a_2x^2) + \lim_{x\to a}(a_1x) + \lim_{x\to a}(a_0)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = a_n \lim_{x\to a}(x^n) + a_{n-1}\lim_{x\to a}(x^{n-1}) + \cdots + a_2\lim_{x\to a}(x^2) + a_1\lim_{x\to a}(x) + a_0\lim_{x\to a}(1)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = a_n(a^n) + a_{n-1}(a^{n-1}) + \cdots + a_2(a^2) + a_1(a) + a_0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Portanto toda função polinomial é contínua em toda a reta dos reais.

6. (2,00 pontos) ———

Encontre as derivadas das seguintes funções:

(a) $$f(x) = 5x^6 - 2x^3 + x^{-5}$$

(b) $$f(x) = \frac{5x^2+1}{3x+2}$$

(c) $$f(x) = \sqrt[2]{x^2+1}$$

(d) $$f(x) = (x^2-1)(x^4-1) + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Solução:

(a)
$$f(x) = 5x^6 - 2x^3 + x^{-5}$$
$$f'(x) = (5x^6 - 2x^3 + x^{-5})'$$
$$f'(x) = (5x^6)' - (2x^3)' + (x^{-5})' =$$
$$f'(x) = 5(x^6)' - 2(x^3)' + (x^{-5})' =$$
$$f'(x) = 5 \cdot 6x^5 - 2 \cdot 3x^2 + (-5)x^{-6} =$$
$$f'(x) = 30x^5 - 6x^2 + (-5)x^{-6} =$$
$$f'(x) = 30x^5 - 6x^2 - 5\frac{1}{x^6} =$$
$$f'(x) = 30x^5 - 6x^2 - \frac{5}{x^6} =$$

(b)
$$f(x) = \frac{5x^2+1}{3x+2}$$
$$f'(x) = \left(\frac{5x^2+1}{3x+2}\right)' \quad \text{mas} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$
$$f'(x) = \frac{(5x^2+1)'(3x+2) - (5x^2+1)(3x+2)'}{(3x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(5 \cdot 2x + 0)(3x+2) - (5x^2+1)(3 \cdot 1 + 0)}{(3x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{(10x)(3x+2) - (5x^2+1)(3)}{(3x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{30x^2 + 20x - 15x^2 - 3}{(3x+2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{15x^2 + 20x - 3}{(3x+2)^2}$$

(c)

$$f(x) = \sqrt[2]{x^2+1}$$
$$f'(x) = \left(\sqrt[2]{x^2+1}\right)'$$
$$f'(x) = \left((x^2+1)^{\frac{1}{2}}\right)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (x^2+1)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+0)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}(2x)$$
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

(d)

$$f(x) = (x^2-1)(x^4-1) + \frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = \left((x^2-1)(x^4-1) + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$
$$f'(x) = \left((x^2-1)(x^4-1)\right)' + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$
$$f'(x) = \left((x^2-1)(x^4-1)\right)' + \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)'$$
$$f'(x) = \left((x^2-1)(x^4-1)\right)' + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'$$
$$f'(x) = (x^2-1)'(x^4-1) + (x^2-1)(x^4-1)' + \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'$$
$$f'(x) = (2x-0)(x^4-1) + (x^2-1)(4x^3-0) + \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right)$$
$$f'(x) = 2x(x^4-1) + 4x^3(x^2-1) - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$f'(x) = (2x^5-2x) + (4x^5-4x^3) - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$
$$f'(x) = 2x^5 - 2x + 4x^5 - 4x^3 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$
$$f'(x) = 6x^5 - 4x^3 - 2x - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$