2018.02

(2 pontos) ——————————————————————————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Aparentemente há uma descontinuidade no ponto $x = 2$, já que $x = 2$ não pertenceria ao domínio da função.

Entretanto, esta descontinuidade pode ser removida se reescrevermos a função da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$$

o que elimina a descontinuidade em $x = 2$.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 2$ parece haver uma descontinuidade. Vamos mostrar que esta descontinuidade existe.

O ponto $x = 2$ pertence ao domínio da função. Os limites laterais neste ponto são:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

entretanto o valor da função em $x = 2$ é $f(2) = 0$.

Logo

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 0$$

Portanto $f(x)$ é descontinua em $x = 2$.

Para a função a seguir, mostre que ela é contínua no intervalo indicado.

$$f(x) = 1 \quad \text{em} \quad (0, 1]$$

Solução:

Para ser contínua no intervalo a função deve ser contínua em cada ponto do intervalo.

Para ser contínua em um ponto a este ponto deve pertencer ao domínio da função, o limite da função neste ponto deve existir e o valor do limite deve coincidir com o valor da função no ponto, isto é

$$\begin{cases} 1. \quad a \in D(f) \\ 2. \quad \lim_{x\to a} f(x) \ \text{ existe (é igual a um número)} \\ 3. \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Cada ponto do intervalo pertence ao domínio da função o que satifaz a condição 1. em todos os pontos do intervalo. Ademais o limite da função para cada ponto no intervalo existe, já que

$$\lim_{x\to a} 1 = 1 \qquad \forall x \in (0, 1]$$

Logo são satisfeitas as condições 2. e 3..

Consequentemente, $f(x) = 1$ é contínua no intervalo $(0, 1]$.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2}$$

Solução:

$f(x)$ não é definida se o denominador $x - 2$ se anular ou se o radicando $x^2 - 7$ for negativo, isto é, se $x = 2$ ou se $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$. Qualquer outro número real está em um dos intervalos $(-\infty, -\sqrt{7}]$ ou $[\sqrt{7}, \infty)$. Temos então que provar a continuidade de $f(x)$ em todo o domínio. Ou seja, no interior dos intervalos (*usando limites*) e nos extremos (*usando limites laterais*).

Intervalos $(-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, \infty)$:

nos pontos interiores

$$\lim_{x\to c} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} = \frac{\sqrt{c^2 - 7}}{c - 2} = f(c) \qquad \forall c \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$$

nos extremos dos intervalos

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 7)(x - 2)}}{\sqrt{(x - 2)^3}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^3-2x^2-7x+14}}{\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}} = \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-2x^2-7x+14}{x^3-6x^2+12x-8}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{7}} \frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to-\sqrt{7}} \sqrt{x^2-7}}{\lim\limits_{x\to-\sqrt{7}} x-2} = \frac{\sqrt{(-\sqrt{7})^2-7}}{-\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7-7}}{-\sqrt{7}-2} = 0 = f(-\sqrt{7})$$

$$\lim_{x\to\sqrt{7}} \frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2} = \frac{\lim\limits_{x\to\sqrt{7}} \sqrt{x^2-7}}{\lim\limits_{x\to\sqrt{7}} x-2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{7})^2-7}}{\sqrt{7}-2} = \frac{\sqrt{7-7}}{\sqrt{7}-2} = 0 = f(\sqrt{7})$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-7}}{x-2}\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{(x^2-7)(x-2)}}{\sqrt{(x-2)^3}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^3-2x^2-7x+14}}{\sqrt{x^3-6x^2+12x-8}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2-7x+14}{x^3-6x^2+12x-8}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

enfim, $f(x)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, a saber $(-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, \infty)$.

Estude a continuidade na reta real da função $f(x)$ onde:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Solução:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

No ponto $x = 3$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 81$$

já que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^4 = 81$$

e

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^4 = 81$$

mas

$$f(3) = 0$$

sendo então o valor do limite diferente do valor da função no ponto. Daí f é descontínua no ponto $x = 3$. Nos demais pontos da reta real a função é contínua.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Solução:

Para que a função seja contínua em toda a reta real em todos os pontos o limite deve existir e ser igual ao valor da função nestes pontos.

Sabemos que a função não está definida para $x = 2$. Vamos verificar sua vizinhaça, seus limites laterais.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

logo,

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \nexists$$

consequentemente a função não é contínua em $x = 2$.

Verifique se a função

$$f(x) = \frac{|\, x \,|}{x}$$

é contínua em $x = 0$, justifique sua resposta.

Solução:

A função não está definida em $x = 0$. Além disso se verificarmos os limites laterais no ponto $x = 0$, teremos

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\, x \,|}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\, x \,|}{x} = +1$$

portanto o limite não existe em $x = 0$. O que mostra claramente que a função não é contínua em $x = 0$.

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem), justifique sua resposta.

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

Tem descontinuidades em $x = -3$ e $x = 2$ já que claramente estes pontos não pertencem ao domínio da função.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dentro das três regiões a função é polinomial e portanto contínua. Resta somente verificar os pontos limítrofes das regiões, isto é, $x = 0$ e $x = 1$.

Em $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

daí

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 0$.

Em $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - x = 1$$

daí

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = 1$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

Portanto $f(x)$ não tem descontinuidades.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \mid x \mid - x$$

Solução:

Para que a função seja contínua em toda a reta real em todos os pontos o limite dev existir e ser igual ao valor da função nestes pontos.

Sabemos que pela definição da função valor absoluto

$$\mid x \mid = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

logo, a função dada pode ser reescrita da forma

$$\mid x \mid - x = \begin{cases} -x - x & \text{se} \quad x < 0 \\ x - x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mid x \mid - x = \begin{cases} -2x & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Portanto, temos dois casos a analisar. O primeiro para $x < 0$ e o outro para $x \geq 0$.

Para $x < 0$

$$\lim_{x \to a} -2x = -2a = f(a) \text{ para todo } -\infty < x < 0$$

Para $x \geq 0$

$$\lim_{x \to a} 0 = 0 = f(a) \text{ para todo } 0 \leq x < \infty$$

Os limites existem e são iguais aos valores da função em todos os pontos da reta dos reais.

Enfim, a função $f(x) = \mid x \mid - x$ é contínua em toda a reta real.

Mostre que a função $f(x) = \sqrt{x^2}$ é contínua em toda a reta dos reais.

Solução:

Devemos mostrar que em todos os pontos da reta real, o limite existe e é igual ao valor da função no ponto.

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ Existe e } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x^2} = \sqrt{a^2} = a = f(a)$$

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$$

Solução:

$f(x)$ não é definida se o denomindador $x-4$ se anular ou se o radicando x^2-9 for negativo, isto , se $x=4$ ou se $-3 < x < 3$. Qualquer outro número real está em um dos intervalos $(-\infty,-3]$, $[3,4)$ ou $(4,\infty)$. Temos então que provar a continuidade de $f(x)$ em todo o domínio. Ou seja, no interior dos intervalos (*usando limites*) e nos extremos (*usando limites laterais*).

Intervalo $(-\infty,-3]$:

nos pontos interiores

$$\lim_{x\to c} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{c^2-9}}{c-4} = f(c) \qquad \forall c \in (-\infty,-3] \cup [3,4) \cup (4,\infty)$$

nos extremos dos intervalos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}\frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(x^2-9)(x-4)}}{\sqrt{(x-4)^3}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(x^3-4x^2-9x+36)}}{\sqrt{(x-4)(x^2-8x+16)}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{(x^3-4x^2-9x+36)}}{\sqrt{(x^3-12x^2+48x-64)}} \\
&= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^3-4x^2-9x+36)}{(x^3-12x^2+48x-64)}}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{(x^3-4x^2-9x+36)}{x^3}}{\frac{(x^3-12x^2+48x-64)}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{36}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{12x^2}{x^3}+\frac{48x}{x^3}-\frac{64}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{36}{x^3}}{1-\frac{12}{x}+\frac{48}{x^2}-\frac{64}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{36}{x^3}\right]}{\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{12}{x}+\frac{48}{x^2}-\frac{64}{x^3}\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty} 1-\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{36}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty} 1-\lim_{x\to-\infty}\frac{12}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{48}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{64}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty} 1-4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-9\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}+36\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty} 1-12\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+48\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}-64\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-4\cdot 0-9\cdot 0+36\cdot 0}{1-12\cdot 0+48\cdot 0-64\cdot 0}} = \sqrt{\frac{1-0-0+0}{1-0+0-0}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{(-3)^2-9}}{(-3)-4} = \frac{\sqrt{9-9}}{-7} = 0$$

Intervalo $[3,4)$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{(3)^2-9}}{(3)-4} = \frac{\sqrt{9-9}}{-7} = 0$$

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$$

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

Solução:

"Investigamos"se a função $f(x)$ dada possui alguma restrição em seu domínio, ou seja, no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Podemos então observar que a única restrição é devida ao denominador da função que deve ser diferente de zero, ou seja,

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 \neq 9$$

$$x \neq \pm 3$$

Logo,

O domínio da função $f(x)$ dada é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 3\}$, ou ainda, $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$. Podemos portanto concluir que, a função é contínua para todo x real desde que $x \neq \pm 3$.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$$

Solução:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$$

A função $f(x)$ tem uma discontinuidade não-removível em $x = 1$. Pela definição de continuidade, a seguinte equação deve ser verificada:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

Para que possamos concluir que $f(x)$ é uma função contínua (particularmente em $x = 1$).

Vejamos:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3}{0}$$

$$= +\infty$$

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

Solução:

Utilizando a definição de continuidade, a função f(x) é contínua se verificar todas as três condições abaixo:

$$(i) f(x_0) \text{ está definida } ; \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

(ii) existe o limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x); \forall x_0 \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0); \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Podemos verificar que:

o primeiro ítem não é verdadeiro para $x = 2$, ou seja, $f(x)$ não está definida nesse valor de x. Contudo, o segundo ítem é verdadeiro, ou seja,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Concluimos que, mediante a não verificação de todos os itens (i), (ii), (iii) simultaneamente, a função $f(x)$ não é contínua, uma vez que, não é contínua em $x = 2$.

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 16}$$

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 16}$$

a função f possui descontinuidade infinita em $x = +2$ e em $x = -2$ pois $f(+2)$ e $f(-2)$ não estão definidas:

$$x \to 2^- \to f(x) \to -\infty$$

$$x \to 2^+ \to f(x) \to +\infty$$

$$x \to -2^- \to f(x) \to +\infty$$

$$x \to -2^+ \to f(x) \to -\infty$$

A função f é contínua para valores de x tais que $x \neq +2$ e $x \neq -2$.

Verifique se a função f abaixo é contínua em $x = 2$: (utilize a definição de continuidade)

$$f(x) = \begin{cases} |\ x^2 - 1\ | & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4x - 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} f(2) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \leftarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \leftarrow 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \leftarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \leftarrow 2^+} (4x - 5) = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

logo, a função f é contínua em $x = 2$.

<u>7ª Questão</u> (1,0 ponto) – Verifique se a função $f(y) = \begin{cases} 2y+1, & y < 3 \\ 10 - y, & y \geq 3 \end{cases}$

O domínio natural de f , $D(f)$ é $\mathbb{R}$ e, portanto, $3 \in D(f)$. Além disso, $f(3) = 10 - 3 = 7$

Para calcularmos o limite, determinamos o limite a esquerda e o limite a direita de $f(y)$ quando y tende a 3.

$\lim\limits_{y \to 3^-} 2y + 1 = 2(3) + 1 = 7$ e $\lim\limits_{y \to 3^+} (10 - y) = 10 - 3 = 7$

logo,

$\lim\limits_{y \to 3^-} f(y) = 7$

portanto, f é contínua em 3.

Determine as inversas das seguintes funções

(a) $f(x) = x^3 + 1$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

Solução:

(a) $f(x) = x^3 + 1$

$$y = x^3 + 1 \Longrightarrow x^3 = y - 1 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

$$y = \sqrt[3]{x-2} \Longrightarrow y^3 = x - 2 \Longrightarrow y^3 + 2 = x$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = x^3 + 2$

Determine as inversas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^4 - 3$

(b) $f(x) = \sqrt[4]{x-1}$

Solução:

(a) $f(x) = 2x^4 - 3$

$$y = 2x^4 - 3 \quad \Longrightarrow \quad y + 3 = 2x^4 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y+3}{2} = x^4 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[4]{\frac{y+3}{2}} = x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[4]{\frac{x+3}{2}} \quad x \geq -3$$

(b) $f(x) = \sqrt[4]{x-1}$

$$y = \sqrt[4]{x-1} \quad \Longrightarrow \quad y^4 = x - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = y^4 + 1$$

$$f^{-1}(x) = x^4 + 1$$

Determine as inversas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^3 - 2$

(b) $f(x) = \sqrt[6]{x-1}$

Solução:

(a) $f(x) = 2x^3 - 2$

$$y = 2x^3 - 2 \implies y + 2 = 2x^3 \implies \frac{y+2}{2} = x^3 \implies \sqrt[3]{\frac{y+2}{2}} = x$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{2}}$$

(b) $f(x) = \sqrt[6]{x-1}$

$$y = \sqrt[6]{x-1} \implies y^6 = x - 1 \implies x = y^6 + 1$$

$$f^{-1}(x) = x^6 + 1$$

(b) $f(x) = \sqrt[2]{3x-2}$

Solução:

(b) $f(x) = \sqrt[2]{3x-2}$

$$y = \sqrt[2]{3x-2}$$

$$y^2 = 3x - 2$$

$$\frac{y^2+2}{3} = x$$

logo

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+2}{3}$$

Determine as inversas das seguintes funções:

(a) $f(x) = 2x^3 + 1$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solução:

(a) $f(x) = 2x^3 + 1$ ou $y = 2x^3 + 1$

explicitando para x,

$$y - 1 = 2x^3 \Longrightarrow \frac{y-1}{2} = x^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}} = x$$

portanto a inversa de $f(x)$ é

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ou $y = \sqrt[3]{x}$

explicitando para x,

$$y^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \Longrightarrow y^3 = x$$

portanto a inversa de $f(x)$ é

$$f^{-1}(x) = x^3$$

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine o domínio:

(a) $y = \dfrac{x-2}{x-1}$ $(x \neq 1)$

(b) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1}$ $(x \neq \frac{1}{2})$

(c) $y = \dfrac{x-4}{x+1}$ $(x \neq -1)$

Solução:

(a) $x = \dfrac{y-2}{y-1}$

$$xy - x = y - 2$$

$$xy - y = x - 2$$

$$y(x-1) = x - 2$$

$$y = \frac{x-2}{x-1}$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$).

(b) $$x = \frac{2y+1}{2y-1}$$

$$2xy - x = 2y + 1$$

$$2xy - 2y = x + 1$$

$$2y(x-1) = x + 1$$

$$y = \frac{x+1}{2x-2}$$

$$2x - 2 \neq 0$$

$$2x \neq 2$$

$$x \neq 1$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$).

(c) $$x = \frac{y-4}{y+1}$$

$$xy + x = y - 4$$

$$xy - y = -x - 4$$

$$y(x-1) = -(x+4)$$

$$y = \frac{-(x+4)}{x-1}$$

$$y = \frac{x+4}{1-x}$$

$$1 - x \neq 0$$

$$-x \neq -1$$

$$x \neq 1$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$).

. (2 pontos) ———————————————————————————

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Solução:

O denominador é zero em $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x), \quad \lim_{x\to 2^+} f(x), \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) \ \text{ e } \ \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

onde

$$f(x) = \frac{x-3}{(x+2)(x-1)}$$

Solução:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^-}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2^-}(x+2)(x-1)} = \frac{2^- - 3}{(2^- + 2)(2^- - 1)} = \frac{-1}{(4)(1)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 2^+}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2^+}(x+2)(x-1)} = \frac{2^+ - 3}{(2^+ + 2)(2^+ - 1)} = \frac{-1}{(4)(1)} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^-}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)(x-1)} = \frac{(1^- - 3)}{(1^- + 2)(1^- - 1)} = \frac{(-2)}{(3)(0^-)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-3}{(x+2)(x-1)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1^+}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)(x-1)} = \frac{(1^+ - 3)}{(1^+ + 2)(1^+ - 1)} = \frac{(-2)}{(3)(0^+)} = -\infty$$

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{3^2+3\cdot 3+9}{3+3}=\frac{9}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x-1)}=\infty$$

Calcule os limites abaixo:

(a) $$\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$$

(b) $$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}=\frac{(3\cdot 1-1)^2}{(1+1)^3}=\frac{(2)^2}{(2)^3}=\frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x^2-x-12}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x+3)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x+3)}=\frac{1}{7}$$

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-27}{x^3-9}$$

(a) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^4-27}{x^3-9}=\frac{3^4-27}{3^3-9}=\frac{81-27}{27-9}=\frac{54}{18}=\frac{27}{9}=3$$

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{(x+2)^5}$$

(b) $$\lim_{x \to 2} \frac{-4}{(x-2)^3}$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{(x+2)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(0+2)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{(2)^5} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

(b) $$\lim_{x \to 2} \frac{-4}{(x-2)^3} = \frac{-4}{0^3} = -\infty$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

Mostre, usando as propriedades de limites, que para toda função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, seu limite é igual ao valor da função no ponto. Isto é

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Solução:

O limite

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lim_{x\to a} a_i x^i$$

Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x\to a} a_i x^i = a_i \lim_{x\to a} x^i = a_i a^i$$

substituindo no somatório

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lim_{x\to a} x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = a_0 + a_1 a + \cdots + a_{n-1}a^{n-1} + a_n a^n = f(a)$$

(a) $$\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(25-x^2)} = \sqrt{25-(4)^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x \to 4} \sqrt{2x-5} + 3x$$

(b) $$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2-4}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 4} \sqrt{2x-5} + 3x = \sqrt{2 \cdot 4 - 5} + 3 \cdot 4 = \sqrt{8-5} + 12 = \sqrt{3} + 12$$

(b) $$\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2-4} = \frac{3}{3^2-4} = \frac{3}{9-4} = \frac{3}{5}$$

Calcule os limites abaixo:

(a) $$\lim_{x \to 4} \sqrt{25-x^2}$$

(b) $$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 4}(25-x^2)} = \sqrt{25-(4)^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

(b) $$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim_{x \to 3}(x-2)}{\lim_{x \to 3}(x+2)} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

Determine o limite das funções abaixo:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{3x^3-8}{x-2} =$$

(b) $$\lim_{y \to 2} \frac{3y-5}{y-2} =$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-8}{x-2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(3x^3-8)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}3x^3-\lim\limits_{x\to 0}8}{\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}2}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}x^3-8}{\lim\limits_{x\to 0}x-2}$$

$$=\frac{3.0^3-8}{0-2}$$

$$=\frac{-8}{-2}$$

$$=4$$

(b) $$\lim_{y\to 2}\frac{3y-5}{y-2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{y\to 2}(3y-5)}{\lim\limits_{y\to 2}(y-2)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{y\to 2}3y-\lim\limits_{y\to 2}5}{\lim\limits_{y\to 2}y-\lim\limits_{y\to 2}2}$$

$$=\frac{3\lim\limits_{y\to 2}y-5}{\lim\limits_{y\to 2}y-2}$$

$$=\frac{3.2-5}{2-2}$$

$$=\frac{1}{0}$$

$$=+\infty$$

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

Solução:

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= +\infty$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} 3+\sqrt{x^2+5}$$

$$= 6$$

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) =$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$$

$$= \lim_{x \to 2} x^3 - 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5$$

$$= 2^3 - 3.2 + 5$$

$$= 8 - 6 + 5$$

$$= 7$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

Calcule os seguintes limites:

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ \sqrt{x + 13} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Solução

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8}$$

Dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que aparece no denominador, ito é $x^1 = x$, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{3x + 5}{x}}{\frac{6x - 8}{x}}$$

e usando as técnicas para calcular limites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x+5}{x}}{\frac{6x-8}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\frac{6x-8}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3+\frac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-\frac{8}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 3+\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3+5\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-8\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}} = \frac{3+5\cdot 0}{6-8\cdot 0}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Resumindo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8} = \frac{1}{2}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 & \text{se} \quad x \le 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Vejamos inicialmente o limite pela esquerda, isto é,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2-5 = (3)^2-5 = 4$$

e agora o limite pela direita,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$$

Como os limites laterais são iguais, temos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

(a) $$\lim_{y\to 5} \frac{3y-5}{y-2} =$$

(b) $$\lim_{x\to 2} x^3 - 3x + 5 =$$

Solução:

(a) $$\lim_{y\to 5} \frac{3y-5}{y-2} =$$

$$\frac{\lim_{y\to 5}(3y-5)}{\lim_{y\to 5}(y-2)}$$

$$= \frac{\lim_{y\to 5} 3y - \lim_{y\to 5} 5}{\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 2}$$

$$= \frac{3\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 5}{\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 2}$$

$$= \frac{3\lim_{y\to 5} y - 5}{\lim_{y\to 5} y - 2}$$

$$= \frac{3.5-5}{5-2}$$

$$= \frac{15-5}{5-2}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} x^3 - 3x + 5 =$$

$$= \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} x^3 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} 2^3 - 3\lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} 8 - 3\lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 8 - 3.2 + 5$$

$$= 7$$

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{t\to -0}\left(\frac{3t-5}{t+2}\right)$$

(b) $$\lim_{x\to -4}\frac{x^3+7x^2+14x+8}{x+4}$$

Solução:

(a) $$\lim_{t\to 0}\left(\frac{3t-5}{t+2}\right)=\frac{3.0-5}{0+2}=-\frac{5}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to -4}\frac{x^3+7x^2+14x+8}{x+4}=?$$

mas

$$x^3+7x^2+14x+8=(x+4)(x^2+3x+2)=(x+4)(x+1)(x+2)$$

portanto

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^3+7x^2+14x+8}{x+4}=$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^3+7x^2+14x+8}{x+4}=$$

$$\lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+4}=$$

$$\lim_{x\to -4}(x+1)(x+2)=$$

$$(-3)(-2)=6$$

b) $$\lim_{x\to +3}\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}=$$

Estudando o sinal de $\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}$ quando $x\to +3$,ou seja, quando x tende a 3 pela direita (assumindo valores maiores do que 3), notamos que :

$2x^2+5x+1>0,$ para todo $x>3$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$, para todo $x>3$

Logo,

$$\lim_{x\to +3}\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}=+\infty$$