

Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2º semestre de 2016 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos) _____

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1}$

b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ onde $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

Solução:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3/x^2}{x^2/x^2 + 1/x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1 + 1/x^2} = -\infty$

b)
$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^4 - (x+h)^2 + 1] - [x^4 - x^2 + 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^2 - 2xh - h^2 + 1] - [x^4 - x^2 + 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - x^2 - 2xh - h^2 + 1 - x^4 + x^2 - 1]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 - 2xh - h^2]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 - 2x - h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} [4x^3 - 2x] + \lim_{h \rightarrow 0} [6x^2h + 4xh^2 + h^3 - h] \\
&= 4x^3 - 2x + 0 \\
&= 4x^3 - 2x
\end{aligned}$$

2. (2,5 pontos) _____

Verifique se a função

$$f(x) = \frac{|x|}{x}$$

é contínua em $x = 0$, justifique sua resposta.

Solução:

A função não está definida em $x = 0$. Além disso se verificarmos os limites laterais no ponto $x = 0$, teremos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$$

portanto o limite não existe em $x = 0$. O que mostra claramente que a função não é contínua em $x = 0$.

3. (2,5 pontos) _____

Ache a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, informe seu domínio e sua imagem e calcule seus valores em $x = 1$ e $x = 2$.

Solução:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} \implies f'(x) = \left[\sqrt[3]{x^2 + 1} \right]'$$

$$f'(x) = \left[(x^2 + 1)^{1/3} \right]'$$

$$= \left[(x^2 + 1)^{1/3} \right]'$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{(1/3-1)} [x^2 + 1]' \\
&= \frac{1}{3}(x^2 + 1)^{(-2/3)}(2x) \\
&= \frac{2x}{3(x^2 + 1)^{(2/3)}} \\
&= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}
\end{aligned}$$

Como a radiciação é cúbica qualquer valor real é válido, sendo então a função definida em toda a reta real. Logo,

$$\text{Domínio} = \{x \in \mathbf{R}\}$$

como o termo sob radiciação é sempre maior ou igual a 1, o valor da função sempre será também maior ou igual a 1, logo

$$\text{Imagem} = \{x \in \mathbf{R} \text{ tal que } x \geq 1\}.$$

E agora os valores da função nos pontos solicitados,

$$f(1) = \sqrt[3]{(1)^2 + 1} = \sqrt[3]{1 + 1} = \sqrt[3]{2}$$

e

$$f(2) = \sqrt[3]{(2)^2 + 1} = \sqrt[3]{4 + 1} = \sqrt[3]{5}$$

4. (2,5 pontos) _____

Determine as primeiras e segundas derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{x^2}{x^{2/3}} + \frac{x^2 + 1}{x^2}$

b) $f(x) = (x^2 + 4)^2(2x^3 - 1)^3$

Solução:

a)

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{x^2}{x^{2/3}} + \frac{x^2 + 1}{x^2} \\&= 2x^{-1/2} + x^2 x^{-2/3} + (x^2 + 1)x^{-2} \\&= 2x^{-1/2} + x^{2-2/3} + x^2 x^{-2} + x^{-2} \\&= 2x^{-1/2} + x^{4/3} + 1 + x^{-2} \\f'(x) &= 2 \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-1/2-1} + \left(\frac{4}{3} \right) x^{4/3-1} + 0 + (-2)x^{-2-1} \\&= -x^{-3/2} + \frac{4}{3} x^{1/3} - 2x^{-3} \\&= -\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{4}{3} \sqrt[3]{x} - 2 \frac{1}{x^3} \\f''(x) &= \left[-x^{-3/2} + \frac{4}{3} x^{1/3} - 2x^{-3} \right]' \\&= - \left(-\frac{3}{2} \right) x^{(-3/2-1)} + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \right) x^{(1/3-1)} - 2(-3)x^{(-3-1)} \\&= \frac{3}{2} x^{-5/2} + \frac{4}{6} x^{-2/3} + 6x^{-4} \\&= \frac{3}{2\sqrt{x^5}} + \frac{4}{6\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^4}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2 + 4)^2 (2x^3 - 1)^3 \\f'(x) &= \left[(x^2 + 4)^2 \right]' \cdot (2x^3 - 1)^3 + (x^2 + 4)^2 \cdot \left[(2x^3 - 1)^3 \right]' \\&= \left[2(x^2 + 4)^{(2-1)}(2x) \right] \cdot (2x^3 - 1)^3 + (x^2 + 4)^2 \cdot \left[3(2x^3 - 1)^{(3-1)}(6x^{(3-1)}) \right] \\&= \left[4x(x^2 + 4) \right] \cdot (2x^3 - 1)^3 + (x^2 + 4)^2 \cdot \left[18x^2(2x^3 - 1)^2 \right] \\&= 4(x^3 + 4x) \cdot (2x^3 - 1)^3 + 18(x^2 + 4)^2 \cdot (2x^7 - x^4)^2 \\f''(x) &= \left[4(x^3 + 4x) \cdot (2x^3 - 1)^3 + 18(x^2 + 4)^2 \cdot (2x^7 - x^4)^2 \right]' \\&= \left[4(x^3 + 4x) \cdot (2x^3 - 1)^3 \right]' + \left[18(x^2 + 4)^2 \cdot (2x^7 - x^4)^2 \right]'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \left[(x^3 + 4x) \cdot (2x^3 - 1)^3 \right]' + 18 \left[(x^2 + 4)^2 \cdot (2x^7 - x^4)^2 \right]' \\
&= 4 \left\{ (x^3 + 4x) \cdot \left[(2x^3 - 1)^3 \right]' + \left[(x^3 + 4x) \right]' \cdot (2x^3 - 1)^3 \right\} \\
&\quad + 18 \left\{ (x^2 + 4)^2 \cdot \left[(2x^7 - x^4)^2 \right]' + \left[(x^2 + 4)^2 \right]' \cdot (2x^7 - x^4)^2 \right\} \\
&= 4 \left\{ (x^3 + 4x) \cdot \left[3(2x^3 - 1)^2(6x) \right] + \left[(3x^2 + 4) \right] \cdot (2x^3 - 1)^3 \right\} \\
&\quad + 18 \left\{ (x^2 + 4)^2 \cdot \left[2(2x^7 - x^4)^1(14x^6) \right] + \left[2(x^2 + 4)^1(2x) \right] \cdot (2x^7 - x^4)^2 \right\} \\
&= 4 \left\{ 18x(x^3 + 4x)(2x^3 - 1)^2 + (3x^2 + 4)(2x^3 - 1)^3 \right\} \\
&\quad + 18 \left\{ 28x^6(x^2 + 4)^2(2x^7 - x^4) + 4x(x^2 + 4)(2x^7 - x^4)^2 \right\}
\end{aligned}$$