Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 1^o semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^4 - 6x + 2$, utilizando as ferramentas do cálculo.

   Solução:

   $$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

   $$f'(x) = 4x^3 - 6$$

   $$f''(x) = 12x^2$$

   Os candidatos a máximos e mínimos locais são:

   $$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$$

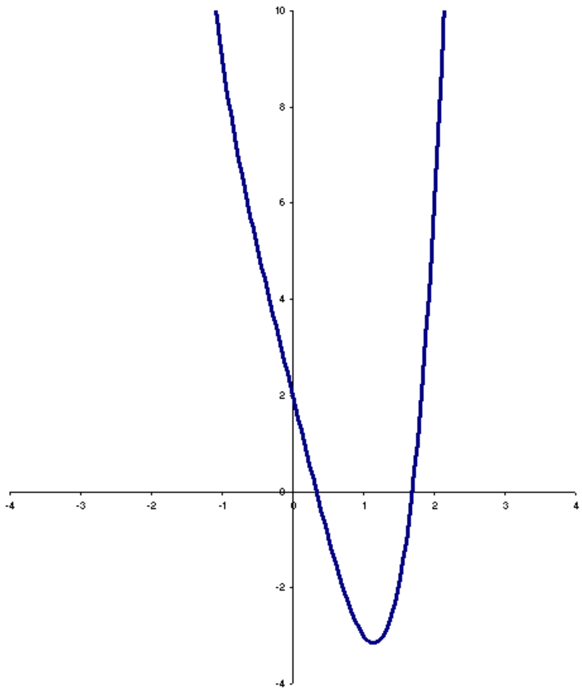
   Vamos estudar o sinal da primeira derivada para verificar as regiões aonde $f(x)$ cresce e decresce.

Intervalo	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, \sqrt[3]{\frac{6}{4}})$	$-$	decrescente
$(\sqrt[3]{\frac{6}{4}}, \infty)$	$+$	crescente

Da segunda derivada surgem os candidatos a pontos de inflexão.

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Entretanto para $x > 0$ e para $x < 0$ $f''(x) > 0$, logo a função é concava para cima para $x > 0$ e para $x < 0$, e não existe ponto de inflexão em $x = 0$.



2. (2,5 pontos)

Calcule as derivadas abaixo:

(a) $\dfrac{df}{dx}$ onde $f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

(b) $\dfrac{df}{dx}$ onde $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ onde $y(u) = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ e $u(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

Solução:

(a) $\dfrac{df}{dx}$ onde $f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

Usando a regra do produto, a regra das potências e a regra da cadeia

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= [(x^2+4)^2(2x^3-1)^3]' \\
&= [(x^2+4)^2]'\,(2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2\,[(2x^3-1)^3]' \\
&= 2(x^2+4)(2x)(2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 3(2x^3-1)^2(6x^2) \\
&= (4x)(x^2+4)(2x^3-1)^3 + 18(x^2)(x^2+4)^2(2x^3-1)^2 \\
&= (2x)(x^2+4)(2x^3-1)^2\,[2(2x^3-1) + 9(x)(x^2+4)] \\
&= (2x)(x^2+4)(2x^3-1)^2\,[(4x^3-2) + (9x^3+36x)] \\
&= (2x)(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)
\end{aligned}
$$

(b) $\dfrac{df}{dx}$ onde $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \left[\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right]' \\
&= \left[\frac{x^2}{(4-x^2)^{1/2}}\right]' \\
&= \frac{[x^2]'(4-x^2)^{1/2} - x^2[(4-x^2)^{1/2}]'}{[(4-x^2)^{1/2}]^2} \\
&= \frac{2x(4-x^2)^{1/2} - x^2\frac{1}{2}[(4-x^2)^{-1/2}](-2x)}{4-x^2} \\
&= \frac{2x(4-x^2)^{1/2} + \frac{x^2(x)}{(4-x^2)^{1/2}}}{4-x^2} \\
&= \frac{2x(4-x^2)^{1/2} + \frac{x^2(x)}{(4-x^2)^{1/2}}}{4-x^2} \\
&= \frac{2x(4-x^2)^{1/2}(4-x^2)^{1/2} + x^3}{(4-x^2)(4-x^2)^{1/2}} \\
&= \frac{2x(4-x^2) + x^3}{(4-x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{8x - 2x^3 + x^3}{(4-x^2)^{3/2}} \\
&= \frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

(c) $\dfrac{dy}{dx}$ onde $y(u) = \dfrac{u^2-1}{u^2+1}$ e $u(x) = \sqrt[3]{x^2+2}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{du} &= \left[\frac{u^2-1}{u^2+1}\right]' \\
&= \frac{[u^2-1]'(u^2+1)-(u^2-1)[u^2+1]'}{(u^2+1)^2} \\
&= \frac{2u(u^2+1)-(u^2-1)2u}{(u^2+1)^2} \\
&= \frac{(2u^3+2u)-(2u^3-2u)}{(u^2+1)^2} \\
&= \frac{2u^3+2u-2u^3+2u}{(u^2+1)^2} \\
&= \frac{4u}{(u^2+1)^2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \left[\sqrt[3]{x^2+2}\right]' \\
&= \left[(x^2+2)^{1/3}\right]' \\
&= \frac{1}{3}(x^2+2)^{-2/3}(2x) \\
&= \frac{2x}{3(x^2+2)^{2/3}} \\
&= \frac{2x}{3[(x^2+2)^{1/3}]^2} \\
&= \frac{2x}{3[u]^2} = \frac{2x}{3u^2}
\end{aligned}$$

enfim

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\
&= \left[\frac{4u}{(u^2+1)^2}\right]\left[\frac{2x}{3u^2}\right] \\
&= \frac{8x}{3u(u^2+1)^2} \\
&= \frac{8x}{3(\sqrt[3]{x^2+2})((\sqrt[3]{x^2+2})^2+1)^2}
\end{aligned}$$

3. (2,5 pontos)

Se $f(x) = x^2+1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x=-1$ e $x=1$.

Solução

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi(x^2+1)^2\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (x^4+2x^2+1)\, dx \\
&= \pi \left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^2 + x\right]_{-1}^{1} \\
&= \pi \left[\left(\tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{3}+1\right) - \left(-\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{3}-1\right)\right] \\
&= \pi \frac{56}{15}
\end{aligned}$$

4. (2,5 pontos)

Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=x$ e $x=0$.

Solução:

A área em questão se assemelha a uma fatia de torta.

Precisamos determinar as interseções entre o arco de círculo ($y=\sqrt{1-x^2}$) e as retas $y=x$ e $x=0$

$$\sqrt{1-x^2}=x \implies 1-x^2=x^2 \implies 2x^2=1 \implies x^2=\frac{1}{2}$$

Portanto a abcissa x da interseção é

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Integrando

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\sqrt{1-x^2}-x\right]\, dx &= \left[\frac{1}{2}\sin^{-1}x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Observe que este valor corresponde a um oitavo da área de um círculo de raio igual a 1.