Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1º semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (1,25 pontos) ---

   Ache os extremos relativos da função $f(x) = 2 + x^{2/3}$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

   Solução:

   $$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

   Logo, $x = 0$ é um ponto crítico desde que $f'(0)$ não é definido, embora $x = 0$ esteja no domínio de f. Observe que $f'(x)$ tende a ∞ quando x tende a 0. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativa e, portanto f é decrescente para $x \in (-\infty, 0)$ e quando $x > 0$, $f'(x)$ é positiva e, portanto f é crescente para $x \in (0, \infty)$. Daí podemos concluir que f tem um mínimo relativo em $x = 0$.

2. (1,25 pontos) ---

   Construa o gráfico da função

   $$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-6)}$$

   Solução:

1. **Domínio**

   O domínio de f é $(-\infty, 2) \cup (2, 6) \cup (6, \infty)$ visto que f não está definida em $x = 2$ e $x = 6$.

2. **Interseções com os eixos x e y**

   Claramente $f(x)$ se anula no ponto $x = 0$, logo $(0, 0)$ pertence ao gráfico de f.

3. **Assíntotas verticais e horizontais**

   Existem assíntotas verticais nos pontos $x = 2$ e $x = 6$, já que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 6^-} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 6^+} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \infty$$

   Existe uma assíntota horizontal para $y = 1$ quanto $x \to -\infty$, já que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2 - 8x + 12)/x^2} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{12}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{8}{x} + \frac{12}{x^2}\right)} = \frac{1}{(1 - 0 + 0)} = 1$$

   e para $y = 1$ quanto $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 8x + 12} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2 - 8x + 12)/x^2} =$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{12}{x^2}\right)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{8}{x} + \frac{12}{x^2}\right)} = \frac{1}{(1 - 0 + 0)} = 1$$

4. **Máximos e mínimos locais**

   São pontos aonde a primeira derivada se anula, isto é,

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)(x-6) - 2x^2(x-4)}{(x-2)^2(x-6)^2} = \frac{8x(3-x)}{(x-2)^2(x-6)^2} = 0$$

   logo, os pontos críticos são $x = 0$ (onde $y = 0$) e $x = 3$ (onde $y = -3$).
   Para verificar se são pontos de mínimo ou de máximo vamos verificar o sinal da primeira derivada.
   O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no intervalo estudado.

sinal de $f'(x)$

$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\mathbb{R}$
-1		0		1		2		3		4		5		6	
						assínt. vert.								assínt. vert.	

Logo $f(x)$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(3, \infty)$ e é crescente em $(0, 3)$.
Um ponto de mínimo local é $(x, y) = (0, 0)$.
Um ponto de máximo local é $(x, y) = (3, -3)$.

5. Pontos de inflexão

São aqueles aonde a segunda derivada se anula.

$$f''(x) = \frac{(x-2)^2(x-6)^2(24-16x) - 8x(3-x)(2)(x-2)(x-6)(2x-8)}{(x-2)^4(x-6)^4}$$

$$f''(x) = \frac{8(2x^3 - 9x^2 + 36)}{(x-2)^3(x-6)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{8(2x^3 - 9x^2 + 36)}{(x-2)^3(x-6)^3 = 0} \Longrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 36 = 0$$

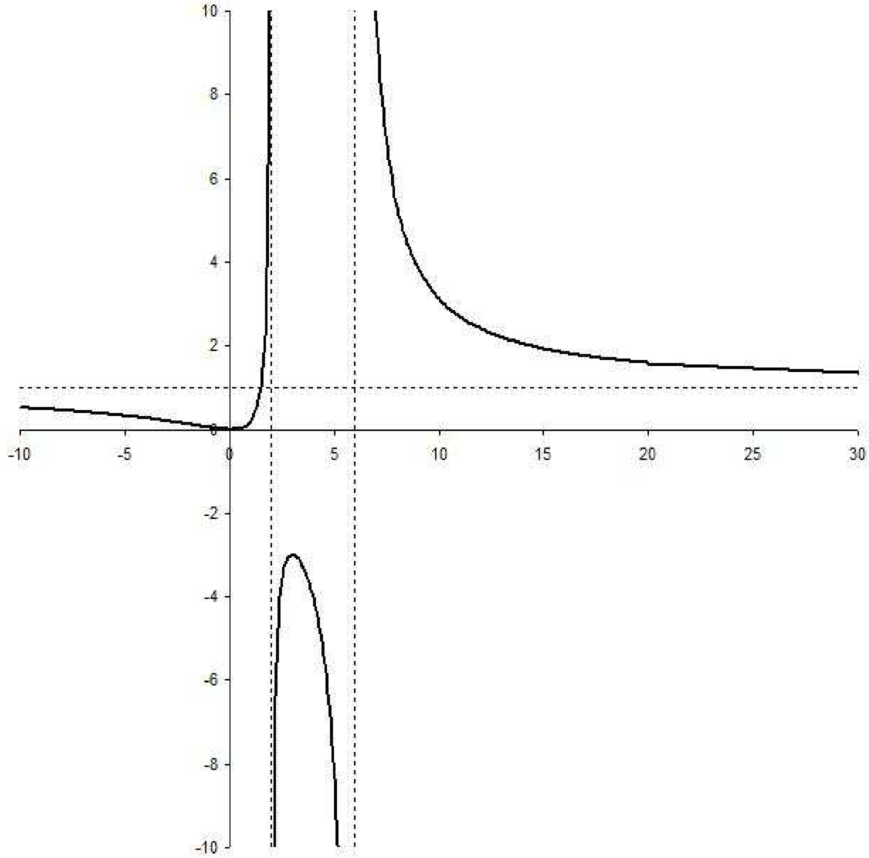
O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada no intervalo $[-8, 8]$.

sinal de $f''(x)$

$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$	$\mathbb{R}$
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Logo, além dos pontos $x = 2$ e $x = 6$ existe uma mudança de concavidade entre

$(-2, -1)$.



3. (1,25 pontos)

Calcule as integrais indefinidas

(a) $$\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\, dx$$

(b) $$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$$

Solução:

(a) $$\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\, dx = \frac{8}{3}\int (x^3+2)^{-3} 3x^2\, dx = \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}(x^3+2)^{-2}\right) + C$$

$$\int \frac{8x^2}{(x^3+2)^3}\, dx = -\frac{4}{3}\frac{1}{(x^3+2)^2} + C$$

(b) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

Seja $u = x+1$. Então $du = dx$ e $x = u-1$. Portanto,

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du$$

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\,du = \frac{2}{7}u^{7/2} - 2\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = 2u^{3/2}\left[\frac{1}{7}u^2 - \frac{2}{5}u + \frac{1}{3}\right] + C$$

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = 2(x+1)^{3/2}\left[\frac{1}{7}(x+1)^2 - \frac{2}{5}(x+1) + \frac{1}{3}\right] + C$$

4. (1,25 pontos) ---

Calcule as seguintes integrais definidas,

(a) $$\int_{-2}^{3} |\,x\,|\ dx$$

(b) $$\int_{0}^{2} \frac{x}{(5-4x-x^2)}\,dx$$

Solução:

(a) $$\int_{-2}^{3} |\,x\,|\ dx$$

Sabemos que

$$|\,x\,| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Podemos então dividir a integral da seguinte maneira

$$\int_{-2}^{3} |\,x\,|\ dx = \int_{-2}^{0} |\,x\,|\ dx + \int_{0}^{3} |\,x\,|\ dx = \int_{-2}^{0} -x\,dx + \int_{0}^{3} x\,dx$$

$$\int_{-2}^{3} |\,x\,|\ dx = -\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{3} = -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right] + \left[\frac{(3)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}\right]$$

$$\int_{-2}^{3} |\,x\,|\ dx = -\left[-\frac{(-2)^2}{2}\right] + \left[\frac{(3)^2}{2}\right] = \frac{4}{2} + \frac{9}{2} = \frac{13}{2}$$

(b) $$\int_{0}^{2} \frac{x}{(5-4x-x^2)}\,dx$$ **Anulada, o aluno recebe os pontos da questão**

5. (1,25 pontos) ---

Ache a expressão para o volume de uma esfera de raio r usando integração com volumes por discos.

Solução:

A esfera é gerada por revolução em torno do eixo x a região entre o semicículo definido por $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x e entre os pontos $x = -r$ e $x = r$. Por simetria em relação ao eixo y podemos calcular somente o volume da região entre $x = 0$ e $x = r$ e depois multiplicar por 2. Portanto o volume da esfera é dado por

$$V = 2\pi \int_0^r y^2\,dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)^2\,dx = 2\pi\ (r^2x - \frac{1}{3}x^3)\Big|_0^r$$

$$V = 2\pi\left(r^2r - \frac{1}{3}r^3\right) = 2\pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3\right) = 2\pi\left(\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

6. (1,25 pontos) ---

Ache a área da região delimitada pela parábola $y^2 = 4x$ e a reta $y = 2x - 4$.

Solução:

Vamos encontrar os pontos de interseção das duas curvas $y^2 = 4x$ e reta $y = 2x - 4$.

$$y^2 = 4x \ \text{ com } \ y = 2x - 4 \Longrightarrow (2x-4)^2 = 4x \Longrightarrow 4x^2 - 16x + 16 = 4x$$

$$4x^2 - 20x + 16 = 0 \ \text{ ou } \ x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow (x-4)(x-1) = 0$$

Logo os pontos de interseção são:

$$(x, y) = (1, -2) \ \text{ e } \ (x, y) = (4, 4)$$

Podemos agora integrar na variável x ou na variável y.

Integrando na variável x temos que separar em duas integrais, uma com intervalo de integração $[0, 1]$ somada a outra integral com intervalo de integração $[1, 4]$. Isto é,

$$A = \int_0^1 \left[(\sqrt{4x}) - (-\sqrt{4x})\right]\,dx + \int_1^4 \left[(\sqrt{4x}) - (2x-4)\right]\,dx$$

$$A = \int_0^1 \left[2\sqrt{4x}\right]\,dx + \int_1^4 \left[\sqrt{4x} - 2x + 4\right]\,dx$$

$$A = 4\int_0^1 \left[\sqrt{x}\right]\,dx + \int_1^4 \left[2\sqrt{x} - 2x + 4\right]\,dx$$

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{x}\,dx + 2\int_1^4 \sqrt{x}\,dx - 2\int_1^4 x\,dx + 4\int_1^4 1\,dx$$

$$A = \frac{8}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_1^4 - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 + 4\,[x]_1^4$$

$$A = \frac{8}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\left[\sqrt{x^3}\right]_1^4 - \left[x^2\right]_1^4 + 4\left[x\right]_1^4$$

$$A = \frac{8}{3}\left[\sqrt{1^3} - \sqrt{0^3}\right] + \frac{4}{3}\left[\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right] - \left[4^2 - 1^2\right] + 4\left[4 - 1\right]$$

$$A = \frac{8}{3}\left[1 - 0\right] + \frac{4}{3}\left[8 - 1\right] - \left[16 - 1\right] + 4\left[4 - 1\right]$$

$$A = \frac{8}{3}\left[1\right] + \frac{4}{3}\left[7\right] - \left[15\right] + 4\left[3\right]$$

$$A = \frac{8}{3} + \frac{28}{3} - 15 + 12$$

$$A = \frac{8}{3} + \frac{28}{3} - \frac{9}{3} = \frac{8 + 28 - 9}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

Integrando na variável y temos o intervalo de integração $[-2, 4]$. Ou seja, é a área entre a curva $x = \frac{1}{2}(y+4)$ e $x = \frac{y^2}{4}$

$$A = \int_{-2}^{4}\left[\left(\frac{1}{2}(y+4)\right) - \left(\frac{1}{4}y^2\right)\right]\, dy = \int_{-2}^{4}\frac{1}{4}\left[2y + 8 - y^2\right]\, dy$$

$$A = \frac{1}{4}\int_{-2}^{4}\left[2y + 8 - y^2\right]\, dy = \frac{1}{4}\left[y^2 + 8y - \frac{1}{3}y^3\right]_{-2}^{4}$$

$$A = \frac{1}{4}\left[4^2 + 8\cdot 4 - \frac{1}{3}4^3 - (-2)^2 - 8\cdot(-2) + \frac{1}{3}(-2)^3\right]$$

$$A = \frac{1}{4}\left[4^2 + 8\cdot 4 - \frac{64}{3} - 4 + 16 - \frac{8}{3}\right] = \frac{1}{4}\left[16 + 32 - \frac{64}{3} - 4 + 16 - \frac{8}{3}\right]$$

$$A = \frac{1}{4}\left[60 - \frac{72}{3}\right] = \frac{1}{4}\left[60 - 24\right] = \frac{36}{4} = 9$$

7. (1,25 pontos) ———————————————————

Ache as seguintes antiderivadas

(a) $$\int \frac{1}{8x-3}\, dx$$

(b) $$\int \frac{4x^7}{3x^8-2}\, dx$$

Solução:

(a) $$\int \frac{1}{8x-3}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8}{8x-3}\,dx = \frac{1}{8}\ln \mid 8x-3 \mid +C$$

(b) $$\int \frac{4x^7}{3x^8-2}\,dx = \frac{1}{6}\int \frac{24x^7}{3x^8-2}\,dx = \frac{1}{6}\ln \mid 3x^8-2 \mid +C$$

8. (1,25 pontos)

Usando a regra de L'Hôpital calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x-\pi}}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x-\pi}} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{1/(2\sqrt{x-\pi})} = \lim_{x\to\pi^+} (2\sqrt{x-\pi})\cos x = 0$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2+3x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3} = \frac{7}{3}$$