Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Matemática para Computação

1º semestre de 2006

Gabarito da AP1

1ª Questão (1,0 ponto) – Determine o domínio de $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$$

logo, $D(f) = \Re$

2ª Questão (1,0 ponto) – Determine as funções compostas $fog(x)$ e $gof(x)$ de

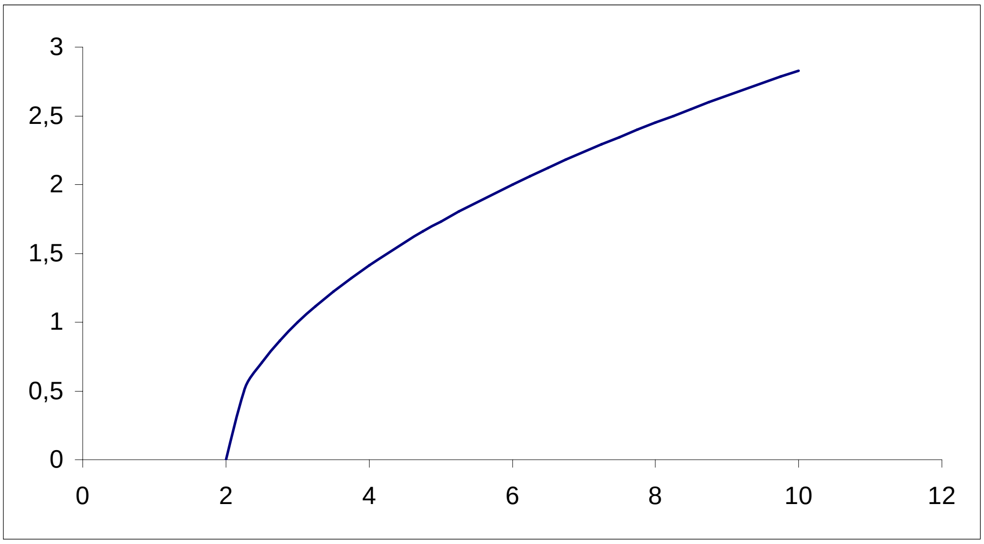
$f(x) = x - 8$ e $g(x) = 5x^2 - 4x + 1$

$$fog(x) = f(g(x)) = 5x^2 - 4x + 1 - 8 = 5x^2 - 4x - 7$$

$$gof(x) = g(f(x)) = 5(x-8)^2 - 4(x-8) + 1 = 5(x^2 - 16x + 64) - 4x + 32 + 1$$

$$g(f(x)) = 5x^2 - 80x + 320 - 4x + 33 = 5x^2 - 84x + 353$$

3ª Questão (1,25 ponto) – Esboce o gráfico de $y = \sqrt{x - 2}$



4ª Questão (1,0 ponto) – Ache a função inversa de $f(x)=\frac{5}{x^3}, x>0$

$$y=\frac{5}{x^3}\rightarrow isolando\ \ x\ \ em\ \ função\ \ de\ \ y\rightarrow x^3=\frac{5}{y}\rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{5}{y}}\rightarrow opcional\rightarrow y=\sqrt[3]{\frac{5}{x}}$$

5ª Questão (1,0 ponto) – Use a equação $y=x^2+5x+6$ para responder as questões:

a) Para quais valores de x temos y = 0?

Fazendo y = 0 temos que na equação acima obtemos a seguinte equação do segundo grau $0=x^2+5x+6$ cujas raízes são dadas por:

$$0=x^2+5x+6$$
$$\Delta=b^2-4.a.c$$
$$\Delta=(5)^2-4.(1).(6)$$
$$\Delta=25-24$$
$$\Delta=1$$

$$x=\frac{-5\pm1}{2}$$

$$\rightarrow x'=\frac{-5+1}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$
$$\rightarrow x'=\frac{-5-1}{2}=\frac{-6}{2}=-3$$

b) Para quais valores de x temos y = 2 ?

Fazendo y = 0 temos que na equação acima obtemos a seguinte equação do segundo grau $2=x^2+5x+6$ cujas raízes são dadas por:

$$2=x^2+5x+6$$
$$0=x^2+5x+4$$
$$\Delta=b^2-4.a.c$$
$$\Delta=(5)^2-4.(1).(4)$$
$$\Delta=25-16$$
$$\Delta=9$$

$$x=\frac{-5\pm3}{2}$$
$$\rightarrow x'=\frac{-5+3}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

$$\rightarrow x' = \frac{-5-3}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

c) Para quais valores de x temos $y \leq 0$?

$$x^2 + 5x + 6 \leq 0$$

As raízes dessa equação do segundo grau foram calculadas na letra a). Podemos através do estudo de sinal dessa equação obter o intervalo onde a desigualdade acima é verificada.

Logo, temos que o intervalo onde $x^2 + 5x + 6 \leq 0$ é $[2,3]$.

d) Y tem valor mínimo? Y tem valor máximo? Caso os tenha, determine-os.

Como a > 0 na equação acima, temos um ponto de mínimo cujas coordenadas são dadas por:

$$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = -\frac{5}{2}$$

6ª Questão (1,25 ponto) – Calcule os seguintes limites:

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{7x^3+3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}\left(7x^3+3\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt[3]{7+\frac{3}{x^3}}}$$

como:

$\lim_{x\to+\infty} 5 = 5$ e $\lim_{x\to+\infty} 7 = 7$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3} = 3\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 3.(0) = 0$$

logo,

$$\lim_{x\to+\infty} 7 + \frac{3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} 7 + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x^3} = 7 + 0 = 7$$

temos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{7+\frac{3}{x^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\left(7+\frac{3}{x^3}\right)}=\sqrt[3]{7}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{7x^3+3}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}5}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{7x^3+3}}=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$$

b) $\lim_{x\to+3}\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}=$

Estudando o sinal de $\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}$ quando $x\to+3$, ou seja, quando x tende a 3 pela direita (assumindo valores maiores do que 3), notamos que :

$2x^2+5x+1>0,$ para todo $x>3$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$, para todo $x>3$

Logo,

$$\lim_{x\to+3}\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}=+\infty$$

<u>7ª Questão</u> (1,0 ponto) – Verifique se a função $f(y)=\begin{cases}2y+1, & y<3\\ 10-y, & y\geq 3\end{cases}$

O domínio natural de f, $D(f)$ é $\mathbb{R}$ e, portanto, $3\in D(f)$. Além disso, $f(3)=10-3=7$

Para calcularmos o limite, determinamos o limite a esquerda e o limite a direita de $f(y)$ quando y tende a 3.

$\lim_{y\to3^-}2y+1=2(3)+1=7$ e $\lim_{y\to3^+}(10-y)=10-3=7$

logo,

$$\lim_{y\to3^-}f(y)=7$$

portanto, f é contínua em 3.

<u>8ª Questão</u> (1,0 ponto) – Dado que $f(3)=-1$ e $f'(3)=5$, ache uma equação para a reta tangente ao gráfico $y=f(x)$ no ponto $x=3$.

$y - y_p = m(x - x_p) \Rightarrow y + 1 = 5(x - 3)$

9ª Questão (1,5 ponto) – Calcule as seguintes derivadas:

a) $\frac{d}{dx}\left[(4x^2 - 1)(3x + 6)\right] = \frac{d}{dx}\left[12x^3 + 24x^2 - 3x - 6\right] = 36x^2 + 48x - 3$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x^2 - 4}\right) = 3x^2(x^2 - 4) - x^3(2x) = 3x^4 - 12x^2 - 2x^4 = x^4 - 12x^2$