Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2° semestre de 2006.

Nome –

Assinatura –

Observações:
1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.
2. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
3. Você pode usar lápis para responder as questões.
4. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
5. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

---

1. (2,0 pontos)

Calcule as funções $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f.g)(x)$, $(f/g)(x)$. Determine o domínio de cada uma dessas funções.

$$f(x) = x + 5 \quad g(x) = x^2 - 1$$

Solução:

$$(f+g)(x) = x + 5 + x^2 - 1 = x^2 + x + 4$$

o domínio de $(f+g)(x)$ é (Dom $f = \mathbb{R}$).

$$(f-g)(x) = x + 5 - x^2 + 1 = -x^2 + x + 6$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = \mathbb{R}$).

$$(f.g)(x) = (x+5)(x^2-1) = x^3 - x + 5x^2 - 5 = x^3 + 5x^2 - x - 5$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = \mathbb{R}$).

$$(f/g)(x) = \frac{x+5}{x^2-1}$$

pela definição,

$$x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

logo, o domínio é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1$).

2. (1,0 ponto)

Calcule as funções compostas $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ e determine o domínio de cada uma dessas funções:

$$f(x) = 1 - 2x; \qquad g(x) = 2x - \frac{1}{3}$$

Solução:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(2x - \frac{1}{3}\right) = 1 - 2.\left(2x - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 - 4x + \frac{2}{3} = -4x + \frac{5}{3} = \frac{-12x+5}{3}$$

logo, o domínio é (Dom $f = \mathbb{R}$).

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1-2x) = 2(1-2x) - \frac{1}{3}$$

$$= 2 - 4x - \frac{1}{3} = -4x + \frac{5}{3} = \frac{-12x+5}{3}$$

logo, o domínio é (Dom $f = \mathbb{R}$).

3. (2,5 pontos) ———

Esboce os gráficos da seguinte função utilizando as ferramentas do cálculo. Pede-se para a função f : $f = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

1 - Domínio;

gráfico:

2 - Intersecções com os eixos x e y;
3 - Assíntotas verticais e horizontais;
4 - Pontos de máximo de mínimos locais;
5 - Pontos de Inflexão.

Solução:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$$

i) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f = \mathbb{R}$).

ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{9}{x^2} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 + 0) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{9}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 + 0) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.

E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.

Não existem assíntotas verticais posto que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

iii) Vejamos os máximos e mínimos locais.

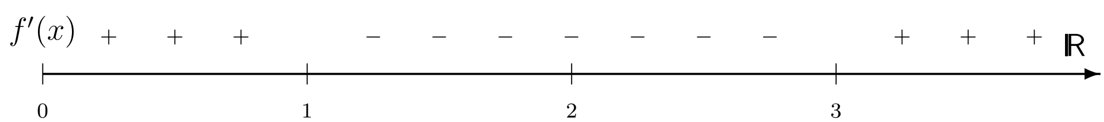
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

e

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1)$$

Os máximos e mínimos locais ocorrem em $x = 1$ e $x = 3$.

O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no intervalo estudado.



Logo $f(x)$ é crescente em $(-\infty, 1)$ e $(3, \infty)$ e é decrescente em $(1, 3)$.

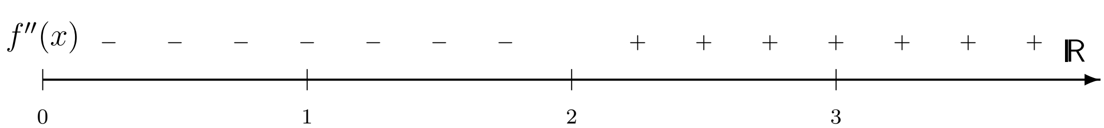
O ponto de máximo local é $(1, 5)$.

O ponto de mínimo local é $(3, 1)$.

iv) Vejamos os pontos de inflexão.

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

portanto o ponto de inflexão ocorre em $x = 2$. O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada em torno do ponto 2.



Logo, pelo sinal da segunda derivada, f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$ e é côncava para cima em $(2, \infty)$. O ponto de inflexão é $(2, 3)$

v) Interseções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (interseção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

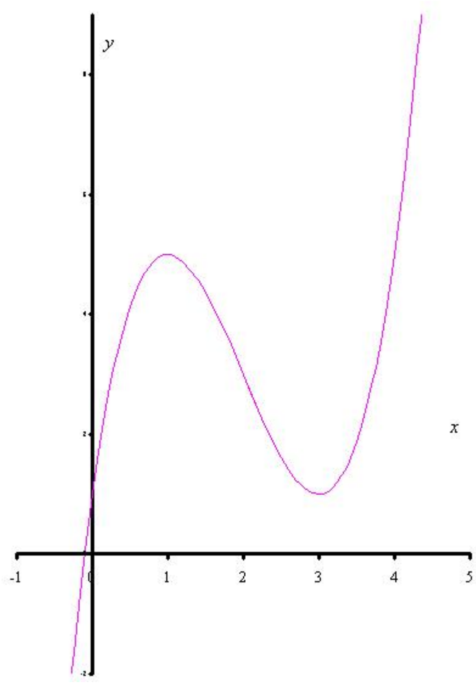
$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} f(-1) & = & (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) + 1 & = & -15 < 0 \\ f(0) & = & (0)^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 1 & = & 1 < 0 \end{cases}$$

como f é contínua em $(-1, 0)$ então f corta o eixo x em algum ponto deste intervalo, já que há troca de sinal da função f.

Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 1$



4. (1,5 ponto) ———

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine o domínio:

(a) $y = \dfrac{x-2}{x-1} \quad (x \neq 1)$

(b) $y = \dfrac{2x+1}{2x-1} \quad (x \neq \dfrac{1}{2})$

(c) $y = \dfrac{x-4}{x+1} \quad (x \neq -1)$

Solução:

(a)
$$x = \frac{y-2}{y-1}$$
$$xy - x = y - 2$$
$$xy - y = x - 2$$
$$y(x-1) = x - 2$$
$$y = \frac{x-2}{x-1}$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$).

(b)
$$x = \frac{2y+1}{2y-1}$$
$$2xy - x = 2y + 1$$
$$2xy - 2y = x + 1$$
$$2y(x-1) = x + 1$$
$$y = \frac{x+1}{2x-2}$$
$$2x - 2 \neq 0$$
$$2x \neq 2$$
$$x \neq 1$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$).

(c) $$x = \frac{y-4}{y+1}$$
$$xy + x = y - 4$$
$$xy - y = -x - 4$$
$$y(x-1) = -(x+4)$$
$$y = \frac{-(x+4)}{x-1}$$
$$y = \frac{x+4}{1-x}$$
$$1 - x \neq 0$$
$$-x \neq -1$$
$$x \neq 1$$

o domínio de $(f-g)(x)$ é (Dom $f = x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$).

5. (1,5 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{t \to -0} \left(\frac{3t-5}{t+2} \right)$$

(b) $$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x+4}$$

Solução:

(a) $$\lim_{t \to 0} \left(\frac{3t-5}{t+2} \right) = \frac{3.0-5}{0+2} = -\frac{5}{2}$$

(b) $$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x+4} = ?$$

mas

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x+4)(x^2+3x+2) = (x+4)(x+1)(x+2)$$

portanto

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x+4} =$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{x^3+7x^2+14x+8}{x+4} =$$

$$\lim_{x\to -4} \frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+4} =$$

$$\lim_{x\to -4} (x+1)(x+2) =$$

$$(-3)(-2) = 6$$

6. (0,5 ponto) ____

Verifique se a função f abaixo é contínua em $x = 2$: (utilize a definição de continuidade)

$$f(x) = \begin{cases} \mid x^2-1 \mid & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4x-5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} f(2) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x\leftarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\leftarrow 2^-} (x^2-1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x\leftarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\leftarrow 2^+} (4x-5) = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

logo, a função f é contínua em $x = 2$.

7. (1,0 ponto) ____

Calcule a derivada abaixo: (utilize a definição de derivada)

$$f(x) = 6 - 2x^2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{6 - 2(x+\Delta x)^2 - 6 + 2x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 - 2(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) - 6 + 2x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{6 - 2x^2 - 4x\Delta x - 2(\Delta x)^2 - 6 + 2x^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4x\Delta x - 2(\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} -4x - 2\Delta x =$$

$$= -4x$$