Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2014 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

Calcule os seguintes limites:

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{onde} \quad f(x) = x^4 - x^2 + 1$$

Solução:

a) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3/x^2}{x^2/x^2+1/x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{1+1/x^2} = -\infty$$

b) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^4-(x+h)^2+1]-[x^4-x^2+1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^2-2xh-h^2+1]-[x^4-x^2+1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^2-2xh-h^2+1-x^4+x^2-1]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-2xh-h^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \quad [4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3-2x-h]$$

$$= \lim_{h\to 0} \quad [4x^3-2x] + \lim_{h\to 0} \quad [6x^2h+4xh^2+h^3-h]$$

$$= 4x^3 - 2x + 0$$

$$= 4x^3 - 2x$$

2. (2,5 pontos)

Verifique se a função

$$f(x) = \frac{|\, x \,|}{x}$$

é contínua em $x = 0$, justifique sua resposta.

Solução:

A função não está definida em $x = 0$. Além disso se verificarmos os limites laterais no ponto $x = 0$, teremos

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\, x \,|}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\, x \,|}{x} = +1$$

portanto o limite não existe em $x = 0$. O que mostra claramente que a função não é contínua em $x = 0$.

3. (2,5 pontos)

Ache a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$, informe seu domínio e sua imagem e calcule seus valores em $x = 1$ e $x = 2$.

Solução:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+1} \Longrightarrow f'(x) = \left[\sqrt[3]{x^2+1}\right]'$$

$$f'(x) = \left[(x^2+1)^{1/3}\right]'$$

$$= \left[(x^2+1)^{1/3}\right]'$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{(1/3-1)}\left[x^2+1\right]'$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{(-2/3)}(2x)$$

$$= \frac{2x}{3(x^2+1)^{(2/3)}}$$

$$= \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$$

Como a radiciação é cúbica qualquer valor real é válido, sendo então a função definida em toda a reta real. Logo,

$$\text{Domínio } = \{x \in \mathbb{R}\}$$

como o termo sob radiciação é sempre maior ou igual a 1, o valor da função sempre será também maior ou igual a 1, logo

$$\text{Imagem } = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \geq 1\}\,.$$

E agora os valores da função nos pontos solicitados,

$$f(1) = \sqrt[3]{(1)^2 + 1} = \sqrt[3]{1+1} = \sqrt[3]{2}$$

e

$$f(2) = \sqrt[3]{(2)^2 + 1} = \sqrt[3]{4+1} = \sqrt[3]{5}$$

4. (2,5 pontos)

Determine as primeiras e segundas derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{x^2}{x^{2/3}} + \dfrac{x^2+1}{x^2}$

b) $f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

Solução:

a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{x^2}{x^{2/3}} + \frac{x^2+1}{x^2} \\
&= 2x^{-1/2} + x^2x^{-2/3} + (x^2+1)x^{-2} \\
&= 2x^{-1/2} + x^{2-2/3} + x^2x^{-2} + x^{-2} \\
&= 2x^{-1/2} + x^{4/3} + 1 + x^{-2}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)\ x^{-1/2-1} + \left(\frac{4}{3}\right)x^{4/3-1} + 0 + (-2)x^{-2-1}$$

$$= -x^{-3/2} + \frac{4}{3}x^{1/3} - 2x^{-3}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - 2\frac{1}{x^3}$$

$$f''(x) = \left[-x^{-3/2} + \frac{4}{3}x^{1/3} - 2x^{-3}\right]'$$

$$= -\left(-\frac{3}{2}\right)x^{(-3/2-1)} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)x^{(1/3-1)} - 2(-3)x^{(-3-1)}$$

$$= \frac{3}{2}x^{-5/2} + \frac{4}{6}x^{-2/3} + 6x^{-4}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{x^5}} + \frac{4}{6\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^4}$$

b)

$$f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$$

$$f'(x) = \left[(x^2+4)^2\right]' \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[(2x^3-1)^3\right]'$$

$$= \left[2(x^2+4)^{(2-1)}(2x)\right] \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[3(2x^3-1)^{(3-1)}(6x)\right]$$

$$= \left[4x(x^2+4)\right] \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[18x(2x^3-1)^2\right]$$

$$= 4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3 + 18(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2$$

$$f''(x) = \left[4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3 + 18(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2\right]'$$

$$= \left[4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3\right]' + \left[18(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2\right]'$$

$$= 4\left[(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3\right]' + 18\left[(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2\right]'$$

$$= 4\left\{(x^3+4x) \cdot \left[(2x^3-1)^3\right]' + \left[(x^3+4x)\right]' \cdot (2x^3-1)^3\right\}$$

$$+ 18\left\{(x^2+4)^2 \cdot \left[(2x^5-x^2)^2\right]' + \left[(x^2+4)^2\right]' \cdot (2x^5-x^2)^2\right\}$$

$$= 4\left\{(x^3+4x) \cdot \left[3(2x^3-1)^2(6x)\right] + \left[(3x^2+4)\right] \cdot (2x^3-1)^3\right\}$$

$$+ 18\left\{(x^2+4)^2 \cdot \left[2(2x^5-x^2)^1(10x)\right] + \left[2(x^2+4)^1(2x)\right] \cdot (2x^5-x^2)^2\right\}$$

$$= 4\left\{18x(x^3+4x)(2x^3-1)^2 + (3x^2+4)(2x^3-1)^3\right\}$$

$$+ 18\left\{20x(x^2+4)^2(2x^5-x^2) + 4x(x^2+4)(2x^5-x^2)^2\right\}$$