Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática Para Computação

AD2 - 2° semestre de 2008

1. (1,5 ponto) ————————————————————————-

   Determine se a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ é crescente ou decrescente e se possui concavidade para cima ou para baixo. Determine todos os extremos relativos e pontos de inflexão.

   Solução:

   Em primeiro lugar, como a função $f(x)$ é um polinômio, é contínua e as derivadas primeira e segunda contínuas para qualquer valor de x.

   A derivada primeira é dada por:

   $$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

   $$f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$$

   $$f'(x) = 6(x + 2)(x - 1)$$

   e se anula em $x = -2$ e de $x = 1$, os pontos correspondentes $(-2, 13)$, $(1, -14)$ são os pontos críticos de primeira ordem de f.

   Para determinarmos em que intervalos, a função $f(x)$ é crescente ou decrescente, estudamos o sinal da primeira derivada:

   (1) O sinal de $f'(x)$ para valores de x tais que $x < -2$ é positivo;
   (2) O sinal de $f'(x)$ para valores de x tais que $-2 < x < 1$ é negativo;

(3) O sinal de $f'(x)$ para valores de x tais que $x > 1$ é positivo;

Logo, observando os itens (1) e (2), temos que, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo, logo, temos um ponto de máximo no valor de $x = -2$, ponto (-2, 13); Da mesma forma, através dos itens (2) e (3), temos que, o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo, logo, temos um ponto de mínimo no valor de $x = 1$, ponto (1, -14);

Para obter as concavidades e os pontos de inflexão, basta calcular a derivada segunda:

$$f''(x) = 12x + 6$$

$$f''(x) = 6(2x + 1)$$

A derivada segunda só é nula para o valor de $x = -\frac{1}{2}$. Estudando o sinal da derivada segunda em torno desse valor de x temos:

$$f''(x) > 0 \text{ para valores de } x > -\frac{1}{2}$$

$$f''(x) < 0 \text{ para valores de } x < -\frac{1}{2}$$

Dessa forma, temos que, a concavidade é voltada para baixo, para valores de $x < -\frac{1}{2}$ e voltada para cima para valores de $x > -\frac{1}{2}$ e podemos concluir que, o ponto definido pelo valor de $x = -\frac{1}{2}$ é um ponto de inflexão (a concavidade muda nesse ponto).

2. (1,0 ponto) ——————————————————————————-
Verifique que $F(x) = \frac{x^3}{3} + 5x + 2$ é uma antiderivada de $f(x) = x^2 + 5$.

Solução:

Devemos mostrar que $\int f(x)dx = F(x)$. Dessa forma, qualquer antiderivada é dada por:

$$\int f(x)dx = \int x^2 + 5 = \frac{x^3}{3} + 5x + C$$

escolhendo $C = 2$, encontramos a $F(x)$.

3. (1,5 ponto) ——————————————————————————-

Determine as seguintes integrais indefinidas:

(a) $$\int \left(2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5\right) dx =$$

(b) $$\int \left(3e^{-5t} + \sqrt{t}\right) dt =$$

Solução:

(a) $$\int \left(2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5\right) dx =$$

Usando a regra da soma, a regra da diferença, a regra da multiplicação por uma constante e a regra da potência, temos:

$$= 2\int x^5 dx + 8\int x^3 dx - 3\int x^2 dx + 5\int 1 dx =$$

$$= 2\left(\frac{x^6}{6}\right) + 8\left(\frac{x^4}{4}\right) - 3\left(\frac{x^3}{3}\right) + 5x + C$$

$$= \frac{x^6}{3} + 2x^4 - x^3 + 5x + C$$

(b) $$\int \left(3e^{-5t} + \sqrt{t}\right) dt =$$

$$= \int \left(3e^{-5t} + t^{\frac{1}{2}}\right) dt$$

$$= 3\left(\frac{1}{-5}e^{-5t}\right) + \frac{1}{(3/2)}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{3}{5}e^{-5t} + \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + C$$

4. (1,5 ponto) ——————————————————————————

Calcule:

(a) $$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx =$$

(b) $$\int_0^1 8x\left(x^2+1\right)^3 dx =$$

Solução:

(a) $$\int_1^4 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right]_1^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - \frac{1}{3}(4)^3\right) - \left(\frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{1}{3}(1)^3\right)$$

$$= -\frac{49}{3}$$

(b) $$\int_0^1 8x\left(x^2+1\right)^3 dx =$$

O integrando é um produto no qual um dos fatores, $8x$, é mútiplo da derivada de uma expressão, x^2+1, que aparece no outro fator. Isso sugere a substituição $u = x^2+1$, caso em que, $du = 2xdx$ e

$$\int 8x(x^2+1)^3 dx = \int 4u^3 du = u^4$$

os limites de integração, 0 e 1, se referem à variável x e não a u. Existem duas formas de resolver o problema:

1^a - expressar a antiderivada em termos de x;

2^a - determinar os valores de u que correspondam a $x = 0$ e $x = 1$;

Usando o primeiro método, temos:

$$\int 8x(x^2+1)^3 dx = u^4 = (x^2+1)^4$$

Portanto,

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = \left[(x^2+1)^4\right] = 16 - 1 = 15$$

Pelo segundo método, partimos de $u = x^2 + 1$, para concluir que $u = 1$ para $x = 0$ e $u = 2$ para $x = 1$. Assim,

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = \int_1^2 4u^3 du = u^4\Big|_1^2 = 16 - 1 = 15$$

5. (1,0 ponto) --

Use o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar a área da região sob a reta $y = 2x + 1$ no intervalo $1 \leq x \leq 3$.

Solução:

A área é definida pela integral definida $A = \int_1^3 (2x+1)dx$. Como todas as antiderivadas de $f(x) = 2x + 1$ têm a forma $F(x) = x^2 + x + C$, onde C é uma constante, o Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que,

$$A = \int_1^3 (2x+1)dx =$$

$$= x^2 + x + C\Big|_1^3$$

$$= [(3)^2 + 3 + C] - [(1)^2 + 1 + C] = 10$$

6. (1,0 ponto) --

Determine a área da região limitada pela curva $y = -x^2 + 4x - 3$ e pelo eixo X.

Solução:

Escrevendo o polinômio na forma fatorada

$$y = -x^2 + 4x - 3 = -(x-3)(x-1)$$

vemos que os pontos de intersecção com o eixo X são (1,0) e (3,0). O gráfico mostra que a região em questão está abaixo da curva $y = -x^2 + 4x - 3$, acima do eixo X e se estende de $x = 1$ a $x = 3$. Dessa forma,

$$\text{Área } = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_1^3$$

$$= (-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

7. (1,0 ponto) ————————————————————————————-

Determine os limites abaixo utilizando L´Hopital.

(a) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$$

(b) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} =$$

Solução:

(a) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} =$$

tipo $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{4+h} - 2)'}{(h)'} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(4+h)^{\frac{-1}{2}}}{1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2(4+h)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{4}$$

(b) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} =$$

tipo $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x^3 - 27)'}{(x - 3)'}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3x^2}{1}$$

$$= \lim_{x\to 3} 3x^2$$

$$= 27$$

8. (1,5 ponto)

Determine o volume do sólido gerado quando a região limitada pelos gráficos das equações $y^2 = 4x$ e $x = 2$, no 1^o quadrante, é girada em torno do eixo X. Utilize o método dos discos. Esboce o gráfico.

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 4x dx = \pi (2x^2)\Big|_0^2 = \pi(8-0) = 8\pi$$

colocar gráfico