Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 2^o semestre de 2018 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Dadas as funções f e g encontre $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ e $(g \circ g)$.

   (a) $f(x) = x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = x + \sqrt[4]{x}$

   (b) $f(x) = x^3 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 1$

   (c) $f(x) = \operatorname{sen} x^2 + x^3 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1$

   Solução:

   (a) $f(x) = x - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = x + \sqrt[4]{x}$

   $$(f \circ g)(x) = (x + \sqrt[4]{x}) - 1 = x + \sqrt[4]{x} - 1$$

   $$(g \circ f)(x) = (x - 1) + \sqrt[4]{x-1} = x + \sqrt[4]{x-1} - 1$$

   $$(f \circ f)(x) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

   $$(g \circ g)(x) = (x + \sqrt[4]{x}) + \sqrt[4]{x + \sqrt[4]{x}} = x + \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x + \sqrt[4]{x}}$$

   (b) $f(x) = x^3 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x + 1$

   $$(f \circ g)(x) = (2x + 1)^3 - 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 - 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x$$

   $$(g \circ f)(x) = 2(x^3 - 1) + 1 = 2x^3 - 2 + 1 = 2x^3 - 1$$

   $$(f \circ f)(x) = (x^3 - 1)^3 - 1 = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1 - 1 = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 2$$

   $$(g \circ g)(x) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

(c) $f(x) = \text{sen } x^2 + x^3 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + 1$

$$(f \circ g)(x) = \text{sen } (x^2+1)^2 + (x^2+1)^3 = \text{sen } (x^2+1)^2 + x^6 + 3x^4 + 3x^2 + 1$$

$$(g \circ f)(x) = (\text{sen } x^2 + x^3)^2 + 1 = \text{sen}^2\, x^2 + 2x^3 \text{sen } x^2 + x^6 + 1$$

$$(f \circ f)(x) = \text{sen } (\text{sen } x^2 + x^3)^2 + (\text{sen } x^2 + x^3)^3$$

$$(g \circ g)(x) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$$

2. (1,0 ponto)

Para as seguintes funções obtenha uma expressão para suas inversas.

(a) $y = x^4 - 4, \quad x \geq 0$
(b) $y = \sqrt[4]{x}, \quad x \geq 0$
(c) $y = 4x - 2$

Solução:

(a) $y = x^4 - 4, \quad x \geq 0$

$$x = y^4 - 4 \longrightarrow y^4 = x + 4 \longrightarrow y = \pm\sqrt[4]{x+4}$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será o ramo positivo, isto é

$$y^{-1} = \sqrt[4]{x+4}$$

(b) $y = \sqrt[4]{x}, \quad x \geq 0$

$$x = \sqrt[4]{y} \longrightarrow x^4 = y$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será

$$y^{-1} = x^4 \qquad x \geq 0$$

(c) $y = 4x - 2$

$$x = 4y - 2 \quad \longrightarrow \quad x + 2 = 4y \quad \longrightarrow \quad y = \frac{x+2}{4}$$

logo

$$y^{-1} = \frac{x+2}{4}$$

3. (1,0 ponto)

Calcule o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para as seguintes funções:

(a) $\quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

(b) $\quad f(x) = \sqrt{x+1}$

(c) $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

Solução:

(a) $\quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad \text{e} \quad f(x+h) = (x+h)^3 - 3(x+h)^2 + 1$

ou

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \quad \text{e} \quad f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x^2 - 6xh - 3h^2 + 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - 3(x+h)^2 + 1 - x^3 + 3x^2 - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3x^2 - 6xh - 3h^2 + 1 - x^3 + 3x^2 - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 6xh - 3h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \ (3x^2 + 3xh + h^2 - 6x - 3h) \\
&= \lim_{h\to 0} \ (3x^2 - 6x) + \lim_{h\to 0} \ (3xh + h^2 - 3h) \\
&= \ (3x^2 - 6x) + 0 = \ 3x^2 - 6x
\end{aligned}$$

(b) $\quad f(x) = \sqrt{x+1} \quad \text{e} \quad f(x+h) = \sqrt{(x+h)+1} = \sqrt{x+h+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h+1-x-1}{h\ (\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\ (\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ e $f(x+h) = \dfrac{1}{(x+h)^3} = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^3} - \dfrac{1}{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{x^3-(x+h)^3}{x^3(x+h)^3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3-(x+h)^3}{hx^3(x+h)^3}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 - x^3 - 3x^2h - 3xh^2 - h^3}{hx^3(x+h)^3}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3x^2h - 3xh^2 - h^3}{hx^3(x+h)^3}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3x^2 - 3xh - h^2}{x^3(x+h)^3}$$

$$= \frac{-3x^2 - 3x\cdot 0 - 0^2}{x^3(x+0)^3}$$

$$= \frac{-3x^2}{x^3(x)^3}$$

$$= \frac{-3x^2}{x^6}$$

$$= -\frac{3}{x^4}$$

4. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} (4+\sqrt{4-x})$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^6}$

Solução:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4^-} (4+\sqrt{4-x}) = \lim_{x\to 4^-} 4 + \lim_{x\to 4^-} \sqrt{4-x} = 4+0 = 4$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ $\Longrightarrow$ **Item anulado, os pontos serão considerados**

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^6}=+\infty$$

5. (2,0 pontos)

Ache os limites infinitos.

(a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^4+1}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{x^4+1}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty}\left(x^7-7x^6-2x+1\right)$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x^7-7x^6-2x+1\right)$$

Solução:

(a)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^4+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^5)/(x^4)}{(x^4+1)/(x^4)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^5)/(x^4)}{(x^4+1)/(x^4)}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+1/x^4}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2x}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}1/x^4}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2x}{1+0}\\
&= 2\lim_{x\to+\infty}x\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^5}{x^4+1}=-\infty,\quad \text{resolução similar ao item anterior}$$

(c)
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(x^7-7x^6-2x+1\right) &= \lim_{x\to+\infty}x^7\left(\frac{x^7}{x^7}-\frac{7x^6}{x^7}-\frac{2x}{x^7}+\frac{1}{x^7}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}x^7\left(1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^6}+\frac{1}{x^7}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}x^7\left(\lim_{x\to+\infty}1-\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^6}+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^7}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}x^7\left(1-0-0+0\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}x^7=+\infty
\end{aligned}$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x^7-7x^6-2x+1\right)=-\infty,$$ resolução similar ao item anterior

6. (2,0 pontos) ———

Se $f(x)=\sqrt{36-x^2}$, mostre que f é contínua no intervalo $[-6,6]$.

Solução:

É necessário que $36-x^2\geq 0$, logo o domínio de $f(x)$ é $-6\leq x\leq 6$.

Para $-6<a<6$,

$$\lim_{x\to a}\sqrt{36-x^2}=\sqrt{36-a^2}=f(a)$$

logo $f(x)$ é contínua no intervalo aberto $(-6,6)$.

Precisamos agora verificar a continuidade nas extremidades $x=-6$ e $x=6$ usando limites laterais,

$$\lim_{x\to-6^+}\sqrt{36-x^2}=\sqrt{36-36}=0=f(-6)$$

logo $f(x)$ é contínua a direita em $x=-6$,

$$\lim_{x\to 6^-}\sqrt{36-x^2}=\sqrt{36-36}=0=f(6)$$

logo $f(x)$ é contínua a esquerda em $x=6$.

Resumindo $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[-6,6]$.

7. (1,0 ponto) ———

Se

$$f(x)=\begin{cases} a & \text{se} \quad x\neq a\\ 0 & \text{se} \quad x=a\end{cases}$$

Sendo $a\neq 0$, f é contínua em $x=a$? Justifique sua resposta.

Solução:

Temos que verificar se o limite em a existe e se o valor da função em a tem o mesmo valor do limite.

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=a$$

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=a$$

$$f(a)=0$$

Como

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=a\neq 0=f(a)$$

Portanto $f(x)$ não é contínua em $x=a$.

8. (1,0 ponto)

Se

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\ x - z\ |}{x - z} & \text{se} \quad x \neq z \\ 1 & \text{se} \quad x = z \end{cases}$$

f é contínua em $x = z$? Justifique sua resposta.

Solução:

$$f(z) = 1$$

$$\lim_{x \to z^-} f(x) = \lim_{x \to z^-} \frac{|\ x - z\ |}{x - z} = -1$$

$$\lim_{x \to z^+} f(x) = \lim_{x \to z^+} \frac{|\ x - z\ |}{x - z} = 1$$

Logo

$$\lim_{x \to z} f(x) = \quad \text{Não existe}$$

e portanto $f(x)$ não é contínua em $x = z$.