Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2^o semestre de 2011

1. (1,0 ponto) ————————————————————————————————

Dada a função $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$, verifique onde essa função é crescente, decrescente e dê os pontos de máximo e mínimo, caso existam.

Solução:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$$

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente:

Pontos críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 12$$

$$6x^2 - 6x + 12 = 0$$

$$6(x^2 - x + 2) = 0$$

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$x = 2, \ x = -1$$

Estudo do sinal da derivada:

$$f'(x) > 0,\ -1 < x,\ x > 2$$

$$f'(x) < 0,\ -1 < x < 2$$

$f(x)$ é uma função crescente para $-1 < x,\ x > 2$;
$f(x)$ é uma função decrescente para $-1 < x < 2$.

Pontos de Máximo e Mínimo

A partir dos valores de x : $x = -1$ e $x = 2$ e da variação do sinal da derivada nesses valores de x podemos obter os pontos de máximo e mínimo relativos da função:

$i)$ $x = -1$

$$x < -1 \rightarrow f'(x) > 0$$

$$-1 < x < 2 \rightarrow f'(x) < 0$$

$ii)$ $x = 2$

$$-1 < x < 2 \rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 2 \rightarrow f'(x) > 0$$

Existe um ponto de máximo em $x = -1$, $(-1, f(-1)) = (-1, 21)$

e um ponto de mínimo em $x = 2$, $(2, f(2)) = (2, -15)$

2. (1,0 ponto)

Calcule as antiderivadas:

(a) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int (\sqrt{2+5y})\,dy$

Solução:

(a) $$\int x^2\sqrt{x}\,dx =$$

A função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = x^2\sqrt{x} = x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$$

Dessa forma, a integral é dada por:

$$\int x^2\sqrt{x}dx = \int x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$$

(b) $$\int (\sqrt{2+5y})\,dy =$$

Seja $f(y) = \sqrt{2+5y}$, escolhemos: $u = 2 + 5y$.

A partir dessa escolha,

$$du = 5dy$$

E dy pode ser definido em função de du da seguinte forma:

$$dy = \frac{du}{5}$$

Dessa forma, a integral pode ser reescrita em função de u, sendo dada por:

$$\int (\sqrt{2+5y})dy =$$

$$= \int (\sqrt{u})\frac{du}{5}$$

$$= \int \frac{1}{5}(\sqrt{u})du$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

Em função de y:

$$= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times (2+5y)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{15} \times \sqrt{(2+5y)} + C$$

3. (1,5 pontos)

Calcule as integrais definidas.

(a) $$\int_0^2 (x^3 + 3x^2)dx =$$

(b) $$\int_a^{2a} (a + z)dz =$$

Solução:

(a) $$\int_0^2 (x^3 + 3x^2)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + 3 \times \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} + 3 \times \frac{2^3}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{16}{4} + 3 \times \frac{8}{3}\right]$$

$$= \left[4 + 3 \times \frac{8}{3}\right]$$

$$= 4 + 8$$

$$= 12$$

(b) $$\int_a^{2a} (a + z)dz =$$

$$= \left(az + \frac{z^2}{2}\right)_a^{2a}$$

$$= a\,(2a - a) + \left(\frac{(2a)^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$= a^2 + 2a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$= 3a^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{6a^2 - a^2}{2}$$

$$= \frac{5a^2}{2}$$

4. (1,5 pontos)

Calcule as áreas abaixo e esboce seus gráficos:

(a) a área limitada pela curva $y = \frac{x^2-4}{x^2}$, eixo x, $x = 2$ e $x = 4$

(b) a área limitada pela curva $y = x^3 - 4x$ e pelo eixo x

Solução:

(a) a área limitada pela curva $y = \frac{x^2-4}{x^2}$, eixo x, $x = 2$ e $x = 4$

$$\int_2^4 \frac{x^2-4}{x^2}dx =$$

$$= \int_2^4 1 - \frac{4}{x^2}dx$$

$$= [x]_2^4 - \int_2^4 4 \times x^{-2}dx$$

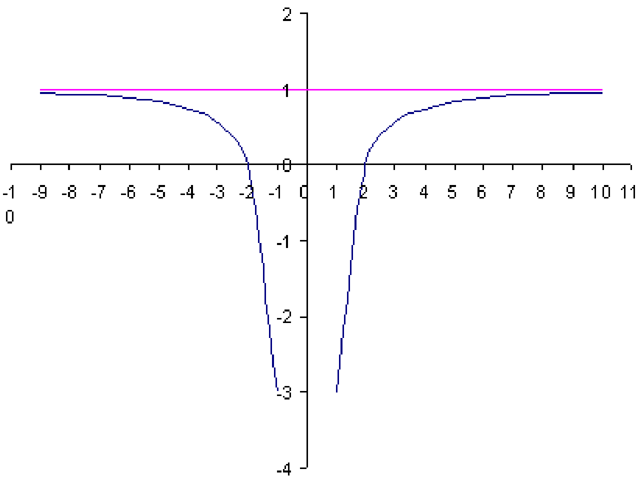
$$= \left[x - \frac{4x^{-1}}{-1}\right]_2^4$$

$$= \left[x + 4x^{-1}\right]_2^4$$

$$= \left[(4-2) + \frac{4}{4} - \frac{4}{2}\right]$$

$$= 2 + 1 - 2$$

$$= 1$$



(b) a área limitada pela curva $y = x^3 - 4x$ e pelo eixo x

$$\int_{-2}^0 x^3 - 4xdx - \int_0^2 x^3 - 4xdx =$$

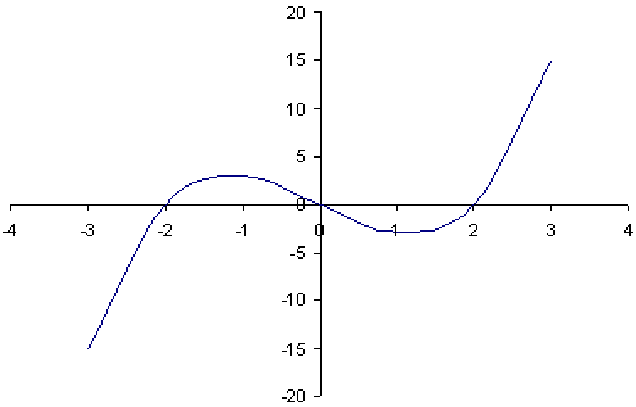
$$= \left[\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= -\left[\frac{(-2)^4}{4} - 4\frac{(-2)^2}{2}\right] + \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4 \times (2)^2}{2}\right]$$

$$= -[4-8] - [4-8]$$

$$= 4 - (-4)$$

$$= 8$$



5. (2,5 pontos)

Utilizando as ferramentas do cálculo, determine os itens abaixo para a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$:

1 - Domínio;
2 - Intersecções com os eixos x e y;
3 - Assíntotas verticais e horizontais;
4 - Pontos de máximo e mínimo;
5 - Gráfico.

Solução:

1 - Domínio: $\mathbb{R} - \{0\}$

2 - Intersecções com os eixos x e y:

Eixo x:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$0 = \frac{1}{x^2}$$

não existe intersecção no eixo x;

Eixo y:

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{0}$$

não existe intersecção no eixo y;

3 - Assíntotas verticais e horizontais:

Assíntota Vertical:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{a^2} = \pm\infty$$

Pela definição acima, temos que a assíntota vertical é $x = 0$.

Assíntota Horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Da mesma forma, a assíntota horizontal é $y = 0$.

4 - Pontos de máximo e mínimo:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

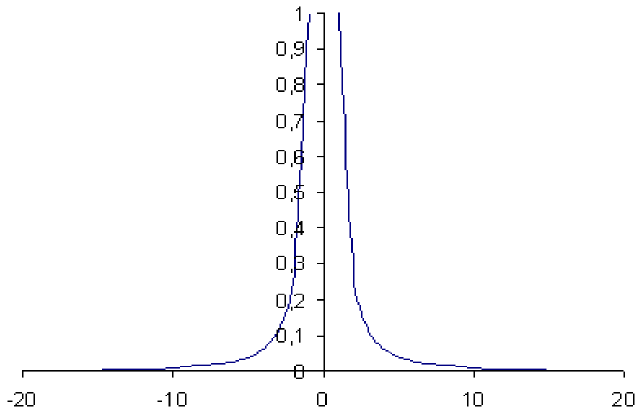
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1)'.(x^2) - (x^2)'(1)}{(x^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3}$$

O ponto crítico dessa função em $x = 0$. Contudo, esse valor de x não pertence ao domínio, não podendo definir ponto de máximo ou de mínimo. Portanto, não existe ponto de máximo ou de mínimo para a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

5 - Gráfico.



6. (1,5 pontos)

Ache o volume do sólido gerado quando a região limitada por $x = 2y^2, x = 0, y = 6$ é girada em torno do eixo x. Utilize o método dos discos integrando ao longo do eixo x.

Solução:

$$V = \pi \int_0^6 2y^2 dy = \pi \left[\frac{2y^3}{3}\right]_0^6 = \pi \left[\frac{2 \times 6^3}{3}\right]$$

$$= \frac{432\pi}{3} = 144\pi$$

7. (1,0 ponto)

Determine o limite para cada uma das funções abaixo:

(a) $$\lim_{y \to 0} \frac{4y^3 + 6y}{3y^3 + 2y} =$$

(b) $$\lim_{x \to -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} =$$

Solução:

(a) $$\lim_{y \to 0} \frac{4y^3 + 6y}{3y^3 + 2y} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{(4y^3 + 6y)'}{(3y^3 + 2y)'}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{12y^2 + 6}{9y^2 + 2}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{12y^2+6}{9y^2+2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{6}{2} = 3$$

(b) $$\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x^3+27)'}{(x+3)'}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{(x^3+27)'}{(x+3)'}$$

$$= \lim_{x\to -3} \frac{3x^2}{1}$$

$$= \lim_{x\to -3} 3x^2$$

$$= 27$$