Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática Para Computação
AP1 - 2° semestre de 2009

1. (1.0 ponto)

   Determine o domínio da função abaixo. Justifique:

   $$f(x) = \frac{8x}{\sqrt{1+2x}}$$

   Solução:

   O binômio $1 + 2x$ por ser o denominador e além disso radicando na função $f(x)$ dada, deve ser estritamente maior do que zero, ou seja,

   $$1 + 2x > 0$$

   $$2x > -1$$

   $$x > -\frac{1}{2}$$

   Dessa forma, o domínio da função $f(x)$ é dado por:

   $$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} | x > -\frac{1}{2} \right\}$$

2. (2.0 pontos)

Determine o limite das funções abaixo:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3-8}{x-2} =$$

(b) $$\lim_{y\to 2} \frac{3y-5}{y-2} =$$

Solução:

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^3-8}{x-2} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0}(3x^3-8)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 3x^3 - \lim\limits_{x\to 0} 8}{\lim\limits_{x\to 0} x - \lim\limits_{x\to 0} 2}$$
$$= \frac{3\lim\limits_{x\to 0} x^3 - 8}{\lim\limits_{x\to 0} x - 2}$$
$$= \frac{3.0^3-8}{0-2}$$
$$= \frac{-8}{-2}$$
$$= 4$$

(b)
$$\lim_{y\to 2} \frac{3y-5}{y-2} =$$
$$= \frac{\lim\limits_{y\to 2}(3y-5)}{\lim\limits_{y\to 2}(y-2)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{y\to 2} 3y - \lim\limits_{y\to 2} 5}{\lim\limits_{y\to 2} y - \lim\limits_{y\to 2} 2}$$
$$= \frac{3\lim\limits_{y\to 2} y - 5}{\lim\limits_{y\to 2} y - 2}$$

$$= \frac{3.2 - 5}{2 - 2}$$

$$= \frac{1}{0}$$

$$= +\infty$$

3. (2.0 pontos)

Determine os máximos e mínimos relativos da seguinte função, caso existam:

$$g(t) = \sqrt{3 - 2t - t^2}$$

Solução:

Como $\sqrt{u}$ é definida apenas para $u \geq 0$, o domínio de g é o conjunto de valores de t para os quais $3 - 2t - t^2 \geq 0$. Fatorando a expressão, obtemos:

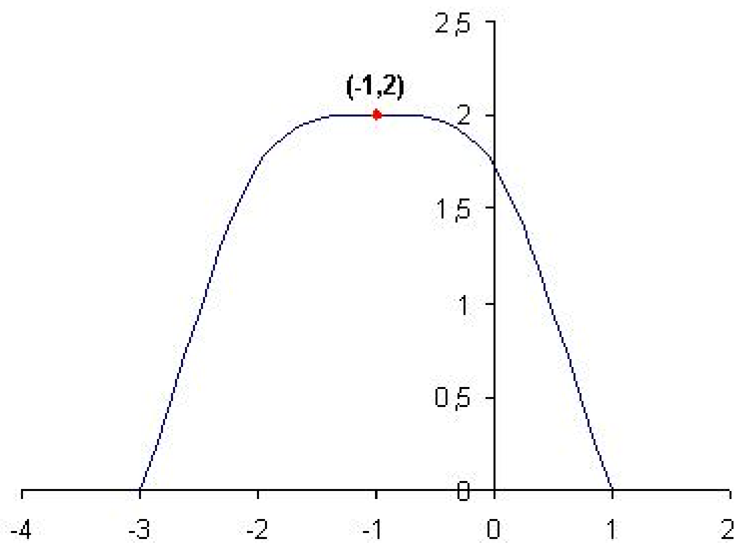
$$3 - 2t - t^2 = (3 + t)(1 - t)$$

que é nula ou positiva apenas quando $3 + t \geq 0$ e $1 - t \geq 0$. (Por que não é possível que $3 + t \leq 0$ e $1 - t \leq 0$) Assim $g(t)$ só existe no intervalo $-3 \leq t \leq 1$. Em seguida, usando a regra da cadeia, descobrimos que a derivada de $g(t)$ é:

$$g'(t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{3 - 2t - t^2}} (-2 - 2t)$$

$$= \frac{-1 - t}{\sqrt{3 - 2t - t^2}}$$

Perceba que $g'(t)$ não existe nos pontos extremos do domínio de $g(t)$ e que $g'(t) = 0$ apenas para $t = -1$. Assinale esses três números críticos sobre um segmento de reta limitado ao domínio de g(ou seja, $-3 \leq t \leq 1$) e determine o sinal da derivada $g'(t)$ nos subintervalos $-3 \leq t \leq -1$ e $-1 \leq t \leq 1$, para obter um diagrama de setas que mostra que a função $g(x)$ é crescente no subintervalo $-3 \leq x \leq -1$ e decrescente em $-1 \leq x \leq 1$. Finalmente, calcule $g(-3) = g(1) = 0$ e $g(-1) = 2$ e observe que, de acordo com as setas, existe um máximo relativo no ponto (-1,2). O gráfico aparece na figura abaixo.



questão anulada

4. (2.0 pontos)

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

Solução:

"Investigamos"se a função $f(x)$ dada possui alguma restrição em seu domínio, ou seja, no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Podemos então observar que a única restrição é devida ao denominador da função que deve ser diferente de zero, ou seja,

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 \neq 9$$

$$x \neq \pm 3$$

Logo,

O domínio da função $f(x)$ dada é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 3\}$, ou ainda, $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$. Podemos portanto concluir que, a função é contínua para todo x real desde que $x \neq \pm 3$.

5. (3.0 pontos) ---

Calcule as seguintes derivadas:

(a) (1,0 ponto)

$$\frac{dy}{dx} =? \ , \ y = x^3 - 12x + 13$$

(b) (2.0 pontos)

$$\frac{d^2y}{dx^2} =? \ , \ y = \frac{x^2 - 5x + 7}{2x}$$

Solução:

(a) (1,0 ponto)

$$\frac{dy}{dx} =? \ , \ y = x^3 - 12x + 13$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 12x + 13) = (x^3 - 12x + 13)' =$$

$$= (x^3)' - (12x)' + (13)'$$

$$= 3x^2 - 12$$

(b) (2.0 pontos)

$$\frac{d^2y}{dx^2} =? \ , \ y = \frac{x^2 - 5x + 7}{2x}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{2x}\right) = \left(\frac{x^2 - 5x + 7}{2x}\right)''$$

Derivamos a função $\frac{x^2 - 5x + 7}{2x}$ uma vez, ou seja,

$$\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{2x}\right)' = \frac{(x^2 - 5x + 7)'(2x) - (2x)'(x^2 - 5x + 7)}{(2x)^2}$$

$$= \frac{(2x - 5)(2x) - 2(x^2 - 5x + 7)}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 10x - 2x^2 + 10x - 14}{4x^2} = \frac{2x^2 - 14}{4x^2}$$

Derivamos a segunda vez, assim

$$\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{2x}\right)'' = \left(\frac{2x^2 - 14}{4x^2}\right)' =$$

$$= \frac{(2x^2 - 14)'(4x^2) - (4x^2)'(2x^2 - 14)}{(4x^2)^2}$$

$$= \frac{(4x)(4x^2) - (8x)(2x^2 - 14)}{16x^4}$$

$$= \frac{16x^3 - 16x^3 + 112x}{16x^4}$$

$$= \frac{112x}{16x^4}$$

$$= \frac{56x}{8x^4}$$

$$= \frac{7}{x^3}$$

Dessa forma $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2 - 5x + 7}{2x}\right) = \frac{7}{x^3}$