Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2^o semestre de 2013 - Gabarito

Questões

1. (2,50 pontos)

Determine os extremos relativos da função $f(x) = (x-2)^{2/3}$.

Solução:

$$f(x) = (x-2)^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$$

logo o único ponto crítico é $x = 2$. Mas,

$$\begin{array}{ll} \text{para } x < 2 & \rightarrow f'(x) < 0 \\ \text{para } x > 2 & \rightarrow f'(x) > 0 \end{array}$$

Portanto, em $x = 2$ ocorre um mínimo relativo.

2. (2,50 pontos)

Encontre as seguintes antiderivadas:

(a)

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2}\, dx$$

(b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\, dx$$

Solução:

(a)

$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right]dx = \int \left[x+5-4x^{-2}\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+5x-4\frac{x^{-1}}{-1}+C\right] = \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$$

$$= \frac{x^3+10x^2+8}{2x}+C$$

(b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}3x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3/4}(x^3+2)^{3/4}\right)+C$$

$$= \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4}+C$$

3. (2,50 pontos)

Use integrais definidas para achar a área entre o semicírculo $v=\sqrt{1-x^2}$ e a linha em $45°$ definida por $v=x$, no primeiro quadrante.

Solução:

Temos que encontrar a interseção das duas curvas para definir os limites de integração,

$$\sqrt{1-x^2}=x \quad\longrightarrow\quad 1-x^2=x^2 \quad\longrightarrow\quad 2x^2=1 \quad\longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

a intersecção se dá em $x=\sqrt{1/2}$ no primeiro quadrante

$$A=\int_0^{\sqrt{1/2}}(\sqrt{1-x^2}-x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\text{sen}^{-1}x+\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{2}}^{\,2}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\text{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

4. (2,50 pontos)

Use a regra de L'Hôpital uma ou mais vezes para avaliar os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x + \text{sen }2x}{x - \text{sen }2x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{x + \text{sen }2x}{x - \text{sen }2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + 2\cos\,2x}{1 - 2\cos\,2x} = \frac{1 + 2(1)}{1 - 2(1)} = -3$$