**Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina: Matemática para Computação**
**AD1 - 2$^o$ semestre de 2019 — Gabarito**

## Questões

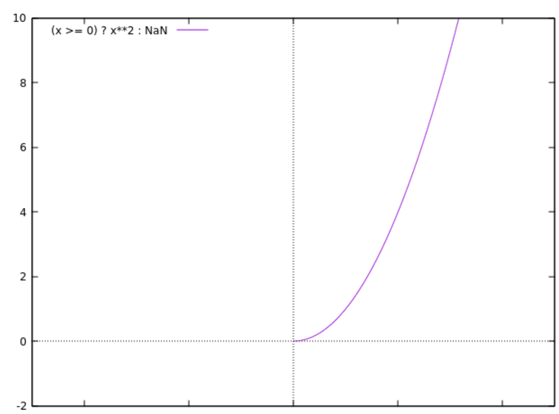
1. (1,25 ponto)

   Determine as inversas das seguintes funções:

   (a) $f(x) = x^2, x \geq 0$

   Substituímos $f(x)$ por $y$:

   $y = x^2, x \geq 0$




   Trocamos as variáveis:

   $x = y^2$

   Resolvemos a equação para $y$:

$y^2 = x$

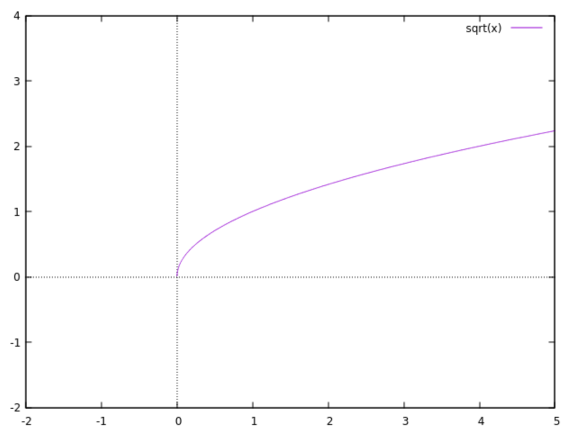
$y = \pm\sqrt{x}$

Ou seja:

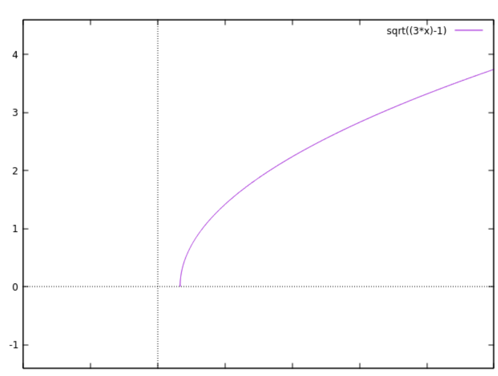
$y = +\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ com $x \geq 0$

Logo:

$f^{-1}(x) = +\sqrt{x}; -\sqrt{x}$ com $x \geq 0$




(b) $f(x) = \sqrt{3x - 1}$




Substituímos $f(x)$ por $y$:

$y = \sqrt{3x-1}, x \geq 1/3$

Trocamos as variáveis:

$x = \sqrt{3y-1}$

Resolvemos a equação para $y$:

$x^2 = 3y - 1$

$x^2 + 1 = 3y$

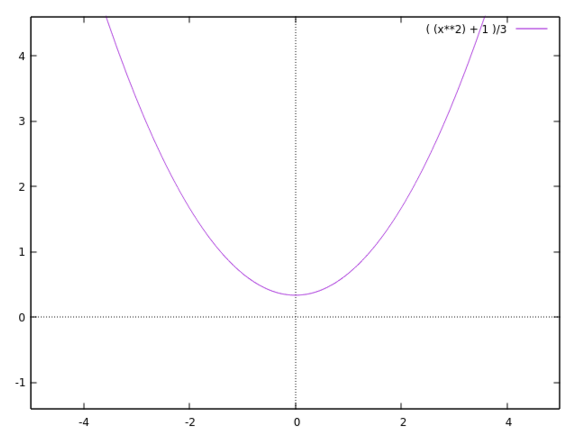
$\dfrac{x^2+1}{3} = y$

Ou seja:

$y = \dfrac{x^2+1}{3}$

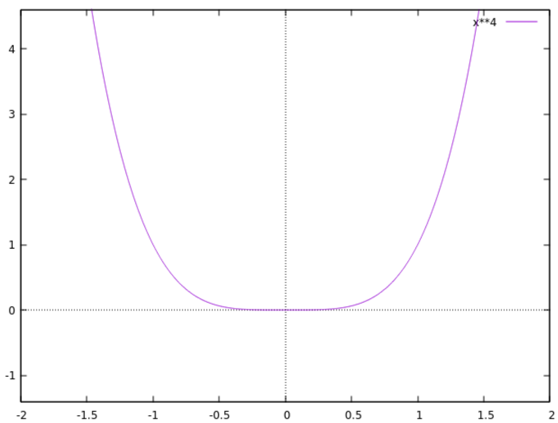
Logo:

$f^{-1}(x) = \dfrac{x^2+1}{3}$ com $\forall x \in \mathbb{R}$




(c) $f(x) = x^4$

Substituímos $f(x)$ por $y$:




$y = x^4, \forall x \in \mathbb{R}$

Trocamos as variáveis:

$x = y^4$

Resolvemos a equação para $y$:

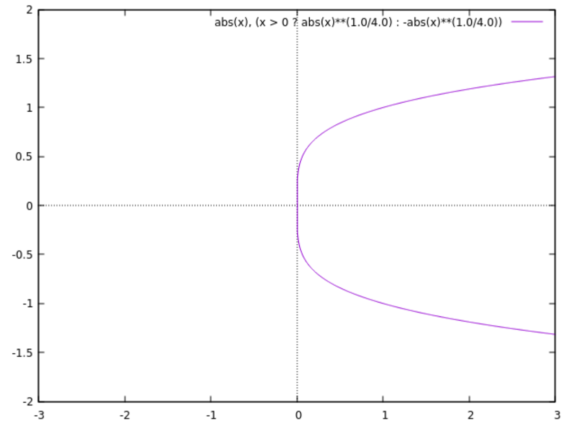
$y = \pm\sqrt[4]{x}$

Ou seja:

$y = +\sqrt[4]{x} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt[4]{x} \quad \text{com} \quad x \geq 0$

Logo:

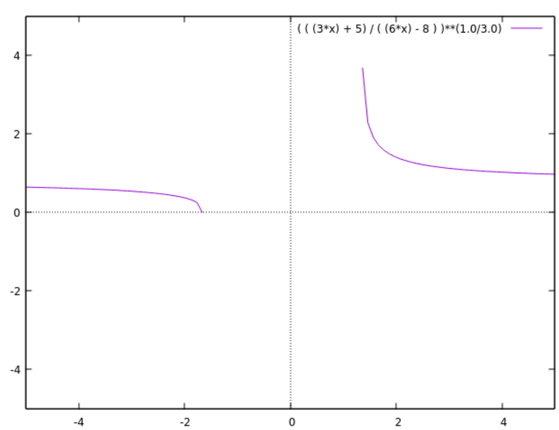
$f^{-1}(x) = +\sqrt[4]{x}; -\sqrt[4]{x} \quad \text{com} \quad x \geq 0$




2. (1,25 ponto)

Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3x+5}{6x-8}} =$




Utilizamos o seguinte teorema:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{A} \quad \text{se} \quad \sqrt[n]{A} \quad \text{estiver definido.}$$

Dessa forma:

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}}=$$

$$\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8}}=$$

E colocamos o $x$ em evidência, tanto no numerador quanto no denominador:

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{x(3+\frac{5}{x})}{x(6-\frac{8}{x})}}$$

e simplificamos, obtendo a seguinte expressão:

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(3+\dfrac{5}{x}\right)}{\left(6-\dfrac{8}{x}\right)}}$$

Aplicamos o limite ao numerador e ao denominador:

$$=\sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3+\dfrac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6-\dfrac{8}{x}\right)}}$$

E fazemos o mesmo a cada uma das parcelas:

$$=\sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}3+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}6-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x}}} \tag{1}$$

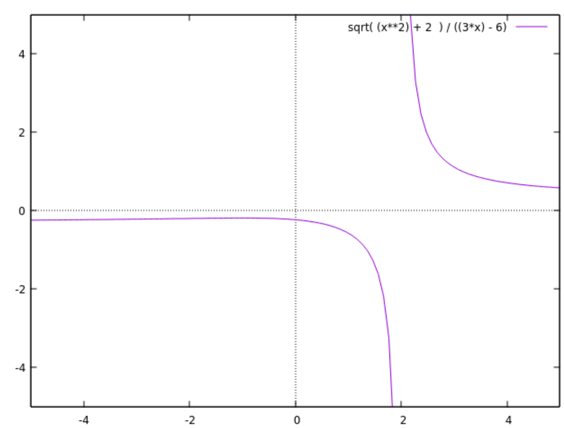
Considerando que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{x}=0$, onde $a\in\mathbb{R}$, constante e que $\lim\limits_{x\to+\infty}c=c$, onde $c\in\mathbb{R}$, constante, podemos escrever a equação (1) da seguinte forma:

$$=\sqrt[3]{\frac{3+0}{6-0}}$$

Temos:

$$= \sqrt[3]{\frac{3}{6}}$$
$$= \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} =$




$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6} =$$

Colocando os $x$ com maiores índices em evidência, temos:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}$$

E extraindo a raiz quadrada somente do $x^2$, no numerador:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(3-\frac{6}{x}\right)}$$

Podemos simplicar, dividindo por $x$, tanto no numerador, quanto no denominador:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}}{\left(3 - \frac{6}{x}\right)}$$

E aplicar o limite ao numerador e ao denominador:

$$= \frac{\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}}{\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{6}{x}\right)}$$

Reescrevemos o numerador, uma vez que $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)}$ é equivalente a $\sqrt{\lim_{x \to +\infty} f(x)}$:

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)}}{\lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{6}{x}\right)}$$

Aplicamos o limite a cada uma das parcelas e obtemos:

$$= \frac{\sqrt{\left(\lim_{x \to +\infty} 1 + \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2}\right)}}{\left(\lim_{x \to +\infty} 3 - \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{x}\right)}$$

Considerando que $\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0$, onde $a \in \mathbb{R}$ é constante, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$= \frac{\sqrt{\left(\lim_{x \to +\infty} 1 + 0\right)}}{\left(\lim_{x \to +\infty} 3 - 0\right)}$$

Além disso, $\lim_{x \to +\infty} a = a$, para qualquer constante $a \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$$= \frac{\sqrt{1 + 0}}{3 - 0}$$

$$= \frac{\sqrt{1}}{3-0}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ onde $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Para calcular o limite, aplicamos $f$ a $x+h$ e a $x$, obtendo:

$$f(x+h) = (x+h)^4 + (x+h)^3 + (x+h)^2 + (x+h) + 1$$

Desenvolvendo as potências dos binômios (x+h), graus $4$, $3$ e $2$, temos:

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$$
$$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$
$$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

Podemos então reescrever a equação
$f(x+h) = (x+h)^4 + (x+h)^3 + (x+h)^2 + (x+h) + 1$
da seguinte forma:

$$\begin{gathered} f(x+h) = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + x^3 + 3x^2h + \\ +3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 + x + h + 1 \end{gathered} \tag{2}$$

Com a expressão de $f(x+h)$ em (2) e com a expressão de $f(x)$, dada no enunciado, $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, reescrevemos $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, que precisamos para calcular o limite.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + \\ &\quad + x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \\ &\quad x^2 + 2xh + h^2 + x + h + 1 \\ &\quad -(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + \\ &\quad + x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \\ &\quad x^2 + 2xh + h^2 + x + h + 1 \\ &\quad -x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

Reorganizando os termos:

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= x^4 - x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + \\ &\quad + x^3 - x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \\ &\quad + x^2 - x^2 + 2xh + h^2 + x - x + h + 1 - 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x) &= 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4 + \\ &\quad + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + \\ &\quad + 2xh + h^2 + h \end{aligned}$$

A expressão, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ã dada por:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4}{h} + \\ &\quad + \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} + \\ &\quad + \frac{2xh + h^2 + h}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= 4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 + \\ &\quad + 3x^2 + 3xh + h^2 + \\ &\quad + 2x + h + 1 \end{aligned}$$

Aplicando o limite quando $h \to 0$ para essa expressão, obtemos:

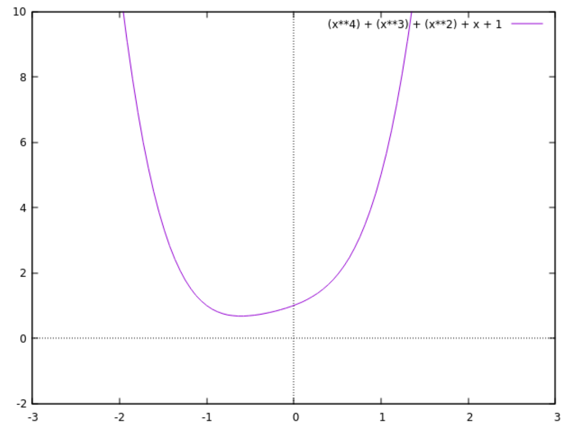
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \big(4x^3 + 6x^2h + 4xh^2 + h^3 + \\ &\quad + 3x^2 + 3xh + h^2 + \\ &\quad + 2x + h + 1\big) \end{aligned}$$

O limite é aplicado a cada parcela:

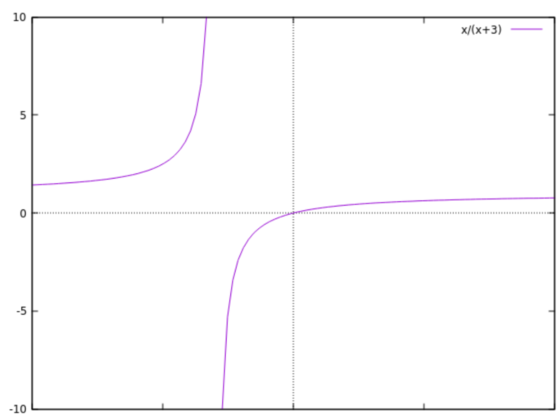
$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} 4x^3 + \lim_{h\to 0} 6x^2h + \lim_{h\to 0} 4xh^2 + \lim_{h\to 0} h^3 + \\ &\quad + \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 + \\ &\quad + \lim_{h\to 0} 2x + \lim_{h\to 0} h + \lim_{h\to 0} 1 \end{aligned}$$

E obtemos: Obs: o que não depende de h, é considerado constante.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$




(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+3}$




Como o maior expoente de $x$ é $1$, podemos simplificar, por $x$, tanto no numerador quanto no denominador, ficando com a seguinte expressão:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+3}{x}}$$

E aplicando o limite tanto ao numerador quanto ao denominador, podemos reescrever:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1}{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)}$$

Aplicamos o limite a cada uma das parcelas:

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x}}$$

Considerando que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{x} = 0$, onde $a \in \mathbb{R}$ é constante, podemos reescrever a expressão acima da seguinte maneira:

$$= \frac{\lim\limits_{x \to +\infty} 1}{\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + 0}$$

Além disso, $\lim\limits_{x \to +\infty} a = a$, para qualquer constante $a \in \mathbb{R}$. Assim, temos:

$$= \frac{1}{1+0}$$

$$= \frac{1}{1}$$

$$= 1$$

3. (1,25 ponto)

Calcule os seguintes limites laterais:

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) \text{ e } \lim_{x \to 0_+} f(x)$$

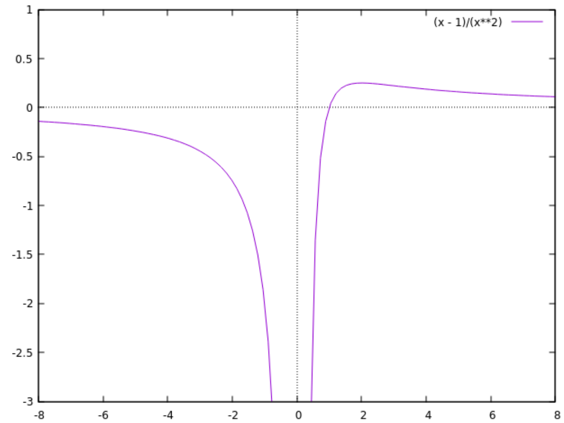
onde

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

Reescrevendo $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2}$$

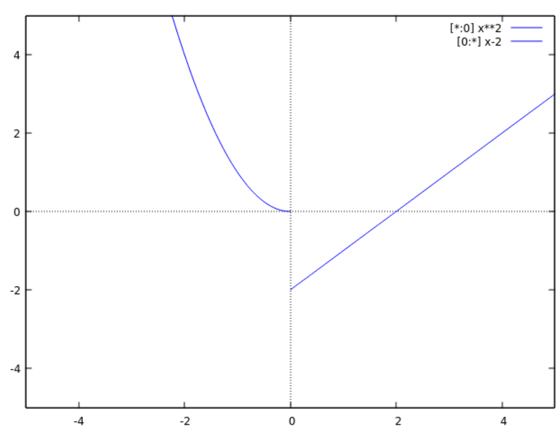



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x-1}{x^2} = -1/0 = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x-1}{x^2} = -1/0 = -\infty$$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x-2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$




$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - 2 = 0 - 2 = -2$$

4. (1,25 ponto)

Em quais dos seguintes intervalos a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$$

é contínua? Por quê?

Solução:

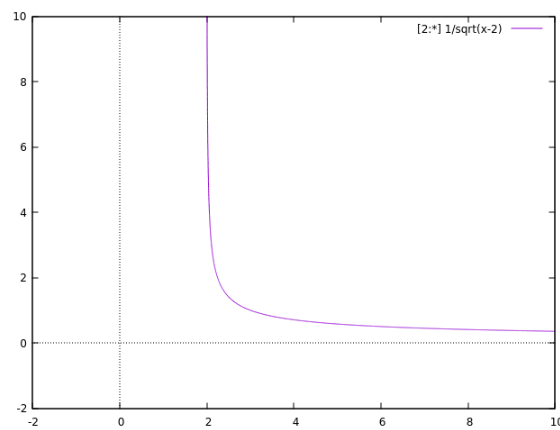
Vamos encontrar o domínio da função $f(x)$:

Para os reais, conjunto em que estamos trabalhando, $x - 2$ deve admitir somente valores positivos ou nulos, por estar em uma raíz quadrada. Alãm disso, por estar em um denominador de uma fração, não pode ser zero.

Por conclusão dessas duas premissas, temos que:

$x - 2 > 0$

os valores de $x - 2$ nos reais ($\mathbb{R}$) só podem ser estritamente positivos. Logo, $x$ deve admitir somente valores tais que: $x > 2$.




(a) $[2, +\infty)$

Para que a função $f(x)$ seja contínua no intervalo com extremo fechado, é necessário que o limite da $f(x)$ quando $x$ tende a esse extremo, nesse caso, pela direita, deve ser igual ao valor da função nesse extremo $(x = 2)$. Como o extremo não está definido no domínio da função, então a condiãão de continuidade em um intervalo não é satisfeita.

(b) $(-\infty, +\infty)$

Para que a função $f(x)$ seja continua em $(-\infty, +\infty)$, ela deve ser contínua em todos os pontos desse intervalo. E além disso $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Pelo que vimos anteriormente, na explicação sobre domínio da função, podemos escolher qualquer número $x < 2$, que a primeira condição, não será verificada. Isso ocorre, pois esses valores de $x$ não pertencem ao dominio da funãão $f(x)$. Logo, a função é descontínua no intervalo.

(c) $(2, +\infty)$

Pela definição de continuidade para intervalos abertos, para que uma função $f(x)$ seja contínua no intervalo $(2, +\infty)$, ela deve ser contínua em todos os valores de $x$ desse intervalo. Isso é verdadeiro, porque todos os valores de $x$ pertencem ao dominio da função e além disso, o limite quando $x$ tende a qualquer valor desse intervalo, existe e é a própria **f** nesse valor de $x$. —Para verificarmos isso, vamos supor um $a \in (2, +\infty)$. Sabemos que esse valor é necessariamente maior do que 2. E que $a - 2$ é algum número, maior do que zero. Logo, $f(a)$ existe e é um numero real. Além disso, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{a-2}} = \frac{1}{\sqrt{a-2}} = f(a)$$

E isso ocorre para qq $a$ escolhido nesse intervalo. Porque qualquer valor desse intervalo irá verificar essas premissas.

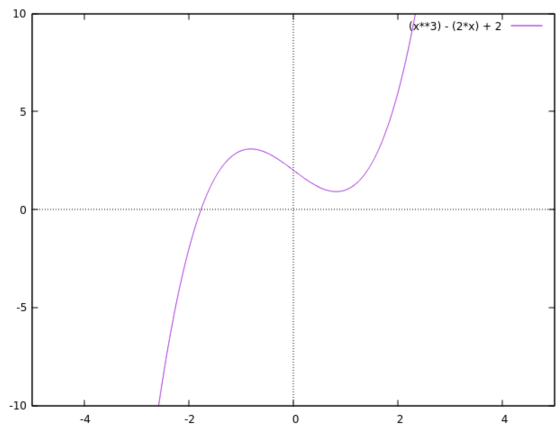
(d) $[1, 2)$ Para que a função $f(x)$ seja contínua em $[1, 2)$, deve ser contínua em todos os pontos em $(1, 2)$ e além disso $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$.

Para a primeira condição, tomamos um ponto qualquer do intervalo $x = 1,5$. Como a função deve ser continua em todos os pontos do intervalo aberto, a função deve ser continua nesse ponto também. Da definiãão de continuidade, esse ponto deve estar definido no dominio da funãão, e com vimos, além disso $\lim_{x \to (1,5)^+} f(x) = f(1,5)$ que deve ser um nãmero real. O que jã falha na primeira condiãão. Temos ao menos 1 ponto desse intervalo que não tem valor de $f(x)$ definido. Logo, a função é descontínua no intervalo.

5. (1,25 ponto)

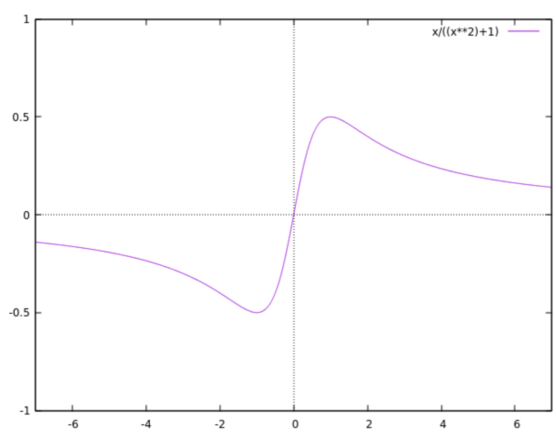
Para as funções a seguir, ache os pontos de descontinuidade, se existirem. Justifique suas respostas.

(a) $f(x) = x^3 - 2x + 2$




A função $f(x) = x^3 - 2x + 2$ é um polinãmio, portanto, está definida para qualquer valor de $x$no conjunto dos nãmeros reais $\mathbb{R}$. Dessa forma, ã contãnua em $\mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$




Nesta fração, a única descontinuidade possível é quando o denominador é zero. Isso ocorre para algum valor de $x$ em $\mathbb{R}$? Vamos ver.

Façamos $x^2 + 1 = 0$, para sabermos se existem esses valores de $x$ que façam essa expressão ser nula.

temos assim:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1}$$

obtemos duas raízes, valores de $x$ que anulam essa expressão:

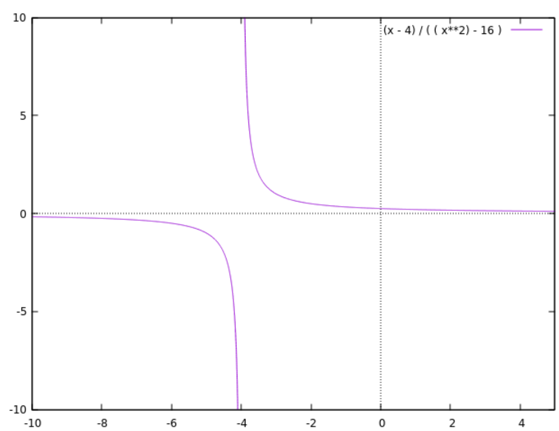
$$x = +\sqrt{-1}$$

$$x = -\sqrt{-1}$$

Mas, podemos observar que $\sqrt{-1}$ não está definida nos reais. Somente no conjunto dos números complexos.

Como conclusão, não existem valores de $x$ em $\mathbb{R}$, que anulem a expressão $x^2 + 1$. Ou seja, a função, $\dfrac{x}{x^2+1}$ está definida para todo $x$ em $\mathbb{R}$ e é portanto, contínua em todo $x$ de $\mathbb{R}$.

(c) $f(x) = \dfrac{x-4}{x^2-16}$




Neste caso, temos uma fração de polinômios, a única descontinuidade possível é ter o denominador igual a zero. Isso ocorre para algum valor de $x$ em $\mathbb{R}$? Vamos ver.

Façamos $x^2 - 16 = 0$ para obtermos as raízes.

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

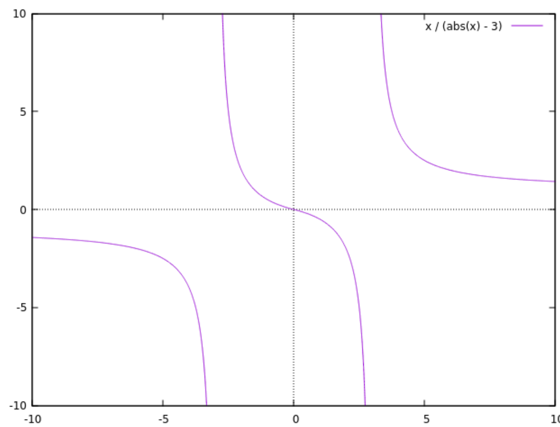
Logo, temos dois valores de $x$ que anulam essa expressão:

$$x = +4$$

$$x = -4$$

Dessa forma, a função $\dfrac{x-4}{x^2-16}$ é descontínua nos valores $x = 4$ ou $x = -4$.

(d) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 3}$




Nesta fração, a única descontinuidade possível é quando o denominador é zero. Isso ocorre para algum valor de $x$ em $\mathbb{R}$? Vamos ver.
Façamos $|x| - 3 = 0$.
logo:

$$|x| - 3 = 0$$

$$|x| = 3$$

O modulo de $x$ é igual a $3$ quando:

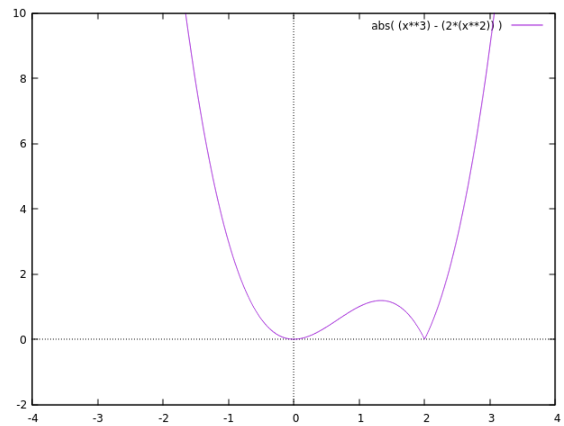
$$+x = 3 \quad \text{ou} \quad -x = 3$$

ou seja:

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = -3$$

valores de $x$ que anulam a expressão $|x| - 3$
Dessa forma, a função $\dfrac{x}{|x|-3}$ é descontínua nos valores $x = 3$ e $x = -3$.

(e) $f(x) = \left|x^3 - 2x^2\right|$



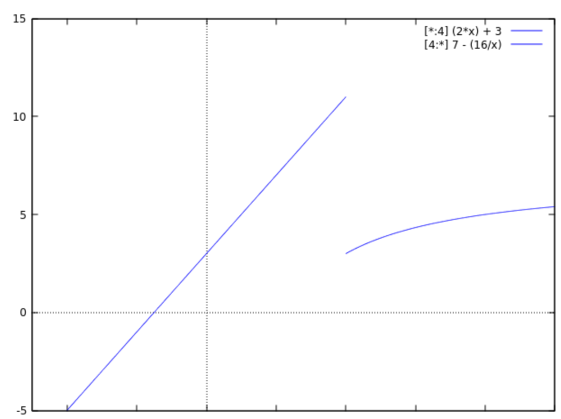

Aqui temos a função módulo de um polinômio. A função módulo será descontínua nos mesmos pontos para os quais a função que está dentro do módulo for descontínua.

Sabemos que uma função polinomial é sempre definida para todo valor de $x$ em $\mathbb{R}$.

Dessa forma, o polinômio não apresenta descontinuidades. Por conseguinte, o módulo desse polinômio também não apresenta.

Assim, a função $\left|x^3 - 2x^2\right|$ é contínua para todo valor de $x$ em $\mathbb{R}$.

(f) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ se } x \leq 4 \\ 7 - \dfrac{16}{x} \text{ se } x > 4 \end{cases}$



A função $f(x) = 2x+3$ é um polinômio, portanto, está definida para qualquer valor de $x$ no conjunto dos nãmeros reais $\mathbb{R}$, logo está também definida para o intervalo $(-\infty, 4)$, portanto, contínua em todo o intervalo.

Como $7 - \dfrac{16}{x}$ é uma fração, a única forma de ser descontínua é ter o denominador nulo. Isso ocorre para algum valor de $x$ em $\mathbb{R}$? Vamos ver.

A função $7 - \dfrac{16}{x}$, pode ser reescrita como: $\dfrac{7x - 16}{x}$. A forma de termos o denominador nulo, ã que $x$ seja nulo. Dessa forma, essa expressão é descontínua para $x = 0$. No entanto, o domíinio da funcção é de valores de $x > 4$. Logo, a função $f(x)$ em (5f) é contínua para todo $x$ em $(4, +\infty)$.

Falta apenas verificar se a função $f(x)$ é contínua em $x = 4$.

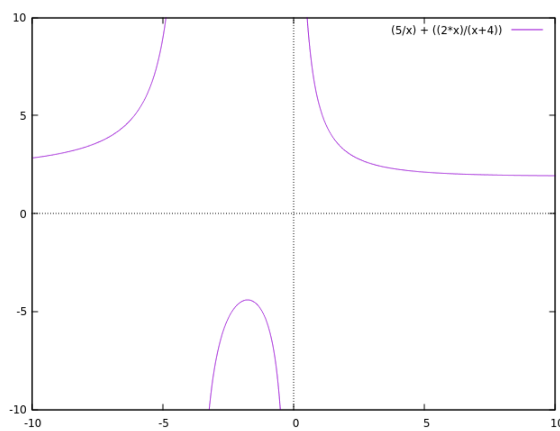
Fazendo os limites laterais temos:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} 7 - \frac{16}{x} = \lim_{x\to 4^+} 7 - \frac{16}{4} = \lim_{x\to 4^+} 7 - 4 = \lim_{x\to 4^+} 33$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-} 2x + 3 = \lim_{x\to 4^-} 2.4 + 3 = \lim_{x\to 4^-} 8 + 3 = \lim_{x\to 4^-} 11$$

Os limites laterais são diferentes, portanto, a função $f(x)$é descontínua em $x = 4$.

(g) $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{x+4}$



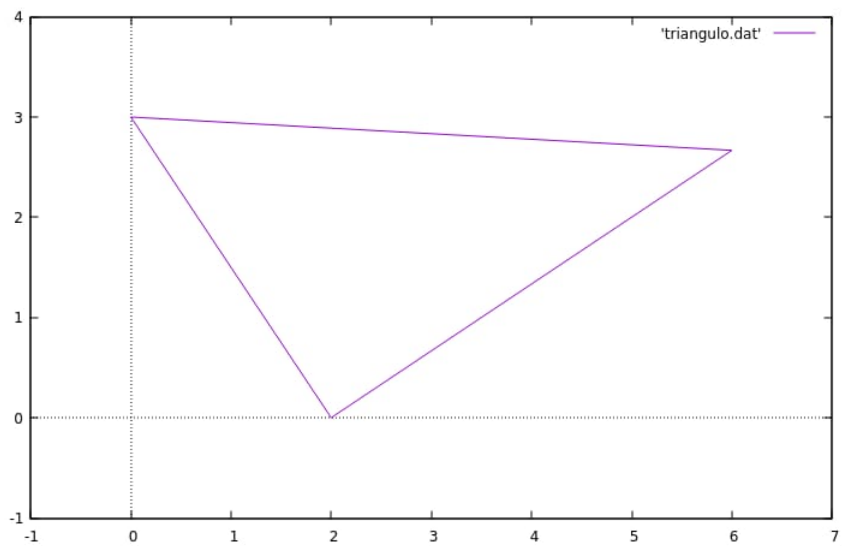

Para a função $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{x+4}$, a única descontinuidade possível é ter o denominador zero. Isso ocorre para algum valor de $x$ em $\mathbb{R}$? Vamos ver.

A função $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{x+4}$ pode ser reescrita da seguinte forma: $\dfrac{5.(x+4) + 2x.x}{x(x+4)}$.

Podemos observar que para termos o denominador zero, terãamos que ter $x = 0$ ou $x + 4 = 0$. Ou seja, $x = 0$ ou $x = -4$. Dessa forma, a função $f(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2x}{x+4}$ é descontínua para $x = 0$ ou em $x = -4$. No entanto, o domínio da função é de valores de $x > 4$. Logo, a função $f(x)$ em (5f) é contínua para todo $x$ nesse intervalo: $(4, +\infty)$.

6. (1,25 ponto)

Ache as inclinações dos lados de um triângulo com vértices, no plano cartesiano, nos pontos $(0;3)$, $(2;0)$ e $(6;8/3)$. A seguir, verifique se ele é um triângulo retângulo. Justifique suas respostas.




O entendimento sobre a inclinação de uma reta, ou segmento de reta, é fundamental no entendimento de derivadas, pois a derivada de uma função em um ponto é a inclinaãão da reta tangente à funãão, nesse ponto.

Então, dados dois vertices de um lado $AB$: $(a_1, a_2)$ $(b_1, b_2)$, a inclinação desse lado é dada pelo coeficiente angular da reta que passa nesses vértices.

$\mathbf{m} = \dfrac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$ (fórmula do coeficiente angular) é $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

Para que um triângulo seja retângulo, é necessario que dois lados sejam perpendiculares.

Se uma reta $\mathbf{a}$ tem inclinação $\mathbf{m_a}$ e outra reta $\mathbf{b}$ tem inclinação $\mathbf{m_b}$, elas são perpendiculares, se uma inclinação for o inverso negativo da outra, ou seja:

$$\mathbf{m_a} = -\frac{1}{\mathbf{m_b}}$$

Ou seja, o coeficiente angular de uma deve ser o inverso negativo do coeficiente angular da outra. É o que diz a fórmula acima.

Sabendo-se dessas informações, como resolvemos essa questão?

1 - determinamos as inclinações dos 3 lados do triângulo a partir dos vértices dados no enunciado.

2 - obtidas as 3 inclinações, verificamos 2 a 2 se a condição $\mathbf{m_a} = -\frac{1}{\mathbf{m_b}}$ é verdadeira. Caso seja verdadeira para alguma dessas comparações, podemos concluir que o triângulo é retângulo

Chamaremos os lados do triângulo de $\mathbf{lado1}$, $\mathbf{lado2}$, $\mathbf{lado3}$, com as respectivas inclinações $\mathbf{m_1}$, $\mathbf{m_2}$, $\mathbf{m_3}$

$\mathbf{lado1} \quad (0;3)(2;0)$

$$\mathbf{m1} = \frac{0-3}{2-0} = -3/2$$

$\mathbf{lado2} \quad (2;0)(6;8/3)$

$$\mathbf{m2} = \frac{(8/3)-0}{6-2} = \frac{8/3}{4} = \left(\frac{8}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8*1}{3*4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$\mathbf{lado3} \quad (6;8/3)(0;3)$

$$\mathbf{m3} = \frac{3-(8/3)}{0-6} = \frac{(9/3)-(8/3)}{-6} = \frac{1/3}{-6} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{-6}\right) = \frac{1}{-18}$$

É possivel ver que $\mathbf{m_1}$ é o inverso negativo de $\mathbf{m_2}$, pois:

$$\mathbf{m1} = -\frac{3}{2}$$

o inverso negativo de $\mathbf{m_1}$ é:

$$-\frac{1}{\mathbf{m1}} = -\left(\frac{1}{-3/2}\right) = (-1)\left(\frac{2}{-3}\right) = -\left(\frac{2}{-3}\right) = -\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

ou seja, o inverso negativo de $\mathbf{m_1}$ é igual a $\frac{2}{3}$, que é o valor de $\mathbf{m_2}$.

Assim, os lados **lado1** (que tem inclinação $\mathbf{m_1}$) e **lado2** (que tem inclinação $\mathbf{m_2}$) são perpendiculares. Logo o triângulo é retângulo.

7. (1,25 ponto)

Calcule as derivadas de primeira e de segunda ordens das seguintes funções:

(a) $f(x) = \left(x^3 + 2x\right)^{37}$

$$f'(x) = 37\left(x^3 + 2x\right)^{36}\left(x^3 + 2x\right)'$$

$$f'(x) = 37\left(x^3 + 2x\right)^{36}\left(3x^2 + 2\right)$$

$$f''(x) = 37\left\{\left[\left(x^3 + 2x\right)^{36}\right]'\left(3x^2 + 2\right) + \left[\left(3x^2 + 2\right)\right]'\left(x^3 + 2x\right)^{36}\right\}$$

$$f''(x) = 37\left[36\left(x^3 + 2x\right)^{35}\left(x^3 + 2x\right)'\left(3x^2 + 2\right) + (6x)\left(x^3 + 2x\right)^{36}\right]$$

$$f''(x) = 37\left[36\left(x^3 + 2x\right)^{35}(3x^2 + 2)\left(3x^2 + 2\right) + (6x)\left(x^3 + 2x\right)^{36}\right]$$

$$f''(x) = (37)(36)\left(x^3 + 2x\right)^{35}\left(3x^2 + 2\right)^2 + (37)(6x)\left(x^3 + 2x\right)^{36}$$

(b) $f(x) = \sqrt{4 + 4\sqrt{3x}}$

$$f(x) = \left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{-1/2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{-1/2}\left[\left(4'\right) + \left(4\sqrt{3x}\right)'\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{-1/2}\left[0 + \left(4\sqrt{3x}\right)'\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{-1/2}\left[4\left(\sqrt{3x}\right)'\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{-1/2}\left[4\left(\frac{1}{2}\right)(3x)^{-1/2}(3x)'\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{-1/2}\left[(4)\left(\frac{1}{2}\right)(3x)^{-1/2}(3)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{-1/2}(6)(3x)^{-1/2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{\left(4 + 4\sqrt{3x}\right)^{1/2}(3x)^{1/2}}$$

$$f^{'}(x) = \frac{3}{\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{1/2}} \tag{3}$$

Para obtermos a segunda de derivada da função $f(x) = \sqrt{4+4\sqrt{3x}}$, derivamos a primeira derivada obtida, 3:

$$f^{''}(x) = \left[3\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{-1/2}\right]^{'}$$

$$f^{''}(x) = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{-1-1/2}(12+12\sqrt{3x})^{'}$$

$$f^{''}(x) = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{-3/2}[12^{'}+(12\sqrt{3x}^{'})]$$

$$f^{''}(x) = \left(-\frac{3}{2}\right)(12)\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{-3/2}\left[12.\frac{1}{2}(3x)^{-1/2}.(3x)^{'}\right]$$

$$f^{''}(x) = \left(-\frac{3}{2}\right)(12)\left(\frac{1}{2}\right)(3)\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{-3/2}(3x)^{-1/2}$$

$$f^{''}(x) = \left(\frac{(3)(12)(3)}{4}\right)\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{-3/2}(3x)^{-1/2}$$

$$f^{''}(x) = -27\left(12+12\sqrt{3x}\right)^{-3/2}(3x)^{-1/2}$$

(c) $f(x) = \text{tg}(4x^2)$

$$f(x) = \frac{sen(4x^2)}{cos(4x^2)}$$

$$f^{'}(x) = \frac{[sen(4x^2)]^{'}[\cos(4x^2)] - [cos(4x^2)]'[sen(4x^2)]}{[cos(4x^2)]^2}$$

$$f^{'}(x) = \frac{[cos(4x^2)](4x^2)^{'}[cos(4x^2)] - [-sen(4x^2)](4x^2)^{'}[sen(4x^2)]}{cos^2(4x^2)}$$

$$f^{'}(x) = \frac{[cos(4x^2)](8x)[cos(4x^2)] - [-sen(4x^2)](8x)[sen(4x^2)]}{cos^2(4x^2)}$$

$$f^{'}(x) = \frac{(8x)[cos^2(4x^2)] + [sen^2(4x^2)](8x)}{cos^2(4x^2)}$$

$$f^{'}(x) = \frac{8x[cos^2(4x^2) + sen^2(4x^2)]}{cos^2(4x^2)}$$

Utilizando a identidade $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$, obtemos:

$$f^{'}(x) = \frac{8x.1}{cos^2(4x^2)}$$

$$f^{'}(x) = \frac{8x}{cos^2(4x^2)} \tag{4}$$

Como $\dfrac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$, podemos escrever:

$$f^{'}(x) = (8x)\left[sec^2(4x^2)\right]$$

Segunda derivada:
A partir da expressão $4$, calculamos a segunda derivada:

$$f^{''}(x) = \left(\frac{8x}{cos^2(4x^2)}\right)^{'}$$

$$f^{''}(x) = \frac{(8x)^{'}\left[cos^2(4x^2)\right] - \left[cos^2(4x^2)\right]^{'}.8x}{\left[cos^2(4x^2)\right]^2}$$

$$f^{''}(x) = \frac{8\left[cos^2(4x^2)\right] - 2\left[cos(4x^2)\right]\left[-sen(4x^2)\right](4x^2)^{'}(8x)}{\left[cos^2(4x^2)\right]^2}$$

$$f^{''}(x) = \frac{8\left[cos^2(4x^2)\right] - 2\left[cos(4x^2)\right]\left[-sen(4x^2)\right](8x)(8x)}{\left[cos^2(4x^2)\right]^2}$$

$$f^{''}(x) = \frac{8\left[cos^2(4x^2)\right] - 128x^2\left[cos(4x^2)\right]\left[-sen(4x^2)\right]}{\left[cos^2(4x^2)\right]^2}$$

$$f^{''}(x) = \frac{8\left[cos^2(4x^2)\right] + 128x^2\left[cos(4x^2)\right]\left[sen(4x^2)\right]}{\left[cos^2(4x^2)\right]^2}$$

$$f^{''}(x) = \frac{8\left[cos(4x^2)\right]\left[cos(4x^2) + 16x^2 sen(4x^2)\right]}{\left[cos^4(4x^2)\right]}$$

Simplificando o numerador e o denominador por $cos(4x^2)$, temos:

$$f^{''}(x) = \frac{8\left[cos(4x^2) + 16x^2 sen(4x^2)\right]}{\left[cos^3(4x^2)\right]}$$

(d) $f(x) = \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

$$f^{'}(x) = \left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{1}{x^2}\right)^{'}$$

$$f'(x) = \left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{1'x^2 - 2x.1}{(x^2)^2}\right)$$

$$f'(x) = \left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{0.x^2 - 2x.1}{(x^2)^2}\right)$$

$$f'(x) = \left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{-2x.1}{x^4}\right)$$

$$f'(x) = \left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{-2x}{x^4}\right)$$

Simplificando o numerador e o denominador por $x$ na expressão $\left(\frac{-2x}{x^4}\right)$:

$$f'(x) = \left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{-2}{x^3}\right) \tag{5}$$

Segunda Derivada:

Para obtermos a segunda derivada da função $f(x) = \text{ sen }\left(\frac{1}{x^2}\right)$, basta derivarmos a derivada primeira obtida $(5)$:

$$f''(x) = \left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]'\left(\frac{-2}{x^3}\right) + \left[\left(\frac{-2}{x^3}\right)\right]' cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \tag{6}$$

Desenvolvendo as derivadas $\left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]'$ e $\left[\left(\frac{-2}{x^3}\right)\right]'$:

$$\left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]' = \left[-sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{1}{x^2}\right)'$$

$$\left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]' = \left[-sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{1'.(x^2) - (x^2)'.1}{x^4}\right)$$

$$\left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]' = \left[-sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{0.x^2 - 2.x}{x^4}\right)$$

$$\left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]' = \left[-sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{-2}{x^3}\right) \tag{7}$$

Desenvolvemos agora:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{-2}{x^3}\right)^{'} &= \frac{(-2)^{'}x^3 - (x^3)^{'}.(-2)}{x^6} \\
&= \frac{-3x^2.(-2)}{x^6} \\
&= \frac{6x^2}{x^6} \\
&= \frac{6}{x^4}
\end{aligned} \tag{8}$$

Substituindo as expressães (7) e (8) em (6), obtemos $f^{''}(x)$:

$$f^{''}(x) = \left(\frac{-2}{x^3}\right)\left[-sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\left(\frac{-2}{x^3}\right) + \left(\frac{6}{x^4}\right)cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f^{''}(x) = -\left(\frac{4}{x^6}\right)\left[sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] + \left(\frac{6}{x^4}\right)\left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$f^{''}(x) = -\left(\frac{2}{x^4}\right)\left\{\left(\frac{2}{x^2}\right)\left[sen\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] + 3\left[cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right\}$$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$f^{'}(x) = \left[\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]^{'}$$

$$f^{'}(x) = \left[\frac{x^{'}\sqrt{1-x^2} - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{'}x}{1-x^2}\right]$$

$$f^{'}(x) = \left[\frac{1.\sqrt{1-x^2} - \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{'}x}{1-x^2}\right]$$

$$f^{'}(x) = \left[\frac{\sqrt{1-x^2} - x\left[\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-1/2}(-2x)\right]}{1-x^2}\right]$$

$$f^{'}(x) = \frac{\left[\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1 - x^2 + x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$$

Vamos calcular a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(1)'(1-x^2)^{3/2} - \left[(1-x^2)^{3/2}\right]'.(1)}{\left[(1-x^2)^{3/2}\right]^2}$$

$$f''(x) = -\frac{\left(\frac{3}{2}\right)(1-x^2)^{1/2}(-2x)}{(1-x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{3x(1-x^2)^{1/2}}{(1-x^2)^3}$$

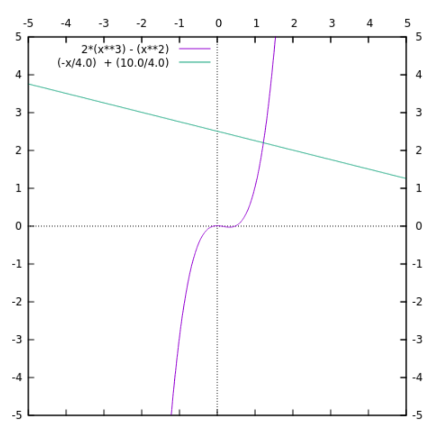
$$f''(x) = 3x(1-x^2)^{1/2}\left(1-x^2\right)^{-3}$$

$$f''(x) = 3x\left(1-x^2\right)^{1/2-3}$$

$$f''(x) = 3x\left(1-x^2\right)^{-5/2}$$

8. (1,25 ponto)

Ache os valores de $x$ para os quais a reta tangente a curva $y = 2x^3 - x^2$ é perpendicular a reta $x + 4y = 10$.




O que queremos verificar e obter são os valores de x, ou seja, os pontos em que as duas retas mencionadas a seguir são perpendiculares.

As retas são: a reta tangente à curva $y = 2x^3 - x^2$ e a reta $x + 4y = 10$.

Como fazemos isso?

Colocamos a reta $x + 4y = 10$ na forma reduzida da equação da reta, $y = ax + b$. Assim, obtemos:

$$4y = -x + 10$$

$$y = \left(\frac{-1}{4}\right) x + \frac{10}{4}$$

Temos $\mathbf{a}$ : coeficiente angular e $\mathbf{b}$ : coeficiente linear dados por: $\mathbf{a} = \dfrac{-1}{4}$ e $\mathbf{b} = \dfrac{10}{4}$.

Vamos utilizar o seguinte resultado:

**Teorema**

*Para que uma reta seja perpendicular a uma outra reta qualquer, o coeficiente angular de uma delas precisa ser o inverso negativo do coeficiente angular da outra.*

Logo, o coeficiente angular da reta perpendicular a $x + 4y = 10$, deve ter o seguinte valor:

$$-\frac{1}{a} = -\left(\frac{1}{\frac{-1}{4}}\right) = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 1\left(\frac{4}{1}\right) = 4$$

Queremos encontrar retas com o coeficiente angular igual a $4$.

Dado que a derivada é a inclinação dessa reta e que o valor da inclinação da reta que procuramos é $4$, basta fazermos a derivada da curva tomar esse valor. Assim, descobriremos os valores de $x$, e consequentemente os pontos em que essas retas fazem entre si um ãngulo de $90$ graus.

$$f(x) = 2x^3 - x^2$$

Lembremos que a função derivada representa a inclinação em cada ponto.

Derivamos então a função $f(x) = 2x^3 - x^2$:

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= (2x^3 - x^2)' \\ &= (2x^3)' - (x^2)' \\ &= 2(x^3)' - (x^2)' \\ &= 2(3x^2) - (2x) \\ &= 6x^2 - 2x \end{aligned} \tag{9}$$

ou seja:

$$f' = 6x^2 - 2x$$

Sabemos que a inclinação procurada é $4$. Então queremos valores de $x$ onde a derivada $f^{'}(x)$ tem valor $4$:

$$4 = 6x^2 - 2x$$

$$6x^2 - 2x - 4 = 0$$

que pode ser simplificada, dividindo todos os seus coeficientes por $2$:

$$3x^2 - x - 2 = 0 \tag{10}$$

as raízes dessa equação podem ser obtidas por diversos mãtodos de resolução, dentre eles o mãtodo de completar quadrados, fãrmula de Bãskara, por exemplo. Utilizamos a fãrmula de Bãskara.

Para uma equação do segundo grau dada por $ax^2 + bx + c = 0$, as raízes são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4.a.c)}}{2.a}$$

Aplicando-a à equação (10), temos:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.(3).(-2)}}{2.3}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.(3).(-2)}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{6}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{6}$$

temos então as seguintes raízes:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{6}$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{6}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{6}$$

$$x_2 = \frac{1 - 5}{6}$$

$$x_2 = \frac{-4}{6}$$

$$x_2 = -\frac{2}{3}$$

Então, concluimos aqui a questão, pois já conseguimos obter os valores de $x$ requeridos das retas tangentes: $x_1 = 1$ e $x_2 = -\frac{2}{3}$ e a inclinação, que como vimos tem valor $4$.

Agora, podemos obter, além do que a questão solicitou, as equaãães das retas tangentes, que são visualizadas nos gráficos.

Para isso, temos que obter os coeficientes lineares das duas retas. Como fazemos isso?

Para $x_1 = 1$: quem é o $y$ relativo a esse valor de $x$?

$$f(x) = 2x^3 - x^2$$

$$f(1) = 2(1)^3 - (1)^2$$

$$f(1) = 2(1) - (1) = 2 - 1 = 1$$

$$y_1 = 1$$

Então o ponto é:

$$(x_1, y_1) = (1, 1) \tag{11}$$

A equaąo da reta tangente pode ser representada como:

$$y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$$

Onde $\mathbf{a}$ é a inclinação, ou coeficiente angular. Ou seja, as retas tangentes terão a forma:

$$y = 4x + \mathbf{b}$$

Para ter a equação, falta descobrir o valor de $\mathbf{b}$ (coeficiente linear).

Substituindo as coordenadas do ponto $(11)$, temos:

$$y_1 = 4x_1 + \mathbf{b}$$

$$1 = 4 * (1) + \mathbf{b}$$

$$1 = 4 + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = 1 - 4$$

$$\mathbf{b} = -3$$

$\mathbf{b}$ é o primeiro coeficiente linear procurado.

Então, a equação da primeira reta tangente é:

$$y = 4x - 3$$

Para $x = -2/3$:

$$f(x) = 2x^3 - x^2$$

$$f(x) = 2\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$f(x) = 2\left(-\frac{8}{27}\right) - \frac{4}{9}$$

$$f(x) = -\frac{16}{27} - \frac{4}{9}$$

$$f(x) = -\frac{16}{27} - \frac{3*4}{3*9}$$

$$f(x) = -\frac{16}{27} - \left(-\frac{12}{27}\right)$$

$$f(x) = -\frac{28}{27}$$

Então o ponto é:

$$(x_2, y_2) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{28}{27}\right) \tag{12}$$

E da mesma forma, a equação da reta tangente pode ser representada como:

$$y = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$$

Onde $(\mathbf{a})$ é a inclinação, ou coeficiente angular. Ou seja, as retas tangentes terão a forma:

$$y = 4x + \mathbf{b}$$

Para ter a equação, falta descobrir o valor de $(\mathbf{b})$ (coeficiente linear).

Usando o ponto $(12)$:

$$y_2 = 4x_2 + \mathbf{b}$$

$$-\frac{28}{27} = 4\left(-\frac{2}{3}\right) + \mathbf{b}$$

$$-\frac{28}{27} = -\frac{8}{3} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{b} = -\frac{28}{27} + \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{b} = -\frac{28}{27} + \frac{9*8}{9*3}$$

$$\mathbf{b} = -\frac{28}{27} + \frac{72}{27}$$

$$\mathbf{b} = \frac{72-28}{27} = \frac{44}{27}$$

**b** é o segundo coeficiente linear procurado.

Então, a equação da segunda reta tangente é:

$$y = 4x + \frac{44}{27}$$

Podemos visualizar no gráfico , a curva $y = 2x^3 - x^2$ em azul escuro, a reta $\frac{-x}{4} + \frac{10}{4}$ na cor vermelha, as duas dadas no enunciado.

E as duas retas tangentes a curva, $4x + \frac{44}{27}$ e $4x - 3$ nas cores verde e azul claro respectivamente.