Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2^o semestre de 2019 - Gabarito

1. (1.0 ponto) ————————————————————

Analise onde a função é crescente ou decrescente e ache os pontos de máximo e mínimo relativos:

$$f(x) = 3x^3 + x^2 + 10$$

Solução:

$$f(x) = 3x^3 + x^2 + 10$$

$$f'(x) = 9x^2 + 2x = x(9x + 2)$$

Intervalos aonde a função é crescente ou decrescente:

Pontos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad x(9x + 2) = 0$$

logo, são candidatos a máximo e mínimo

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = -\frac{2}{9}$$

Estudo do sinal da derivada:

$$f'(x) > 0; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad x < -\frac{2}{9}$$

$$f'(x) < 0; \qquad -\frac{2}{9} < x < 0$$

$f(x)$ é uma função decrescente no intervalo $-\frac{2}{9} < x < 0$
$f(x)$ é uma função crescente para os seguintes valores de x: $x < -\frac{2}{9}$ e $x > 0$

Máximos e Mínimos
A partir dos pontos críticos: $x = 0$ e $x = -2$ e da variação do sinal da derivada, podemos obter os pontos de máximo e mínimo relativos da função:

$$x = 0$$

$$x < 0 \rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 0 \rightarrow f'(x) > 0$$

Logo, existe um ponto de mínimo em $x = 0$, a saber, $(0, f(0)) = (0, 1)$

$$x = -2$$

$$x < -\frac{2}{9} \rightarrow f'(x) > 0$$

$$x > -\frac{2}{9} \rightarrow f'(x) < 0$$

Assim, existe um ponto de máximo em $x = -\frac{2}{9}$, $(-\frac{2}{9}, f(-\frac{2}{9}))$

2. (2.0 pontos) ---

Calcule as antiderivadas:

(a) $$\int \frac{x^5 - 40}{x^4} dx$$

(b) $$\int x^7 \sqrt{(3x^8 + 5)} dx$$

Solução:

(a)

$$\int \frac{x^5 - 40}{x^4} dx = \int \frac{x^5}{x^4} dx - 40 \int \frac{1}{x^4} dx = \int x dx - 40 \int \ x^{-4} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 40 \frac{x^{-3}}{-3} + C = \frac{x^2}{2} + \frac{40}{3x^{-3}} + C =$$

(b)

$$\int x^7 \sqrt{(3x^8 + 5)} dx$$

com

$$u = 3x^8 + 5 \quad \text{teremos} \quad \frac{du}{dx} = 24x^7 \quad \text{e} \quad \frac{1}{24} \frac{du}{dx} = x^7$$

substituindo na integral

$$\int x^7 \sqrt{(3x^8 + 5)} dx = \int \frac{1}{24} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{24} \int u^{\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{1}{24} \left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C \right] = \frac{1}{24} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{24} \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{u^3}}{36} + C$$

mas $u = 3x^8 + 5$, portanto

$$\int x^2 \sqrt{(2x^3 + 1)} dx = \frac{\sqrt{(3x^8 + 5)^3}}{36} + C$$

3. (2,0 pontos) ———————————————

Calcule as integrais definidas:

(a) $\displaystyle\int_1^5 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx$

(b) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^4 - 1}{x^5} dx$

Solução:

(a)

$$\int_1^5 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

porém

$$\int \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int \left(x^2 + x^{-2}\right) dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$$

portanto

$$\int_1^5 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_1^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1^3}{3} + \frac{1}{1}$$
$$= \frac{125}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{1}$$
$$= \frac{625 - 3 - 5 + 15}{15} = \frac{632}{15}$$

(b) $$\int_1^3 \frac{x^4 - 1}{x^5} dx$$

porém

$$\int \frac{x^4 - 1}{x^5}\, dx = \int \frac{x^4}{x^5}\, dx - \int \frac{1}{x^5}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x^5}\, dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-5}\, dx = \ln x - \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C = \ln x + \frac{1}{4x^4} + C$$

portanto

$$\int_1^3 \frac{x^4 - 1}{x^5} dx = \left[\ln x + \frac{1}{4x^4}\right]_1^3 = \left[\ln 3 + \frac{1}{4 \cdot 3^4}\right] - \left[\ln 1 + \frac{1}{4 \cdot 1^4}\right]$$
$$= \ln 3 + \frac{1}{4 \cdot 3^4} - \ln 1 - \frac{1}{4 \cdot 1^4}$$
$$= \ln 3 - \ln 1 + \frac{1}{324} - \frac{1}{4}$$
$$= \ln 3 + \frac{1 - 81}{324} = \ln 3 - \frac{80}{324} = \ln 3 - \frac{20}{81}$$

4. (2.0 pontos)

Esboce as regiões e calcule as áreas pedidas abaixo:
OBS: utilize a metologia indicada em cada questão.

(a) Ache a área total entre a parábola cúbica $y = x^3$, $y = 2x$ e $y = x$.
técnica: área por fatiamento.

(b) Ache a área limitada pelas curvas: $y = x^2$ e $y = 2x$.
técnica : área entre duas curvas.

Solução:

(a) Determinando os pontos de interseção das curvas:
Primeira interseção:

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x^3$$

logo

$$x = x^3$$

$$x(x-1) = 0$$

portanto

$$x = 0 \quad ; \quad x = -1 \quad \text{e} \quad x = 1$$

$$x = -1 \rightarrow y = -1$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y = 1$$

Segunda interseção:

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = x^3$$

$$2x = x^3$$

$$x(x^2-2)=0$$

portanto

$$x=-\sqrt{2} \quad ; \quad x=0 \quad \text{e} \quad x=\sqrt{2}$$

$$x=-\sqrt{2} \rightarrow y=-\sqrt{2^3}$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

$$x=\sqrt{2} \rightarrow y=\sqrt{2^3}$$

Terceira interseção:

$$y=2x \quad \text{e} \quad y=x$$

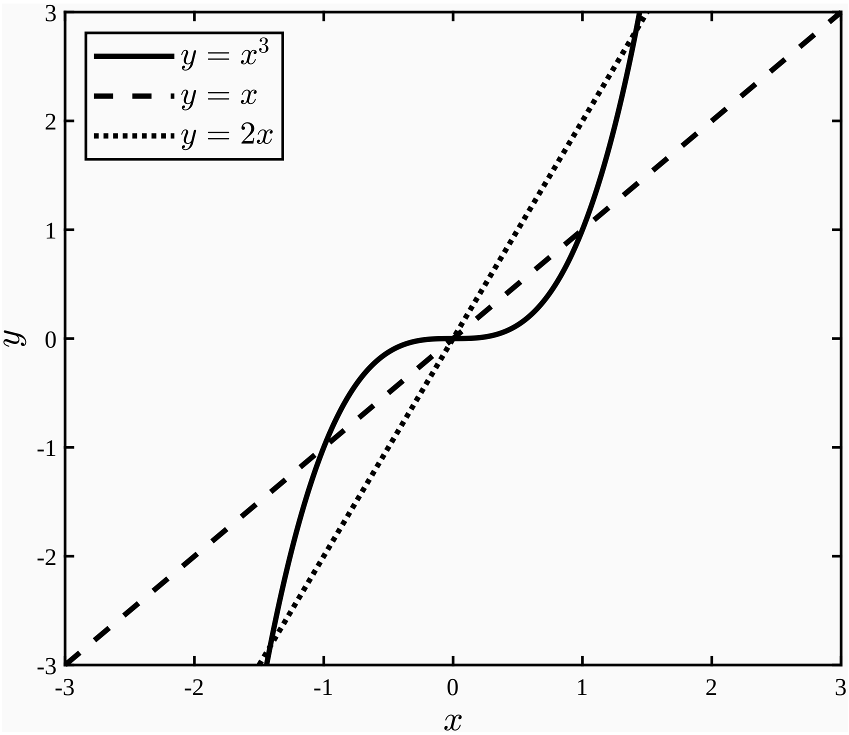
$$x=2x$$

$$x=0$$

$$x=0 \rightarrow y=0$$

Como todas as funções são ímpares, isto é, existe simetria em relação a origem (elementos simétricos têm imagens simétricas), logo, basta calcularmos a área para os valores de x positivos, e para os valores de x negativos a referida área será de mesmo valor, porém com o sinal trocado, como ilustra o gráfico mais adiante.

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (2x-x)\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left(2x-x^3\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2-\frac{x^4}{4}\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \left[\frac{1}{2}-\frac{0}{2}\right] + \left[2-\frac{4}{4}-1+\frac{1}{4}\right] \\
&= \frac{2+8-4-4+1}{4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$



(b) Determinando os pontos de interseção entre as curvas:

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = x^2$$

$$2x = x^2$$

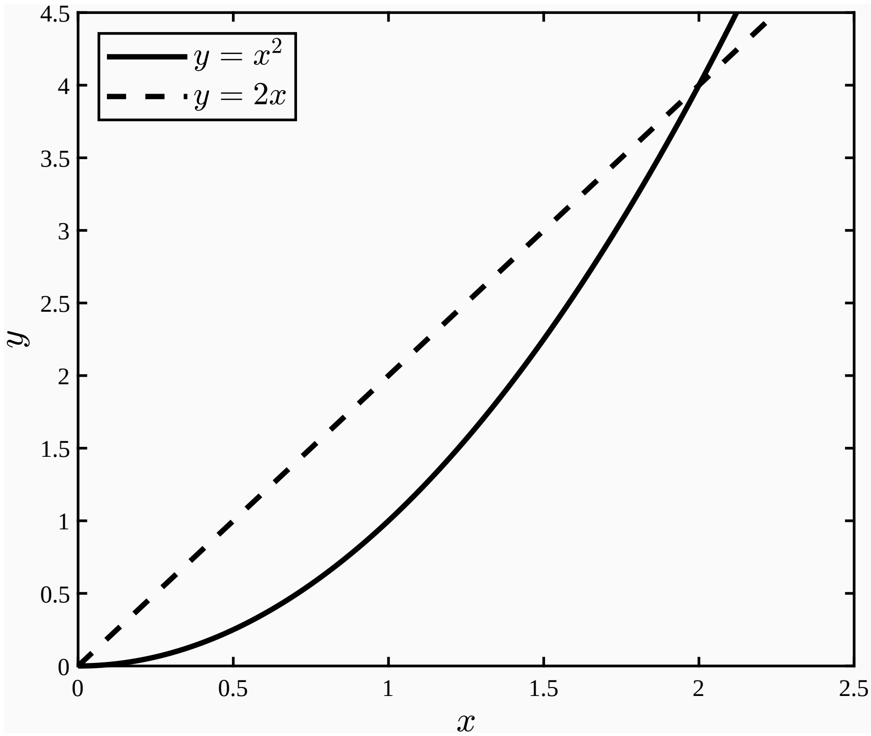
$$x(2 - x) = 0$$

$$x = 0; x = 2$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y = 4$$

$$A = \int_0^1 2x dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 \left(2x - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = 1^2 - \frac{1^3}{3} = \frac{2}{3}$$



5. (1.0 ponto)

Calcule o volume do sólido gerado quando a região sob a curva $y = \sqrt[3]{x}$ em $[1, 9]$ é girada em torno do eixo x .

Solução:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \int_1^9 \pi \sqrt[3]{x}\, dx = \pi \int_1^9 x^{\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{3\pi x^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_1^9 = \left[\frac{3\pi \sqrt[3]{x^4}}{4}\right]_1^9 =$$

$$= \left[\frac{3\pi \sqrt[3]{9^4}}{4} - \frac{3\pi \sqrt[3]{1^4}}{4}\right] = \frac{3\pi}{4}\left[\sqrt[3]{9^4} - \sqrt[3]{1^4}\right] = \frac{3\pi}{4}\left[9\sqrt[3]{9} - 1\right]$$

6. (1.00 ponto) ---

Calcule os seguintes limites utilizando a regra de L'Hôpital

(a) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$$

Solução:

(a) tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{27+h}-3}{h} \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{3}(27+h)^{\frac{-2}{3}}}{1} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{(27+h)^2}} = \frac{1}{27}$$

(b) tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

7. (1,00 ponto) ---

Construa o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)}$$

Solução:

1. Domínio

O domínio de f é $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$ visto que f não está definida em $x = 1$ e $x = 2$.

2. Interseções com os eixos x e y

Claramente $f(x)$ se anula no ponto $x = 0$, logo $(0, 0)$ pertence ao gráfico de f.

3. Assíntotas verticais e horizontais

Existem assíntotas verticais nos pontos $x = 1$ e $x = 2$, já que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \infty$$

Existe uma assíntota horizontal para $y = 1$ quanto $x \to -\infty$, já que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2-3x+2)/x^2} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{(1-0+0)} = 1$$

e para $y = 1$ quanto $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2-3x+2)/x^2} =$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1}{(1-0+0)} = 1$$

4. Máximos e mínimos locais

São candidatos os pontos aonde a primeira derivada se anula, isto é,

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)(x-2) - x^2(2x-3)}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{x(4-3x)}{(x-1)^2(x-2)^2} = 0$$

logo, os pontos críticos são $x = 0$ (onde $y = 0$) e $x = 4/3$ (onde $y = -8$).
Para verificar se são pontos de mínimo ou de máximo vamos verificar o sinal da primeira derivada.
O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no intervalo estudado.

sinal de $f'(x)$

$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$n.d.$	$+$	0	$-$	$-$	$n.d.$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\mathbb{R}$
$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1 assínt. vert.		$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$		2 assínt. vert.		$\frac{4}{2}$		3	

Logo $f(x)$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(\frac{4}{3}, \infty)$ e é crescente em $(0, \frac{4}{3})$.
Um ponto de mínimo local é $(x, y) = (0, 0)$.
Um ponto de máximo local é $(x, y) = (\frac{4}{3}, -8)$.

5. Pontos de inflexão

São aqueles aonde a segunda derivada se anula.

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(x-1)^2(x-2)^2(4-6x) - 2(4x-3x^2)(x-1)(x-2)(2x-3)}{(x-1)^4(x-2)^4} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)\left\{(x-1)(x-2)(4-6x) - 2(4x-3x^2)(2x-3)\right\}}{(x-1)^4(x-2)^4} \\
&= \frac{(x-1)(x-2)(4-6x) - 2(4x-3x^2)(2x-3)}{(x-1)^3(x-2)^3} \\
&= \frac{(4-6x)(x^2-3x+2) - 2(8x^2-12x-6x^3+9x^2)}{(x-1)^3(x-2)^3} \\
&= \frac{4x^2-12x+8-6x^3+18x^2-12x-16x^2+24x+12x^3-18x^2}{(x-1)^3(x-2)^3} \\
&= \frac{6x^3-12x^2+8}{(x-1)^3(x-2)^3} \\
&= \frac{2(3x^3-6x^2+4)}{(x-1)^3(x-2)^3}
\end{aligned}
$$

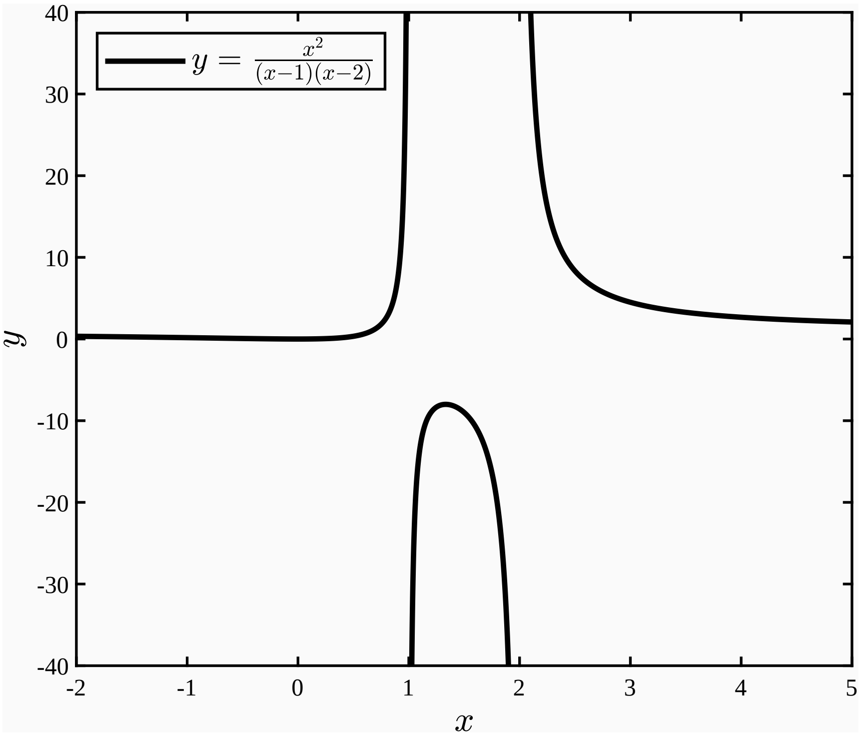
$$
f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2(3x^3-6x^2+4)}{(x-1)^3(x-2)^3} = 0 \Longrightarrow 3x^3 - 6x^2 + 4 = 0
$$

O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada no intervalo $[-8, 8]$.

sinal de $f''(x)$

																		$n.d.$		$n.d.$													
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$\uparrow$	$-$	$\uparrow$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\mathbb{R}$
-8		-7		-6		-5		-4		-3		-2		-1		0		1		2		3		4		5		6		7		8	

Logo, além dos pontos $x = 1$ e $x = 2$ existe uma mudança de concavidade entre $(-1, 0)$.



Logo, pelo sinal da segunda derivada, f é côncava para baixo desde $-\infty$ até um valor entre $(-1, 0)$ e em $(1, 2)$, e é côncava para cima a partir de um valor entre $(-1, 0)$ e 1 e em $(2, \infty)$. O ponto de inflexão está em $(-1, 0)$. Ponto de inflexão é aproximadamente $-0{,}70241438391931$.