Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
Gabarito AP3 2° semestre de 2005

1ª Questão – Resolução:

$y = x^2(6 - x^2)$

Dom f = IR

Assíntotas Horizontais:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2(6-x^2) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{(6-x^2)}_{\to-\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2(6-x^2) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{(6-x^2)}_{\to-\infty} = -\infty$$

Não existem assíntotas horizontais.

Assíntotas Verticais:

$\lim_{x\to a} x^2(6-x^2) = a^2(6-a^2) \in$ IR , $\forall a \in$ IR

Não existem assíntotas verticais.

Máximos e Mínimos Locais

$f(x) = x^2(6-x^2) = 6x^2 - x^4$

$f'(x) = 12x - 4x^3 \quad f'(x) \to 0 \to 4x\ (3 - x^2) = 0$

Os máximos e mínimo e locais ocorrem em $x = 0,\ \ x = +\sqrt{3},\ \ x = -\sqrt{3}$

Sinal da primeira derivada nos intervalos estudados

$f(x)$ é crescente em $(-\infty, -\sqrt{3})$ e $(0, \sqrt{3})$ e decrescente em $(-\sqrt{3}, 0)$ e $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de máximo locais são $(-\sqrt{3},9)$ e $(-\sqrt{3},9)$. O ponto de mínimo local é $(0,0)$

Pontos de Inflexão

$f''(x) = 12 \ \ -12x^2 \ = 12 \ \ (1 - x^2)$

Os pontos de inflexão ocorrem em $x = -1$ e $x = -1$

Pelo sinal da segunda derivada, f é côncava para baixo em $(-\infty, -1)$ e $(1, +\infty)$ e é côncava para cima em $(-1, \ 1)$. Os pontos de inflexão são:

$(-1, \ 5)$ e $(1, \ 5)$.

Eixo x:

$f(x) = x^2(6 - x^2)$

os pontos onde $f(x)$ se anula (intersecção com o eixo x) são chamados zeros ou raízes da função.

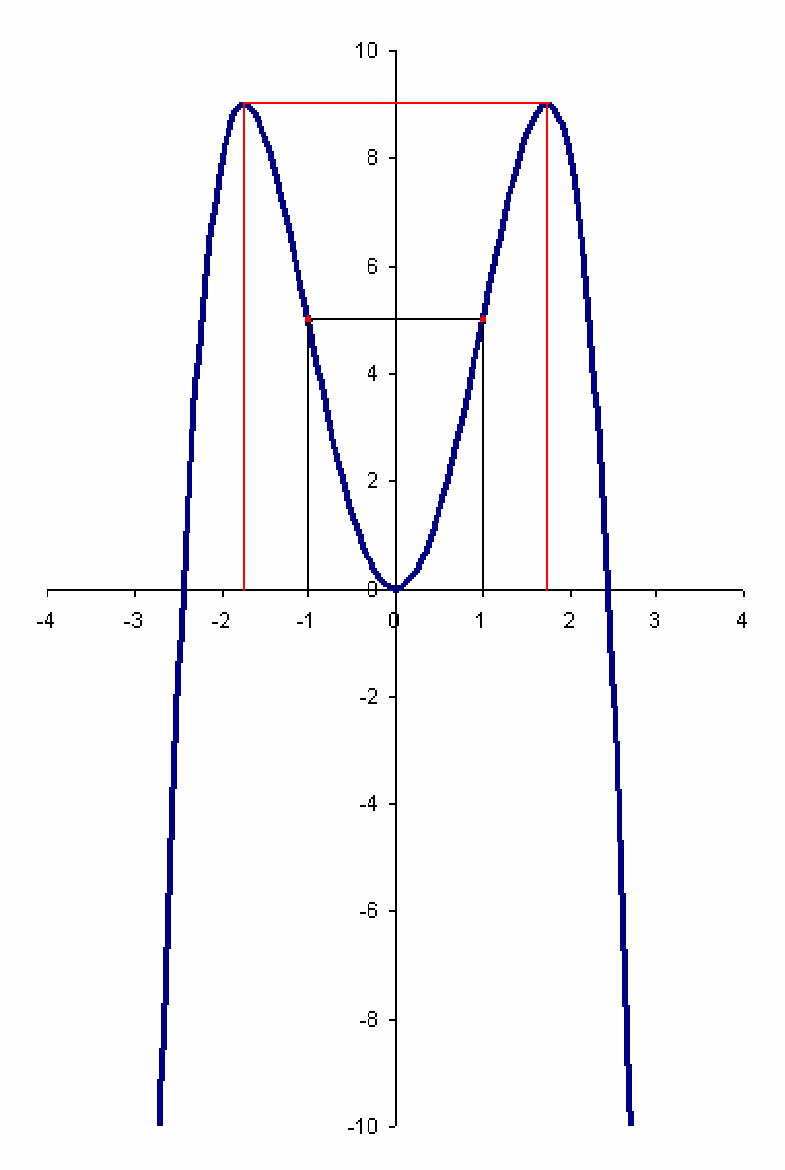
$0 = x^2(6 - x^2) \to x = \pm\sqrt{6}$ ou $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} f\left(-\sqrt{6}\right) = \left(-\sqrt{6}\right)^2\left(6 - \left(-\sqrt{6}\right)^2\right) = 0 \\ f(0) \quad = \quad (0)^2\left(6 - (0)^2\right) = 0 \\ f\left(\sqrt{6}\right) \quad = \quad \left(\sqrt{6}\right)^2\left(6 - \left(\sqrt{6}\right)^2\right) = 0 \end{cases}$$

as interseções com o eixo x são $\left(-\sqrt{6}, 0\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{6}, 0\right)$

Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, neste ponto $y = f(0) = 0$, logo a interseção com o eixo y é $(0,0)$.



<u>2ª Questão</u> – Resolução:

a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ onde $y = \cos(\sqrt{1-x})$

$$\frac{dy}{dx} = -sen\sqrt{1-x}.\frac{d\left(\sqrt{1-x}\right)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -sen\sqrt{1-x}.\ \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.\ \frac{d(1-x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$$

daí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{sen\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}\right)'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(sen\sqrt{1-x}\right)'.2\sqrt{1-x} - sen\sqrt{1-x}.\left(2\sqrt{1-x}\right)'}{\left(2\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\cos\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1-x}\right)'\sqrt{1-x} - \left(sen\sqrt{1-x}\right).\left(\sqrt{1-x}\right)'}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\cos\sqrt{1-x}\right)\frac{1}{2\sqrt{1-x}}.(-1).\sqrt{1-x} - \left(sen\sqrt{1-x}\right).\frac{1}{2\sqrt{1-x}}(-1)}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos\sqrt{1-x}.\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}} + \frac{sen\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}\right)\frac{1}{\left(\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\cos\sqrt{1-x}.\sqrt{1-x} + sen\sqrt{1-x}}{4\left(\sqrt{1-x}\right)^3}$$

b) $\frac{dy}{dx}$ onde $x^2 + y^2 = 16$

Resolvendo para y

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{dx} = \frac{1}{2}\left(16 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.(-2x) =$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

ou derivando implicitamente:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

logo

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

3ª Questão – Resolução:

a) $\int_0^{3/4} \frac{1}{1 - x}\ dx =$

fazendo-se $u = 1 - x$ obtém-se $du = -dx$

obtém-se a variação de u , utilizando-se a relação $u = 1 - x$ e a variação de x $\left(0, \frac{3}{4}\right)$:

$u = 1$ quando $x = 0$

$u = \frac{1}{4}$ quando $x = \frac{3}{4}$

Logo,

$$-\int_{1}^{1/4}\frac{1}{u}\ du = -\ln\ u\Big|_{1}^{1/4} = \ln\frac{1}{4} - \ln 1 = \ln 1 - \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

b) $\int_{0}^{1}(2x+1)^2\,dx = \int_{0}^{1}\left(4x^2 + 4x + 1\right)\ dx = \left. 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x\right|_{0}^{1} = \frac{4}{3} + 2 + 1 = \frac{4+6+3}{3} = \frac{13}{3}$

<u>4ª Questão</u> – Resolução:

Para determinar os pontos de interseção entre dois gráficos, igualamos as equações: $y = x^2$, $y = x + 6$ para obtemos valores de x que determinam y iguais nas 2 equações.

$x^2 = x + 6$
$x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2}$$

<u>Raízes:</u>

$$x' = \frac{1 + \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2} \quad , \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2}$$

$$x' = \frac{1+5}{2} = 3 \quad , \quad x'' = \frac{1-5}{2} = -2$$

Onde $f(3) = 3 + 6 = 9$, $f(-2) = -2 + 6 = 4$

Logo, os pontos de interseção entre os gráficos são: (3,9) e (-2,4).

A área da região entre as curvas é dada por:

A(R)= $\int_{-2}^{3}\left|(x+6) - x^2\right|\ dx = \int_{-2}^{3}(x+6) - x^2\ dx = \left.\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{3} = \frac{9}{2} + 18 - 9$

$$-2+12+\frac{8}{3}=19+\frac{9}{2}+\frac{8}{3}=\frac{114+27+16}{6}=\frac{157}{6}$$ unidades quadradas