Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 1^o semestre de 2018 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^4 - 6x + 2$, utilizando as ferramentas do cálculo.

Solução:

$$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Os candidatos a máximos e mínimos locais são:

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$$

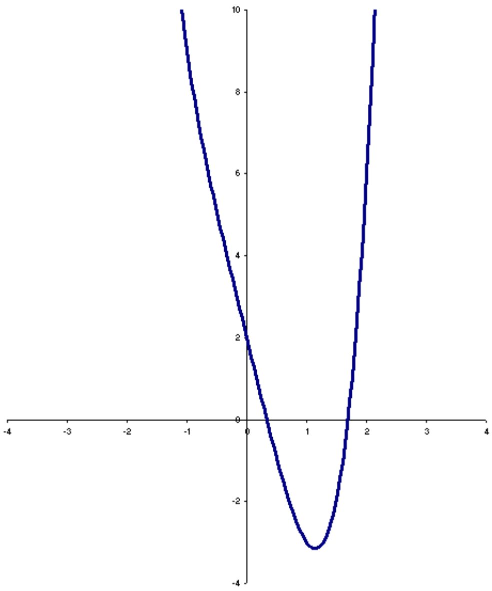
Vamos estudar o sinal da primeira derivada para verificar as regiões aonde $f(x)$ cresce e decresce.

Intervalo	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, \sqrt[3]{\frac{6}{4}})$	$-$	decrescente
$(\sqrt[3]{\frac{6}{4}}, \infty)$	$+$	crescente

Da segunda derivada surgem os candidatos a pontos de inflexão.

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Entretanto para $x > 0$ e para $x < 0$ $f''(x) > 0$, logo a função é concava para cima para $x > 0$ e para $x < 0$, e não existe ponto de inflexão em $x = 0$.



2. (2,5 pontos)

Para as seguintes funções verifique se elas tem inversas. Para as funções que tem inversa ache sua expressão (f^{-1}) e calcule sua derivada.

(a) $f(x) = x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

Solução:

(a) $f(x) = x^2 + 2$

$$y = x^2 + 2 \Longrightarrow y - 2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{y-2} = x$$

A função inversa seria $f^{-1}(y) = \sqrt{y-2}$. Entretanto o domínio da inversa é $\mathbb{R}$ tal que $y > 2$ e não coincide com a imagem de f. Logo f não tem inversa.

(b) $f(x) = x^3$

$$y = x^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

$$x = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(y^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

(c) $$f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$$

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \Longrightarrow y(x+2) = 2x-1 \Longrightarrow yx + 2y = 2x - 1$$

$$\Longrightarrow yx - 2x = -1 - 2y \Longrightarrow (y-2)x = -1 - 2y \Longrightarrow x = -\frac{2y+1}{y-2}$$

$$x = -\frac{2y+1}{y-2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(-\frac{(2y+1)}{(y-2)}\right)' = -\frac{(2y+1)'(y-2) - (2y+1)(y-2)'}{(y-2)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2 \cdot (y-2) - (2y+1) \cdot 1}{(y-2)^2} = -\frac{2y - 4 - 2y - 1}{(y-2)^2} = \frac{5}{(y-2)^2}$$

3. (2,5 pontos)

Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x = -1$ e $x = 1$.

Solução:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi (x^2+1)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx \\ &= \pi \left[\tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{2}{3}x^2 + x\right]_{-1}^{1} \\ &= \pi \left[\left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{2}{3} + 1\right) - \left(-\tfrac{1}{5} - \tfrac{2}{3} - 1\right)\right] \\ &= \pi \tfrac{56}{15} \end{aligned}$$

4. (2,5 pontos)

Calcule as integrais definidas.

(a) $$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

(b) $$\int_{1}^{4} \left(\sqrt{z} - z\right)^2 dz$$

Solução:

(a) $$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx =$$

$$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2}\right) dx - \int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^3}\right) dx =$$

$$\int_{-3}^{-1} x^{-2} \, dx - \int_{-3}^{-1} x^{-3} \, dx =$$

$$\left[\frac{1}{-1}x^{-1}\right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{1}{-2}x^{-2}\right]_{-3}^{-1} =$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{-3}^{-1} =$$

$$\left[-\frac{1}{-1} - \left(-\frac{1}{-3}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{(-3)^2}\right] =$$

$$\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{9}\right] =$$

$$\left[\frac{3-1}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{9-1}{9}\right] =$$

$$\left[\frac{2}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{8}{9}\right] =$$

$$\left[\frac{12}{18}\right] + \left[\frac{8}{18}\right] = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

(b) $$\int_1^4 \left(\sqrt{z} - z\right)^2 \, dz =$$

$$\int_1^4 \left((\sqrt{z})^2 - 2\sqrt{z}z + z^2\right) \, dz = \int_1^4 \left(z - 2\sqrt{z}z + z^2\right) \, dz =$$

$$\int_1^4 \left(z - 2z^{3/2} + z^2\right) \, dz = \int_1^4 z \, dz - 2\int_1^4 z^{3/2} \, dz + \int_1^4 z^2 \, dz =$$

$$\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^4 - 2\left[\frac{2}{5}z^{5/2}\right]_1^4 + \left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^4 = \left[\frac{z^2}{2}\right]_1^4 - 2\left[\frac{2}{5}z^2 z^{1/2}\right]_1^4 + \left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^4 =$$

$$\left[\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] - \frac{4}{5}\left[4^2\sqrt{4} - 1^2\sqrt{1}\right] + \left[\frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{3}1^3\right] =$$

$$\left[\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{4}{5}\left[16 \cdot 2 - 1 \cdot 1\right] + \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] =$$

$$\left[\frac{15}{2}\right] - \left[\frac{124}{5}\right] + \left[\frac{63}{3}\right] = \frac{225 - 744 + 630}{30} = \frac{111}{30} = \frac{37}{10}$$