Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2^o semestre de 2012 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) ————————————————————————————————

Para as seguintes funções, ache os extremos relativos e os intervalos aonde elas são crescentes e decrescentes.

(a) $$f(x) = x^3 + x^2 - x + 4$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

(c) $$f(x) = 2 + x^{2/3}$$

Solução:

(a) $$f(x) = x^3 + x^2 - x + 4$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

logo os pontos críticos são $x = -1$ e $x = \frac{1}{3}$.
Verificando o sinal da primeira derivada nas vizinhanças dos pontos críticos, temos

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x < -1$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad -1 < x < \frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{para} \quad x > \frac{1}{3}$$

Portanto em $x = -1$ há um máximo relativo e em $x = \frac{1}{3}$ há um mínimo relativo. $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -1)$, $f(x)$ é decrescente em $(-1, \frac{1}{3})$ e $f(x)$ é crescente em $(\frac{1}{3}, \infty)$,.

(b) $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$f'(x) = [(x-2)^{-1}]' = -1 \cdot (x-2)^{-2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

que nunca se anula. Não há máximos ou mínimos locais na função.
Verificando o sinal da primeira derivada nas verificamos que

$$f'(x) < 0 \quad \text{para} \quad -\infty < x < \infty$$

Portanto $f(x)$ é decrescente em toda a reta dos reais.

(c) $$f(x) = 2 + x^{2/3}$$

$$f'(x) = [2 + x^{2/3}]' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Em $x = 0$ a derivada não está definida, mas $x = 0$ está no domínio de $f(x)$.
Para $x < 0$ $f'(x) < 0$ e para $x > 0$ $f'(x) > 0$. Assim, $f(x)$ é decrescente para $x < 0$ e crescente para $x > 0$. Portanto há em $x = 0$ um mínimo absoluto de $f(x)$.

2. (1,0 ponto) ---

Ache os pontos de inflexão das seguintes funções:

(a) $f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 12x - 7$

(b) $f(x) = x^4 - 6x + 2$

(c) $f(x) = 3x + (x+2)^{3/5}$

Solução:

(a) $$f(x) = 3x^4 - 10x^3 + 12x - 7$$

$$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 + 12$$

$$f''(x) = 36x^2 - 60x = 4x(9x - 15)$$

os possíveis pontos de inflexão são $x = 0$ e $x = \frac{5}{3}$. Vejamos agora o sinal da segunda derivada.

Para $x < 0$ $\Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow$ concavidade para cima.
Para $0 < x < 5/3$ $\Longrightarrow f''(x) < 0 \Longrightarrow$ concavidade para baixo.
Para $x > 5/3$ $\Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow$ concavidade para cima.

Os pontos de inflexão são $x = 0$ e $x = \frac{5}{3}$.

(b) $$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6$$

$$f''(x) = 12x^2$$

o candidato a ponto de inflexão é $x = 0$. Entretanto,
para $x < 0 \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow$ concavidade para cima e
para $x > 0 \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow$ concavidade para cima.

Logo, não há pontos de inflexão no gráfico de $f(x)$.

(c) $$f(x) = 3x + (x+2)^{3/5}$$

$$f'(x) = 3 + \frac{3}{5}(x+2)^{-2/5} \cdot 1 = 3 + \frac{3}{5}(x+2)^{-2/5}$$

$$f''(x) = -\frac{6}{25}(x+2)^{-7/5} = -\frac{6}{25(x+2)^{7/5}}$$

Para $x < -2 \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow$ concavidade para cima e
para $x > -2 \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow$ concavidade para cima.

$x = -2$ é um ponto de inflexão.

3. (1,0 ponto) ———

Construa o gráfico da função

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$$

Solução:

Polinômios são contínuos em toda a reta real.

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$$

$$f'(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 8 = 4\,(x-2)\,(x-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

São candidatos a máximos e mínimos locais $x = 2$ e $x = 1/2$.

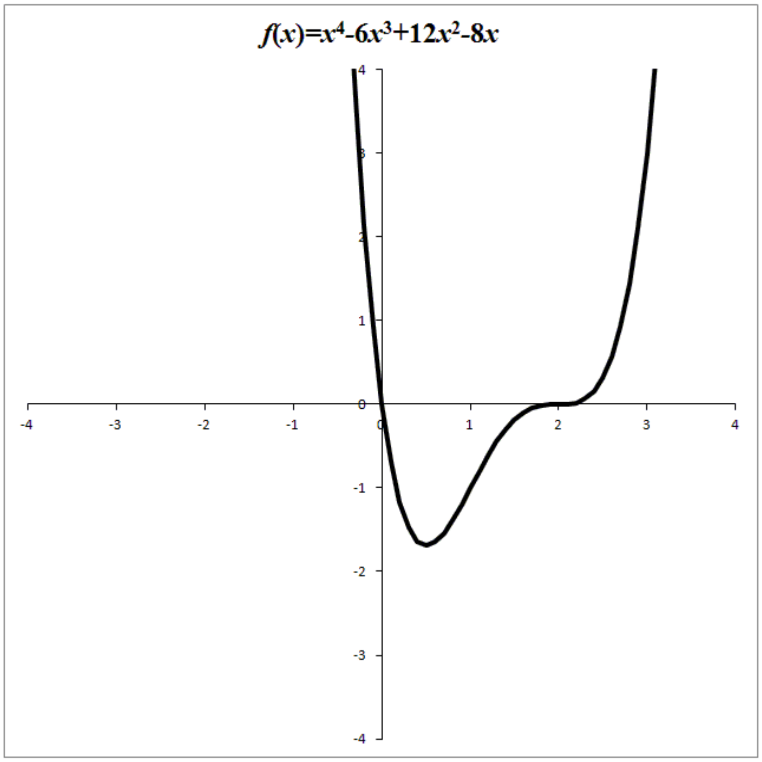
Para $x < 1/2 \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ é decrescente,
para $1/2 < x < 2 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ é crescente e
para $x > 2 \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ é crescente.

Portanto, $x = 1/2$ é um ponto de mínimo local.

$$f''(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x-1)(x-2)$$

Os possíveis pontos de inflexão estão em $x = 1$ e $x = 2$.

Para $x < 1 \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ é côncava para cima,
para $1 < x < 2 \Longrightarrow f''(x) < 0 \Longrightarrow f(x)$ é côncava para baixo e
para $x > 2 \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow f(x)$ é côncava para cima.



4. (1,0 ponto)

Verfique se cada uma das funções abaixo, definidas no intervalo $[a, b]$, satisfaz ou não as hipóteses do Teorema do valor médio. Em caso afirmativo, determine um número $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(a) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad [a, b] = [1, 5]$;

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \quad [a, b] = [1, 3]$.

Solução:

(a) $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad [a, b] = [1, 5]$;
Primeiramente temos que verificar se a função é contínua e diferenciável em $[1, 5]$. Claramente todos os pontos do intervalo $[1, 5]$ pertencem ao domínio de $f(x)$, já que seu domínio é $[1, \infty)$. Além disso a função é contínua em $[1, 5]$, posto que o limite abaixo existe para todo ponto de $[1, 5]$. Sabemos também que $f(x) = \sqrt{x-1}$ é diferenciável em $(1, 5)$ pois sua derivada existe e vale

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

que está definida para qualquer ponto em $(1, 5)$.

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x-1} = \sqrt{a-1} = f(a), \quad \forall\, a \in [1, 5]$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f'(c) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5-1} - \sqrt{1-1}}{5-1} = \frac{\sqrt{4} - \sqrt{0}}{4} = \frac{2-0}{4} = \frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{1}{2\sqrt{c-1}} = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{c-1} = 1 \Longrightarrow c - 1 = 1 \Longrightarrow c = 2$$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 3, \;\; [a, b] = [1, 3]$.
Polinômios são contínuos e diferenciáveis em toda a reta dos reais.
Temos somente que calcular c.

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$2c - 4 = \frac{(3^2 - 4 \cdot 3 + 3) - (1^2 - 4 \cdot 1 + 3)}{3 - 1} = \frac{(9 - 12 + 3) - (1 - 4 + 3)}{3 - 1} = \frac{(0) - (0)}{3 - 1} = 0$$

ou

$$c = 2$$

5. (1,0 ponto)

Ache as seguintes antiderivadas.

(a) $$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$$

(b) $$\int (x^3 + 2)^2 (3x^2) dx$$

Solução:

(a)
$$\int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2} + 5\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right] dx = \int \left[x + 5 - 4\frac{1}{x^2}\right] dx$$

$$= \int x\, dx + 5 \int 1\, dx - 4 \int x^{-2}\, dx = \frac{x^2}{2} + 5x - 4(-1)x^{-1} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - \frac{4}{x} + C$$

(b) $$\int (x^3+2)^2(3x^2)dx$$

com $u = x^3+2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2$

$$\int (x^3+2)^2(3x^2)dx = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$$

6. (1,0 ponto) ———————————————————————————————

Avalie as seguintes integrais definidas.

(a) $$\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)\,dx$$

(b) $$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\,dx$$

(c) $$\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

(d) $$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x\,dx$$

(e) $$\int_{0}^{2} (x+2)\,dx$$

Solução:

(a) $$\int_{-1}^{1} (2x^2 - x^3)\,dx = \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1} = \left[2\frac{1^3}{3} - \frac{1^4}{4}\right] - \left[2\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^4}{4}\right]$$
$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{3}$$

(b) $$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)\,dx = \int_{-3}^{-1} \left(x^{-2} - x^{-3}\right)\,dx = \left[-1x^{-1} - \frac{1}{-2}x^{-2}\right]_{-3}^{-1}$$
$$= \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1} = \left[-\frac{1}{(-1)} + \frac{1}{2(-1)^2}\right] - \left[-\frac{1}{(-3)} + \frac{1}{2(-3)^2}\right]$$
$$= \left[\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right] = \frac{18+9-6-1}{18} = \frac{10}{9}$$

(c) $$\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{1}^{4} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int_{1}^{4} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{4} = \left[2\sqrt{x}\right]_{1}^{4} = 2\left[\sqrt{4} - \sqrt{1}\right] = 2$$

(d) $$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_{\pi/4}^{3\pi/4} = [-\cos 3\pi/4 + \cos \pi/4] = -(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

(e) $$\int_{0}^{2} (x+2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{0}^{2} = \left[\frac{2^2}{2} + 2\cdot 2\right] - \left[\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0\right] = 2+4-0-0 = 6$$

7. (1,0 ponto) ———

Girando em torno do eixo y a região acima do eixo x e abaixo da curva $y = 2x^2$ entre $x = 0$ e $x = 5$, ache o volume do sólido gerado.

Solução:

$$V = 2\pi \int_0^5 xy\,dx = 2\pi \int_0^5 x(2x^2)\,dx = 4\pi \int_0^5 x^3\,dx = 4\pi \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^5 = \pi \left. x^4\right|_0^5 = \pi 5^4 = 625\pi$$

8. (1,0 ponto) ——— **Questão Anulada** ———

Definidas as funções hiperbólicas

$$\text{senh}\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Encontre:

(a) $\dfrac{d\,\text{senh}}{dx}$

(b) $\dfrac{d\cosh}{dx}$

(c) $\cosh^2 x - \text{senh}^2$

Solução:

(a) $$\frac{d\,\text{senh}\,x}{dx} = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]' = \left[\frac{e^x}{2}\right]' - \left[\frac{e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x}{2} - (-1)\frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

(b) $$\frac{d\cosh x}{dx} = \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]' = \left[\frac{e^x}{2}\right]' + \left[\frac{e^{-x}}{2}\right]' = \frac{e^x}{2} + (-1)\frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{senh}\,x$$

(c) $$\begin{aligned}\cosh^2 x - \text{senh}^2 x &= \left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right]^2 - \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[e^x + e^{-x}\right]^2 - \frac{1}{4}\left[e^x - e^{-x}\right]^2 \\ &= \frac{1}{4}\left[e^{\ 2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right] - \frac{1}{4}\left[e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[e^{\ 2x} + 2 + e^{-2x}\right] - \frac{1}{4}\left[e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right] \\ &= \frac{e^{\ 2x}}{4} + \frac{2}{4} + \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}}{4} + \frac{2}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1\end{aligned}$$

9. (1,0 ponto) ———

Avalie as integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{2+\ln x}{x}\,dx$

Solução:

(a) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx$

com $u = e^x$, temos $u' = e^x = u$, substituindo na integral

$$\int \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = \int \frac{u}{u+2}\frac{1}{u}\,dx = \int \frac{1}{u+2}\,dx = \ln(u+2) = \ln(e^x+2)$$

e

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = [\ln(e^x+2)]_0^{\ln 2} = \ln(e^{\ln 2}+2) - \ln(e^0+2)$$

$$= \ln(2+2) - \ln(1+2) = \ln 4 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

(b) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{2+\ln x}{x}\,dx$

mas

$$\int \frac{2+\ln x}{x}\,dx = \int \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right]\,dx = 2\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} + C$$

e

$$\int_1^{e} \frac{2+\ln x}{x}\,dx = \left[2\ln x + \frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = 2\ln e + \frac{(\ln e)^2}{2} - 2\ln 1 + \frac{(\ln 1)^2}{2}$$

$$= 2\cdot 1 + \frac{1^2}{2} - 2\cdot 0 + \frac{0^2}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

10. (1,0 ponto)

Use a regra de L'Hôpital para calcular os limites

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x-\pi}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen } x)}{\ln(\tan x)}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

Solução:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi^+} \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x-\pi}}$

tipo $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to\pi^+} \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x-\pi}} = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos\ x}{\frac{1}{2\sqrt{x-\pi}}} = \lim_{x\to\pi^+} 2\cdot\sqrt{x-\pi}\cdot\cos\ x = 0$$

(b) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen } x)}{\ln(\tan x)}$$

tipo $\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\text{sen } x)}{\ln(\tan x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\sec^2 x}{\tan x}} = \lim_{x\to 0^+} \cos^4 x = 1$$

(c) $$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$$

tipo $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2}x^2 = 0$$