**Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina: Matemática para Computação**
**AP1 - 1$^o$ semestre de 2009 - Gabarito**

1. (2,0 pontos)

Encontre o domínio e a imagem das seguintes funções:

(a) (1,0 ponto)

$$\begin{cases} f(x) = 5 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ f(x) = 10 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ f(x) = 15 & \text{se} \quad 2 < x \leq 3 \\ f(x) = 20 & \text{se} \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

(b) (0,5 ponto)

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

(c) (0,5 ponto)

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

Solução:

(a) (1,0 ponto)

$$\begin{cases} f(x) = 5 & \text{se} \quad 0 < x \leq 1 \\ f(x) = 10 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \\ f(x) = 15 & \text{se} \quad 2 < x \leq 3 \\ f(x) = 20 & \text{se} \quad 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

O domínio é definido pelo intervalo $(0, 4]$ e a imagem é o conjunto $\{5, 10, 15, 20\}$.

(b) (0,5 ponto)

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

A função é definida para todo valor de $x$ exceto os valores que anulam o denominador, ou seja, devemos ter:

$$x - 2 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

Para se estudar a imagem dessa função, podemos escrever a variável $x$ em função de $y$ e verificarmos se existem restrições:

$$f(x) = y = \frac{1}{x-2}$$

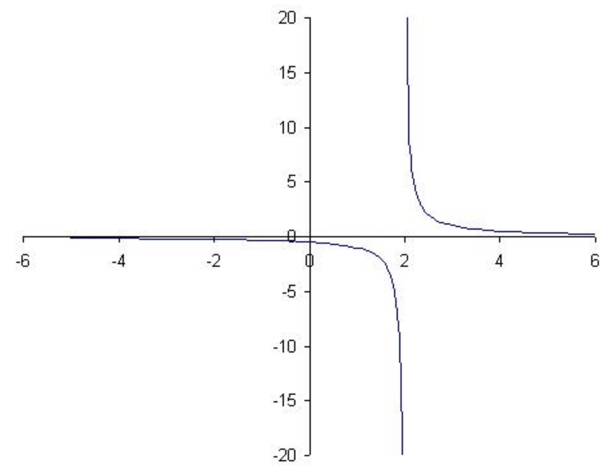
$$y(x-2) = 1$$

$$xy - 2y = 1$$

$$xy = 1 + 2y$$

$$x = \frac{1+2y}{y}$$

Logo, concluimos que o único valor que $y$ não poderá ter é zero (devido ao denominador). Dessa forma, a imagem é dada por: $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

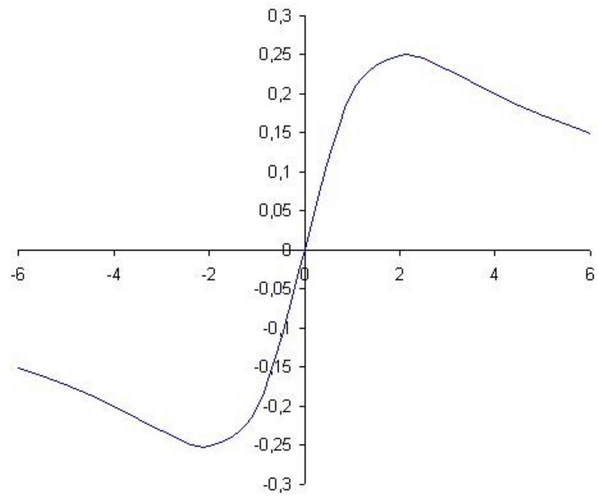



(c) (0,5 ponto)

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$$

O domínio é o conjunto de todos os números reais pois o denominador é positivo para quaisquer valores de $x$.

Através do gráfico da função $f(x)$ podemos observar que a imagem é o intervalo dado por: $[-1/4, +1/4]$.




2. (2,00 pontos)

Calcule os seguintes limites:

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

Solução:

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= +\infty$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 2} 3+\sqrt{x^2+5}$$

$$= 6$$

3. (2,0 pontos) ______________________________

   Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

   $$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

   Solução:

   $$f(x) = \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

   A função $f(x)$ tem uma discontinuidade não-removível em $x = 1$. Pela definição de continuidade, a seguinte equação deve ser verificada:

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$$

   Para que possamos concluir que $f(x)$ é uma função contínua (particularmente em $x = 1$).

   Vejamos:

   $$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

   $$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

   $$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2}$$

   $$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

   $$= \lim_{x\to 1} \frac{3}{0}$$

   $$= +\infty$$

4. (2,0 pontos)

Ache a derivada da função $f(x) = \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ em $x = 0$.

Solução:

$$f^{'}(x) = \frac{(4-x^2)^{'}(3-\sqrt{x^2+5}) - (3-\sqrt{x^2+5})^{'}(4-x^2)}{(3-\sqrt{(x^2+5))^2}}$$

$$= \frac{(-2x)(3-\sqrt{x^2+5}) - (-\frac{1}{2})(\sqrt{x^2+5})^{-1/2}(2x)(4-x^2)}{(3-\sqrt{(x^2+5)^2}}$$

$$f^{'}(0) = \frac{(-2.0)(3-\sqrt{0^2+5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{0^2+5})^{-1/2}(2.0)(4-0^2)}{(3-\sqrt{0^2+5})^2}$$

$$= \frac{0.(3-\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5})^{-1/2}(0).(4)}{(3-\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{0}{(3-\sqrt{5})^2}$$

$$= 0$$

5. (2,0 pontos)

Calcule as derivadas de primeira ($f'(x)$), segunda ($f''(x)$) e terceira ($f'''(x)$) ordens das funções

(a) (1,00 ponto)

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

(b) (1,00 ponto)

$$f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$$

Solução:

(a) (1,00 ponto)

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f^{'}(x) = \frac{(x^2)^{'}(4-x^2)^{1/2} - \left((4-x^2)^{1/2}\right)^{'}(x^2)}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) - (x^2)(\frac{1}{2})(4-x^2)^{-1/2}(-2x)}{4-x^2}$$

$$= \frac{(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}}{4-x^2}$$

$$= \frac{\left(4-x^2)^{1/2}(2x) + x^3(4-x^2)^{-1/2}\right)}{(4-x^2)}\left(\frac{(4-x^2)^{1/2}}{(4-x^2)^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{2x(4-x^2) + x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}}$$

$$f^{''}(x) = \left(\frac{8x - x^3}{(4-x^2)^{3/2}}\right)^{'}$$

$$= \frac{(8x-x^3)^{'}((4-x^2)^{3/2}) - ((4-x^2)^{3/2})^{'}(8x-x^3)}{(4-x^2)^3}$$

$$= \frac{(8-3x^2)((4-x^2)^{3/2}) - \left(\frac{3}{2}(4-x^2)^{1/2})(-2x)(8x-x^3)\right)}{(4-x^2)^3}$$

$$= \frac{(8-3x^2)((4-x^2)^{3/2}) + \left((3x).(4-x^2)^{1/2})(8x-x^3)\right)}{(4-x^2)^3}$$

$$= (4-x^2)^{1/2}\left(\frac{(8-3x^2)((4-x^2) + (3x)(8x-x^3)}{(4-x^2)^3}\right)$$

$$= \frac{(8-3x^2)((4-x^2) + (3x)(8x-x^3)}{(4-x^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{32 - 8x^2 - 12x^2 + 3x^4 + 24x^2 - 3x^4}{(4-x^2)^{5/2}}$$

$$= \frac{32 + 4x^2}{(4-x^2)^{5/2}}$$

$$f'''(x) = \left(\frac{32+4x^2}{(4-x^2)^{5/2}}\right)'$$

$$= \left(\frac{32+4x^2}{(4-x^2)^{5/2}}\right)'$$

$$= \frac{(32+4x^2)'(4-x^2)^{5/2} - ((4-x^2)^{5/2})'(32+4x^2)}{(4-x^2)^5}$$

$$= \frac{(8x)(4-x^2)^{5/2} - \left(\frac{5}{2}(4-x^2)^{3/2}(-2x)\right)(32+4x^2)}{(4-x^2)^5}$$

$$= \frac{(8x)(4-x^2)^{5/2} + \left((5x)(4-x^2)^{3/2}\right)(32+4x^2)}{(4-x^2)^5}$$

$$= (x)(4-x^2)^{3/2}\left(\frac{(8)(4-x^2)+(5)(32+4x^2)}{(4-x^2)^5}\right)$$

$$= x\left(\frac{(8)(4-x^2)+(5)(32+4x^2)}{(4-x^2)^{7/2}}\right)$$

$$= x\left(\frac{32-8x^2+160+20x^2}{(4-x^2)^{7/2}}\right)$$

$$= \frac{32x-8x^3+160x+20x^3}{(4-x^2)^{7/2}}$$

Logo,

$$f'''(x) = \frac{32x-8x^3+160x+20x^3}{(4-x^2)^{7/2}}$$

(b) (1,00 ponto)

$$f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$$

Utilizando as Regras do Produto e da Cadeia, temos:

$$f'(x) = \left((x^2+4)^2\right)'((2x^3-1)^3) + (x^2+4)^2)((2x^3-1)^3)'$$

$$= (2x^3-1)^3(2)(x^2+4)(x^2+4)' + (x^2+4)^2(3)((2x^3-1)^2)(2x^3-1)'$$

$$= (2x^3-1)^3(2)(x^2+4)(2x) + (x^2+4)^2(3)((2x^3-1)^2)(6x^2)$$

$$= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)$$

$$f^{''}(x) = \Big((2x)(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)\Big)^{'}$$

Reescrevendo $2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2)$, temos:

$$104x^{12} + 704x^{10} - 120x^9 + 1152x^8 - 768x^7 + 42x^6 -$$

$$1152x^5 + 136x^4 + 100x^3 + 288x^2 - 16x$$

Dessa forma, $f^{''}(x)$ é dada por:

$$f^{''}(x) = (104x^{12} + 704x^{10} - 120x^9 + 1152x^8 - 768x^7 + 42x^6 -$$

$$1152x^5 + 136x^4 + 100x^3 + 288x^2 - 16x)^{'}$$

$$= 1248x^{11} + 7040x^9 - 1080x^8 + 9216x^7 - 5376x^6 + 252x^5 -$$

$$5760x^4 + 544x^3 + 300x^2 + 576x - 16$$

A derivada terceira de $f(x)$ é dada da seguinte forma:

$$f^{'''}(x) = (1248x^{11} + 7040x^9 - 1080x^8 + 9216x^7 - 5376x^6 +$$

$$252x^5 - 5760x^4 + 544x^3 + 300x^2 + 576x - 16)^{'}$$

$$= 13728x^{10} + 63360x^8 - 8640x^7 + 64512x^6 - 32256x^5 +$$

$$1260x^4 - 23040x^3 + 1632x^2 + 600x + 576$$