Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2^o semestre de 2017 - Gabarito

1. (1.0 ponto)

Analise onde a função é crescente ou decrescente e ache os pontos de máximo e mínimo relativos:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

Solução:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

Intervalos aonde a função é crescente ou decrescente:

Pontos críticos:

$$f'(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad 3x(x+2) = 0$$

logo, são candidatos a máximo e mínimo

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x = -2$$

Estudo do sinal da derivada:

$$f'(x) > 0; \quad x > 0 \quad \text{e} \quad x < -2$$

$$f'(x) < 0; \qquad -2 < x < 0$$

$f(x)$ é uma função decrescente no intervalo $-2 < x < 0$

$f(x)$ é uma função crescente para os seguintes valores de x: $x < -2$ e $x > 0$

Máximos e Mínimos

A partir dos pontos críticos: $x = 0$ e $x = -2$ e da variação do sinal da derivada, podemos obter os pontos de máximo e mínimo relativos da função:

$$x = 0$$

$$x < 0 \rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 0 \rightarrow f'(x) > 0$$

Logo, existe um ponto de mínimo em $x = 0$, a saber, $(0, f(0)) = (0, 1)$

$$x = -2$$

$$x < -2 \rightarrow f'(x) > 0$$

$$x > -2 \rightarrow f'(x) < 0$$

Assim, existe um ponto de máximo em $x = -2$, $(-2, f(-2)) = (-2, 5)$

2. (2.0 pontos)

Calcule as antiderivadas:

(a) $$\int \frac{x^3 - 4}{x^3} dx$$

(b) $$\int x^2 \sqrt{(2x^3 + 1)} dx$$

Solução:

(a)

$$\int \frac{x^3-4}{x^3}dx = \int \frac{x^3}{x^3}dx - 4\int \frac{1}{x^3}dx = \int 1dx - 4\int \frac{1}{x^3}dx$$

$$= x - 4\frac{x^{-2}}{-2} + C = x + \frac{2}{x^2} + C$$

(b)

$$\int x^2\sqrt{(2x^3+1)}dx$$

com

$$u = 2x^3+1 \quad \text{teremos} \quad \frac{du}{dx} = 6x^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{6}\frac{du}{dx} = x^2$$

substituindo na integral

$$\int x^2\sqrt{(2x^3+1)}dx = \int \frac{1}{6}\sqrt{u}\,du = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C\right] = \frac{1}{6}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{6}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{u^3}}{9} + C$$

mas $u = 2x^3+1$, portanto

$$\int x^2\sqrt{(2x^3+1)}dx = \frac{\sqrt{(2x^3+1)^3}}{9} + C$$

3. (2,0 pontos) ———————————————————————

Calcule as integrais definidas:

(a) $$\int_1^5 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$$

(b) $$\int_1^3 \frac{x^3-1}{x^4}dx$$

Solução:

(a)

$$\int_1^5 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$$

porém

$$\int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \int \left(x^3 + x^{-3}\right) dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$
$$= \frac{x^4}{4} + \frac{x^{-2}}{-2} + C = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C$$

portanto

$$\int_1^5 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2}\right]_1^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{1}{2\cdot 5^2} - \frac{1^4}{4} + \frac{1}{2\cdot 1^2}$$
$$= \frac{625}{4} - \frac{1}{50} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{15625 - 2 - 25 + 50}{100} = \frac{15602}{100} = \frac{7801}{50} = \frac{29\times 269}{2\times 5\times 5}$$

(b) $$\int_1^3 \frac{x^3-1}{x^4} dx$$

porém

$$\int \frac{x^3-1}{x^4}\, dx = \int \frac{x^3}{x^4}\, dx - \int \frac{1}{x^4}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx - \int \frac{1}{x^4}\, dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\, dx - \int x^{-4}\, dx = \ln x - \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \ln x + \frac{1}{3x^3} + C$$

portanto

$$\int_1^3 \frac{x^3-1}{x^4} dx = \left[\ln x + \frac{1}{3x^3}\right]_1^3 = \left[\ln 3 + \frac{1}{3\cdot 3^3}\right] - \left[\ln 1 + \frac{1}{3\cdot 1^3}\right]$$
$$= \ln 3 + \frac{1}{3\cdot 3^3} - \ln 1 - \frac{1}{3\cdot 1^3}$$
$$= \ln 3 - \ln 1 + \frac{1}{81} - \frac{1}{3}$$
$$= \ln 3 + \frac{1-27}{81} = \ln 3 - \frac{26}{81}$$

4. (2.0 pontos) ———

Esboce as regiões e calcule as áreas pedidas abaixo:
OBS: utilize a metologia indicada em cada questão.

(a) Ache a área total entre a parábola $y = x^2$, $y = 2x$ e $y = x$.
técnica: área por fatiamento.

(b) Ache a área limitada pelas curvas: $y = x^2$ e $y = 2x$.
técnica : área entre duas curvas.

Solução:

(a) Determinando os pontos de interseção das curvas:
Primeira interseção:

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x^2$$

logo

$$x = x^2$$

$$x(x-1) = 0$$

portanto

$$x = 0 \quad ; \quad x = 1$$

$$x = 0 \to y = 0$$

$$x = 1 \to y = 1$$

Segunda interseção:

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = x^2$$

$$2x = x^2$$

$$x(x-2) = 0$$

portanto

$$x = 0 \quad ; \quad x = 2$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 2 \rightarrow y = 4$$

Terceira interseção:

$$y = 2x \quad \text{e} \quad y = x$$

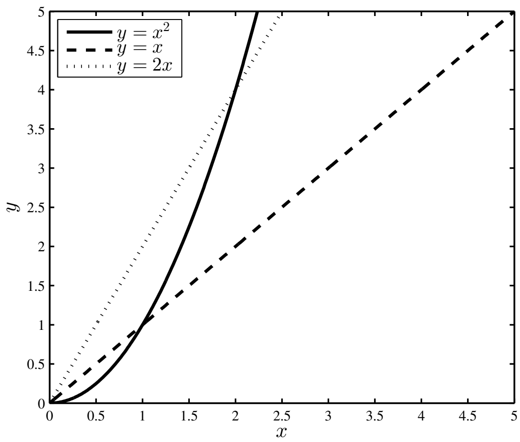
$$x = 2x$$

$$x = 0$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

logo:

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^1 (2x - x)\, dx + \int_1^2 \left(2x - x^2\right) dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\
&= \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} \\
&= \frac{3 + 24 - 16 - 6 + 2}{6} \\
&= \frac{7}{6}
\end{aligned}$$



(b) Determinando os pontos de interseção entre as curvas:

$$y = x \quad \text{e} \quad y = x^2$$

$$x = x^2$$

$$x(1 - x) = 0$$

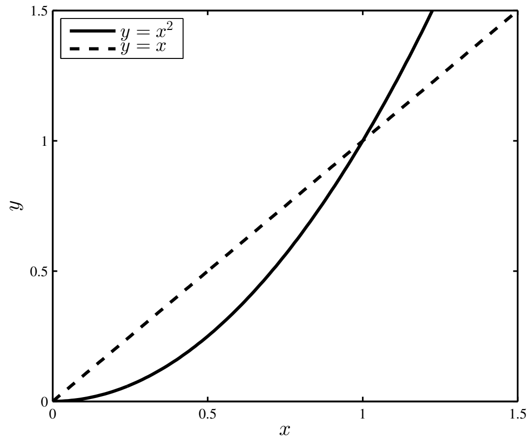
$$x = 0; x = 1$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 1 \rightarrow y = 1$$

$$A = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$



5. (1.0 ponto)

Calcule o volume do sólido gerado quando a região sob a curva $y = \sqrt{x}$ em $[1, 9]$ é girada em torno do eixo x .

Solução:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \int_1^9 \pi x dx = \left[\frac{\pi x^2}{2}\right]_1^9 =$$

$$\frac{81\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{80\pi}{2} = 40\pi$$

6. (1.00 ponto)

Calcule os seguintes limites utilizando a regra de L'Hôpital

(a) $$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h}$$

(b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Solução:

(a) tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(4+h)^{\frac{-1}{2}}}{1} = \frac{1}{4}$$

(b) tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

7. (1,00 ponto)

Construa o gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-2)(x-6)}$$

Solução:

1. Domínio

O domínio de f é $(-\infty, 2) \cup (2, 6) \cup (6, \infty)$ visto que f não está definida em $x = 2$ e $x = 6$.

2. Interseções com os eixos x e y

Claramente $f(x)$ se anula no ponto $x = 0$, logo $(0, 0)$ pertence ao gráfico de f.

3. Assíntotas verticais e horizontais

Existem assíntotas verticais nos pontos $x = 2$ e $x = 6$, já que

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 6^-} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 6^+} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \infty$$

Existe uma assíntota horizontal para $y = 1$ quanto $x \to -\infty$, já que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-8x+12} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2-8x+12)/x^2} =$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{12}{x^2}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{8}{x} + \frac{12}{x^2}\right)} = \frac{1}{(1-0+0)} = 1$$

e para $y = 1$ quanto $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{(x-2)(x-6)} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2-8x+12} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2/x^2}{(x^2-8x+12)/x^2} =$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(\frac{x^2}{x^2} - \frac{8x}{x^2} + \frac{12}{x^2}\right)} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{8}{x} + \frac{12}{x^2}\right)} = \frac{1}{(1-0+0)} = 1$$

4. Máximos e mínimos locais

São pontos aonde a primeira derivada se anula, isto é,

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x(x-2)(x-6) - 2x^2(x-4)}{(x-2)^2(x-6)^2} = \frac{8x(3-x)}{(x-2)^2(x-6)^2} = 0$$

logo, os pontos críticos são $x = 0$ (onde $y = 0$) e $x = 3$ (onde $y = -3$).
Para verificar se são pontos de mínimo ou de máximo vamos verificar o sinal da primeira derivada.
O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no intervalo estudado.

sinal de $f'(x)$

$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\mathbb{R}$
-1		0		1		2		3		4		5		6	
						assínt. vert.								assínt. vert.	

Logo $f(x)$ é decrescente em $(-\infty, 0)$ e $(3, \infty)$ e é crescente em $(0, 3)$.
Um ponto de mínimo local é $(x, y) = (0, 0)$.
Um ponto de máximo local é $(x, y) = (3, -3)$.

5. Pontos de inflexão

São aqueles aonde a segunda derivada se anula.

$$f''(x) = \frac{(x-2)^2(x-6)^2(24-16x) - 8x(3-x)(2)(x-2)(x-6)(2x-8)}{(x-2)^4(x-6)^4}$$

$$f''(x) = \frac{8(2x^3 - 9x^2 + 36)}{(x-2)^3(x-6)^3}$$

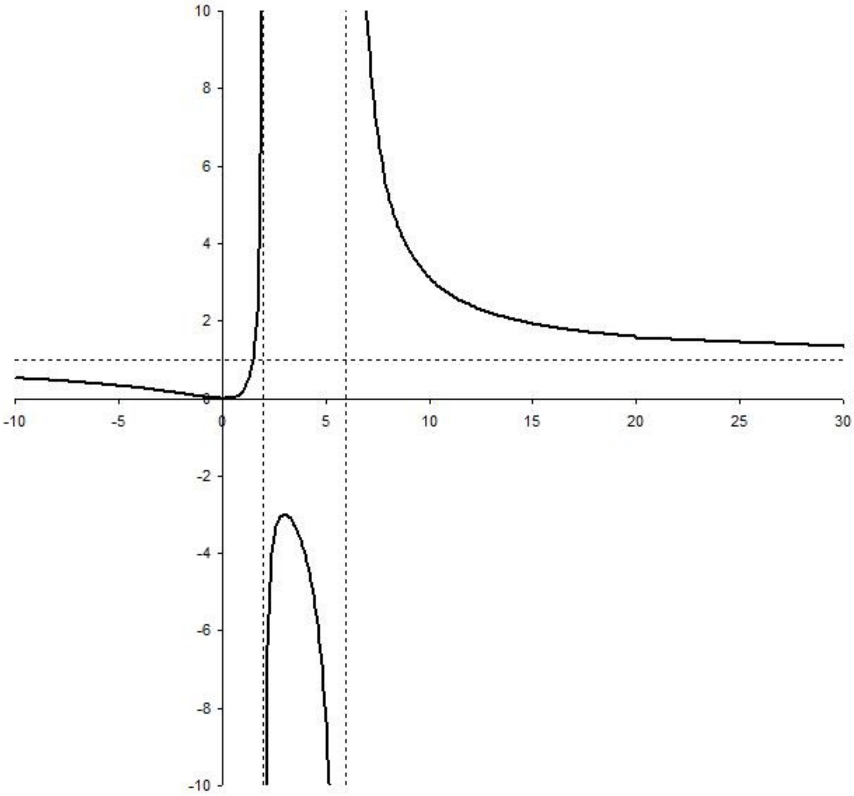
$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{8(2x^3 - 9x^2 + 36)}{(x-2)^3(x-6)^3 = 0} \Longrightarrow 2x^3 - 9x^2 + 36 = 0$$

O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada no intervalo $[-8, 8]$.

sinal de $f''(x)$

$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	∞	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$	$\mathbb{R}$
-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	

Logo, além dos pontos $x = 2$ e $x = 6$ existe uma mudança de concavidade entre $(-2, -1)$.



Logo, pelo sinal da segunda derivada, f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$ e é côncava para cima em $(2, \infty)$. O ponto de inflexão é $(2, 3)$