Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2013 - Gabarito

Questões

1. (2 pontos)

Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

(a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se } 0 < x < 2 \\ x-1 & \text{se } 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2 \\ 4 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Claramente o domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -1 < x < 1\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 \leq y < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x-1 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 < x < 2 \text{ ou } 3 \leq x < 4\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 < y < 3\}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R}\}$$

2. (2 pontos)

Para as funções dadas calcule:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = x^2 - 3x$

(b) $f(x) = \sqrt{5x+1}$

Solução:

(a) $f(x) = x^2 - 3x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - (x^2 - 3x)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \left[\frac{2xh}{h} + \frac{h^2}{h} - \frac{3h}{h} \right] =$$

$$\lim_{h \to 0} [2x - 3 + h] = \lim_{h \to 0} [2x - 3] + \lim_{h \to 0} h = [2x - 3] + 0 = 2x - 3$$

(b) $f(x) = \sqrt{5x+1}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h\left(\sqrt{5(x+h)+1}+\sqrt{5x+1}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{5h}{h\left(\sqrt{5(x+h)+1}+\sqrt{5x+1}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{5}{\sqrt{5x+5h+1}+\sqrt{5x+1}} = \frac{5}{\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+1}} = \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

3. (2 pontos)

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \mid x \mid - x$$

Solução:

Para que a função seja contínua em toda a reta real em todos os pontos o limite deve existir e ser igual ao valor da função nestes pontos.

Sabemos que pela definição da função valor absoluto

$$\mid x \mid = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

logo, a função dada pode ser reescrita da forma

$$\mid x \mid - x = \begin{cases} -x - x & \text{se} \quad x < 0 \\ x - x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \mid x \mid - x = \begin{cases} -2x & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Portanto, temos dois casos a analisar. O primeiro para $x < 0$ e o outro para $x \geq 0$.

Para $\boldsymbol{x < 0}$

$$\lim_{x\to a} -2x = -2a = f(a) \;\; \text{para todo} \;\; -\infty < x < 0$$

Para $\boldsymbol{x \geq 0}$

$$\lim_{x\to a} 0 = 0 = f(a) \;\; \text{para todo} \;\; 0 \leq x < \infty$$

Os limites existem e são iguais aos valores da função em todos os pontos da reta dos reais.

Enfim, a função $f(x) = \mid x \mid - x$ é contínua em toda a reta real.

4. (2 pontos)

Calcule as derivadas de primeira ($f'(x)$) e segunda ($f''(x)$) ordens das funções

(a)

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

(b)

$$f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$$

Solução:

(a)

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = x^{-1} + 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

$$f'(x) = -1 \cdot x^{-2} + 3 \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4}$$

$$f'(x) = -x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}$$

$$f''(x) = \left[-x^{-2} - 6x^{-3} - 6x^{-4}\right]'$$

$$f''(x) = \left[2x^{-3} + 18x^{-4} + 24x^{-5}\right]$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{18}{x^4} + \frac{24}{x^5}$$

(b)

$$f(x) = x\sqrt{3-2x^2}$$

$$f'(x) = [x]' \cdot \left[\sqrt{3-2x^2}\right] + [x] \cdot \left[\sqrt{3-2x^2}\right]'$$

$$f'(x) = \left[\sqrt{3-2x^2}\right] + [x] \cdot \left[\left(3-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]'$$

$$f'(x) = \left[\sqrt{3-2x^2}\right] + [x] \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(3-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-4x)\right]$$

$$f'(x) = \sqrt{3-2x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{3-2x^2}} = \frac{3-2x^2-2x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}$$

$$f''(x) = \left[\frac{3-4x^2}{\sqrt{3-2x^2}}\right]' = \left[\left(3-4x^2\right)\left(3-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'$$

$$f''(x) = \left[\left(3-4x^2\right)\right]'\left[\left(3-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left[\left(3-4x^2\right)\right]\left[\left(3-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'$$

$$f''(x) = (-8x)\left[\left(3-2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right] + \left(3-4x^2\right)\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(3-2x^2\right)^{-\frac{3}{2}}(-4x)\right]$$

$$f''(x) = \frac{-8x}{\sqrt{3-2x^2}} + \frac{2x\,(3-4x^2)}{(3-4x^2)\sqrt{3-2x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{-8x}{\sqrt{3-2x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{3-2x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{6x}{\sqrt{3-2x^2}}$$

5. (2 pontos)

Desenhe o gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, usando a análise de funções.

Solução:

Domínio:

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

Imagem:

$$I = \{y \in \mathbb{R}\}$$

Raízes:

Verificando o sinal da função em alguns pontos vemos que ela corta o eixo x entre 2 e 3, já que há troca de sinal de $f(x)$.

sinal de $f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$\mathbb{R}$
	-1	0	1	2	3	4	

Existe pelo menos uma raiz em $(2, 3)$.

Máximos e Mínimos Locais:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 10x + 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = 1$$

Vejamos o sinal da primeira derivada.

Para $x < \frac{2}{3} \longrightarrow f' > 0 \longrightarrow f$ é crescente

Para $\frac{2}{3} < x < 1 \longrightarrow f' < 0 \longrightarrow f$ é decrescente

Para $x > 1 \longrightarrow f' > 0 \longrightarrow f$ é crescente

Portanto, em $x = \frac{2}{3} \approx 0{,}6666...$ há um ponto de máximo. $f(\frac{2}{3}) = -\frac{161}{27} \approx -5{,}96296..$

E, em $x = 1$ há um ponto de mínimo. $f(1) = -6$

Pontos de inflexão:

$f''(x) = 0$

$f''(x) = 12x - 10$

$f''(x) = 0 \implies 12x - 10 = 0 \implies x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333...$

Há um ponto de inflexão em $x = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333...$, onde $f\left(\frac{5}{6}\right) \approx -5{,}9814...$