Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1^o semestre de 2011 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

Ache os extremos relativos das funções:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = x^3 - 3x + 3$

(d) $f(x) = \cos x$

Solução:

(a) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ para } x < 0$$

e

$$f'(x) > 0 \text{ para } x > 0$$

Logo há um mínimo relativo em $x = 0$.

(b) $$f(x) = x^3$$

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f'(x) > 0 \;\text{ para }\; x < 0$$

e

$$f'(x) > 0 \;\text{ para }\; x > 0$$

Logo nã há extremos relativos.

(c) $$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Vejamos o ponto $x = -1$:

$$f'(x) > 0 \;\text{ para }\; x < -1$$

e

$$f'(x) < 0 \;\text{ para }\; x > -1$$

logo há em $x = -1$ um máximo relativo;
consideremos o ponto $x = 1$:

$$f'(x) < 0 \;\text{ para }\; x < 1$$

e

$$f'(x) > 0 \;\text{ para }\; x > 1$$

logo há em $x = 1$ um mínimo relativo.

(d) $$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x = 0 \Longrightarrow \operatorname{sen} x \;\text{ se anula nos múltiplos de } \pi$$

$$f''(x) = -\cos x = 0 \Longrightarrow \cos x \;\text{ se anula nos múltiplos de } \tfrac{\pi}{2}$$

2. (1,0 ponto) ---

Ache os extremos absolutos da função:

(a) $$f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$$

Solução:

(a) $$f(x) = 6x^{4/3} - 3x^{1/3}$$

$$f'(x) = 6\frac{4}{3}x^{1/3} - 3\frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{8x-1}{x^{2/3}}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{8x-1}{x^{2/3}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{8}$$

O ponto crítico é $x = 1/8$. Vejamos o valor de $f(x)$ na vizinhança deste ponto.

x	0	$1/8$	1
$f(x)$	0	$-9/8$	3

Logo, há um mínimo em $x = 1/8$.

3. (1,0 ponto) ———

Ache os pontos de inflexão das seguintes funções.

(a) $f(x) = x\,e^{-x}$

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad 0 \le x \le 2\pi$

(c) $f(x) = \tan^{-1} x$

Solução:

(a) $f(x) = x\,e^{-x}$

$$f'(x) = (1-x)\,e^{-x} \quad \text{e} \quad f''(x) = (x-2)\,e^{-x}$$

Como e^{-x} é sempre positiva, $f''(x) < 0$ se $x < 2$ e $f''(x) > 0$ se $x > 2$. Logo há uma mudança de concavidade em $x = 2$. Portanto $x = 2$ é um ponto de inflexão.

(b) $f(x) = \operatorname{sen} x \quad 0 \le x \le 2\pi$

$$f'(x) = \cos x \quad \text{e} \quad f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$f''(x) < 0$ para $0 < x < \pi$ e $f''(x) > 0$ para $\pi < x < 2\pi$, há mudança de concavidade em $x = \pi$. Portanto $x = \pi$ é um ponto de inflexão.

(c) $f(x) = \tan^{-1} x$

$$f' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{e} \quad f'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$f''(x) > 0$ para $x < 0$ e $f''(x) < 0$ para $\pi < x > 0$, há mudança de concavidade em $x = 0$. Portanto $x = 0$ é um ponto de inflexão.

4. (1,0 ponto) ———

Construa o gráfico da função

$$y = (x-4)^{2/3}$$

Solução:

Interseções com os eixos:

Eixo x ($y = 0$):

$$(x-4)^{2/3} = 0 \Longrightarrow x = 4$$

Eixo y ($x = 0$):

$$y = (0 - 4)^{2/3} \Longrightarrow y = \sqrt[3]{16}$$

Assíntotas verticais:

Não há, já que a funcção é contínua.

Assíntotas horizontais:

Não há, pois

$$\lim_{x \to -\infty} (x - 4)^{2/3} = +\infty$$

e

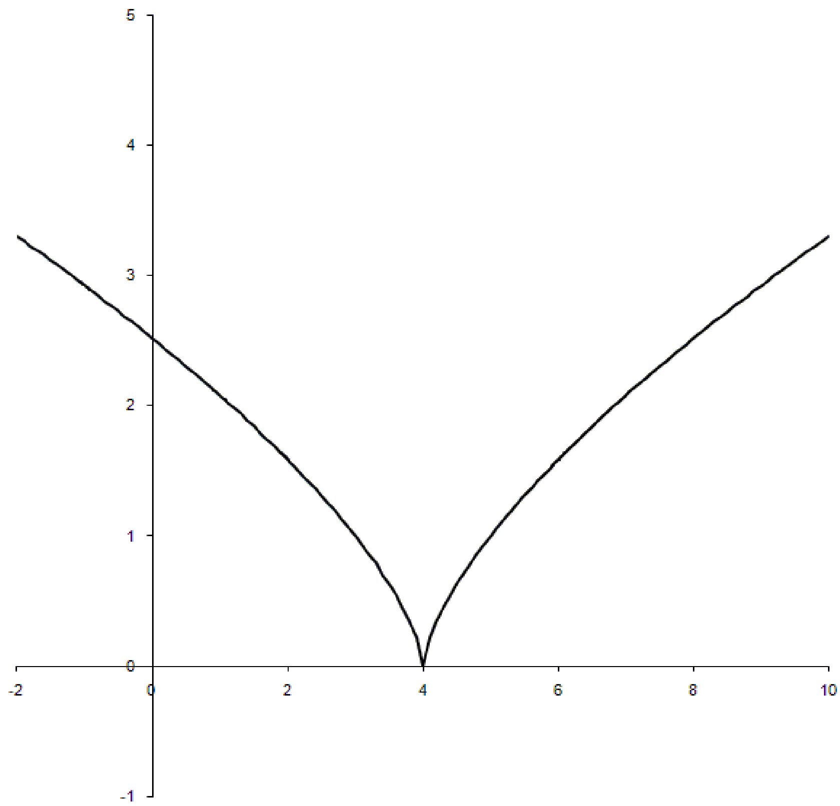
$$\lim_{x \to +\infty} (x - 4)^{2/3} = +\infty$$

Extremos:

$$y' = \frac{2}{3} \frac{1}{(x-4)^{1/3}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9} \frac{1}{(x-4)^{4/3}}$$

$x = 4$ é um ponto crítico posto que a função não é diferenciável neste ponto. Há um mínimo relativo neste ponto já que $f' < 0$ se $x < 4$ e $y' > 0$ se $x > 4$. Além disso o gráfico é côncavo para baixo se $x < 4$ e $x > 4$ j'a que $y'' < 0$ nestas situações.

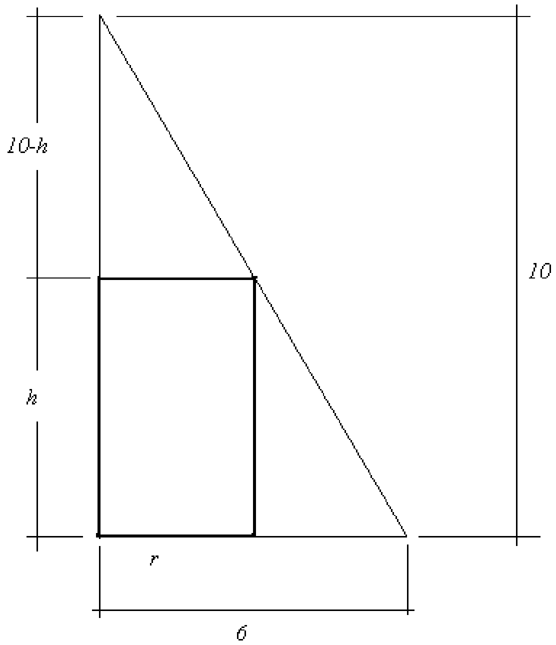


5. (1,5 ponto)

Ache o raio e a altura de um cilindro circular reto com o maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto com 10 cm de altura e 6 cm de raio.

Solução:

Sejam r o raio do cilindro, h sua altura e V seu volume, como mostra um corte do cilindro e do cone na figura a seguir.



O volume de um cilindro é

$$V = \pi r^2 h$$

usando semelhança de trinângulos.

$$\frac{10-h}{r} = \frac{10}{6} \implies h = 10 - \frac{5}{3}r$$

Substituindo na expressão para o volume.

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left(10 - \frac{5}{3}r\right) = 10\pi r^2 - \frac{5}{3}\pi r^3$$

e agora temos o volume em função do raio somente. Temos agora que encontrar o valor de r de forma que o volume seja máximo.

$$V' = 10\pi \cdot 2r - \frac{5}{3}\pi \cdot 3r^2 = 20\pi r - 5\pi r^2 = 5\pi r(4-r)$$

$$V' = 0 \Longrightarrow 5\pi r(4-r) = 0$$

Logo temos os pontos críticos $r = 0$ e $r = 4$. Claro que para $r = 0$ o volume é nulo, e isto não nos interessa.

Os valores $r = 4$ e $h = 10 - \frac{5}{3} \cdot 4 = \frac{10}{3}$ definem o cilindro desejado.

6. (1,0 ponto) ---

Ache as seguintes antiderivadas.

(a) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

(b) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$$

Solução:

(a) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

com $u = x+1$, então $du = dx$ e $x = u-1$. Substituindo na integral

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x+1}\,dx &= \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2-2u+1)u^{1/2}\,du = \\ &= \int (u^{5/2}-2u^{3/2}+u^{1/2})\,du = \frac{2}{7}u^{7/2} - 2\frac{2}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{7}(x+1)^{7/2} - \frac{4}{5}(x+1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned}\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx &= \int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right]dx = \int \left[x + 5 - 4x^{-2}\right]dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x - 4\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C\end{aligned}$$

7. (1,0 ponto) ---

Use o *Teorema Fundamental do Cálculo* para avaliar as seguintes integrais:

(a) $$\int_{-3}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) dx$$

(b) $$\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx$$

(c) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx$$

Solução:

(a) $$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\,dx=\int_{-3}^{-1}\left(x^{-2}-x^{-3}\right)\,dx=\left[\frac{1}{-1}x^{-1}-\frac{1}{-2}x^{-2}\right]_{-3}^{-1}$$

$$=\left[-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1}=\left[-\frac{1}{(-1)}+\frac{1}{2(-1)^2}\right]-\left[-\frac{1}{(-3)}+\frac{1}{2(-3)^2}\right]=$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{18}\right]=\frac{18+9-6-1}{18}=\frac{20}{18}=\frac{10}{9}$$

(b) $$\int_4^8\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx=\int_4^8(x^2-15)^{-1/2}x\,dx$$

Com $u=x^2-15 \implies du=2x\,dx$ ou $x\,dx=\dfrac{du}{2}$

Logo $x=4\implies u=1$ e $x=8\implies u=49$

Substituindo na integral

$$\int_4^8\frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\,dx=\int_4^8(x^2-15)^{-1/2}x\,dx=\int_1^{49}(u)^{-1/2}\frac{1}{2}\,du=\frac{1}{2}\left[2u^{1/2}\right]_1^{49}$$

$$=\left[\sqrt{u}\right]_1^{49}=\left[\sqrt{49}-\sqrt{1}\right]=7-1=6$$

(c) $$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx=[\text{sen}]_{-\pi/2}^{\pi/2}=\left[\text{sen}\,x\left(\frac{\pi}{2}\right)-\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=$$

$$=1-(-1)=2$$

8. (1,0 ponto)

Para as funções a seguir, determine suas antiderivadas:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{7x}$

(b) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2+5}$

Solução:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{7x}$

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{7}\int\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{7}\ln\mid x\mid+C$$

(b) $f(x)=\dfrac{x-4}{x^2+5}$

$$\int\frac{x-4}{x^2+5}\,dx=\int\frac{x}{x^2+5}\,dx-\int\frac{4}{x^2+5}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+5}\,dx-\int\frac{4}{x^2+5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)-\frac{4}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+C$$

9. (1,5 ponto)

Ache o volume do sólido obtido por rotação da região entre os gráficos das equações $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$ e $g(x) = x$ no intervalo $[0, 2]$ em torno do eixo x.

Solução:

$$V = \int_a^b \pi \left\{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right\} dx = \int_0^2 \pi \left\{ \left[\frac{1}{2} + x^2\right]^2 - [x]^2 \right\} dx$$

$$= \int_0^2 \pi \left\{ \left[\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2}x^2 + x^4\right] - [x]^2 \right\} dx = \int_0^2 \pi \left\{ \frac{1}{4} + x^4 \right\} dx$$

$$= \pi \left[\frac{x}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{69\pi}{10}$$