Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2015 - Gabarito

Questões

1. (1,5 pontos)

Determine as inversas das seguintes funções

(a)

$$f(x) = x$$

(b)

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Solução:

(a)

$$f(x) = x \quad \Longrightarrow y = x$$

invertendo as variáveis x e y

$$x = y \quad \Longrightarrow f^{-1}(x) = x$$

(b)

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Longrightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

invertendo as variáveis x e y

$$x = \sqrt[3]{y}$$

$$x^3 = [\sqrt[3]{y}]^3$$

$$x^3 = y$$

logo

$$f^{-1}(x) = x^3$$

(c)

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{x}$$

invertendo as variáveis x e y

$$x = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{1}{x}$$

logo

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

2. (1,5 pontos) ---

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2}$$

(b) $$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12}$$

(c) $$\lim_{h \to 2} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{para} \quad f(x) = x^3 + x^2 - 3$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

(b) $$\lim_{x \to 4} \frac{x-4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{(4+3)} = \frac{1}{12}$$

(c) $$\lim_{h \to 2} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{para} \quad f(x) = x^3 + x^2 - 3$$

$$= \lim_{h \to 2} \frac{[(x+h)^3 + (x+h)^2 - 3] - [x^3 + x^2 - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 2} \frac{[(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) + (x^2 + 2xh + h^2) - 3] - [x^3 + x^2 - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 2} \frac{[x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+x^2+2xh+h^2-3]-[x^3+x^2-3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 2} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3+x^2+2xh+h^2-3-x^3-x^2+3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 2} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3+2xh+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 2} \left[3x^2+3xh+h^2+2x+h\right]$$

$$= \left[3x^2+6x+4+2x+2\right] = 3x^2+8x+6$$

3. (1,5 pontos) ———

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to\infty^-} f(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to\infty^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x) = \frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}$$

(b) $$f(x) = x^5 - 7x^4 - 2x + 5$$

(c) $$f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to\infty^-} \left[\frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}\right] = \lim_{x\to\infty^-} \left[\frac{\frac{6x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}\right] = \lim_{x\to\infty^-} \left[\frac{\frac{6}{1}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{5}{1}-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \left[\frac{\lim\limits_{x\to\infty^-} 6 + \lim\limits_{x\to\infty^-} \frac{2}{x} + \lim\limits_{x\to\infty^-} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty^-} 5 - \lim_{x\to\infty^-} \frac{3}{x} + \lim_{x\to\infty^-} \frac{4}{x^2}}\right]$$

$$= \left[\frac{6+0+0}{5-0+0}\right] = \frac{6}{5}$$

e de forma análoga

$$\lim_{x\to\infty^+} \left[\frac{6x^2+2x+1}{5x^2-3x+4}\right] = \frac{6}{5}$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty^-}\left[x^5-7x^4-2x+5\right] = \lim_{x\to\infty^-} x^5\left[1-\frac{7x^4}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{5}{x^5}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty^-} x^5\left[1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty^-} x^5\cdot\lim_{x\to\infty^-}\left[1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty^-} x^5\cdot[1-0-0+0]$$
$$= \lim_{x\to\infty^-} x^5 = -\infty$$

e semelhantemente
$$\lim_{x\to\infty^+}\left[x^5-7x^4-2x+5\right] = +\infty$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty^-}\left[\frac{2x^3}{x^2+1}\right] = \lim_{x\to\infty^-}\left[\frac{2x^3/x^2}{x^2/x^2+1/x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to\infty^-}\left[\frac{2x}{1+1/x^2}\right]$$
$$= \frac{\lim_{x\to\infty^-} 2x}{\lim_{x\to\infty^-} 1+\lim_{x\to\infty^-} 1/x^2}$$
$$= \frac{\lim_{x\to\infty^-} 2x}{1+0}$$
$$= \lim_{x\to\infty^-} 2x = -\infty$$

e
$$\lim_{x\to\infty^+}\left[\frac{2x^3}{x^2+1}\right] = +\infty$$

4. (2,0 pontos)

Mostre que a existência do limite
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
garante que f é contínua em $x=a$.

Solução:
$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] \cdot \lim_{h \to 0} [h]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] \cdot 0 = 0$$

Mas,

$$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = \lim_{h \to 0} f(a+h) - \lim_{h \to 0} f(a) =$$

$$= \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a)$$

Comparando os limites

$$= \lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Porém, observe que

$$\lim_{h \to 0} f(a+h) = \lim_{x \to a} f(x)$$

logo

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Resumindo, o limite existe e é igual ao valor da função no ponto. Portanto $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$.

5. (1,5 pontos) ———————————————————————————

Ache as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = \dfrac{2x-1}{2x+1}$

Solução:

(a) $f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$

$$f'(x) = \frac{1}{5} x^{\left(\frac{1}{5} - 1\right)} = \frac{1}{5} x^{\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$$

$$f'(x) = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

(c) $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{\left(-\frac{1}{2}-1\right)} = -\frac{1}{2}x^{\left(-\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

(d) $$f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$f'(x) = \left[\frac{2x-1}{2x+1}\right]' = \left[\frac{[2x-1]'[2x+1]-[2x-1][2x+1]'}{[2x+1]^2}\right]$$

$$= \left[\frac{2[2x+1]-[2x-1]2}{[2x+1]^2}\right] = \left[\frac{4x+2-4x+2}{[2x+1]^2}\right] = \frac{4}{[2x+1]^2}$$

6. (2,0 pontos)

Sabendo que a primeira derivada de uma função w é definida pelo limite,

$$w'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{w(x+h)-w(x)}{h}$$

encontre a derivada do quociente de duas funções f e g, isto é

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

Solução:
Com

$$w(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \frac{[f(x+h)\cdot g(x) - f(x)g(x)] - [f(x)\cdot g(x+h) - f(x)g(x)]}{h\cdot g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] g(x) - f(x)\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

passando o limite quando $h \to 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{w(x+h)-w(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] g(x) - f(x)\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\cdot \lim\limits_{h\to 0} g(x) - \lim\limits_{h\to 0} f(x)\cdot \lim\limits_{h\to 0}\left[\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]}{\lim\limits_{h\to 0}\left[g(x+h)\cdot g(x)\right]}$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

ou

$$w'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

que é a relação que queremos demonstrar.