2018.02

(2 pontos) ————————————————————————————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Aparentemente há uma descontinuidade no ponto $x = 2$, já que $x = 2$ não pertenceria ao domínio da função.

Entretanto, esta descontinuidade pode ser removida se reescrevermos a função da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$$

o que elimina a descontinuidade em $x = 2$.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 2$ parece haver uma descontinuidade. Vamos mostrar que esta descontinuidade existe.

O ponto $x = 2$ pertence ao domínio da função. Os limites laterais neste ponto são:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 4$$

entretanto o valor da função em $x = 2$ é $f(2) = 0$.

Logo

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 0$$

Portanto $f(x)$ é descontinua em $x = 2$.

Para a função a seguir, mostre que ela é contínua no intervalo indicado.

$$f(x) = 1 \quad \text{em} \quad (0, 1]$$

Solução:

Para ser contínua no intervalo a função deve ser contínua em cada ponto do intervalo.

Para ser contínua em um ponto a este ponto deve pertencer ao domínio da função, o limite da função neste ponto deve existir e o valor do limite deve coincidir com o valor da função no ponto, isto é

$$\begin{cases} 1. \quad a \in D(f) \\ 2. \quad \lim_{x\to a} f(x) \ \text{ existe (é igual a um número)} \\ 3. \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Cada ponto do intervalo pertence ao domínio da função o que satifaz a condição 1. em todos os pontos do intervalo. Ademais o limite da função para cada ponto no intervalo existe, já que

$$\lim_{x\to a} 1 = 1 \qquad \forall x \in (0, 1]$$

Logo são satisfeitas as condições 2. e 3..

Consequentemente, $f(x) = 1$ é contínua no intervalo $(0, 1]$.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2}$$

Solução:

$f(x)$ não é definida se o denominador $x - 2$ se anular ou se o radicando $x^2 - 7$ for negativo, isto é, se $x = 2$ ou se $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$. Qualquer outro número real está em um dos intervalos $(-\infty, -\sqrt{7}]$ ou $[\sqrt{7}, \infty)$. Temos então que provar a continuidade de $f(x)$ em todo o domínio. Ou seja, no interior dos intervalos (*usando limites*) e nos extremos (*usando limites laterais*).

Intervalos $(-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, \infty)$:

nos pontos interiores

$$\lim_{x\to c} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} = \frac{\sqrt{c^2 - 7}}{c - 2} = f(c) \qquad \forall c \in (-\infty, -\sqrt{7}) \cup (\sqrt{7}, \infty)$$

nos extremos dos intervalos

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 7)(x - 2)}}{\sqrt{(x - 2)^3}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 7x + 14}}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}} = \sqrt{\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 14}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \to -\sqrt{7}} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to -\sqrt{7}} \sqrt{x^2 - 7}}{\lim\limits_{x \to -\sqrt{7}} x - 2} = \frac{\sqrt{(-\sqrt{7})^2 - 7}}{-\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7 - 7}}{-\sqrt{7} - 2} = 0 = f(-\sqrt{7})$$

$$\lim_{x \to \sqrt{7}} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} = \frac{\lim\limits_{x \to \sqrt{7}} \sqrt{x^2 - 7}}{\lim\limits_{x \to \sqrt{7}} x - 2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{7})^2 - 7}}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7 - 7}}{\sqrt{7} - 2} = 0 = f(\sqrt{7})$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x - 2} \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 7)(x - 2)}}{\sqrt{(x - 2)^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 - 7x + 14}}{\sqrt{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}} = \sqrt{\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 14}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}}$$

$$= \sqrt{1} = 1$$

enfim, $f(x)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, a saber $(-\infty, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, \infty)$.

Estude a continuidade na reta real da função $f(x)$ onde:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

Solução:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

No ponto $x = 3$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 81$$

já que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^4 = 81$$

e

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^4 = 81$$

mas

$$f(3) = 0$$

sendo então o valor do limite diferente do valor da função no ponto. Daí f é descontínua no ponto $x = 3$. Nos demais pontos da reta real a função é contínua.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Solução:

Para que a função seja contínua em toda a reta real em todos os pontos o limite deve existir e ser igual ao valor da função nestes pontos.

Sabemos que a função não está definida para $x = 2$. Vamos verificar sua vizinhaça, seus limites laterais.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

logo,

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2} = \nexists$$

consequentemente a função não é contínua em $x = 2$.

Verifique se a função

$$f(x) = \frac{|\,x\,|}{x}$$

é contínua em $x = 0$, justifique sua resposta.

Solução:

A função não está definida em $x = 0$. Além disso se verificarmos os limites laterais no ponto $x = 0$, teremos

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\,x\,|}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x} = +1$$

portanto o limite não existe em $x = 0$. O que mostra claramente que a função não é contínua em $x = 0$.

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem), justifique sua resposta.

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

Tem descontinuidades em $x = -3$ e $x = 2$ já que claramente estes pontos não pertencem ao domínio da função.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Dentro das três regiões a função é polinomial e portanto contínua. Resta somente verificar os pontos limítrofes das regiões, isto é, $x = 0$ e $x = 1$.

Em $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$$

daí

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 0$.

Em $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2 - x = 1$$

daí

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = 1$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

Portanto $f(x)$ não tem descontinuidades.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \mid x \mid - x$$

Solução:

Para que a função seja contínua em toda a reta real em todos os pontos o limite dev existir e ser igual ao valor da função nestes pontos.

Sabemos que pela definição da função valor absoluto

$$\mid x \mid = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

logo, a função dada pode ser reescrita da forma

$$\mid x \mid - x = \begin{cases} -x - x & \text{se} \quad x < 0 \\ x - x & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \mid x \mid - x = \begin{cases} -2x & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Portanto, temos dois casos a analisar. O primeiro para $x < 0$ e o outro para $x \geq 0$.

Para $x < 0$

$$\lim_{x \to a} -2x = -2a = f(a) \text{ para todo } -\infty < x < 0$$

Para $x \geq 0$

$$\lim_{x \to a} 0 = 0 = f(a) \text{ para todo } 0 \leq x < \infty$$

Os limites existem e são iguais aos valores da função em todos os pontos da reta dos reais.

Enfim, a função $f(x) = \mid x \mid - x$ é contínua em toda a reta real.

Mostre que a função $f(x) = \sqrt{x^2}$ é contínua em toda a reta dos reais.

Solução:

Devemos mostrar que em todos os pontos da reta real, o limite existe e é igual ao valor da função no ponto.

$$\lim_{x \to a} f(x) \text{ Existe e } \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt{x^2} = \sqrt{a^2} = a = f(a)$$

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4}$$

Solução:

$f(x)$ não é definida se o denomindador $x - 4$ se anular ou se o radicando $x^2 - 9$ for negativo, isto , se $x = 4$ ou se $-3 < x < 3$. Qualquer outro número real está em um dos intervalos $(-\infty, -3]$, $[3, 4)$ ou $(4, \infty)$. Temos então que provar a continuidade de $f(x)$ em todo o domínio. Ou seja, no interior dos intervalos (*usando limites*) e nos extremos (*usando limites laterais*).

Intervalo $(-\infty, -3]$:

nos pontos interiores

$$\lim_{x \to c} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4} = \frac{\sqrt{c^2 - 9}}{c - 4} = f(c) \qquad \forall c \in (-\infty, -3] \cup [3, 4) \cup (4, \infty)$$

nos extremos dos intervalos

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4} \frac{\sqrt{x - 4}}{\sqrt{x - 4}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 9)(x - 4)}}{\sqrt{(x - 4)^3}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(x^3 - 4x^2 - 9x + 36)}}{\sqrt{(x - 4)(x^2 - 8x + 16)}} \\
&= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(x^3 - 4x^2 - 9x + 36)}}{\sqrt{(x^3 - 12x^2 + 48x - 64)}} \\
&= \sqrt{\lim_{x \to -\infty} \frac{(x^3 - 4x^2 - 9x + 36)}{(x^3 - 12x^2 + 48x - 64)}}
\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{(x^3-4x^2-9x+36)}{x^3}}{\frac{(x^3-12x^2+48x-64)}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{4x^2}{x^3}-\frac{9x}{x^3}+\frac{36}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{12x^2}{x^3}+\frac{48x}{x^3}-\frac{64}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{36}{x^3}}{1-\frac{12}{x}+\frac{48}{x^2}-\frac{64}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{4}{x}-\frac{9}{x^2}+\frac{36}{x^3}\right]}{\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{12}{x}+\frac{48}{x^2}-\frac{64}{x^3}\right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{36}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{12}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{48}{x^2}-\lim_{x\to-\infty}\frac{64}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\lim_{x\to-\infty}1-4\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}-9\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}+36\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty}1-12\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}+48\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}-64\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-4\cdot0-9\cdot0+36\cdot0}{1-12\cdot0+48\cdot0-64\cdot0}} = \sqrt{\frac{1-0-0+0}{1-0+0-0}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{(-3)^2-9}}{(-3)-4} = \frac{\sqrt{9-9}}{-7} = 0$$

Intervalo $[3,4)$:

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4} = \frac{\sqrt{(3)^2-9}}{(3)-4} = \frac{\sqrt{9-9}}{-7} = 0$$

$$\lim_{x\to4^-}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x-4}$$

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$$

Solução:

"Investigamos"se a função $f(x)$ dada possui alguma restrição em seu domínio, ou seja, no conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$). Podemos então observar que a única restrição é devida ao denominador da função que deve ser diferente de zero, ou seja,

$$x^2 - 9 \neq 0$$

$$x^2 \neq 9$$

$$x \neq \pm 3$$

Logo,

O domínio da função $f(x)$ dada é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 3\}$, ou ainda, $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 3\}$. Podemos portanto concluir que, a função é contínua para todo x real desde que $x \neq \pm 3$.

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$$

Solução:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$$

A função $f(x)$ tem uma discontinuidade não-removível em $x = 1$. Pela definição de continuidade, a seguinte equação deve ser verificada:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

Para que possamos concluir que $f(x)$ é uma função contínua (particularmente em $x = 1$).

Vejamos:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3}{0}$$

$$= +\infty$$

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

Solução:

Utilizando a definição de continuidade, a função f(x) é contínua se verificar todas as três condições abaixo:

$$(i) f(x_0) \text{ está definida } ; \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

(ii) existe o limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x); \forall x_0 \in \mathbb{R}$

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0); \forall x_0 \in \mathbb{R}$

Podemos verificar que:

o primeiro ítem não é verdadeiro para $x = 2$, ou seja, $f(x)$ não está definida nesse valor de x. Contudo, o segundo ítem é verdadeiro, ou seja,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} x + 2 = 4$$

Concluimos que, mediante a não verificação de todos os itens (i), (ii), (iii) simultaneamente, a função $f(x)$ não é contínua, uma vez que, não é contínua em $x = 2$.

Verifique se a função abaixo é contínua. Justifique:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 16}$$

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{4x^2 - 16}$$

a função f possui descontinuidade infinita em $x = +2$ e em $x = -2$ pois $f(+2)$ e $f(-2)$ não estão definidas:

$$x \to 2^- \to f(x) \to -\infty$$

$$x \to 2^+ \to f(x) \to +\infty$$

$$x \to -2^- \to f(x) \to +\infty$$

$$x \to -2^+ \to f(x) \to -\infty$$

A função f é contínua para valores de x tais que $x \neq +2$ e $x \neq -2$.

Verifique se a função f abaixo é contínua em $x = 2$: (utilize a definição de continuidade)

$$f(x) = \begin{cases} |\ x^2 - 1\ | & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4x - 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} f(2) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \leftarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \leftarrow 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \leftarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \leftarrow 2^+} (4x - 5) = 8 - 5 = 3 \end{cases}$$

logo, a função f é contínua em $x = 2$.

<u>7ª Questão</u> (1,0 ponto) – Verifique se a função $f(y) = \begin{cases} 2y+1, & y < 3 \\ 10 - y, & y \geq 3 \end{cases}$

O domínio natural de f , $D(f)$ é $\mathbb{R}$ e, portanto, $3 \in D(f)$. Além disso, $f(3) = 10 - 3 = 7$

Para calcularmos o limite, determinamos o limite a esquerda e o limite a direita de $f(y)$ quando y tende a 3.

$\lim\limits_{y \to 3^-} 2y + 1 = 2(3) + 1 = 7$ e $\lim\limits_{y \to 3^+} (10 - y) = 10 - 3 = 7$

logo,

$$\lim_{y \to 3^-} f(y) = 7$$

portanto, f é contínua em 3.