Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 1^o semestre de 2017 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

Para as seguintes funções verifique se elas tem inversas. Para as funções que tem inversa ache sua expressão (f^{-1}) e calcule sua derivada.

(a) $f(x) = x^2 + 2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

Solução:

(a) $f(x) = x^2 + 2$

$$y = x^2 + 2 \Longrightarrow y - 2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{y-2} = x$$

A função inversa seria $f^{-1}(y) = \sqrt{y-2}$. Entretanto o domínio da inversa é $\mathbb{R}$ tal que $y > 2$ e não coincide com a imagem de f. Logo f não tem inversa.

(b) $f(x) = x^3$

$$y = x^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

$$x = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(y^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

(c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \Longrightarrow y(x+2) = 2x - 1 \Longrightarrow yx + 2y = 2x - 1$$

$$\Longrightarrow yx - 2x = -1 - 2y \Longrightarrow (y-2)x = -1 - 2y \Longrightarrow x = -\frac{2y+1}{y-2}$$

$$x = -\frac{2y+1}{y-2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(-\frac{(2y+1)}{(y-2)}\right)' = -\frac{(2y+1)'(y-2) - (2y+1)(y-2)'}{(y-2)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2\cdot(y-2) - (2y+1)\cdot 1}{(y-2)^2} = -\frac{2y - 4 - 2y - 1}{(y-2)^2} = \frac{5}{(y-2)^2}$$

2. (2,5 pontos)

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^4 - 6x + 2$, utilizando as ferramentas do cálculo.

Solução:

$$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Os candidatos a máximos e mínimos locais são:

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$$

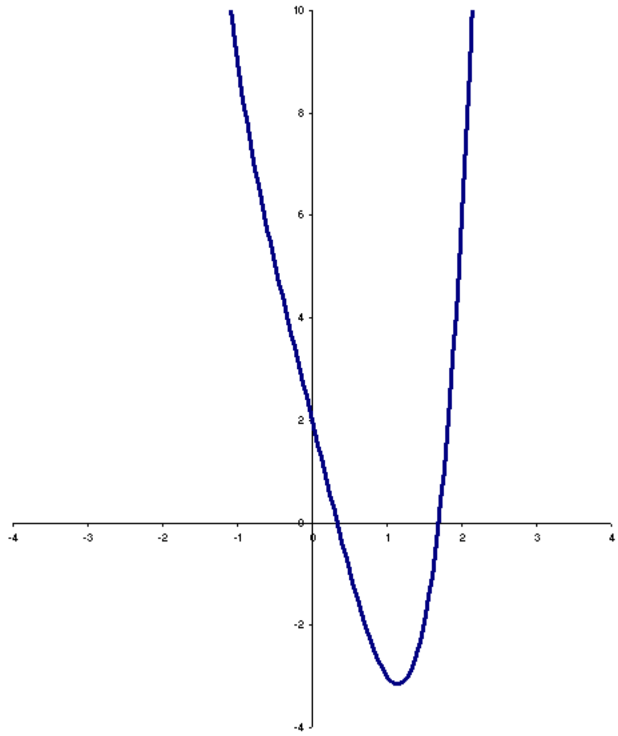
Vamos estudar o sinal da primeira derivada para verificar as regiões aonde $f(x)$ cresce e decresce.

Intervalo	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, \sqrt[3]{\frac{6}{4}})$	$-$	decrescente
$(\sqrt[3]{\frac{6}{4}}, \infty)$	$+$	crescente

Da segunda derivada surgem os candidatos a pontos de inflexão.

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Entretanto para $x > 0$ e para $x < 0$ $f''(x) > 0$, logo a função é concava para cima para $x > 0$ e para $x < 0$, e não existe ponto de inflexão em $x = 0$.



3. (2,5 pontos)

   Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x = -1$ e $x = 1$.

   Solução

$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi (x^2+1)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^2 + x \right]_{-1}^{1} \\
&= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right] \\
&= \pi \frac{56}{15}
\end{aligned}
$$

4. (2,5 pontos)

   Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$ e $x = 0$.

   Solução:

   A área em questão se assemelha a uma fatia de torta.

Precisamos determinar as interseções entre o arco de círculo ($y = \sqrt{1-x^2}$) e as retas $y = x$ e $x = 0$

$$\sqrt{1-x^2} = x \implies 1 - x^2 = x^2 \implies 2x^2 = 1 \implies x^2 = \frac{1}{2}$$

Portanto a abcissa x da interseção é

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Integrando

$$\text{Área } = \int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\sqrt{1-x^2} - x\right]\, dx$$

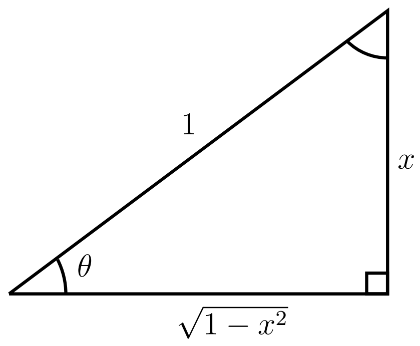
Vejamos a integral

$$\int \left[\sqrt{1-x^2} - x\right]\, dx = \int \sqrt{1-x^2}\, dx - \int x\, dx$$

para a primeira das integrais usaremos uma mudança de variável

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx$$

seja o seguinte triângulo retângulo



logo,

$$\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = x \quad \longrightarrow \quad dx = \cos\theta d\theta$$

substituindo na integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos\theta \cos\theta \, d\theta = \int \cos^2\theta \, d\theta$$

mas da relação trigonométrica de soma de ângulos

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}\,(\alpha)\mathrm{sen}\,(\beta)$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2\,(\theta)$$

$$\cos^2\theta = \mathrm{sen}^2\,\theta + \cos 2\theta$$

com

$$\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1 \quad \longrightarrow \quad \mathrm{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\cos^2\theta = \mathrm{sen}^2\,\theta + \cos 2\theta = 1 - \cos^2\theta + \cos 2\theta$$

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$$

ou

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

logo

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int [1+\cos 2\theta]\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right] + C$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{2\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{4} + C$$

$$= \frac{\theta}{2} + \frac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta}{2} + C$$

$$= \frac{\mathrm{sen}^{-1}\,x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

a segunda integral vale

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Finalmente, substituindo na integral da área, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/\sqrt{2}} \left[\sqrt{1-x^2} - x\right]\, dx &= \left[\frac{1}{2}\mathrm{sen}^{-1}\, x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Observe que este valor corresponde a um oitavo da área de um círculo de raio igual a 1.