Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
Gabarito da AP2 - 2^o semestre de 2009

Questões

1. (1.5 ponto)

   Determine os intervalos para os quais a função $f(x)$ é crescente ou decrescente:

   $$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

   Soluçao:

   $$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

   $$f'(x) = 2x - 4$$

   $$f'(x) > 0 \rightarrow 2x - 4 > 0 \rightarrow x > 2$$

   $$f'(x) < 0 \rightarrow 2x - 4 < 0 \rightarrow x < 2$$

   Portanto,
   $f(x)$ é crescente se $x > 2$;
   $f(x)$ é decrescente se $x < 2$.

2. (1.5 ponto)

Localize os extremos relativos da função e determine se são pontos de máximo ou mínimo:

$$g(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$$

Solução:

$$g(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$$

$$g'(x) = 3\ \left(\frac{5}{3}x^{2/3}\right) - 15\ \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)$$

$$g'(x) = 5\ x^{2/3} - 10\ x^{-1/3}$$

$$g'(x) = 5\ x^{-1/3}(x-2)$$

$$g'(x) = 5\ \left(\frac{x-2}{x^{1/3}}\right)$$

$$g'(x) = 0 \longleftrightarrow 5\ \left(\frac{x-2}{x^{1/3}}\right) = 0$$

essa fração é nula quando seu numerador é nulo, ou seja, quando $x - 2 = 0$, logo $x = 2$.

Além disso, não existe $g'(x)$ quando $x = 0$ pois, temos uma divisão por zero em $5\left(\frac{x-2}{x^{1/3}}\right)$.

Por meio do estudo dos sinais, temos que:

$g'(x) > 0$ quando $5x^{2/3} - 10x^{-1/3} > 0$, ou seja, quando $x > 2$

$g'(x) < 0$ quando $5x^{2/3} - 10x^{-1/3} < 0$, ou seja, quando $x < 2$

Pela definição de pontos de máximo e de mínimos relativos podemos concluir que, em $x = 2$ temos um ponto de mínimo relativo.

3. (1.0 ponto)

Determine os pontos de inflexão da função $g(x)$, caso existam e indique os intervalos onde a concavidade do gráfico da função é para baixo e para cima.

$$g(x) = x^3$$

Solução:

$$g(x) = x^3$$

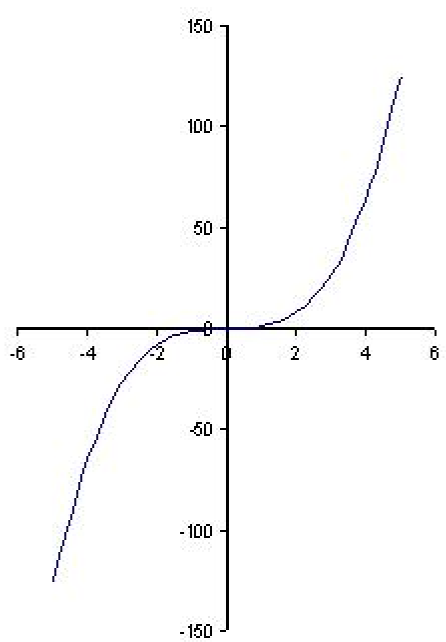
$$g'(x) = 3x^2$$

$$g''(x) = 6x$$

Observe que $g''(x)$ é contínua em toda a parte. Além disso é nula, caso $x = 0$. Por meio do estudo de sinais, temos que o sinal de $g''(x)$ muda em $x = 0$. Logo, $(0, 0)$ é um ponto de inflexão da função $g(x)$.

$g''(x) < 0$ quando $x < 0$ (concavidade para baixo);

$g''(x) > 0$ quando $x > 0$ (concavidade para cima).



4. (1.5 ponto) ——————————————————————————————-
Calcule as antiderivadas:

(a) (0.75 ponto)

$$\int \left(6x^2 - 8x + 3\right) dx =$$

(b) (0.75 ponto)

$$\int \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x}\right) dx =$$

Solução: ——————————————————————————————-

(a) (0.75 ponto)

$$\int \left(6x^2 - 8x + 3\right) dx =$$

$$= \int 6x^2 dx - \int 8x dx + \int 3 dx$$

$$= 6 \int x^2 dx - 8 \int x dx + 3 \int dx$$

$$= 6\ \frac{x^3}{3} - 8\ \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$= 2x^3 - 4x^2 + 3x + C$$

(b) (0.75 ponto)

$$\int \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{x}\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x}}{x}\ dx + \int \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \int x^{-1/2}\ dx + \int \frac{1}{x}\ dx$$

$$= \frac{x^{1/2}}{1/2} + \ln|x| + C$$

$$= 2\ x^{1/2} + \ln|x| + C$$

$$= 2\ \sqrt{x} + \ln|x| + C$$

5. (1.0 ponto)

Calcule a integral definida:

$$\int_0^3 \left(9 - x^2\right) dx =$$

Solução:

$$\int_0^3 \left(9 - x^2\right) dx =$$

$$= \int_0^3 9\ dx - \int_0^3 x^2\ dx$$

$$= 9\,[x]_0^3 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= (27 - 0) - \frac{27}{3}$$

$$= 27 - 9$$

$$= 18$$

6. (1.75 ponto)

Calcule a área da região limitada pelas curvas: $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = x^2$.

Solução:

Primeiramente, determinamos as interseções entre as curvas. Para tanto, fazemos $f(x) = g(x)$, ou seja, $-x^2 + 4x = x^2$,

$$x^2 + x^2 - 4x = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x-2)=0$$

Dessa forma, podemos facilmente obter os valores de x que verificam essa equação:

$x=0$ e $x=2$

Logo, podemos determinar também os pontos definidos nesses valores de x, $(0, g(0))$ e $(2, g(2))$,

$$(0, g(0)) = (0,0)$$

$$(0, g(2)) = (2,4)$$

e portanto a região que se quer calcular a área (veja o gráfico).

$$A = \int_0^2 [f(x) - g(x)]\, dx =$$

$$= \int_0^2 \left[-x^2 + 4x - x^2\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[-2x^2 + 4x\right] dx$$

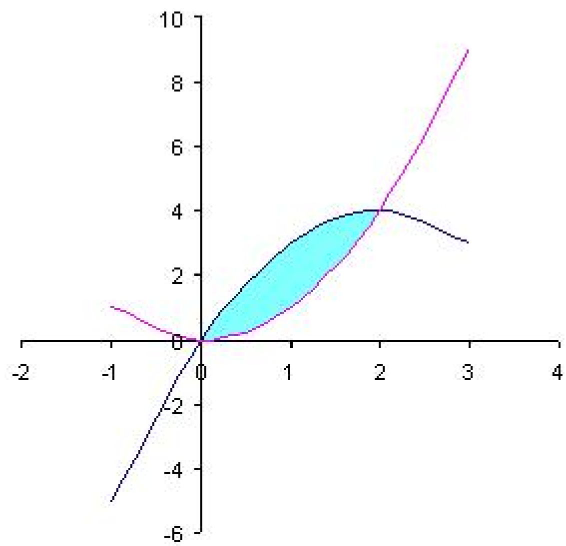
$$= -2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= -2\left(\frac{8}{3}\right) + 4\left(\frac{4}{2}\right)$$

$$= -\frac{16}{3} + \frac{16}{2}$$

$$= -\frac{16}{3} + 8$$

$$= \frac{8}{3}$$



7. (1.75 ponto)

   Calcule o volume do sólido gerado quando a parábola $y = x^2$ gira em torno do eixo y, no intervalo [0,4]. Utilize o método dos discos. Esboce o gráfico.

   Integral = 1.0 ponto;
   Gráfico = 0.75 ponto.

   Utilize:

$$V = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy =$$

   Solução:

$$= \pi \int_a^b [g(y)]^2 \; dy$$

$$= \pi \int_0^{16} [\sqrt{y}]^2 \; dy$$

$$= \pi \int_0^{16} y \; dy$$

$$= \pi \; \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{16}$$

$$= \pi \left(\frac{16^2}{2} - 0 \right)$$

$$= 128\pi$$