Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 2^o semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

Determine o domínio das seguintes funções: (0,2 ponto por item)

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

Solução:

(a) Como $f(x)$ deve ser real, temos que ter $4 - x^2 \geq 0$, ou $4 \geq x^2$. Portanto o domínio é o intervalo $-2 \leq x \leq 2$ — Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$.

(b) Como no item anterior $x^2 - 16 \geq 0$, ou $x^2 \geq 16$. E o domínio será os intervalos $x \leq -4$ e $x \geq 4$.

(c) A função é definida para todos os reais exceto para $x = 2$.

(d) A função é definida para todos os reais exceto para $x = \pm 3$.

(e) Como $x^2 + 4 \neq 0$ para qualquer x, o domínio da função é toda a reta dos reais.

2. (1,0 ponto)

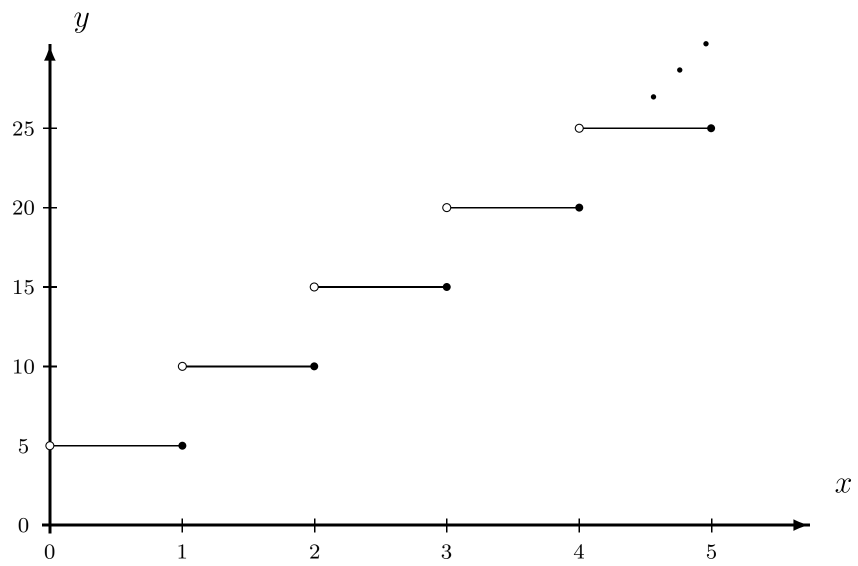
Esboce o gráfico da função definida pelas seguintes relações:

$$\begin{array}{lll}
f(x) = 5 & \text{para} & 0 < x \leq 1 \\
f(x) = 10 & \text{para} & 1 < x \leq 2 \\
f(x) = 15 & \text{para} & 2 < x \leq 3 \\
f(x) = 20 & \text{para} & 3 < x \leq 4 \\
f(x) = 25 & \text{para} & 4 < x \leq 5 \\
f(x) = 30 & \text{para} & 5 < x \leq 6 \\
\vdots & \text{e assim por diante} & \vdots
\end{array}$$

Determine o domínio e a imagem da função.

Solução:

O gráfico está esboçado na figura a seguir.



O domínio é o conjunto de todos os reais positivos e a imagem é o conjunto dos números inteiros $\{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$. Isto é,

$$\text{Dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} \ \text{ tais que } \ x > 0\} \quad \text{e} \quad \text{Im}\, f = \{x \in \{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}\}.$$

3. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \le 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \le 2 \\ 4 - 2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \le 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x = 6$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \le 2 \\ 4 - 2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 = 8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 4 - 2x = 0$$

4. (1,0 ponto)

Determinar a função inversa de $f(x) = x^2 - 3$, se seu domínio X é o intervalo $[0, \infty)$.

Solução:

Restringindo o domínio a função se torna biunívoca. A imagem é o intervalo $[-3, \infty)$. Logo,

$$y = x^2 - 3$$

resolvendo para x,

$$x = \pm\sqrt{y + 3}$$

Como x não é negativo podemos desconsiderar o ramo negativo na última expressão, e

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y+3}$$

que é a inversa de f.

5. (1,0 ponto) ―――――――――――――――――――――――――――――――――――――

Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$, ache

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e dada a função $f(x) = \sqrt{5x+1}$, ache

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{quando} \quad x > -\frac{1}{5}$$

Solução:

Para $f(x) = x^2 - 3x$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^2 - 3(x+h)) - (x^2-3x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2-3x-3h) - (x^2-3x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2-3h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h-3$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 2x-3$$

Para $f(x) = \sqrt{5x+1}$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right) - \left(\sqrt{5x+1}\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)-\left(\sqrt{5x+1}\right)}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{h\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5}{\left(\sqrt{5x+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}=\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

6. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Avalie os limites

(a) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x}$$

(b) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x}$$

(c) $$\lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x}$$

Quando $x>0$, $|\,x\,|=x$. Portanto

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

(b) $$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x}$$

Quando $x<0$, $|\,x\,|=-x$. Portanto

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{|\ x\ |}{x}$$

O limite não existe, posto que os limites laterais são diferentes,

$$1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{|\ x\ |}{x} \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{|\ x\ |}{x} = -1$$

7. (1,5 pontos)

Mostre que uma função polinomial é contínua para todo real x.

Solução:

Para que uma função seja contínua em um ponto x, o limite da função neste ponto deve existir e ser igual ao valor da função no ponto. Isto é se $x = a$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Para uma função polinomial sabemos que o limite da função em a é sempre igual a $f(a)$. Vamos, a seguir, verificar esta afirmação.

Uma função polinomial pode ser escrita na forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots a_2, a_1, a_0$ são números reais. O limite da função quando x tende a a é

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

aplicando as regras de limites

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots\cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(a_n x^n) + \lim_{x\to a}(a_{n-1}x^{n-1}) + \cdots + \lim_{x\to a}(a_2x^2) + \lim_{x\to a}(a_1x) + \lim_{x\to a}(a_0)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = a_n \lim_{x\to a}(x^n) + a_{n-1}\lim_{x\to a}(x^{n-1}) + \cdots + a_2\lim_{x\to a}(x^2) + a_1\lim_{x\to a}(x) + a_0\lim_{x\to a}(1)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = a_n(a^n) + a_{n-1}(a^{n-1}) + \cdots + a_2(a^2) + a_1(a) + a_0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Portanto toda função polinomial é contínua em toda a reta dos reais.

8. (1,5 pontos) ———

Se $f(x) = \mid x \mid$, prove que f é contínua para todo real a.

Solução:

Como $\mid x \mid = \sqrt{x^2}$, temos

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \mid x \mid = \lim_{x\to a} \sqrt{x^2} = \sqrt{\lim_{x\to a} x^2} = \sqrt{a^2} = \mid x \mid = f(a)$$

9. (1,0 ponto) ———

Ache as descontinuidades das seguintes funções. Justifique sua resposta.

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

(b) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$

(d) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 2$

Solução:

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

$f(x)$ possui uma descontinuidade em $x = 0$, já que 0 sequer pertence ao domínio da função.

(b) $f(x) = \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$f(x)$ possui uma descontinuidade em $x = \pm 2$, visto que o denominador se anula nestes pontos. Mas, observe que esta descontinuidade pode ser removida da seguinte maneira,

$$f(x) = \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} \cdot \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} = \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)}$$

$$f(x) = \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} = \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2} = 3+\sqrt{x^2+5}$$

(c) $$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

Assim como no item anterior, $f(x)$ tem uma descontinuidade nos pontos $x = \pm 3$. Mas a descontinuidade no ponto $x = 3$ pode ser removida.
Note que $x^3 - 27 = (x-3)(x^2+3x+9)$ e $x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$, logo

$$f(x) = \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x^2+3x+9)}{(x+3)}$$

Restanto somente a descontinuidade em $x = -3$.

(d) $$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 2$$

Como $f(x)$ é uma função polinomial, $f(x)$ não possui descontinuidades, como demonstrado na questão 7.