Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1^o semestre de 2018 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Mostre que a função $f(x) = -2x^5 - 3x^3 - 20x - 6$ é uma função decrescente para todos os valores de x na reta dos reais.

   Solução:

   $$f'(x) = -10x^4 - 9x^2 - 20 < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

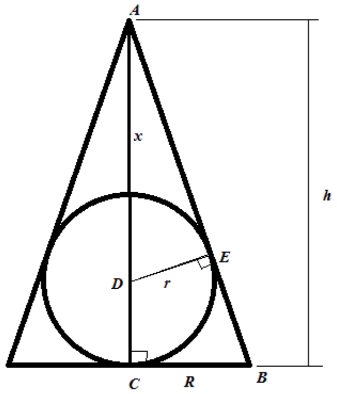
   Logo, $f(x)$ é decrescente em toda a reta real.

2. (1,0 ponto)

   Ache as dimensões de um cone circular reto com volume mínimo V que envolva uma esfera de diâmetro d.

   Solução:

   Considere um corte no eixo de simetria do cone (segmento $\boldsymbol{CA}$) como mostra a figura



Considerando, V o volume do cone, h a altura do cone, A_b a área da base do cone e R o raio da base do cone, então o volume de um cone circular reto é dado pela expressão:

$$V = \frac{1}{3}hA_b = \frac{1}{3}h(\pi R^2)$$

Seja x o comprimento do segmento que liga o topo da esfera ao pico do cone.
Mas os triângulos ABC e AED são similares, logo podemos escrever

$$\frac{AD}{AB} = \frac{r}{R}$$

porém,

$$AD = x + r$$

e do triângulo ABC

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 = R^2 + (2r + x)^2$$

$$AB = \sqrt{R^2 + (2r + x)^2}$$

substituindo na relação de similaridade

$$\frac{AD}{AB} = \frac{r}{R} \Longrightarrow \frac{x + r}{\sqrt{R^2 + (2r + x)^2}} = \frac{r}{R} \Longrightarrow \frac{(x + r)^2}{R^2 + (2r + x)^2} = \frac{r^2}{R^2}$$

$$R^2(x + r)^2 = r^2(R^2 + (2r + x)^2)$$

$$R^2(x^2+2xr+r^2)=r^2(R^2+(4r^2+4rx+x^2))$$

$$R^2x^2+2xrR^2+R^2r^2=r^2R^2+r^2(4r^2+4rx+x^2)$$

$$R^2x^2+2xrR^2+R^2r^2=r^2R^2+4r^4+4r^3x+x^2r^2$$

$$R^2x^2+2xrR^2=4r^4+4r^3x+x^2r^2$$

$$R^2(x^2+2xr)=4r^4+4r^3x+x^2r^2$$

$$R^2=\frac{4r^4+4r^3x+x^2r^2}{x^2+2xr}$$

substituindo na expressão para o volume do cone

$$V=\frac{1}{3}h(\pi R^2)=\frac{1}{3}(2r+x)\left(\pi\frac{4r^4+4r^3x+x^2r^2}{x^2+2xr}\right)=\frac{\pi r^2(2r+x)(4r^2+4rx+x^2)}{3(x^2+2xr)}$$

$$V(x)=\frac{\pi r^2(2r+x)(4r^2+4rx+x^2)}{3x(2r+x)}$$

$$V(x)=\frac{\pi r^2(4r^2+4rx+x^2)}{3x}$$

que relaciona o volume do cone (V) a uma única variável independente (x).
Devemos agora pesquisar o mínimo da função $V(x)$.
Extremos relativos $\longrightarrow V'(x)=0$.

$$V'(x)=\left[\frac{\pi r^2(4r^2+4rx+x^2)}{3x}\right]'=\frac{\pi r^2}{3}\left[\frac{4r^2+4rx+x^2}{x}\right]'$$

$$=\frac{\pi r^2}{3}\left[\frac{4r^2}{x}+4r+x\right]'=\frac{\pi r^2}{3}\left[4r^2x^{-1}+4r+x\right]'$$

$$=\frac{\pi r^2}{3}\left[-4r^2x^{-2}+1\right]=\frac{\pi r^2}{3}\left[-\frac{4r^2}{x^2}+1\right]$$

$$V'(x)=0\Longrightarrow\left[1-\frac{4r^2}{x^2}\right]=0\quad\text{ou}\quad x^2=4r^2\Longrightarrow x=\pm\sqrt{4r^2}=\pm 2r$$

A so;ução que interessa é $x=2r$. $x=-2r$, significa um esfera de raio 0.
Para $x=2r$, temos

$$h=2r+x=2r+2r=4r$$

e

$$R^2 = \frac{4r^4 + 4r^3 \cdot 2r + 4r^2r^2}{4r^2 + 4r^2} = \frac{4r^4 + 8r^4 + 4r^4}{8r^2} = \frac{16r^4}{8r^2} = 2r^2$$

$$R = \sqrt{2}r$$

Enfim, as dimensões do cone são:

$$h = 4r \quad \text{e} \quad R = \sqrt{2}r$$

3. (1,0 ponto)

Calcule as seguintes antiderivadas.

(a) $$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx$$

(b) $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

(c) $$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$$

Solução:

(a) $$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\, dx = -\frac{3}{4}\int -4x\sqrt{1-2x^2}dx = -\frac{3}{4}\int -4x(1-2x^2)^{1/2}dx$$

$$= -\frac{3}{4}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(1-2x^2)^{3/2}\right] + C = -\frac{1}{2}\sqrt{(1-2x^2)^3} + C =$$

(b) $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Seja $u = \sqrt{x}$. Então $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \to 2\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Substituindo na integral

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int \cos u\, du = 2\,\text{sen}\ u + C = 2\,\text{sen}\ \sqrt{x} + C$$

(c) $$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx$$

Seja $u = x+1$, então $du = dx$ e $x = u-1$. Substituindo na integral.

$$\int x^2\sqrt{x+1}\, dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\, du = \int (u^2-2u+1)\sqrt{u}\, du =$$

$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 2\left(\frac{2}{5}\right)u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= 2u^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{7}u^2 - \frac{2}{5}u + \frac{1}{3}\right\} + C$$

$$= 2(x+1)^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{7}(x+1)^2 - \frac{2}{5}(x+1) + \frac{1}{3}\right\} + C$$

4. (1,0 ponto)

Ache a área sob o gráfico de $f(x) = \sqrt{4-x}$ e o eixo x, entre $x = 0$ e $x = 1$.

Solução:

$$\int_0^1 \sqrt{4-x}\,dx = -\frac{2}{3}(4-x)^{3/2}\Big|_0^1 = -\frac{2}{3}(4-1)^{3/2} + \frac{2}{3}(4-0)^{3/2}$$

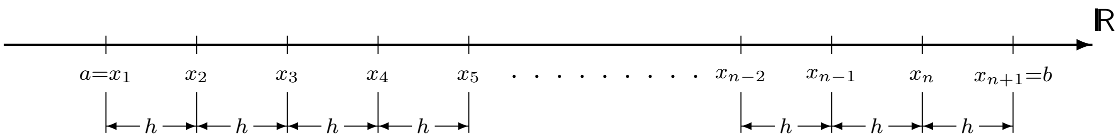
$$= -\frac{2}{3}3^{3/2} + \frac{2}{3}4^{3/2} = \frac{2}{3}\left[4^{3/2} - 3^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{4^3} - \sqrt{3^3}\right]$$

5. (1,0 ponto)

Regra dos Trapézios:

Seja $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$; divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com o mesmo comprimento $h = \dfrac{(b-a)}{n}$, sendo estes subintervalos delimitados pelos pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Como ilustra a seguinte figura.



Construa uma regra de integração definida pela soma das áreas dos trapézios definidos pelas extremidades dos subintervalos e pelos valores de $f(x)$ nestes extremos. Isto é, para um subintervalo qualquer $[x_i, x_{i+1}]$ a área do trapézios será

$$A_i = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

(a) Use a regra dos trápezios com $n = 10$ para calcular a integral abaixo e compare com o valor exato.

$$\int_0^1 \cos^2 x\,dx$$

Solução:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]}_{\text{área de um trapézio}}$$

onde

- n - quantidade de subintervalos no intervalo de integração $[a, b]$
- $h = \frac{b-a}{n}$

A integral a ser avaliada é

$$\int_0^1 \cos^2\, dx = \frac{1}{2}\left[x + \text{sen } x \cos x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[1 + \text{sen } 1 \cos 1\right] - \frac{1}{2}\left[0 + \text{sen } 0 \cos 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \text{sen } 1 \cos 1\right] \approx 0{,}727324356706420$$

Neste caso $n = 10$, $a = 0$ e $b = 1$, portanto

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$x_i = a + ih\ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

$$x_i = 0 + ih = ih\ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 11$$

$$\Rightarrow x_1 = 0{,}0; \quad x_2 = 0{,}1; \quad x_3 = 0{,}2; \quad x_4 = 0{,}3; \quad x_5 = 0{,}4; \quad x_6 = 0{,}5;$$

$$\Rightarrow x_7 = 0{,}6; \quad x_8 = 0{,}7; \quad x_9 = 0{,}8; \quad x_{10} = 0{,}9; \quad x_{11} = 1{,}0;$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$\int_0^1 x^2\, dx \approx \sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad = \quad & \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]}_{i=1} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_2) + f(x_3)\right]}_{i=2} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_3) + f(x_4)\right]}_{i=3} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_4) + f(x_5)\right]}_{i=4} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_5) + f(x_6)\right]}_{i=5} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_6) + f(x_7)\right]}_{i=6} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_7) + f(x_8)\right]}_{i=7} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_8) + f(x_9)\right]}_{i=8} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_9) + f(x_{10})\right]}_{i=9} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_{10}) + f(x_{11})\right]}_{i=10}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+\right.$$
$$2f(x_5)+2f(x_6)+2f(x_7)+2f(x_8)+$$
$$\left.2f(x_9)+2f(x_{10})+f(x_{11})\right]$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\cos^2(x_i)+\cos^2(x_{i+1})\right] = \frac{h}{2}\left[\cos^2 x_1+2\cos^2 x_2+2\cos^2 x_3+2\cos^2 x_4+\right.$$
$$2\cos^2 x_5+2\cos^2 x_6+2\cos^2 x_7+2\cos^2 x_8+$$
$$\left.2\cos^2 x_9+2\cos^2 x_{10}+\cos^2 x_{11}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\cos^2(x_i)+\cos^2(x_{i+1})\right] = \frac{0{,}1}{2}\left[\cos^2(0)+2\cdot\left[\cos^2(0{,}1)+\cos^2(0{,}2)+\cos^2(0{,}3)+\right.\right.$$
$$\cos^2(0{,}4)+\cos^2(0{,}5)+\cos^2(0{,}6)+\cos^2(0{,}7)+$$
$$\left.\left.\cos^2(0{,}8)+\cos^2(0{,}9)\ \right]+\cos^2(1{,}0)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\cos^2(x_i)+\cos^2(x_{i+1})\right] = \frac{0{,}1}{2}\left\{1{,}00000000000+2\cdot\left[0{,}990033288921+\right.\right.$$
$$0{,}960530497001+0{,}912667807455+$$
$$0{,}848353354674+0{,}770151152934+$$
$$0{,}681178877238+0{,}584983571450+$$
$$\left.0{,}485400238849+0{,}386398952653\ \right]+$$
$$\left.0{,}291926581726\ \right\}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[\cos^2(x_i)+\cos^2(x_{i+1})\right] = 0{,}726566076278687$$

Logo, pela chamada regra dos trapézios

$$\int_0^1 \cos^2\ dx =\approx 0{,}726566076278687$$

enquanto que o valor exato é

$$\int_0^1 \cos^2\ dx = \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{sen}\ 1\cos 1\right] \approx 0{,}727324356706420$$

6. (1,0 ponto)

O valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a,b]$ é definido por

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Calcule o valor médio das seguintes funções nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ em $[0,1]$

(b) $f(x) = \cos^2 x$ em $[0, \frac{\pi}{3}]$

(c) $f(x) = 3x^4 - x$ em $[-1,4]$

(d) $f(x) = \text{sen } x - \cos x$ em $[0,\pi]$

Solução:

(a) $$\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[7]{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{7}}\,dx = \frac{7}{8}x^{\frac{8}{7}}\Big|_0^1 = \frac{7}{8}\left[1^{\frac{8}{7}} - 0^{\frac{8}{7}}\right] = \frac{7}{8}$$

(b) $$\frac{1}{\frac{\pi}{3}-0}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x\,dx = \frac{3}{\pi}\frac{1}{2}\left[x + \text{sen } x\cos x\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{3}{\pi}\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{3} + \text{sen }\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} - 0 - \text{sen } 0\cos 0\right]$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{2\pi}\text{sen }\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

(c) $$\frac{1}{4-(-1)}\int_{-1}^4 (3x^4 - x)\,dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^4 (3x^4-x)\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^4$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^4$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{3}{5}4^5 - \frac{1}{2}4^2 - \frac{3}{5}(-1)^5 + \frac{1}{2}(-1)^2\right]$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{3072}{5} - \frac{16}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{6144}{10} - \frac{80}{10} + \frac{6}{10} + \frac{5}{10}\right]$$
$$= \frac{1}{5}\left[\frac{6075}{10}\right] = \frac{1215}{10} = 121{,}5$$

(d)

$$\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \text{sen } x - \cos x \, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x - \text{sen } x\right]_0^\pi = -\frac{1}{\pi}\left[\cos x + \text{sen } x\right]_0^\pi$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[\cos\pi + \text{sen } \pi - \cos 0 - \text{sen } 0\right]$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left[-1+0-1-0\right] = \frac{2}{\pi}$$

7. (1,0 ponto)

Resolva as integrais indefinidas

(a) $$\int \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$$

(b) $$\int \frac{x^3}{x^4+5}\, dx$$

Solução:

(a) $$\int \frac{x^2}{x^3+1}\, dx$$

Seja $u = x^3 + 1$, logo $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Substituindo na integral

$$\int \frac{x^2}{x^3+1}\, dx = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln u + C = \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + C$$

(b) $$\int \frac{x^3}{x^4+5}\, dx$$

Seja $u = x^4 + 5$, logo $\frac{du}{dx} = 4x^3$. Substituindo na integral

$$\int \frac{x^3}{x^4+5}\, dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln u + C = \frac{1}{4}\ln(x^4+5) + C$$

8. (1,0 ponto)

Seja $\mathcal{R}$ a região entre o eixo x, a curva $y = x^7$, a linha $x = 2$.

(a) Ache o volume do sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

(b) Ache o volume do sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

Solução:

(a)

$$V = \int_0^2 \pi y^2\,dx = \pi \int_0^2 \left(x^7\right)^2\,dx = \pi \int_0^2 x^{14}\,dx = \pi \left[\frac{x^{15}}{15}\right]_0^2$$

$$= \frac{\pi}{15}[32768 - 0] = \frac{32768\pi}{15}$$

(b)

$$V = \int_0^2 y \cdot 2\pi x\,dx = \int_0^2 (x^7) \cdot 2\pi x\,dx = 2\pi \int_0^2 x^8\,dx = 2\pi \left[\frac{x^9}{9}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[\frac{2^9}{9} - \frac{0^9}{9}\right] = \frac{1024\pi}{9}$$

9. (2,0 pontos)

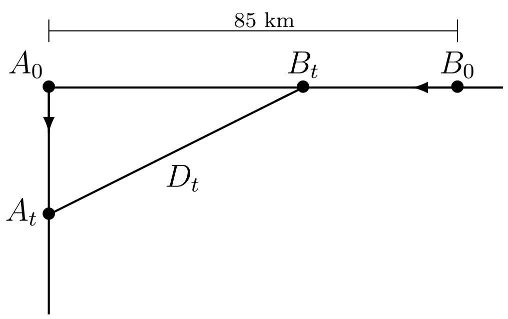
Às 9 horas da manhã, um navio B está 85 quilômetros a leste de um outro navio A. O navio B está navegando para oeste a uma velocidade de 20 km/h (20 quilômetros por hora), e o navio A está navegando para o sul a uma velocidade de 15 km/h. Se ambos mantiverem seus respectivos cursos, quando eles estarão mais próximos um do outro? Neste instante qual será a distância entre eles?

Solução:

Sejam

- A_0 - Navio A no instante 0
- A_t - Navio A no instante t
- B_0 - Navio B no instante 0
- B_t - Navio B no instante t
- $V_A = 15$ km/h - velocidade constante do navio A
- $V_B = 20$ km/h - velocidade constante do navio B
- D_0 - distância entre A e B no instante 0
- D_t - distância entre A e B no instante t

Podemos representar a geometria por um triângulo como mostra a figura



Observando o triângulo retângulo $A_0B_tA_t$, o comprimento de sua hipotenusa é a distância entre os navios A e B no instante t.

Os catetos do triângulo são A_0B_t e A_0A_t. Portanto,

$$\begin{array}{ll} A_0B_t = 85 - V_B \cdot t & \\ A_0A_t = V_A \cdot t & \end{array} \qquad (t \text{ em horas})$$

e

$$D_t^2 = (A_0B_t)^2 + (A_0A_t)^2 = (85 - V_B \cdot t)^2 + (V_A \cdot t)^2$$

função que representa a distância entre os dois navios em um instante t. Para entrar a menor distância entre eles temos que encontrar o mínimo da função.

$$D_t^2 = (85 - 20t)^2 + (15t)^2$$

$$= 7225 - 3400t + 400t^2 + 225t^2$$

$$= 7225 - 3400t + 625t^2$$

$$= 25(25t^2 - 136t + 289)$$

ou

$$D_t^2 = 25(25t^2 - 136t + 289) \Longrightarrow D_t = \sqrt{25(25t^2 - 136t + 289)} = 5(\ 25t^2 - 136t + 289\ )^{\frac{1}{2}}$$

$$D_t'(t) = 0 \Longrightarrow 50t - 136 = 0 \Longrightarrow t = 2{,}72h$$

ou

$$D_t'(t) = \frac{5}{2}(25t^2 - 136t + 289)^{-\frac{1}{2}}(50t - 136) = \frac{5(50t - 136)}{2\sqrt{25t^2 - 136t + 289}}$$

$$D_t'(t) = 0 \Longrightarrow 50t - 136 = 0 \Longrightarrow t = 2{,}72h$$

Portanto a hora que os navios estarão mais próximos será 11,72 horas ou 11h e 43m e 12s. E a distância entre eles:

$$D_t = \sqrt{25(25 \cdot (2{,}72)^2 - 136 \cdot 2{,}72 + 289} = 5\sqrt{104{,}84} = 51 \text{ km}$$