**Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina: Matemática para Computação**
**AP3 - 2$^o$ semestre de 2010 - Gabarito**

## Questões

1. (2,5 pontos)

Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, utilizando as ferramentas do cálculo.

**Solução:**

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$$

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$$

$$f''(x) = 12x - 10$$

Os candidatos a máximos e mínimos locais são:

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 6x^2 - 10x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = 1$$

Vamos estudar o sinal da primeira derivada para verificar as regiões aonde $f(x)$ cresce e decresce.

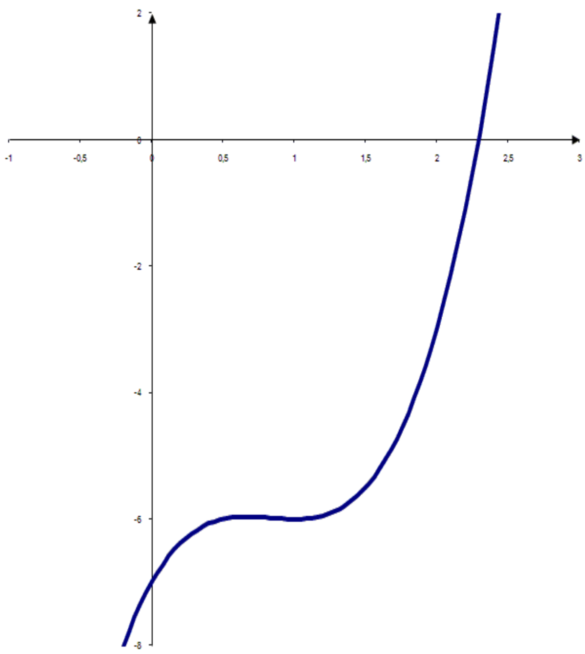
| Intervalo | $f'(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|
| $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ | $+$ | crescente |
| $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ | $-$ | decrescente |
| $(1, \infty)$ | $+$ | crescente |

Ademais, existe um ponto de mínimo relativo em $x = 1$ e um ponto de máximo relativo em $x = 2/3$.

Da segunda derivada surgem os candidatos a pontos de inflexão.

$$f''(x) = 12x - 10 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{5}{6}$$

Entretanto para $x > 5/6$ $f''(x) > 0$ e para $x < 5/6$ $f''(x) < 0$, logo a função é concava para cima para $x > 5/6$ e é concava para baixo para $x < 5/6$.




2. (2,5 pontos)

Para as seguintes funções verifique se elas tem inversas. Para as funções que tem inversa ache sua expressão ($f^{-1}$) e calcule sua derivada.

**(a)** $f(x) = x^2 + 2$

**(b)** $f(x) = x^3$

**(c)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

**Solução:**

**(a)** $f(x) = x^2 + 2$

$$y = x^2 + 2 \Longrightarrow y - 2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{y-2} = x$$

A função inversa seria $f^{-1}(y) = \sqrt{y-2}$. Entretanto o domínio da inversa é $\mathbb{R}$ tal que $y > 2$ e não coincide com a imagem de $f$. Logo $f$ não tem inversa.

**(b)** $f(x) = x^3$

$$y = x^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

$$x = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(y^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

**(c)** $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

$$y = \frac{2x-1}{x+2} \Longrightarrow y(x+2) = 2x-1 \Longrightarrow yx + 2y = 2x - 1$$

$$\Longrightarrow yx - 2x = -1 - 2y \Longrightarrow (y-2)x = -1-2y \Longrightarrow x = -\frac{2y+1}{y-2}$$

$$x = -\frac{2y+1}{y-2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(-\frac{(2y+1)}{(y-2)}\right)' = -\frac{(2y+1)'(y-2) - (2y+1)(y-2)'}{(y-2)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2\cdot(y-2) - (2y+1)\cdot 1}{(y-2)^2} = -\frac{2y-4-2y-1}{(y-2)^2} = \frac{5}{(y-2)^2}$$

3. (2,5 pontos)

Ache o volume do sólido obtido por revolução em torno do eixo $y$ da região do primeiro quadrante limitada pelas parábolas $y = 2 - x^2$ e $y = x^2$.

**Solução**

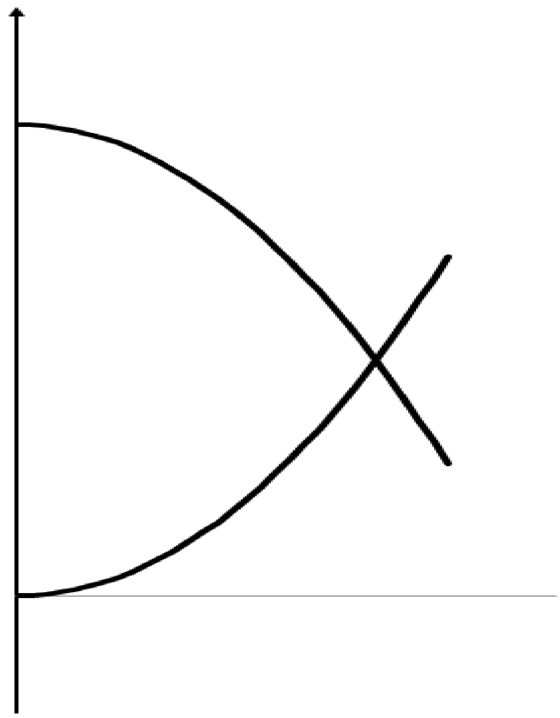
As duas curvas se interceptam em $(1,1)$ e $(-1,1)$, a saber

$$2 - x^2 = x^2 \Longrightarrow 2x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Para $x = -1 \rightarrow y = 1$ e para $x = 1 \rightarrow y = 1$

No primeiro quadrante a interseçã se dá em $(1,1)$.

Veja no gráfico as duas curvas



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^1 x((2-x^2)-x^2)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x(2-x^2-x^2)\,dx \\
&= 2\pi \int_0^1 x(2-2x^2)\,dx \\
&= 4\pi \int_0^1 (x-x^3)\,dx \\
&= 4\pi \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4})\right]_0^1 \\
&= 4\pi \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right] \\
&= 4\pi\frac{1}{4} \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

4. (2,5 pontos)

Calcular a área da região limitada pelos gráficos das parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

**Solução:**

Vamos verificar as interseções das duas parábolas

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \implies 2x^2 - 8x = 0 \implies 2x(x-4) = 0 \implies x = 0 \text{ e } x = 4$$

Portanto as interseções ocorrem em $(0,0)$ e $(4,8)$. Logo a área entre elas será

$$\int_0^4 \Big[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\Big]\ dx = \int_0^4 \Big[6x - x^2 - x^2 + 2x\Big]\ dx$$

$$\int_0^4 \Big[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\Big]\ dx = \int_0^4 \Big[8x - 2x^2\Big]\ dx$$

$$\int_0^4 \Big[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\Big]\ dx = \left[4x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^4$$

$$\int_0^4 \Big[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\Big]\ dx = \left[4(4)^2 - \frac{2}{3}(4)^3\right]$$

$$\int_0^4 \Big[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\Big]\ dx = \left[64 - \frac{128}{3}\right]$$

$$\int_0^4 \Big[(6x - x^2) - (x^2 - 2x)\Big]\ dx = \frac{64}{3}$$