Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2016 - Gabarito

Questões

1. (2,50 pontos)

Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

(a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x-1 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Claramente o domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -1 < x < 1\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 \leq y < 1 \text{ ou } 1 < x < 2\}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 < x < 2 \text{ ou } 3 \leq x < 4\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 0 < y < 3\}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R}\}$$

2. (2,50 pontos)

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x - 1)^2} = -\infty$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

3. (2,50 pontos)

Verifique se a função

$$f(x) = \frac{|\, x \,|}{x}$$

é contínua em $x = 0$, justifique sua resposta.

Solução:

A função não está definida em $x = 0$. Além disso se verificarmos os limites laterais no ponto $x = 0$, teremos

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\, x \,|}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\, x \,|}{x} = +1$$

portanto o limite não existe em $x = 0$. O que mostra claramente que a função não é contínua em $x = 0$.

4. (2,50 pontos)

Determine as primeiras e segundas derivadas das seguintes funções:

a) $\quad f(x) = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{x^2}{x^{2/3}} + \dfrac{x^2+1}{x^2}$

b) $\quad f(x) = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

Solução:

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x^{1/2}} + \frac{x^2}{x^{2/3}} + \frac{x^2+1}{x^2} \\ &= 2x^{-1/2} + x^2x^{-2/3} + (x^2+1)x^{-2} \\ &= 2x^{-1/2} + x^{2-2/3} + x^2x^{-2} + x^{-2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ 2x^{-1/2} + x^{4/3} + 1 + x^{-2} \\
f'(x) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) \ x^{-1/2-1} + \left(\frac{4}{3}\right) x^{4/3-1} + 0 + (-2)x^{-2-1} \\
&= -x^{-3/2} + \frac{4}{3}x^{1/3} - 2x^{-3} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{4\sqrt[3]{x}}{3} - 2\frac{1}{x^3} \\
f''(x) &= \left[-x^{-3/2} + \frac{4}{3}x^{1/3} - 2x^{-3}\right]' \\
&= -\left(-\frac{3}{2}\right) x^{(-3/2-1)} + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right) x^{(1/3-1)} - 2(-3)x^{(-3-1)} \\
&= \frac{3}{2}x^{-5/2} + \frac{4}{6}x^{-2/3} + 6x^{-4} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{x^5}} + \frac{4}{6\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6}{x^4}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+4)^2(2x^3-1)^3 \\
f'(x) &= \left[(x^2+4)^2\right]' \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[(2x^3-1)^3\right]' \\
&= \left[2(x^2+4)^{(2-1)}(2x)\right] \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[3(2x^3-1)^{(3-1)}(6x)\right] \\
&= \left[4x(x^2+4)\right] \cdot (2x^3-1)^3 + (x^2+4)^2 \cdot \left[18x(2x^3-1)^2\right] \\
&= 4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3 + 18(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2 \\
f''(x) &= \left[4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3 + 18(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2\right]' \\
&= \left[4(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3\right]' + \left[18(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2\right]' \\
&= 4\left[(x^3+4x) \cdot (2x^3-1)^3\right]' + 18\left[(x^2+4)^2 \cdot (2x^5-x^2)^2\right]' \\
&= 4\left\{(x^3+4x) \cdot \left[(2x^3-1)^3\right]' + \left[(x^3+4x)\right]' \cdot (2x^3-1)^3\right\} \\
&\quad + 18\left\{(x^2+4)^2 \cdot \left[(2x^5-x^2)^2\right]' + \left[(x^2+4)^2\right]' \cdot (2x^5-x^2)^2\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\left\{(x^3+4x)\cdot\Big[3(2x^3-1)^2(6x)\Big]+\Big[(3x^2+4)\Big]\cdot(2x^3-1)^3\right\}\\
&\quad + 18\left\{(x^2+4)^2\cdot\Big[2(2x^5-x^2)^1(10x)\Big]+\Big[2(x^2+4)^1(2x)\Big]\cdot(2x^5-x^2)^2\right\}\\
&= 4\left\{18x(x^3+4x)(2x^3-1)^2+(3x^2+4)(2x^3-1)^3\right\}\\
&\quad + 18\left\{20x(x^2+4)^2(2x^5-x^2)+4x(x^2+4)(2x^5-x^2)^2\right\}
\end{aligned}
$$