**Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina: Matemática para Computação**
**AD2 - 2$^o$ semestre de 2009 - Gabarito**

**Atenção: ADS enviadas pelo correio, devem ser postadas cinco dias antes da data final de entrega estabelecida no calendário de entrega de ADs.**

## Questões

1. ( 1,5 ponto ) ————————————————————————————

   Determine os seguintes tópicos para as funções $f(x)$ e $g(x)$ dadas abaixo:

   $$f(x) = 7x^2 - 3x + 5$$

   $$g(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

   (a) (0,75 ponto)
   - Intervalos onde a função $f(x)$ é crescente ou decrescente;

   (b) (0,75 ponto)
   - os pontos de máximo e de mínimo da função, caso existam;

   Solução:

   - Para a função $f(x)$:

   $$f(x) = 7x^2 - 3x + 5$$

   $$f'(x) = 14x - 3$$

   $f'(x) = 0$ se e somente se $14x - 3 = 0$

Logo, o único número crítico é dado por:

$$x = \frac{3}{14}$$

Podemos observar que:

$f'(x) < 0$ quando $14x - 3 < 0$, ou seja, quando $x < \frac{3}{14}$
$f'(x) > 0$ quando $14x - 3 > 0$, ou seja, quando $x > \frac{3}{14}$

Podemos então concluir que, a função $f(x)$ é decrescente no intervalo: $\left(-\infty, \frac{3}{14}\right)$ e crescente no intervalo: $\left(\frac{3}{14}, \infty\right)$.

Além disso, uma vez que, $f''(x) = 14$ e $f''\left(\frac{3}{14}\right) = 14 > 0$, temos através da segunda derivada que a função $f$ tem um mínimo relativo em $\frac{3}{14}$.

- Para a função $g(x)$:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ se e somente se } 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$$

De onde obtemos as seguintes raizes, ”números críticos”:

$$x = 1\ ,\ x = \frac{1}{3}$$

Podemos observar que:

$f'(x) < 0$ quando $3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0$, ou seja, quando $\frac{1}{3} < x < 1$;
$f'(x) > 0$ quando $3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0$, ou seja, quando $x < \frac{1}{3}$ e $x > 1$.

Podemos então concluir que, a função $f(x)$ é decrescente no intervalo: $\frac{1}{3} < x < 1$ e crescente nos intervalos: $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ e $(1, \infty)$.

Além disso, uma vez que, $f''(x) = 6x - 4$ e $f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 4 = -2 < 0$ e $f''(1) = 6(1) - 4 = 2 > 0$, temos através da segunda derivada que a função $f$ tem um mínimo relativo em 1 e um máximo relativo em $\frac{1}{3}$.

2. ( 0,5 ponto )

Determine os pontos de inflexão da seguinte função, caso existam:

$$y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$$

Solução:

$$y = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$$

Temos para a função acima as seguintes derivadas ($y'$ e $y''$):

$$y' = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$

$$y'' = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x+1)(x-2)$$

Fazendo $y'' = 0$ e resolvendo essa equação, podemos obter os pontos de inflexão, ou seja,

$$12(3x+1)(x-2) = 0$$

$$(3x+1)(x-2) = 0$$

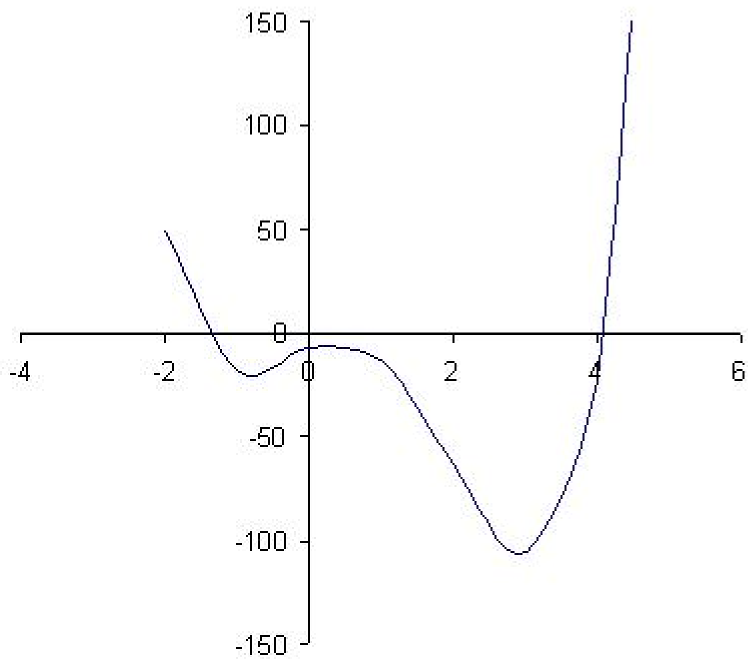
$$x = -\frac{1}{3} \text{ e } x = 2$$

Podemos também observar que:

$y'' > 0$ quando $x < -\frac{1}{3}$ e quando $x > 2$
- concavidade voltada para cima;

$y'' < 0$ quando $-\frac{1}{3} < x < 2$
- concavidade voltada para baixo.

Os pontos de inflexão são dados por: $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{322}{27}\right)$ e $(2, -63)$
visto que $y''$ muda de sinal em $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 2$. Observe o gráfico abaixo:




3. (1.5 ponto) ——————————————————————————-
Calcule as antiderivadas:

(a) (0.5 ponto)
$$\int \left(6x^8 - \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3}\right) dx =$$
(b) (0.5 ponto)
$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^5 x^2 dx =$$
(c) (0.5 ponto)
$$\int (3s+4)^2 ds =$$

Solução:

(a) (0.5 ponto)
$$\int \left(6x^8 - \frac{2}{3}x^5 + 7x^4 + \sqrt{3}\right) dx =$$

$$= \int 6x^8 dx - \int \frac{2}{3}x^5 dx + \int 7x^4 dx + \int \sqrt{3} dx$$

$$= 6\left(\frac{x^9}{9}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^6}{6}\right) + 7\left(\frac{x^5}{5}\right) + \sqrt{3}x + C$$

$$= \frac{2}{3}x^9 - \frac{1}{9}x^6 + \frac{7}{5}x^5 + \sqrt{3}x + C$$

(b) (0.5 ponto)

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^5 x^2 dx =$$

podemos resolver por substituição:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^5 x^2 dx =$$

escolhemos $g(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)$ e fazemos $r = 5$, assim podemos resolvê-la da seguinte forma:

$$\int (g(x))^r g'(x) dx = \frac{1}{r+1}\left(g(x)\right)^{r+1} + C$$

Dessa forma, obtemos:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^5 x^2 dx = \frac{1}{5+1}\left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^6 + C = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}x^3 + 7\right)^6 + C$$

(c) (0.5 ponto)

$$\int (3s+4)^2 ds =$$

$$= \int 9s^2 + 24s + 16 ds$$

$$= \int 9s^2 ds + \int 24s ds + \int 16 ds$$

$$= 9\left(\frac{s^3}{3}\right) + 24\left(\frac{s^2}{2}\right) + 16s + C$$

$$= 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$$

ou podemos ainda resolver essa questão utilizando a fórmula:

$$\int (g(x))^r g'(x) dx = \frac{1}{r+1}\left(g(x)\right)^{r+1} + C$$

$$= \int (3s+4)^2 ds = \frac{1}{3}\int (3s+4)^2 3ds$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2+1}(3s+4)^{2+1}\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}(3s+4)^3 + C$$

4. (2.0 pontos)

Calcule as integrais definidas:

(a) (1.0 ponto)

$$\int_2^6 (3x+4)\,dx =$$

(b) (1.0 ponto)

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4}\,dx =$$

Solução:

(a) (1.0 ponto)

$$\int_2^6 (3x+4)\,dx =$$

$$= \left[\int 3xdx\right]_2^6 + \left[\int 4dx\right]_2^6$$

$$= 3\left[\int xdx\right]_2^6 + 4\left[\int dx\right]_2^6$$

$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6 + 4\,[x]_2^6$$

$$= 3\left(\frac{6^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) + 4(6-2)$$

$$= 54 - 6 + 16$$

$$= 64$$

(b) (1.0 ponto)

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4}dx =$$

Fazemos $u = 5x + 4$. Então, $du = 5dx$.

Quando $x = 1$, temos que $u = 5.1 + 4 = 9$ e quando $x = 9$, temos que $u = 5.9 + 4 = 49$. Assim,

$$\int_1^9 \sqrt{5x+4}dx =$$

$$= \int_9^{49} \sqrt{u}\ \frac{1}{5}du$$

$$= \left[\frac{1}{5}\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_9^{49}$$

$$= \left[\frac{2}{15}u^{3/2}\right]_9^{49}$$

$$= \frac{2}{15}\left[(49)^{3/2} - (9)^{3/2}\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left[\left(\sqrt{49}\right)^3 - \left(\sqrt{9}\right)^3\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left(7^3 - 3^3\right)$$

$$= \frac{2}{15}(316)$$

$$= \frac{632}{15}$$

5. (1.5 ponto) ——————————————————————————————-

Determine a área sob a parábola $y = x^2 - 2x + 2$, acima do eixo $x$ e entre $x = 0$ e $x = 1$.

Solução:

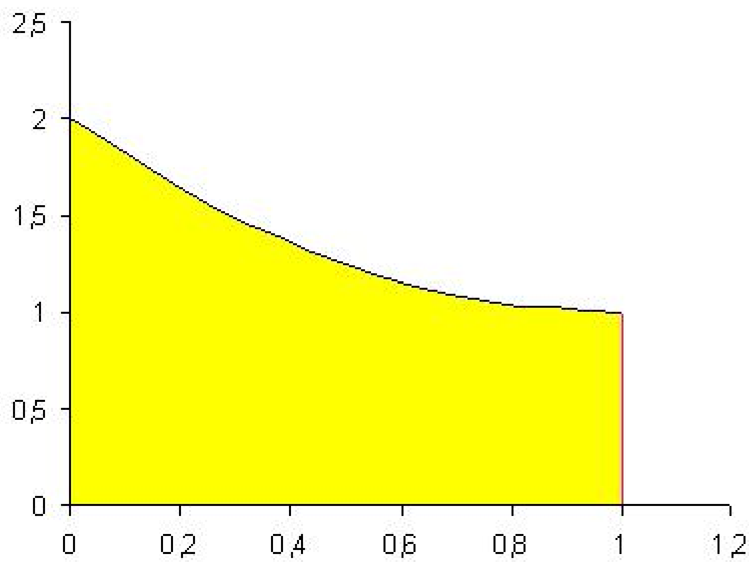
$$\int_0^1 \left(x^2 - 2x + 2\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2x\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{3} - 1 + 2\right] - [0 - 0 + 0]$$

$$= \left[\frac{1}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{4}{3}$$




6. (1.5 ponto)

Determine a área da região limitada pela reta $y = 4x$ e pela curva $y = x^3 + 3x^2$.

Solução:

Para obter os pontos de intersecção, basta igualar as duas equações:

$$4x = x^3 + 3x^2$$

$$x^3 + 3x^2 - 4x = 0$$

$$x(x^2 + 3x - 4) = 0$$

$$x(x - 1)(x + 4) = 0$$

Dessa forma, temos três valores de x que são intersecções entre as retas:

$x = 0, x = -4$ e $x = 1$

Pontos de interseção:

$$(0, 0); (-4, -16); (1, 4)$$

No intervalo $-4 \leq x \leq 0$, a curva está acima da reta e a área é:

$$A_1 = \int_{-4}^{0} \left[(x^3 + 3x^2) - 4x\right] dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + 3\left(\frac{x^3}{3}\right) - 4\left(\frac{x^2}{2}\right)\right]_{-4}^{0}$$

$$= 32$$

No intervalo $0 \leq x \leq 1$, a reta está acima da curva, portanto,

$$A_2 = \int_{0}^{1} \left[4x - (x^3 + 3x^2)\right] dx$$

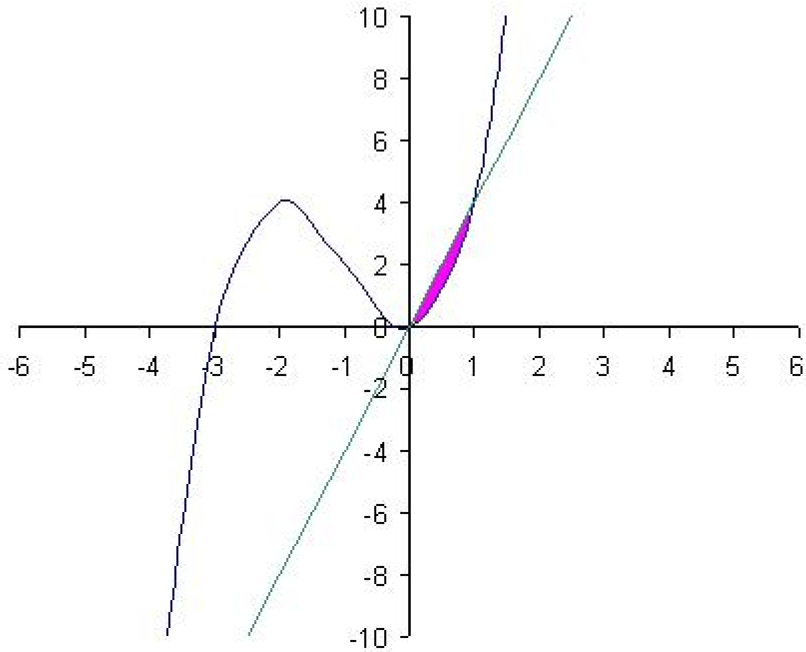
$$= \left[2x^2 - \frac{x^4}{4} - x^3\right]_{0}^{1}$$

$$= \left[2(1^2) - \frac{1^4}{4} - 1^3\right]$$

$$= \left[2 - \frac{1}{4} - 1\right]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{4}\right]$$

$$= \frac{3}{4}$$




A área total limitada pela reta e a curva é:

$$A = A_1 + A_2 = 32 + \frac{3}{4} = 32,75$$

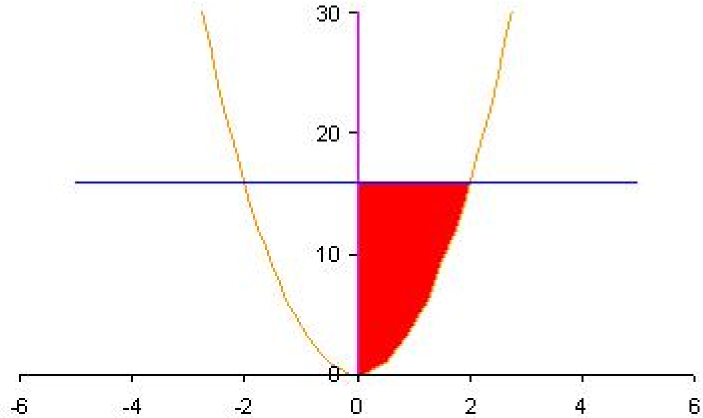
7. (1.5 ponto) ———————————————————————— Determine o volume do sólido de revolução gerado quando a região limitada pela partábola $y = 4x^2$, as linhas $x = 0$ e $y = 16$ é girada em torno do eixo $y$. Utilize o método dos discos, integrando ao longo do eixo $y$. Esboce o gráfico.

   Integral = 0,75 ponto;
   Gráfico = 0,75 ponto.
   Solução:

$$V = \pi \int_0^{16} x^2 dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy$$

$$= \frac{\pi}{8} \left[y^2\right]_0^{16}$$

$$= \frac{\pi}{8} (256)$$




$$= 32\pi$$