Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
Gabarito - AP2 - 1° semestre de 2006.

1ª Questão) Calcule as antiderivadas:

a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}\,dx = \int \frac{du}{3\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3} + C$

$$u = 1 + x^3$$
$$du = 3x^2 dx$$
$$\frac{du}{3} = x^2 dx$$

b) $\int x^{\frac{5}{3}}(1-x)^2\,dx = \int x^{\frac{5}{3}}\left(1-2x+x^2\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{8}{3}} + x^{\frac{11}{3}}\right)dx =$

$$= \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} - 2\frac{x^{\frac{11}{3}}}{\frac{11}{3}} + \frac{x^{\frac{14}{3}}}{\frac{14}{3}} + C = \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{3}} + \frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}} + C$$

c) $\int\left(\frac{x^4}{x^5-4}\right)dx = \int\frac{du}{5u} = \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln\left|x^5-4\right| + C$

$$u = x^5 - 4$$
$$du = 5x^4 dx$$
$$\frac{du}{5} = x^4 dx$$

d) $\int (2x+1)(x^2+3x)\,dx = \int\left(2x^3+6x^2+x^2+3x\right)dx = \int\left(2x^3+7x^2+3x\right)dx$

$$= 2\int x^3\,dx + 7\int x^2\,dx + 3\int x\,dx = 2\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^4}{2} + 7\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C$$

2ª Questão) Utilize as propriedades básicas de integral definida:

a) $\int_0^2 (x^2-2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \left(\frac{8}{3} - 4\right) - (0-0) = -\frac{4}{3}$

b) $\int_1^2 \left(5-3\sqrt{x}\right)\,dx = \left(5x-3\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=2} = \left(5x-2x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \left(10-2\sqrt{8}\right)-\left(5-2\right) = 10-3-2\sqrt{8}$

$= 7-2\sqrt{8} = 7-4\sqrt{2}$

c) $\int_{-1}^{1} [\,f(x)+3g(x)]\,dx =$

onde: $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$ e $\int_{-1}^{2} g(x)\,dx = -1$

$\int_{-1}^{1} [\,f(x)+3g(x)]\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + 3\int_{-1}^{1} g(x)\,dx = 2+3(-1) = 2-3 = -1$

3ª Questão) Usando a 1ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo, resolva:

a) $\int_0^3 (27-x^3)\,dx = \left(27x-\dfrac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=3} = \left(81-\dfrac{81}{4}\right)-\left(0-0\right) = \dfrac{324-81}{4} = \dfrac{243}{4}$

b) $\int_0^{\ln 2} 3\,e^x\,dx = 3e^x\Big|_{x=0}^{x=\ln 2} = 3\left(e^{\ln 2}-e^0\right) = 3\left(2-1\right) = 3$

c) $\int_1^5 \dfrac{4}{x}\,dx = 4\int_1^5 \dfrac{1}{x}\,dx = 4\left(\ln|x|\right)\Big|_{x=1}^{x=5} = 4\left(\ln 5-\ln 1\right) = 4\ln 5$

d) $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx = -\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_{x=-1}^{x=0} + \dfrac{x^2}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=1} =$

$= \left(0-\left(-\dfrac{(-1)^2}{2}\right)\right)+\left(\dfrac{1}{2}-0\right) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2} = 1$

4ª Questão) Esboce as regiões e calcule as áreas utilizando a metodologia indicada:

a) região limitada pelos gráficos das funções $y = x^2$ e $y = x+6$.

Calcule a área utilizando a técnica “área por fatiamento”

Solução:

O esboço da região mostra que o contorno inferior é $y = x^2$, o superior é $y = x + 6$. Nos extremos da região, os contornos têm as mesmas coordenadas y. Assim para encontrar os extremos, equacionamos a intersecção entre as curvas:

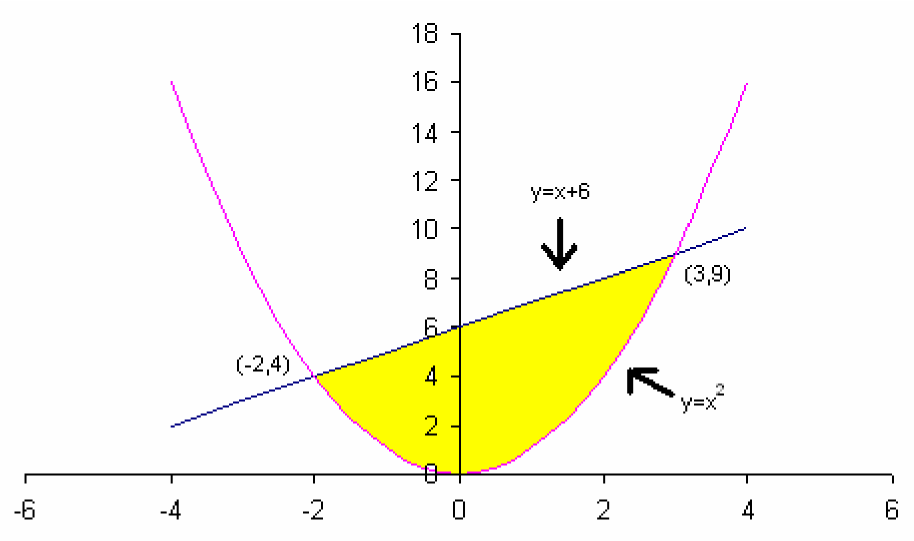
$y = x + 6$ e $y = x^2$

O que dá lugar a:

$x^2 = x + 6$ ou $x^2 - x - 6 = 0$ ou $(x+2)(x-3) = 0$

de onde obtém-se: $x = -2$ e $x = 3$

Substituindo-se estes valores na equação $y = x^2$ e na equação $y = x + 6$, tem-se que os valores correspondentes de y são $y = 4$ e $y = 9$. Assim sendo os pontos de intersecção superior e inferior dos contornos são $(-2, 4)$ e $(3, 9)$.



Aplicando a equação $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$, com $f(x) = x + 6$ e $g(x) = x^2$, $a = -2,\ b = 3$ obtém-se:

$$A = \int_{-2}^{3} \left[(x+6) - (x^2)\right] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3} = \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right) = \frac{125}{6}$$

5ª Questão) Utilize o método "volume dos discos" para calcular o volume do sólido gerado quando a região sob a curva $y = x$ em $[1,3]$ é girada em torno do eixo $\mathbf{x}$.

$$V = \int_a^b \pi [f(x)]^2\, dx = \int_1^3 \pi x^2 dx = \pi \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=3} = \pi\left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{26}{3}\pi$$