Matemática para Computação

Prof. Marco Antônio M. Silva Ramos
e
Prof. José Henrique Carneiro de Araujo

Introdução

Cálculo ou Matemática das Variações

Descoberta do Cálculo (séc. XVII):

- Isaac Newton (1642-1727), Inglaterra;
- Gottfried W. Leibniz (1646-1716), Alemanha.

Motivações:

- Reta tangente a uma curva;
- Área de uma região genérica;
- Máximos e mínimos;
- Deslocamento, velocidade e aceleração.

Aplicações modernas:

- Impressões digitais;
- Música;
- Ruídos em dados;
- Fluxo de ar em torno de automóveis ou aviões;
- Previsão do tempo.

Processos infinitos

Alguns processos não podem ser terminados após um número finito de passos.
Por exemplo:

$$\frac{1}{8} = 0{,}125 \qquad \text{e} \qquad \sqrt{2} = 1{,}41421356 2373\ldots\ldots$$

O primeiro tem representação decimal finita e o segundo infinita.
Pode-se melhorar quanto se deseja a aproximação para $\sqrt{2}$. Usando o seguinte Algoritmo:

$$y_0 = 1$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{2}{y_n}\right)$$

Que gera uma seqüência de aproximações para $\sqrt{2}$, $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots\ldots$
Entretanto o valor exato só seria obtido após a geração de infinitas aproximações.

Seqüência de aproximações para $\sqrt{2}$

n	$y_0 = 1, \quad y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(y_n + \dfrac{2}{y_n}\right)$	**Aproximação Decimal**
	$y_0 = 1$ (Valor inicial)	1,00000000000
0	$y_1 = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{2}{1}\right) = \dfrac{3}{2}$	1,50000000000
1	$y_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3/2}\right) = \dfrac{17}{12}$	1,41666666667
2	$y_3 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{17}{12} + \dfrac{2}{17/12}\right) = \dfrac{577}{408}$	1,41421568627
3	$y_4 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{577}{408} + \dfrac{2}{577/408}\right) = \dfrac{665.857}{470.832}$	1,41421356237
4	$y_5 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{665.857}{470.832} + \dfrac{2}{665.857/470.832}\right) = \dfrac{886.731.088.897}{627.013.566.048}$	1,41421356237

Funções de uma Variável

Em quase todo tipo de atividade humana, encontramos dois tipos de *variáveis*: aquelas as quais podemos controlar diretamente e as que não podemos.

Felizmente, as variáveis que não podemos controlar diretamente, respondem freqüentemente de alguma forma às que podemos. Por exemplo, a **aceleração de um carro** responde à forma pela qual controlamos o **fluxo de gasolina** para o motor, a **taxa de inflação** de uma economia responde à forma pela qual o governo controla a **oferta de dinheiro** e o **nível de um antibiótico** na corrente sanguínea de uma pessoa responde à **dosagem** e à escolha do **momento** oportuno de uma receita de um médico.

Ao entender quantitativamente como as variáveis as quais não podemos controlar diretamente respondem àquelas que podemos, é possível esperarmos por predições sobre nosso ambiente e ganhar algum domínio sobre ele.

Um dos temas importantes em Cálculo é a análise das relações entre as quantidades físicas ou matemáticas. Tais relações podem ser descritas em termos de gráficos, de fórmulas, de dados numéricos ou de palavras.

Nesta aula, vamos desenvolver o conceito de ***função de uma variável***, que é a idéia básica subjacente a quase todas relações matemáticas e físicas, não importando como elas são expressas.

Definição 1.1: Se uma variável y depende de uma variável x, de forma que cada valor de x determina exatamente um valor de y, então dizemos que y *é uma função* de x.

Exemplo 1.1

Denotando-se por x o raio de um círculo e por y a área desde círculo, então y depende de x de um modo bem definido, ou seja

$$y = \pi x^2$$

Por conseguinte, diz-se que a área de um círculo é função de seu raio.■

Notação e Terminologia Utilizadas no Contexto das Funções

1) As letras (minúsculas e maiúsculas) do alfabeto (latino e, também, do grego) são utilizadas para simbolizar as funções. As mais usadas, do alfabeto latino, são f, g, h (ou F, G, H).

2) Se f é uma função, representa-se o valor de y que corresponde a x como $f(x)$ (lê-se "f de x"), ou seja $y = f(x)$.

3) A equação $y = f(x)$ expressa y como função de x. A variável x é chamada *independente* (ou *argumento*) de f, e a variável y é chamada de variável *dependente* de f.

(Esta terminologia tem o propósito de sugerir que x está livre para variar, mais uma vez especificado o valor de x, um correspondente valor de y está determinado.)

4) Denomína-se *função real de uma variável real* ou *função de uma variável real a valores reais* as funções com um argumento nas quais as variáveis dependente e independente são números reais.

5) Se $y = f(x)$, então o conjunto de todos possíveis valores da variável x é chamado *domínio* de f, e o conjunto de todos possíveis valores de y (os quais resultam da variação de x no domínio de f) é chamado de *imagem* de f.

6) Se f é uma função real de uma variável real, então o *gráfico* de f no plano xy é definido como sendo o conjunto de pontos (x,y) do plano que verificam a equação $y = f(x)$.

Exemplo 1.2 – Domínio, imagem e gráfico de função

Considere a função real de uma variável real:

restrição

$$f(x) := \sqrt{x-1}, \quad \text{com} \quad x \le 2$$

Esboce o gráfico de f e determine seu domínio e imagem.

Solução:

domínio de f

$$\forall x \in D(f) \subset \mathbb{R}, \quad y = f(x) = \sqrt{x-1} \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x - 1 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x \ge 1.$$

Logo: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}, \quad 1 \le x \le 2\}$.

x	$f(x)$
1,00	0,0000
1,05	0,2236
1,10	0,3162
1,15	0,3873
1,20	0,4472
1,25	0,5000
1,30	0,5477
1,35	0,5916
1,40	0,6325
1,45	0,6708
1,50	0,7071
1,55	0,7416
1,60	0,7746
1,65	0,8062
1,70	0,8367
1,75	0,8660
1,80	0,8944
1,85	0,9220
1,90	0,9487
1,95	0,9747
2,00	1,0000

O gráfico de f é:

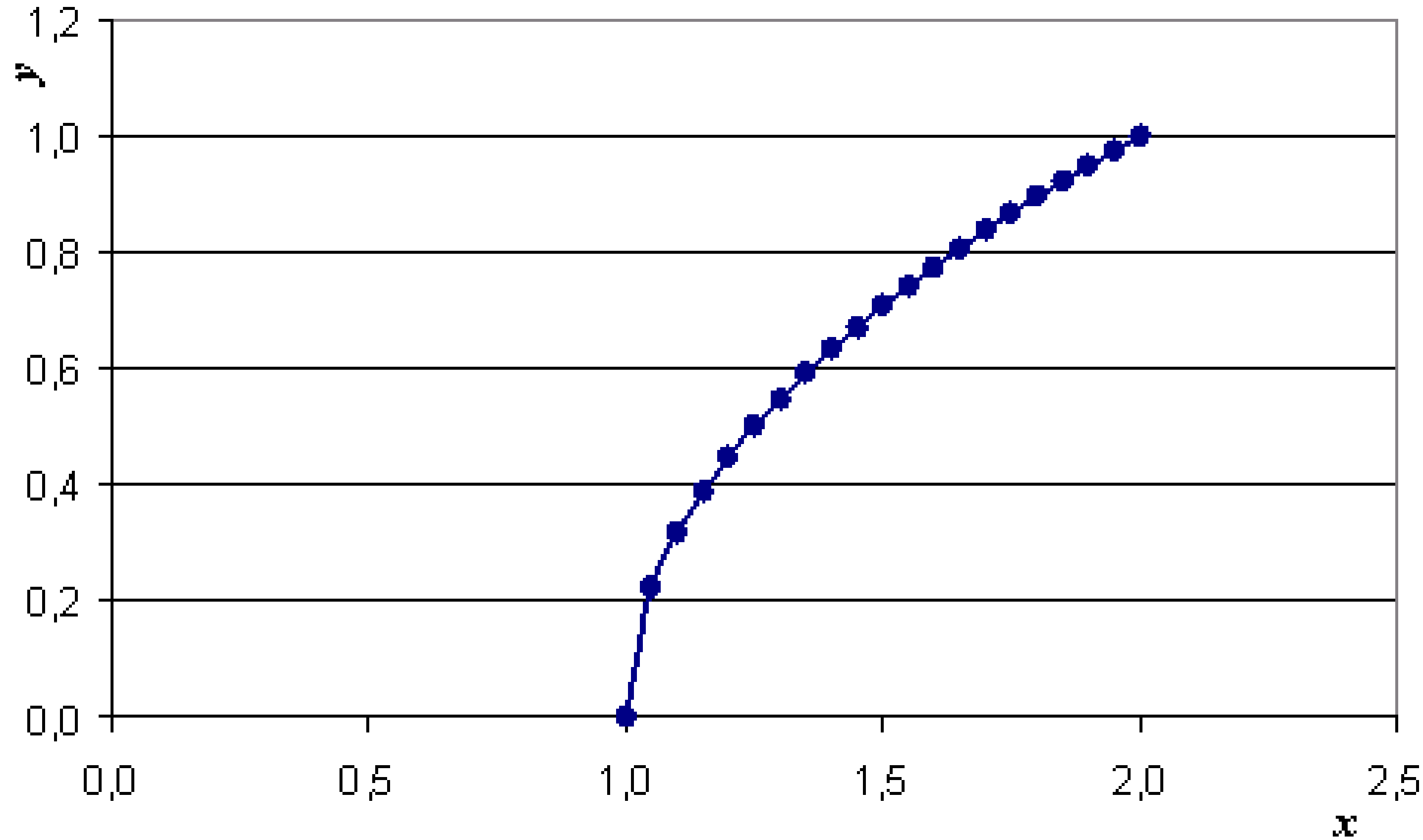


imagem de f

e portanto $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq y \leq 1\}$

Observação:

As funções reais de uma variável real

lei da função f

lei da função g

$$f(x) := \sqrt{x-1} \quad \text{com} \quad x \leq 2 \quad \text{e} \quad g(x) := \sqrt{x-1}$$

restrição do domínio da função f

são funções diferentes (mesmo tendo a mesma *lei* ou fórmula) pois os domínios são diferentes:

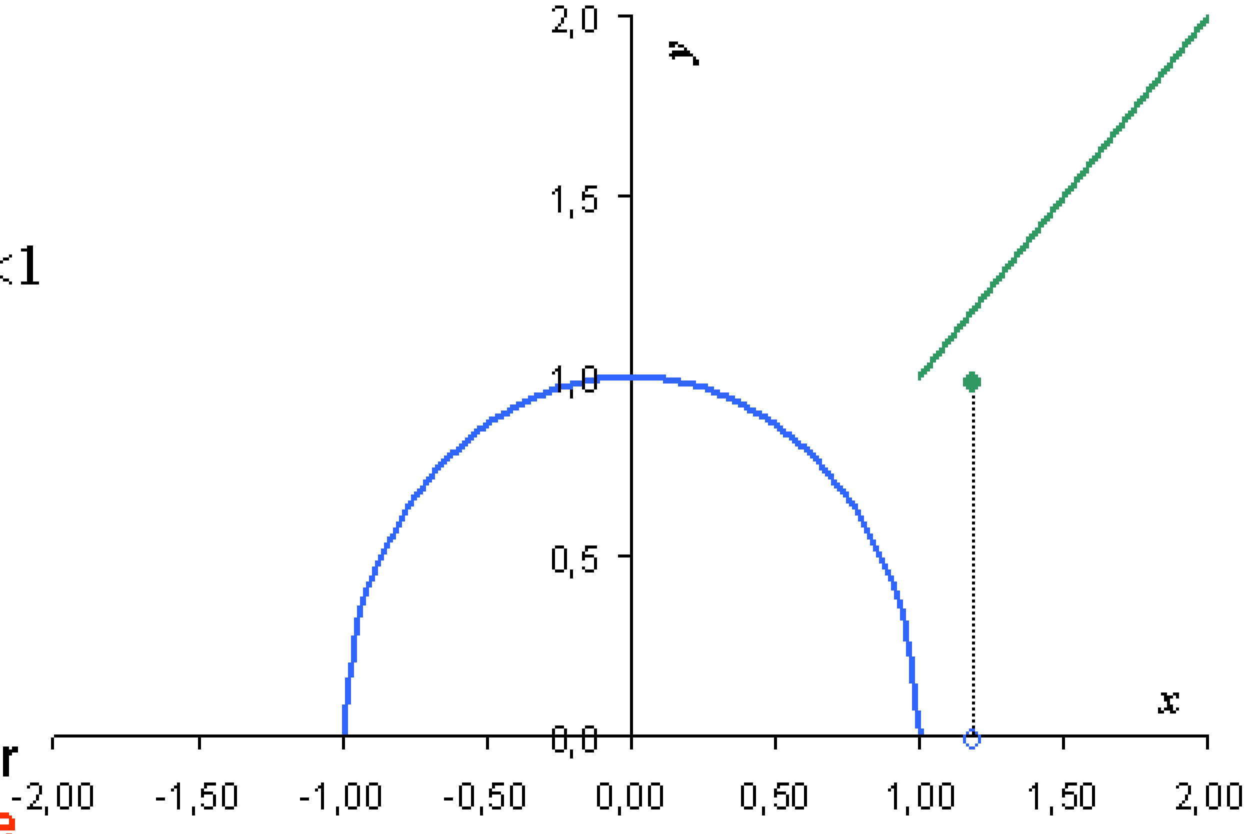
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq x \leq 2\} \quad \text{e} \quad D(g) = \{x \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq x\}$$

domínio *natural* de g

Para definirmos uma função além de especificarmos a lei (a qual relaciona a variável dependente com a independente) é necessário indicar, também, qual é o domínio (ou, alternativamente, a imagem).

Exemplo 1.3 – Função definida por partes

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ \sqrt{1-x^2}, & -1<x<1 \\ x, & x\ge 1 \end{cases}$$



A lei de f muda nos pontos x = -1 e x = 1 (pontos denominados, por alguns autores, *pontos de mudança*).

Exemplo 1.4 – O efeito de operações algébricas sobre o domínio

Considere uma função real de uma variável real f cuja lei é:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Logo, o domínio natural de f é: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 2\}$

Entretanto, fatorando o numerador e cancelando o fator comum ao numerador e ao denominador, obtemos a expressão

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x - 2} = x + 2$$

que está definida em $x = 2$, ou seja, a simplificação algébrica alterou o domínio natural da função !!

Álgebra de Funções

Definição 1.2: Sejam f e g duas funções reais de um variável real cujos domínios tem uma interseção não-vazia. As funções reais de uma variável real simbolizadas por $f+g$, $f-g$, fg e f/g são definidas pelas equações:

$$(f+g)(x):=f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x):=f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x):=f(x)g(x)$$

$$(f/g)(x):=f(x)/g(x)$$

Em cada caso, o domínio da função definida consiste de todos os valores de x da interseção dos domínios de f e g, exceto que para a função f/g os valores o para os quais $g(x)=0$ serão excluídos.

Exemplo 1.5 – Álgebra de funções

Considere as funções: $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = 2x - 1$

Determine a lei e o domínio das funções: $f+g$, $f-g$, fg e f/g.

Solução:

$$D(f) = D(g) = \mathbb{R}$$

1) $(f+g)(x) := f(x) + g(x) = (x^2+3) + (2x-1) = x^2 + 2x + 2$ e $D(f+g) = \mathbb{R}$

2) $(f-g)(x) := f(x) - g(x) = (x^2+3) - (2x-1) = x^2 - 2x + 4$ e $D(f-g) = \mathbb{R}$

3) $(fg)(x) := f(x)g(x) = (x^2+3)(2x-1) = 2x^3 - x^2 + 6x - 3$ e $D(fg) = \mathbb{R}$

4) $(f/g)(x) := f(x)/g(x) = \dfrac{x^2+3}{2x-1}$ e $D(f/g) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

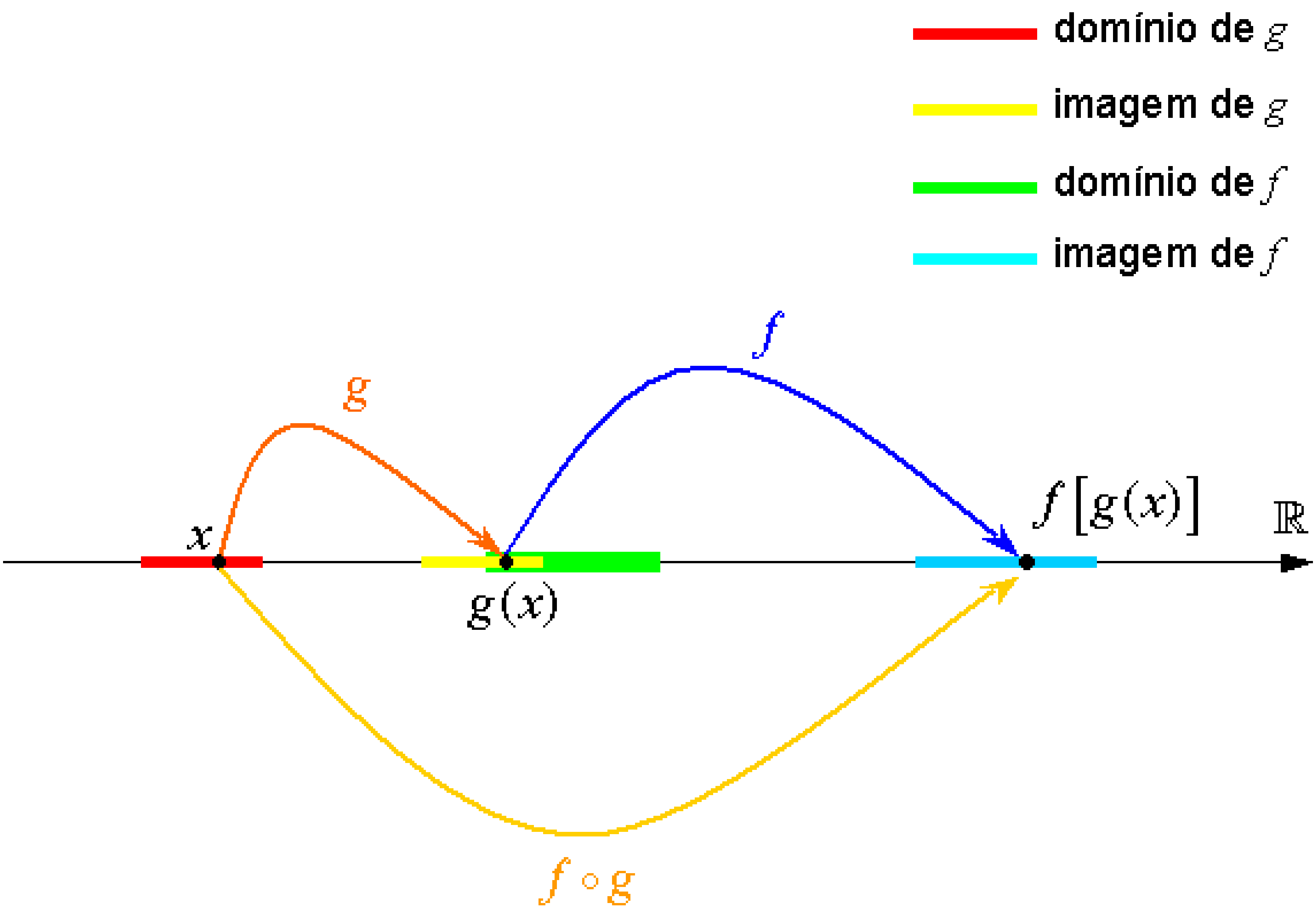
Composição de Funções

Definição 1.3: Sejam f e g duas funções reais de uma variável real. Se o conjunto constituído pelos números que pertencem a interseção da imagem de g com o domínio de f não é vazio, então a *composição* de f e g, simbolizada por $f \circ g$, é a função definida pela equação

$$(f \circ g)(x) := f\left[g(x)\right]$$

O domínio natural desta função é:

$$D(f \circ g) = \{x \in D(g) \text{ tal que } g(x) \in D(f)\}$$



domínio de g
imagem de g
domínio de f
imagem de f
g
f
x
$g(x)$
$f[g(x)]$
$\mathbb{R}$
$f \circ g$

Exemplo 1.6 – Composição de funções

Considere as funções: $f(x) = 3x - 1$ e $g(x) = x^3$.

Calcule a lei das funções $f \circ g$ e $g \circ f$.

Solução:

1) $(f \circ g)(x) := f[g(x)] = 3(x^3) - 1 = 3x^3 - 1$

2) $(g \circ f)(x) := g[f(x)] = (3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$

■

Obs:

Neste caso $D(f \circ g) = D(g \circ f) = \mathbb{R}$.

Funções Inversas

Definição 1.4: Sejam f e g duas funções reais de uma variável real. Se

i) a imagem de g está contida no domínio de f,

ii) para todo número real x no domínio de g, $(f \circ g)(x) = x$,

iii) a imagem de f está contida no domínio de g,

iv) para todo número real x no domínio de f, $(g \circ f)(x) = x$,

então f e g são denominadas *inversas*. Neste caso, f é dita *invertível* e g é denominada *sua inversa* (analogamente, g é dita invertível e sua inversa é f).

Obs:

Se f é uma função invertível sua inversa é simbolizada por f^{-1}.

Exemplo 1.7 – Funções inversas

Considere as funções: $f(x) = 3x$ e $g(x) = \frac{x}{3}$.

Mostre que f e g são inversas.

Solução:

Verifique graficamente que $\mathrm{Im}(g) = D(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Im}(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Logo as condições i e iii da Definição 1.4 são satisfeitas. Por outro lado,

$$(f \circ g)(x) := f[g(x)] = 3\left(\frac{x}{3}\right) = x \quad \text{e}$$

$$(g \circ f)(x) := g[f(x)] = \frac{(3x)}{3} = x$$

■

Método algébrico para determinar f^{-1}:

Passo 1: Escrever a equação $y = f(x)$ que define f.

Passo 2: Resolver a equação do Passo 1 para x em função de y para obter $x = f^{-1}(y)$. Esta equação define f^{-1}.

Passo 3: Troque x por y na equação obtida no passo 2. (opcional)

Exemplo 1.8 – Determinação de f^{-1}

Determine, pelo método algébrico, a inversa da função $f(x) = 2x + 1$.

Solução:

$$\overbrace{y = 2x+1}^{\text{Passo 1}} \Rightarrow \overbrace{2x = y-1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}}^{\text{Passo 2}}$$

Passo 3: $y = f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{2}$

■

Tipos de Funções Reais de uma Variável Real

1) Função *polinomial*

$$f(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + + a_n x^n$$

na qual n é um número natural e os coeficientes a_0, a_1, ...,a_n são números reais constantes. Se a_n é diferente de zero diz-se que a função polinomial é de *grau* n.

Obs: Funções polinomiais particulares

$f(x) = a_0 \rightarrow$ função constante,

$f(x) = a_0 + a_1 x \rightarrow$ função afim,

$f(x) = x \rightarrow$ função identidade.

2) Função *racional*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

na qual p e q são funções polinomiais e q não é uma função constante.

3) Função *algébrica elementar*

São funções cujas leis envolvem, apenas, um número finito das seguintes operações: adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação com índice inteiro positivo.

$$f(x) = \sqrt{x^3}, \quad g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{\sqrt{x^2+5}}}$$

3) Função *transcendente*

São aquelas funções que não são algébricas. Por exemplo as funções trigonométricas (sen, cos, tan, sec, csc, cot), as funções exponenciais, logarítmicas e hiperbólicas.