Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2014 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) —— **Questão anulada** ——

   Se $f(x) = 2^x$, mostre que

   (a) $$f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$$

   (b) $$\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$$

   Solução:

   (a) $$f(x+3) - f(x-1) = \frac{15}{2} f(x)$$

   substituindo $f(x) = 2^x$ no lado esquerdo da igualdade

   $$2^{(x+3)} - 2^{(x-1)} = 2^x(2^3 - 2^{-1}) = \left(8 - \frac{1}{2}\right) 2^x = \frac{15}{2} f(x)$$

   (b) $$\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = f(4)$$

   como no item anterior substituindo $f(x) = 2^x$ no lado esquerdo da igualdade

   $$\frac{f(x+3)}{f(x-1)} = \frac{e^{(x+3)}}{e^{(x-1)}} = \frac{e^x e^3}{e^x e^{-1}} = \frac{e^3}{e^{-1}} = e^4 = f(4)$$

2. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Determine o domínio das seguintes funções:

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

Solução:

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Para que a função possa ser avaliada devemos ter

$$4 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \leq 4 \Longrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Domínio de $f(x) = \{x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 2\}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

Para que a função possa ser avaliada devemos ter

$$x^2 - 16 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq 16 \Longrightarrow -4 \leq x \text{ ou } x \geq 4$$

Domínio de $f(x) = \{x \in \mathbb{R}, -4 \leq x \text{ ou } x \geq 4\}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

$$x - 2 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 2$$

Domínio de $f(x) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 2\}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

$$x^2 - 9 \neq 0 \Longrightarrow x^2 \neq 9 \Longrightarrow x \neq \pm 3$$

Domínio de $f(x) = \{x \in \mathbb{R}, x \neq -3 \text{ e } x \neq 3\}$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

$x^2 + 4 \neq 0 \Longrightarrow$ porém $x^2 + 4$ nunca se anula. Logo

Domínio de $f(x) = \{x \in \mathbb{R}\}$

3. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

(b) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

(c) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

(d) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{7}$$

(b) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2x+h = 2x$$

(c) $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} &= \lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} \cdot \frac{3+\sqrt{x^2+5}}{3+\sqrt{x^2+5}} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)\cdot(3+\sqrt{x^2+5})}{9-(x^2+5)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)\cdot(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2)} \\ &= \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5}) = 3+\sqrt{4+5} = 6\end{aligned}$$

(d) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)} = 4$$

4. (1,0 ponto)

Mostre que para qualquer função polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

vale

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Solução:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left[a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right]$$

$$= \lim_{x \to a} [a_n x^n] + \lim_{x \to a} \left[a_{n-1} x^{n-1}\right] + \cdots + \lim_{x \to a} [a_1 x] + \lim_{x \to a} [a_0]$$

$$= a_n \lim_{x \to a} [x^n] + a_{n-1} \lim_{x \to a} \left[x^{n-1}\right] + \cdots + a_1 \lim_{x \to a} [x] + \lim_{x \to a} [a_0]$$

$$= a_n [a^n] + a_{n-1} \left[a^{n-1}\right] + \cdots + a_1 [a] + [a_0]$$

$$= a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_1 a + a_0$$

$$= f(a)$$

5. (1,5 pontos) ———

Mostre que toda função polinomial

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

é contínua em toda a reta dos reais.

Solução:

Do item anterior vimos que o limite de uma função polinomial existe em qualquer ponto da reta real e seu valor coincide com o valor do polinômio neste ponto. Logo a função polinomial é contínua em toda a reta real.

6. (1,0 ponto) ———

Mostre que quando o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe, a função $f(x)$ é contínua em a.

Solução:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h\right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right] \cdot \lim_{h \to 0} [h] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right] \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

mas

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0} f(a+h) - \lim_{h\to 0} f(a)$$

$$= \lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a)$$

portanto

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

e observe que

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = \lim_{x\to a} f(x)$$

e

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Logo a existência do limite garante a continuidade no ponto.

7. (1,0 ponto) ———————————————————————

Ache as seguintes derivadas,

(a) $f'(x)$ onde $f(x) = 5x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 100$

(b) $f'(x)$ onde $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(c) $f''(x)$ onde $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

(d) $f''(x)$ onde $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Solução:

(a) $f'(x) = 25x^4 - 16x^3 + 9x^2 - 4x + 1$

(b) $f'(x) = \left[(x-2)^{-1}\right]' = (-1)(x-2)^{-2} = -\dfrac{1}{(x-2)^2}$

(c) Do item anterior

$$f''(x) = \left[-\frac{1}{(x-2)^2}\right]' = \left[-(x-2)^{-2}\right]' = -(-2)(x-2)^{-3}$$

$$= \frac{2}{(x-2)^3}$$

(d) $$f'(x) = \left[\sqrt[3]{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}x^{\left(\frac{1}{3}-1\right)} = \frac{1}{3}x^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{3x^{\left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left[\frac{1}{3}x^{\left(-\frac{2}{3}\right)}\right]' = \frac{1}{3}\left[x^{\left(-\frac{2}{3}\right)}\right]' = \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left[x^{\left(-\frac{2}{3}-1\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left[x^{\left(-\frac{2}{3}-1\right)}\right] = -\frac{2}{6}\left[x^{\left(-\frac{5}{3}\right)}\right] = -\frac{2}{6x^{\left(\frac{5}{3}\right)}}$$

$$= -\frac{2}{6\sqrt[3]{x^5}}$$

8. (1,5 pontos) ———

Para as funções deriváveis f e g, demonstre as seguintes regras de derivação:

(a) $$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

(b) $$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$$

(c) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g - f \cdot \frac{dg}{dx}}{g^2}$$

Solução:

(a) $$\frac{d}{dx}(f+g) = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)] - [f(x)+g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)] + [g(x+h))-g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h))-g(x)]}{h}$$

$$= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$$

(b) $$\frac{d}{dx}(f \cdot g) = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h)] - [f(x)\cdot g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h) - g(x)\cdot f(x+h)] + [g(x)\cdot f(x+h) - f(x)\cdot g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\cdot g(x+h) - g(x)\cdot f(x+h)]}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{[g(x)\cdot f(x+h) - f(x)\cdot g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{f(x+h)\cdot\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}\right\} + \lim_{h\to 0}\left\{g(x)\cdot\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]}{h}$$

$$= f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{[g(x+h) - g(x)]}{h} + g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]}{h}$$

$$= \frac{df}{dx} \cdot g + f \cdot \frac{dg}{dx}$$

(c) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)}\right] - \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{f(x+h)g(x)}{g(x+h)g(x)}\right] - \left[\frac{f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{g(x+h)g(x)}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)g(x) - f(x)g(x)] - [f(x)g(x+h) - f(x)g(x)]}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)\,[f(x+h) - f(x)] - f(x)\,[g(x+h) - g(x)]}{hg(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - f(x)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{h \to 0}\left\{g(x)\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]\right\} - \lim_{h \to 0}\left\{f(x)\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\right\}}{\lim_{h \to 0} g(x+h)g(x)}$$

$$= \frac{g(x)\lim_{h \to 0}\left\{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right]\right\} - f(x)\lim_{h \to 0}\left\{\left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]\right\}}{g(x)\lim_{h \to 0} g(x+h)}$$

$$= \frac{g(x)\frac{df(x)}{dx} - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{[g(x)]^2}$$

9. (1,0 ponto) ————————————————————

Diferencie

(a) $y = 2x^{1/2} + 6x^{1/3} - 2x^{3/2}$

(b) $y = \dfrac{2}{x^{1/2}} + \dfrac{6}{x^{1/3}} + \dfrac{2}{x^{3/2}} + \dfrac{4}{x^{3/4}}$

(c) $y = \sqrt[3]{3x^2}$

(d) $y = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$

Solução:

(a)
$$\begin{aligned} y' &= 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{(1/2-1)} + 6\left(\frac{1}{3}\right)x^{(1/3-1)} - 2\left(\frac{3}{2}\right)x^{(3/2-1)} \\ &= x^{(-1/2)} + 2x^{(-2/3)} - 3x^{(1/2)} \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} y' &= \left[2x^{-1/2} + 6x^{-1/3} + 2x^{-3/2} + 4x^{-3/4}\right]' \\ &= \left[2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{(-1/2-1)} + 6\left(-\frac{1}{3}\right)x^{(-1/3-1)} + 2\left(-\frac{3}{2}\right)x^{(-3/2-1)} + 4\left(-\frac{3}{4}\right)x^{(-3/4-1)}\right] \\ &= \left[-x^{(-3/2)} - 2x^{(-4/3)} - 3x^{(-5/2)} - 3x^{(-7/4)}\right] \\ &= -\left[\frac{1}{x^{(3/2)}} + \frac{2}{x^{(4/3)}} + \frac{3}{x^{(5/2)}} + \frac{3}{x^{(7/4)}}\right] \\ &= -\left[\frac{1}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{3}{\sqrt{x^5}} + \frac{3}{\sqrt[4]{x^7}}\right] \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} y' &= \left[\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{x^2}\right]' = \left[\sqrt[3]{3}\left(x^{2/3}\right)\right]' = \sqrt[3]{3}\left[x^{2/3}\right]' = \sqrt[3]{3}\left(\frac{2}{3}\right)x^{2/3-1} \\ &= \left(\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}\right)x^{-1/3} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3x^{1/3}} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{3}{x}} \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} y' &= \left[(x^2+4)^2(2x^3-1)^3\right]' \\ &= \left[(x^2+4)^2\right]'\left[(2x^3-1)^3\right] + \left[(x^2+4)^2\right]\left[(2x^3-1)^3\right]' \\ &= \left[2(x^2+4)^1(2x)\right]\left[(2x^3-1)^3\right] + \left[(x^2+4)^2\right]\left[3(2x^3-1)^2(6x^2)\right] \\ &= \left[4x(x^2+4)(2x^3-1)^3\right] + \left[18x^2(x^2+4)^2(2x^3-1)^2\right] \\ &= \left[4x(x^2+4)(2x^3-1)^3 + 18x^2(x^2+4)^2(2x^3-1)^2\right] \\ &= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2\left[2(2x^3-1) + 9x(x^2+4)\right] \\ &= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2\left[4x^3 - 2 + 9x^3 + 36\right] \\ &= 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+34) \end{aligned}$$