Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 1^o semestre de 2011 - Gabarito

Questões

1. (2,0 pontos)

   Dada a função $y = x^{\frac{1}{3}}$, verifique onde a função é crescente e decrescente, obtenha os pontos de máximo, mínimo e os pontos de inflexão, caso existam.

   Solução:

   Intervalos onde a função é crescente e decrescente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

   $\frac{dy}{dx}$ é descontínua em $x = 0$. Se $x < 0$ então $\frac{dy}{dx} > 0$ e se $x > 0$ então $\frac{dy}{dx} > 0$.

   Logo a função é crescente para qualquer valor de $x \neq 0$.

   Pontos de máximo e mínimo:

   Não existe máximo nem mínimo pois $f(x)$ é sempre crescente para todo x.

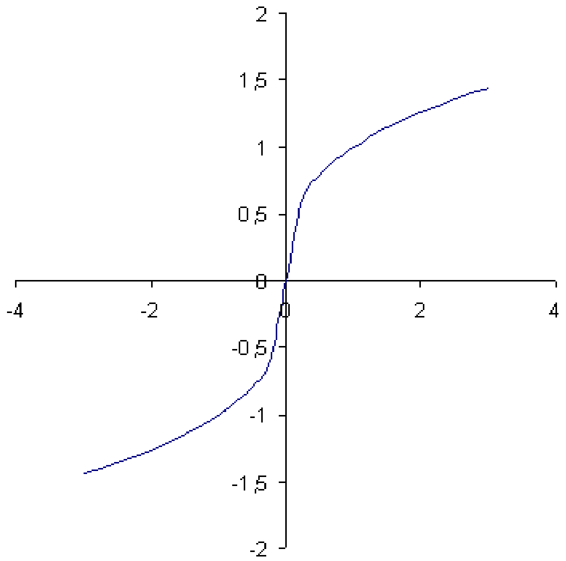
   Pontos de inflexão:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-5/3} = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{x^{5/3}} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ é descontínua em $x = 0$, porém, para $x < 0$ temos $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$ logo a função tem concavidade para cima e para $x > 0$ temos $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$ logo a função tem concavidade para baixo. Logo existe uma mudança de concavidade em $x = 0$.

Gráfico: $y = x^{\frac{1}{3}}$



2. (2,0 pontos)

Calcule as integrais abaixo por substituição:

(a) (1,0 ponto)

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx$$

(b) (1,0 ponto)

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx$$

Solução

(a)

$$\int_0^1 x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx$$

Com $u = 7 - 6x^2$, temos $du = -12x\,dx$, e

para $x = 0 \longrightarrow u = 7$

para $x = 1 \longrightarrow u = 1$

Substituindo na integral

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx &= -\frac{1}{12}\int \sqrt[3]{7-6x^2}(-12)x\,dx &&= -\frac{1}{12}\int \sqrt[3]{u}\,du \\
&= -\frac{1}{12}\int u^{1/3}\,du &&= -\frac{1}{12}\frac{u^{4/3}}{(4/3)}+C \\
&= -\frac{1}{16}(7-6x^2)^{4/3}+C
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x\sqrt[3]{7-6x^2}\,dx &= \left[-\frac{1}{16}(7-6x^2)^{4/3}\right]_0^1 \\
&= \left[-\frac{1}{16}(7-6\cdot 1^2)^{4/3}\right]-\left[-\frac{1}{16}(7-6\cdot 0^2)^{4/3}\right] \\
&= \left[-\frac{1}{16}(1)^{4/3}\right]-\left[-\frac{1}{16}(7)^{4/3}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-1+7^{4/3}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[7^{4/3}-1\right] \\
&= \frac{7^{4/3}-1}{16}
\end{aligned}$$

(b)

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx$$

Com $u = 5x-1$, temos $du = 5\,dx$ e
para $x = 2 \longrightarrow u = 9$
para $x = 10 \longrightarrow u = 49$
Substituindo na integral

$$\begin{aligned}
\int \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx &= 3\int \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\,dx &&= \frac{3}{5}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du \\
&= \frac{3}{5}\int u^{-1/2}\,du &&= \frac{3}{5}\cdot 2u^{1/2}+C \\
&= \frac{6}{5}u^{1/2}+C
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx &= \left[\frac{6}{5}u^{1/2}\right]_9^{49} &&= \left[\frac{6}{5}49^{1/2}\right] - \left[\frac{6}{5}9^{1/2}\right] \\
&= \left[\frac{6}{5}7\right] - \left[\frac{6}{5}3\right] &&= \frac{6}{5}\left[7-3\right] \\
&= \frac{6}{5}\cdot 4 &&= \frac{24}{5}
\end{aligned}$$

3. (2,0 pontos)

Usando integrais calcular a área da região limitada pelos gráficos de

$$\begin{cases} y - x &= 0 \\ y - x^2 &= 0 \qquad \text{para } \; x \in \left[\frac{1}{4}, 1\right] \\ y + x &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solução:
Em $x = \dfrac{1}{4}$

$$\begin{cases} y - x &= 0 \longrightarrow x = 1/4 \longrightarrow y = 1/4 \\ y - x^2 &= 0 \longrightarrow x = 1/4 \longrightarrow y = 1/16 \\ y + x &= \frac{1}{2} \longrightarrow x = 1/4 \longrightarrow y = 1/4 \end{cases}$$

Logo a região de interesse é limitada pelos três gráficos e suas intersecções

$$\begin{cases} y - x = 0 \quad \text{e} \quad y + x = \frac{1}{2} \\ y - x^2 = 0 \quad \text{e} \quad y + x = \frac{1}{2} \\ y + x = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad y - x^2 = 0 \end{cases}$$

como mostra o gráfico adiante.

Estas intersecções ocorrem nos seguintes pontos

Primeira intersecção: Entre $y - x = 0$ e $y + x = \frac{1}{2}$.

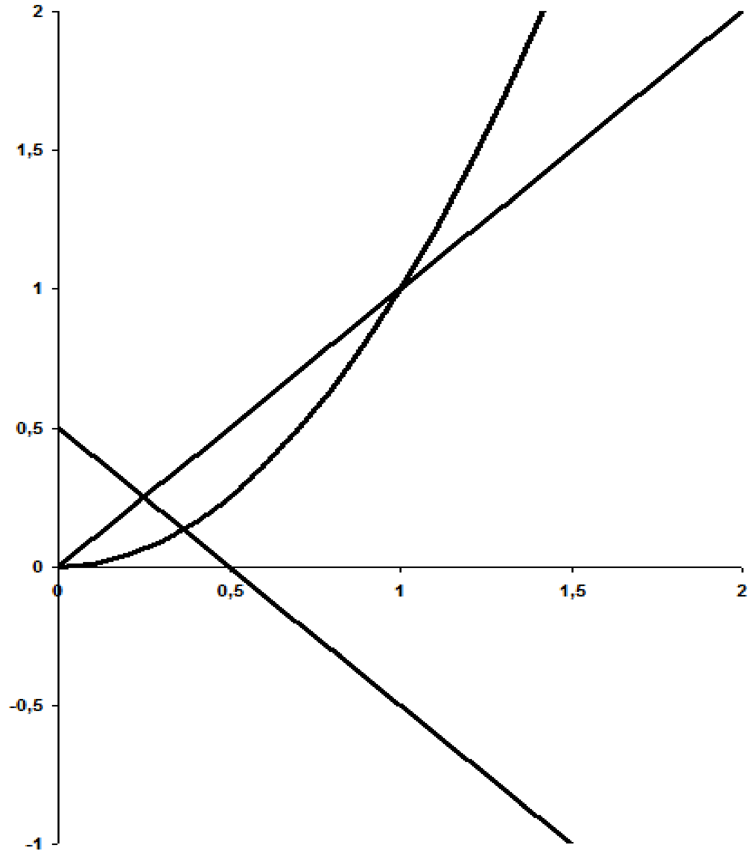
$$\begin{cases} y - x &= 0 \longrightarrow x = 1/4 \longrightarrow y = 1/4 \\ y + x &= \frac{1}{2} \longrightarrow x = 1/4 \longrightarrow y = 1/4 \end{cases}$$

Ocorre em $x = 1/4$.

Segunda intersecção: Entre $y - x = 0$ e $y - x^2 = 0$.

$$\begin{cases} y - x &= 0 \\ y - x^2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow x = x^2 \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

A intersecção que nos interessa ocorre em $x = 1$.



Terceira intersecção: Entre $y + x = \frac{1}{2}$ e $y - x^2 = 0$.

$$\begin{cases} y + x &= \frac{1}{2} \\ y - x^2 &= 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

A intersecção que nos interessa é a positiva e ocorre em $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
Podemos agora decompor a integral no intervalo $(1/4, 1)$ em duas integrais, uma no intervalo $(1/4, \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ e outra no intervalo $(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, 1)$. Finalmente a integral pode ser escrita da seguinte forma,

$$\int_{1/4}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \left\{[x] - \left[\frac{1}{2} - x\right]\right\} dx + \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \left\{[x] - \left[x^2\right]\right\} dx =$$

$$= \int_{1/4}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \left\{x - \frac{1}{2} + x\right\} dx + \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \left\{x - x^2\right\} dx$$

$$= \int_{1/4}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} \left\{2x - \frac{1}{2}\right\} dx + \int_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1} \left\{x - x^2\right\} dx$$

$$= \left[2\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}x\right]_{1/4}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2x^2 - x\right]_{1/4}^{\frac{\sqrt{3}-1}{2}} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2} - 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) - \frac{2}{16} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-1\right)^3\right]$$

$$= \frac{2}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) - \frac{2}{32} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-1\right)^3$$

$$= \frac{2}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) + \frac{11}{48} - \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-1\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) + \frac{11}{48} + \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-1\right)^3$$

$$= \frac{1}{24}\left(\sqrt{3}-1\right)^3 + \frac{1}{8}\left(\sqrt{3}-1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right) + \frac{11}{48}$$

4. (2,0 pontos)

Ache as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = \ln(x^4 + 7x)$

(b) $f(x) = x^2 e^x$

Solução:

(a) $$f(x) = \ln(x^4 + 7x) \Longrightarrow f'(x) = \Big(\ln(x^4 + 7x)\Big)' = \frac{1}{(x^4 + 7x)}\Big(x^4 + 7x\Big)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^4 + 7x)}\Big(4x^3 + 7\Big) = \frac{4x^3 + 7}{x^4 + 7x}$$

(b) $$f(x) = x^2 e^x \Longrightarrow f'(x) = \Big(x^2\Big)' e^x + x^2\left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$$

5. (2,0 pontos)

Ache o volume do sólido obtido por revolução em torno do eixo y da região limitada pela parábola $y = 4x^2$ e as linhas $x = 0$ e $y = 16$.

Solução:

Usando a Técnica de Volume por Discos e considerando V o volume do sólido,

$$V = \pi \int_0^{16} x^2 dy = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \pi \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{2}\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8} \left[y^2\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8} \left[16^2 - 0^2\right] = \frac{\pi}{8} [256]$$

$$= 32\pi$$

O gráfico a seguir ilustra a região rotada em torno do eixo y.