Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 2^o semestre de 2017 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) ————————————————————————————————

Seja $f(x) = (x^2 - 2x + 3)/(x + 3)$. Encontre o domínio e a imagem de $f(x)$, e calcule, $f(3)$, $f(-3)$, $f(-x)$, $f(x+2)$, $f(x-2)$, $f(x+h)$, $f(x+h) - f(x)$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{f(x)}$.

Solução:

Claramente $f(x)$ está definida para toda a reta dos reais, exceto no ponto $x = -3$ logo,

$$\text{Domínio de } f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$$

para verificar a imagem vejamos a vizinhança em torno de $x = -3$,

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3} = +\infty$$

e os extremos do domínio $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3} = +\infty$$

logo

$$\text{Imagem de } f(x) = \{\mathbb{R}\}$$

Calculemos agora os valores da função

$$f(3) = \frac{(3)^2 - 2(3) + 3}{(3) + 3} = \frac{9 - 6 + 3}{6} = 1$$

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - 2(-3) + 3}{(-3) + 3} = \frac{9 + 6 + 3}{0} = \frac{18}{0} \to \nexists \to \text{a função não está definida}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2(-x) + 3}{(-x) + 3} = \frac{x^2 + 2x + 3}{3 - x}$$

$$f(x+2) = \frac{(x+2)^2 - 2(x+2) + 3}{(x+2) + 3} = \frac{(x^2 + 4x + 4) - 2x - 4 + 3}{x + 2 + 3}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 5}$$

$$f(x-2) = \frac{(x-2)^2 - 2(x-2) + 3}{(x-2) + 3} = \frac{(x^2 - 4x + 4) - 2x + 4 + 3}{x - 2 + 3}$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 11}{x + 1}$$

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) + 3}{(x+h) + 3} = \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h + 3}{x - h + 3}$$

$$= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 3}{x - h + 3}$$

$$f(x+h) - f(x) = \left[\frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 3}{x - h + 3}\right] - \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 3}\right]$$

$$= \left[(x+3) \cdot \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 3}{(x+3)(x-h+3)}\right] - (x - h + 3) \cdot \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{(x+3)(x-h+3)}\right]$$

$$= \left[\frac{x^3 + 2x^2h + h^2x - 2x^2 - 2xh + 3x + 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 6x - 6h + 9}{(x+3)(x-h+3)}\right]$$

$$- \left[\frac{x^3 - 2x^2 + 3x - x^2h + 2xh - 3h + 3x^2 - 6x + 9}{(x+3)(x-h+3)}\right] =$$

$$= \left[\frac{x^3 + 2x^2h + h^2x + x^2 + 4xh + 3h^2 - 3x - 6h + 9}{(x+3)(x-h+3)}\right]$$

$$+ \left[\frac{-x^3 + 2x^2 - 3x + x^2h - 2xh + 3h - 3x^2 + 6x - 9}{(x+3)(x-h+3)}\right] =$$

$$= \left[\frac{x^2h + h^2x + 2xh + 3h^2 - 3h}{(x+3)(x-h+3)}\right]$$

$$= h\left[\frac{x^2 + hx + 2x + 3h - 3}{(x+3)(x-h+3)}\right]$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = h\left[\frac{x^2 + hx + 2x + 3h - 3}{(x+3)(x-h+3)}\right]\left[\frac{(x+3)}{(x^2 - 2x + 3)}\right]$$

$$= h\left[\frac{x^2 + hx + 2x + 3h - 3}{(x-h+3)(x^2 - 2x + 3)}\right]$$

2. (1,5 pontos)

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{5x+4}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{5x+4}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+2x-1}{5x^3-6x+4}$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+2x-1}{5x^3-6x+4}$$

(e) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^7}{x^3+1}$$

(f) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^7}{x^3+1}$$

(g) $$\lim_{x\to+\infty} (4x^4-7x^3-5x+5)$$

(h) $$\lim_{x\to-\infty} (4x^4-7x^3-5x+5)$$

(i) $$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{(x-3)^5}$$

(j) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+6}$$

(k) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x-1}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{5x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x/x-2/x}{5x/x+4/x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2-2/x}{5+4/x} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{5x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x/x-2/x}{5x/x+4/x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-2/x}{5+4/x} = \frac{2-0}{5+0} = \frac{2}{5}$$

(c) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+2x-1}{5x^3-6x+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}} =$$

$$= \frac{2+0-0}{5-0+0} = \frac{2}{5}$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3+2x-1}{5x^3-6x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}-\frac{6x}{x^3}+\frac{4}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{5-\frac{6}{x^2}+\frac{4}{x^3}} =$$

$$= \frac{2+0-0}{5-0+0} = \frac{2}{5}$$

(e) $$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^7}{x^3+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^7/x^7}{x^3/x^7+1/x^7}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1/x^4+1/x^7}=\frac{2}{0+0^-}=-\infty$$

(f) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^7}{x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^7/x^7}{x^3/x^7+1/x^7}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1/x^4+1/x^7}=\frac{2}{0+0^+}=+\infty$$

(g) $$\lim_{x\to+\infty}(4x^4-7x^3-5x+5)=+\infty$$

(h) $$\lim_{x\to-\infty}(4x^4-7x^3-5x+5)=+\infty$$

(i) $$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-3)^5}=\frac{1}{(-1)^5}=-1$$

(j) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x/x}{x/x+6/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+6/x}=\frac{1}{1+0}=1$$

(k) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=-\infty$$

3. (1,0 ponto) ———

Avalie os limites:

(a) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}; \qquad \text{onde } f(x)=x^5-3x^4+5x^2-3x+1$$

(b) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}; \qquad \text{onde } f(x)=\sqrt{7x+2}\,,\quad x>-\frac{2}{7}$$

Solução:

(a) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}; \qquad \text{onde } f(x)=x^5-3x^4+5x^2-3x+1$$

$$f(x+h)=(x+h)^5-3(x+h)^4+5(x+h)^2-3(x+h)+1$$

e

$$f(x)=x^5-3x^4+5x^2-3x+1$$

logo

$$\begin{aligned} f(x+h)=(x+h)^5-3(x+h)^4+5(x+h)^2-3(x+h)+1 &= \\ \left(x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^3+h^5\right) &- \\ 3\left(x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4\right) &+ \\ 5\left(x^2+2xh+h^2\right) &- \\ 3\,(x+h) &+ \\ 1 &= \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^3 + h^5 \\
&- 3x^4 - 12x^3h - 18x^2h^2 - 12xh^3 - 3h^4 \\
&+ 5x^2 + 10xh + 5h^2 \\
&- 3x - 3h \\
&+ 1
\end{aligned}
$$

com

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^2 - 3x + 1$$

resulta

$$
\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) = &\, x^5 + 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^3 + h^5 \\
&- 3x^4 - 12x^3h - 18x^2h^2 - 12xh^3 - 3h^4 \\
&+ 5x^2 + 10xh + 5h^2 \\
&- 3x - 3h \\
&+ 1 \\
&- x^5 + 3x^4 - 5x^2 + 3x - 1 \\
f(x+h) - f(x) = &\, 5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^3 + h^5 \\
&- 12x^3h - 18x^2h^2 - 12xh^3 - 3h^4 \\
&+ 10xh + 5h^2 - 3h
\end{aligned}
$$

$$f(x+h) - f(x) =$$
$$5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^3 + h^5 - 12x^3h - 18x^2h^2 - 12xh^3 - 3h^4 + 10xh + 5h^2 - 3h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$\frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^3 + h^5 - 12x^3h - 18x^2h^2 - 12xh^3 - 3h^4 + 10xh + 5h^2 - 3h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{5x^4h + 10x^3h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^3 + h^5 - 12x^3h - 18x^2h^2 - 12xh^3 - 3h^4 + 10xh + 5h^2 - 3h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{5x^4h - 12x^3h + 10xh - 3h + 10x^3h^2 - 18x^2h^2 + 5h^2 + 10x^2h^3 + 5xh^3 - 12xh^3 - 3h^4 + h^5}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h(5x^4 - 12x^3 + 10x - 3) + h^2(10x^3 - 18x^2 + 5) + h^3(10x^2 + 5x - 12x) - 3h^4 + h^5}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \ (5x^4 - 12x^3 + 10x - 3) + h(10x^3 - 18x^2 + 5) + h^2(10x^2 + 5x - 12x) - 3h^3 + h^4 =$$

$$= (5x^4 - 12x^3 + 10x - 3) + 0 + 0 - 3 \cdot 0 + 0 =$$

$$= (5x^4 - 12x^3 + 10x - 3)$$

(b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$; onde $f(x) = \sqrt{7x+2}\,,\;\; x > -\dfrac{2}{7}$

$$f(x+h) = \sqrt{7(x+h)+2} \qquad \text{e} \qquad f(x) = \sqrt{7x+2}$$

logo

$$f(x+h) - f(x) = \sqrt{7x+7h+2} - \sqrt{7x+2}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{7x+7h+2} - \sqrt{7x+2}}{h}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{7x+7h+2} - \sqrt{7x+2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{7x+7h+2} + \sqrt{7x+2}}{\sqrt{7x+7h+2} + \sqrt{7x+2}}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(7x+7h+2)-(7x+2)}{h(\sqrt{7x+7h+2} + \sqrt{7x+2})}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{7h}{h(\sqrt{7x+7h+2} + \sqrt{7x+2})}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{7}{\sqrt{7x+7h+2} + \sqrt{7x+2}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{7}{\sqrt{7x+7h+2} + \sqrt{7x+2}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{7}{2\sqrt{7x+2}}$$

4. (1,5 pontos) ______________________________

Estude a continuidade das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}$

(b) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde, $p(x)$ e $q(x)$ são polinomiais com $q(x) \neq 0$

Solução:

(a) $f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x^n = \left[\lim_{x\to a} x\right]^n = [a]^n = a^n = f(a)$$

Portanto $f(x) = x^n$ é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde, $p(x)$ e $q(x)$ são polinomiais com $q(x) \neq 0$

Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios $p(x)/q(x)$ está definida em todos os pontos da reta real, exceto aqueles aonde $q(x)$ se anula. Estes pontos não pertencem ao domínio de $p(x)/q(x)$. Assim, para todo ponto a em que $q(a) \neq 0$ temos $f(x)$ definida para todo intervalo aberto contendo a. Como neste caso $q(x)$ não se anula, $f(x)$ está definida em toda a reta real. E além disso,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$$

logo $f(x)$ é contínua em toda a reta real.

5. (1,0 ponto) ————————————————————————————

Calcule as derivadas a seguir usando sua definição:

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $$f(x) = 5x^5 - 2x^2 - 4$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{3x-3}$$

(c) $$f(x) = \frac{2x-3}{4x+5}$$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
f(x) &= 5x^5 - 2x^2 - 4 \\
\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{(5(x^5+5x^4h+10x^3h^2+10x^2h^3+5xh^3+h^5)-2(x^2+2xh+h^2)-4)-(5x^5-2x^2-4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5x^5+25x^4h+50x^3h^2+50x^2h^3+25xh^3+5h^5-2x^2-4xh-2h^2-4-5x^5+2x^2+4}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{25x^4h-4xh+50x^3h^2-2h^2+50x^2h^3+25xh^3+5h^5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(25x^4-4x)+h^2(50x^3-2)+h^3(50x^2+25x)+5h^5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \ (25x^4-4x)+h(50x^3-2)+h^2(50x^2+25x)+5h^4 \\
&= \ (25x^4-4x)+0+0+0 \\
&= \ 25x^4-4x
\end{aligned}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3x-3} \\
\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{3x+3h-3} - \frac{1}{3x-3}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(3x-3)-(3x+3h-3)}{(3x+3h-3)(3x-3)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{3x-3-3x-3h+3)}{(3x+3h-3)(3x-3)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{-3h}{(3x+3h-3)(3x-3)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{3}{(3x+3h-3)(3x-3)} \\
&= -\frac{3}{(3x+0-3)(3x-3)} = -\frac{3}{(3x-3)(3x-3)} \\
&= -\frac{3}{(3x-3)^2}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x-3}{4x+5} \\
\frac{df}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2x+2h-3}{4x+4h+5} - \frac{2x-3}{4x+5}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(2x+2h-3)(4x+5)-(2x-3)(4x+4h+5)}{(4x+4h+5)(4x+5)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{8x^2+10x+8xh+10h-12x-15-8x^2-8xh-10x+12x+12h+15}{(4x+4h+5)(4x+5)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{22h}{(4x+4h+5)(4x+5)}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{22}{(4x+4h+5)(4x+5)}\right) \\
&= \frac{22}{(4x+0+5)(4x+5)} \\
&= \frac{22}{(4x+5)^2}
\end{aligned}
$$

6. (1,0 ponto) ———

Calcule os limites a seguir. Justifique.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Solução:

Para $x > 0$, $\dfrac{1}{x} > 0$, logo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

e para $x < 0$, $\dfrac{1}{x} < 0$, logo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Como os limites laterais não existem

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad \text{não existe}$$

7. (1,5 pontos) ———

Encontre y' e y'' onde $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+3}$

Solução:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+3}$$

$$y' = \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)'(x+3) - \left(\sqrt[3]{x}\right)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{\left(\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)(x+3) - \left(\sqrt[3]{x}\right)(1)}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{\dfrac{(x+3)}{3\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt[3]{x}}{(x+3)^2} = \frac{\dfrac{(x+3)}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(x+3)^2} = \frac{\dfrac{(x+3)-3x}{3\sqrt[3]{x^2}}}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{(x+3)-3x}{3\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2} = \frac{3-2x}{3\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2}$$

$$y'' = \frac{(3-2x)'\left(3\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2\right) - (3-2x)\left(3\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2\right)'}{\left[3\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2\right]^2}$$

$$= \frac{(-2)\left(3\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2\right) - (3-2x)\left(3\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}2(x+3)(1)\right)}{9\sqrt[3]{x^4}(x+3)^4}$$

$$= \frac{\left(-6\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2\right) - (3-2x)\left(4\frac{1}{\sqrt[3]{x}}(x+3)\right)}{9\sqrt[3]{x^4}(x+3)^4}$$

$$= \frac{-6\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}(x+3)^2 - 4(3-2x)(x+3)}{9\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^4}(x+3)^4}$$

$$= \frac{-6x(x^2+6x+9) - 4(-2x^2-3x+9)}{9\sqrt[3]{x^5}(x+3)^4}$$

$$= \frac{-6x^3-36x^2-54x+8x^2+12x-36}{9\sqrt[3]{x^5}(x+3)^4}$$

$$= \frac{-6x^3-28x^2-42x-36}{9\sqrt[3]{x^5}(x+3)^4}$$

$$= -\frac{6x^3+28x^2+42x+36}{9\sqrt[3]{x^5}(x+3)^4}$$

8. (1,5 pontos) ————————————————————

Ache as equações das retas normal e tangente a $x^2 + 5xy + y^2 = 28$ no ponto $(2, 2)$.

Solução:

$$x^2 + 5xy + y^2 - 28 = 0$$

$$2x + 5(y + xy') + 2yy' - 0 = 0$$

$$2x + 5y + 5xy' + 2yy' = 0$$

$$(5x + 2y)y' = -2x - 5y$$

ou

$$y' = -\frac{2x + 5y}{5x + 2y}$$

a inclinação da reta tangente no ponto $(x, y) = (2, 2)$ é

$$y' = -\frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 2}{5 \cdot 2 + 2 \cdot 2} = -\frac{4 + 10}{10 + 4} = -1$$

assim a equação da reta tangente é:

$$y - 2 = (-1)(x - 2) \implies y = -x + 4$$

e a reta normal

$$y - 2 = x - 2 \implies y = x$$