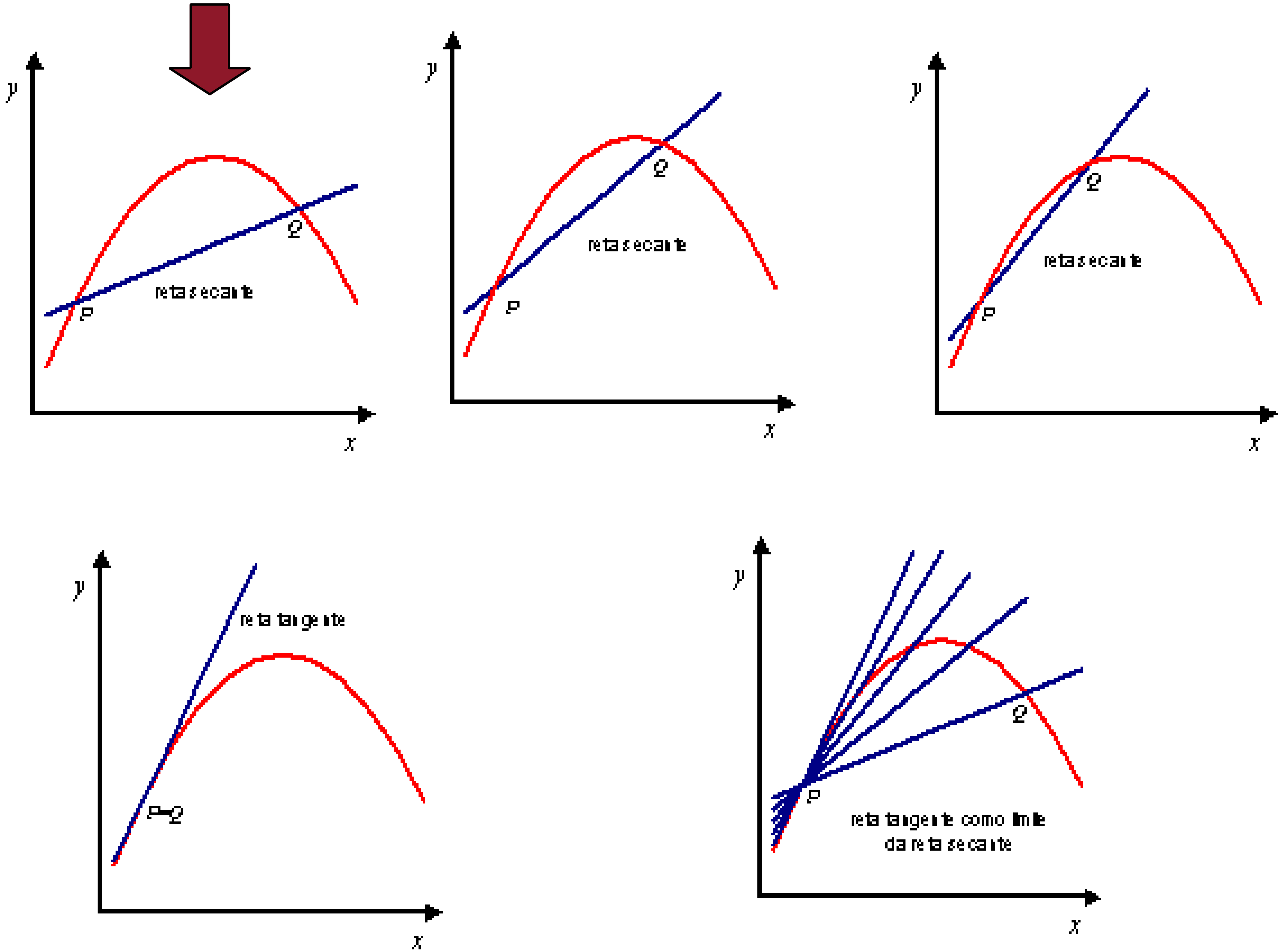
A Derivada

Reta tangente a uma curva



A partir da **Definição 2.2** concluímos que um número real a é um *ponto de acumulação de* $D(f)$ ($D(f)$ é o domínio de uma função real de uma variável real f) quando todo intervalo aberto $(a-\delta, a+\delta)$, de centro a, contém algum número de $D(f)$ diferente de a.

Logo, se

$$D(f) := X \bigcup Y \quad \text{no qual} \quad X = \{x \in \mathbb{R};\ \ 1 \le x < 2\} \quad \text{e} \quad Y = \{3, 4\}.$$

- todos os números de X e o número 2 são pontos de acumulação de $D(f)$,
- os números 3 e 4 não são pontos de acumulação de $D(f)$.

Notação: $\widehat{D}(f) := \{x \in \mathbb{R};\ \ 1 \le x \le 2\}$

Conjunto dos ponto de acumulação de $D(f)$

Definição 3.1: Seja f uma função real de uma variável real. A função real de uma variável denotada por f' com a regra

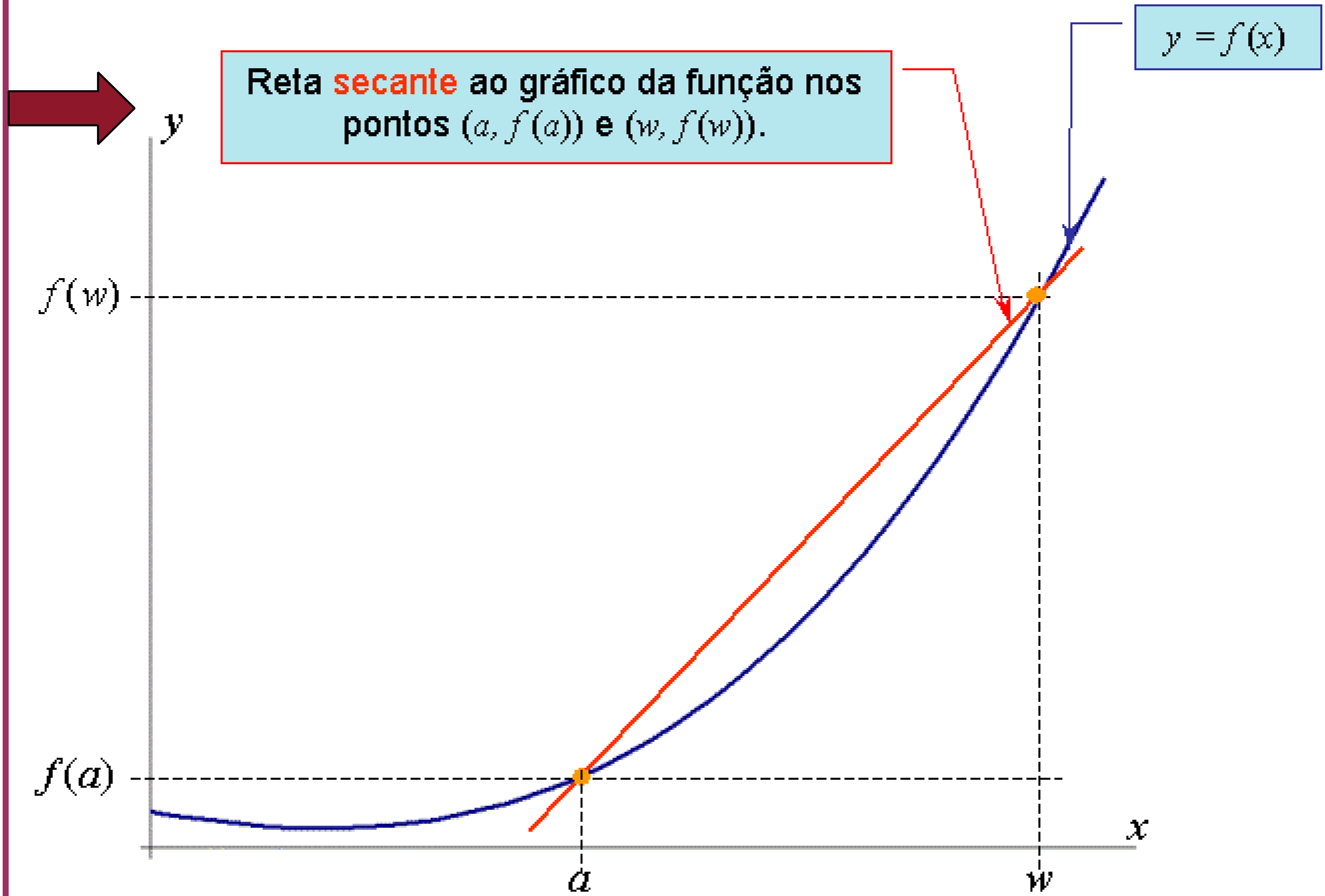
$$f\,'(x) := \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x}.$$

é denominada *derivada de f*. O domínio natural desta função, $D(f')$, é constituído pelos números do conjunto $D(f) \cap \widehat{D}(f)$ para os quais o limite existe (ou seja, é um número).

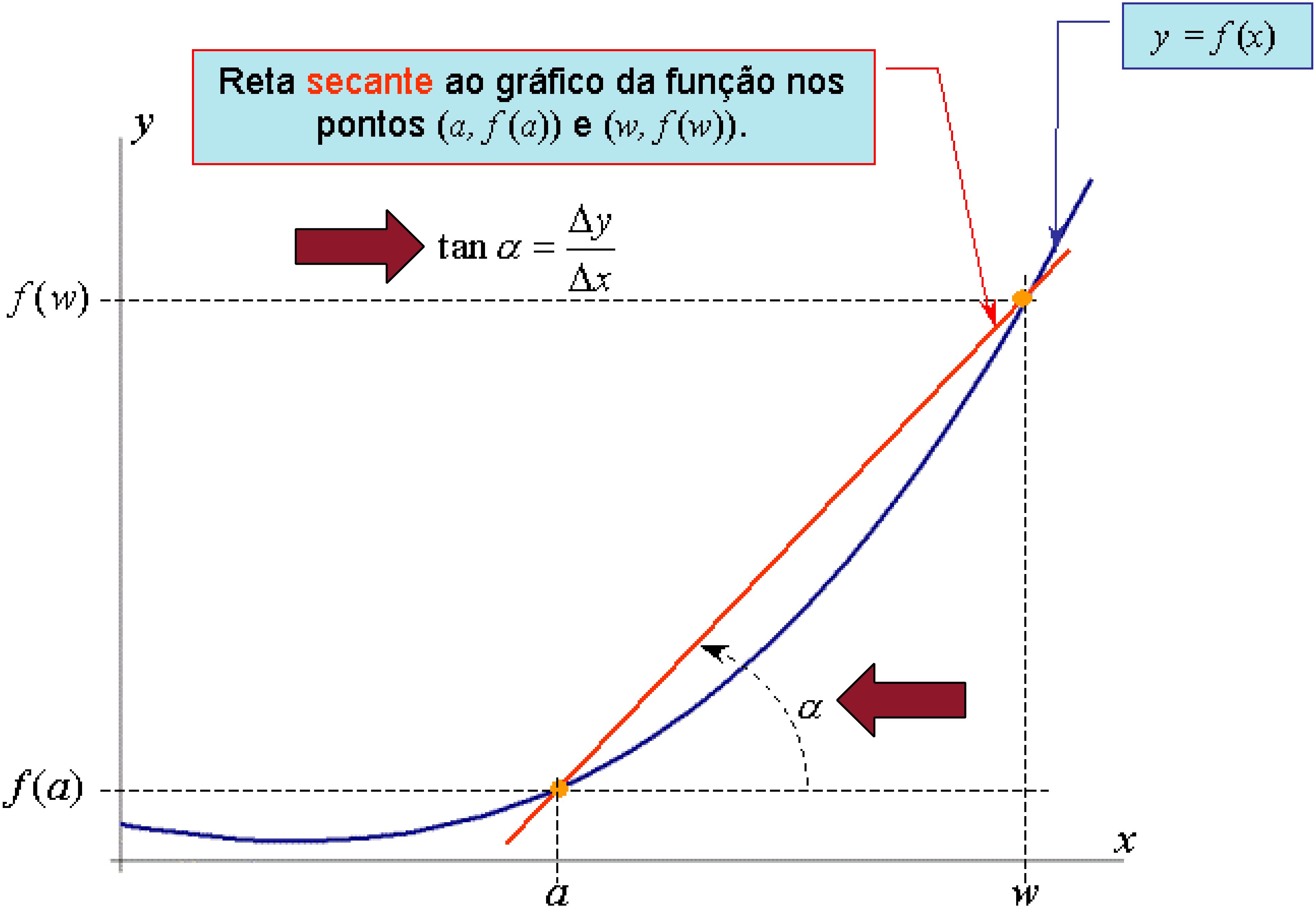
Se o número real a pertence a $D(f')$ diz-se que *f é derivável em a* e o *valor da derivada de f em a*, $f'(a)$, é, portanto,

$$f\,'(a) := \lim_{w \to a} \frac{f(w) - f(a)}{w - a}.$$

Interpretação Geométrica da Derivada



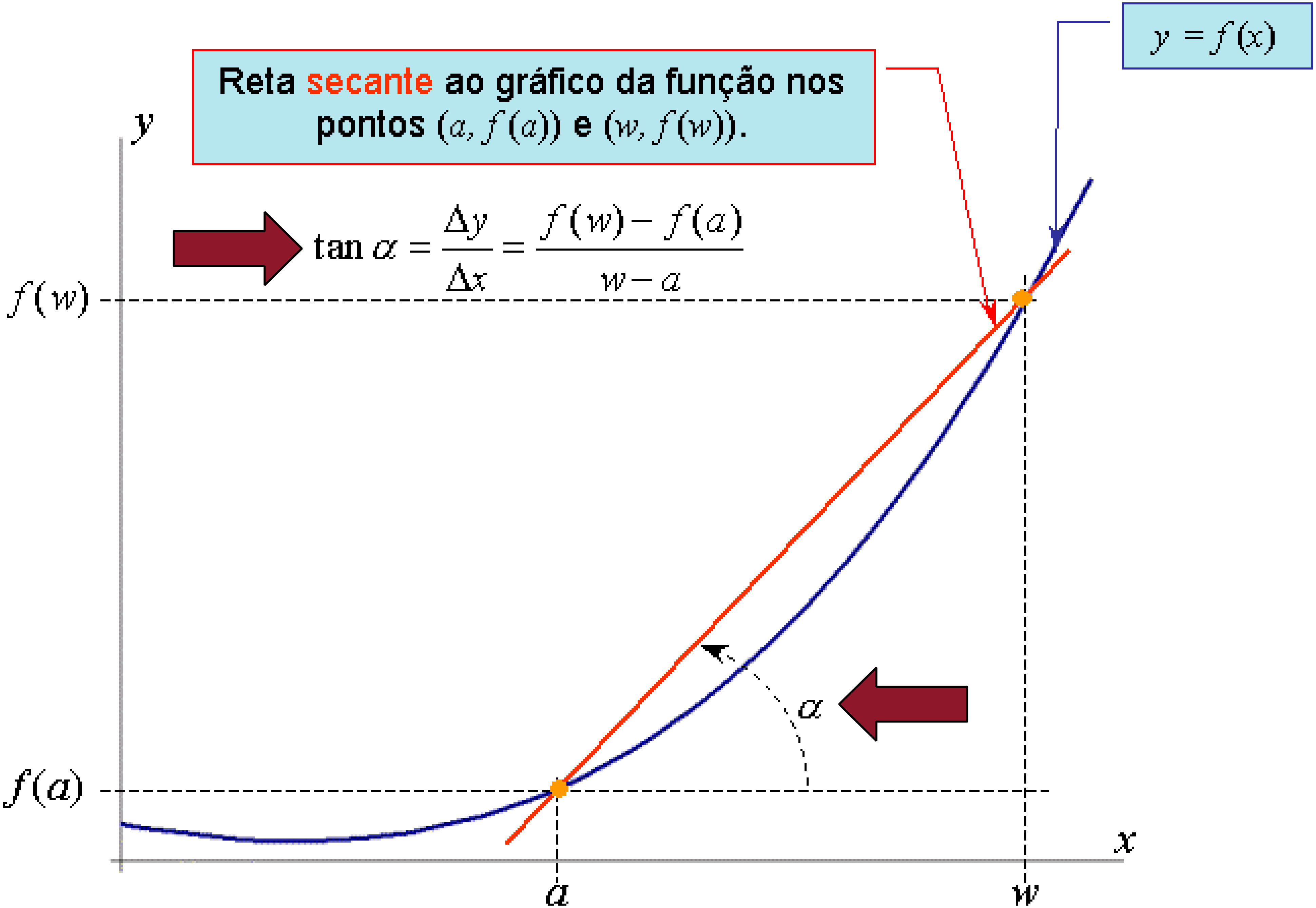
Interpretação Geométrica da Derivada



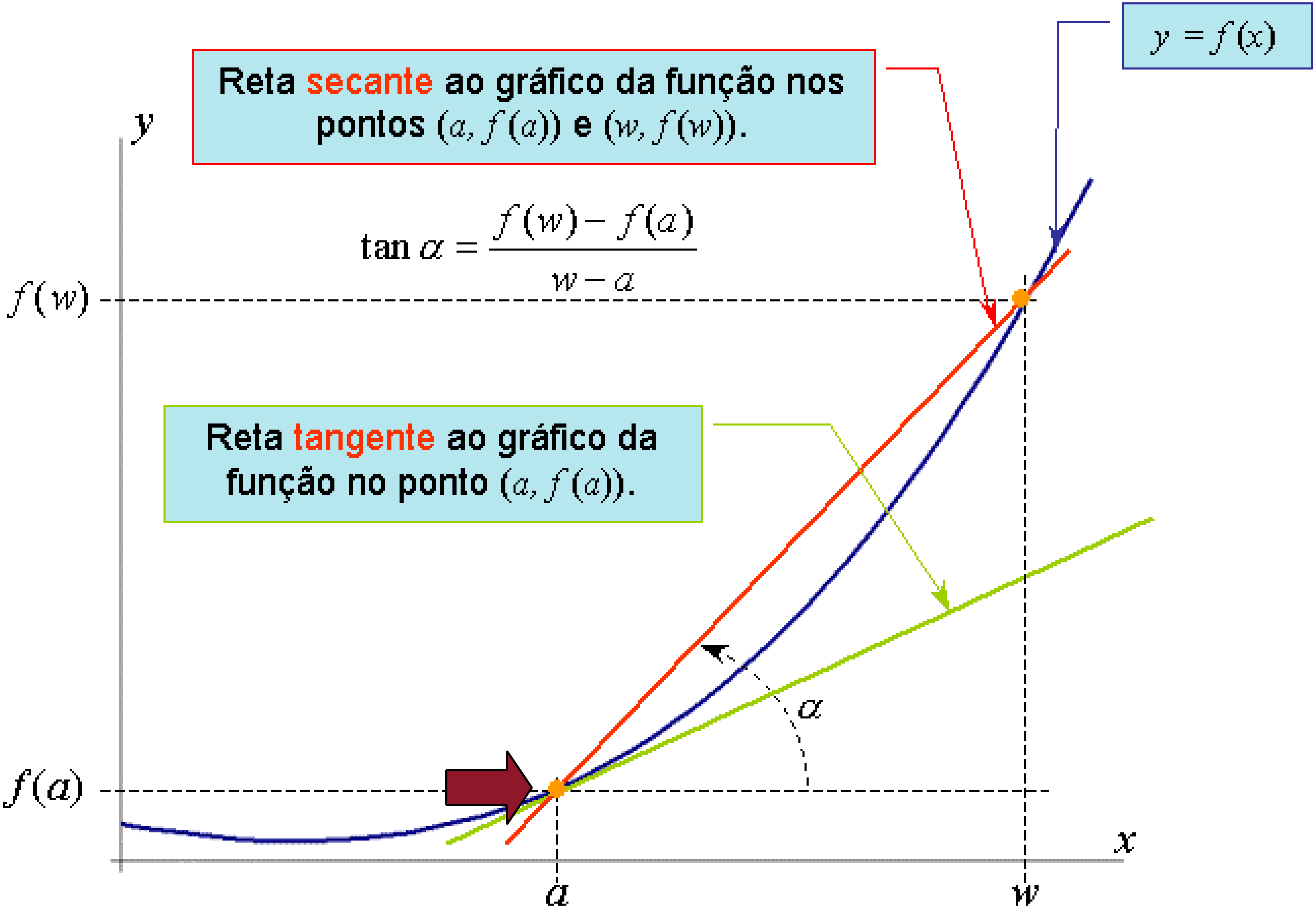
Interpretação Geométrica da Derivada

Reta **secante** ao gráfico da função nos pontos $(a, f(a))$ e $(w, f(w))$.

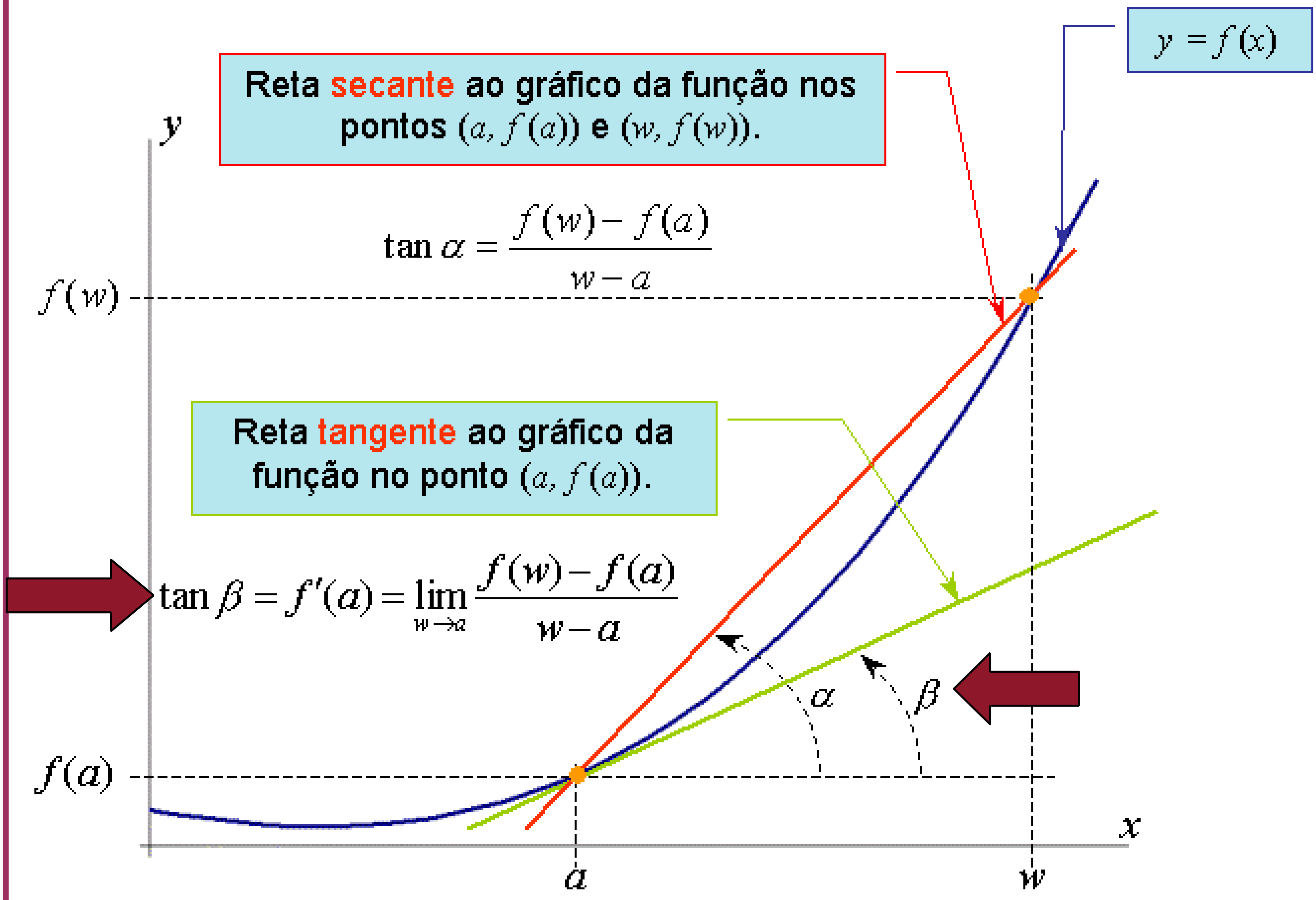
$$\tan \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(w) - f(a)}{w - a}$$



Interpretação Geométrica da Derivada



Interpretação Geométrica da Derivada



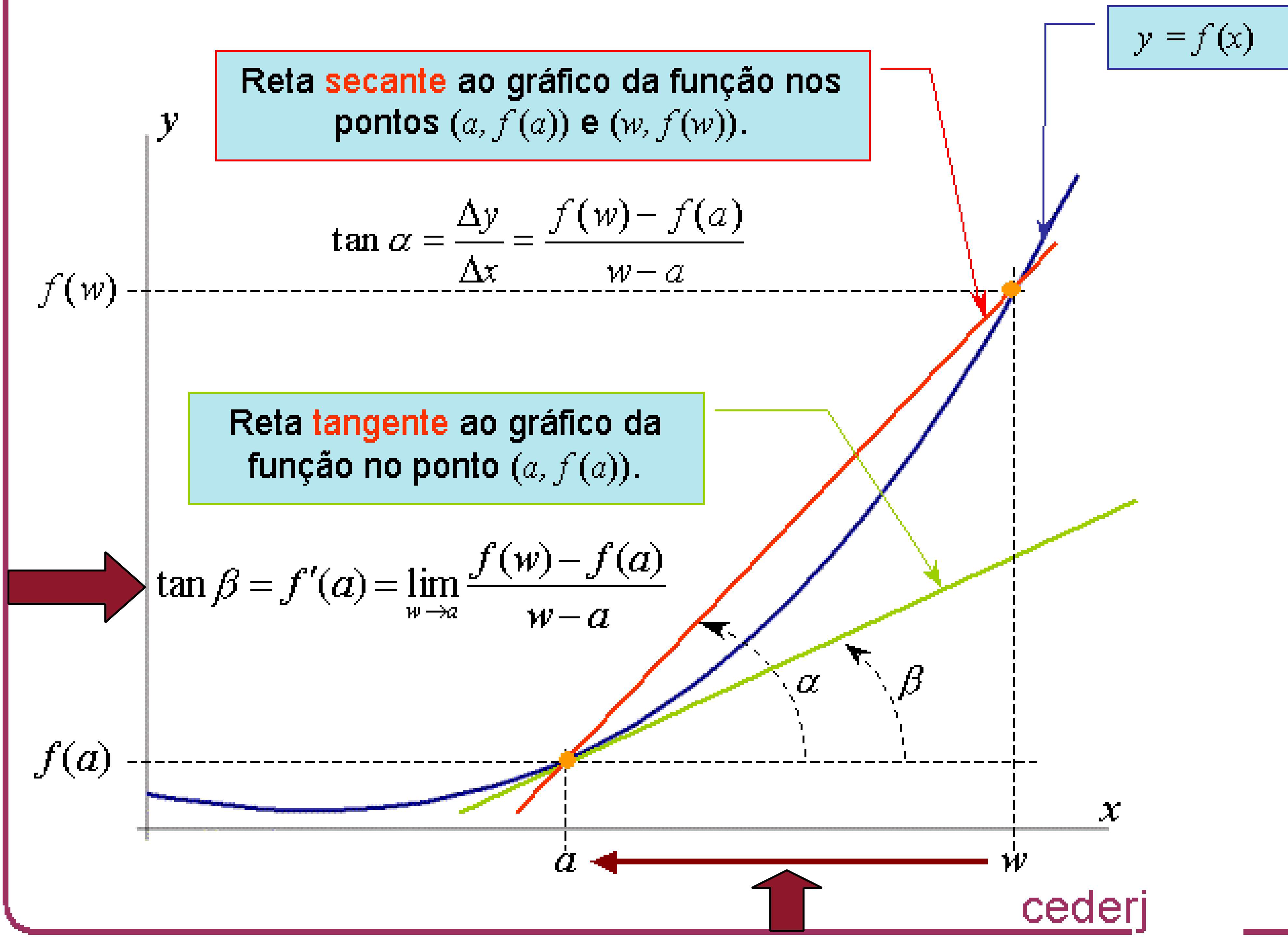
Reta **secante** ao gráfico da função nos pontos $(a, f(a))$ e $(w, f(w))$.

$$\tan \alpha = \frac{f(w) - f(a)}{w - a}$$

Reta **tangente** ao gráfico da função no ponto $(a, f(a))$.

$$\tan \beta = f'(a) = \lim_{w \to a} \frac{f(w) - f(a)}{w - a}$$

Interpretação Geométrica da Derivada



Introduzindo-se a variável h tal que $h := w - x$, tem-se que $w = x + h$ e, conseqüentemente, $w \to x$ quando $h \to 0$. Logo,

$$\boxed{f'(x) := \lim_{w \to x} \frac{f(w) - f(x)}{w - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

Exemplo 3.1

Usando a Definição 3.1 calcularemos a derivada da função $\boxed{f(x)=x^3.}$

Solução: $f'(x) := \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h}$.

Mas $(x+h)^3 = (x+h)^2(x+h) = \left(x^2+2xh+h^2\right)(x+h)$

$$= x^3 + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3$$

$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3.$$

Logo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3\right)-x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right).$$

Além disso,

$\lim_{h\to 0} 3x^2 = 3x^2 \lim_{h\to 0} 1 = 3x^2$, $\lim_{h\to 0} 3xh = 3x \lim_{h\to 0} h = 0$ e $\lim_{h\to 0} h^2 = \left(\lim_{h\to 0} h\right)^2 = 0$,

e portanto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\left(3x^2+3xh+h^2\right) = \lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 = 3x^2. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.2

Usando a Definição 3.1 calcularemos a derivada da função $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{3x-2}.}$

Solução:

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{3(x+h)-2} - \dfrac{1}{3x-2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(3x-2)-\left[3(x+h)-2\right]}{\left[3(x+h)-2\right](3x-2)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(3x-2)-\left[3(x+h)-2\right]}{\left[3(x+h)-2\right](3x-2)h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{\left[3(x+h)-2\right](3x-2)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{9x^2-6x+9xh-6h-6x+4} = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{9x^2-12x+9xh-6h+4}.$$

Mas

$$\lim_{h\to 0} 3 = 3, \lim_{h\to 0} 9x^2 = 9x^2, \lim_{h\to 0} 12x = 12x, \lim_{h\to 0} 9xh = 0, \lim_{h\to 0} 6h = 0, \lim_{h\to 0} 4 = 4,$$

e portanto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-3}{9x^2-12x+9xh-6h+4} = \frac{-\lim\limits_{h\to 0} 3}{\lim\limits_{h\to 0} 9x^2 - \lim\limits_{h\to 0} 12x + \lim\limits_{h\to 0} 9xh + \lim\limits_{h\to 0} 6h + \lim\limits_{h\to 0} 4 = 4}$$

$$= \frac{-3}{9x^2-12x+4} = \frac{-3}{(3x-2)^2}. \qquad \blacksquare$$

Derivadas Laterais

A partir da **Definição 2.4** concluímos que um número real a é um *ponto de acumulação à direita de $D(f)$* ($D(f)$ é o domínio de uma função real de uma variável real f) quando todo intervalo aberto $(a, a+\delta)$ contém algum número de $D(f)$ diferente de a.

Logo, se

$$D(f) \coloneqq X \bigcup Y \quad \text{no qual} \quad X = \{x \in \mathbb{R};\ \ 1 \le x < 2\} \quad \text{e} \quad Y = \{3, 4\}.$$

todos os números de X são pontos de acumulação à direita de $D(f)$.

Notação: $\widehat{D}_+(f) \coloneqq \{x \in \mathbb{R};\ \ 1 \le x < 2\} = X$

Conjunto dos pontos de acumulação à direita de $D(f)$

Definição 3.2: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um número do conjunto $D(f) \cap \widehat{D}_+(f)$.

Define-se *a derivada à direita de f no ponto a, $f'_+(a)$,* como sendo o limite (se existir):

$$f_+'(a) := \lim_{w \to a^+} \frac{f(w) - f(a)}{w - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A partir da **Definição 2.6** concluímos que um número real a é um *ponto de acumulação à esquerda de $D(f)$* ($D(f)$ é o domínio de uma função real de uma variável real f) quando todo intervalo aberto $(a-\delta, a)$ contém algum número de $D(f)$ diferente de a.

Logo, se

$$D(f) := X \cup Y \quad \text{no qual} \quad X = \{x \in \mathbb{R}; \quad 1 \leq x < 2\} \quad \text{e} \quad Y = \{3, 4\}.$$

os números de X, com exceção de 1, e o número 2 são pontos de acumulação à esquerda de $D(f)$.

Notação: $\widehat{D}_{-}(f) := \{x \in \mathbb{R}; \quad 1 < x \leq 2\}$

Conjunto dos pontos de acumulação à esquerda de $D(f)$

Definição 3.3: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um número do conjunto $D(f) \cap \widehat{D}\text{-}(f)$.

Define-se *a derivada à esquerda de f no ponto a, $f'_-(a)$,* como sendo o limite (se existir):

$$f_-'(a) \coloneqq \lim_{w \to a^-} \frac{f(w) - f(a)}{w - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

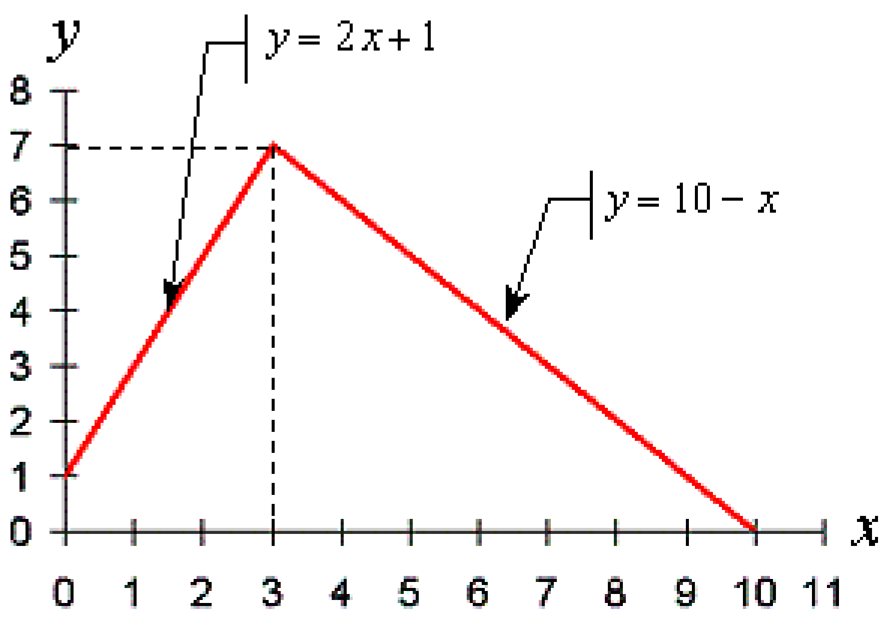
Teorema 3.1: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação à direita e à esquerda do domínio de f que pertence a $D(f)$ $\left(a \in D(f) \cap \widehat{D}_+(f) \cap \widehat{D}_-(f)\right)$.

Então existe $f'(a)$ se, e somente se, existem, e são iguais, as derivadas laterais $f'_-(a)$ e $f'_+(a)$.

Exemplo 3.3

Usando o Teorema 3.1, vamos verificar se a função f, definida a seguir, tem derivada em $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x < 3 \\ 10-x & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$



$$f_-'(3) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\left[2(3+h)+1\right] - \left[2(3)+1\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\left[2h+7\right] - \left[7\right]}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2h}{h} = 2,$$

$$f_+'(3) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left[10-(3+h)\right] - (10-3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\left[7-h\right] - (7)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-h}{h} = -1,$$

Logo, pelo Teorema 3.1, a função f não tem derivada em $x = 3$. ■

Notação para Derivada

Seja f uma função real de uma variável real.

1) Notação de *Lagrange* para a função derivada de $f \longrightarrow f'$

2) Notação de *Newton*: se x é um número do domínio da derivada de f e $y = f(x) \longrightarrow \dot{y} := f'(x)$

3) Notação de *Leibniz*: se x é um número do domínio da derivada de f e $y = f(x) \longrightarrow \dfrac{dy}{dx} := f'(x)$

Diferenciação – Diferenciabilidade - Diferenciável

1) A operação de calcular a derivada f' de uma função f (ou calcular o valor $f'(x)$) é denominado *diferenciação*.

O símbolo incompleto $\dfrac{d}{dx}$ é usado como uma instrução para diferenciar o que lhe acompanhar.

Exemplo 3.3: $\dfrac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$ (ver Exemplo 3.1). ■

Uma notação alternativa para $\dfrac{d}{dx}$ é o símbolo D_x que é chamado *operador diferenciação*.

Exemplo 3.4: $D_x\left(\dfrac{1}{3x-2}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{3x-2}\right) = \dfrac{-3}{(3x-2)^2}$ (ver Exemplo 3.2). ■

2) Os pontos do domínio natural da derivada de uma função f (real de uma variável real) são denominados *pontos de diferenciabilidade* para f, e os pontos do domínio natural de f que não pertencem a $D(f')$ são chamados *pontos de não-diferenciabilidade* para f.

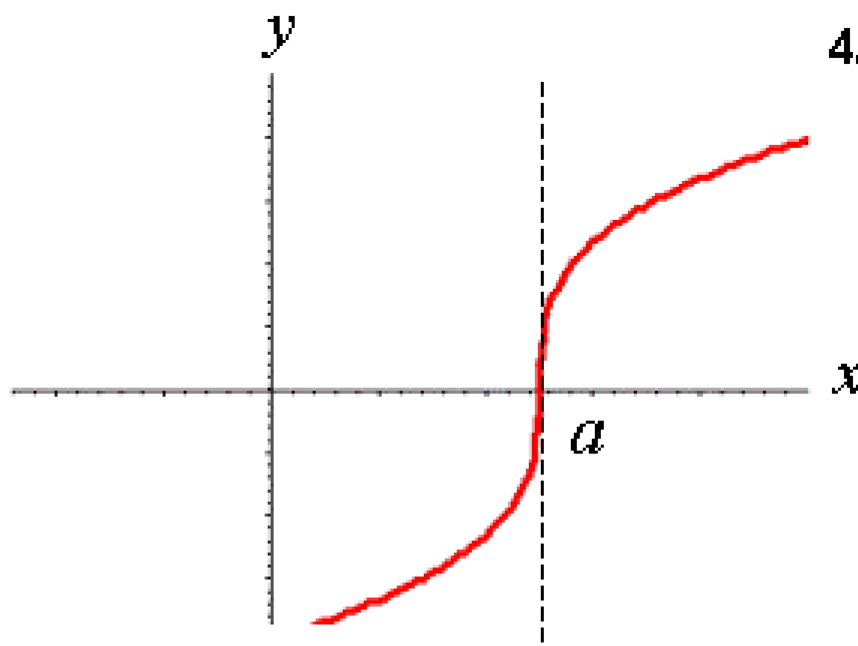
3) Se a é um *ponto de diferenciabilidade* de f dizemos que f é *diferenciável em a* (ou que f é *derivável em a*, ou ainda que *a derivada de f existe em a*). Se a é um *ponto de não-diferenciabilidade* de f dizemos que *a derivada de f não existe em a*.

4) Geometricamente:

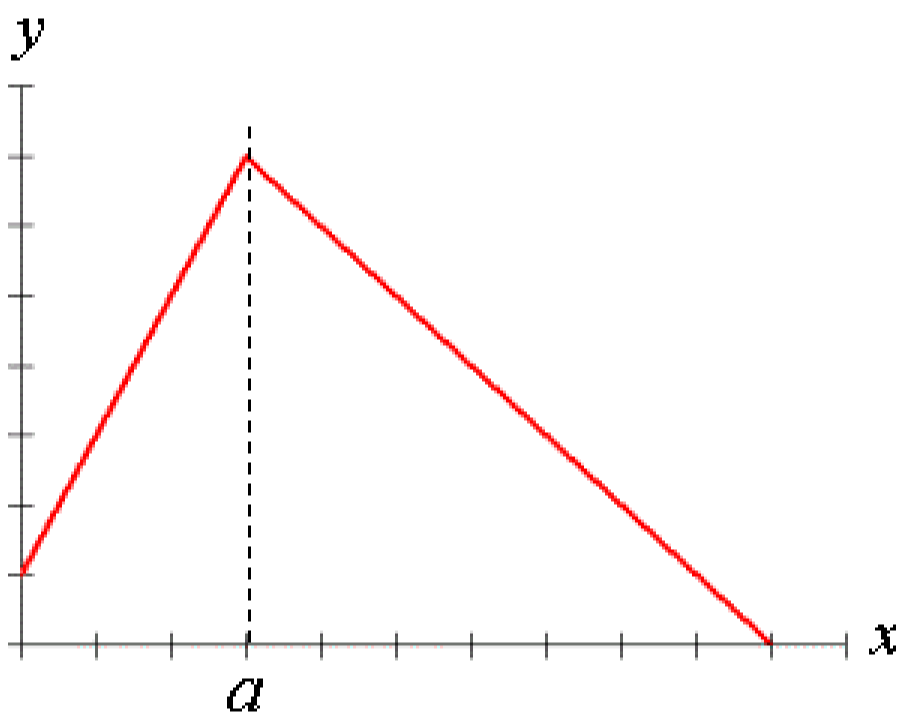
pontos de diferenciabilidade de uma função f → pontos do gráfico de f que têm uma reta tangente

pontos de não-diferenciabilidade de uma função f → pontos do gráfico de f que não têm uma reta tangente

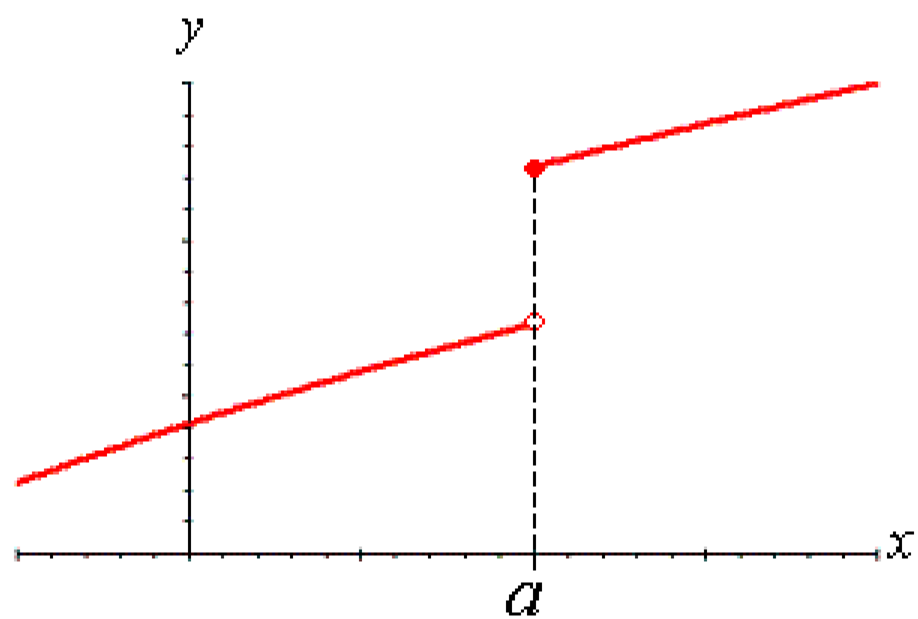
Pontos de não-diferenciabilidade mais comuns



Ponto de tangência vertical



Pico



Ponto de descontinuidade

Teorema 3.2: Seja f uma função real de uma variável real.

Se f é diferenciável em um número a, então f é contínua em a.

Recordamos a definição de função contínua:

Definição 2.12: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação do domínio de f, $D(f)$.

Diz-se que a função f é *contínua em um número a* se, e somente se, as seguintes condições são verificadas:

i) $a \in D(f)$,

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (é igual a um número),

iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Diferenciabilidade em um Intervalo

1) Se uma função f é diferenciável em todos os pontos de um intervalo aberto (a,b), então dizemos que *f é diferenciável em (a,b)*. Esta definição se aplica para intervalos abertos infinitos da forma: $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$, $(-\infty,+\infty)$.

2) Se f é diferenciável em $(-\infty,+\infty)$ dizemos que *f é diferenciável em toda parte*.

3) Dizemos que *f é diferenciável* em intervalos da forma $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,+\infty)$ ou $(-\infty,b]$ se for diferenciável nos pontos internos do intervalo e nos extremos à esquerda ou à direita, conforme apropriado.

Técnicas de Diferenciação

Teorema 3.3:

1) Regra da constante: $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$, na qual $c \in \mathbb{R}$ é constante.

2) Regra da potência: $\dfrac{d}{dx}(x^{\alpha}) = \alpha\, x^{\alpha-1}$, na qual $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.4: Sejam f e g duas funções reais de um variável real.

1) Regra da homogeneidade: $(cf)' = cf'$, na qual $c \in \mathbb{R}$ é constante.

2) Regra da soma: $(f+g)' = f'+g'$,

3) Regra da diferença: $(f-g)' = f'-g'$.

4) Regra do produto: $(fg)' = fg'+gf'$.

5) Regra do quociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

Exemplo 3.4

$$\frac{d}{dx}\left[\left(3x^2+1\right)\left(7x^3+x\right)\right] = \ ?$$

$$= \left(3x^2+1\right) D_x\left(7x^3+x\right) + \left(7x^3+x\right) D_x\left(3x^2+1\right) \leftarrow \text{regra do produto.}$$

Mas:

1) $D_x\left(7x^3+x\right) = D_x\left(7x^3\right) + D_x\left(x\right) \leftarrow$ regra da soma,

$$= 7D_x\left(x^3\right) + D_x\left(x\right) \leftarrow \text{regra da homogeneidade,}$$

$$= 7\left(3x^2\right) + \left(1x^0\right) \leftarrow \text{regra da potência,}$$

2) $D_x\left(3x^2+1\right) = D_x\left(3x^2\right) + D_x\left(1\right) \leftarrow$ regra da soma,

$$= 3D_x\left(x^2\right) + \left(0\right) \leftarrow \text{regras da homogeneidade e da constante,}$$

$$= 3\left(2x^1\right) \leftarrow \text{regra da potência.}$$

Logo:

$$\frac{d}{dx}\left[\left(3x^2+1\right)\left(7x^3+x\right)\right] = \left(3x^2+1\right)\left(21x^2+1\right) + \left(7x^3+x\right)6x. \ \blacksquare$$

Exemplo 3.5

$$D_x\left(\frac{x^2}{x^3+7}\right)=?$$

$$=\frac{\left(x^3+7\right)D_x\left(x^2\right)-x^2D_x\left(x^3+7\right)}{\left(x^3+7\right)^2}\leftarrow \text{regra do quociente.}$$

Mas:

1) $D_x\left(x^2\right)=2x\leftarrow$ regra da potência,

2) $D_x\left(x^3+7\right)=D_x\left(x^3\right)+D_x\left(7\right)\leftarrow$ regra da soma,

$$=3x^2+\left(0\right)\leftarrow \text{regras da potência e da constante.}$$

Logo:

$$D_x\left(\frac{x^2}{x^3+7}\right)=\frac{\left(x^3+7\right)\left(2x\right)-x^2\left(3x^2\right)}{\left(x^3+7\right)^2}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.5: – Derivadas das funções trigonométricas

1) $D_x(\operatorname{sen} x) = \cos x.$

2) $D_x(\cos x) = -\operatorname{sen} x.$

3) $D_x(\tan x) = \sec^2 x.$

4) $D_x(\sec x) = (\sec x)(\tan x).$

5) $D_x(\cot x) = -\operatorname{cossec}^2 x.$

6) $D_x(\operatorname{cossec} x) = -(\operatorname{cossec} x)(\cot x).$

Resumo

Derivadas

- Definição;
- Derivada como limite da inclinação da reta secante;
- Derivadas laterais;
- Notação para derivadas;
- Diferenciabilidade;
- Diferenciabilidade em intervalos;
- Técnicas de diferenciação (regras de diferenciação).