Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

**Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina: Matemática para Computação**
**AD1 - 2$^o$ semestre de 2012 - Gabarito**

# Questões

1. (1,0 ponto)

   Dadas as funções $f$ e $g$ encontre $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ e $(g \circ g)$.

   (a) $f(x) = x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x + \sqrt{x}$

   (b) $f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 5$

   (c) $f(x) = \cos x + x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + x$

   **Solução:**

   (a) $f(x) = x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x + \sqrt{x}$

   $$(f \circ g)(x) = (5x + \sqrt{x}) - 2 = 5x + \sqrt{x} - 2$$

   $$(g \circ f)(x) = 5(x - 2) + \sqrt{x - 2} = 5x + \sqrt{x - 2} - 10$$

   $$(f \circ f)(x) = (x - 2) - 2 = x - 4$$

   $$(g \circ g)(x) = 5(5x + \sqrt{x}) + \sqrt{5x + \sqrt{x}} = 25x + 5\sqrt{x} + \sqrt{5x + \sqrt{x}}$$

   (b) $f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 5$

   $$(f \circ g)(x) = (3x + 5)^2 - 1 = 9x^2 + 30x + 25$$

   $$(g \circ f)(x) = 3(x^2 - 1) + 5 = 3x^2 - 3 + 5$$

   $$(f \circ f)(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1$$

   $$(g \circ g)(x) = 3(3x + 5) + 5 = 9x + 20$$

   (c) $f(x) = \cos x + x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + x$

   $$(f \circ g)(x) = \cos(x^2 + x) + (x^2 + x)^2 = \cos(x^2 + x) + x^4 + 2x^3 + x^2$$

   $$(g \circ f)(x) = (\cos x + x^2)^2 + (\cos x + x^2) = \cos^2 x + 2\cos x \cdot x^2 + x^4 + \cos x + x^2$$

   $$(f \circ f)(x) = \cos(\cos x + x^2) + (\cos x + x^2)^2 = \cos(\cos x + x^2) + \cos^2 x + 2\cos x \cdot x^2 + x^4$$

   $$(g \circ g)(x) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + x = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$$

2. (1,0 ponto)

Para as seguintes funções obtenha uma expressão para suas inversas.

(a) $y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$
(b) $y = \sqrt{x}, \quad\quad x \geq 0$
(c) $y = 2x - 1$

**Solução:**

(a) $y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$

$$x = y^2 - 3 \quad \longrightarrow y^2 = x + 3 \quad \longrightarrow y = \pm\sqrt{x+3}$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será o ramo positivo, isto é

$$y^{-1} = \sqrt{x+3}$$

(b) $y = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$

$$x = \sqrt{y} \quad \longrightarrow x^2 = y$$

Como o domínio é $x \geq 0$, a inversa será

$$y^{-1} = x^2 \quad\quad x \geq 0$$

(c) $y = 2x - 1$

$$x = 2y - 1 \quad \longrightarrow \quad x + 1 = 2y \quad \longrightarrow \quad y = \frac{x+1}{2}$$

logo

$$y^{-1} = \frac{x+1}{2}$$

3. (1,0 ponto)

Calcule o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para as seguintes funções:

(a) $f(x) = x^2 - 3x$
(b) $f(x) = \sqrt{5x+1}$
(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

**Solução:**

(a) $f(x) = x^2 - 3x \quad \text{e} \quad f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h)$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 3(x+h) - x^2 + 3x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (2x + h - 3) \\
&= 2x - 3
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sqrt{5x+1} \quad \text{e} \quad f(x+h) = \sqrt{5(x+h)+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h) + 1 - 5x + 1}{h \; \sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h \; \sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5(x+h)+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{5x+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}
\end{aligned}$$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \qquad \text{e} \quad f(x+h) = \dfrac{1}{(x+h)^2}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2xh - h^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(-2x-h)h}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \frac{-2x}{x^2(x)^2}$$

$$= \frac{-2x}{x^4}$$

$$= -\frac{2}{x^3}$$

4. (1,0 ponto) ———

Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to 2^+} (1 + \sqrt{x-2})$

(b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{h+2}$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

**Solução:**

(a) $\lim_{x \to 2^+} (1 + \sqrt{x-2}) = \lim_{x \to 2^+} 1 + \lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} = 1 + 0 = 1$

(b) $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+8}{h+2}$ $\Longrightarrow$ **Item anulado, os pontos serão considerados**

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

5. (2,0 pontos) ———

Ache os limites infinitos.

(a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$

(b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$

(c) $\lim_{x\to+\infty}\left(x^5-7x^4-2x+5\right)$

(d) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^5-7x^4-2x+5\right)$

**Solução:**

(a)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^2+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3)/(x^2)}{(x^2+1)/(x^2)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(2x^3)/(x^2)}{(x^2+1)/(x^2)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+1/x^2}\\ &= +\infty\end{aligned}$$

(b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^2+1} = -\infty,\quad$ análogo ao item anterior

(c)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(x^5-7x^4-2x+5\right) &= \lim_{x\to+\infty}x^5\left(\frac{x^5}{x^5}-\frac{7x^4}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{5}{x^5}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^5\left(\frac{x^5}{x^5}-\frac{7x^4}{x^5}-\frac{2x}{x^5}+\frac{5}{x^5}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}x^5\left(1-\frac{7}{x}-\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right)=+\infty\end{aligned}$$

(d) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^5-7x^4-2x+5\right) = -\infty,\quad$ análogo ao item anterior

6. (2,0 pontos)

Se $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, mostre que $f$ é contínua no intervalo $[-3,3]$.

**Solução:**

É necessário que $9-x^2\geq 0$, logo o domínio de $f(x)$ é $-3\leq x\leq 3$.

Para $-3<a<3$,

$$\lim_{x\to a}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-a^2}=f(a)$$

logo $f(x)$ é contínua no intervalo aberto $(-3,3)$.

Precisamos agora verificar a continuidade nas extremidades $x=-3$ e $x=3$ usando limites laterais,

$$\lim_{x\to-3^+}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9}=0=f(-3)$$

logo $f(x)$ é contínua a direita em $x=-3$,

$$\lim_{x\to 3^-}\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-9}=0=f(3)$$

logo $f(x)$ é contínua a esquerda em $x=3$.

Resumindo $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[-3,3]$.

7. (1,0 ponto) ———

Se

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 0 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

$f$ é contínua em $x = 3$? Justifique sua resposta.

**Solução:**

Temos que verificar se o limite em 3 existe e se o valor da função em 3 tem o mesmo valor do limite.

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 1$$

$$f(3) = 0$$

Como

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 1 \neq 0 = f(3)$$

Portanto $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.

8. (1,0 ponto) ———

Se

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\, x - 3 \,|}{x - 3} & \text{se} \quad x \neq 3 \\ 1 & \text{se} \quad x = 3 \end{cases}$$

$f$ é contínua em $x = 3$? Justifique sua resposta.

**Solução:**

$$f(3) = 1$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{|\, x - 3 \,|}{x - 3} = -1$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{|\, x - 3 \,|}{x - 3} = 1$$

Logo

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \quad \text{Não existe}$$

e portanto $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.