Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática para Computação

AP2 - 2º semestre de 2008.

Nome –

Assinatura –

Observações:

1.Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.

2.Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.

3.Você pode usar lápis para responder as questões.

4.Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.

5.Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

---

1. (2.0 pontos) ———

   Determine todos os números críticos da função $f(x)$ e classifique os pontos críticos correspondentes:

   $$f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x^2 - 8$$

   Solução:

   A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 36x$, ou seja,

   $$f'(x) = 4x(x^2 + 6x + 9) = 4x(x + 3)^2$$

   Pode-se facilmente observar que a derivada de $f(x)$ existe para qualquer valor de x. Os únicos ´numeros críticos são aqueles para os quais $f'(x) = 0$; ou seja, $x = 0$ e $x = -3$.

Estudando o sinal da derivada, temos que:

Para valores de x, tais que, $x < -3$ ou $-3 < x < 0$ o sinal de $f'(x)$ não muda, sendo negativo para ambos os intervalos. Já para valores de x, tais que $x > 0$, o sinal de $f'(x)$ é positivo. Dessa forma, não existe ponto de máximo e nem de mínimo em $x = -3$, mas, existe um ponto de mínimo em $x = 0$.

2. (1.5 ponto)

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

(b) $$\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5) dx =$$

(c) $$\int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x} \right) dx =$$

Solução:

(a) $$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= \int \frac{1}{1/2} x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} + C$$

(b) $$\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5) dx =$$

Usando a regra da soma, a regra da diferença, a regra da multiplicação por uma constante e a regra da potência, temos:

$$\int (2x^5 + 8x^3 - 3x^2 + 5) dx =$$

$$= 2 \int x^5 dx + 8 \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + \int 5 dx$$

$$= 2 \left(\frac{x^6}{6} \right) + 8 \left(\frac{x^4}{4} \right) - 3 \left(\frac{x^3}{3} \right) + 5x + C$$

$$= \left(\frac{x^6}{3}\right) + 2x^4 - x^3 + 5x + C$$

(c) $$\int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x}\right) dx =$$

Não existe nenhuma ”regra do quociente”para integração, mas podemos dividir o numerador pelo denominador e integrar o resultado usando o método do item anterior:

$$\int \left(\frac{x^3 + 2x - 7}{x}\right) dx =$$

$$= \int \left(x^2 + 2 - \frac{7}{x}\right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + 2x - 7 \ln x + C$$

3. (2.0 pontos) ———

Calcule:

(a) $$\int_1^4 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

(b) $$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx =$$

Solução:

(a) $$\int_1^4 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^3\right)_1^4$$

$$= \left[\left(\frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{1}{3}4^3\right)\right] - \left[\left(\frac{2}{3}1^{3/2} - \frac{1}{3}1^3\right)\right]$$

$$= -\frac{49}{3}$$

(b) $$\int_0^1 8x(x^2 + 1)^3 dx =$$

O integrando é um produto no qual um dos fatores, $8x$, é múltiplo da derivada de uma expressão, x^2+1, que aparece no outro fator. Isso sugere a substituição $u = x^2 + 1$, caso em que $du = 2xdx$ e

$$\int 8x(x^2+1)^3 dx = \int 4u^3 du = u^4$$

Os limites de integração, 0 e 1, se referem à variável x e não a u. Existem duas formas de resolver o problema: expressar a antiderivada em termos de x ou determinar os valores de u que correspondem a $x = 0$ e $x = 1$.
Usando o primeiro método, temos:

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = \left.(x^2+1)^4\right|_0^1 = 16 - 1 = 15$$

Usando o segundo método, partimos da relação $u = x^2 + 1$ para concluir que $u = 1$ para $x = 0$ e $u = 2$ para $x = 1$. Assim,

$$\int_0^1 8x(x^2+1)^3 dx = \int_1^2 4u^3 du = \left.u^4\right|_1^2 = 16 - 1 = 15$$

4. (1.5 ponto)

Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x^2$:

Solução:

Para obter os pontos de intersecção, basta igualar as equações das duas curvas:

$$x^3 = x^2$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x^2(x-1) = 0$$

$x = 0$ ou $x = 1$

logo, os pontos de intersecção são $(0, 0)$ e $(1, 1)$.

Observe que para $0 \leq x \leq 1$, o gráfico de $y = x^2$ está acima do gráfico de $y = x^3$ (já que o quadrado de um número decimal entre 0 e 1 é maior que o cubo). Desse modo, a região na qual estamos interessados é limitada acima pela curva $y = x^2$ e abaixo pela curva $y = x^3$ e se estende de 0 a 1, de modo que,

$$\text{Área } = \int (x^2 - x^3) = \left.\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\right|_0^1 = \frac{1}{12}$$

5. (1.5 ponto)

Calcule o volume do sólido gerado quando a região sob a curva $y = x$ em $[1, 4]$ é girada em tornodo eixo X. Utilize o método ”volume dos discos”.

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 =?$$

Solução:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx =?$$

$$= \int_1^4 \pi[x]^2 dx = \pi \frac{x^3}{3}\bigg|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{64\pi}{3} - \frac{1}{3}\pi\right)$$

$$= \left(\frac{63\pi}{3}\right)$$

6. (1.5 ponto)

Calcule os seguintes limites, utilizando a regra de L´Hopital:

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} =?$$

(b) $$\lim_{y\to 0} \frac{3y^3 + 5y}{2y^3 + 8y} =?$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} =?$$

tipo $0/0$

$$\lim_{x\to 4} \frac{(x^2 - 16)'}{(x - 4)'} =?$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2x}{1}$$

$$= 8$$

(b) $$\lim_{y\to 0}\frac{3y^3+5y}{2y^3+8y} = ?$$

tipo $0/0$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{(3y^3+5y)'}{(2y^3+8y)'}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{9y^2+5}{6y^2+8}$$

$$= \frac{5}{8}$$