Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (1,25 pontos)

   Determine as inversas das seguintes funções

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

   Solução:

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   $$y = x^3 + 1 \Longrightarrow x^3 = 1 - y \Longrightarrow x = \sqrt[3]{1-y}$$

   Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x}$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

   $$y = \sqrt[3]{x-2} \Longrightarrow y^3 = x - 2 \Longrightarrow y^3 + 2 = x$$

   Logo a inversa é $f^{-1}(x) = x^3 + 2$

2. (1,25 pontos)

   Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9}{x+3}=\frac{3^2+3\cdot 3+9}{3+3}=\frac{9}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)}{(x-1)}=\infty$$

3. (1,25 pontos) ———

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

$$f(x)=\frac{1}{x-2}$$

Solução:

O denominador é zero em $x=2$.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\infty$$

4. (1,25 pontos) ———

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$$

(b) $$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x\neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x=2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

Aparentemente há uma descontinuidade no ponto $x = 2$, já que $x = 2$ não pertenceria ao domínio da função.

Entretanto, esta descontinuidade pode ser removida se reescrevermos a função da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$$

o que elimina a descontinuidade em $x = 2$.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 0 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 2$ parece haver uma descontinuidade. Vamos mostrar que esta descontinuidade existe.

O ponto $x = 2$ pertence ao domínio da função. Os limites laterais neste ponto são:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 4$$

entretanto o valor da função em $x = 2$ é $f(2) = 0$.

Logo

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 0$$

Portanto $f(x)$ é descontinua em $x = 2$.

5. (1,25 pontos)

Para a função a seguir mostre que ela é contínua no intervalo indicado.

$$f(x) = 1 \quad \text{em} \quad (0,1]$$

Solução:

Para ser contínua no intervalo a função deve ser contínua em cada ponto do intervalo.

Para ser contínua em um ponto a este ponto deve pertencer ao domínio da função, o limite da função neste ponto deve existir e o valor do limite deve coincidir com o valor da função no ponto, isto é

$$\begin{cases} 1. \quad a \in D(f) \\ 2. \quad \lim_{x\to a} f(x) \ \text{ existe (é igual a um número)} \\ 3. \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Cada ponto do intervalo pertence ao domínio da função o que satifaz a condição 1. em todos os pontos do intervalo. Ademais o limite da função para cada ponto no intervalo existe, já que

$$\lim_{x \to a} 1 = 1 \qquad \forall x \in (0, 1]$$

Logo são satisfeitas as condições 2. e 3..

Consequentemente, $f(x) = 1$ é contínua no intervalo $(0, 1]$.

6. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Ache a equação da reta tangente ao gráfico $y = x^2 + 1$ no ponto $(2, 5)$.

OBS: Primeiro obtenha a inclinação da reta tangente usando => $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0))}{h}$; depois, ache a equação da reta tangente através de: $y - y_0 = m(x - x_0)$

Solução:

Primeiramente encontraremos a inclinação m da reta tangente no ponto $x = 2$, isto é,

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h)^2 + 1] - [2^2 + 1]}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(4 + 4h + h^2) - 4}{h}$$

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h \to 0}(4 + h) = 4$$

usando agora a equação da reta tangente no ponto $(2, 5)$,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y - 5 = 4(x - 2)$$

que é a expressão pedida $y = 4x - 3$.

7. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Calcule o valor das derivadas até quarta ordem da função

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$$

Solução:

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 2$$

$$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 4$$

$$f''(x) = 36x^2 - 12x + 2$$

$$f'''(x) = 72x - 12$$

$$f''''(x) = 72$$

8. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Ache as segundas derivadas das funções:

(a) $f(x) = x^{-9}$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

Solução:

(a)
$$f(x) = x^{-9}$$
$$f'(x) = -9 \cdot x^{-10}$$
$$f''(x) = 90 \cdot x^{-11} = \frac{90}{x^{11}}$$

(b)
$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}}$$