Gabarito da AP03 – CÁLCULO I

Questão 1 [2,0 pt] Calcule os seguintes limites.

(a) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x-\frac{\pi}{2}}$

Solução:

(a) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim\limits_{x\to 8} \dfrac{(x^{1/3}-2)(x^{2/3}+2x^{1/3}+4)}{x^{1/3}-2} = \lim\limits_{x\to 8} x^{2/3}+2x^{1/3}+4 = 12$

(b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2\cos 2x}{1} = 2\cos\pi = -2$

Questão 2 [3,0 pt] Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{\cos x}$ (b) $g(x) = x\,e^{2x}$ (c) $f(x) = \operatorname{arc\,sen} 2x$

Solução:

(a) $f'(x) = \dfrac{2x\cos x + (x^2-1)\operatorname{sen} x}{\cos x^2} = \dfrac{2x}{\cos x} + \dfrac{(x^2-1)\operatorname{sen} x}{\cos x^2}$

(b) $g'(x) = e^{2x} + 2x\,e^{2x} = e^{2x}\,(1+2x)$

(c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$

Questão 3 [1,5 pt] Determine as assíntotas verticais e horizontais, fazendo um estudo completo dos limites infinitos e no infinito da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2-5x+4}$.

Solução:

O domínio da função: $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1, 4\}$.

Comportamento assintótico vertical: análise da função em torno de $x = 1$ e $x = 4$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x^2-5x+4} = +\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{x^2-5x+4} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x^2-5x+4} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x^2-5x+4} = +\infty$

Comportamento assintótico horizontal: limites de f quando x tende a $+\infty$ e a $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2-5x+4} = 0.$

Conclusão: A função tem duas assíntotas verticais, $x = 1$ e $x = 4$, e tem uma assíntota horizontal, $y = 0$, o eixo horizontal.

Questão 4 [3,5 pt] Considere a função $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$.

(i) Determine as interseções do gráfico de f com os eixos coordenados.

(ii) Determine as regiões de crescimento e decrescimento do seu gráfico, assim como os pontos de máximo e de mínimo locais, caso existam.

(iii) Determine as regiões onde o gráfico de função f é côncavo para baixo e onde o gráfico é côncavo para cima, assim como seus pontos de inflexão, caso existam.

(iv) Esboce o gráfico desta função.

Solução:

(i) $f(x) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2 - 12x + 36 = 0$ e $f(0) = 0$. Portanto, as intersecções com os eixos são $(0,0)$, $(6,0)$.

(ii) $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$. Assim, $f'(x) = 0 \iff x^2 - 8x + 12 = 0$. As raízes são 2 e 6. Portanto, o gráfico de f é crescente nos intervalos $(-\infty, 2)$ e $(6, \infty)$, e decrescente no intervalo $(2, 6)$. O ponto $x = 2$ é ponto de máximo local e $x = 6$ é ponto de mínimo local.

(iii) $f''(x) = 6x - 24$. Portanto, o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(4, \infty)$, e côncavo para baixo no intervalo $(-\infty, 4)$. O ponto $x = 4$ é ponto de inflexão.

(iv)