Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9}$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^3-27}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2+3x+9}{x+3} = \frac{3^2+3\cdot 3+9}{3+3} = \frac{9}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{(x-1)} = \infty$$

Calcule os limites abaixo:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3}$$

(b) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{(3x-1)^2}{(x+1)^3} = \frac{(3\cdot 1-1)^2}{(1+1)^3} = \frac{(2)^2}{(2)^3} = \frac{1}{2}$$

(b) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{7}$$

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^4-27}{x^3-9}$$

(a) $$\lim_{x\to 3} \frac{x^4-27}{x^3-9} = \frac{3^4-27}{3^3-9} = \frac{81-27}{27-9} = \frac{54}{18} = \frac{27}{9} = 3$$

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+2)^5}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{-4}{(x-2)^3}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+2)^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(0+2)^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(2)^5} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{32} = \frac{1}{32}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{-4}{(x-2)^3} = \frac{-4}{0^3} = -\infty$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

Calcule os limites:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$$

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

Mostre, usando as propriedades de limites, que para toda função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, seu limite é igual ao valor da função no ponto. Isto é

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Solução:

O limite

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \lim_{x\to a} a_i x^i$$

Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x\to a} a_i x^i = a_i \lim_{x\to a} x^i = a_i a^i$$

substituindo no somatório

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lim_{x\to a} x^i = \sum_{i=0}^{n} a_i a^i = a_0 + a_1 a + \cdots + a_{n-1}a^{n-1} + a_n a^n = f(a)$$

(a) $$\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 4} \sqrt{25-x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(25-x^2)} = \sqrt{25-(4)^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

Calcule os limites:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$

Solução:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

(b) $\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$

Calcule os limites abaixo.

(a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x-5} + 3x$

(b) $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2-4}$

Solução:

(a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{2x-5} + 3x = \sqrt{2 \cdot 4 - 5} + 3 \cdot 4 = \sqrt{8-5} + 12 = \sqrt{3} + 12$

(b) $\lim_{x \to 3} \frac{x}{x^2-4} = \frac{3}{3^2-4} = \frac{3}{9-4} = \frac{3}{5}$

Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{25 - x^2}$

(b) $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2}$

Solução:

(a) $\lim_{x \to 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x \to 4}(25 - x^2)} = \sqrt{25 - (4)^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

(b) $\lim_{x \to 3} \frac{x-2}{x+2} = \frac{\lim_{x \to 3}(x-2)}{\lim_{x \to 3}(x+2)} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$

Determine o limite das funções abaixo:

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 - 8}{x - 2} =$

(b) $\lim_{y \to 2} \frac{3y - 5}{y - 2} =$

Solução:

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-8}{x-2}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(3x^3-8)}{\lim\limits_{x\to 0}(x-2)}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}3x^3-\lim\limits_{x\to 0}8}{\lim\limits_{x\to 0}x-\lim\limits_{x\to 0}2}$$
$$=\frac{3\lim\limits_{x\to 0}x^3-8}{\lim\limits_{x\to 0}x-2}$$
$$=\frac{3.0^3-8}{0-2}$$
$$=\frac{-8}{-2}$$
$$=4$$

(b)
$$\lim_{y\to 2}\frac{3y-5}{y-2}=$$
$$=\frac{\lim\limits_{y\to 2}(3y-5)}{\lim\limits_{y\to 2}(y-2)}$$
$$=\frac{\lim\limits_{y\to 2}3y-\lim\limits_{y\to 2}5}{\lim\limits_{y\to 2}y-\lim\limits_{y\to 2}2}$$
$$=\frac{3\lim\limits_{y\to 2}y-5}{\lim\limits_{y\to 2}y-2}$$
$$=\frac{3.2-5}{2-2}$$
$$=\frac{1}{0}$$
$$=+\infty$$

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

Solução:

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2+1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= +\infty$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{4-x^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} 3+\sqrt{x^2+5}$$

$$= 6$$

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) =$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$$

$$= \lim_{x \to 2} x^3 - 3 \lim_{x \to 2} x + \lim_{x \to 2} 5$$

$$= 2^3 - 3.2 + 5$$

$$= 8 - 6 + 5$$

$$= 7$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

Calcule os seguintes limites:

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to 3} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{se} \quad x \leq 3 \\ \sqrt{x + 13} & \text{se} \quad x > 3 \end{cases}$$

Solução

(a) (1,00 ponto)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8}$$

Dividindo o numerador e o denominador pela potência mais alta de x que aparece no denominador, ito é $x^1 = x$, temos

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + 5}{6x - 8} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\dfrac{3x + 5}{x}}{\dfrac{6x - 8}{x}}$$

e usando as técnicas para calcular limites

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{3x+5}{x}}{\dfrac{6x-8}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x+5}{x}}{\lim_{x\to+\infty}\dfrac{6x-8}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3+\dfrac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-\dfrac{8}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 3+\lim_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-\lim_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3+5\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}}{\lim_{x\to+\infty} 6-8\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}} = \frac{3+5\cdot 0}{6-8\cdot 0}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Resumindo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{6x-8} = \frac{1}{2}$$

(b) (1,00 ponto)

$$\lim_{x\to 3} f(x)$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2-5 & \text{se} \quad x\le 3 \\ \sqrt{x+13} & \text{se} \quad x>3 \end{cases}$$

Vejamos inicialmente o limite pela esquerda, isto é,

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x^2-5 = (3)^2-5 = 4$$

e agora o limite pela direita,

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \sqrt{x+13} = \sqrt{3+13} = \sqrt{16} = 4$$

Como os limites laterais são iguais, temos que

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$$

(a) $\lim_{y \to 5} \frac{3y-5}{y-2} =$

(b) $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$

Solução:

(a) $\lim_{y \to 5} \frac{3y-5}{y-2} =$

$$\frac{\lim_{y\to 5}(3y-5)}{\lim_{y\to 5}(y-2)}$$

$$= \frac{\lim_{y\to 5} 3y - \lim_{y\to 5} 5}{\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 2}$$

$$= \frac{3\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 5}{\lim_{y\to 5} y - \lim_{y\to 5} 2}$$

$$= \frac{3\lim_{y\to 5} y - 5}{\lim_{y\to 5} y - 2}$$

$$= \frac{3.5-5}{5-2}$$

$$= \frac{15-5}{5-2}$$

$$= \frac{10}{3}$$

(b) $\lim_{x \to 2} x^3 - 3x + 5 =$

$$= \lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 3x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} x^3 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} 2^3 - 3\lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= \lim_{x\to 2} 8 - 3\lim_{x\to 2} 2 + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 8 - 3.2 + 5$$

$$= 7$$

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{t \to -0} \left(\frac{3t-5}{t+2} \right)$

(b) $\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x+4}$

Solução:

(a) $\lim_{t \to 0} \left(\frac{3t-5}{t+2} \right) = \frac{3.0-5}{0+2} = -\frac{5}{2}$

(b) $\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x+4} = ?$

mas

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x+4)(x^2+3x+2) = (x+4)(x+1)(x+2)$$

portanto

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x+4} =$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}{x+4} =$$

$$\lim_{x \to -4} \frac{(x+4)(x+1)(x+2)}{x+4} =$$

$$\lim_{x \to -4} (x+1)(x+2) =$$

$$(-3)(-2) = 6$$

b) $\lim_{x \to +3} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 - x - 6} =$

Estudando o sinal de $\frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 - x - 6}$ quando $x \to +3$,ou seja, quando x tende a 3 pela direita (assumindo valores maiores do que 3), notamos que :

$2x^2 + 5x + 1 > 0$, para todo $x > 3$

$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, para todo $x > 3$

Logo,

$$\lim_{x \to +3} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 - x - 6} = +\infty$$