

Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2º semestre de 2018 - Gabarito

Questões

1. (2 pontos) _____

Determine as inversas das seguintes funções

(a) $f(x) = x^3 + 1$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

Solução:

(a) $f(x) = x^3 + 1$

$$y = x^3 + 1 \implies x^3 = y - 1 \implies x = \sqrt[3]{y - 1}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

$$y = \sqrt[3]{x - 2} \implies y^3 = x - 2 \implies y^3 + 2 = x$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = x^3 + 2$

2. (2 pontos) _____

Calcule os limites abaixo.

(a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2}$

Solução:

(a)
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{(x - 3)(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3} = \frac{3^2 + 3 \cdot 3 + 9}{3 + 3} = \frac{9}{2}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)}{(x - 1)} = \infty$$

3. (2 pontos) _____

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

onde

$$f(x) = \frac{1}{x - 2}$$

Solução:

O denominador é zero em $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty$$

4. (2 pontos) _____

Ache as discontinuidades das seguintes funções (se existirem):

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Solução:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Aparentemente há uma discontinuidade no ponto $x = 2$, já que $x = 2$ não pertenceria ao domínio da função.

Entretanto, esta discontinuidade pode ser removida se reescrevermos a função da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = x + 2$$

o que elimina a discontinuidade em $x = 2$.

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

No ponto $x = 2$ parece haver uma descontinuidade. Vamos mostrar que esta descontinuidade existe.

O ponto $x = 2$ pertence ao domínio da função. Os limites laterais neste ponto são:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$$

entretanto o valor da função em $x = 2$ é $f(2) = 0$.

Logo

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \neq f(2) = 0$$

Portanto $f(x)$ é descontinua em $x = 2$.

5. (2 pontos) _____

Para a função a seguir, mostre que ela é contínua no intervalo indicado.

$$f(x) = 1 \quad \text{em} \quad (0, 1]$$

Solução:

Para ser contínua no intervalo a função deve ser contínua em cada ponto do intervalo.

Para ser contínua em um ponto a este ponto deve pertencer ao domínio da função, o limite da função neste ponto deve existir e o valor do limite deve coincidir com o valor da função no ponto, isto é

$$\begin{cases} 1. & a \in D(f) \\ 2. & \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ existe (é igual a um número)} \\ 3. & \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Cada ponto do intervalo pertence ao domínio da função o que satisfaz a condição 1. em todos os pontos do intervalo. Ademais o limite da função para cada ponto no intervalo existe, já que

$$\lim_{x \rightarrow a} 1 = 1 \quad \forall x \in (0, 1]$$

Logo são satisfeitas as condições 2. e 3..

Consequentemente, $f(x) = 1$ é contínua no intervalo $(0, 1]$.