**Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina: Matemática para Computação**
**AP2 - 1$^o$ semestre de 2010 - Gabarito**

## Questões

1. (1.0 ponto)

Analise onde a função é crescente ou decrescente e ache os pontos de máximo e mínimo relativos da seguinte função

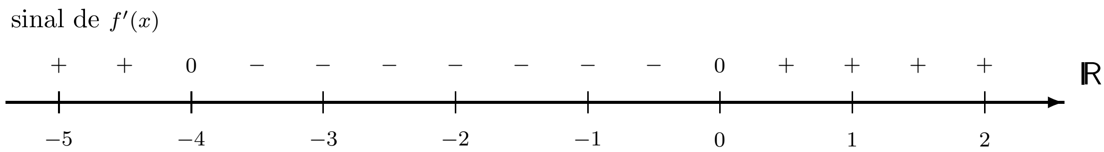
$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 7$$

**Solução:**

Vamos verificar a inclinação da curva e os pontos extremos locais

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Longrightarrow 3x(x+4) = 0$$

Portanto, os pontos aonde a derivada se anula são $x = 0$ e $x = -4$. Vamos agora verificar o sinal da primeira derivada em torno desses pontos. O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada na região de interesse.




Desta forma verificamos que o ponto $(x, y) = (-4, 25)$ é um ponto de máximo e que o ponto $(x, y) = (0, -7)$ é um ponto de mínimo. Além disso, $f$ é crescente em $(-\infty, -4)$ e $(0, \infty)$ e é decrescente em $(-4, 0)$.

2. (2.0 pontos)

Calcule as antiderivadas

(a) $$\int (x^2+1)^3 x\,dx$$

(b) $$\int (x^3+2x^{\frac{5}{2}}+5x^{\frac{3}{2}}+10x)\,dx$$

**Solução:**

(a) $$\int (x^2+1)^3 x\,dx$$

Por substituição com $u=(x^2+1)/2$, logo $du/dx = 1/2\cdot(2x)=x$, logo

$$\int (x^2+1)^3 x\,dx = \int 8u^3du = 8\int u^3du = 8\frac{u^4}{4} = 2u^4 = 2\left[\frac{(x^2+1)}{2}\right]^4 =$$

$$\int (x^2+1)^3 x\,dx = 2\frac{(x^2+1)^4}{16} = \frac{(x^2+1)^4}{8}$$

(b) $$\int (x^3+2x^{\frac{5}{2}}+5x^{\frac{3}{2}}+10x)\,dx =$$

$$\int x^3\,dx + \int 2x^{\frac{5}{2}}\,dx + \int 5x^{\frac{3}{2}}\,dx + \int 10x\,dx =$$

$$\int x^3\,dx + 2\int x^{\frac{5}{2}}\,dx + 5\int x^{\frac{3}{2}}\,dx + 10\int x\,dx =$$

$$\frac{x^4}{4} + 2\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right] + 5\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right] + 10\frac{1}{2}x^2 =$$

$$\frac{x^4}{4} + \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{2}x^2$$

3. ( 2,0 pontos)

Calcule as integrais definidas.

(a) $$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\,dx$$

(b) $$\int_{1}^{4}\left(\sqrt{z}-z\right)^2\,dz$$

**Solução:**

(a) $$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\,dx =$$

$$\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx - \int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^3}\right)\,dx =$$

$$\int_{-3}^{-1} x^{-2}\,dx - \int_{-3}^{-1} x^{-3}\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{-1}x^{-1}\right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{1}{-2}x^{-2}\right]_{-3}^{-1} =$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]_{-3}^{-1} =$$

$$\left[-\frac{1}{-1} - \left(-\frac{1}{-3}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-1)^2} - \frac{1}{(-3)^2}\right] =$$

$$\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{9}\right] =$$

$$\left[\frac{3-1}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{9-1}{9}\right] =$$

$$\left[\frac{2}{3}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{8}{9}\right] =$$

$$\left[\frac{12}{18}\right] + \left[\frac{8}{18}\right] = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

(b)
$$\int_1^4 \left(\sqrt{z} - z\right)^2 \, dz =$$

$$\int_1^4 \left((\sqrt{z})^2 - 2\sqrt{z}z + z^2\right) \, dz = \int_1^4 \left(z - 2\sqrt{z}z + z^2\right) \, dz =$$

$$\int_1^4 \left(z - 2z^{3/2} + z^2\right) \, dz = \int_1^4 z \, dz - 2\int_1^4 z^{3/2} \, dz + \int_1^4 z^2 \, dz =$$

$$\left[\frac{z^2}{2}\right]_1^4 - 2\left[\frac{2}{5}z^{5/2}\right]_1^4 + \left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^4 = \left[\frac{z^2}{2}\right]_1^4 - 2\left[\frac{2}{5}z^2 z^{1/2}\right]_1^4 + \left[\frac{1}{3}z^3\right]_1^4 =$$

$$\left[\frac{4^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right] - \frac{4}{5}\left[4^2\sqrt{4} - 1^2\sqrt{1}\right] + \left[\frac{1}{3}4^3 - \frac{1}{3}1^3\right] =$$

$$\left[\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right] - \frac{4}{5}[16 \cdot 2 - 1 \cdot 1] + \left[\frac{64}{3} - \frac{1}{3}\right] =$$

$$\left[\frac{15}{2}\right] - \left[\frac{124}{5}\right] + \left[\frac{63}{3}\right] = \frac{225 - 744 + 630}{30} = \frac{111}{30} = \frac{37}{10}$$

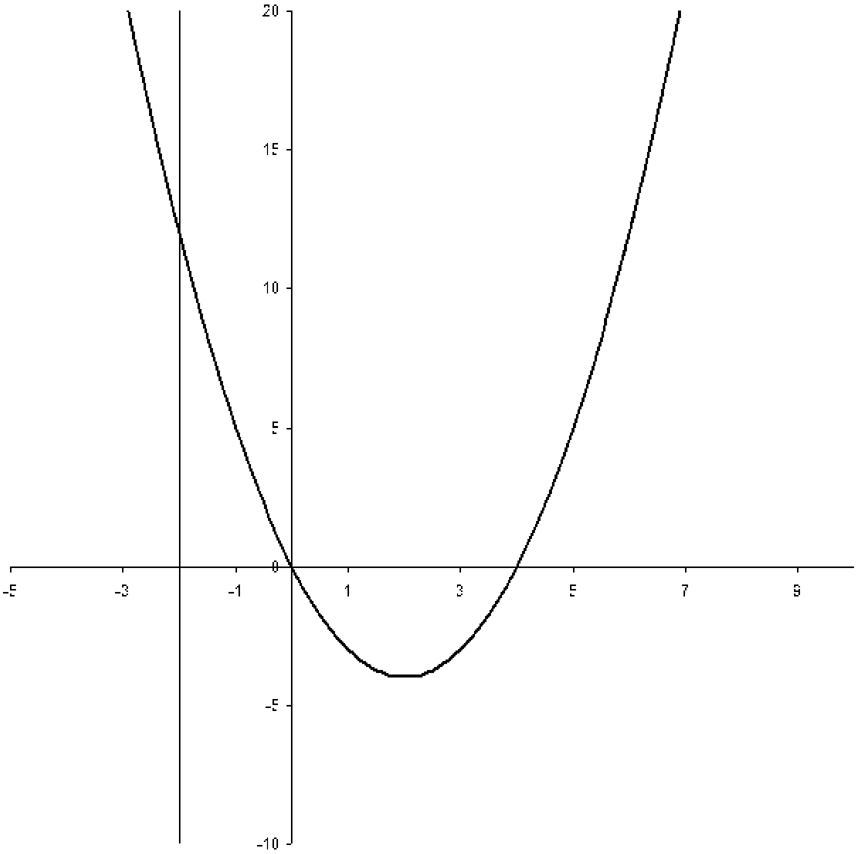
4. (2.0 pontos)

Esboce as regiões e calcule as áreas pedidas.

(a) Ache a área total entre a parábola $y = (x^2 - 4x)$, o eixo $x$ e a reta $x = -2$.

(b) Ache a área total entre $y = x^3$, $y = 3x$ e $y = x$.

**Solução:**



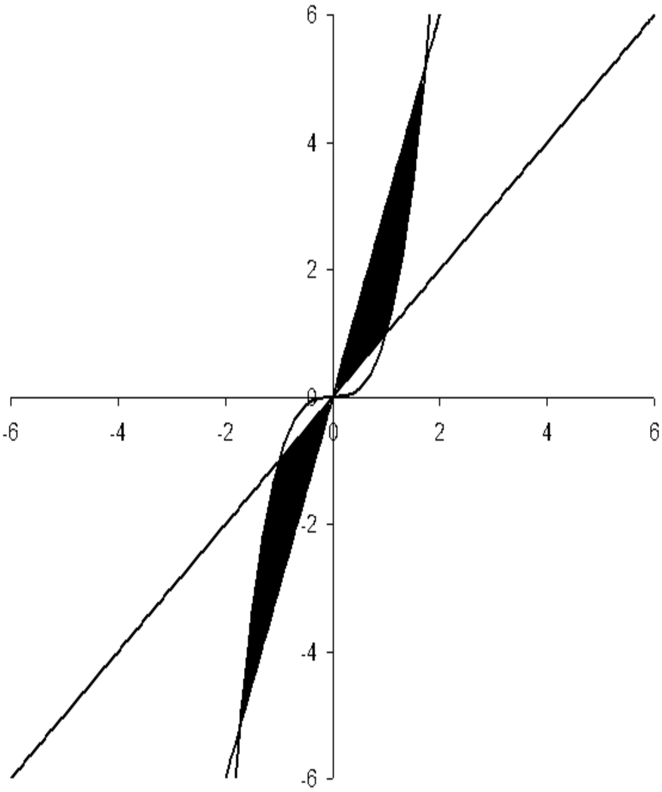

(a)

A área desejada é dada por

$$\int_{-2}^{0}(x^2-4x)\,dx = \int_{-2}^{0}x^2\,dx - \int_{-2}^{0}4x\,dx = \int_{-2}^{0}x^2\,dx - 4\int_{-2}^{0}x\,dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} = \left[\frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right] - 4\left[\frac{0^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right] =$$

$$\frac{8}{3} + \frac{16}{2} = \frac{16+48}{6} = \frac{64}{6} = \frac{32}{3}$$




(b)

Temos que determinar aonde as curvas se interceptam para definir os limites de integração.

Para as curvas $y = x^3$ e $y = x$:

$$y = x^3 \ \text{ e } \ y = x \implies x^3 = x \implies x^3 - x = x(x^2 - 1) = 0 \implies x = 0 \ \text{ ou } \ x = \pm 1$$

Assim as duas curvas se interceptam em $x = 0$, $x = -1$ e $x = 1$.

Para as curvas $y = x^3$ e $y = 3x$:

$$y = x^3 \ \text{ e } \ y = 3x \implies x^3 = 3x \implies x^3 - 3x = x(x^2 - 3) = 0 \implies x = 0 \ \text{ ou } \ x = \pm\sqrt{3}$$

Assim as duas curvas se interceptam em $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ e $x = \sqrt{3}$.

Explorando a simetria vamos calcular somente as áreas no primeiro quadrante e depois multiplicar por 2. Assim, metade da área desejada é dada por

$$\int_0^1 [3x - x] \, dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left[3x - x^3\right] \, dx = \int_0^1 [2x] \, dx + \int_1^{\sqrt{3}} \left[3x - x^3\right] \, dx =$$

$$\left[x^2\right]_0^1 + \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_1^{\sqrt{3}} = \left[1^2 - 0^2\right] + \left[\left\{3\frac{\sqrt{3}^2}{2} - \frac{\sqrt{3}^4}{4}\right\} - \left\{3\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right\}\right] =$$

$$\left[1^2\right] + \left[\left\{3\frac{3}{2} - \frac{3^2}{4}\right\} - \left\{3\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right\}\right] = \left[1^2\right] + \left[\left\{\frac{9}{2} - \frac{9}{4}\right\} - \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right\}\right] =$$

$$1 + \frac{18-9}{4} - \frac{6-1}{4} = \frac{4}{4} + \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{4+9-5}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Enfim, a área total é igual a 2.

5. (1.0 ponto) ---

Ache as derivadas das seguintes funções.

(a) $f(x) = \ln(x^4 + 7x)$

(b) $f(x) = x^2 e^x$

**Solução:**

(a) $f(x) = \ln(x^4 + 7x) \Longrightarrow f'(x) = \Big(\ln(x^4 + 7x)\Big)' = \dfrac{1}{(x^4 + 7x)}\Big(x^4 + 7x\Big)'$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^4 + 7x)}\Big(4x^3 + 7\Big) = \frac{4x^3 + 7}{x^4 + 7x}$$

(b) $f(x) = x^2 e^x \Longrightarrow f'(x) = \Big(x^2\Big)' e^x + x^2\,(e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = e^x(2x + x^2)$

6. (2.0 pontos) ---

Calcule os seguintes limites utilizando a regra de L'Hôpital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x - 4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$

**Solução:**

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x - 4} = \lim_{x\to 4} \frac{4x^3}{1} = \lim_{x\to 4} 4x^3 = 4 \cdot 4^3 = 256$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x}{1} = e^2$