Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 1^o semestre de 2017 - Gabarito

Questões

1. (2 pontos)

   Determine o domínio e a imagem das seguintes funções:

   (a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ 1/x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

   (b) $$f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se} \quad -20 < x < -7 \\ \sqrt[3]{x-1} & \text{se} \quad -7 \leq x < \infty \end{cases}$$

   (c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

   Solução:

   (a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ 1/x & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

   Claramente o domínio D e a imagem I são

   $$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -1 < x < 0 \text{ ou } 0 < x < 1\}$$

   $$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } 1 < y < \infty\}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se} \quad -20 < x < -7 \\ \sqrt[3]{x-1} & \text{se} \quad -7 \le x < \infty \end{cases}$$

Domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tais que } -20 < x < \infty\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } -2 \le y < \infty\}$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Domínio D e a imagem I são

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

$$I = \{y \in \mathbb{R}\}$$

2. (2 pontos) ---

Para as funções dadas calcule:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = x^3 - x + 1$

(b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

Solução:

(a) $f(x) = x^3 - x + 1$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h) + 1 - (x^3 - x + 1)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h + 1 - x^3 + x - 1}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - h}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \left[\ 3x^2 + 3xh + h^2 - 1\ \right] =$$

$$\left[\lim_{h\to 0} 3x^2 + \lim_{h\to 0} 3xh + \lim_{h\to 0} h^2 - \lim_{h\to 0} 1\right] =$$

$$\left[3x^2 + 0 + 0 - 1\right] =$$

$$= 3x^2 - 1$$

(b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)+3} - \sqrt{x+3}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+3} - \sqrt{x+3}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h+3) - (x+3)}{h\left(\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+3} + \sqrt{x+3}} = \frac{1}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x+3}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$$

3. (2 pontos)

Discuta a continuidade da função usando a definição de continuidade:

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

Solução:

Para que a função seja contínua em toda a reta real em todos os pontos o limite deve existir e ser igual ao valor da função nestes pontos.

Sabemos que a função não está definida para $x = 2$. Vamos verificar sua vizinhaça, seus limites laterais.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

logo,

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = \nexists$$

consequentemente a função não é contínua em $x = 2$.

4. (2 pontos)

Calcule as derivadas de primeira ($f'(x)$) ordem das funções

(a)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^3}$$

(b)

$$f(x) = x^3\sqrt{3-2x^2} + \frac{1}{x}$$

Solução:

(a)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{x^3} = \frac{1}{x^{1/3}} + 2x^{-3} = x^{-1/3} + 2x^{-3}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-1/3-1} + 2(-3)x^{-3-1}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3} - 6x^{-4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3x^{4/3}} - \frac{6}{x^4}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} - \frac{6}{x^4}$$

(b)

$$f(x) = x^3\sqrt{3-2x^2} + \frac{1}{x} = x^3\left[3-2x^2\right]^{1/2} + x^{-1}$$

$$f'(x) = \left(x^3\right)'\left(\left[3-2x^2\right]^{1/2}\right) + \left(x^3\right)\left(\left[3-2x^2\right]^{1/2}\right)' + \left(x^{-1}\right)'$$

$$f'(x) = \left(3x^2\right)\left(\left[3-2x^2\right]^{1/2}\right) + \left(x^3\right)\left(\frac{1}{2}\left[3-2x^2\right]^{1/2-1}\left(3-2x^2\right)'\right) + \left(-x^{-1-1}\right)$$

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{3-2x^2} + \left(x^3\right)\left(\frac{1}{2}\left[3-2x^2\right]^{-1/2}(-4x)\right) - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 3x^2\sqrt{3-2x^2} - \frac{2x^4}{\sqrt{3-2x^2}} - \frac{1}{x^2}$$

5. (2 pontos)

Desenhe o gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$, usando a análise de funções.

Solução:

Domínio:

$$D = \{x \in \mathbb{R}\}$$

Imagem:

$$I = \{y \in \mathbb{R}\}$$

Raízes:

Verificando o sinal da função em alguns pontos vemos que ela corta o eixo x entre 2 e 3, já que há troca de sinal de $f(x)$.

sinal de $f(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$\mathbb{R}$
	-1	0	1	2	3	4	

Existe pelo menos uma raiz em $(2, 3)$.

Máximos e Mínimos Locais:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 6x^2 - 10x + 4 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \text{ ou } x = 1$$

Vejamos o sinal da primeira derivada.

Para $x < \dfrac{2}{3} \longrightarrow f' > 0 \longrightarrow f$ é crescente

Para $\dfrac{2}{3} < x < 1 \longrightarrow f' < 0 \longrightarrow f$ é decrescente

Para $x > 1 \longrightarrow f' > 0 \longrightarrow f$ é crescente

Portanto, em $x = \dfrac{2}{3} \approx 0{,}6666...$ há um ponto de máximo. $f(\dfrac{2}{3}) = -\dfrac{161}{27} \approx -5{,}96296..$

E, em $x = 1$ há um ponto de mínimo. $f(1) = -6$

Pontos de inflexão:

$f''(x) = 0$

$f''(x) = 12x - 10$

$f''(x) = 0 \implies 12x - 10 = 0 \implies x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333...$

Há um ponto de inflexão em $x = \frac{5}{6} \approx 0{,}8333...$, onde $f\left(\frac{5}{6}\right) \approx -5{,}9814...$