Matemática para Computação

Gabarito da Avaliação Presencial 2

2º semestre de 2005

1ª Questão

a) $\int \left(\frac{1}{2t} - \sqrt{2}\ e^t \right) dt = \int \frac{1}{2t}\ dt - \int \sqrt{2}\ e^t\ dt = \frac{1}{2}\ \ln\ t - \sqrt{2}\ e^t + C$

b) $\int \left(x^{2/3} - 4x^{-1/5} + 4 \right) dx = \int x^{2/3}\ dx - \int 4x^{-1/5} dx + \int 4\ dx = \frac{x^{5/3}}{5/3} - 4\frac{x^{4/5}}{4/5} + 4x + C =$

$\frac{3}{5} x^{5/3} - 5x^{4/5} + 4x + C$

2ª Questão

a) $\int_0^{3/4} \frac{1}{1-x}\ dx =$

fazendo-se $u = 1 - x$ obtém-se $du = -dx$

obtém-se a variação de u , utilizando-se a relação $u = 1 - x$ e a variação de x $\left(0, 3/4\right)$:

$u = 1$ quando $x = 0$
$u = \frac{1}{4}$ quando $x = \frac{3}{4}$

Logo,

$$-\int_1^{1/4} \frac{1}{u}\ du = -\ln\ u\Big|_1^{1/4} = \ln\frac{1}{4} - \ln 1 = \ln 1 - \ln 4 - \ln 1 = \ln 4$$

b) $\int_0^1 (2x+1)^2 dx = \int_0^1 \left(4x^2 + 4x + 1\right)\ dx = \left. 4\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + x \right|_0^1 = \frac{4}{3} + 2 + 1 = \frac{4+6+3}{3} = \frac{13}{3}$

3ª Questão

Para determinar os pontos de interseção entre dois gráficos, igualamos as equações: $y = x^2$, $y = x+6$ para obtemos valores de x que determinam y iguais nas 2 equações.

$$x^2 = x + 6$$
$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2}$$

Raízes:

$$x' = \frac{1 + \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2} \quad , \quad x'' = \frac{1 - \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2}$$

$$x' = \frac{1+5}{2} = 3 \quad , \quad x'' = \frac{1-5}{2} = -2$$

Onde $f(3) = 3 + 6 = 9$, $f(-2) = -2 + 6 = 4$
Logo, os pontos de interseção entre os gráficos são: (3,9) e (-2,4).

A área da região entre as curvas é dada por:

A(R)= $\int_{-2}^{3} \left|(x+6) - x^2\right| \, dx = \int_{-2}^{3} (x+6) - x^2 \, dx = \left.\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{3} = \frac{9}{2} + 18 - 9$

$-2 + 12 + \frac{8}{3} = 19 + \frac{9}{2} + \frac{8}{3} = \frac{114 + 27 + 16}{6} = \frac{157}{6}$ unidades quadradas

4ª Questão

V = $\int_{-3}^{3} [f(x)]^2 \, dx = \pi \int_{-3}^{3} \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 = \pi \int_{-3}^{3} \left(9 - x^2\right) = \pi \left(9x - \frac{x^3}{3}\right)_{-3}^{3} =$

$$\pi\left[\left(9.3 - \frac{3^3}{3}\right) - \left(9.(-3) - \frac{(-3)^3}{3}\right)\right] = \pi\left[(27 - 9) - (-27 + 9)\right] = 36 \ \pi$$

Pode-se observar que o gráfico de f(x) em $\left[-3,3\right]$ é um semicírculo e o sólido de revolução correspondente é uma esfera de raio 3. Pelo método dos discos circulares, obtemos a fórmula

V= $\frac{4}{3}\pi\ r^3$

para o volume de uma esfera de raio r.