Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 1^o semestre de 2014 - Gabarito

Questões

1. (2,50 pontos)

Esboce o gráfico da função $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 7$.

Solução:

Primeira Derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 10x + 4$$

Os extremos locais são os pontos aonde a primeira derivada da função se anula. Isto é

$$f'(x) = 0 \implies f'(x) = 6x^2 - 10x + 4 = 0 \implies f'(x) = (x - \frac{2}{3})(x - 1) = 0$$

logo os extremos locais ocorrem em $x = \frac{2}{3}$ e $x = 1$. O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no região de interesse.

$f'(x)$ + + + + + + + 0 − − − 0 + + + $\mathbb{R}$

0 1/3 2/3 1

Logo $f(x)$ é crescente em $(-\infty, 2/3)$ e $(1, \infty)$ e é decrescente em $(2/3, 1)$. O ponto de máximo local é $(2/3, -161/27)$. O ponto de mínimo local é $(1, -6)$.

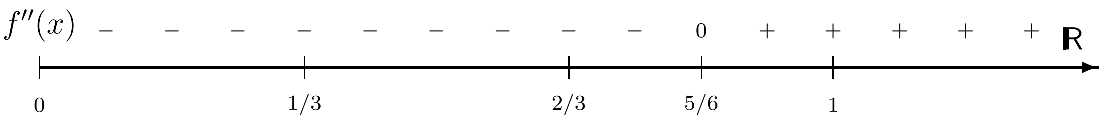
Segunda Derivada:

$$f''(x) = 12x - 10$$

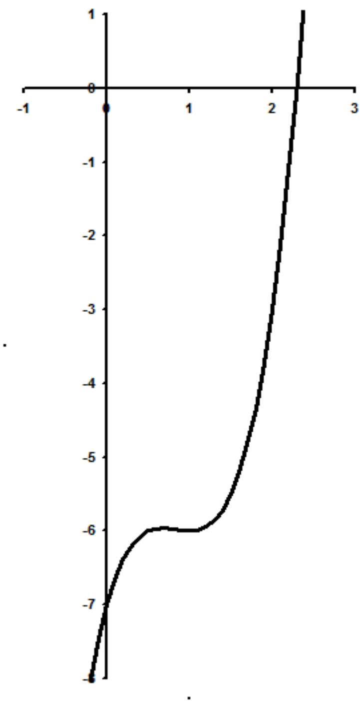
Os pontos de inflexão são os pontos aonde a segunda derivada da função se anula. Isto é

$$f''(x) = 0 \implies 12x - 10 = 0 \implies 6x - 5 = 0 \implies x = \frac{5}{6}$$

logo existe um ponto de inflexão em $x = \frac{5}{6}$.
Mas $f''(x) = 12x - 10 > 0$ quando $x > \dfrac{5}{6}$ e $f''(x) = 12x - 10 < 0$ quando $x < \dfrac{5}{6}$. O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada no região de interesse.



Portanto $f(x)$ é concava quando $x > \dfrac{5}{6}$.
E $f(x)$ é convexa quando $x < \dfrac{5}{6}$.



2. (2,50 pontos)

Ache as seguintes antiderivadas:

(a) $$\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$$

(b) $$\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx$$

(c) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

(d) $$\int 3(2^x)\,dx$$

Solução:

(a)
$$\begin{aligned}\int (1-x)\sqrt{x}\,dx &= \int (1-x)x^{1/2}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx\\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C\\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C\\ &= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int (x^3+2)^{1/2}x^2\,dx &= \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{1/2}3x^2\,dx\\ &= \frac{1}{3}\left\{\frac{(x^3+2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right\}+C\\ &= \frac{1}{3}\left\{\frac{(x^3+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right\}+C\\ &= \frac{2}{9}(x^3+2)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

(c) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

Com $u=x+1$, $du=dx$ e substituindo na integral,

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x+1}\,dx &= \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2-2u+1)u^{\frac{1}{2}}\,du\\ &= \int (u^{\frac{5}{2}}-2u^{\frac{3}{2}}+u^{\frac{1}{2}})\,du\\ &= \frac{2}{7}u^{\frac{5}{2}+1} - \frac{4}{5}u^{\frac{3}{2}+1} + \frac{2}{3}u^{\frac{1}{2}+1} + C\\ &= \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C\\ &= \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{4}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

(d)
$$\int 3(2^x)\,dx = 3\int (2^x)\,dx = \frac{3}{\ln 2}\int (\ln 2)(2^x)\,dx$$
$$= \frac{3}{\ln 2}2^x + C = \frac{3 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$$

3. (2,50 pontos) ---

Usando a regra de L'Hôpital calcule os limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x}$

Solução:

(a) Quando x se aproxima de 0 pela direita, $\ln x$ tende a $-\infty$. E quando x se aproxima de 0 pela direita, $1/x$ tende a $+\infty$. Logo podemos aplicar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

(b) $\dfrac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow$ L'Hôpital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(c) $\dfrac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow$ L'Hôpital

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

4. (2,50 pontos)

Ache a área da região entre a curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ e o eixo x.

Solução:

$$y = x^3 - 6x^2 + 8x = x\left(x^2 - 6x + 8\right) = x(x-2)(x-4)$$

Logo a curva corta o eixo x nos pontos $x = 0$, $x = 2$ e $x = 4$. Olhando a primeira derivada y' vemos que há um máximo e um mínimo em $x = 2 - (2/3)\sqrt{3}$ e $x = 2 + (2/3)\sqrt{3}$, respectivamente. Assim vamos separar a integral em duas regiões, a saber, $[0,2]$ e $[2,4]$.

$$y' = 3x^2 - 12x + 8 \Longrightarrow y' = 3x^2 - 12x + 8 = 0 \Longrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 96}}{6}$$

$$y' = 0 \Longrightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6} = \frac{12 \pm 4\sqrt{3}}{6} = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{array}{rcll} x < 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \longrightarrow & y' > 0 & \text{a curva cresce} \\ 2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} < x < 2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} & \longrightarrow & y' < 0 & \text{a curva decresce} \\ 2 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} < x & \longrightarrow & y' > 0 & \text{a curva cresce} \end{array}$$

E a integral

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^2 y\, dx + \int_2^4 (-y)\, dx \\ &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx - \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_2^4 \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4 \\ &= \left[\left(\frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 2\cdot 0^3 + 4\cdot 0^2\right)\right] - \\ &\qquad \left[\left(\frac{4^4}{4} - 2\cdot 4^3 + 4\cdot 4^2\right) - \left(\frac{2^4}{4} - 2\cdot 2^3 + 4\cdot 2^2\right)\right] \\ &= \left[\left(\frac{16}{4} - 16 + 16\right) - (0 - 0 + 0)\right] - \left[\left(\frac{256}{4} - 128 + 64\right) - \left(\frac{16}{4} - 16 + 16\right)\right] \\ &= [4] - [-4] = 4 + 4 = 8 \end{aligned}$$