

Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2º semestre de 2007 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) _____

Dada a função $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$, verifique onde essa função é crescente, decrescente e dê os pontos de máximo e mínimo, caso existam.

Solução:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 13$$

Intervalos onde a função é crescente ou decrescente:

Pontos críticos:

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$x = 2, x = -1$$

Estudo do sinal da derivada:

$$f'(x) > 0, -1 < x, x > 2$$

$$f'(x) < 0, \quad -1 < x < 2$$

$f(x)$ é uma função crescente de x para $-1 < x, x > 2$;

$f(x)$ é uma função decrescente de x para $-1 < x < 2$.

Pontos de Máximo e Mínimo

A partir dos valores de x : $x = -1$ e $x = 2$ e da variação do sinal da derivada nesses valores de x podemos obter os pontos de máximo e mínimo relativos da função:

i) $x = -1$

$$x < -1 \rightarrow f'(x) > 0$$

$$-1 < x < 2 \rightarrow f'(x) < 0$$

ii) $x = 2$

$$-1 < x < 2 \rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 2 \rightarrow f'(x) > 0$$

Existe um ponto de máximo em $x = -1$; $(-1, f(-1)) = (-1, 21)$

e um ponto de mínimo em $x = 2$; $(2, f(2)) = (2, -15)$

2. (1,0 ponto) _____

Calcule as antiderivadas:

(a) (0,5 ponto)

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx =$$

(b) (0,5 ponto)

$$\int (\sqrt{2+5y}) \, dy =$$

Solução:

(a) (0,5 ponto)

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx =$$

A função $f(x)$ é dada por:

$$f(x) = x^2 \sqrt{x} = x^2 \times x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$$

Dessa forma, a integral é dada por:

$$\int x^2 \sqrt{x} \, dx = \int x^{\frac{5}{2}} \, dx = \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + C = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$$

(b) (0,5 ponto)

$$\int (\sqrt{2+5y}) \, dy =$$

Seja $f(y) = \sqrt{2+5y}$, escolhemos: $u = 2 + 5y$.

A partir dessa escolha,

$$du = 5dy$$

E dy pode ser definido em função de du da seguinte forma:

$$dy = \frac{du}{5}$$

Dessa forma, a integral pode ser reescrita em função de u , sendo dada por:

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{2+5y}) \, dy &= \\ &= \int (\sqrt{u}) \frac{du}{5} \\ &= \int \frac{1}{5} (\sqrt{u}) \, du \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Em função de y :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} \times (2+5y)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{15} \times \sqrt{(2+5y)} + C \end{aligned}$$

3. (1,5 ponto)

Utilizando a definição de integral definida, calcule:

(a) (0,75 ponto)

$$\int_0^2 (x^3 + 3x^2) dx =$$

(b) (0,75 ponto)

$$\int_a^{2a} (a + z) dz =$$

Solução:

(a) (0,75 ponto)

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x^3 + 3x^2) dx &= \\ &= \left[\frac{x^4}{4} + 3 \times \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \left[\frac{2^4}{4} + 3 \times \frac{2^3}{3} \right] \\ &= \left[\frac{16}{4} + 3 \times \frac{8}{3} \right] \\ &= \left[4 + 3 \times \frac{8}{3} \right] \\ &= 4 + 8 \\ &= 12 \end{aligned}$$

(b) (0,75 ponto)

$$\begin{aligned} \int_a^{2a} (a + z) dz &= \\ &= \left(az + \frac{z^2}{2} \right)_a^{2a} \\ &= a(2a - a) + \left(\frac{(2a)^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= a^2 + 2a^2 - \frac{a^2}{2} \\ &= 3a^2 - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{6a^2 - a^2}{2}$$

$$= \frac{5a^2}{2}$$

4. (1,5 ponto) _____

Calcule as áreas abaixo e esboce seus gráficos:

(a) (0,75 ponto) a área limitada pela curva $y = \frac{x^2 - 4}{x^2}$, eixo x , $x = 2$ e $x = 4$

Integral - (0,5 ponto);

Gráfico - (0,25 ponto).

(b) (0,75 ponto) a área limitada pela curva $y = x^3 - 4x$ e pelo eixo x

Integral - (0,5 ponto);

Gráfico - (0,25 ponto).

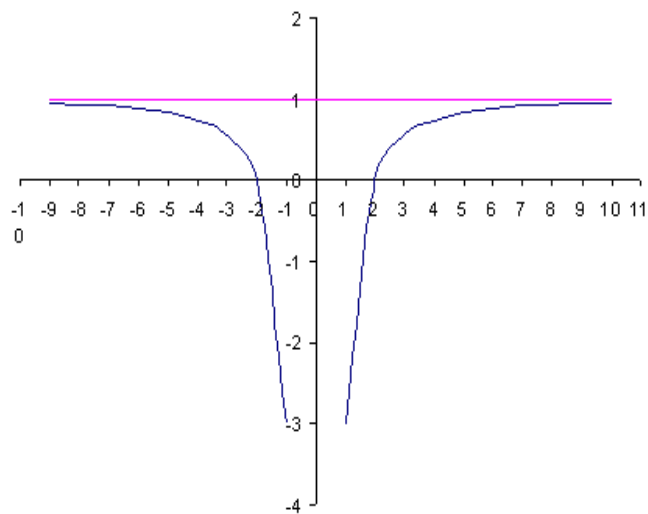
Solução:

(a) (0,75 ponto) a área limitada pela curva $y = \frac{x^2 - 4}{x^2}$, eixo x , $x = 2$ e $x = 4$

Integral - (0,5 ponto);

Gráfico - (0,25 ponto).

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{x^2 - 4}{x^2} dx &= \\ &= \int_2^4 1 - \frac{4}{x^2} dx \\ &= [x]_2^4 - \int_2^4 4 \times x^{-2} dx \\ &= \left[x - \frac{4x^{-1}}{-1} \right]_2^4 \\ &= [x + 4x^{-1}]_2^4 \\ &= \left[(4 - 2) + \frac{4}{4} - \frac{4}{2} \right] \\ &= 2 + 1 - 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

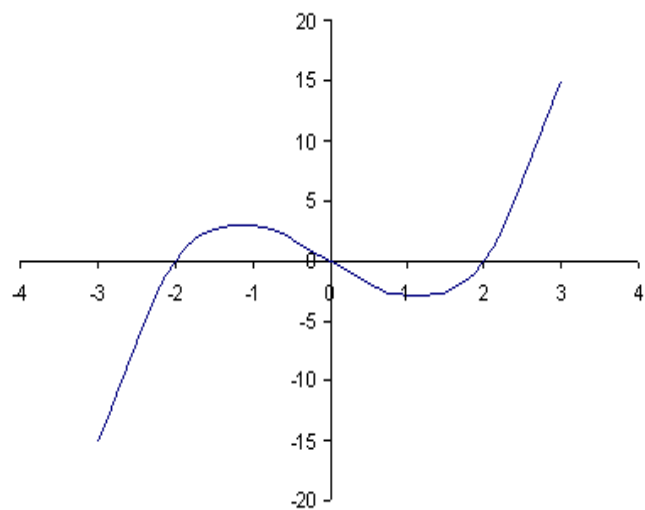


(b) (0,75 ponto) a área limitada pela curva $y = x^3 - 4x$ e pelo eixo x

Integral - (0,5 ponto);

Gráfico - (0,25 ponto).

$$\begin{aligned}
 & \int_{-2}^0 x^3 - 4x dx - \int_0^2 x^3 - 4x dx = \\
 & = \left[\frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2} \right]_0^2 \\
 & = - \left[\frac{(-2)^4}{4} - 4 \frac{(-2)^2}{2} \right] + \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{4 \times (2)^2}{2} \right] \\
 & = - [4 - 8] - [4 - 8] \\
 & = 4 - (-4) \\
 & = 8
 \end{aligned}$$



5. (2,5 pontos) _____

Utilizando as ferramentas do cálculo, determine os itens abaixo para a função $y = \frac{1}{x^2}$:

- 1 - Domínio (0,5 ponto);
- 2 - Intersecções com os eixos X e Y (0,5 ponto);
- 3 - Assíntotas verticais e horizontais (0,5 ponto);
- 4 - Pontos de máximo e mínimo (0,5 ponto);
- 5 - Gráfico: (0,5 ponto).

Solução:

1 - Domínio (0,5 ponto): $\mathbf{R - \{0\}}$

2 - Intersecções com os eixos X e Y (0,5 ponto):

Eixo X :

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$0 = \frac{1}{x^2}$$

não existe intersecção no eixo X ;

Eixo Y :

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{0}$$

não existe intersecção no eixo Y ;

3 - Assíntotas verticais e horizontais (0,5 ponto):

Assíntota Vertical:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{a^2} = \pm\infty$$

Pela definição acima, temos que a assíntota vertical é $x = 0$.

Assíntota Horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Da mesma forma, a assíntota horizontal é $y = 0$.

4 - Pontos de máximo e mínimo (0,5 ponto):

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x^2} \right)'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1)' \cdot (x^2) - (x^2)'(1)}{(x^2)^2}$$

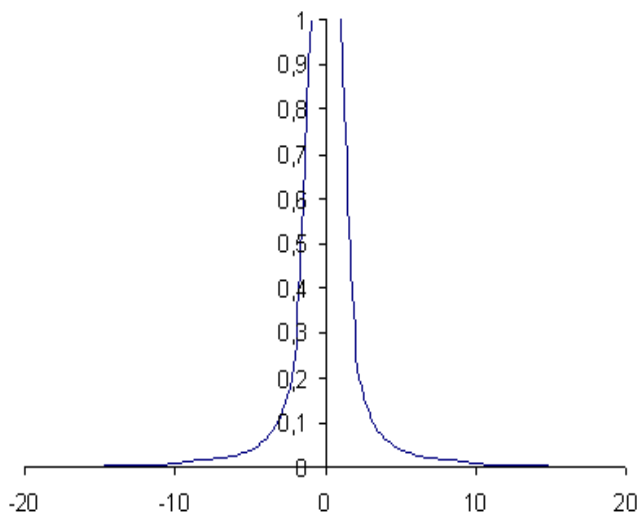
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{x^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3}$$

O ponto crítico dessa função tem: $x = 0$. Contudo, esse valor de x não pertence ao

domínio, não podendo definir ponto de máximo ou de mínimo. Portanto, não existe ponto de máximo ou de mínimo para a função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

5 - Gráfico: (0,5 ponto).



6. (1,5 ponto) _____

Ache o volume do sólido gerado quando a região limitada por $x = 2y^2$, $x = 0$, $y = 6$ é girada em torno do eixo x . Utilize o método dos discos integrando ao longo do eixo x . Esboce o gráfico.

Integral - (0,8 ponto);

Gráfico - (0,7 ponto).

Solução:

$$V = \pi \int_0^6 2y^2 dy = \pi \left[\frac{2y^3}{3} \right]_0^6 = \pi \left[\frac{2 \times 6^3}{3} \right]$$

$$= \frac{432\pi}{3} = 144\pi$$

7. (1,0 ponto)

Determine o limite para cada uma das funções abaixo:

Obs: Utilize L'Hôpital.

(a) (0,5 ponto)

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y^3 + 6y}{3y^3 + 2y} =$$

(b) (0,5 ponto)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} =$$

Solução:

(a) (0,5 ponto)

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{4y^3 + 6y}{3y^3 + 2y} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(4y^3 + 6y)'}{(3y^3 + 2y)'} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{12y^2 + 6}{9y^2 + 2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{12y^2 + 6}{9y^2 + 2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{6}{2} = 3 \end{aligned}$$

(b) (0,5 ponto)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{x + 3} &= \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^3 + 27)'}{(x + 3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^3 + 27)'}{(x + 3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} 3x^2 \\ &= 27 \end{aligned}$$