Matemática para Computação
Avaliação Presencial 1 — Segundo Semestre — 2005 — Gabarito

1. (2,5 pontos) Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^2(32 - x^2)$.

   Resolução:

   (a) $f(x) = x^2(12 - x^2)$;

   i) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f = \mathbb{R}$).

   ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

   $$\lim_{x\to-\infty}(x^2(12-x^2)) = \lim_{x\to-\infty}(\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{(12-x^2)}_{\to-\infty}) = -\infty$$

   e

   $$\lim_{x\to+\infty}(x^2(12-x^2)) = \lim_{x\to+\infty}(\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{(12-x^2)}_{\to-\infty}) = -\infty$$

   Portanto não existem assíntotas horizontais.
   E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.

   $$\lim_{x\to a}(x^2(12-x^2)) = (a^2(12-a^2)) \in \mathbb{R}, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

   Logo também não existem assíntotas verticais.

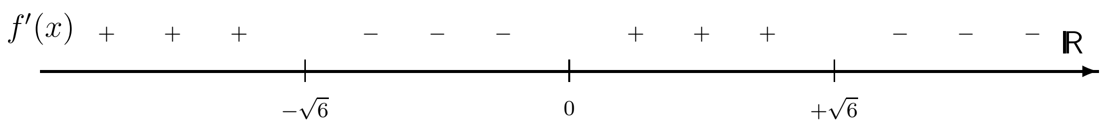
   iii) Vejamos os máximos e mínimos locais.

   $$f(x) = x^2(12-x^2) = 12x^2 - x^4$$

   e

   $$f'(x) = 24x - 4x^3 = 4x(6-x^2) \quad \longrightarrow f'(x) = 0 \quad \longrightarrow 4x(6-x^2) = 0$$

   Os máximos e mínimos locais ocorrem em $x = 0$, $x = +\sqrt{6}$ e $x = -\sqrt{6}$.
   O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada nos intervalos estudados.



   Logo $f(x)$ é crescente em $(-\infty, -\sqrt{(6)})$ e $(0, +\sqrt{(6)})$ e é decrescente em $(-\sqrt{(6)}, 0)$ e $(+\sqrt{(6)}, \infty)$.
   Os pontos de máximo locais são $(-\sqrt{(6)}, 36)$ e $(+\sqrt{(6)}, 36)$.
   O ponto de mínimo local é $(0, 0)$.

   iv) Vejamos os pontos de inflexão.

   $$f''(x) = 24 - 12x^2 = 12(2 - x^2)$$

   portanto os pontos de inflexão ocorrem em $x = -\sqrt{2}$ e $x = +\sqrt{2}$. O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada em torno desses pontos.

$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$\mathbb{R}$
		$-\sqrt{2}$			0			$+\sqrt{2}$					

Logo, pelo sinal da segunda derivada, f é côncava para baixo em $(-\infty, -\sqrt{2})$ e $(+\sqrt{2}, +\infty)$, e é côncava para cima em $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$. Os pontos de inflexão são $(-\sqrt{2}, 20)$ e $(\sqrt{2}, 20)$

v) Interseções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^2(12 - x^2)$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (interseção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

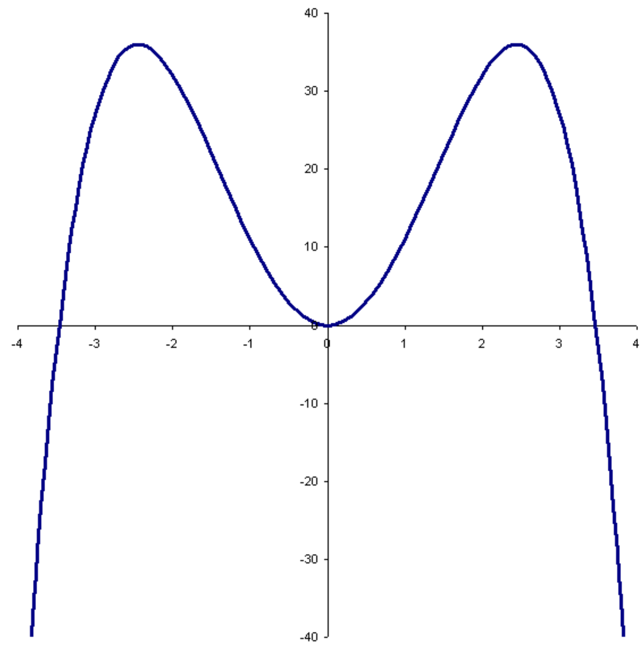
$$0 = x^2(12 - x^2)$$

$$f(x) = \begin{cases} f(-\sqrt{12}) & = & (-\sqrt{12})^2(12 - (-\sqrt{12})^2) & = & 0 \\ f(0) & = & (0)^2(12 - (0)^2) & = & 0 < 0 \\ f(\sqrt{12}) & = & (\sqrt{12})^2(12 - (\sqrt{12})^2) & = & 0 \end{cases}$$

interseções com o eixo y) são $(-\sqrt{12}, 0)$, $(0, 0)$ e $(-\sqrt{12}, 0)$.

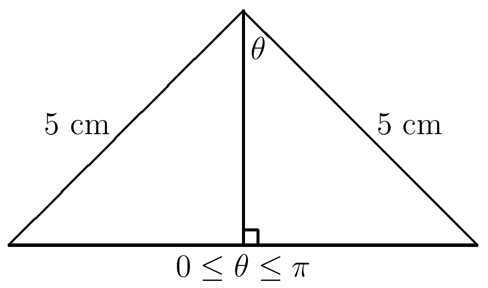
Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 0$, logo a interseção com o eixo y $(0, 0)$.

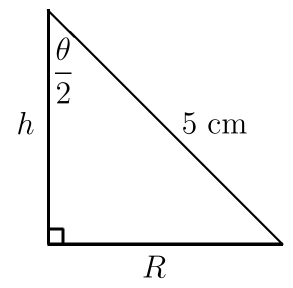


2. (2,5 pontos) Um cone é gerado por um triângulo isósceles cujos lados iguais medem 5 cm e formam um ângulo de $2\ \theta$. Qual o ângulo correspondente ao cone de maior volume nestas condições?

Resolução:



Vejamos o problema inicialmente do ponto de vista geométrico,



O volume do cone vale

$$V = \frac{1}{3}\pi h R^2$$

do triângulo podemos relacionar a altura h e o raio R com o ângulo θ, isto é

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{R}{5} \\ \cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{h}{5} \end{cases}$$

logo

$$\begin{cases} R = 5\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \\ h = 5\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

Agora podemos escrever o volume do cone em função do ângulo θ

$$V(\theta) = \frac{5^3}{3}\pi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Sabemos, entretanto, que o valor máximo do volume ocorrerá quando a derivada do volume em função de θ se anular. Isto é,

$$\begin{aligned}
V'(\theta) &= \frac{5^3}{3}\pi\left[\left(2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{5^3}{3}\pi\cdot\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{5^3}{6}\pi\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2\left(1-\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \\
&= \frac{5^3}{6}\pi\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[2 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

existem duas situações para anular $V'(\theta)$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, \quad \frac{\theta}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad\longrightarrow\quad \frac{\theta}{2} = 0 \quad\longrightarrow\quad \theta = 0$$

ou

$$2 - 3\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0, \quad \frac{\theta}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad\longrightarrow\quad \sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\quad \frac{\theta}{2} = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}} \quad\longrightarrow\quad \theta = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Logo existem dois pontos críticos. Como o ângulo θ corresponde ao volume mínimo, o ponto para o qual o volume será máximo é

$$\theta = 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$$

3. (2,5 pontos) Calcule as derivadas abaixo:

   (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ onde $y = \sin\sqrt{1-x}$

   (b) $\dfrac{dy}{dx}$ onde $x^2 + y^2 = 25$

Resolução:

(a)
$$\frac{dy}{dx} = \cos\sqrt{1-x} \cdot \frac{d(\sqrt{1-x})}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos\sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{d(1-x)}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\cos\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$$

daí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(-\frac{\cos\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}\right)'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\cos\sqrt{1-x}\right)' \cdot \left(2\sqrt{1-x}\right) - \left(\cos\sqrt{1-x}\right) \cdot \left(2\sqrt{1-x}\right)'}{\left(2\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{-\sin\sqrt{1-x} \cdot \left(\sqrt{1-x}\right)' \cdot \left(2\sqrt{1-x}\right) - \left(\cos\sqrt{1-x}\right) \cdot 2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot (1-x)'}{\left(2\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{-\sin\sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot (-1) \cdot \left(\sqrt{1-x}\right) - \left(\cos\sqrt{1-x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot (-1)}{\left(2\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sin\sqrt{1-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \left(\sqrt{1-x}\right) + \left(\cos\sqrt{1-x}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}}}{\left(2\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sin\sqrt{1-x} \cdot \left(\sqrt{1-x}\right) + \left(\cos\sqrt{1-x}\right)}{4\left(\sqrt{1-x}\right)^3}$$

(b) Resolvendo para y

$$y = \pm\sqrt{25-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{25-x^2}}{dx} = \frac{1}{2}\left(25-x^2\right)^{-1/2} \cdot (-2x) =$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

ou podemos derivar implicitamente

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

logo

$$y\frac{dy}{dx} = -x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$$

4. (2,5 pontos) Uma lata cilíndrica de alumínio (sem tampa) tem volume igual a 5 centímetros cúbicos. Determine suas dimenões para que a quantidade de chapa de alumínio usada para sua fabricacáão seja mínima.

   Resolução:

   Seja h a altura da lata cilíndrica e seja r o raio da base circular. Então o volume da lata é

   $$V = (\text{Área da base}) \cdot (\text{Altura da lata})) == (\pi r^2)(h) = \pi r^2 h$$

   com volume igual a 5 cm^3 temos

   $$5 = \pi r^2 h$$

   ou

   $$h = \frac{5}{\pi r^2}$$

   A área lateral da lata é dada por

   $$\text{Área lateral da lata} = (\text{Perímetro da base}) \cdot (\text{Altura da lata})) = 2\pi r h$$

   e a área da base da lata é dada por

   $$\text{Área da base da lata} = \text{Área do círculo} = \pi r^2$$

   A área total de chapa da lata será a soma das duas áreas acima, isto é

   $$S = 2\pi r h + \pi r^2$$

   substituindo a expressão para a altura (h) em função do raio (r)

   $$S = 2\pi r\left(\frac{5}{\pi r^2}\right) + \pi r^2 = \left(\frac{10}{r}\right) + \pi r^2 = \frac{10}{r} + \pi r^2, \quad r > 0.$$

   $$S(r) = \frac{10}{r} + \pi r^2, \quad r > 0.$$

   Para encontrar área mínima vamos derivar a área $S(r)$

   $$S'(r) = -\frac{10}{r^2} + 2\pi r, \quad r > 0.$$

Fazendo $S'(r) = 0$,

$$S'(r) = -\frac{10}{r^2} + 2\pi r = 0$$

ou

$$\frac{10}{r^2} = 2\pi r \quad \longrightarrow \quad 10 = 2\pi r^3 \quad \longrightarrow \frac{10}{\pi} = r^3$$

logo

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)}$$

que é o único ponto crítico para $S(r)$.
Como

$$S'(r) < 0 \quad \text{para} \quad 0 < r < \sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)} \quad \text{e} \quad S'(r) > 0 \quad \text{para} \quad r > \sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)}$$

portanto $S(r)$ é decrescente em $0 < r < \sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)}$ e é crescente em $r > \sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)}$ e atinge um valor mínimo absoluto

$$S\left(\sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)}\right) = 12.85\text{cm}^3$$

em

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{10}{\pi}\right)} = 1.7\text{cm}$$