Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 2^o semestre de 2015 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) ———

Dadas as funções f e g encontre $(f \circ g)$, $(g \circ f)$, $(f \circ f)$ e $(g \circ g)$.

(a) $f(x) = x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x + \sqrt{x}$

(b) $f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 5$

(c) $f(x) = \cos x + x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + x$

Solução:

(a) $f(x) = x - 2 \quad \text{e} \quad g(x) = 5x + \sqrt{x}$

$$(f \circ g)(x) = (5x + \sqrt{x}) - 2 = 5x + \sqrt{x} - 2$$

$$(g \circ f)(x) = 5(x - 2) + \sqrt{x - 2} = 5x + \sqrt{x - 2} - 10$$

$$(f \circ f)(x) = (x - 2) - 2 = x - 4$$

$$(g \circ g)(x) = 5(5x + \sqrt{x}) + \sqrt{5x + \sqrt{x}} = 25x + 5\sqrt{x} + \sqrt{5x + \sqrt{x}}$$

(b) $f(x) = x^2 - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = 3x + 5$

$$(f \circ g)(x) = (3x + 5)^2 - 1 = 9x^2 + 30x + 25$$

$$(g \circ f)(x) = 3(x^2 - 1) + 5 = 3x^2 - 3 + 5$$

$$(f \circ f)(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$(g \circ g)(x) = 3(3x + 5) + 5 = 9x + 20$$

(c) $f(x) = \cos x + x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 + x$

$$(f \circ g)(x) = \cos(x^2 + x) + (x^2 + x)^2 = \cos(x^2 + x) + x^4 + 2x^3 + x^2$$

$$(g \circ f)(x) = (\cos x + x^2)^2 + (\cos x + x^2) = \cos^2 x + 2\cos x \cdot x^2 + x^4 + \cos x + x^2$$

$$(f \circ f)(x) = \cos(\cos x + x^2) + (\cos x + x^2)^2 = \cos(\cos x + x^2) + \cos^2 x + 2\cos x \cdot x^2 + x^4$$

$$(g \circ g)(x) = (x^2 + x)^2 + (x^2 + x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + x^2 + x = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$$

2. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Para cada função abaixo encontre seu domínio e sua imagem.

(a) $$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(b) $$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

(c) $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Domínio $= (-1, 1)$, imagem $= [0, 1) \cup (1, 2)$.

(b) $$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Domínio $= (0, 2) \cup [3, 4)$, imagem $= (0, 3)$.

(c) $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Domínio $= \mathbb{R}$, imagem $= \mathbb{R} - \{4\}$.

3. (1,0 ponto) ———————————————————————

Ache os limites infinitos.

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right)$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 2 + 0 = 2$$

4. (1,0 ponto) ---

Determine as inversas das seguintes funções

(a)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

(b)

$$f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$$

(c)

$$f(x) = \frac{5}{x^2+1} \quad x \geq 0$$

Solução:

(a)

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Longrightarrow y(x-1) = x+1 \Longrightarrow yx - y = x+1 \Longrightarrow yx - x = y+1$$

$$yx - x = y+1 \Longrightarrow x(y-1) = y+1 \Longrightarrow x = \frac{(y+1)}{(y-1)}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \frac{(x+1)}{(x-1)}$

(b)

$$f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$$

$$y = \sqrt[5]{4x+2} \Longrightarrow y^5 = 4x+2 \Longrightarrow y^5 - 2 = 4x \Longrightarrow \frac{y^5-2}{4} = x$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \frac{x^5-2}{4}$

(c)

$$f(x) = \frac{5}{x^2+1} \quad x \geq 0$$

$$y = \frac{5}{x^2+1} \Longrightarrow x^2 + 1 = \frac{5}{y} \Longrightarrow x^2 = \frac{5}{y} - 1 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{y} - 1}$$

Logo a inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{5}{x} - 1}$

5. (1,0 ponto)

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

(c) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+3)} = \frac{1}{7}$$

(b) $$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(3-\sqrt{x^2+5})(3+\sqrt{x^2+5})}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)(3+\sqrt{x^2+5})}{(4-x^2)}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to 2} (3+\sqrt{x^2+5}) = 6$$

(c) $$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2)-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x$$

6. (1,0 ponto)

Calcule os seguintes limites laterais,

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x)$$

onde

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4-2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se} \quad x \leq 2 \\ x^2 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 3x = 6$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 = 4$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se} \quad x \leq 2 \\ 4-2x & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^3 = 8$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 4-2x = 0$$

7. (1,0 ponto)

Dada a função $f(x) = x^2 - 3x$, ache

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e dada a função $f(x) = \sqrt{5x+1}$, ache

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{quando} \quad x > -\frac{1}{5}$$

Solução:

Para $f(x) = x^2 - 3x$ temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^2 - 3(x+h)) - (x^2-3x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x^2+2xh+h^2-3x-3h) - (x^2-3x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-3x-3h-x^2+3x}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-3h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h-3$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=2x-3$$

Para $f(x)=\sqrt{5x+1}$ temos

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)-\left(\sqrt{5x+1}\right)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)-\left(\sqrt{5x+1}\right)}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(5x+5h+1)-(5x+1)}{h\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{h\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5}{\left(\sqrt{5x+5h+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{5}{\left(\sqrt{5x+1}\right)+\left(\sqrt{5x+1}\right)}=\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}$$

8. (1,5 pontos) ———

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem):

(a) $$f(x)=\frac{x^2-3x-10}{x+2}$$

(b) $$f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1}$$

(c) $$f(x)=\begin{cases}4-x & \text{se} \quad x\geq 3\\ x-2 & \text{se} \quad 0<x<3\\ x-1 & \text{se} \quad x\leq 0\end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2}$$

f claramente tem uma descontinuidade em $x = -2$, já que este ponto sequer pode pertencer ao domínio de f. Entretanto podemos retirar a descontinuidade reescrevendo $f(x)$ da seguinte maneira

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 10}{x + 2} = \frac{(x+2)(x-5)}{x+2} = x - 5$$

(b) $$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$$

Assim como no item anterior f tem descontinuidades em $x = \pm 1$, mas pode ser reescrita como

$$f(x) = \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2 - 1} = x^2 + 1$$

(c) $$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x - 2 & \text{se} \quad 0 < x < 3 \\ x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

f tem uma descontinuidade em $x = 0$, posto que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x - 1) = -1$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 2) = -2$$

Como os limites laterais são diferentes, existe uma descontinuidade em $x = 0$.

9. (1,5 pontos) ____

Ache os limites infinitos.

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

(b) $$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

(c) $$\lim_{x \to +\infty} \left(x^5 - 7x^4 - 2x + 5\right)$$

(d) $$\lim_{x \to -\infty} \left(x^5 - 7x^4 - 2x + 5\right)$$

Solução:

(a) $$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 1} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x^3)/(x^2)}{(x^2+1)/(x^2)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x^3)/(x^2)}{(x^2+1)/(x^2)} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{1 + 1/x^2} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

(b) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = -\infty, \quad \text{análogo ao item anterior}$$

(c) $$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(x^5 - 7x^4 - 2x + 5\right) &= \lim_{x\to+\infty} x^5 \left(\frac{x^5}{x^5} - \frac{7x^4}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{5}{x^5}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^5 \left(\frac{x^5}{x^5} - \frac{7x^4}{x^5} - \frac{2x}{x^5} + \frac{5}{x^5}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x^5 \left(1 - \frac{7}{x} - \frac{2}{x^4} + \frac{5}{x^5}\right) = +\infty \end{aligned}$$

(d) $$\lim_{x\to-\infty} \left(x^5 - 7x^4 - 2x + 5\right) = -\infty, \quad \text{análogo ao item anterior}$$