Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2º semestre de 2014 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Calcule os seguintes limites:

   (a) $\lim_{x\to 4} \sqrt{25 - x^2}$

   (b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12}$

   (c) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

   Solução:

   (a) $\lim_{x\to 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 4}(25 - x^2)} = \sqrt{25-(4)^2} = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

   (b) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{(x+3)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \dfrac{1}{(x+3)} = \dfrac{1}{(4+3)} = \dfrac{1}{7}$

   (c) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3}{x^2+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{2x^3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{1 + \frac{1}{x^2}} =$$

   $$= \frac{\lim_{x\to -\infty} 2x}{\lim_{x\to -\infty} 1 + \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to -\infty} 2x}{1+0} = -\infty$$

2. (2,5 pontos)

   Justifique por que a função $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ é descontínua em $x = 2$.

   Solução:

   Note que $f(x)$ sequer está definida em $x = 2$. Além disso o limite

   $$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

   logo o limite não existe em $x = 2$. Logo, por mais de uma razão $f(x)$ não é contínua em $x = 2$.

3. (2,5 pontos)

Calcule a primeira derivada das seguintes funções:

(a) $$f(x) = x^3 + 2x - \frac{1}{x^2}$$

(b) $$f(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}$$

(c) $$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Solução:

(a)
$$f(x) = x^3 + 2x - \frac{1}{x^2} = x^3 + 2x - x^{-2}$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2 - (-2)x^{-3}$$
$$= 3x^2 + 2 + \frac{2}{x^3}$$

(b)
$$f(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}$$
$$f'(x) = \left[\frac{2x-3}{x^2-1}\right]'$$
$$= \frac{[2x-3]'\,[x^2-1] - [2x-3]\,[x^2-1]'}{[x^2-1]^2} = \frac{[2]\,[x^2-1] - [2x-3]\,[2x]}{[x^2-1]^2}$$
$$= \frac{2x^2 - 2 - 4x^2 + 6x}{[x^2-1]^2} = \frac{-\,2x^2 + 6x - 2}{[x^2-1]^2}$$

(c)
$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$
$$f'(x) = \left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right]'$$
$$= \frac{[\sqrt{x}]'\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right] - [\sqrt{x}]\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]'}{\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]^2}$$
$$= \frac{\left[\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right]\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right] - [\sqrt{x}]\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}(2x)\right]}{\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]^2}$$
$$= \frac{\left[\frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{2\,\sqrt{x}}\right] - \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right]}{\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{2\sqrt{x}}\right] \cdot \dfrac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}} - \left[\dfrac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right] \cdot \dfrac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{(\sqrt[3]{x^2-1})(3\sqrt[3]{(x^2-1)^2})}{2\sqrt{x}(3\sqrt[3]{(x^2-1)^2})}\right] - \left[\dfrac{(2x\sqrt{x})(2\sqrt{x})}{(2\sqrt{x})3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right]}{\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{3(x^2-1)}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right] - \left[\dfrac{4x^2}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right]}{\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]^2}$$

$$= \frac{\left[\dfrac{3x^2-3-4x^2}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}\right]}{\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]^2}$$

$$= \left[\frac{-3-x^2}{6\sqrt{x}(x^2-1)\left[\sqrt[3]{x^2-1}\right]}\right]$$

4. (2,5 pontos)

Encontre a equação da reta tangente as seguintes curvas no ponto $x = 1$:

(a) $y = 8 - 5x^2$

(b) $y = \dfrac{4}{x+1}$

Solução:

(a) $y = 8 - 5x^2$

$y' = -10x$

A equação da reta tangente tem a forma $y = mx + b$, onde

$$m = y'(1) = -10 \cdot 1 = -10$$

além disso a reta tangente passa pelo ponto $(1, y(1)) = (1, (8 - 5 \cdot (1)^2)) = (1, 3)$. Portanto,

$$y = mx + b \longrightarrow 3 = (-10)(1) + b \longrightarrow 3 + 10 = b \longrightarrow b = 13$$

Finalmente a equação da reta tangente é

$$y = -10x + 13$$

(b) $$y = \frac{4}{x+1}$$

$$y' = \frac{-4}{(x+1)^2}$$

A equação da reta tangente tem a forma $y = mx + b$, onde

$$m = y'(1) = \frac{-4}{(1+1)^2} = \frac{-4}{4} = -1$$

além disso a reta tangente passa pelo ponto $(1, y(1)) = (1, \frac{4}{1+1}) = (1, 2)$. Portanto,

$$y = mx + b \longrightarrow 2 = (-1)(1) + b \longrightarrow 2 + 1 = b \longrightarrow b = 3$$

Finalmente a equação da reta tangente é

$$y = -x + 3$$