

Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2º semestre de 2015 - Gabarito

Questões

1. (2,00 ponto) _____

Determine as inversas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 + 1$

(b) $f(x) = \sqrt[2]{3x - 2}$

Solução:

(a) $f(x) = x^3 + 1$

$$y - 1 = x^3$$

$$\sqrt[3]{y - 1} = x$$

logo

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

(b) $f(x) = \sqrt[2]{3x - 2}$

$$y = \sqrt[2]{3x - 2}$$

$$y^2 = 3x - 2$$

$$\frac{y^2 + 2}{3} = x$$

logo

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2 + 2}{3}$$

2. (2,00 pontos) _____

Calcule os limites abaixo:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2}$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Solução:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

3. (2,00 pontos) —————

Calcule os seguintes limites infinitos. Justifique cada passagem.

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 7}{5x^2 - 3x - 4}$$

Solução:

$$(a) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 2 + 0 = 2$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 7}{5x^2 - 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^3 + 7}{5x^2 - 3x - 4} \cdot \frac{1/x^2}{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 7/x^2}{5 - 3/x - 4/x^2} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 7/x^2)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 3/x - 4/x^2)} = \frac{-\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \lim_{x \rightarrow +\infty} 7/x^2}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 5 - \lim_{x \rightarrow +\infty} 3/x - \lim_{x \rightarrow +\infty} 4/x^2} =$$

$$\frac{-\infty + 0}{5 - 0 - 0} = -\infty$$

4. (2,00 pontos) —————

Ache as descontinuidades das seguintes funções (se existirem), justifique sua resposta.

$$(a) \quad f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2-x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x-1}{(x+3)(x-2)}$$

Tem descontinuidades em $x = -3$ e $x = 2$ já que claramente estes pontos não pertencem ao domínio da função.

$$(b) \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Dentro das três regiões a função é polinomial e portanto contínua. Resta somente verificar os pontos limítrofes das regiões, isto é, $x = 0$ e $x = 1$.

Em $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

daí

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = 0$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 0$.

Em $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 - x = 1$$

daí

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = 1$$

portanto $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

Portanto $f(x)$ não tem descontinuidades.

5. (2,00 pontos) —————

Mostre, usando as propriedades de limites, que para toda função polinomial $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, seu limite é igual ao valor da função no ponto. Isto é

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Solução:

O limite

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n \lim_{x \rightarrow a} a_i x^i$$

Precisamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} a_i x^i = a_i \lim_{x \rightarrow a} x^i = a_i a^i$$

substituindo no somatório

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \lim_{x \rightarrow a} x^i = \sum_{i=0}^n a_i a^i = a_0 + a_1 a + \cdots + a_{n-1} a^{n-1} + a_n a^n = f(a)$$