Limites e Continuidade de Funções

Limites (continuação)

- Limites Laterais
- Limites infinitos
- Limites no infinito

Continuidade

- Continuidade em um ponto
- Continuidade em um intervalo
- Propriedades básicas das funções contínuas

Limites Laterais

Definição 2.4: Seja W um conjunto de números reais. Um número real a é denominado *ponto de acumulação à direita de W* quando todo intervalo aberto $(a, a+\delta)$ contém algum ponto x de W **diferente** de a.

A condição de a ser um ponto de acumulação à direta de W pode ser expressa do seguinte modo:

para cada número real $\delta > 0$, dado arbitrariamente,

existe um número $x > a$ de W tal que $0 < d(x, a) < \delta$.

Exemplo 2.10

Seja $W = X \bigcup Y$ no qual $X = \{x \in \mathbb{R}; \quad 1 \le x < 2\}$ e $Y = \{3, 4\}$.

Os números de X são pontos de acumulação à direita de W ■

Definição 2.5: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação à direita do domínio de f, $D(f)$.

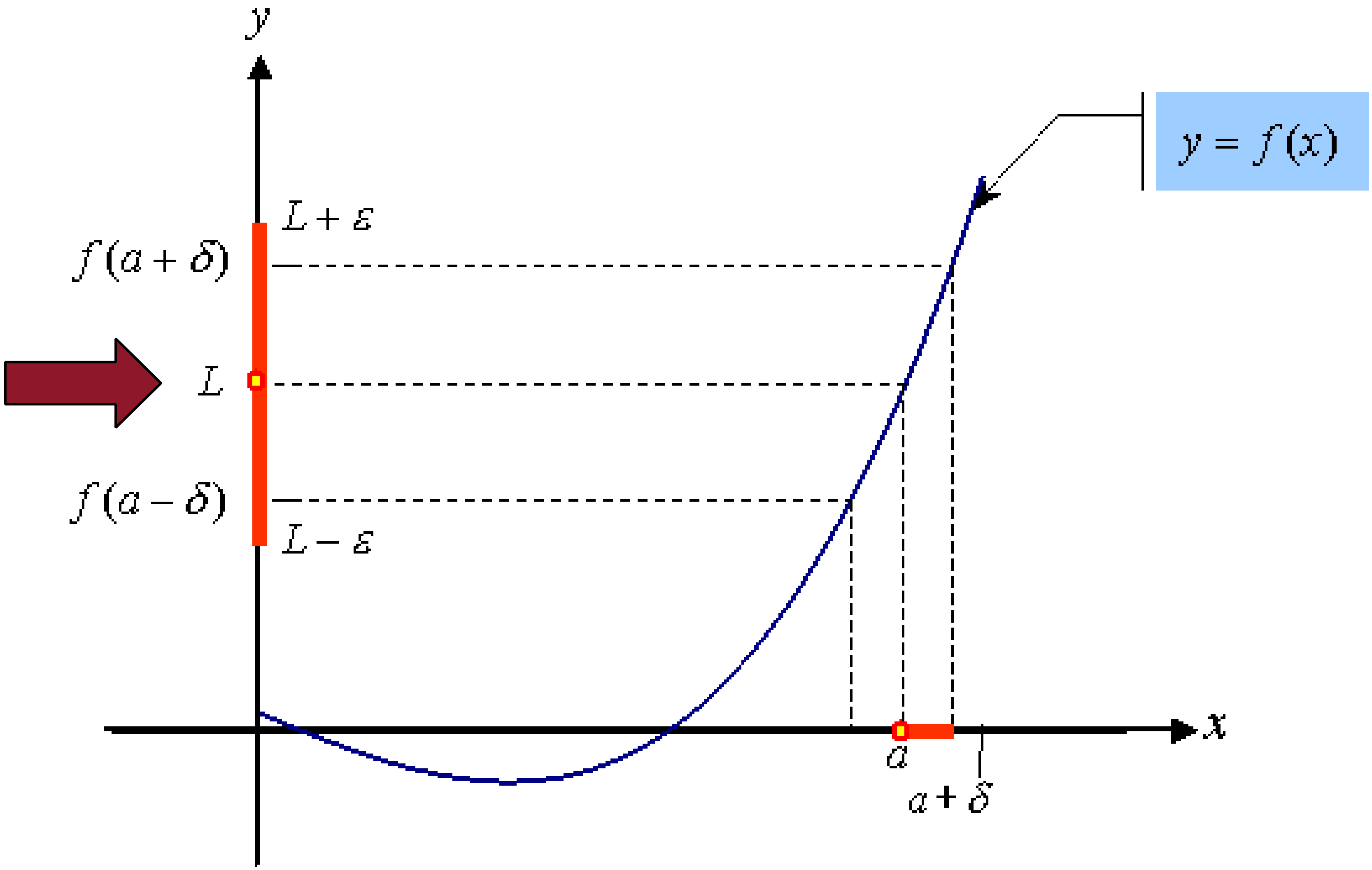
Diz-se que *o limite à direita de $f(x)$ quando x tende a a é L*, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L,$$

se para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existir um número $\delta > 0$ de modo que se tenha:

$$d(f(x), L) < \varepsilon \text{ sempre que } x \in D(f), \quad x > a \quad \text{e} \quad 0 < d(x,a) < \delta.$$

Notamos que, as condições $x > a$ e $0 < d(x,a) < \delta$ significam que x se encontra no intervalo $(a, a+\delta)$ e é diferente de a.



Geometricamente, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ significa que, para $x \neq a$ podemos garantir que $f(x)$ se encontra em qualquer pequeno intervalo aberto em torno de L, desde que x se encontre em um intervalo aberto $(a, a + \delta)$.

Definição 2.6: Seja W um conjunto de números reais. Um número real a é denominado *ponto de acumulação à esquerda de W* quando todo intervalo aberto $(a-\delta, a)$ contém algum ponto x de W diferente de a.

A condição de a ser um ponto de acumulação à esquerda de W pode ser expressa do seguinte modo:

para cada número real $\delta > 0$, dado arbitrariamente,

existe um número $x < a$ de W tal que $0 < d(x, a) < \delta$.

Exemplo 2.11

Seja $W = X \cup Y$ no qual $X = \{x \in \mathbb{R};\ \ 1 \le x < 2\}$ e $Y = \{3, 4\}$.

Os números de X, com exceção de 1, e o número 2 são pontos de acumulação à esquerda de W ■

Definição 2.7: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação à esquerda do domínio de f, $D(f)$.

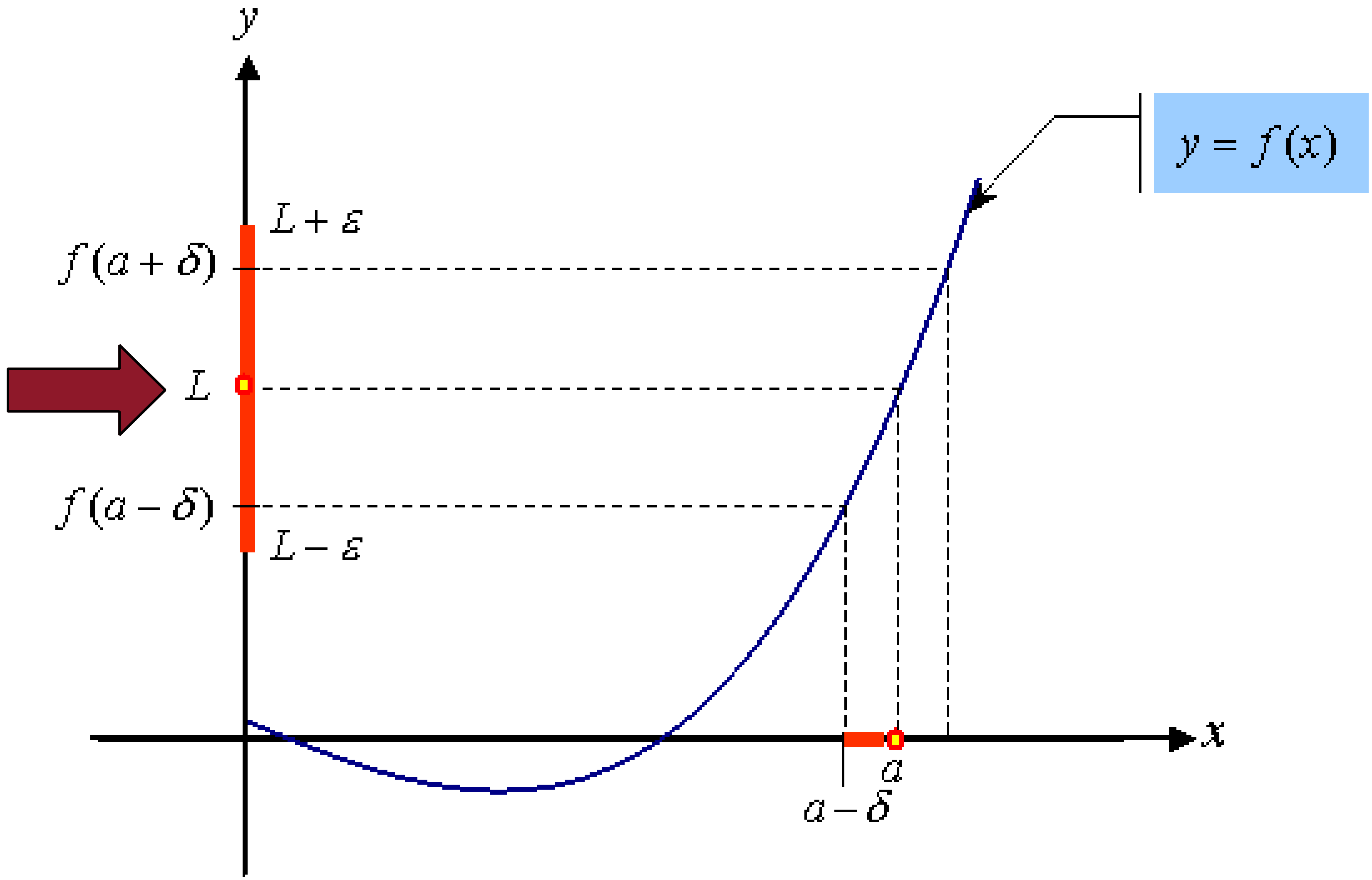
Diz-se que *o limite à esquerda de $f(x)$ quando x tende a a é L*, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L,$$

se para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existir um número $\delta > 0$ de modo que se tenha:

$$d(f(x), L) < \varepsilon \text{ sempre que } x \in D(f), \quad x < a \text{ e } 0 < d(x,a) < \delta.$$

Notamos que, as condições $x < a$ e $0 < d(x,a) < \delta$ significam que x se encontra no intervalo $(a - \delta, a)$ e é diferente de a.



Geometricamente, $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ significa que, para $x \neq a$ podemos garantir que $f(x)$ se encontra em qualquer pequeno intervalo aberto em torno de L, desde que x se encontre em um intervalo aberto $(a-\delta, a)$.

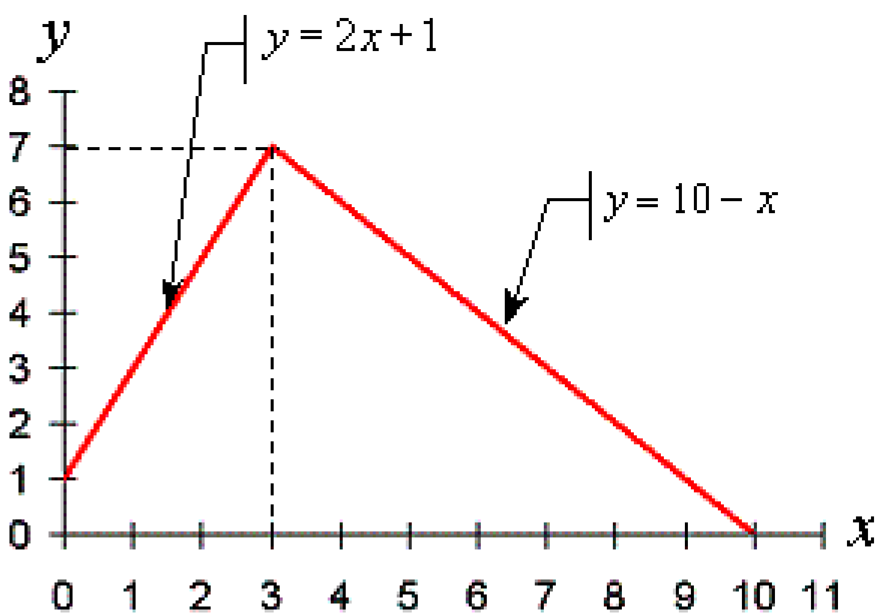
Teorema 2.4: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação à direita e à esquerda do domínio de f, $D(f)$.

Então existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais a L os limites laterais $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e $\lim_{x \to a^+} f(x)$.

Exemplo 2.12

Para cada caso vamos determinar os limites à esquerda e à direita de $f(x)$ quando x tende a a e, posteriormente, determinaremos, caso exista, o limite $f(x)$ quando x tende a *a* utilizando o Teorema 2.4.

a) $a = 3$ e $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ se } x < 3 \\ 10 - x \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$.

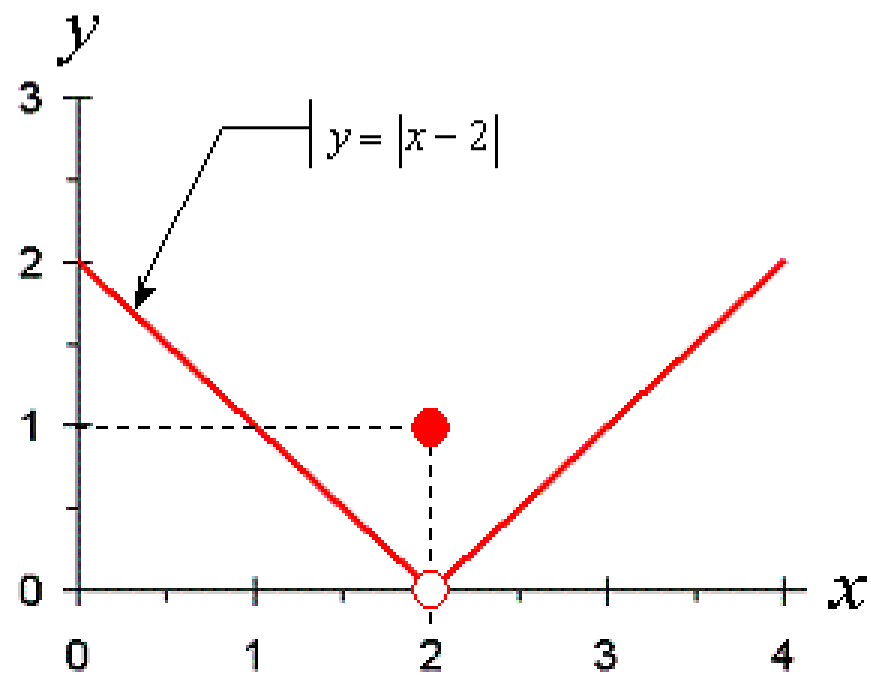


$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} (2x+1) \\ &= 2(3)+1 = 7, \\ \lim_{x\to 3+} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} (10-x) \\ &= 10+x = 7 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = 7$$

Conseqüência do Teorema 2.3

Conseqüência do Teorema 2.3

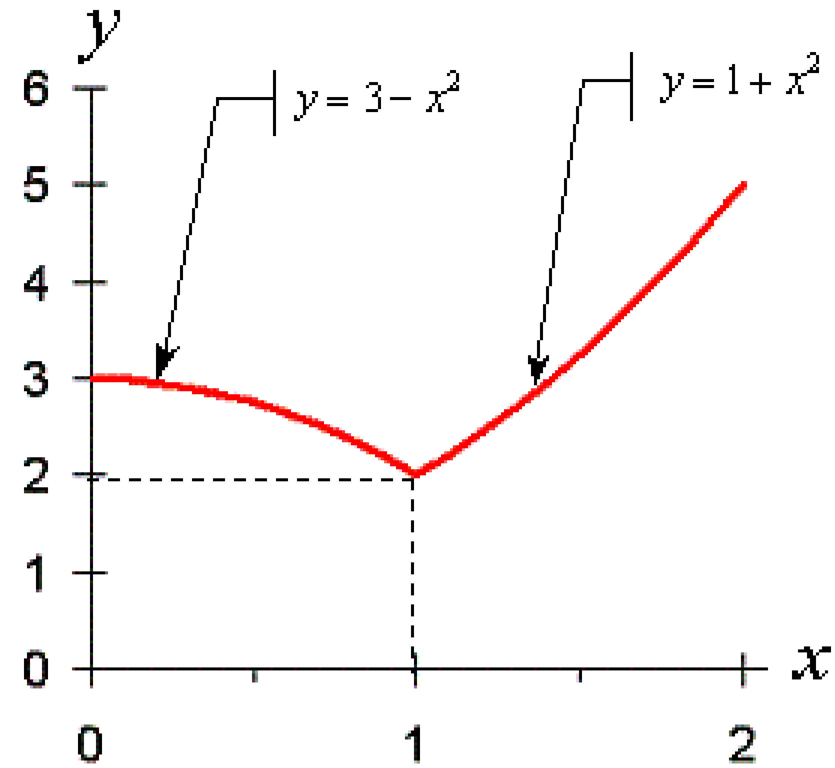
b) $a = 2$ e $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$.



$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2} |x-2| \\ &= \left|\lim_{x\to 2}(x-2)\right| \quad \text{(Teorema 2.1 prop. 7)} \\ &= |0| = 0 \quad \text{(Teorema 2.3)} \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$$

Conseqüência do Teorema 2.3

c) $a = 1$ e $f(x) = \begin{cases} 3 - x^3 & \text{se } x \leq 1 \\ 1 + x^2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$.



$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\left(3 - x^2\right) \\ &= 3 - 1^2 = 2 \quad \text{(conseqüência doTeorema 2.3),} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}\left(1 + x^2\right) \\ &= 1 + 1^2 = 2 \quad \text{(conseqüência doTeorema 2.3),} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = 2.$$

■

Limites infinitos

Definição 2.8: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação do domínio de f, $D(f)$.

Diz-se que *o limite de $f(x)$ quando x tende a a é* mais infinito, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty,$$

se para todo número real $M > 0$ dado, existir um número $\delta > 0$, de modo que se tenha:

$$f(x) > M \quad \text{sempre que } x \in D(f) \text{ e } 0 < d(x,a) < \delta.$$

Definição 2.9: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação do domínio de f, $D(f)$.

Diz-se que *o limite de $f(x)$ quando x tende a a* é menos infinito, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty,$$

se para todo número real $M > 0$ dado, existir um número $\delta > 0$, de modo que se tenha:

$$f(x) < -M \text{ sempre que } x \in D(f) \text{ e } 0 < d(x,a) < \delta.$$

Teorema 2.5: Sejam f e g duas funções reais de uma variável real.

Suponha que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$.

Se $L \neq 0$ e $M = 0$, então $\lim\limits_{x \to a} \left| \dfrac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$.

Teorema 2.6:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemplo 2.13

$$\lim_{x\to 3}\left|\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}\right| = ?$$

Como

$\lim_{x\to 3}\left(2x^2+5x+1\right) = 2\left(3\right)^2+5\left(3\right)+1 = 34$ (Teorema 2.3) e

$\lim_{x\to 3}\left(x^2-x-6\right) = \left(3\right)^2-3-6 = 0$ (Teorema 2.3),

logo

$\lim_{x\to 3}\left|\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}\right| = +\infty$ (Teorema 2.5). ■

Exemplo 2.14

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6} = ?$$

No exemplo anterior concluímos que

$$\lim_{x\to 3} \left| \frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6} \right| = +\infty.$$

Vamos agora estudar o sinal de $\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}$ quanto $x \to 3^+$, ou seja, quando x tende a 3 pela direta (assumindo valores maiores que 3). Notamos que:

$2x^2+5x+1>0$ para todo $x>3$ e

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)>0$ para todo $x>3$.

Logo

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6} = +\infty. \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.15

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}=?$$

No Exemplo 2.13 concluímos que

$$\lim_{x\to 3}\left|\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}\right|=+\infty.$$

Vamos agora estudar o sinal de $\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}$ quanto $x\to 3^-$,

ou seja, quando x tende a 3 pela esquerda (assumindo valores menores que 3). Notamos que:

$2x^2+5x+1>0$ para todo $-0,21<x$ e

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)<0$ para todo $-2<x<3$.

Logo

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^2+5x+1}{x^2-x-6}=-\infty. \qquad \blacksquare$$

Definição 2.10: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação, à direita e/ou à esquerda, do domínio de f.

A linha reta vertical $x = a$ é chamada de *assíntota vertical* do gráfico de f se pelo menos uma das seguintes condições for verificada:

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$,

ii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$,

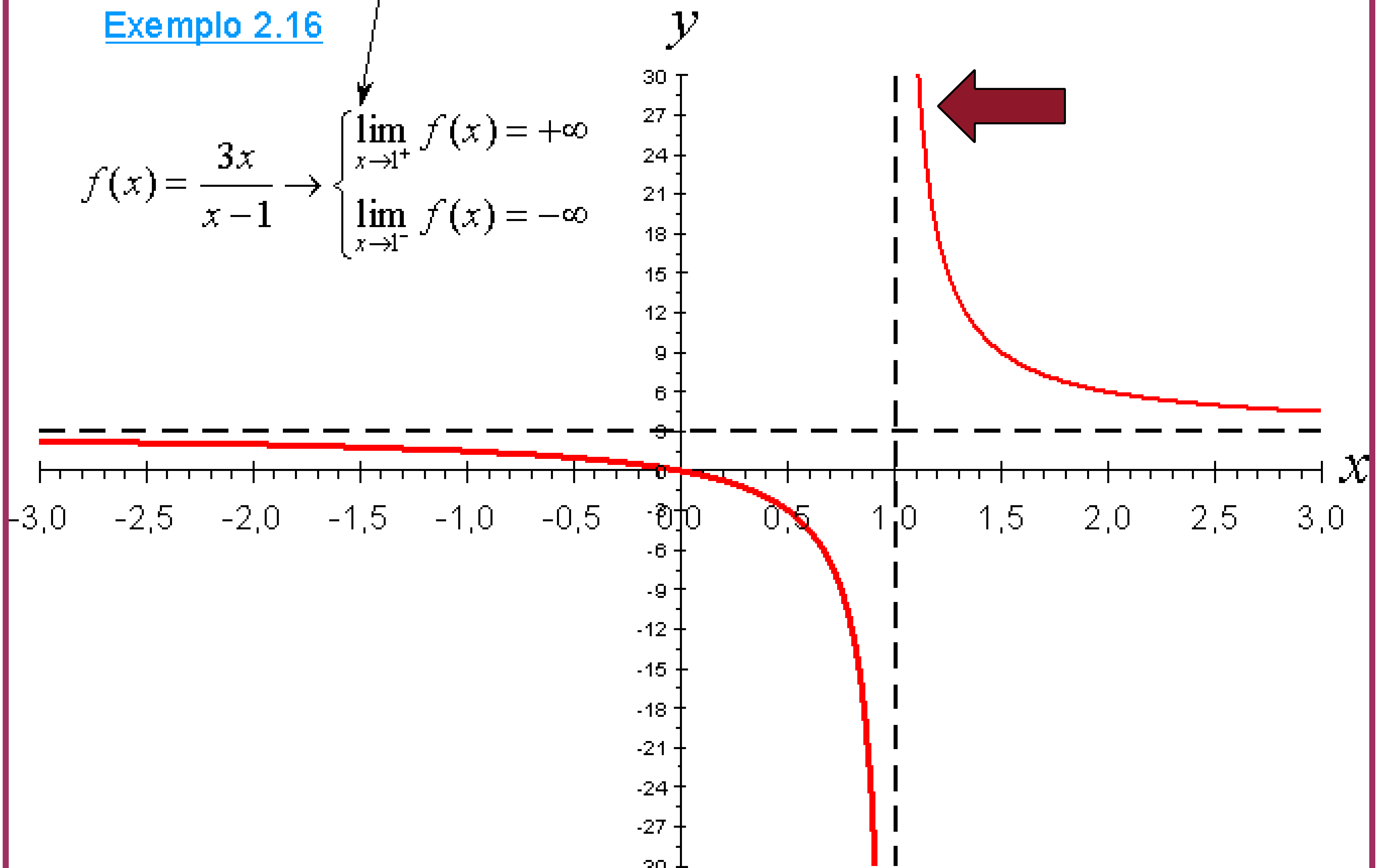
iii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$,

iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Verificar !!!

Exemplo 2.16

$$f(x)=\frac{3x}{x-1}\rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\end{cases}$$



Limites no infinito

Definição 2.11: Seja f uma função real de uma variável real e suponha que o domínio de f, $D(f)$, é ilimitado superiormente.

Diz-se que *o limite de $f(x)$ quando x tende a mais infinito é L*, e escrevemos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L,$$

se para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existir um número $N > 0$ de modo que se tenha:

$$d(f(x), L) < \varepsilon \text{ sempre que } x \in D(f), \quad x > N.$$

Definição 2.12: Seja f uma função real de uma variável real e suponha que o domínio de f, $D(f)$, é ilimitado inferiormente.

Diz-se que *o limite de $f(x)$ quando x tende a menos infinito é L*, e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

se para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, existir um número $N > 0$ de modo que se tenha:

$$d(f(x), L) < \varepsilon \text{ sempre que } x \in D(f), \quad x < -N.$$

Teorema 2.7: Sejam f e g duas funções reais de um variável real.

Suponha que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = M$, então:

1) $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) + \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L+M$ e

$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-g(x)\right] = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = L-M$;

2) $\lim_{x\to\pm\infty}\left[cf(x)\right] = c\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = cL$ (c é uma constante qualquer);

3) $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)g(x)\right] = \left[\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right]\left[\lim_{x\to\pm\infty} g(x)\right] = LM$;

4) se $M \neq 0$, então $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} f(x)}{\lim_{x\to\pm\infty} g(x)} = \frac{L}{M}$;

5) $\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)\right]^n = \left[\lim_{x\to\pm\infty} f(x)\right]^n = L^n$ (n é um inteiro positivo qualquer);

Continuação do Teorema 2.7

6) se $L > 0$ e n é um inteiro positivo ou se $L \leq 0$ e n é um número ímpar (positivo), então $\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to \pm\infty} f(x)} = \sqrt[n]{L}$;

7) $\lim_{x \to \pm\infty} |f(x)| = \left|\lim_{x \to \pm\infty} f(x)\right| = |L|$.

Teorema 2.8:

1) $\lim_{x\to+\infty} c = c$, c é uma constante qualquer, e

$\lim_{x\to-\infty} c = c$;

2) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n} = 0$, n é um inteiro positivo qualquer, e

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n} = 0$;

3) $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, n é um inteiro positivo qualquer, e

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ se } n \text{ é um número par,} \\ -\infty \text{ se } n \text{ é um número ímpar;} \end{cases}$$

4) se $a \neq 0$ e n é um inteiro positivo qualquer,

então $\lim_{x\to+\infty}\left(a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n\right) = a_n \lim_{x\to+\infty} x^n$ e

$\lim_{x\to-\infty}\left(a_o + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n\right) = a_n \lim_{x\to-\infty} x^n$.

OBS: Ao trabalharmos com limites no infinito de *funções racionais ou de quocientes de funções* é bastante útil dividirmos o numerador e o denominador pela variável independente elevada à maior potência que apareça na fração.

Vamos utilizar esta técnica para calcular os limites dos próximos exemplos.

[Exemplo 2.17]

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{2x^2-3}=?$$

Notamos que para todo $x \neq 0$: $\dfrac{5x^2}{2x^2-3}=\dfrac{\frac{5x^2}{x^2}}{\frac{2x^2-3}{x^2}}=\dfrac{5}{2-\frac{3}{x^2}}$.

Portanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{2x^2-3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2-\frac{3}{x^2}}$.

Por outro lado,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}5=5$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2=2$ (Teorema 2.8, prop. 1),

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ (Teorema 2.8, prop. 2),

logo,

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=3\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=3(0)=0$ (Teorema 2.7, prop. 2),

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}2-\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=2-0=2$ (Teorema 2.7, prop. 1) o

que implica que, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{2-\frac{3}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}5}{\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{5}{2}$ (Teorema 2.7, prop. 4). ■

Exemplo 2.18

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}}=?$$

Notamos que, para todo $x\neq 0$:

$$\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}}=\frac{\frac{5x}{x}}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{7x^3+3}}=\frac{5}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}\left(7x^3+3\right)}}=\frac{5}{\sqrt[3]{7+\frac{3}{x^3}}}.$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x}{\sqrt[3]{7x^3+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{7+\frac{3}{x^3}}}.$$

Entretanto, como:

$\lim\limits_{x\to+\infty}5=5$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}7=7$ (Teorema 2.8, prop. 1) e

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ (Teorema 2.8, prop. 2),

logo,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}=3\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=3(0)=0$ (Teorema 2.7, prop. 2),

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(7+\frac{3}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}7-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}=7-0=7$ (Teorema 2.7, prop. 1) temos que :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{7+\frac{3}{x^3}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty}\left(7+\frac{3}{x^3}\right)}=\sqrt[3]{7}$$ (Teorema 2.7, prop. 6).

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt[3]{7+\frac{3}{x^3}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}5}{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{7+\frac{3}{x^3}}}=\frac{5}{\sqrt[3]{7}}$$ (Teorema 2.7, prop. 4). ■

Definição 2.13: Seja f uma função real de uma variável real.

A linha reta horizontal $y = b$ é chamada de ***assíntota horizontal*** do gráfico de f se pelo menos uma das seguintes condições for verificada:

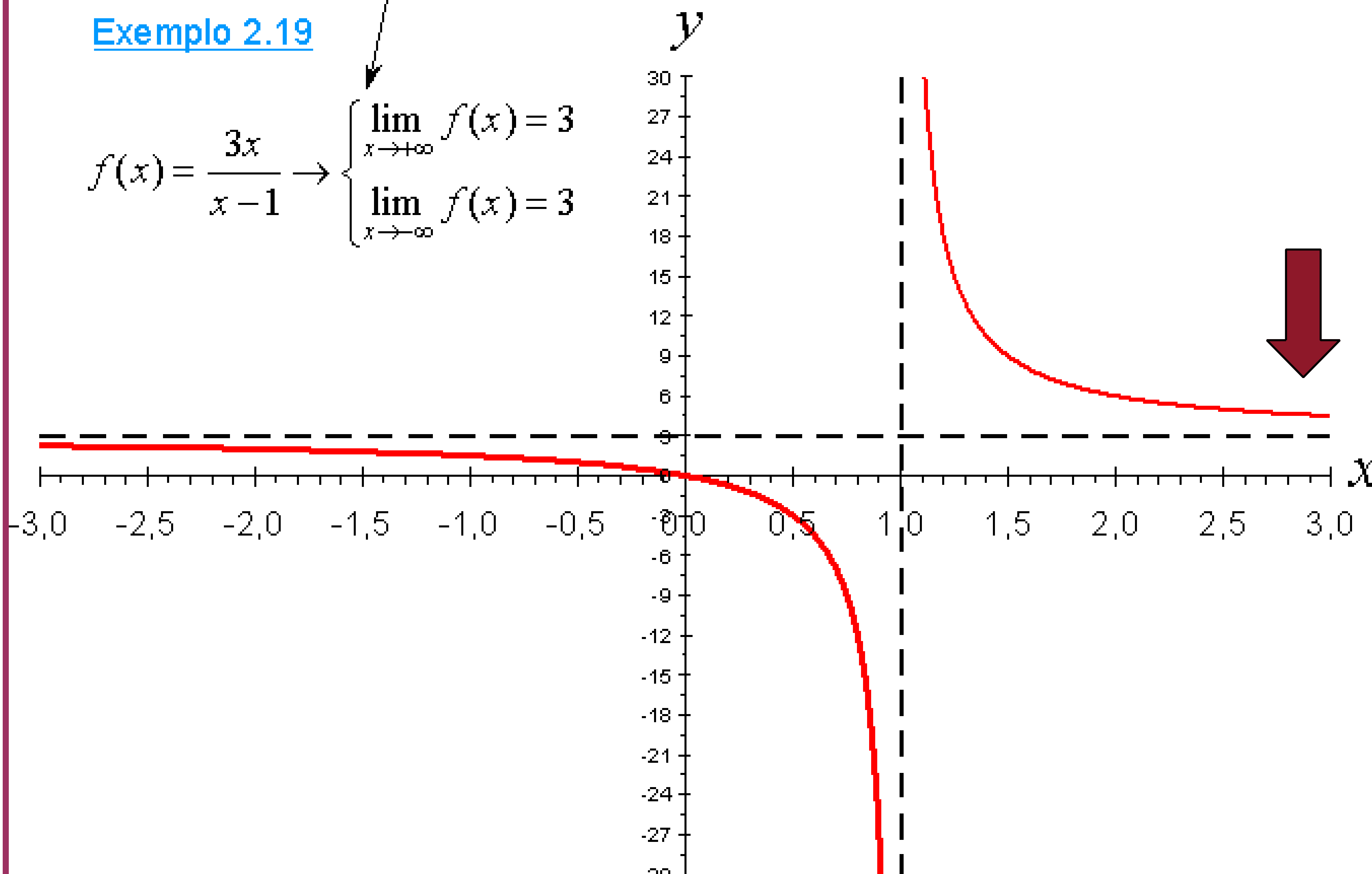
i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$,

ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Verificar !!!

Exemplo 2.19

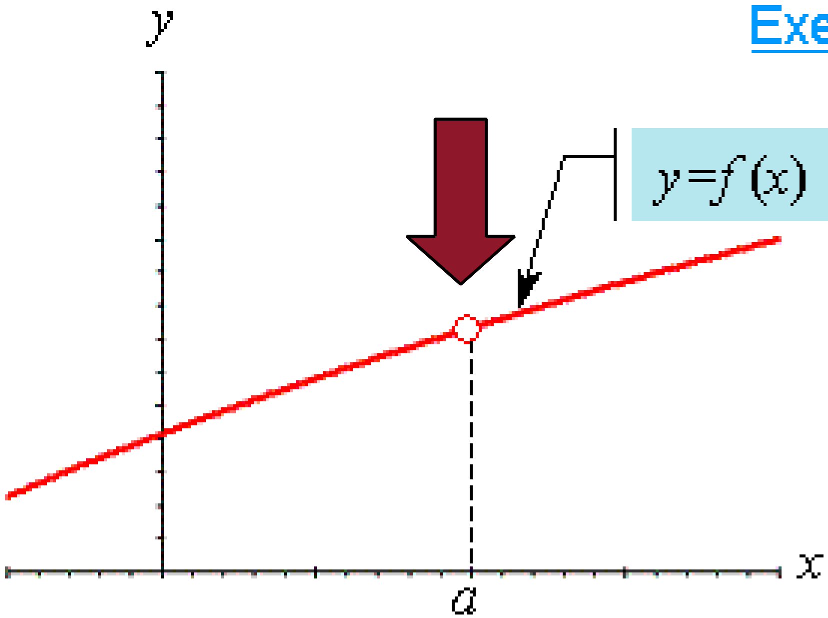
$$f(x) = \frac{3x}{x-1} \to \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3 \end{cases}$$



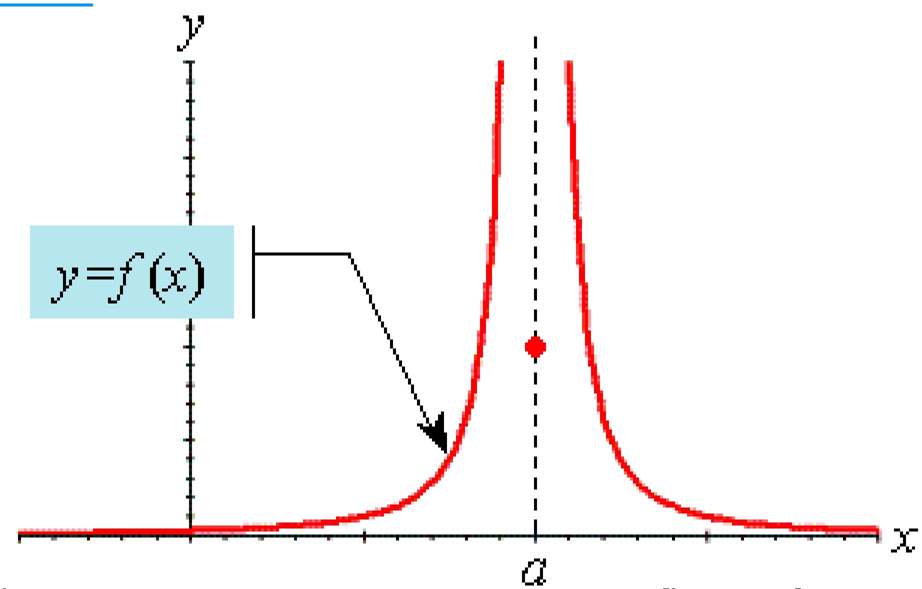
Parte 2

Continuidade de Funções

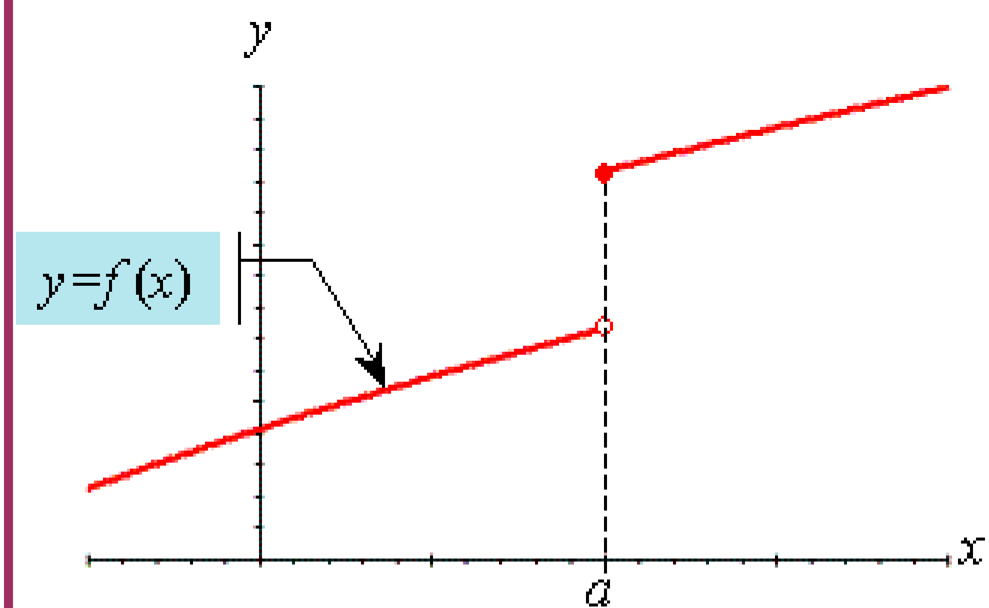
Exemplo 2.20



a) $a \notin D(f)$ (f não está definida em a).



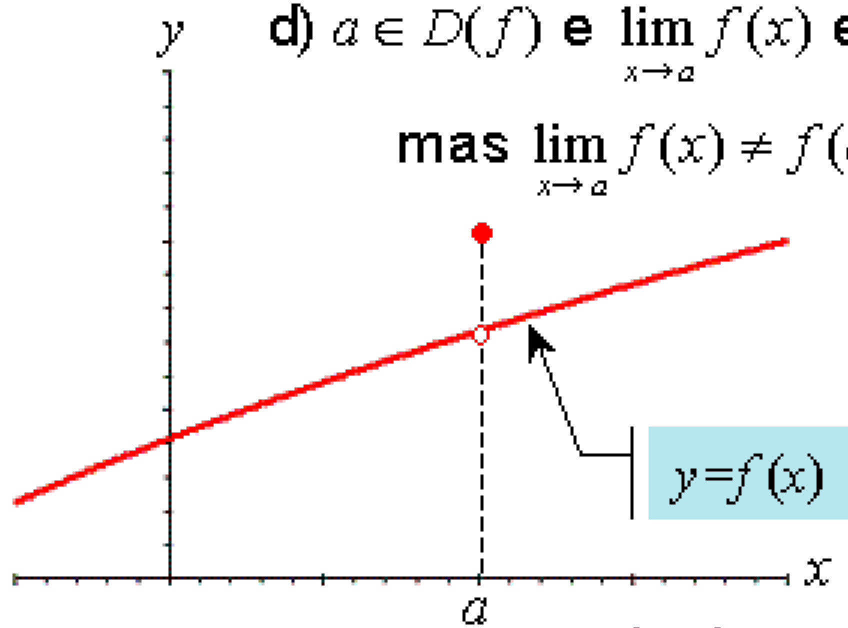
c) $a \in D(f)$ mas $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe.



b) $a \in D(f)$ mas $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ não existe.

d) $a \in D(f)$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existe,

mas $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.



cederj

Continuidade em um Ponto

Definição 2.14: Seja f uma função real de uma variável real. Seja a um ponto de acumulação do domínio de f, $D(f)$.

Diz-se que a função f é *contínua em um número* a se, e somente se, as seguintes condições forem verificadas :

i) $a \in D(f)$,

ii) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (é igual a um número),

iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

OBS: Se qualquer uma das condições da Definição 2.12 não é verificada, dizemos que f é *descontínua* em a.

Continuidade em um Intervalo

1) Se f for contínua em todos os pontos de um intervalo aberto (a,b), então dizemos que *f é contínua em (a,b)*. Esta definição se aplica também a intervalos abertos infinitos da forma:

$$(a,+\infty),(-\infty,b),(-\infty,+\infty).$$

2) Se f é contínua em $(-\infty,+\infty)$ dizemos que *f é contínua em toda parte*.

3) Diz-se que *f é contínua em um intervalo fechado $[a,b]$* quando

i) f é contínua em (a,b) e

ii) $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

Exemplo 2.21 (ver Exemplo 2.7)

Verifique se a função $f(y)=\sqrt[3]{\dfrac{y^2+5y+3}{y^2-1}}$ é contínua em 3.

Solução:

O domínio natural de f é: $D(f)=\{y\in\mathbb{R},\, y\neq\pm1\}$.

Logo, $3\in D(f)$ e

$$f(3)=\sqrt[3]{\frac{3^2+5(3)+3}{3^2-1}}=\sqrt[3]{\frac{27}{8}}=\frac{3}{2}.$$

Por outro lado, no Exemplo 2.7 concluímos que

$$\lim_{y\to3} f(y)=\frac{3}{2}.$$

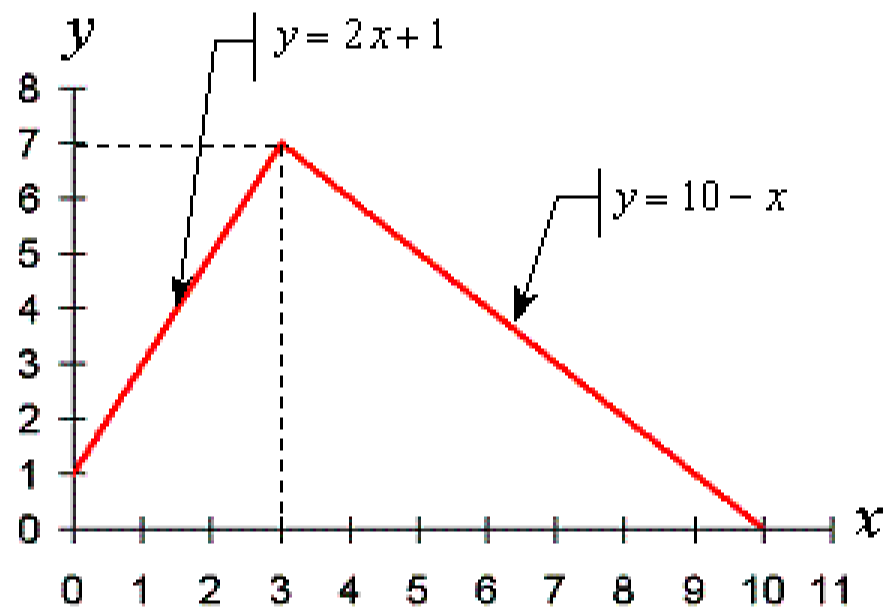
Portanto, f é contínua em 3.

■

Exemplo 2.22 (ver o Exemplo 2.12)

Nos casos a seguir vamos verificar se a função f é contínua em a.

a) $a = 3$ e $f(x) = \begin{cases} 2x+1 \text{ se } x < 3 \\ 10 - x \text{ se } x \geq 3 \end{cases}$.



O domínio natural de f, $D(f)$, é $\mathbb{R}$ e, portanto, $3 \in D(f)$. Além disso,

$$f(3) = 10 - 3 = 7.$$

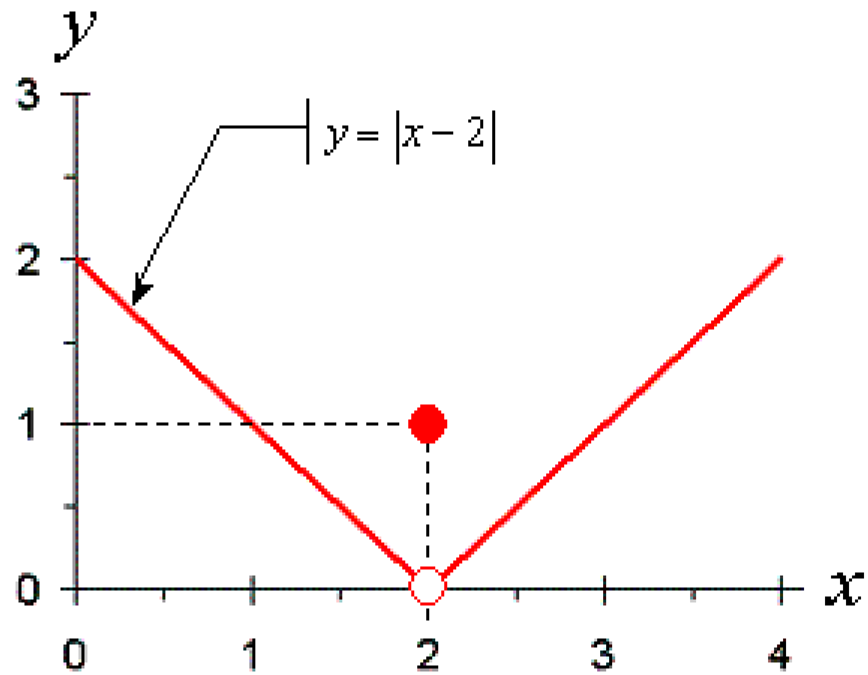
No Exemplo 2.12 verificamos que:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7.$$

Portanto, f é contínua em 3.

Verificar que f é contínua em toda parte !

b) $a = 2$ e $f(x) = \begin{cases} |x-2| & \text{se } x \neq 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \end{cases}$.



O domínio natural de f, $D(f)$, é $\mathbb{R}$ e, portanto, $2 \in D(f)$. Além disso,

$$f(2) = 1.$$

No Exemplo 2.12, item b, verificamos que:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 0.$$

Portanto, f é descontínua em 2.

Verificar que f é contínua nos intervalos: $(-\infty, 2)$ e $(2, +\infty)$.

■

Propriedades Básicas de Funções Contínuas

Teorema 2.9: Sejam f e g duas funções reais de um variável real cujos domínios tem uma interseção não-vazia W. Se f e g são contínuas em um ponto a de W, então:

1) $f+g$, $f-g$ e fg são também contínuas em a;

2) se $g(a) \neq 0$, então f/g é contínua em a.

Teorema 2.10: Sejam f e g duas funções reais de um variável real e suponha que o conjunto W, constituído pelos números que pertencem a interseção da imagem de g com o domínio de f, não é vazio. Se f e g são contínuas em um ponto a de W, então $f \circ g$ é contínua em a.

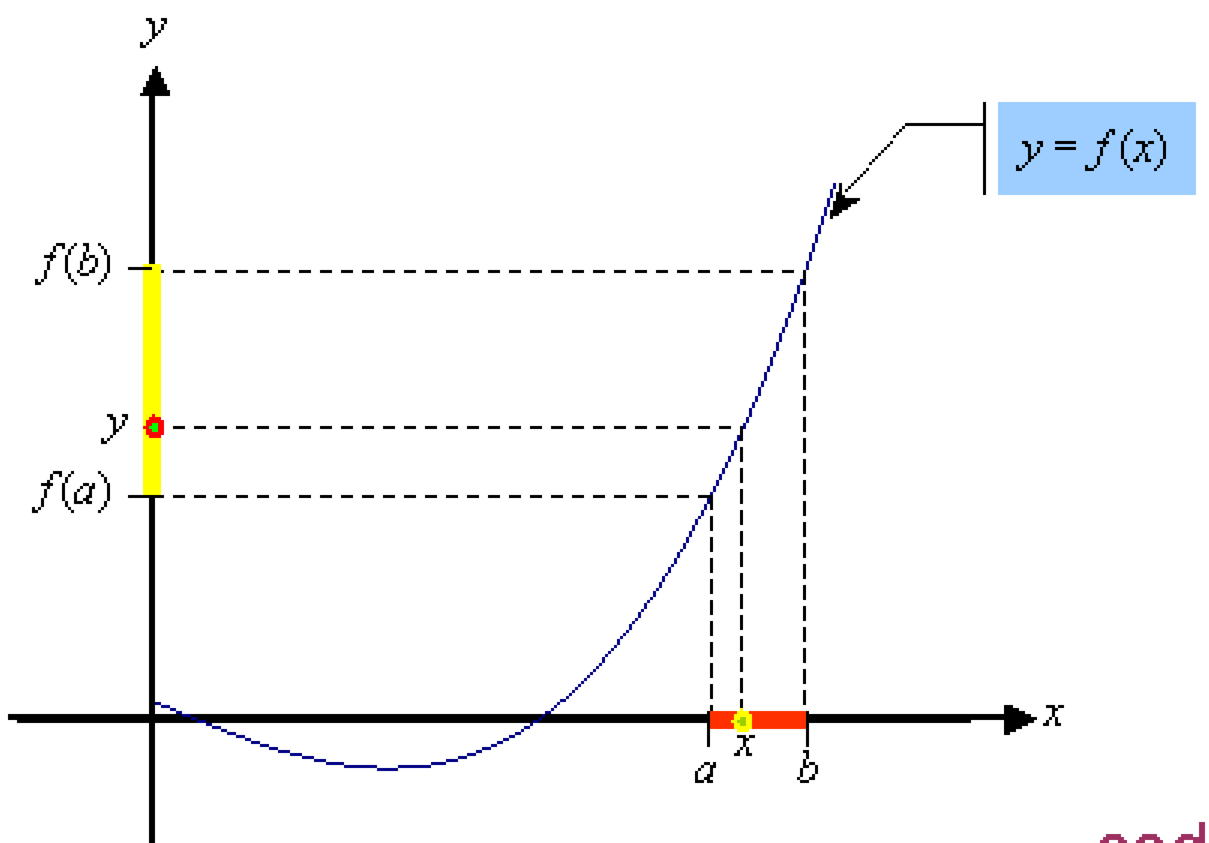
Teorema 2.11: Seja f uma função real de um variável real e seja a um ponto do domínio de f.

1) Se f é uma função polinomial então f é contínua em a.

2) Se f é uma função racional então f é contínua em a.

Teorema 2.12 – Teorema do Valor Intermediário:

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a,b]$ e suponha que $f(a) < f(b)$ $\left(\text{ou que } f(a) > f(b)\right)$. Se y é um número arbitrário do intervalo aberto $\left(f(a), f(b)\right)$ (ou $\left(f(b), f(a)\right)$), então existe pelo menos um número x do intervalo (a,b) tal que $y = f(x)$.



Resumo

Limites

- Limites laterais, infinitos e no infinito
- Continuidade de funções