Matemática para Computação
Avaliação à Distância 1 — Segundo Semestre — 2005

Esta avaliação contém questões com elaborada resolução. Recomendamos que sejam feitos exercícios do livro texto, que possuem facilidade maior, como preparação para esta avaliação.

1. (1,25 pontos) ---

   Determine a função inversa de

   $$g(x) = \frac{x+5}{2x-3}$$

   cujo domínio é (Dom $f = \mathbb{R} - 3/2$).

   Solução:

   $$y = \frac{x+5}{2x-3} \longrightarrow x = \frac{y+5}{2y-3}$$

   $$x(2y-3) = y+5$$

   $$2xy - 3x = y+5$$

   $$2xy - y = 3x+5$$

   $$y(2x-1) = 3x+5$$

   $$y = \frac{3x+5}{2x-1} \longrightarrow g^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2x-1}$$

2. (1,25 pontos) ---

   Calcule os limites abaixo.

   (a) $\lim_{x\to-\infty} \left(x+1+\sqrt{x^2+4}\right)$

   (b) $\lim_{x\to1} \dfrac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$

   (c) $\lim_{x\to1^+} \dfrac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{sen}\sqrt{x-1}}{x^2-1}$

   Solução:

(a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left((x+1)^2-(\sqrt{x^2+4})^2\right)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x+1-(x^2+4))}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1-4)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}}=\left\{\text{ mas } x=-\sqrt{x^2} \text{ se } x<0,\ \ (x\to-\infty)\right\}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$\frac{2-0}{1+0+\sqrt{1+0}}=\frac{2}{1+\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1$$

(b) $$\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}=?$$

mas

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)$$

ou

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

portanto

$$\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

(c) $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\,\text{sen}\sqrt{x-1}}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\,\text{sen}\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\text{sen}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{\text{sen}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

3. (1,25 pontos) ————————————————————————

Sejam f e g funções tais que $g(x)=\tan(\pi x)\cdot f(x-1)\quad(1/2<x<3/2)$. Sabendo-se que $f(0)=f'(0)=-1$, determine a equação da reta tangente à curva $y=g(x)$ no ponto de abcissa $x=1$.

Solução:

$$g(x)=\tan(\pi x)\cdot f(x-1);\quad f(0)=f'(0)=-1$$

$$g(1) = \tan(\pi \cdot 1) \cdot f(1-1) = \tan(\pi) \cdot f(0) = 0 \cdot -1 = 0$$

$$g'(x) = [\tan(\pi \cdot x)]' \cdot f(x-1) + \tan(\pi \cdot x) \cdot [f(x-1)]' =$$

$$g'(x) = \sec^2(\pi \cdot x) \cdot [\pi x]' \cdot f(x-1) + \tan(\pi \cdot x) \cdot f'(x-1)\,[(x-1)]' =$$

$$g'(x) = \pi f(x-1)\sec^2(\pi \cdot x) + f'(x-1)\tan(\pi \cdot x)$$

logo

$$g'(1) = \pi f(1-1)\sec^2(\pi \cdot 1) + f'(1-1)\tan(\pi \cdot 1)$$

$$g'(1) = \pi f(0)\sec^2(\pi) + f'(0)\tan(\pi) = \pi \cdot (-1) \cdot (-1)^2 + (-1) \cdot 0 = -\pi$$

logo, a inclinação da reta tangente é

$$g'(1) = -\pi$$

sabemos ainda que $g(1) = 0$ portanto da equação da reta tangente

$$y = -\pi + b \Longrightarrow 0 = -\pi + b \Longrightarrow b = \pi$$

e a equação pedida tem a expressão

$$y = \pi(1-x)$$

4. (1,25 pontos) ———————————————————————

Se f^{-1} é a inversa da função

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \quad (x > -1)$$

calcule $(f^{-1})'(0)$.

Solução:

$$y = f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Longleftrightarrow \tan y = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(x+1)\tan y = x - 1$$

$$x\tan y + \tan y = x - 1$$

$$\tan y + 1 = x - x\tan y$$

$$1 + \tan y = x(1 - \tan y)$$

$$x = \frac{1+\tan y}{1-\tan y} = f^{-1}(y)$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \left(\frac{1+\tan y}{1-\tan y}\right)' = \frac{(1+\tan y)'(1-\tan y) - (1+\tan y)(1-\tan y)'}{(1-\tan y)^2} =$$

$$= \frac{\sec^2 y(1-\tan y) - (1+\tan y)(-\sec^2 y)}{(1-\tan y)^2} =$$

$$= \frac{\sec^2 y[1-\tan y + (1+\tan y)]}{(1-\tan y)^2} =$$

$$= \frac{2\sec^2 y}{(1-\tan y)^2}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{2\sec^2 y}{(1-\tan y)^2}$$

no ponto $y = 0$, $\sec 0 = 1/\cos 0 = 1/1 = 1$ e $\tan 0 = 0$, logo

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = \frac{2\sec^2 0}{(1-\tan 0)^2} = \frac{2\cdot(1)^2}{(1-0)^2} = 2$$

$$\left(f^{-1}\right)'(0) = 2$$

5. (1,25 pontos) ---

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} |\, x^2 - 1 \,| & \text{se} \quad x \leq 2 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

determine:

(a) Os valores de a e b para que f seja derivável em 2. Justifique.
(b) O gráfico de f com os valores de a e b encontrados no item acima.
(c) Calcule $f'_+(-1)$ e $f'_+(1)$, com os mesmos valores de a e b do item anterior.
(d) A expressão de f' com mesmos a e b anteriores. Justifique.

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} \mid x^2 - 1 \mid & \text{se} \quad x \leq 2 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) & \text{se} \ \ (x^2 - 1) \geq 0 \quad \text{e} \quad x \leq 2 \\ -(x^2 - 1) & \text{se} \ \ (x^2 - 1) < 0 \quad \text{e} \quad x \leq 2 \\ ax + b & \text{se} \qquad\qquad\qquad\qquad x > 2 \end{cases}$$

observe que

$$\begin{cases} (x^2 - 1) \geq 0 \iff x \leq -1 \ \text{ ou } \ x \geq 1 \\ (x^2 - 1) < 0 \iff -1 < x < 1 \end{cases}$$

para que f seja derivável em 2, f tem que ser contínua em 2.

$$\begin{cases} f(2) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \leftarrow 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \leftarrow 2^-} (x^2 - 1) = 2^2 - 1 = 3 \\ \lim\limits_{x \leftarrow 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \leftarrow 2^+} (ax + b) = 2a + b \end{cases}$$

portanto, f é contínua em 2 se e somente se

$$2a + b = 3$$

que é uma condição para que f seja derivável em 2.

$$\lim_{h \leftarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \leftarrow 0^-} \frac{[(2+h)^2 - 1] - 3}{h} = \lim_{h \leftarrow 0^-} \frac{4 + 4h + h^2 - 1 - 3}{h} =$$

$$\lim_{h \leftarrow 0^-} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \leftarrow 0^-} 4 + h = 4$$

e

$$\lim_{h \leftarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \leftarrow 0^+} \frac{[a(2+h) + b] - 3}{h} = \lim_{h \leftarrow 0^+} \frac{ah + (2a + b - 3)}{h} =$$

$$\lim_{h \leftarrow 0^+} \frac{ah + (3 - 3)}{h} = \lim_{h \leftarrow 0^+} \frac{ah + 0}{h} = \lim_{h \leftarrow 0^+} a = a$$

$f(x)$ é derivável em $2 \Longrightarrow 4 = f'_-(2) = f'_+(2) = a \Longrightarrow 4 = a$

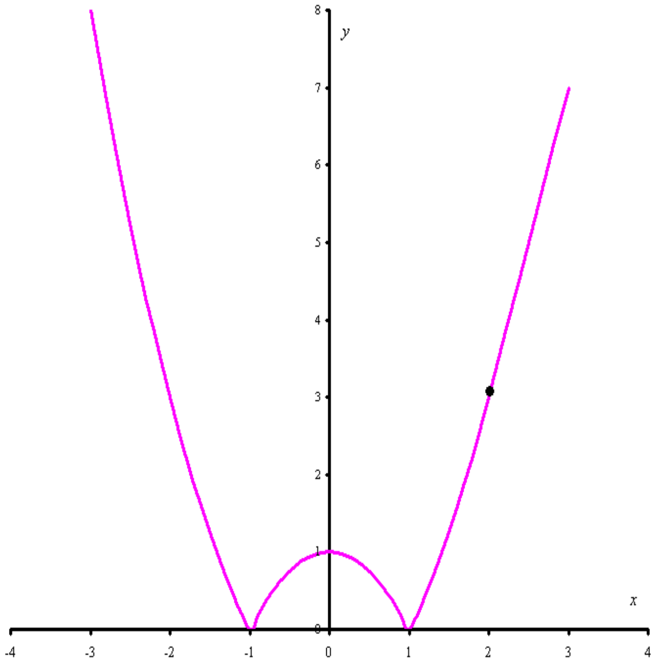
$$f(x) \ \text{ é derivável em } \ 2 \iff \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a = 4 \end{cases}$$

daí

$$2 \cdot 4 + b = 3 \Longrightarrow b = -5$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} \mid x^2 - 1 \mid & \text{se} \quad x \leq 2 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 4x - 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$



(c)

$$f'_+(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[1-(-1+h)^2]-[(-1)^2-1]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1-(1-2h+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} (2-h) = 2$$

e

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{[(1+h)^2-1]-[(1)^2-1]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} (2+h) = 2$$

(d)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} & x < -1 \\ \nexists & \text{se} & x = -1 \\ -2x & \text{se} & -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se} & x = 1 \\ 2x & \text{se} & 1 < x < 2 \\ 4 & \text{se} & x = 2 \\ 4 & \text{se} & x > 2 \end{cases}$$

Observe que no ponto $x = -1$

$$f'_-(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{[(-1+h)^2-1]-[(-1)^2-1]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1-2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-2+h)=-2$$

e que

$$f'_+(-1)=2 \text{ do item anterior}$$

logo

$$f'_-(-1)\neq f'_+(-1)\Longrightarrow \nexists f'(-1)$$

no ponto $x=1$

$$f'_-(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[1-(1+h)^2]-[1^2-1]}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{[1-(1+2h+h^2)]}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{[-2h-h^2]}{h}=\lim_{h\to 0^-}-2-h=-2$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1-2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^-}(-2+h)=-2$$

e que

$$f'_+(1)=2 \text{ do item anterior}$$

logo

$$f'_-(1)=-2\neq 2=f'_+(1)\Longrightarrow \nexists f'(1)$$

e que no ponto $x=2$ temos do item a)

$$f'_-(2)=f'_+(2)=4\Longrightarrow \exists f'(2)=4$$

6. (1,25 pontos) ———

Faça um esboço do gráfico da função a seguir.

(a) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1;$

Solução:

(a) $f(x)=x^3-6x^2+9x+1;$

i) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f=\mathbb{R}$).

ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-6x^2+9x+1)=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot(1-\frac{6}{x}+\frac{9}{x^2}+\frac{1}{x^3})=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot(\lim_{x\to-\infty}1-\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{x^2}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3})=$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^3\cdot(1-0+0+0)=$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to\infty}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} + \frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{6}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{9}{x^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot (1 - 0 + 0 + 0) =$$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.
E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.
Não existem assíntotas verticais posto que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

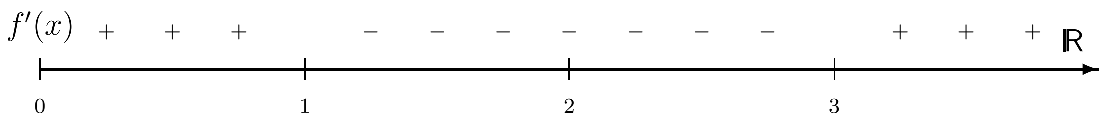
iii) Vejamos os máximos e mínimos locais.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

e

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-3)(x-1)$$

Os máximos e mínimos locais ocorrem em $x = 1$ e $x = 3$.
O diagrama a seguir indica o sinal da primeira derivada no intervalo estudado.

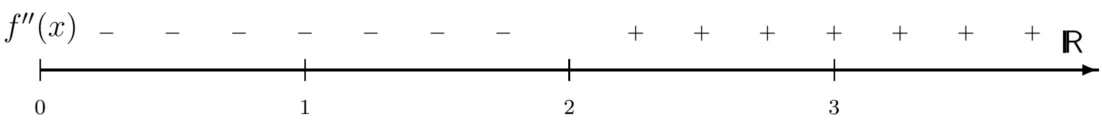


Logo $f(x)$ é crescente em $(-\infty, 1)$ e $(3, \infty)$ e é decrescente em $(1, 3)$.
O ponto de máximo local é $(1, 5)$.
O ponto de mínimo local é $(3, 1)$.

iv) Vejamos os pontos de inflexão.

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$$

portanto o ponto de inflexão ocorre em $x = 2$. O diagrama a seguir indica o sinal da segunda derivada em torno do ponto 2.



Logo, pelo sinal da segunda derivada, f é côncava para baixo em $(-\infty, 2)$ e é côncava para cima em $(2, \infty)$. O ponto de inflexão é $(2, 3)$

v) Interseções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (interseção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

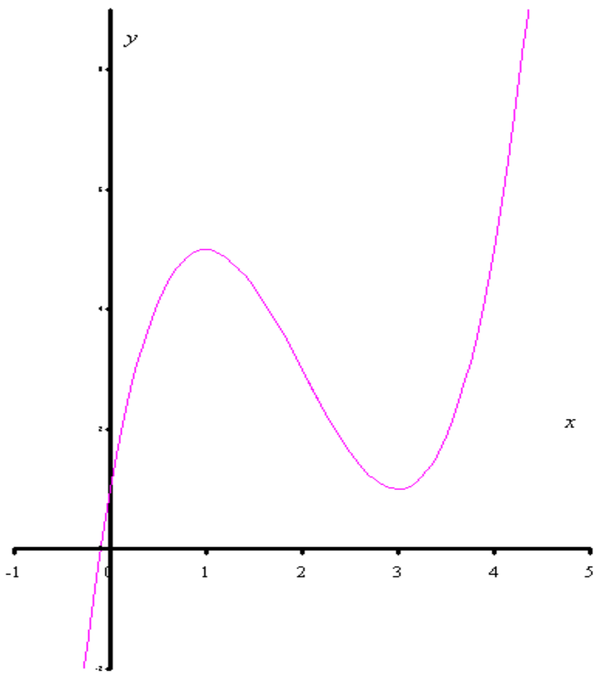
$$0 = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} f(-1) & = & (-1)^3 - 6(-1)^2 + 9(-1) + 1 & = & -15 < 0 \\ f(0) & = & (0)^3 - 6(0)^2 + 9(0) + 1 & = & 1 < 0 \end{cases}$$

como f é contínua em $(-1, 0)$ então f corta o eixo x em algum ponto deste intervalo, já que há troca de sinal da função f.

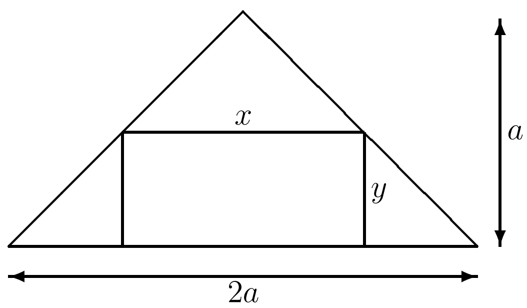
Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 1$



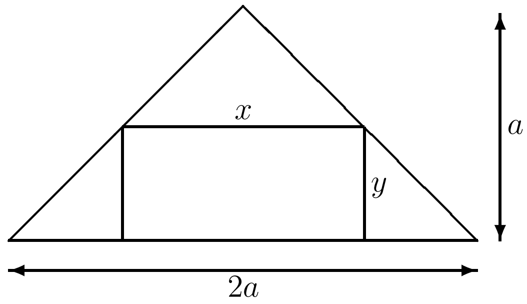
7. (1,25 pontos)

Quais são as dimensões de um retângulo de área máxima que pode ser inscrito num triângulo isósceles de base $2a$ e altura a, como mostra a figura a seguir.

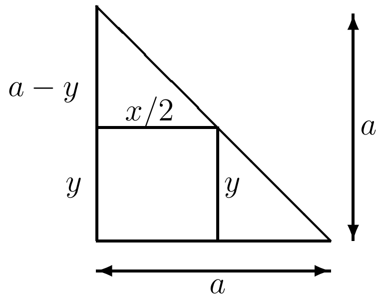


Solução:

Vejamos o problema inicialmente do ponto de vista geométrico,



ou com mais detalhes,



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{\frac{x}{2}}{a} = \frac{a-y}{a} \Longrightarrow \frac{x}{2} = a - y \Longrightarrow y = a - \frac{x}{2}$$

portanto a área do retângulo é dada por

$$A = xy = x\left(a - \frac{x}{2}\right)$$

ou

$$A(x) = ax - \frac{x^2}{2}$$

Temos agora que achar a área máxima, para isto vamos derivar a função área e igualar a expressão a zero

$$A'(x) = a - x$$

$$a - x = 0 \Longrightarrow x = a$$

portanto em $x = a$ a área será máxima. As dimensões do retângulo será a e $a/2$.

8. (1,25 pontos) ———————————————————————————————

A intensidade E de um campo elétrico gerado por uma partícula num plano de coordenadas x e y é dada pela seguinte expressão,

$$E = \frac{\kappa}{x^2 + y^2}$$

onde $\kappa > 0$, κ é uma constante e $(x, y) \neq (0, 0)$.

Duas partículas A e B percorrem trajetórias dadas por equações que fornecem abcissas e ordenadas em função de um número real t, tal que:

- Trajetória de A: $x = t$ e $y = -t + 2$ para $t \in [0, 2)$
- Trajetória de B: $x = t$ e $y = t + 2$ para $t \in [-2, 0)$

(a) Determine a distância entre A_0 e B_0, sendo que: A_0 é o ponto da trajetória de A onde a intensidade de E sobre A é máxima e B_0 é o ponto da trajetória de B onde a intensidade de E sobre B é máxima.

(b) Determine a intensidade E mínima sobre B e o ponto da trajetória de B onde ele ocorre.

Solução:

$$E = \frac{\kappa}{x^2 + y^2}$$

Intensidade sobre a trajetória:

$$\begin{cases} A: \quad E = \dfrac{\kappa}{t^2 + (-t + 2)^2} & t \in [0, 2) \\ B: \quad E = \dfrac{\kappa}{t^2 + (t + 2)^2} & t \in [-2, 0) \end{cases}$$

(a) Para A

$$\text{Max } \; E(t) = \frac{\kappa}{t^2 + (-t + 2)^2}, \quad t \in [0, 2) \leftrightarrow A_0 = (t_0, -t_0 + 2) \;\text{ tal que }\; E(t_0) \;\text{ é máximo}$$

$$E(t) = \frac{\kappa}{t^2 + (-t + 2)^2} = \frac{\kappa}{t^2 + t^2 - 4t + 4} = \frac{\kappa}{2t^2 - 4t + 4} =$$

$$\frac{\kappa}{2} \frac{1}{t^2 - 2t + 2} = \frac{\kappa}{2}(t^2 - 2t + 2)^{-1}$$

logo sua derivada (para encontrar o máximo) é

$$E'(t) = \frac{\kappa}{2} \cdot (-1)(t^2 - 2t + 2)^{-2}(2t - 2) = -\frac{\kappa}{2} \cdot \frac{2(t - 1)}{(t^2 - 2t + 2)^2} = -\kappa \cdot \frac{(t - 1)}{(t^2 - 2t + 2)^2}$$

que se anula em $t = 1$. Neste ponto ocorre o máximo. Substituindo na expressão da intensidade, teremos

$$E(1) = \frac{\kappa}{1^2 + (-1+2)^2} = \frac{\kappa}{2} \longrightarrow \text{Intensidade máxima sobre } A$$

substituindo na trajetória de A, temos,

$$A_0 = (1, -1+2) = (1, 1)$$

Para B

$$\text{Max } E(t) = \frac{\kappa}{t^2 + (t+2)^2}, \ \ t \in [-2, 0) \leftrightarrow B_0 = (t_0, t_0 + 2) \text{ tal que } E(t_0) \text{ é máximo}$$

$$E(t) = \frac{\kappa}{t^2 + (t+2)^2} = \kappa[t^2 + (t+2)^2]^{-1}$$

logo sua derivada (para encontrar o máximo) é

$$E'(t) = \kappa \cdot (-1)[t^2 + (t+2)^2]^{-2} \cdot [2t + 2(t+2) \cdot 1] =$$

$$-\frac{\kappa}{[t^2 + (t+2)^2]^2} \cdot [4t + 4] = -\frac{4\kappa(t+1)}{[t^2 + (t+2)^2]^2}$$

que se anula em $t = -1$. Neste ponto ocorre o máximo. Substituindo na expressão da intensidade, teremos

$$E(-1) = \frac{\kappa}{(-1)^2 + (-1+2)^2} = \frac{\kappa}{2} \longrightarrow \text{Intensidade máxima sobre } B$$

substituindo na trajetória de B, temos,

$$B_0 = (-1, -1+2) = (-1, 1)$$

Portanto a distância entre $A_0 = (1, 1)$ e $B_0 = (-1, 1)$ é

$$d = \sqrt{[1 - (-1)]^2 + [1 - 1]^2} = \sqrt{2^2 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

(b) Como já verificamos os pontos críticos e encontramos um ponto de máximo no intervalo $[-2, 0)$, temos que verificar os extremos para encontrar o ponto de mínimo.

$$E(-2) = \frac{\kappa}{(-2)^2 + (-2+2)^2} = \frac{\kappa}{4}$$

e

$$\lim_{t \to 0^-} E(t) = \lim_{t \to 0^-} \frac{\kappa}{(t)^2 + (t+2)^2} = \frac{\kappa}{4}$$

Portanto a Intensidade mínima sobre B é $\frac{\kappa}{4}$ e ocorre no ponto $(-2, 0)$.