Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP1 - 2^o semestre de 2019 — Gabarito

Questões

1. (2,50 pontos)

   Determine as inversas das seguintes funções, a seguir calcule as primeiras derivadas das funções e de suas inversas:

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   (b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

   Solução:

   (a) $f(x) = x^3 + 1$

   $$y = x^3 + 1 \implies y - 1 = x^3 \implies \sqrt[3]{y-1} = x$$

   $$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

   $$[f(x)]' = 3x^2$$

   $$[f^{-1}]'(x) = \frac{1}{3}[x-1]^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

   (b) $f(x) = \sqrt{x-2}$

   $$y = \sqrt{x-2} \implies y^2 = x - 2 \implies x = y^2 + 2$$

   $$f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

   $$[f(x)]' = \left[\sqrt{x-2}\right]' = \left[(x-2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

   $$[f^{-1}(x)]' = \left[x^2 + 2\right]' = 2x + 0 = 2x$$

2. (2,50 pontos)

   Calcule os limites abaixo.

(a) $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x-5}+3x$

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x}{x^2-4}$

Solução:

(a) $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x-5}+3x = \sqrt{2\cdot 4-5}+3\cdot 4 = \sqrt{8-5}+12 = \sqrt{3}+12$

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{3}{3^2-4} = \dfrac{3}{9-4} = \dfrac{3}{5}$

3. (2,50 pontos)

Mostre que a função $f(x) = \sqrt{x^2}$ é contínua em toda a reta dos reais.

Solução:

Devemos mostrar que em todos os pontos da reta real, o limite existe e é igual ao valor da função no ponto.

$$\lim_{x\to a} f(x) \text{ Existe e } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x^2} = \sqrt{a^2} = a = f(a)$$

4. (2,50 pontos)

Calcule as derivadas de primeira ($f'(x)$) e segunda ($f''(x)$) ordens das funções

(a) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

(b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

Solução:

(a)

$$f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$$

$$f'(x) = \left[x^{4/3}+4x^{1/3}\right]' = \frac{4}{3}x^{1/3} + 4\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}\left[\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]$$

$$f''(x) = \left[\frac{4}{3}x^{1/3} + \frac{4}{3}x^{-2/3}\right]' = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}x^{-5/3} = \frac{4}{9}x^{-2/3} - \frac{8}{9}x^{-5/3}$$

$$= \frac{4}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{8}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$$

(b)

$$f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$f'(x) = \left[x\sqrt{4-x^2}\right]' = (x)'\left(\sqrt{4-x^2}\right) + (x)\left(\sqrt{4-x^2}\right)'$$

$$= \sqrt{4-x^2} + (x)\left(\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)\right) = \sqrt{4-x^2} - \left(\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f''(x) = \left[x\sqrt{4-x^2}\right]'' = \left[\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\right]' = \frac{[4-2x^2]'\left[\sqrt{4-x^2}\right] - [4-2x^2]\left[\sqrt{4-x^2}\right]'}{\left[\sqrt{4-x^2}\right]^2}$$

$$= \frac{[-4x]\left[\sqrt{4-x^2}\right] - [4-2x^2]\left[\frac{1}{2}(4-x^2)^{-1/2}(-2x)\right]}{[4-x^2]}$$

$$= \frac{-4x\sqrt{4-x^2} + x(4-2x^2)(4-x^2)^{-1/2}}{4-x^2}$$

$$= \frac{-4x\sqrt{4-x^2} + \frac{x(4-2x^2)}{(4-x^2)^{1/2}}}{4-x^2} = \frac{-4x\sqrt{4-x^2} + \frac{x(4-2x^2)}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}$$

$$= \frac{\frac{-4x(4-x^2) + x(4-2x^2)}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{-4x(4-x^2) + x(4-2x^2)}{\sqrt{4-x^2}(4-x^2)}$$

$$= \frac{-16x + 4x^3 + 4x - 2x^3}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{2x^3 - 12x}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$$