Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2^o semestre de 2010 - Gabarito

Questões

1. (1,5 pontos)

   Dada a função $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + -6x + 8$, ache:

   (a) os pontos de máximo e mínimos relativos de f;

   (b) os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

   Solução:

   (a) $$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

   Logo os pontos críticos estão em $x = -3$ e $x = 2$.

   Usando o teste da segunda derivada, podemos verificar se estes são pontos de máximo ou mínimo relativos.

   $$f''(x) = 2x + 1$$

   e

   $$f''(-3) = -5 \quad \text{e} \quad f''(2) = 5$$

   Logo f tem um máximo relativo em $x = -3$ com $f(-3) = 43/2$ e um mínimo relativo em $x = 2$ com $f(2) = 2/3$. Resumindo

Ponto de máximo $\quad (-3, \dfrac{43}{2})$

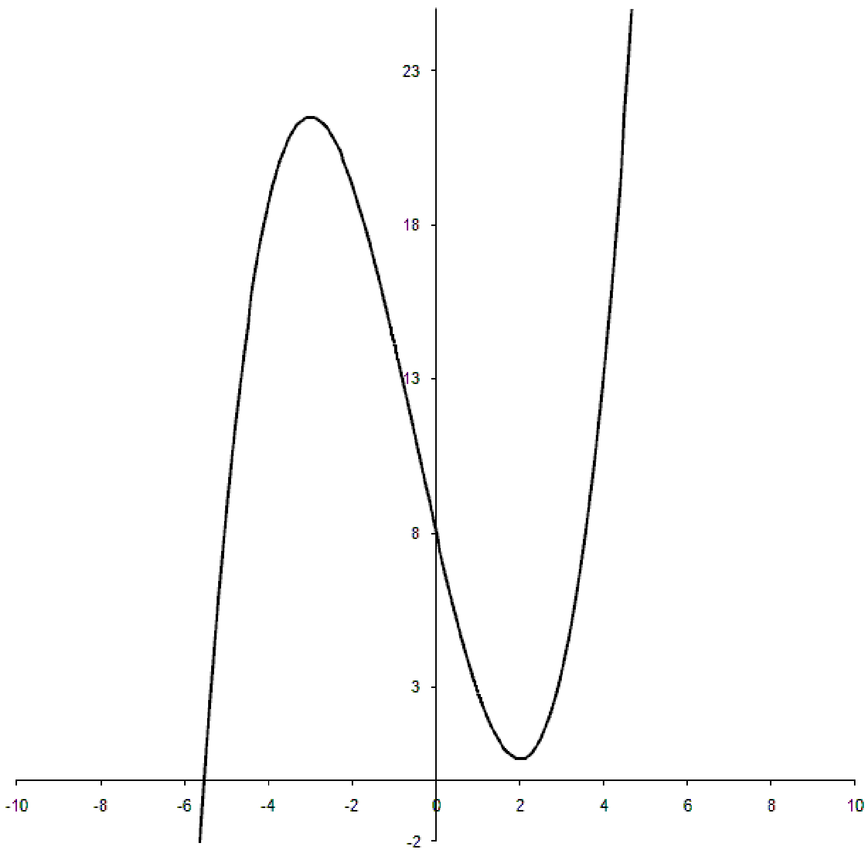
Ponto de mínimo $\quad (2, \dfrac{2}{3})$

(b) Verificando o sinal da primeira derivada em torno dos pontos críticos

sinal de $f'(x)$

$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$\mathbb{R}$
-4		-3		-2		-1		0		1		2		3	

Portanto f é crescente em $(-\infty, -3)$ e $(2, \infty)$ e é decrescente em $(-3, 2)$. O gráfico a seguir ilustra o comportamento da função .



2. (1,5 pontos)

Ache as derivadas de primeira e segunda ordens das seguintes funções:

(a) $\quad f(x) = (2x - 1)/(2x + 1)$

(b) $f(x) = (1+2x)/(1-2x)$

(c) $f(x) = 1/\sqrt{2+x}$

Solução:

(a) $f(x) = (2x-1)/(2x+1)$

$$f'(x) = \frac{[(2x-1)]' \cdot (2x+1) - (2x-1) \cdot [(2x+1)]'}{[(2x+1)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2) \cdot (2x+1) - (2x-1) \cdot (2)}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x+2-4x+2}{(2x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(2x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{[(4)]' \cdot (2x+1)^2 - (4) \cdot [(2x+1)^2]'}{[(2x+1)]^4}$$

$$f''(x) = \frac{(0) \cdot (2x+1)^2 - (4) \cdot (2(2x+1)(2))}{[(2x+1)]^4}$$

$$f''(x) = -\frac{(32x+16)}{[(2x+1)]^4}$$

(b) $f(x) = (1+2x)/(1-2x)$

$$f'(x) = \frac{[(1+2x)]' \cdot (1-2x) - (1+2x) \cdot [(1-2x)]'}{[(1-2x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2) \cdot (1-2x) - (1+2x) \cdot (-2)}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2-4x+2+4x}{(1-2x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4}{(1-2x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{[(4)]' \cdot (1-2x)^2 - (4) \cdot [(1-2x)^2]'}{[(1-2x)]^4}$$

$$f''(x) = \frac{(0) \cdot (1-2x)^2 - (4) \cdot [2(1-2x)(-2)]}{(1-2x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{(16-32x)}{(1-2x)^4}$$

(c)
$$f(x) = 1/\sqrt{2+x} = (2+x)^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{3}{2}}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(2+x)^3}}$$
$$f''(x) = \left[-\frac{1}{2}(2+x)^{-\frac{3}{2}}\right]'$$
$$f''(x) = \left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(2+x)^{-\frac{5}{2}}\right]$$
$$f''(x) = \frac{3}{4}(2+x)^{-\frac{5}{2}}$$
$$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{(2+x)^5}}$$

3. (1,5 pontos)

Calcule as antiderivadas:

(a) $$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$$

(b) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$$

Solução:

(a)
$$\begin{aligned}\int (1-x)\sqrt{x}\,dx &= \int (1-x)x^{1/2}\,dx \\ &= \int (x^{1/2} - x^{3/2})\,dx \\ &= \int x^{1/2}\,dx - \int x^{3/2}\,dx \\ &= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx &= \int \left[\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right]\,dx \\ &= \int x\,dx + \int 5\,dx - \int 4x^{-2}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x - 4(-x^{-1}) + C \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C\end{aligned}$$

4. (1,5 pontos)

Calcule as integrais definidas:

(a) $$\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx$$

(b) $$\int_{-2}^{2}(x^3-x^5)\,dx$$

Solução:

(a)
$$\int_0^1 x(1-\sqrt{x})^2\,dx = \int_0^1 x\left[1-2\sqrt{x}+(\sqrt{x})^2\right]\,dx = \int_0^1 x\left[1-2\sqrt{x}+x\right]\,dx$$
$$= \int_0^1 \left[x-2x\sqrt{x}+x^2\right]\,dx = \int_0^1 \left[x-2x^{3/2}+x^2\right]\,dx$$
$$= \int_0^1 x\,dx \int_0^1 -2x^{3/2}\,dx \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[\frac{4}{5}x^{5/2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right] - \left[\frac{4}{5}1^{5/2}-\frac{4}{5}0^{5/2}\right] + \left[\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right] = \left[\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{4}{5}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]$$
$$= \left[\frac{15}{30}\right]-\left[\frac{24}{30}\right]+\left[\frac{10}{30}\right] = \frac{15-24+10}{30}$$
$$= \frac{1}{30}$$

(b)
$$\int_{-2}^{2}(x^3-x^5)\,dx = \int_{-2}^{2}x^3\,dx - \int_{-2}^{2}x^5\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2} - \left[\frac{x^6}{6}\right]_{-2}^{2} =$$
$$= \left[\frac{(2)^4}{4}-\frac{(-2)^4}{4}\right] - \left[\frac{(2)^6}{6}-\frac{(-2)^6}{6}\right] =$$
$$= \left[\frac{16}{4}-\frac{16}{4}\right] - \left[\frac{64}{6}-\frac{64}{6}\right] =$$
$$= 0$$

5. (2,0 pontos)

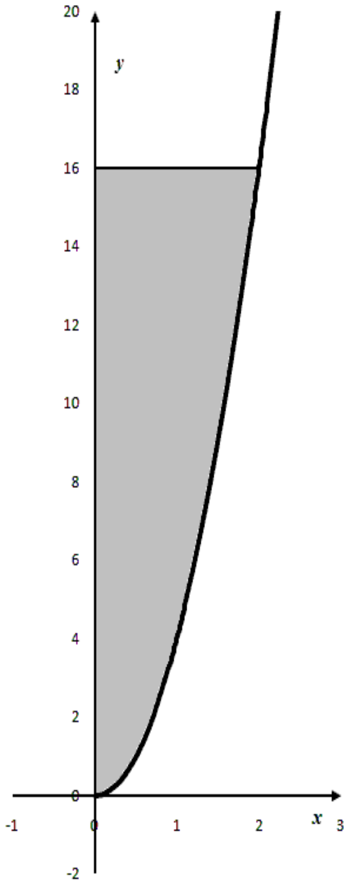
Ache o volume do sólido obtido por revolução em torno do eixo y da região limitada pela parábola $y=4x^2$ e as linhas $x=0$ e $y=16$.

Solução:

Usando a Técnica de Volume por Discos e considerando V o volume do sólido,

$$V = \pi\int_0^{16} x^2dy = \pi\int_0^{16}\frac{y}{4}dy = \pi\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{y^2}{2}\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8}\left[y^2\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8}\left[16^2-0^2\right] = \frac{\pi}{8}\left[256\right]$$
$$= 32\pi$$

O gráfico a seguir ilustra a região rotada em torno do eixo y.



6. (2,0 pontos)

Calcule os seguintes limites utilizando a regra de L'Hôpital.

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

(c) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Por L'Hôpital,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(b) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$$

Também temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(c) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$$

Temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$.

Por L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 6x + 3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 2x - 1)}{\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 - 6x + 3)} = \frac{7}{3}$$