Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 1^o semestre de 2019 - Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Dada a função $y = x^4 - 6x + 2$, esboce seu gráfico

   Solução:

   Candidatos a pontos críticos $\longrightarrow y' = 0$

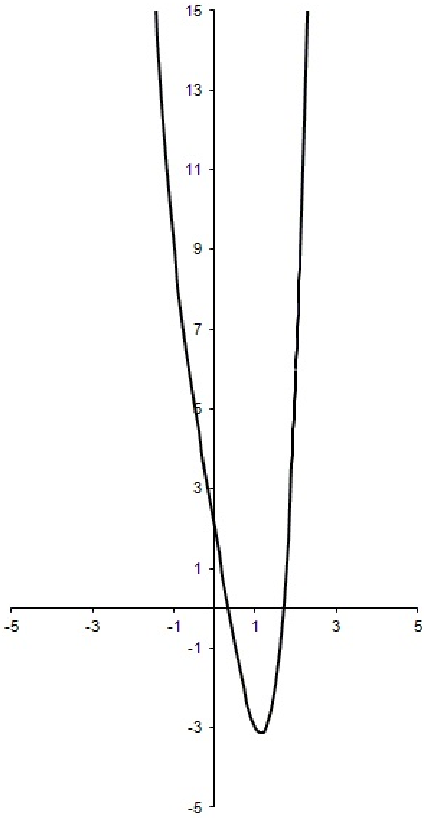
   $$y' = 0 \longrightarrow 4x^3 - 6 = 0 \longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{6}{4}} = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

   Candidatos a pontos de inflexão $\longrightarrow y'' = 0$

   $$y'' = 0 \longrightarrow 12x^2 = 0 \longrightarrow x = 0$$

   $x = 0$ pode ser um ponto de inflexão, mas y'' é sempre positiva, logo a concavidade da curva tanto para $x < 0$ assim como para $x > 0$ é voltada para cima e portanto $x = 0$ não é um ponto de inflexão.

   No único ponto crítico $x = \sqrt[3]{3/2}$, o valor de $y'' > 0$ que indica ser o ponto crítico um ponto de mínimo relativo. Como só há um ponto crítico este é um ponto de mínimo global.



2. (2,5 pontos)

Calcule as integrais abaixo:

(a)

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$$

(b)

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\, dx$$

(c)

$$\int \cos 3x \, dx$$

Solução:

(a)

$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{(1+2x+x^2)}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$= \int \left[\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{2x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}}\right] dx$$

$$= \int \left[x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right] dx$$

$$= \int \left[x^{-\frac{1}{2}}\right] dx + \int \left[2x^{\frac{1}{2}}\right] dx + \int \left[x^{\frac{3}{2}}\right] dx$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + 2\frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}} x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

(b)

$$\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\, dx = \int \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= \int \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2}\, dx$$

$$= \int \left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$$

$$= \int \left[1-(x+1)^{-2}\right] dx$$

$$= x - \frac{1}{(-2+1)}(x+1)^{-2+1} + C$$

$$= x + (x+1)^{-1} + C$$

$$= x + \frac{1}{(x+1)} + C$$

$$= \frac{x(x+1)+1}{(x+1)} + C$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x+1} + C = \frac{x^2}{x+1} + C$$

(c)

$$\int \cos 3x\, dx = \frac{3}{3}\int \cos 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int 3\cos 3x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + C$$

3. (2,5 pontos)

Usando a regra de L'Hôpital calcule os limites

(a)

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 16}$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2}$$

(c)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 + x^2}{e^x + 1}$$

Solução:

(a)

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^4 - 256}{x^2 - 16} = \lim_{x\to 4} \frac{4x^3}{2x} = \frac{4 \cdot 4^3}{2 \cdot 4} = 32 \quad \left(\text{tipo} \quad \frac{0}{0}\right)$$

(b)

$$\lim_{x\to 2} \frac{e^x - e^2}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{e^x}{1} = e^2 \quad \left(\text{tipo} \quad \frac{0}{0}\right)$$

(c)

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^4 + x^2}{e^x + 1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{12x^2 + 2}{e^x} =$$

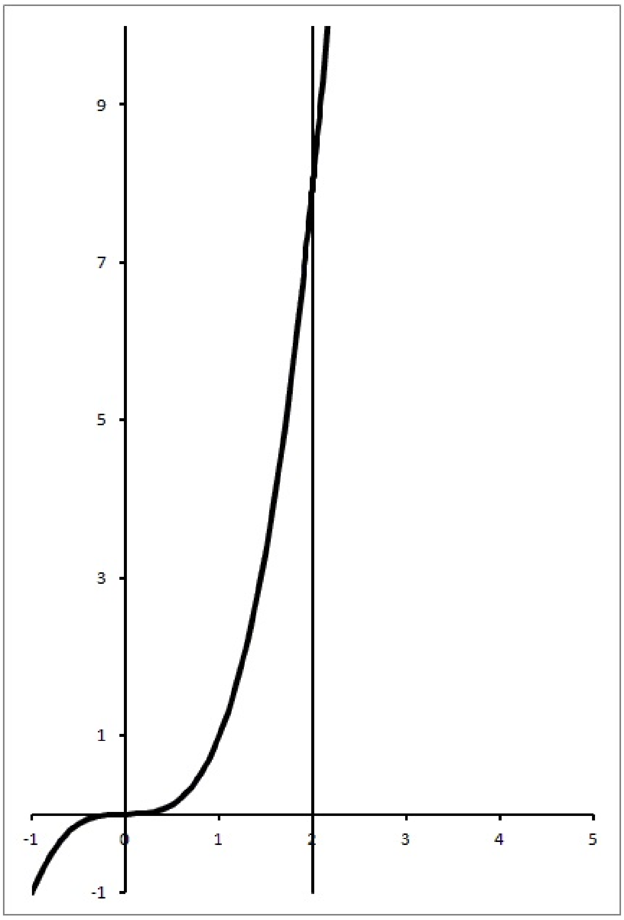
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{24x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{24}{e^x} = 0 \quad \left(\text{tipo} \quad \frac{\infty}{\infty}\right)$$

4. (2,5 pontos)

Seja a região entre o eixo x, a linha $x = 2$ e a curva $y = x^3$. Ache o volume do sólido gerado por rotação da região em torno do eixo x.

Solução:

O gráfico ilustra as curvas que definem a região a ser rotacionada.



$$V = \pi \int_0^2 y^2 \, dx = \pi \int_0^2 (x^3)^2 \, dx = \pi \int_0^2 x^6 \, dx = \pi \frac{x^7}{7} \bigg]_0^2 = \frac{128\pi}{7}$$