Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2º semestre de 2012 - Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Seja $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$. Para $f(x)$ encontre:

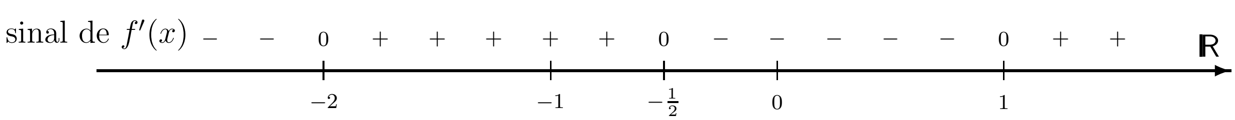
   - os extremos locais;
   - os intervalos aonde $f(x)$ é crescente ou decrescente.

   Solução:

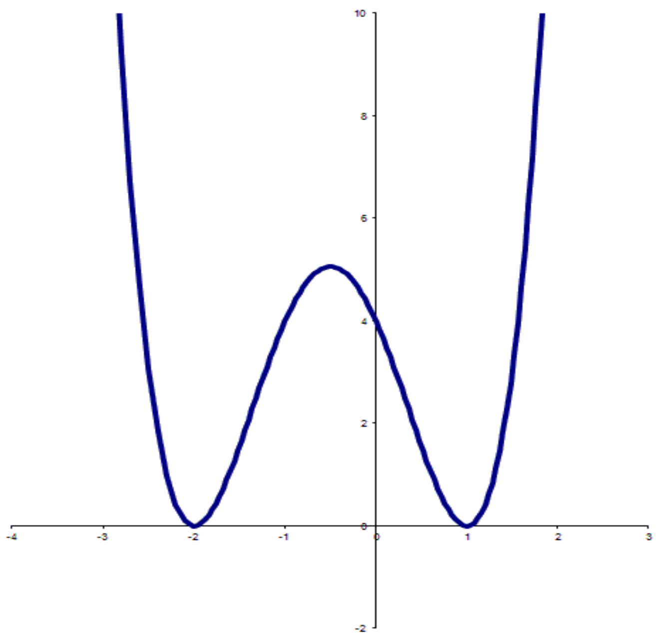
$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 4(x-1)(x+2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Logo a primeira derivada se anula em $x = -2$, $-\frac{1}{2}$ e $x = 1$. O diagrama seguinte ilustra o sinal da primeira derivada em torno deste pontos.



Portanto, $f(x)$ decresce em $(-\infty, -2)$, cresce em $(-2, -\frac{1}{2})$, decresce em $(-\frac{1}{2}, 1)$ e cresce novamente em $(1, \infty)$. Logo, $x = -2$ é um ponto de mínimo local, $x = -\frac{1}{2}$ é um ponto de máximo local e $x = 1$ é um ponto de mínimo local. O gráfico a seguir mostra no plano cartesiano a função $f(x)$.



2. (2,5 pontos)

Ache a concavidade e os pontos de inflexão da função

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$$

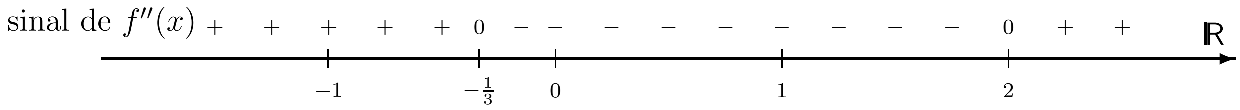
Solução:

$$f(x) = 3x^4 - 10x^3 - 12x^2 + 12x - 7$$

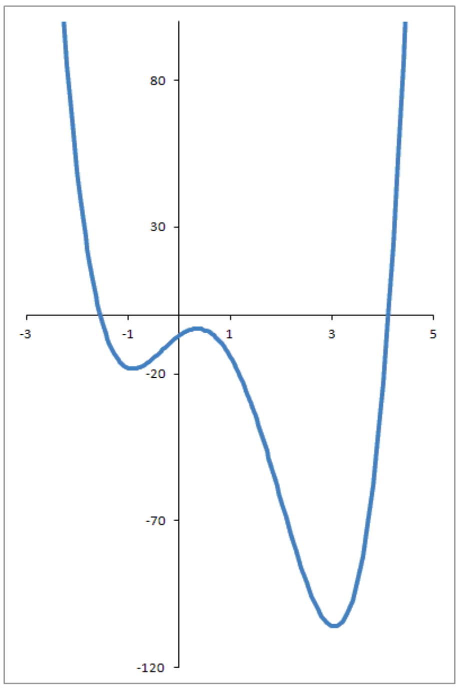
$$f'(x) = 12x^3 - 30x^2 - 24x + 12$$

$$f''(x) = 36x^2 - 60x - 24 = 12(3x^2 - 5x - 2) = 36\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)$$

Logo os candidatos a pontos de inflexão são $x = -\frac{1}{3}$ e $x = 2$. A reta real abaixo mostra o comportamento do sinal da segunda derivada na vizinhança destes pontos.



Portanto, $f(x)$ tem um ponto de inflexão em $x = -\frac{1}{3}$ e outro em $x = 2$. A concavidade de $f(x)$ é voltada para cima em $(-\infty, -\frac{1}{3})$, concavidade voltada para baixo em $(-\frac{1}{3}, 2)$ e concavidade voltada para cima em $(2, \infty)$, verifique no gráfico da função a seguir.



3. (2,5 pontos)

Ache a área sob o gráfico da função

$$f(x) = 4 - x^2$$

no intervalo $[0, 2]$.

Solução:

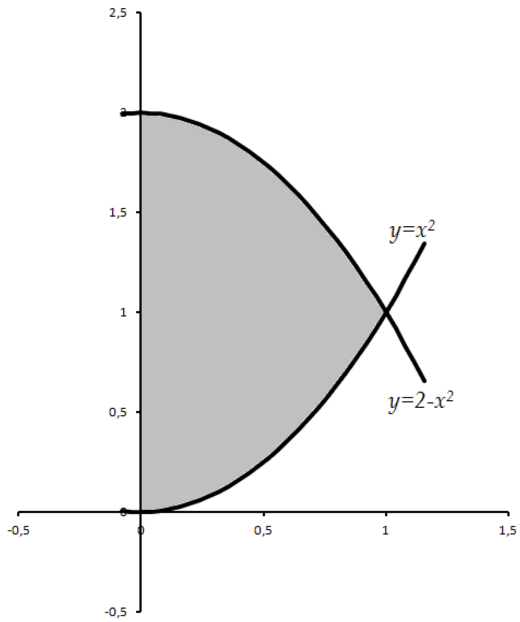
$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} = 8 - \frac{8}{3} = \frac{24 - 8}{3} = \frac{16}{3}$$

4. (2,5 pontos)

Ache o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo y da região no primeiro quadrante limitada superiormente pela parábola $y = 2 - x^2$ e inferiormente pela parábola $y = x^2$.

Solução:

O gráfico mostra as duas curvas e a região a ser rodada em torno do eixo y.



Vamos determinar a interseção das curvas no primeiro quadrante.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \implies x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 = 2 \implies x = \pm 1$$

No primeiro quadrante a interseção ocorre em $x = 1$, no ponto $(x, y) = (1, 1)$.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = \sqrt{2 - y} \end{cases}$$

$$V = \int_0^1 \pi r^2 \, dy + \int_1^2 \pi r^2 \, dy = \int_0^1 \pi \left(\sqrt{y}\right)^2 \, dy + \int_1^2 \pi \left(\sqrt{2-y}\right)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 y \, dy + \pi \int_1^2 (2-y)^2 \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] + \pi \left[2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{1^2}{2}\right] = \pi \frac{1}{2} + \pi \left[4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$