Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2008

Questões

1. (1,00 ponto)

Para cada função abaixo encontre seu domínio e sua imagem.

(a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

(b) $$g(x) = \begin{cases} 2-x & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x-1 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

(c) $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ x-1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ x & \text{se} \quad 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

Domínio $= (-1, 1)$, imagem $= [0, 1) \cup (1, 2)$.

(b) $$g(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{se} \quad 0 < x < 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad 3 \leq x < 4 \end{cases}$$

Domínio $= (0, 2) \cup [3, 4)$, imagem $= (0, 3)$.

(c) $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ x - 1 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

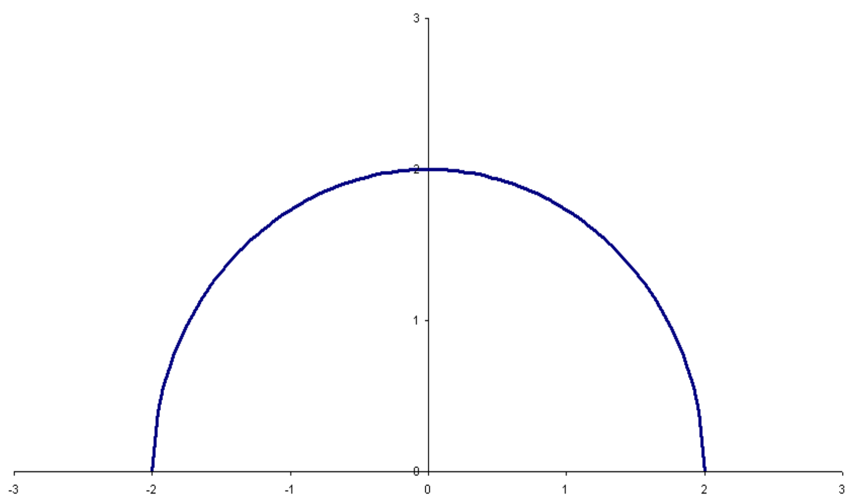
Domínio $= \mathbb{R}$, imagem $= \mathbb{R} - \{4\}$.

2. (1,00 ponto)

Desenhe o gráfico da função $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, e ache o domínio e a imagem da função.

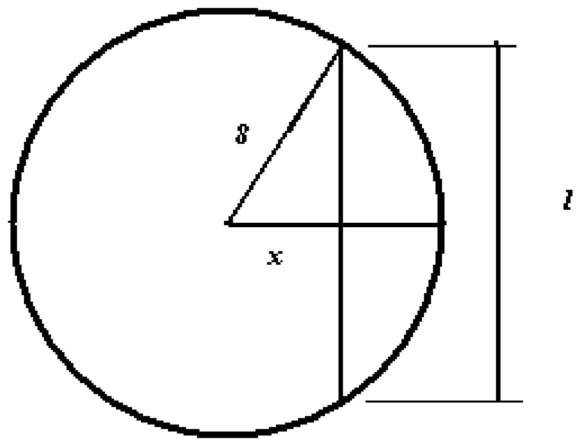
Solução

Os pontos do gráfico satisfazem a equação $y = \sqrt{4 - x^2}$. Mas esses pontos também satisfazem $y^2 = 4 - x^2$, isto é $x^2 + y^2 = 4$. Esta última equação representa um círculo com centro na origem e raio 2. Como $y = \sqrt{4 - x^2} \geq 0$, o gráfico pedido é a metade superior do círculo. O gráfico nos mostra que o domínio é o intervalo $-2 \leq x \leq 2$ e a imagem é o intervalo $0 \leq y \leq 2$.



3. (1,00 ponto)

Relacione o comprimento l da corda de um círculo de raio igual a 8 como uma função de sua distância x ao centro do círculo. Depois encontre o domínio dessa função.



Solução

$$r^2 = \frac{l^2}{4} + x^2$$

ou

$$4r^2 = l^2 + 4x^2$$

$$l^2 = 4(r^2 - x^2)$$

$$l = \pm 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Somente os comprimentos positivos tem sentido, logo

$$l = 2\sqrt{r^2 - x^2}$$

Mas o radicando $r^2 - x^2$ deve ser maior ou igual a 0. Isto é,

$$r^2 - x^2 \geq 0$$

$$r^2 \geq x^2$$

como $r = 8$ temos

$$x^2 \leq 64$$

ou

$$x \leq 8$$

O valor de x deve ser positivo, posto que é um lado de um triângulo. Portanto o domínio da função é

$$[0, 8]$$

4. (1,00 ponto) ---

Dada a função $f(x) = \sqrt{5x+1}$, ache $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quando $x > -\dfrac{1}{5}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5(x+h)+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5x+5h+1} - \sqrt{5x+1}}{h} \frac{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(5x+5h+1) - (5x+1)}{h\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(5h)}{h\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{5}{\sqrt{5x+5h+1} + \sqrt{5x+1}} \\
&= \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}
\end{aligned}$$

5. (1,00 ponto) ---

Analise o limite e a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x > 0 \\ x+1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

quando $x \to 0$.

Solução:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) \;\text{ não existe}$$

6. (1,00 ponto) ---

Indique onde estão as descontinuidades das seguintes funções

(a) $$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$$

Claramente existe uma descontinuidade em $x = 1$, posto que para que $f(x)$ seja real o denominador não pode se anular, isto é $x - 1 \neq 0$ ou $x \neq 1$.

(b) $$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \leq 0 \\ x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

Não existem descontinuidades em $f(x)$..

7. (1,00 ponto) ---

Usando a definição estude a continuidade da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4}$$

Solução:

A função $f(x)$ não é definida se o denominador é nulo, isto é, se $x = 4$ ou se o radicando $x^2 - 9$ for negativo, ou seja $-3 < x < 3$. Em qualquer outro real em $(-\infty, -3], [3, 4)$ ou $(4, \infty)$ $f(x)$ está definida.

Para prova que a função é contínua nesses intervalos devemos provar que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \quad \text{em} \quad (-\infty, -3] \cup [3, 4) \cup (4, \infty)$$

e que os limites laterais no intervalos abertos existem e coincidem com os valores das funções, p.e.,

$$\lim_{x \to 3^+} = f(3)$$

8. (1,00 ponto) ---

Calcule os limites abaixo.

(a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2+4}\right)$$

(b) $$\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}$$

(c) $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{sen}\sqrt{x-1}}{x^2-1}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to-\infty}\left(x+1+\sqrt{x^2+4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+1+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left((x+1)^2-(\sqrt{x^2+4})^2\right)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x+1-(x^2+4))}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x+1-4)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x-3)}{\left(x+1-\sqrt{x^2+4}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}}=\left\{\text{ mas } x=-\sqrt{x^2}\ \text{ se }\ x<0,\ \ (x\to-\infty)\right\}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}=$$

$$\frac{2-0}{1+0+\sqrt{1+0}}=\frac{2}{1+\sqrt{1}}=\frac{2}{2}=1$$

(b) $$\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}=?$$

mas

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)(x^2-1)=(x-1)(x-1)(x+1)$$

ou

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

portanto

$$\lim_{x\to1}\frac{x-2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{x-2}{(x-1)^2(x+1)}=\frac{-1}{0}=-\infty$$

(c) $$\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{sen}\sqrt{x-1}}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x-1}\,\mathrm{sen}\sqrt{x-1}}{(x-1)(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}(x+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{(x+1)}\cdot\frac{\mathrm{sen}\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}\cdot1=\frac{1}{2}$$

9. (1,00 ponto)

Sejam f e g funções tais que $g(x) = \tan(\pi x) \cdot f(x-1) \quad (1/2 < x < 3/2)$. Sabendo-se que $f(0) = f'(0) = -1$, determine a equação da reta tangente à curva $y = g(x)$ no ponto de abcissa $x = 1$.

Solução:

$$g(x) = \tan(\pi x) \cdot f(x-1); \quad f(0) = f'(0) = -1$$

$$g(1) = \tan(\pi \cdot 1) \cdot f(1-1) = \tan(\pi) \cdot f(0) = 0 \cdot -1 = 0$$

$$g'(x) = [\tan(\pi \cdot x)]' \cdot f(x-1) + \tan(\pi \cdot x) \cdot [f(x-1)]' =$$

$$g'(x) = \sec^2(\pi \cdot x) \cdot [\pi x]' \cdot f(x-1) + \tan(\pi \cdot x) \cdot f'(x-1)\,[(x-1)]' =$$

$$g'(x) = \pi f(x-1)\sec^2(\pi \cdot x) + f'(x-1)\tan(\pi \cdot x)$$

logo

$$g'(1) = \pi f(1-1)\sec^2(\pi \cdot 1) + f'(1-1)\tan(\pi \cdot 1)$$

$$g'(1) = \pi f(0)\sec^2(\pi) + f'(0)\tan(\pi) = \pi \cdot (-1) \cdot (-1)^2 + (-1) \cdot 0 = -\pi$$

logo, a inclinação da reta tangente é

$$g'(1) = -\pi$$

sabemos ainda que $g(1) = 0$ portanto da equação da reta tangente

$$y = -\pi + b \Longrightarrow 0 = -\pi + b \Longrightarrow b = \pi$$

e a equação pedida tem a expressão

$$y = \pi(1-x)$$

10. (1,00 ponto)

Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} |\,x^2 - 1\,| & \text{se} \quad x \leq 2 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

determine:

(a) Os valores de a e b para que f seja derivável em 2. Justifique.

(b) O gráfico de f com os valores de a e b encontrados no item acima.

(c) Calcule $f'_+(-1)$ e $f'_+(1)$, com os mesmos valores de a e b do item anterior.

(d) A expressão de f' com mesmos a e b anteriores. Justifique.

Solução:

(a) $$f(x)=\begin{cases} \mid x^2-1\mid & \text{se} \quad x\le 2\\ ax+b & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} (x^2-1) & \text{se } \ (x^2-1)\ge 0 \ \text{ e } \ x\le 2\\ -(x^2-1) & \text{se } \ (x^2-1)< 0 \ \text{ e } \ x\le 2\\ ax+b & \text{se } \qquad\qquad\qquad\quad x>2\end{cases}$$

observe que

$$\begin{cases} (x^2-1)\ge 0 \iff x\le -1 \ \text{ ou } \ x\ge 1\\ (x^2-1)<0 \iff -1<x<1\end{cases}$$

para que f seja derivável em 2, f tem que ser contínua em 2.

$$\begin{cases} f(2)=2^2-1=3\\ \lim\limits_{x\leftarrow 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\leftarrow 2^-}(x^2-1)=2^2-1=3\\ \lim\limits_{x\leftarrow 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\leftarrow 2^+}(ax+b)=2a+b\end{cases}$$

portanto, f é contínua em 2 se e somente se

$$2a+b=3$$

que é uma condição para que f seja derivável em 2.

$$\lim_{h\leftarrow 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\leftarrow 0^-}\frac{[(2+h)^2-1]-3}{h}=\lim_{h\leftarrow 0^-}\frac{4+4h+h^2-1-3}{h}=$$

$$\lim_{h\leftarrow 0^-}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\leftarrow 0^-}4+h=4$$

e

$$\lim_{h\leftarrow 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\leftarrow 0^+}\frac{[a(2+h)+b]-3}{h}=\lim_{h\leftarrow 0^+}\frac{ah+(2a+b-3)}{h}=$$

$$\lim_{h\leftarrow 0^+}\frac{ah+(3-3)}{h}=\lim_{h\leftarrow 0^+}\frac{ah+0}{h}=\lim_{h\leftarrow 0^+}a=a$$

$f(x)$ é derivável em $2\Longrightarrow 4=f'_-(2)=f'_+(2)=a\Longrightarrow 4=a$

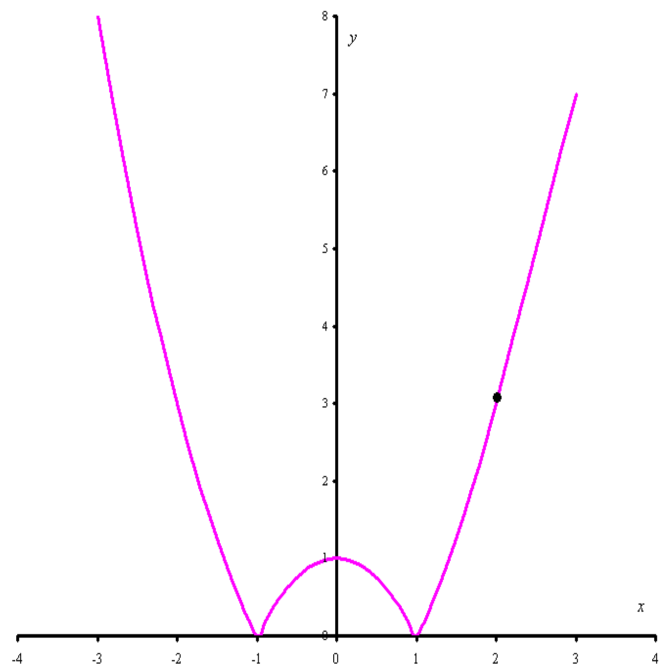
$$f(x) \text{ é derivável em } 2\iff\begin{cases} 2a+b=3\\ a=4\end{cases}$$

daí

$$2\cdot 4+b=3\Longrightarrow b=-5$$

(b) $$f(x) = \begin{cases} \mid x^2 - 1 \mid & \text{se} \quad x \leq 2 \\ ax + b & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{se} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 4x - 5 & \text{se} \quad x > 2 \end{cases}$$



(c)

$$f'_+(-1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[1 - (-1+h)^2] - [(-1)^2 - 1]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1 - (1 - 2h + h^2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} (2 - h) = 2$$

e

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{[(1+h)^2 - 1] - [(1)^2 - 1]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^+} (2 + h) = 2$$

(d)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} & x < -1 \\ \nexists & \text{se} & x = -1 \\ -2x & \text{se} & -1 < x < 1 \\ \nexists & \text{se} & x = 1 \\ 2x & \text{se} & 1 < x < 2 \\ 4 & \text{se} & x = 2 \\ 4 & \text{se} & x > 2 \end{cases}$$

Observe que no ponto $x = -1$

$$f'_-(-1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[(-1+h)^2 - 1] - [(-1)^2 - 1]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-2 + h) = -2$$

e que

$$f'_+(-1) = 2 \ \text{ do } \ \text{item } \ \text{anterior}$$

logo

$$f'_-(-1) \neq f'_+(-1) \Longrightarrow \nexists f'(-1)$$

no ponto $x = 1$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[1 - (1+h)^2] - [1^2 - 1]}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{[1 - (1 + 2h + h^2)]}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{[-2h - h^2]}{h} = \lim_{h \to 0^-} -2 - h = -2$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} (-2 + h) = -2$$

e que

$$f'_+(1) = 2 \ \text{ do } \ \text{item } \ \text{anterior}$$

logo

$$f'_-(1) = -2 \neq 2 = f'_+(1) \Longrightarrow \nexists f'(1)$$

e que no ponto $x = 2$ temos do item a)

$$f'_-(2) = f'_+(2) = 4 \Longrightarrow \exists f'(2) = 4$$