Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 2^o semestre de 2013 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

Mostre que a função $f(x) = |\, x \,|$ não é diferenciável em $x = 0$.

Solução:

Sejam as derivadas laterais de $f(x)$ em 0, isto é

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{e} \qquad f'_+(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

como

$$|\, x \,| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\, 0+h \,| - |\, 0 \,|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|\, h \,|}{h} = -1$$

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|\, 0+h \,| - |\, 0 \,|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|\, h \,|}{h} = 1$$

Finalmente, como as derivadas laterais são diferentes a derivada no ponto $x = 0$ não existe. Logo, $f(x) = |\, x \,|$ não é diferenciável em $x = 0$.

www.CompCEDERJ.com.br

2. (1,0 ponto) ———

Mostre que a função $f(x) = 4x^3 + x - 3$ tem somente uma raiz real.

Solução:

É fácil ver que $f(0) = -3$ e $f(1) = 2$. Houve troca de sinal da função entre $x = 0$ e $x = 1$, sendo os polinômios contínuos em toda a reta real, existe pelo menos uma raiz da função no intervalo $(0, 1)$. Mas a primeira derivada da função vale $f'(x) = 12x^2 + 1$ e é sempre positiva, o que indica que a função $f(x)$ é sempre crescente em toda a reta real. Portanto só existe um ponto aonde $f(x)$ se anula e assim $f(x)$ tem uma única raiz.

3. (1,0 ponto) ———

Seja $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$. Ache

(a) Os pontos críticos de f;

(b) os pontos extremos de f;

(c) os intervalos aonde f é crescente e decrescente.

Solução:

São candidatos a pontos criíticos aqueles pontos aonde a primeira derivada se anula ou aqueles aonde a primeira derivada se anula:

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0$$

claramente $x = 1$ anula f', e as demais raízes são $x = -2$ e $x = -1/2$. Como a derivada está definida em toda a reta real, estes são os únicos pontos críticos da função $f(x)$.

Verificando o sinal da primeira derivada na reta real

$$\begin{array}{llcccccll}
\text{Para} & & & x & < & -2 & \longrightarrow & f'(x) < 0 & \text{logo } f(x) \text{ é decrescente} \\
\text{Para} & -2 & < & x & < & -\frac{1}{2} & \longrightarrow & f'(x) > 0 & \text{logo } f(x) \text{ é crescente} \\
\text{Para} & -\frac{1}{2} & < & x & < & 1 & \longrightarrow & f'(x) < 0 & \text{logo } f(x) \text{ é decrescente} \\
\text{Para} & 1 & < & x & & & \longrightarrow & f'(x) > 0 & \text{logo } f(x) \text{ é crescente}
\end{array}$$

assim são pontos de mínimo locais $x = -2$ e $x = 1$ e é ponto de máximo local $x = -1/2$.

4. (1,0 ponto) ———

Deve-se fabricar um recipiente cilíndrico – de base circular – aberto no topo, com capacidade de volume igual a V centímetros cúbicos. Se o custo do material usado para a fabricação da base é três vezes o custo do material para a superfície lateral, e se não há perda de material, determine as dimensões do recipiente que minimizam o custo.

Solução:

Seja r o raio da base e h a altura do cilindro. Como o volume deve ser V temos

$$V = (\text{Área da base}) \cdot (\text{Altura do cilindro}) = (\pi r^2) \cdot (h) = \pi r^2 h$$

Queremos minimizar o custo total de material para a fabricação do recipiente. Se c for o custo unitário (por centímetro quadrado) de fabricação da superfície lateral, $3c$ será o custo unitário de fabricação da base. As áreas da base (A_b) e da superfície lateral (A_l) valem respectivamente

$$A_b = \pi r^2 \quad \text{e} \quad A_l = 2\pi r h$$

Assim o custo total C será a soma do custo da base mais o custo da lateral, ou seja,

$$C = 3c(\pi r^2) + c(2\pi r h) = \pi c \left[3r^2 + 2rh\right]$$

podemos reescrever o custo C em função somente do raio r ou da altura h.

$$V = \pi r^2 h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} \quad \text{ou} \quad r = \sqrt{\frac{V}{\pi h}}$$

Vamos reescrevê-lo em função do raio r.

$$C = \pi c \left[3r^2 + 2rh\right] = \pi c \left[3r^2 + 2r\frac{V}{\pi r^2}\right] = \pi c \left[3r^2 + \frac{2V}{\pi r}\right]$$

que coloca o custo C em função do raio r. Para determinar o valor de r que minimiza o custo vamos achar os pontos críticos.

$$C' = \pi c \left[6r + \frac{2V}{\pi}\left(-\frac{1}{r^2}\right)\right] = 2\pi c \left[\frac{3\pi r^3 - V}{\pi r^2}\right] = 2\pi c \left[3r - \frac{V}{\pi r^2}\right]$$

$r = 0$ não é ponto crítico porque a função que representa o custo não está definida neste ponto. Logo, o ponto crítico ocorre quando

$$3\pi r^3 - V = 0 \quad \text{ou} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$$

Verifiquemos agora a segunda derivada, assim descobriremos se o ponto crítico é um ponto de mínimo ou máximo.

$$C'' = 2\pi c \left[3 - (-2)\frac{V}{\pi r^3}\right] = 2\pi c \left[3 + \frac{2V}{\pi r^3}\right]$$

que é sempre positiva para $r > 0$, logo o ponto crítico é um ponto de mínimo. Já sabemos o raio que minimiza o custo, falta somente calcular a altura,

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left[\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}\right]^2} = \frac{V}{\pi \left[\sqrt[3]{\frac{V^2}{3^2\pi^2}}\right]} = \frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{9\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{\pi^3} \cdot \frac{9\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}}$$

Resumindo

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}} \quad \text{e} \quad h = \sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}}$$

5. (1,0 ponto)

Ache o ponto na curva $y = x^2$ que esteja mais próximo do ponto $(18, 0)$.

Solução:

Lembre-se de que a distância entre dois pontos $\boldsymbol{a} = (x_a, y_a)$ e $\boldsymbol{b} = (x_b, y_b)$ é dada por $\sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$.

Logo a distância D entre o ponto indicado e um ponto qualquer (x, y) vale

$$D = \sqrt{(x-18)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{(x-18)^2 + y^2}$$

como queremos que o ponto pertença a curva $y = x^2$ a distância D valerá

$$D = \sqrt{(x-18)^2 + (x^2)^2} = \sqrt{(x-18)^2 + x^4} = \sqrt{x^4 + x^2 - 36x + 324}$$

queremos que a distância D seja mínima. Entretanto, minimizar D^2 também minimiza D. Vamos então minimizar $D^2 = \mathcal{D}$.

$$\mathcal{D}' = 4x^3 + 2x - 36 \implies 4x^3 + 2x - 36 = 0 \text{ ou } 2x^3 + x - 18 = 0$$

fatorando

$$(x-2)(2x^2 + 4x - 9) = 0 \implies (x-2)(2x^2 + 4x + 9) = 0$$

entretanto, $2x^2 + 4x + 9$ só possui raízes reais. Consequentemente o único ponto crítico é $x = 2$. Se olharmos agora a segunda derivada veremos se este ponto crítico se trata de um ponto de mínimo ou de máximo.

$$\mathcal{D}'' = 12x^2 + 2 \implies \text{que é positiva em } x = 2$$

sendo então $x = 2$ um ponto de mínimo. Assim o ponto na curva mais próximo de $(8, 0)$ é

$$(x, y) = (x, x^2) = (2, 4)$$

6. (1,0 ponto) ---

Ache as antiderivadas:

(a) $$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx$$

(b) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$$

(c) $$\int (s^3+2)^2(3x^2)\,ds$$

(d) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}\;x\,dx$$

(e) $$\int \frac{\cos x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Solução:

(a) $$\int (1-x)\sqrt{x}\,dx = \int (1-x)x^{1/2}\,dx = \int (x^{1/2}-x^{3/2})\,dx$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

(b) $$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right]dx = \int \left[x+5-4x^{-2}\right]dx$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + 5x - 4\frac{1}{-1}x^{-1} + C = \frac{x^2}{2} + 5x + \frac{4}{x} + C$$

(c) $\int (s^3+2)^2(3x^2)\,ds \implies$ **Item Anulado:** deveria ser $\int (s^3+2)^2(3s^2)\,ds$

(d) $$\int \sqrt[3]{1-x^2}\;x\,dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{1/3}(-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4/3}(1-x^2)^{4/3}\right] + C$$
$$= -\frac{3}{8}(1-x^2)^{4/3} + C$$

(e) $$\int \frac{\cos x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Seja $u=\sqrt{x}=x^{1/2}$. Portanto, $du=\frac{1}{2}x^{-1/2}$ e $2du=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Substituindo na integral

$$\int \frac{\cos x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos\, u\,du = 2\text{sen }u + C = 2\text{sen }\sqrt{x} + C$$

7. (1,0 ponto) ---

Calcule a área delimitada pelos gráficos das curvas definidas pelas equações $2y^2=x+4$ e $x=y^2$.

Solução:

Considerando as funções na variável y, teremos $f(y) = y^2$ e $g(y) = 2y^2 - 4$. A área desejada será igual a integral da diferença entre as duas funções.

A interseção entre os dois gráficos se dá quando $f(y) = g(y)$ ou

$$y^2 = 2y^2 - 4 \Longrightarrow y^2 - 4 = 0 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Portanto,

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2}[f(y) - g(y)]dy = \int_{-2}^{2}[y^2 - 2y^2 + 4]dy = \int_{-2}^{2}[4 - y^2]dy$$

$$\text{Área} = \left[4x - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 - \frac{-8}{3}\right] =$$

$$\text{Área} = \frac{24 - 8 + 24 - 8}{3} = \frac{32}{3}$$

8. (1,0 ponto)

Calcule os limites a seguir:

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{7x^2 - 2x + 1}$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

(c) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{7x^2 - 2x + 1}$$

$$\frac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow \text{Regra de L'Hôpital}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{7x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x + 5}{14x - 2}$$

que também é uma indeterminação do tipo $+\infty/+\infty$, podemos aplicar novamente a regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 8}{7x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x + 5}{14x - 2} \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

Novamente temos $\dfrac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow$ Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(c) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

É a mesma indeterminação dos itens anteriores. Logo, pela regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

9. (1,0 ponto) ———

Usando o cálculo de volumes de sólidos de revolução por integrais calcule:

(a) O volume de um cone de altura h e raio da base igual a r.
(b) O volume da esfera de raio r.

Solução:

(a) Um cone é gerado por revolução em torno do eixo x da região entre a linha $y = \frac{r}{h}x$ e o eixo x, entre os pontos $x = 0$ e $x = h$. Assim o volume V de um cone pode ser expresso por,

$$V = \pi \int_0^h y^2\,dx = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2}x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^h$$
$$= \frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{1}{3}h^3\right] = \frac{\pi r^2 h^3}{3h^2} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(b) Uma esfera é gerada por revolução em torno do eixo x da região entre o semicírculo $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e o eixo x, entre $x = -r$ e $x = r$. Assim o volume V de uma esfera pode ser expresso por,

$$V = 2\pi \int_0^r y^2\,dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx = 2\pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^r = 2\pi\left[r^2 r - \frac{1}{3}r^3\right]$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

10. (1,0 ponto) ———

Ache o volume do sólido gerado por revolução da região entre o eixo x e a parábola $y = 4x - x^2$ em torno da linha $y = 6$.

Solução:

$$V = \pi \int_0^4 \left[6^2 - (6 - y)^2\right]\,dx = \pi \int_0^4 \left[36 - \left(6 - 4x + x^2\right)^2\right]\,dx$$

$$= \pi \int_0^4 \left[36 - \left(36 - 48x + 28x^2 - 8x^3 + x^4\right)\right] \, dx$$

$$= \pi \int_0^4 \left[48x - 28x^2 + 8x^3 - x^4\right] \, dx$$

$$= \pi \left[48\frac{x^2}{2} - 28\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right]_0^4$$

$$= \pi \left[24x^2 - 28\frac{x^3}{3} + 2x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4$$

$$= \pi \left[\frac{360x^2 - 140x^3 + 30x^4 - 3x^5}{15}\right]_0^4$$

$$= \pi \left[\frac{360(4)^2 - 140(4)^3 + 30(4)^4 - 3(4)^5}{15} - \frac{360(0)^2 - 140(0)^3 + 30(0)^4 - 3(0)^5}{15}\right]$$

$$= \pi \left[\frac{5760 - 8960 + 7680 - 3072}{15}\right] = \pi \left[\frac{1408}{15}\right] = \frac{1408\pi}{15}$$