Funções Logarítmica e Exponencial

Introdução

É conhecido da álgebra, as potências (inteiras ou racionais) de um número b:

Inteiras:

$$b^n = b \times b \times b \times \ldots \times b \quad (n \text{ fatores}), \quad b^{-n} = \frac{1}{b^n}, \quad b^0 = 1$$

Racionais:

$$b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} = (\sqrt[q]{b})^p, \qquad b^{-p/q} = \frac{1}{b^{p/q}}$$

Poderíamos pensar agora nas potências irracionais, por exemplo

$$2^{\pi}, \; 3^{\sqrt{2}}, \; \text{e} \;\; \pi^{-\sqrt{7}}.$$

Funções Exponenciais

Definição 7.1: Uma função da forma $\boxed{f(x) = b^x}$, onde $b > 0$ e $b \neq 1$, é chamada de *função exponencial de base* b.

Exemplo 7.1

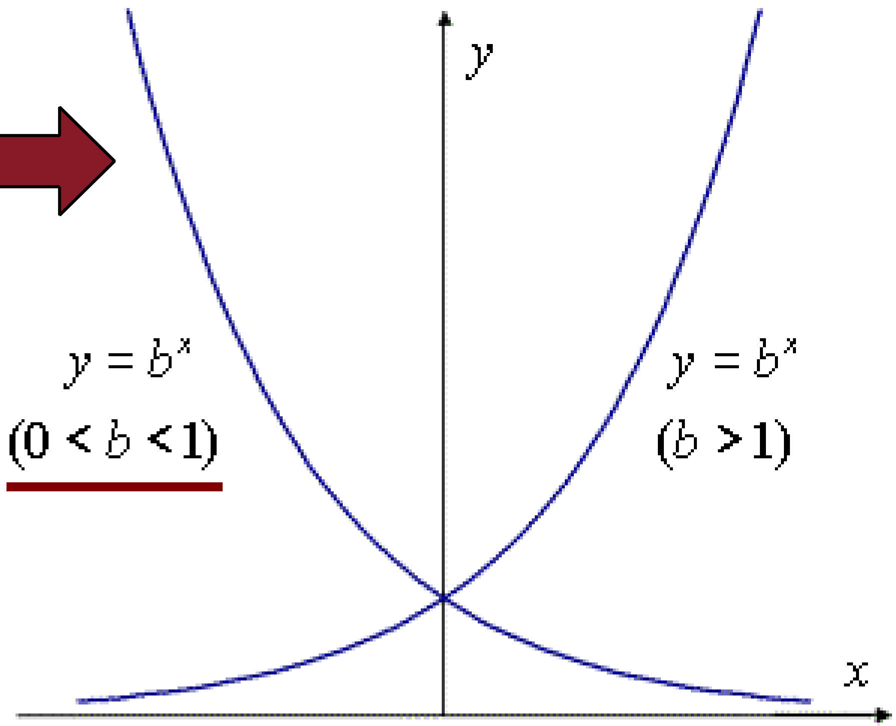
$$f(x) = 2^x, \qquad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad f(x) = \pi^x$$

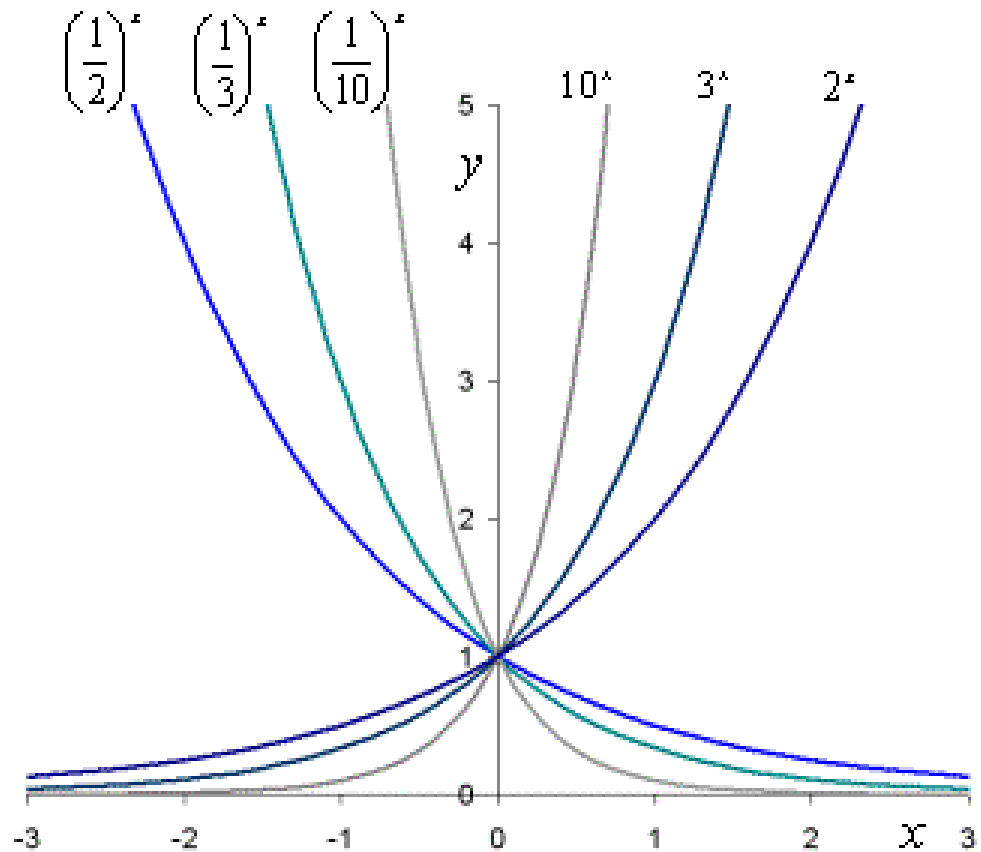
Teorema 7.1: Se $b > 0$ e $b \neq 1$ então:

a) A função $f(x) = b^x$ está definida para todo real x: logo o domínio natural é $(-\infty, +\infty)$.

b) A função $f(x) = b^x$ é contínua no intervalo $(-\infty, +\infty)$ e sua imagem é $(0, +\infty)$.

Graficamente:





Na prática poucas bases b são usadas. Nunca veremos b=7 ou b=3,6.

As mais usadas são a decimal ($b=10$) que é uma escolha óbvia. O outro número candidato não é visto normalmente na aritmética, na geometria ou na álgebra.

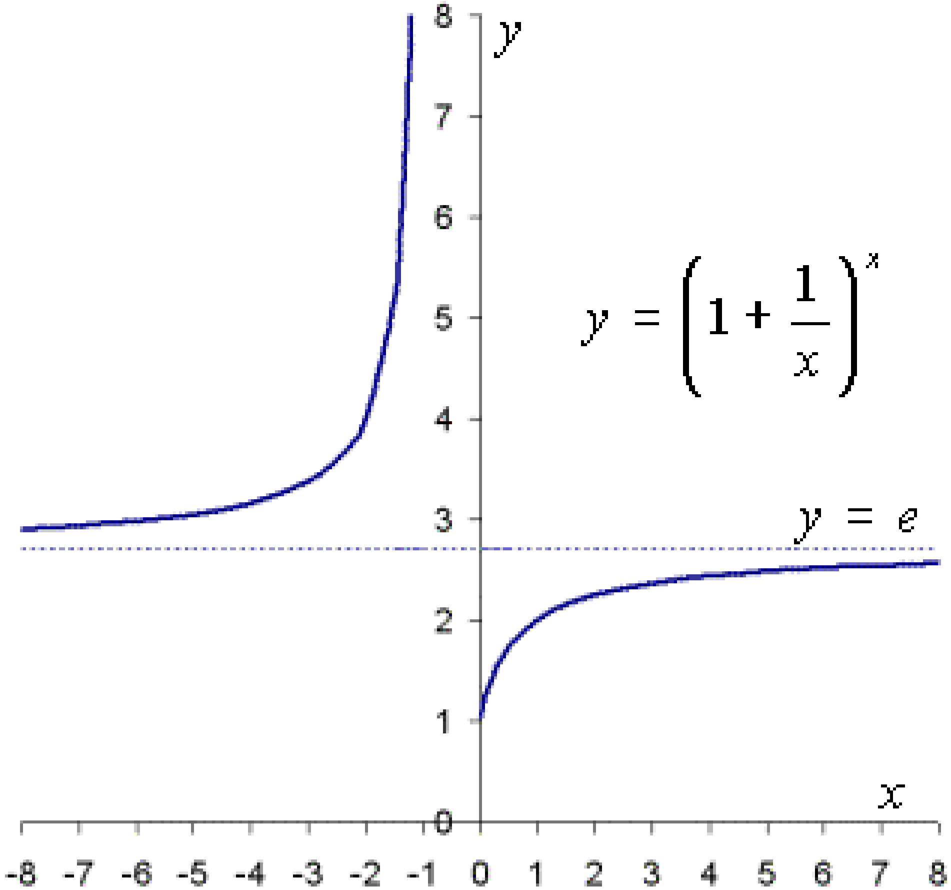
Este novo candidato é o número "e" (de Euler).

Definição 7.2: O número e é a assíntota horizontal ao gráfico da equação

$$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Da definição de assíntota horizontal, visto na 3ª aula, isto pode ser expresso pelos limites.

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{e} \quad e = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$



Valores de $(1+1/x)^x$ aproximam e

x	$1+1/x$	$(1+1/x)^x$
1	2	2,000000
10	1,1	2,593742
100	1,01	2,704814
1.000	1,001	2,716924
10.000	1,0001	2,718146
100.000	1,00001	2,718268
1.000.000	1,000001	2,718280

Logo, as funções exponenciais mais utilizadas são:

$$y = e^x \qquad \text{e} \qquad y = 10^x$$

Uma notação também utilizada para e^x é $\exp(x)$, tornou-se popular com a evolução da computação.

A primeira dessas funções recebe o nome especial de *função exponencial natural*.

Veremos sua importância mais adiante.

Funções Logarítmicas

LOGARITMO é um EXPOENTE

Os logaritmos de 1 e 10 e 100 e 1000 são 0 e 1 e 2 e 3.

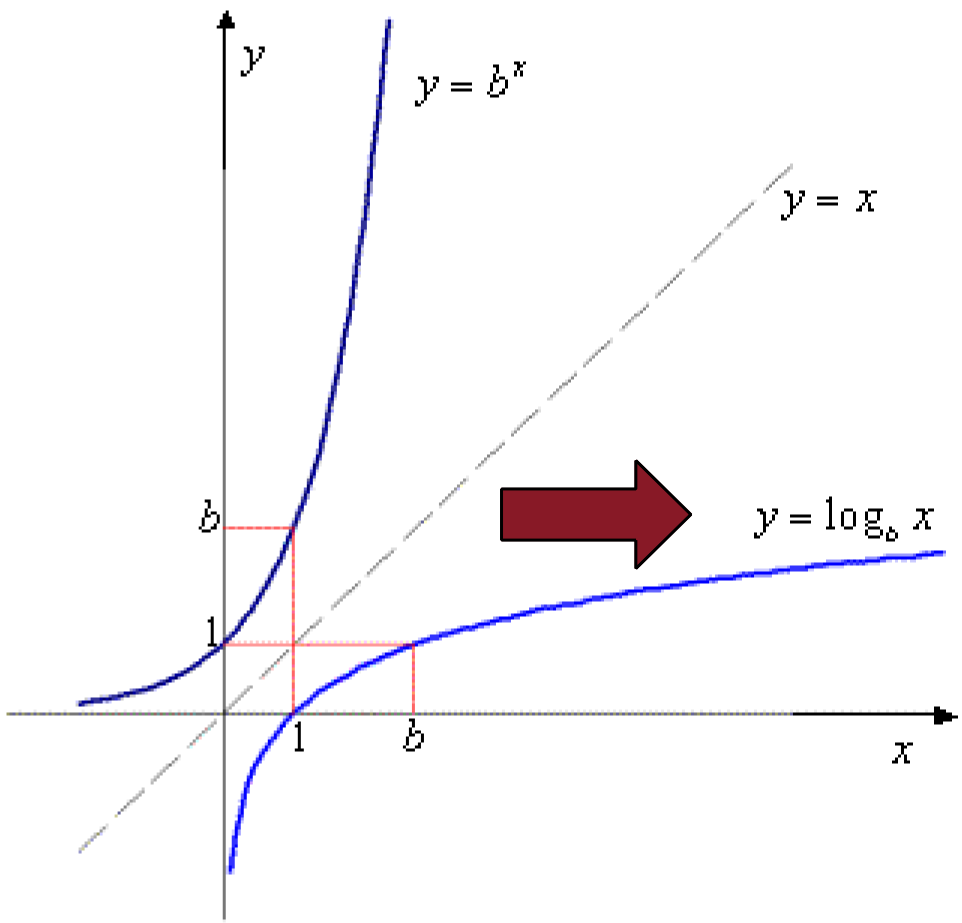
Estes são os logaritmos de base 10, são as potências de 10.

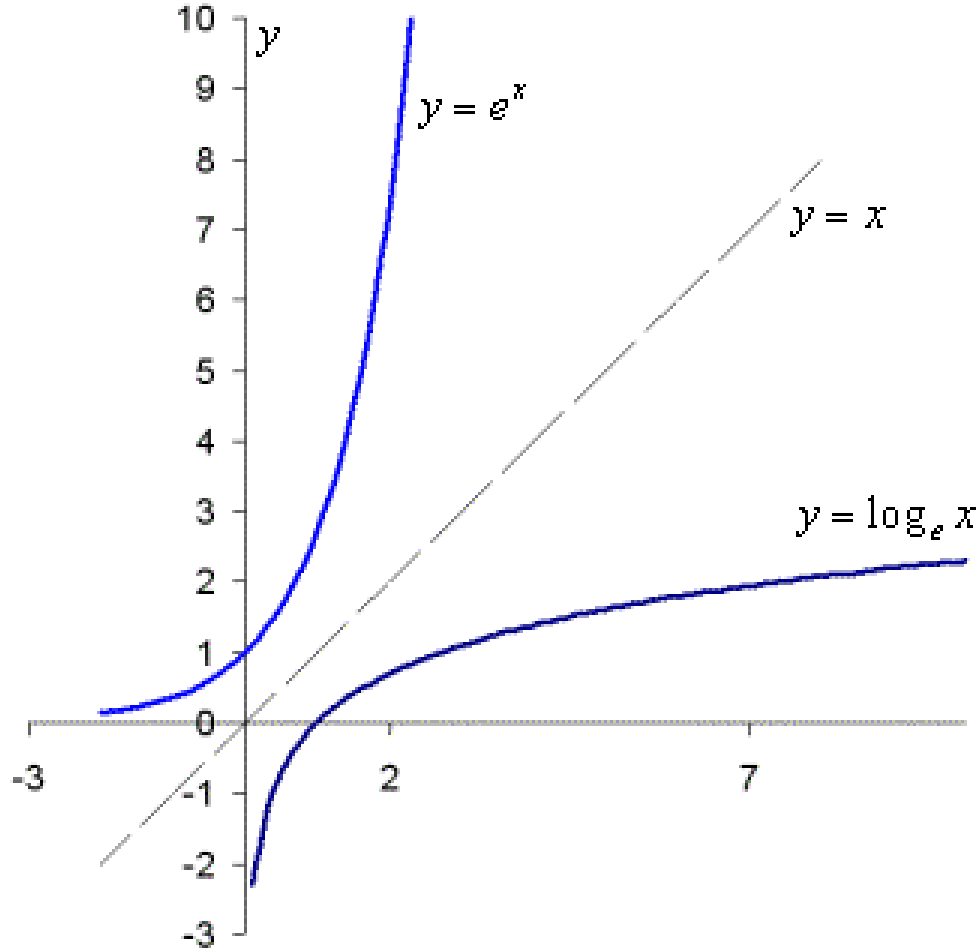
Definição 7.3: Se $b > 0$ e $b \neq 1$ então para $x > 0$ o logaritmo na base b de x é denotado por

$$\log_b x$$

é definido como sendo o expoente ao qual b deve ser elevado para produzir x.

OBS: Também conhecida como *função logarítmica de base b*.


y
$y = b^x$
$y = x$
$y = \log_b x$
b
1
1
b
x


y
$y = e^x$
$y = x$
$y = \log_e x$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-3
2
7

Observações:

As funções *logarítmicas* são as *inversas* das funções *exponencias*.
Assim como nas funções exponenciais as bases utilizadas são 10 e e.

$$y = \log_{10} x \quad \text{e} \quad y = \log_{e} x$$

O logaritmo na base e é chamado de *logaritmo natural* e recebe uma notação especial:

$$\log_e x = \ln x$$

Lê-se *ele ene de* x.

Teorema 7.2 – Comparação entre funções exponenciais e logarítmicas ($b>1$):

$b^0 = 1$

$b^1 = b$

imagem $b^x = (0, +\infty)$

domínio $b^x = (-\infty, +\infty)$

$0 < b^x < 1$ se $x < 0$

$\log_b 1 = 0$

$\log_b b = 1$

domínio $\log_b x = (0, +\infty)$

imagem $\log_b x = (-\infty, +\infty)$

$\log_b x < 0$ se $0 < x < 1$

Teorema 7.3 – <u>Propriedades Algébricas dos Logaritmos</u>

Produto $\rightarrow$ $\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c$

Quociente $\rightarrow$ $\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$

Potência $\rightarrow$ $\log_b(a^r) = r\log_b a$

Recíproco $\rightarrow$ $\log_b(1/c) = -\log_b c$

Mudança de base de logaritmos

Sabendo que

$y = \log_b x \quad \Rightarrow \quad b^y = x$

aplicando logaritmo a ambos os lados

$\ln(b^y) = \ln x$

das propriedades da funções logarítmicas

$y \ln b = \ln x$

substituindo o valor de $y = \log_b x$

$\log_b x \ln b = \ln x$

logo

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Exemplo 7.1: (Propriedades dos logaritmos)

Expandindo expressões

$$\log \frac{xy^3}{\sqrt{z}} = \log xy^3 - \log \sqrt{z}$$ propriedade do quociente

$$\log \frac{xy^3}{\sqrt{z}} = \log x + \log y^3 - \log \sqrt{z}$$ propriedade do produto

$$\log \frac{xy^3}{\sqrt{z}} = \log x + 3 \log y^3 - \log \sqrt{z}$$ propriedade da potência

Condensando expressões

$$\frac{1}{3} \ln x - \ln(x^2 - 1) + 2 \ln(x+3) =$$

$$= \ln x^{\frac{1}{3}} - \ln(x^2 - 1) + \ln(x+3)^2$$ propriedade da potência

$$= \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{(x^2 - 1)}\right) + \ln(x+3)^2$$ propriedade da quociente

$$= \ln\left(\frac{\sqrt[3]{x}\,(x+3)^2}{(x^2 - 1)}\right)$$ propriedade da produto

Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas

Derivada da função logarítmica:

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \lim_{h\to 0}\frac{\log_b(x+h)-\log_b x}{h}$$ Definição de derivada

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_b\left(\frac{x+h}{x}\right)$$ propriedade do quociente

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_b\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{\nu\to 0}\frac{1}{\nu x}\log_b\left(1+\nu\right)$$ considerando $\nu = \frac{h}{x}$ e $\nu \to 0$ quando $h \to 0$

$$= \frac{1}{x}\lim_{\nu\to 0}\frac{1}{\nu}\log_b\left(1+\nu\right)$$ $1/x$ não varia com ν

$$= \frac{1}{x}\lim_{\nu\to 0}\log_b\left(1+\nu\right)^{1/\nu}$$ propriedade da potência

$$= \frac{1}{x}\log_b\left[\lim_{\nu\to 0}\left(1+\nu\right)^{1/\nu}\right]$$ $\log_b(x)$ é contínua

$$= \frac{1}{x}\log_b e$$

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x}\log_b e$$

mas da mudança de base

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

e daí podemos escrever

$$\log_b e = \frac{\ln e}{\ln b} = \frac{1}{\ln b}$$

e substituindo na expressão da derivada

$$\frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln b} = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{x}$$

quando $b = e$

$$\frac{d}{dx}[\log_e x] = \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{\ln e}\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$$

Derivada da função exponencial:

Para construir a derivada das funções exponenciais considere

$y = b^x$

reescrevendo

$x = \log_b y$

diferenciando e usando a derivada das funções logarítmicas e a regra da cadeia

$$1 = \frac{1}{y \ln b} \frac{dy}{dx}$$

que pode ser reescrita

$$\frac{dy}{dx} = y \ln b = b^x \ln b$$

quando $b = e$ teremos

$$y = e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y \ln e = e^x \ln e = e^x$$

Obs: A derivada de $y = e^x$ é a própria função $y = e^x$.

Resumindo:

Função Logarítmica:

$$y = \log_b x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}[\log_b x] = \frac{1}{\ln b}\frac{1}{x}$$

Função Exponencial:

$$y = b^x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = b^x \ln b$$

Quando $b=e$

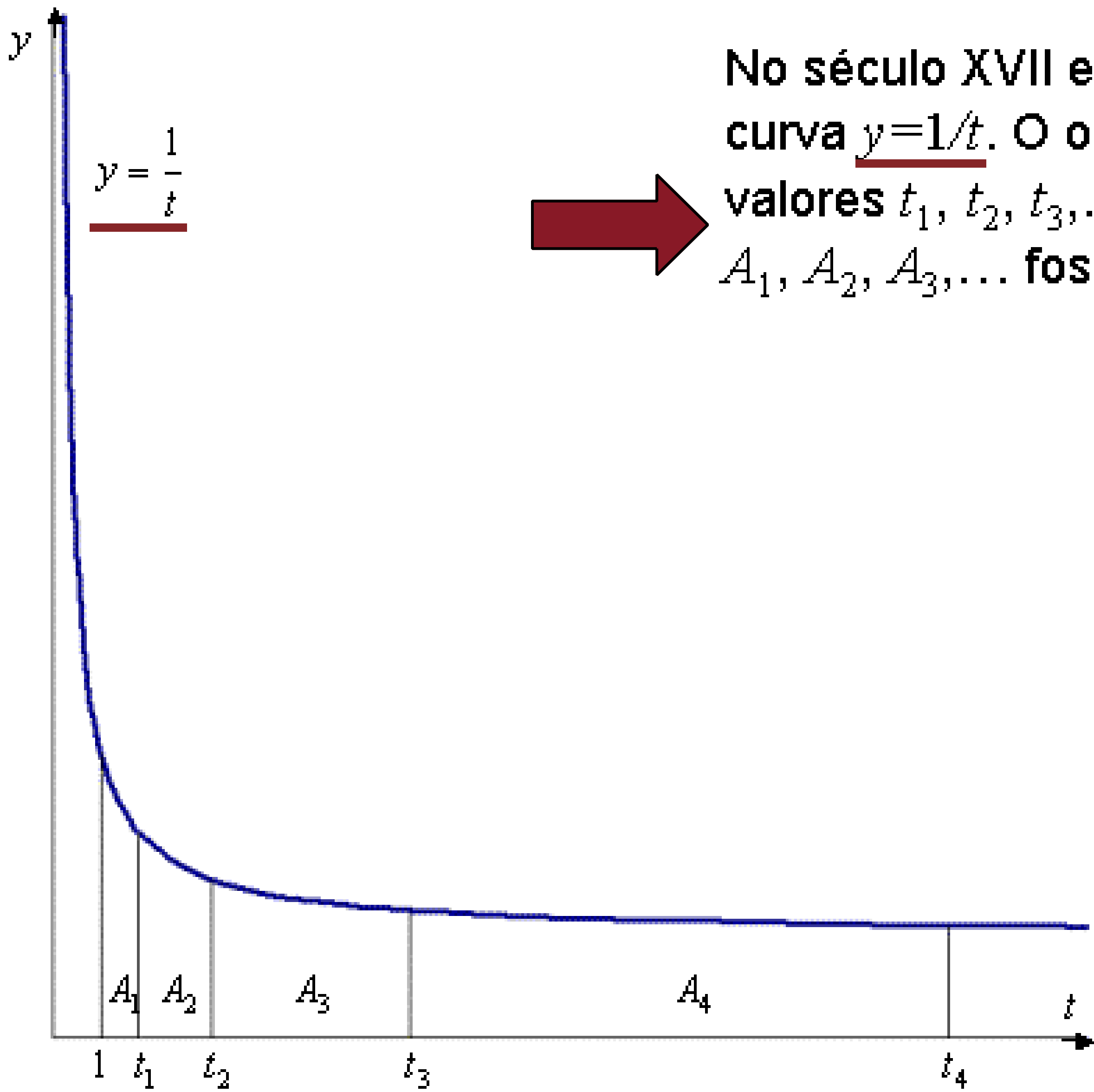
Função Logarítmica Natural:

$$y = \ln x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

Função Exponencial Natural:

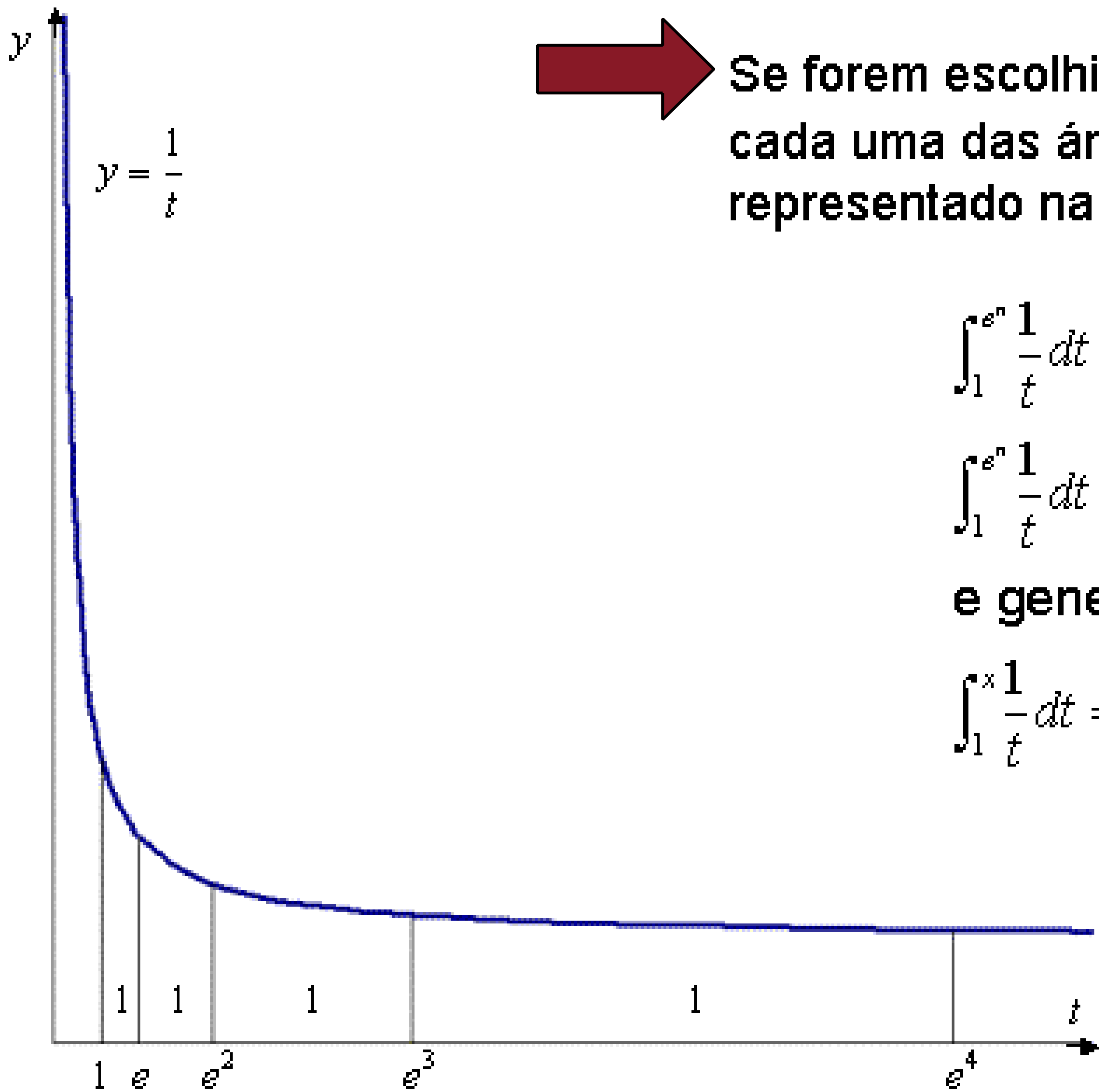
$$y = e^x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = e^x$$

Logaritmos e Integrais



No século XVII estudava-se a área sob a curva $y=1/t$. O objetivo era encontrar os valores $t_1, t_2, t_3, \ldots$ para os quais as áreas $A_1, A_2, A_3, \ldots$ fossem iguais.

Logaritmos e Integrais



Se forem escolhidos $\boxed{t_1 = e,\ t_2 = e^2,\ t_3 = e^3, \ldots}$ cada uma das áreas terá valor 1. Assim representado na forma integral,

$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t}\,dt = n$$

$$\int_1^{e^n} \frac{1}{t}\,dt = \ln(e^n)$$

e generalizando

$$\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \ln x$$

Definição 7.2: O *logaritmo natural* de x, denotado por $\ln x$ é definido pela integral

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt, \qquad x > 0$$

Que hoje é considerada a definição formal de *logaritmo natural*.

Aplicações

Sabemos como calcular a derivada das funções exponenciais, agora compare as equações

$$\frac{dy}{dx} = x \qquad \text{e} \qquad \frac{dy}{dx} = y$$

A primeira questiona simplesmente qual é a antiderivada de x, logo $y = x^2/2$. A segunda iguala y e sua derivada. Este tipo de equação que envolve uma função e suas derivadas é chamada ***equação diferencial***. Já vimos que a função cuja derivada é ela mesma é a função exponencial natural $(y=e^x)$.

As equações diferenciais são muito utilizadas para representar vários fenômenos reais. A equação diferencial acima é a que com maior freqüência aparece neste fenômenos. Daí podemos avaliar a importância das funções exponenciais.

Resumo

- Funções Exponenciais;

  O número e;

  Função Exponencial Natural;

- Funções Logarítmicas;

  Logaritmo Natural;

- Derivadas as Funções Logarítimicas e Exponenciais;
- Logaritmos e Integrais;
- Aplicações;