Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 — 2^o semestre de 2016

Questões

1. (1,25 pontos) ———————————————————————

   Calcule as derivadas das seguintes funções usando a definição. Isto é

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   (a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$
   (c) $f(x) = |\ x\ |$

   Solução:

   (a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 5(x+h) + 4] - [3x^2 - 5x + 4]}{h}$$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4] - [3x^2 - 5x + 4]}{h}$$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 4 - 3x^2 + 5x - 4]}{h}$$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{[6xh + 3h^2 - 5h]}{h}$$

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} [6x + 3h - 5]$$

   $$f'(x) = 6x - 5$$

(b) $f(x) = \sqrt{x}$

Devemos supor que $x > 0$ para que as funções sejam definidas .

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração por $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$. Logo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

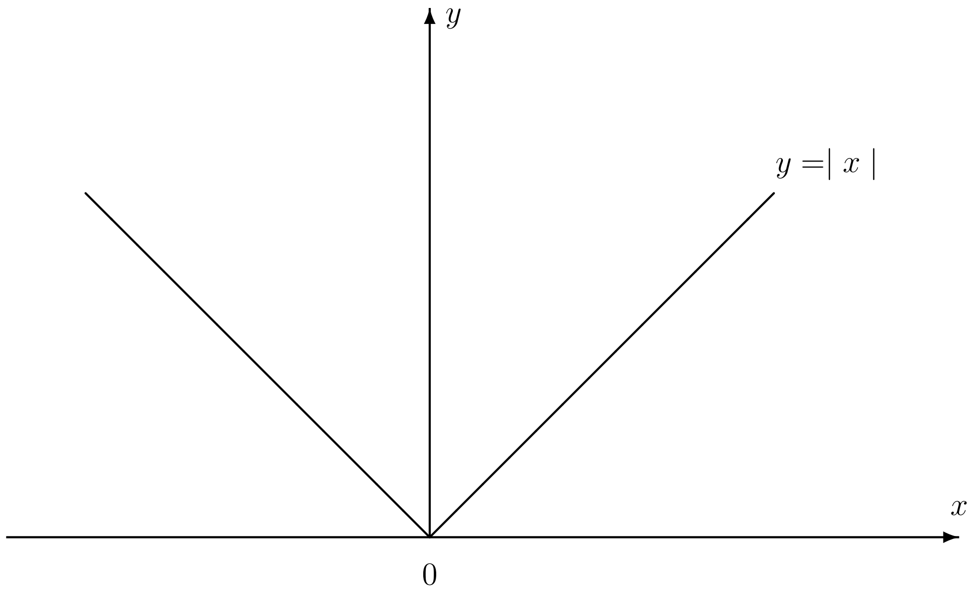
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{x})}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(c) $f(x) = \mid x \mid$

A figura a seguir mostra o gráfico de $f(x) = \mid x \mid$ em torno do ponto $x = 0$. Vê-se que geometricamente f não possui derivada em 0, posto que neste ponto há um *bico* no gráfico. Para mostrar isso vamos encontrar as derivadas à direita e à esquerda de 0 e verificar que não são iguais.



$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e lembre-se que

$$\mid x \mid = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\mid h \mid}{h} = \frac{+h}{h} = 1$$

e

$$f'(x) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\mid h \mid}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

e portanto, $f'(0)$ não existe e $y = \mid x \mid$ não tem derivada neste ponto.
Para $x < 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mid h \mid}{h} = \frac{-h}{h} = -1$$

e para $x > 0$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mid 0+h \mid - \mid 0 \mid}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\mid h \mid}{h} = \frac{+h}{h} = 1$$

2. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Seja o **Teorema do Valor Médio:**

Se uma função é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e é diferenciável no intervalo aberto (a, b), então existe um número c em (a, b), tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Prove que a função f definida por $f(x) = x^3 - 8x - 5$ verifica as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo $[1, 4]$ e determine c no intervalo $(1, 4)$ que satisfaça à conclusão do teorema.

Solução:

$f(x)$ é contínua e diferenciável para todo real (é uma função polinomial), logo é contínua em $[1, 4]$ e derivável em $(1, 4)$. Então de acordo com o *Teorema do Valor Médio*, existe um número c em $(1, 4)$ tal que

$$f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$$

como $f'(x) = 3x^2 - 8$, isto significa que

$$27 - (-12) = (3c^2 - 8)(3)$$

$$39 = 9c^2 - 24$$

$$9c^2 = 63$$

$$c^2 = 7$$

$$c = \pm\sqrt{7}$$

Enfim, o número procurado no intervalo $(1, 4)$ é $\sqrt{7}$.

3. (1,25 pontos) ———————————————————————————

Se $f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$, determine o máximo e o mínimo absolutos de f em cada um dos intervalos

(a) $[-1, \frac{1}{2}]$

(b) $[-1, 3]$

(c) $[-3, -2]$

Solução:

Vamos analisar a função

$$f(x) = x^{2/3}(x^2 - 8)$$

Primeira derivada

$$f'(x) = \left[x^{2/3}\right]'(x^2 - 8) + x^{2/3}[x^2 - 8]'$$

$$f'(x) = \left[\frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/3}}\right](x^2 - 8) + x^{2/3}[2x]$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 8)}{3\sqrt[3]{x}} + 2x\sqrt[3]{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 8) + 2x\sqrt[3]{x^2} \cdot 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2 - 8) + 6x\sqrt[3]{x^3}}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 16 + 6x \cdot x}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 - 16}{3\sqrt[3]{x}}$$

Observe que $f'(x)$ não está definida em $x = 0$.

$$f'(x) = 0 \implies \frac{8x^2 - 16}{3\sqrt[3]{x}} = 0$$

$$8x^2 - 16 = 0 \implies 8x^2 = 16 \implies x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

Para:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & x & < & -\sqrt{2} & \longrightarrow & f'(x) < 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é decrescente} \\ -\sqrt{2} & < & x & < & 0 & \longrightarrow & f'(x) > 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é crescente} \\ 0 & < & x & < & \sqrt{2} & \longrightarrow & f'(x) < 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é decrescente} \\ \sqrt{2} & < & x & & & \longrightarrow & f'(x) > 0 & \longrightarrow & f(x) \text{ é crescente} \end{array}$$

Segunda derivada

$$f''(x) = \left[\frac{8x^2 - 16}{3\sqrt[3]{x}}\right]' = \frac{[8x^2 - 16]'[3\sqrt[3]{x}] - [8x^2 - 16][3\sqrt[3]{x}]'}{[3\sqrt[3]{x}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{[16x][3\sqrt[3]{x}] - 3[8x^2 - 16]\left[\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right]}{[3\sqrt[3]{x}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{\left\{[16x][9\sqrt[3]{x^3}] - 3[8x^2 - 16]\right\}}{3\sqrt[3]{x^2}}}{[3\sqrt[3]{x}]^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left\{[16x][9x] - 24[x^2 - 2]\right\}}{[3\sqrt[3]{x}]^2 3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f''(x) = \frac{\left\{(9 \cdot 16)x^2 - 24(x^2 - 2)\right\}}{27[\sqrt[3]{x^4}]}$$

$$f''(x) = \frac{(120x^2 + 48)}{27[\sqrt[3]{x^4}]}$$

$$f''(x) = \frac{(40x^2 + 16)}{9[\sqrt[3]{x^4}]}$$

Em:

$$\begin{array}{ccccccc} x & = & -\sqrt{2} & \longrightarrow & f''(x) > 0 & \longrightarrow & \text{concavidade para cima} \\ x & = & \sqrt{2} & \longrightarrow & f''(x) > 0 & \longrightarrow & \text{concavidade para cima} \end{array}$$

Portanto, o gráfico de $f(x)$ tem a forma

(a) No intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$

$$-\sqrt{2} \notin [-1, \frac{1}{2}] \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \notin [-1, \frac{1}{2}]$$

Logo o máximo e mínimo global neste intervalo são respectivamente

$$f(-1) = (-1)^{2/3}((-1)^2 - 8) = -7 \quad \text{e} \quad f(0) = (0)^{2/3}((0)^2 - 8) = 0$$

(b) No intervalo $[-1, 3]$

$$-\sqrt{2} \in [-1, \frac{1}{2}] \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \notin [-1, \frac{1}{2}]$$

Logo o máximo e mínimo global neste intervalo são respectivamente

$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^{2/3}((-\sqrt{2})^2 - 8) = -6 - \sqrt[3]{2} \quad \text{e} \quad f(3) = (3)^{2/3}((3)^2 - 8) = \sqrt[3]{9}$$

(c) No intervalo $[-3, -2]$

$$-\sqrt{2} \notin [-1, \frac{1}{2}] \quad \text{e} \quad \sqrt{2} \notin [-1, \frac{1}{2}]$$

Logo o máximo e mínimo global neste intervalo são respectivamente

$$f(-2) = (-2)^{2/3}((-2)^2 - 8) = -4\sqrt[3]{4} \quad \text{e} \quad f(-3) = (-3)^{2/3}((-3)^2 - 8) = \sqrt[3]{9}$$

Resumindo os máximos e mínimos globais dos intervalos são:

Intervalo	Mínimo	Máximo
$[-1, \frac{1}{2}]$	$f(-1) = -7$	$f(0) = 0$
$[-1, 3]$	$f(-\sqrt{2}) = -6\sqrt[3]{2}$	$f(3) = \sqrt[3]{9}$
$[-3, -2]$	$f(-2) = -4\sqrt[3]{4}$	$f(-3) = \sqrt[3]{9}$

4. (1,25 pontos) ———

Um projetista foi contratado para dimensionar uma lata cilíndrica, aberta no topo (sem tampa), que será usada como embalagem de um determinado produto. O volume armazenado na lata será de 250 ml. O projetista deve informar o raio (r) e a altura (h) da lata. Sabendo que o custo de fabricação da base é três vezes o custo de fabricação da superfície lateral, determine as dimensões de forma que o custo de fabricação da lata seja mínimo.

Solução:

Seja c o custo unitário de fabricação da superfície lateral, logo o custo unitário de fabricação da base será $3c$. Seja V o volume da lata, logo

$$V = \pi r^2 h \quad \longrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi r^2} \quad \text{que relaciona a altura e o raio da lata}$$

Assim o custo total de fabricação da superfície lateral de uma lata será $c(2\pi r h)$ e o custo total de fabricação da base de uma lata será $3c(\pi r^2)$. O custo total da lata (C) é igual a soma dois custos, isto é

$$C = c(2\pi r h) + 3c(\pi r^2)$$

substituindo a relação entre h e r.

$$C = c(2\pi r \frac{V}{\pi r^2}) + 3c(\pi r^2) = \pi c \left[\frac{2V}{\pi r} + 3r^2\right]$$

Esta igualdade relaciona o custo total de uma lata em função de r, posto que o custo de fabricação unitário c é fixo. Para determinar o valor de r que fornece o menor custo devemos encontrar os pontos críticos, isto é, derivar a útima equação em relação a r. Obtemos,

$$\frac{dC}{dr} = \pi c \left[-\frac{2V}{\pi r^2} + 6r\right] = 2\pi c \left[3r - \frac{V}{\pi r^2}\right] = 0$$

ou

$$3r - \frac{V}{\pi r^2} = 0$$

$$3r = \frac{V}{\pi r^2}$$

$$r^3 = \frac{V}{3\pi}$$

ou

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$$

e

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}\right)^2} = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{3\pi}\right)^{2/3}} = \frac{V\sqrt[3]{3^2}}{V^{2/3}\left(\frac{\pi}{\pi^{2/3}}\right)} = \frac{V^{1/3}\sqrt[3]{9}}{\pi^{1/3}} = \sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}}$$

Como $V = 250$ ml, então

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}} = \sqrt[3]{\frac{250}{3\pi}} \approx 2{,}9 \text{ cm}$$

e

$$h = \sqrt[3]{\frac{9V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 250}{\pi}} \approx 8{,}9 \text{ cm}$$

5. (1,25 pontos)

Usando mudança de variável calcule a integral definida abaixo

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\, dx$$

Solução:

$$3\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\, dx$$

com $u = 5x - 1$, temos $du = 5x$. Se $x = 2 \to u = 9$ e $x = 10 \to u = 49$.

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\, dx = 3\int_2^{10} \frac{1}{\sqrt{5x-1}}\, dx$$

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\, dx = \frac{3}{5}\int_9^{49} \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx = \frac{3}{5}\int_9^{49} u^{-1/2}\,du$$

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx = \frac{3}{5}\cdot 2u^{1/2}\Big]_9^{49}$$

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx = \frac{6}{5}\left[49^{1/2} - 9^{1/2}\right]$$

$$\int_2^{10} \frac{3}{\sqrt{5x-1}}\,dx = \frac{6}{5}\left[7-3\right] = \frac{24}{5}$$

6. (1,25 pontos) ---

Calcule a área da região delimitada pelos gráficos das equações $2y^2 = x + 4$ e $x = y^2$.

Solução:

Considerando as funções na variável y, teremos $f(y) = y^2$ e $g(y) = 2y^2 - 4$. A área desejada será igual a integral da diferença entre as duas funções.

A interseção entre os dois gráficos se dá quando $f(y) = g(y)$ ou

$$y^2 = 2y^2 - 4 \Longrightarrow y^2 - 4 = 0 \Longrightarrow y^2 = 4 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Portanto,

$$\text{Área} = \int_{-2}^{2}[f(y) - g(y)]dy = \int_{-2}^{2}[y^2 - 2y^2 + 4]dy = \int_{-2}^{2}[4 - y^2]dy$$

$$\text{Área} = \left[4x - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \left[4\cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[4\cdot(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right] = \left[8 - \frac{8}{3}\right] - \left[-8 - \frac{-8}{3}\right] =$$

$$\text{Área} = \frac{24 - 8 + 24 - 8}{3} = \frac{32}{3}$$

7. (1,25 pontos) ---

Usando a integral definida calcule o volume de uma pirâmide reta de altura h e base quadrada de lado a.

Solução:

Considerando um eixo coordenado x ao longo do eixo da pirâmide, com origem O em seu vértice, então as seções transversais ao eixo x serão quadrados. Sendo $A(x)$ a área da seção transversa determinada pelo plano que intercepta o eixo a x unidades do vértice O, então

$$A(x) = (2y)^2 = 4y^2 \quad \text{sendo } 2y \text{ o lado do quadrado}$$

por semelhança de triângulos

$$\frac{y}{x} = \frac{a/2}{h}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{ax}{2h}$$

daí

$$A(x) = (2y)^2 = 4\left[\frac{ax}{2h}\right]^2 = \frac{a^2x^2}{h^2}$$

Para calcular o volume da pirâmide vamos integrar a área de $x = 0$ até $x = h$.

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{a^2x^2}{h^2}\,dx$$

$$V = \frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{a^2}{h^2}\left.\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{a^2}{h^2}\left[\frac{h^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{a^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{a^2h^3}{3h^2} = \frac{a^2h}{3}$$

8. (1,25 pontos) ---

Calcule os seguintes limites, se existirem

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$$

Solução:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

É uma forma indeterminada ∞/∞. Pela Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$$

É uma forma indeterminada ∞/∞. Pela Regra de L'Hôpital aplicada 2 vezes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{9e^{3x}}{2} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2}$$

Reescrevendo o limite

$$\lim_{x\to 0} (e^x + e^{-x}) \frac{1}{x^2}$$

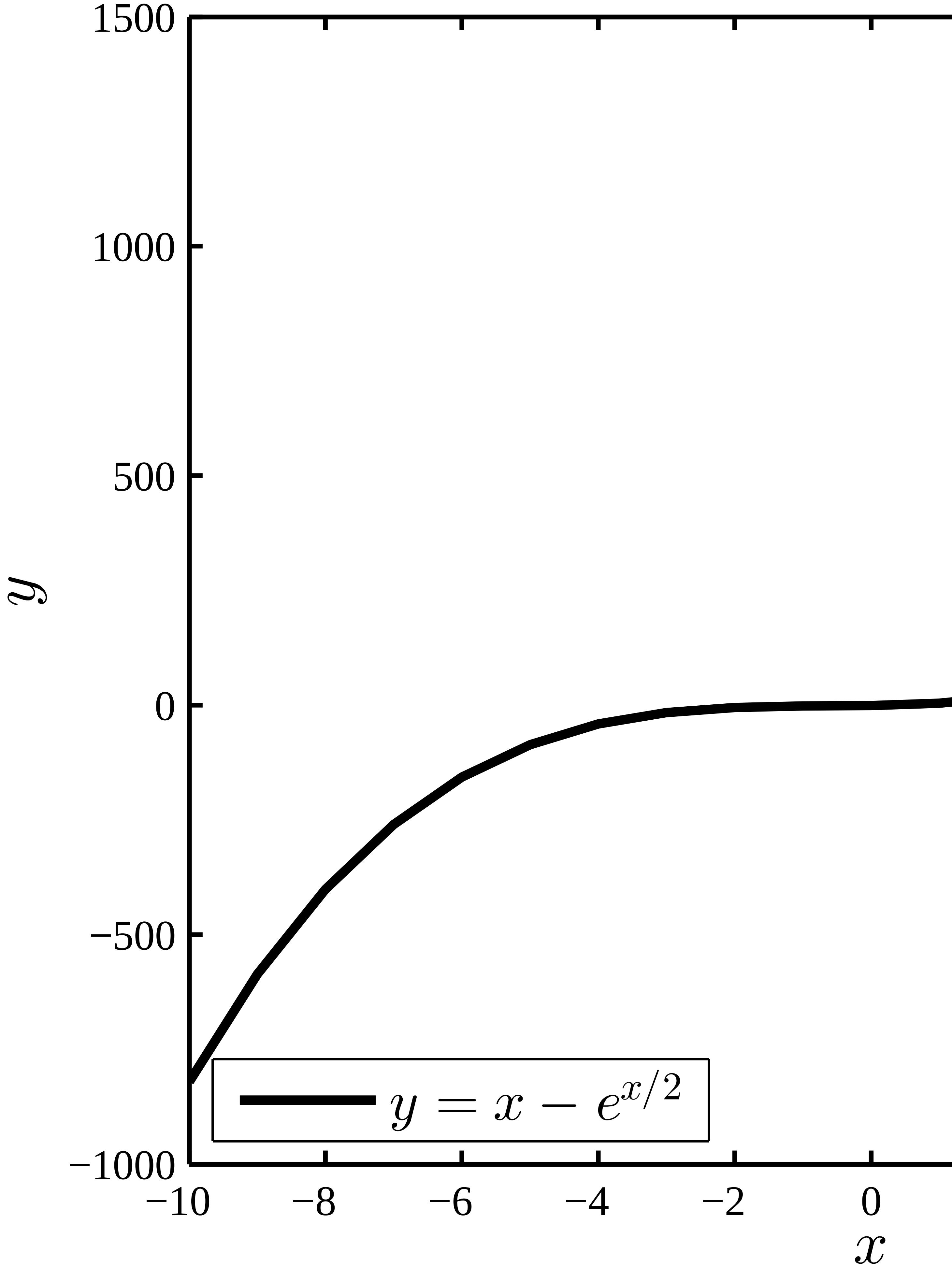
É uma forma indeterminada $2 \cdot \infty$. Pela Regra de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} (e^x + e^{-x}) \frac{1}{x^2} = \infty$$

Erroneamente poderíamos fazer:

É uma forma indeterminada $0/0$. Pela Regra de L'Hôpital 2 vezes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$



1500
1000
500
0
−500
−1000
−10
−8
−6
−4
−2
0
x
y
$y = x - e^{x/2}$