Pré-Cálculo - Módulo 4

Funções reais de uma variável real

Respostas dos Exercícios

Professores
Edson Cataldo
Jorge J. Delgado Gómez
Maria Lúcia T. Villela

Tutoras
Bruna Moustapha
Loisi Carla Monteiro
Nilda Helena Lopes
Renata do Vale Silva

Fundação CECIERJ
Consórcio CEDERJ

Princípios para construir uma função

Exercício 1

Podemos construir uma função modelando a distância entre a Terra e o Sol, tendo como domínio o tempo t medido em horas a partir do dia 21 de junho de 2002.

O valor inicial da distância seria $152,211$ milhões de quilômetros e, após 4378 horas, no dia 21 de dezembro de 2002 a distância entre esses corpos celestes seria a menor possível, no valor de $147,06$ milhões de quilômetros.

Nesse intervalo de tempo, a distância decresceu e nos próximos seis meses a distância cresce.

Observe que cada ponto da imagem, diferente do valor máximo e do valor mínimo é atingido apenas duas vezes em qualquer intervalo de tempo do tipo $[t, t + 8766]$.

Faça um desenho de uma elipse, destaque o eixo maior e um dos focos. Visualize a situação descrita nesse problema.

Essa função tem domínio $[0, \infty)$, o contradomínio pode ser o intervalo $[0, \infty)$ e a sua imagem é o intervalo $[147{,}06, 152{,}211]$.

Exercício 2

Seja t dado pelo dia e mês do aniversário de uma pessoa.

Escrevemos $t = a|b$, sendo $a =$ dia e $b =$ mês , onde $1 \le a \le 31$ e $1 \le b \le 12$ do ano.

Seja $f(t)$ a função que a cada t associa o signo da pessoa que nasce nesse dia e mês.

Sabemos comparar dois valores de $t_1 = a_1|b_1$ e $t_2 = a_2|b_2$?

É claro que sim!

Verificamos primeiro qual o mês de nascimento, e comparamos. Quando o mês é o mesmo, comparamos o dia.

Esta estratégia de comparação, matematicamente, é descrita por:

$$\begin{aligned}
&b_1 = b_2 \quad \text{e} \quad a_1 = a_2 \Longrightarrow t_1 = t_2,\\
&b_1 = b_2 \quad \text{e} \quad a_1 < a_2 \Longrightarrow t_1 < t_2,\\
&b_1 = b_2 \quad \text{e} \quad a_1 > a_2 \Longrightarrow t_1 > t_2,\\
&b_1 < b_2 \Longrightarrow t_1 < t_2,\\
&b_1 > b_2 \Longrightarrow t_1 > t_2.
\end{aligned}$$

A função f é:

$$
\begin{array}{rl}
\text{capricórnio,} & \text{se } t \text{ varia de } 1|1 \text{ a } 20|1,\\
\text{aquário,} & \text{se } t \text{ varia de } 21|1 \text{ a } 19|2,\\
\text{peixes,} & \text{se } t \text{ varia de } 20|2 \text{ a } 20|3,\\
\text{áries,} & \text{se } t \text{ varia de } 21|3 \text{ a } 20|4,\\
\text{touro,} & \text{se } t \text{ varia de } 21|4 \text{ a } 20|5,\\
\text{gêmeos,} & \text{se } t \text{ varia de } 21|5 \text{ a } 20|6,\\
\text{câncer,} & \text{se } t \text{ varia de } 21|6 \text{ a } 22|7,\\
\text{leão,} & \text{se } t \text{ varia de } 23|7 \text{ a } 22|8,\\
\text{virgem,} & \text{se } t \text{ varia de } 23|8 \text{ a } 22|9,\\
\text{libra,} & \text{se } t \text{ varia de } 23|9 \text{ a } 22|10,\\
\text{escorpião,} & \text{se } t \text{ varia de } 23|10 \text{ a } 21|11,\\
\text{sagitário,} & \text{se } t \text{ varia de } 22|11 \text{ a } 21|12,\\
\text{capricórnio,} & \text{se } t \text{ varia de } 22|12 \text{ a } 31|12.
\end{array}
$$

Exercício 3

Nos dois casos você não obteve uma função. Lembre-se que alguns acontecimentos se repetem no decorrer dos anos, assim como, em um ano mais de um acontecimento importante ocorre na nossa vida (pelo menos comigo, espero que você tenha muitos eventos para lembrar).

Exercício 4

a. $11:00$ horas.

b. $21:00$ e $22:00$ horas.

c. De $10:00$ até às $19:00$ horas.

d. Entre $7:00$ e $13:00$ horas.

e. Entre $13:00$ e $18:00$ horas e depois entre $19:00$ e $21:00$ horas.

f. 12 graus centígrados.

g. Não atingiu em nenhum momento a temperatura de 42 graus centígrados e jamais a temperatura foi menor do que 30 graus centígrados.

Exercício 5

a. Um eletrocardiograma é o gráfico de uma função. O domínio é o intervalo de tempo em que o exame é realizado e a imagem é um intervalo I de registro da menor e da maior atividade cardíaca, medida pelas correntes elétricas. O contradomínio pode ser qualquer subconjunto de números reais que contenha I, por exemplo, $[0, \infty)$.

b. O médico procura um padrão de repetição cíclica no gráfico.

Gráficos de funções reais de variável real

Exercício 1

Fazendo uma tabela com os valores de $x_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}\pi$ e comparando-os com os de d_n, dados no Exemplo 12, observamos que essas seqüências coincidem, pelo menos nos primeiros 11 termos.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	π	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{15}{8}\pi$	$\frac{31}{16}\pi$	$\frac{63}{32}\pi$	$\frac{127}{64}\pi$	$\frac{255}{128}\pi$	$\frac{511}{256}\pi$	$\frac{1023}{512}\pi$	$\frac{2047}{1024}\pi$

Observe que $x_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n}\pi = \left(\frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)\pi = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\pi$.

Quando n aumenta, $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se aproxima de zero e assim, $\left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)\pi$ se aproxima de 2π.

Exercício 2

- Seguindo o roteiro dado, temos:

$$\begin{aligned}
d_n &= \tfrac{1}{2}d_{n-1} + \pi \\
&= \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}d_{n-2} + \pi) + \pi \\
&= \tfrac{1}{2^2}d_{n-2} + \tfrac{1}{2}\pi + \pi \\
&= \tfrac{1}{2^2}(\tfrac{1}{2}d_{n-3} + \pi) + \tfrac{1}{2}\pi + \pi \\
&= \tfrac{1}{2^3}d_{n-3} + \tfrac{1}{2^2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \pi \\
&= \tfrac{1}{2^3}(\tfrac{1}{2}d_{n-4} + \pi) + \tfrac{1}{2^2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \pi \\
&= \tfrac{1}{2^4}d_{n-4} + \tfrac{1}{2^3}\pi + \tfrac{1}{2^2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi + \pi \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Continuando o processo, quando chegarmos na etapa n teremos

$$\tfrac{1}{2^n}d_{n-n} = \tfrac{1}{2^n}d_0 \text{ e } d_0 = \pi.$$

Portanto,

$d_n = \frac{1}{2^n}\pi + \cdots + \frac{1}{2^4}\pi + \frac{1}{2^3}\pi + \frac{1}{2^2}\pi + \frac{1}{2}\pi + \pi = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n})\pi.$

Para calcular d_n, usamos a fórmula da soma $S = a\frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ de uma PG finita com razão $r = \frac{1}{2}$ e primeiro termo $a = 1$. Assim,

$$d_n = (1 \times \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}})\pi = (2 - \frac{1}{2^n})\pi.$$

Observe que, de fato, para todo n temos $d_n = x_n$.

Como $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^{n+1}}$, temos que: $2 - \frac{1}{2^n} < 2 - \frac{1}{2^{n+1}} < 2$. Assim,

$$d_n = (2 - \frac{1}{2^n})\pi < (2 - \frac{1}{2^{n+1}})\pi = d_{n+1} < 2\pi.$$

Agora, note que:

- $|d_n - 2\pi| = 2\pi - d_n = \frac{1}{2^n}$

Quando n aumenta, temos que $\frac{1}{2^n}$ decresce e se aproxima de zero então, $|d_n - 2\pi|$ se aproxima de zero e d_n se aproxima de 2π.

Exercício 3

Para $n \geq 1$ temos $e_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = e_{n+1}$. Portanto,

$$1 = e_0 = e_1 > e_2 > e_3 > e_4 > \cdots > e_n > e_{n+1} > \cdots.$$

Os valores de e_n diminuem e quando n é muito grande $e_n = \frac{1}{n}$ se aproxima de zero.

Exercício 4

Observe que $\mathcal{P} = \{\,(x, y) \mid x = y^2\,\}$ é a parábola voltada para a direita com o gráfico dado abaixo:

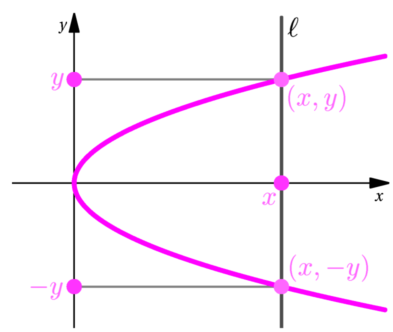


Fig. 1: Parábola $x = y^2$.

Sendo $x = y^2$, extraindo a raiz quadrada em ambos os lados dessa igualdade, obtemos que:

$$\sqrt{x} = \sqrt{y^2} = |y| = \begin{cases} y, & \text{se} \quad y \geq 0 \\ -y, & \text{se} \quad y < 0. \end{cases}$$

Podemos construir duas funções:

- $f(x) = \sqrt{x}$, cujo gráfico é $\{\,(x, y) \mid y = x^2 \quad \text{e} \quad y \geq 0\,\}$ e
- $g(x) = -\sqrt{x}$, cujo gráfico é $\{\,(x, y) \mid y = x^2 \quad \text{e} \quad y \leq 0\,\}$.

Portanto, o gráfico de $f(x)$ se constitui dos pontos do gráfico da parábola $x = y^2$ que estão acima do eixo x e o gráfico de $g(x)$ dos pontos do gráfico da mesma parábola que estão abaixo do eixo x.

Exercício 5

A equação de uma reta vertical é do tipo $x = a$, significando que os pontos da reta têm coordenadas (a, y), para qualquer número real y.

Tomando $y = 1$ e $y = 2$, temos que $(a, 1) \neq (a, 2)$ e esses pontos estão na reta $x = a$. Logo, o critério da vertical não é satisfeito para a reta $x = a$.

Exercício 6

a. $f : [-4, 4] \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto \sqrt{x^2}$. Compare com o gráfico de $x \to |x|$.

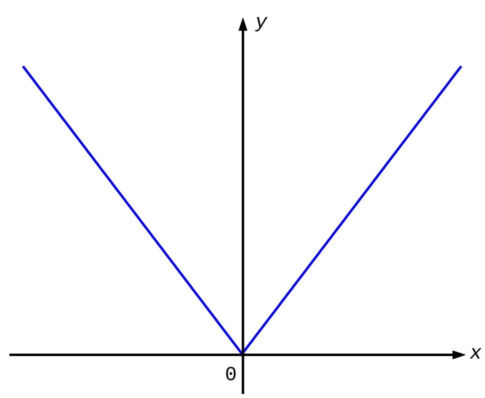


Fig. 2: $f(x) = \sqrt{x^2},\; x \in [-4, 4]$.

b. $f : [-2, 4] \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto x - \sqrt{|x|}$.

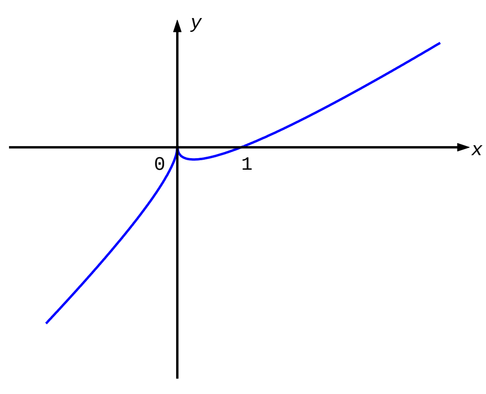


Fig. 3: $f(x) = x - \sqrt{|x|},\; x \in [-2, 4]$.

c. $f : [0, 1] \to \mathbb{R}\,,\; x \mapsto x^n$, para $n = 0, 1, 2, 3$.

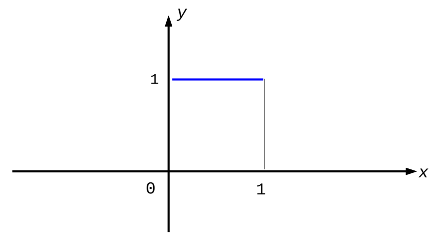


Fig. 4: $f(x) = 1, \ x \in [0, 1]$.

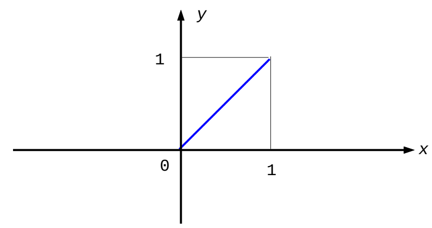


Fig. 5: $f(x) = x, \ x \in [0, 1]$.

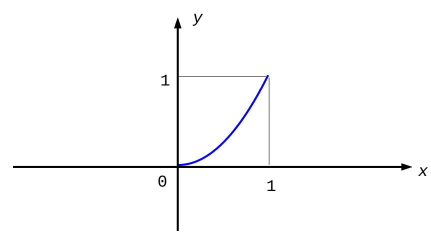


Fig. 6: $f(x) = x^2, \ x \in [0, 1]$.

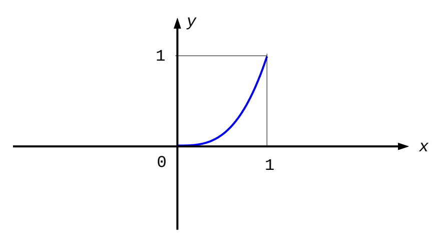


Fig. 7: $f(x) = x^3, \ x \in [0, 1]$.

d. $f : (-2, 2] \cup (3, 4] \to \mathbb{R} \, , \, x \mapsto \begin{cases} |x| \, , & \text{se } x \in (-2, 2] \\ 1 \, , & \text{se } x \in (3, 4] \end{cases}$.

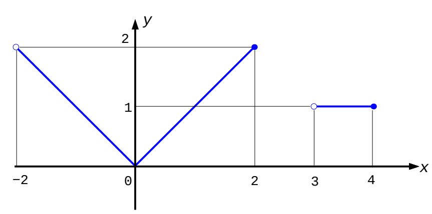


Fig. 8: $f(x) = |x|, \ x \in (-2, 2]$ e $f(x) = 1, \ x \in (3, 4]$.

Exercício 7

$$x \longmapsto \begin{cases} n\,, & \text{se } x \in [2n-1, 2n]\,, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0\,, & \text{se } x \in (2n, 2n+1)\,, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Observe que $\text{Dom}(f) = [-1, \infty)$ e $\text{Im} = \mathbb{N}$.

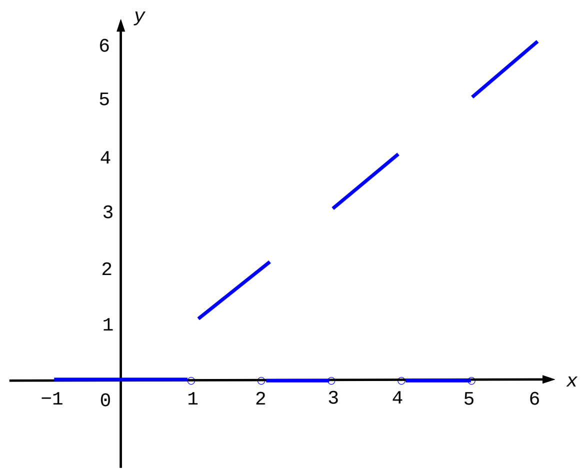


Fig. 9: Graf(f) do Exercício 7

Exercício 8

a. Apenas as curvas A, D e E são gráficos de funções, pois satisfazem o critério da vertical.

b.

- Curva A: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-3, 3]$.
- Curva D: $\text{Dom}(g) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ e $\text{Im}(g) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- Curva E: $\text{Dom}(h) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(h) = (-\infty, 3]$.

Para verificar qual a imagem de uma função $f(x)$, observe que:

$b \in \text{Im}(f)$ se, e somente se, existe $a \in \text{Dom}(f)$, tal que $b = f(a)$

se, e somente se, existe $a \in \text{Dom}(f)$ tal que $(a, b) \in \text{Graf}(f)$.

Isto é equivalente à seguinte propriedade geométrica:

$b \in \text{Im}(f)$ se, e somente se, a reta $y = b$ intersecta o gráfico de $f(x)$ em pelo menos um ponto.

Curva A: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [-3, 3]$.

Se você tem dúvida sobre a determinação da imagem de uma função sendo dado o seu gráfico, após a leitura atenta das explicações, volte aos gráficos das curvas A, D e E. Agora, tente visualizar a imagem fazendo a interseção de retas horizontais com o gráfico da função.

Curva D: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Curva E: $\text{Dom}(f) = (-\infty, 1] \cup [a, \infty)$ e $\text{Im}(f) = (-\infty, 3]$, onde a é um número real fixo, tal que $1 < a < 2$.

Exercício 9

O gráfico A é da função $\mathcal{I}(x)$ e o gráfico B é da função $\mathcal{J}(x)$.

Exercício 10

A função $\mathcal{E}$ é:

$$
\begin{array}{rl}
0, & x \in [0,2) \\
1, & x \in [2,3) \\
2, & x \in [3,5) \\
3, & x \in [5,7) \\
4, & x \in [7,11) \\
5, & x \in [11,13) \\
6, & x \in [13,17) \\
7, & x \in [17,19) \\
8, & x \in [19,23) \\
9, & x \in [23,29) \\
10, & x \in [29,30)
\end{array}
$$

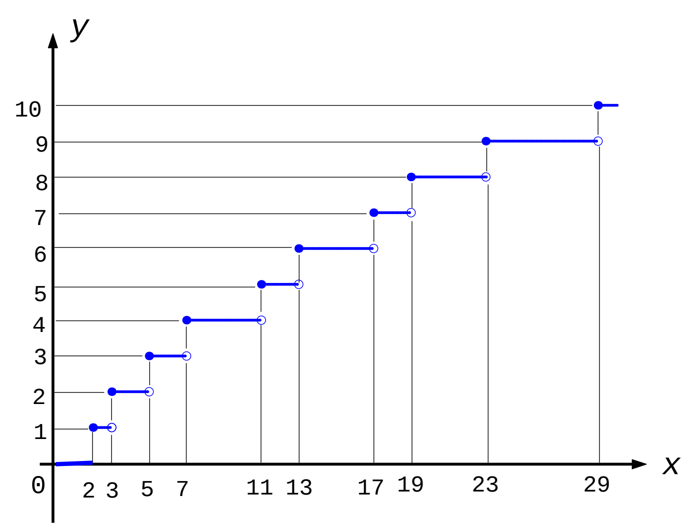


Fig. 10: Graf($\mathcal{E}$).

Exercício 11

Houve um erro no domínio, conforme você deve ter observado. Para cada x, tal que $0 \leq x < 2$, não há um número natural primo menor ou igual a x, logo nesse intervalo não está definida a função.

A função $\mathcal{G}$, para $x \in [2,30]$ é:

$$
\begin{array}{rl}
2, & x \in [2,3) \\
3, & x \in [3,5) \\
5, & x \in [5,7) \\
7, & x \in [7,11) \\
11, & x \in [11,13) \\
13, & x \in [13,17) \\
17, & x \in [17,19) \\
19, & x \in [19,23) \\
23, & x \in [23,29) \\
29, & x \in [29,30)
\end{array}
$$

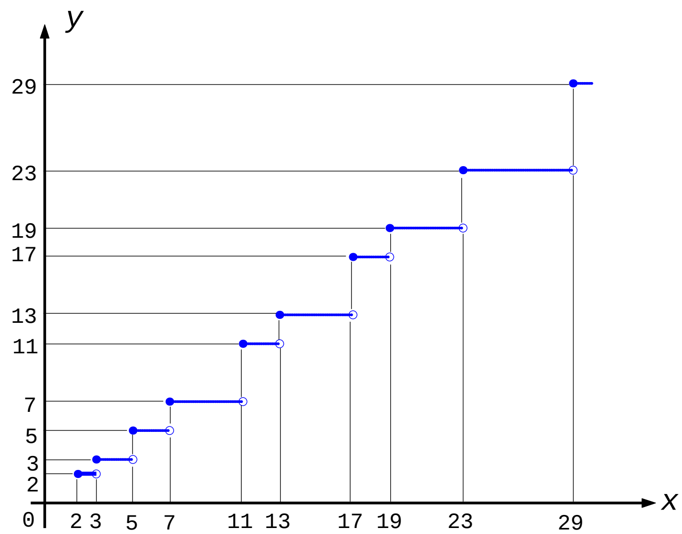
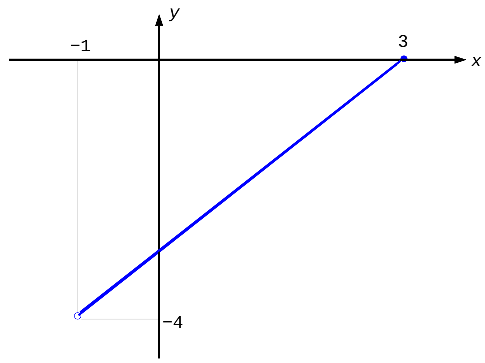


Fig. 11: Graf($\mathcal{G}$).

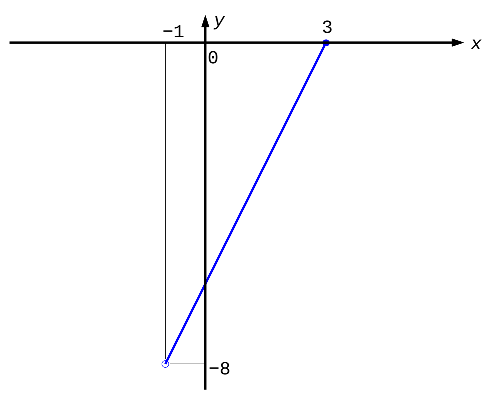
Domínios e operações com funções

Exercício 1

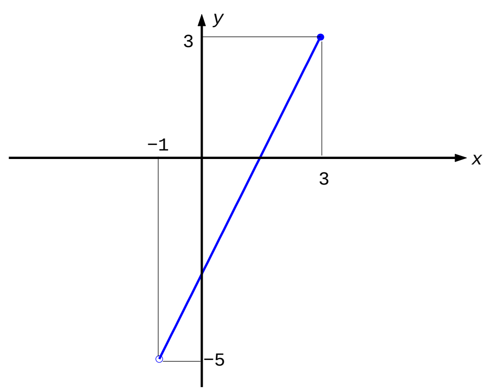
a. $f : (-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x - 3\,.$



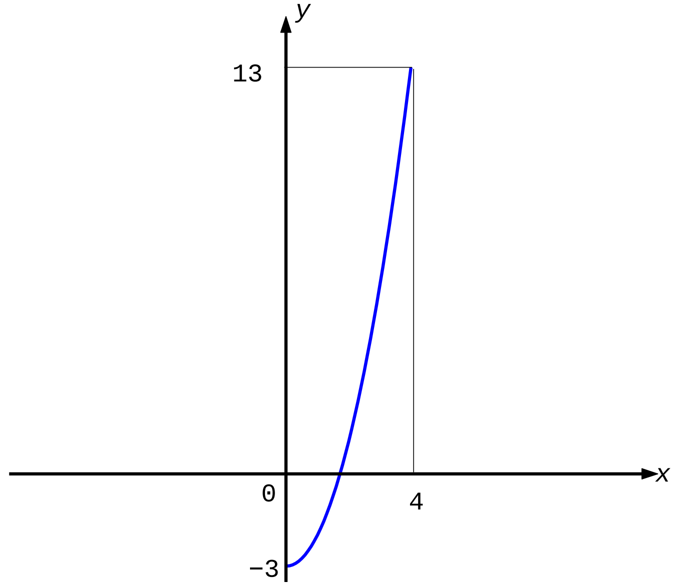
b. $g : (-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2(x - 3)\,.$



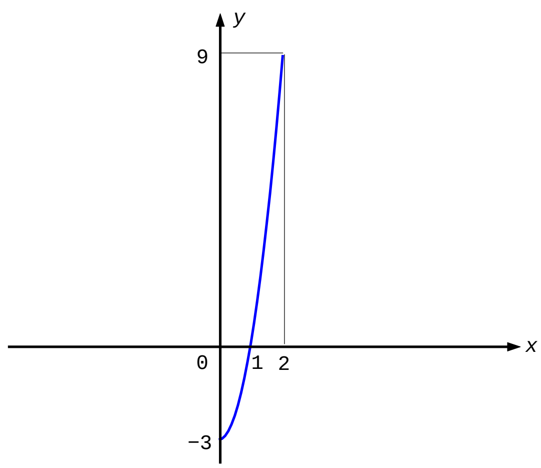
c. $h : (-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x - 3\,.$



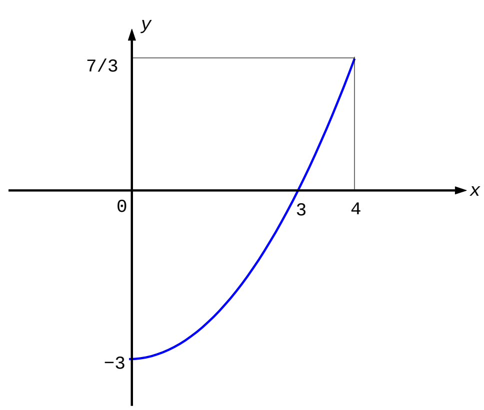
d. $\alpha : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 - 3\,.$



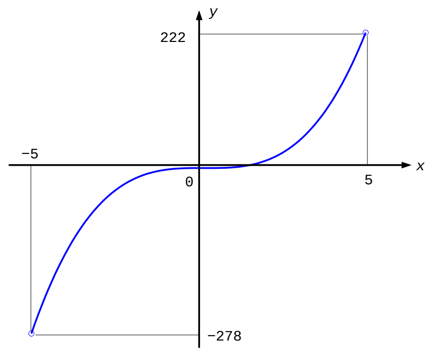
e. $\beta : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 3x^2 - 3\,.$



f. $\gamma : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - 3\,.$



g. $\delta : (-5,5) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2(2x-1)-3\,.$



Exercício 2

a. $\text{Dom}(\alpha+\beta) = [0,2]$ e $(\alpha+\beta)(x) = 4x^2-6$, para $x \in [0,2]$.

b. $\text{Dom}(g+\delta) = (-1,3]$ e $(g+\delta)(x) = 2x^3-x^2+2x-9$, para $x \in (-1,3]$.

c. $\text{Dom}(3h+\beta) = [0,2]$ e $(3h+\beta)(x) = 3x^2+6x-12$, para $x \in [0,2]$.

d. $\text{Dom}(2f-g) = (-1,3]$ e $(2f-g)(x) = 0$, para $x \in (-1,3]$.

e. $\text{Dom}(\alpha+\delta) = [0,4]$ e $(\alpha+\delta)(x) = 2x^3-6$, para $x \in [0,4]$.

f. $\text{Dom}(h\cdot\alpha) = [0,3]$ e $(h\cdot\alpha)(x) = 2x^3-3x^2-6x+9$, para $x \in [0,3]$.

Exercício 3

a. $f : (-1,3] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x$, não é par e não é ímpar, pois seu domínio não é simétrico com respeito a origem.

b. $g : [-3,3] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x^2-3\,.$

$$g(-x) = 2(-x)^2-3 = 2x^2-3 = g(x) \Longrightarrow g \quad \text{é} \quad \text{par.}$$

c. $h : (-3,3) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x^3-x\,.$

$h(-x) = 2(-x)^3-(-x) = -2x^3+x = -(2x^3-x) = -h(x) \Longrightarrow h$ é uma função ímpar.

d. $h : (-3,3) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^5-2x^3-x\,.$

$h(-x) = (-x)^5-2(-x)^3-(-x) = -x^5+2x^3+x = -h(x) \Longrightarrow h$ é uma função ímpar .

e. $\alpha : [-2,2] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^4+x^2-3\,.$

$$\alpha(-x) = (-x)^4+(-x)^2-3 = x^4+x^2-3 = \alpha(x) \Longrightarrow \alpha \quad \text{é} \quad \text{par.}$$

f. $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 3x^2-3\,.$

$$\beta(-x) = 3(-x)^2-3 = 3x^2-3 = \beta(x) \Longrightarrow \beta \text{ é par.}$$

g. $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1$.

$\gamma(-x) = \frac{1}{3}(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = \frac{1}{3}x^4 - 3x^2 + 1 = \gamma(x) \Longrightarrow \gamma$ é par.

h. $\delta : (-5, 5) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2x^7 - x^3 - x$.

$\delta(-x) = 2(-x)^7 - (-x)^3 - (-x) = -2x^7 + x^3 + x = -\delta(x) \Longrightarrow \delta$ é ímpar.

Exercício 4

a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \Longrightarrow \text{Dom}(f) = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

b. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-8x} \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 8x = x(x^2 - 8) \neq 0 \,\}$

$$= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0, x \neq 2\sqrt{2}, x \neq -2\sqrt{2} \,\}$$

$$= (-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}, \infty) .$$

c. $f(x) = |x - 2| - |2x^2 - 4| \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

d. $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

e. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{\sqrt[3]{x-4}} \Longrightarrow \text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x - 4 \neq 0 \,\} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

Exercício 5

$$f(x) = 0, \quad \text{para } x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 6

- A soma e produto de duas funções f e g pares é uma função par pois, para cada $x \in A$,

  $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$ e

  $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$.

- A soma de duas funções f e g ímpares é uma função ímpar pois, para cada $x \in A$,

  $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f + g)(x)$.

  Enquanto, o produto de duas funções f e g ímpares é uma função par pois, para cada $x \in A$,

  $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$.

- Na soma de uma função par com uma função ímpar tudo pode acontecer. Veja os exemplos, a seguir:

$f(x) = x^2$ é par , $g(x) = x$ é ímpar e $(f+g)(x) = x^2 + x$ não é nem par, nem ímpar;

$f(x) = 0$ é par, $g(x) = x$ é impar e $(f+g)(x) = x$ é ímpar;

$f(x) = 0$ é ímpar, $g(x) = x^2$ é par e $(f+g)(x) = x^2$ é par;

O produto de f ímpar por g par é sempre ímpar, pois

$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = -f(x) \cdot g(x) = -(f \cdot g)(x).$

Exercício 7

b. Primeiramente, $f_p(-x) = f_p(x)$ e $f_i(-x) = -f_i(x)$, pois f_p é par e f_i é ímpar. Por outro lado,

$$g(x) = f(-x) = f_p(-x) + f_i(-x) = f_p(x) - f_i(x).$$

c.

$$\begin{aligned} f(x) &= f_p(x) + f_i(x) \\ f(-x) &= f_p(x) - f_i(x), \end{aligned}$$

$$f(x) + f(-x) = 2f_p(x) \Longrightarrow f_p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

$$f(x) - f(-x) = 2f_i(x) \Longrightarrow f_i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

d. Escreva $f = P + I$ e $f = f_p + f_i$. fazendo a diferença dessas funções, temos $0 = P + I - f_p - f_i$. Isto é equivalente à igualdade das funções $P - f_p = f_i - I$.

Observe agora que: $P - f_p$ é uma função par e $f_i - I$ é uma função ímpar. Faça a verificação! Como são iguais, essas funções são simultaneamente pares e ímpares. A única função com essa propriedade é a função identicamente nula para todo x. Portanto, $P = f_p$ e $I = f_i$.

Exercício 8

a. $f : (-5, 5) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 2x^3 - x^2 - 3$.

$$f(-x) = -2x^3 - x^2 - 3 \quad \text{e} \quad f(x) = 2x^3 - x^2 - 3$$

$$\Longrightarrow f_p(x) = \frac{(2x^3 - x^2 - 3) + (-2x^3 - x^2 - 3)}{2} = -2x^2 - 6 \quad \text{e}$$

$$f_i(x) = \frac{(2x^3 - x^2 - 3) - (-2x^3 - x^2 - 3)}{2} = 4x^3.$$

Olhe, atentamente, para f_i e f_p calculadas e compare com a primeira parcela e a soma das duas últimas parcelas que definem a expressão de f.

b. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 3x^2 - 3x$.

$f_p(x) = 6x^2$ e $f_i(x) = -6x$.

c. $f : [-1, 0) \cup (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{2x^3-1}{x}$.

$\frac{2x^3-1}{x} = \frac{2x^3}{x} - \frac{1}{x} = 2x^2 - \frac{1}{x} \Longrightarrow f_p(x) = 4x^2$ e $f_i(x) = -\frac{2}{x}$.

d. $f : [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

$f(-x) = \lfloor -x \rfloor =$ e $f(x) = \lfloor x \rfloor$

$\Longrightarrow f_p(x) = \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor}{2}$ e $f_i(x) = \frac{\lfloor x \rfloor - \lfloor -x \rfloor}{2}$.

e. $f : [-10, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto [x]$.

Essa função é ímpar, logo $f_i(x) = f(x)$ e $f_p(x) = 0$.

Exercício 9

Atenção: houve um erro na enumeração dos itens no texto. Cuidado ao conferir as respostas. Aqui está correto.

a. Seja $x \in \mathbb{R}$. Então,

$f(x) = x^2 + 1$ é positiva;
$f(x) = -x^2 + x - 1$ é negativa;
$f(x) = x^2 - 2x + 1$ é não-negativa e
$f(x) = -x^2 + 2x - 1$ é não-positiva.

b.

Se f' é positiva, então o gráfico de f está acima do eixo x.

Se f' é negativa, então o gráfico de f está abaixo do eixo x.

f' é não-negativa, então o gráfico de f está acima do eixo x e pode intersectar o eixo x.

f' é não-positiva, então o gráfico de f está abaixo do eixo x e pode intersectar o eixo x.

c. Um número real não-nulo não pode ser simultaneamente positivo e negativo. Logo, não existe uma função simultaneamente positiva e negativa.

d. Uma função f simultaneamente não-negativa e não-positiva é tal que $f(x) \geq 0$ e $f(x) \leq 0$, para cada $x \in A$. Logo, $f(x) = 0$, para todo $x \in A$. Essa função é a única com essa propriedade.

e. Se $f(x) > 0$, para todo $x \in A$, então $f(x) \geq 0$, para todo $x \in A$. Logo, toda função positiva é não-negativa.

O contrário é falso. A função $f(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, é não-negativa e não é positiva.

f. Se $f(x) < 0$, para todo $x \in A$, então $f(x) \leq 0$, para todo $x \in A$. Logo, toda função negativa é não-positiva.

O contrário é falso. A função $f(x) = 0$, para $x \in \mathbb{R}$, é não-positiva e não é negativa.

Exercício 10

Atenção ao conferir as respostas. Houve um erro na enumeração dos itens.

(i) $f(x) = x^3 \Longrightarrow |f(x)| = \begin{cases} -x^3, & \text{se} \quad x < 0 \\ x^3, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$

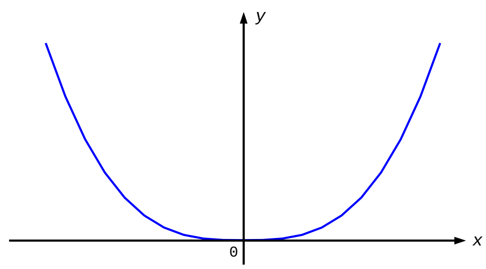


Fig. 12: $|f(x)| = |x^3|$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = 1 - 2x \Longrightarrow |f(x)| = \begin{cases} -1 + 2x, & \text{se} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - 2x, & \text{se} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$

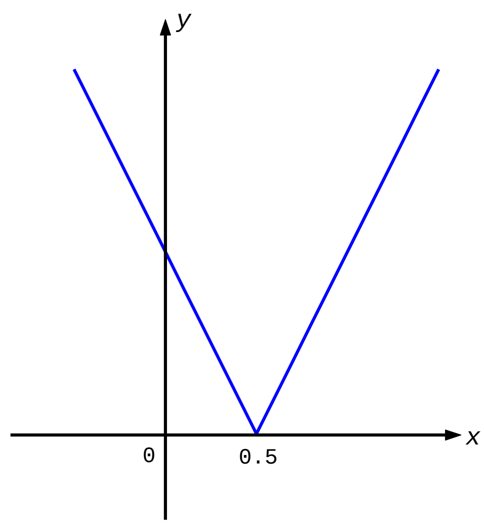


Fig. 13: $|f(x)| = |1 - 2x|$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\textbf{(iii)}\ f(x) = x^2 - 2 \Longrightarrow |f(x)| = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{se} \quad x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty) \\ -x^2 + 2, & \text{se} \quad x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

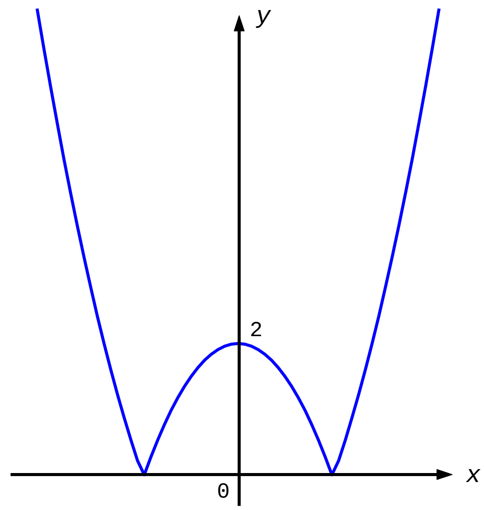


Fig. 14: $|f(x)| = |x^2 - 2|$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\textbf{(iv)}\ f(x) = 1 + (x-1)^2 \geq 1 > 0 \Longrightarrow |f(x)| = f(x).$$

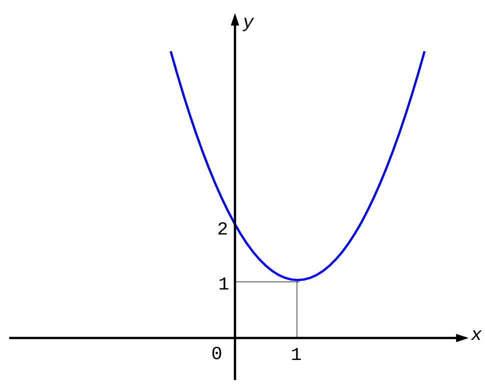


Fig. 15: $|f(x)| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

b. O gráfico de $|f|$ coincide com o gráfico de f sempre que $f(x) \geq 0$ e quando $f(x) < 0$ devemos fazer a simetria do gráfico de f com respeito ao eixo x, para obter o gráfico de $|f|$.

Domínios e operações com funções - continuação

Indicação - Exercício 1
Para **a** e **b** estude o sinal das expressões dentro dos módulos, reescreva $f(x)$ nos diversos intervalos obtidos e, então, desenhe o gráfico. Reveja a Aula 12, do Módulo 1.
Para o item **e**, veja que $y = \sqrt{4x^2 - 4}$ equivale a $y^2 = 4x^2 - 4$ com $y \geq 0$. Reveja as Aulas 21 a 24, do Módulo 2, caso ache necessário.
Nos outros itens, esboce o gráfico de maneira similar, mas preste muita atenção no sinal de y.
Para determinar o domínio nos itens **e** a **h**, você deve resolver uma desigualdade. Volte à Aula 12, do Módulo 1, caso ache necessário.

Exercício 1

a. $f(x) = |2x-3| - |3x-2|$.

Dom$(f) = \mathbb{R}$.

	$x < \frac{2}{3}$	$\frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2}$	$x \geq \frac{3}{2}$
valor de $\lvert 2x-3\rvert$	$-(2x-3)$	$-(2x-3)$	$2x-3$
valor de $\lvert 3x-2\rvert$	$-(3x-2)$	$3x-2$	$3x-2$
valor de $f(x)$	$x+1$	$-5x+5$	$-x-1$

Portanto,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se} \quad x < \frac{2}{3} \\ -5x+5, & \text{se} \quad \frac{2}{3} \leq x < \frac{3}{2} \\ -x-1, & \text{se} \quad x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$$

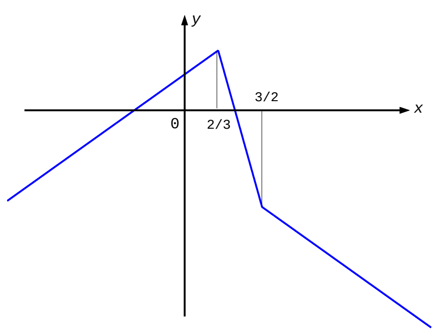


Fig. 16: $f(x) = |2x-3| - |3x-2|$.

Após o esboço do gráfico de $f(x)$, verificamos que todas as retas horizontais $y = a$ com $a \leq \frac{5}{3} = f(\frac{2}{3})$ intersectam o seu gráfico em pelos um ponto. Concluímos então que Im$(f) = (-\infty, \frac{5}{3}]$.

b. $f(x) = |3x-1| + |2x+4|$.

Dom$(f) = \mathbb{R}$.

	$x < -2$	$-2 \leq x < \frac{1}{3}$	$x \geq \frac{1}{3}$
valor de $\lvert 3x-1 \rvert$	$-(3x-1)$	$-(2x-3)$	$3x-1$
valor de $\lvert 2x+4 \rvert$	$-(2x+4)$	$2x+4$	$2x+4$
valor de $f(x)$	$-5x-3$	$-x+5$	$5x+3$

Portanto,

$$f(x) = \begin{cases} -5x-3, & \text{se} \quad x < -2 \\ -x+5, & \text{se} \quad -2 \leq x < \frac{1}{3} \\ 5x+3, & \text{se} \quad x \geq \frac{1}{3} \end{cases}$$

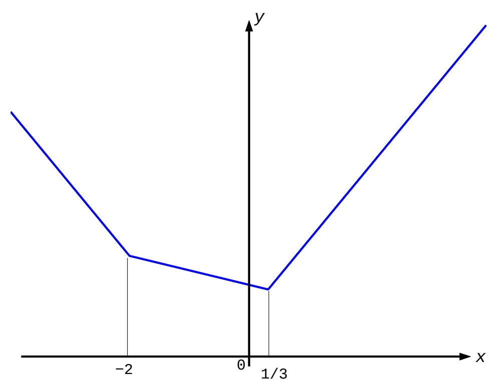


Fig. 17: $f(x) = |3x-1| + |2x+4|$.

Após o esboço do gráfico de $f(x)$, verificamos que todas as retas horizontais $y = a$ com $a \geq \frac{14}{3} = f(\frac{1}{3})$ intersectam o seu gráfico em pelos um ponto. Concluímos então que $\text{Im}(f) = [\frac{14}{3}, \infty)$.

c. $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$.

Dom$(f) = \mathbb{R}$ e f assume o valor mínimo em $x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2}$ dado por $f(\frac{5}{2}) = -\frac{\Delta}{4a} = -0{,}75$.

Fazendo a análise do gráfico de $f(x)$, obtemos que $\text{Im}(f) = [-0{,}75, \infty)$.

d. $f(x) = |3x^2 - 15x + 18|$.

Dom$(f) = \mathbb{R}$

Para esboçar o gráfico de $f(x)$, utilize o gráfico da função do item anterior, fazendo a simetria com respeito ao eixo x dos pontos abaixo do eixo x, pois:

$$|3x^2 - 15x + 18| = \begin{cases} 3x^2 - 15x + 18, & \text{se} \quad x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty) \\ -3x^2 + 15x - 18, & \text{se} \quad x \in (2, 3). \end{cases}$$

Fazendo a análise do gráfico de $f(x) == |3x^2 - 15x + 18|$, observamos que $\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$.

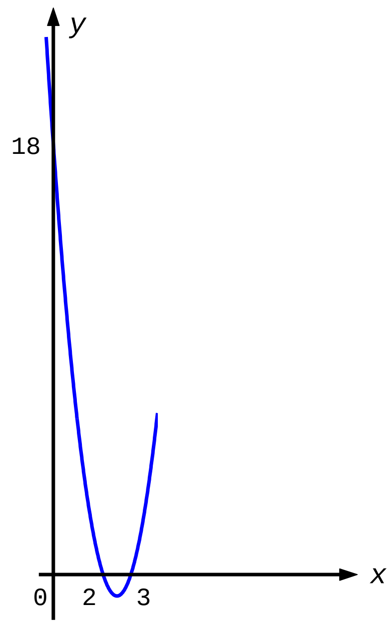


Fig. 18: $f(x) = 3x^2 - 15x + 18$.

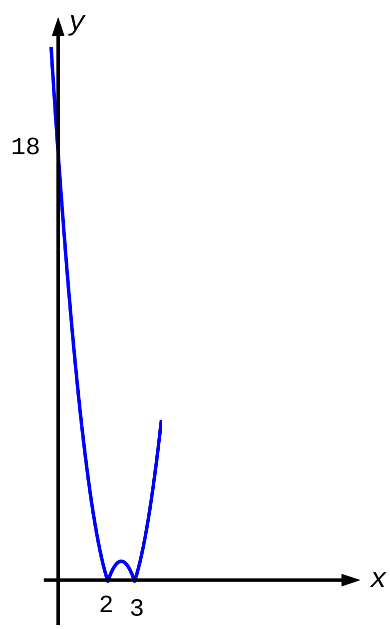


Fig. 19: $f(x) = |3x^2 - 15x + 18|$.

e. $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4}$.

$\text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 4 \geq 0 \,\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, pois

$4x^2 - 4 \geq 0 \iff x^2 \geq 1 \iff |x| \geq 1 \iff x \geq 1 \quad \text{ou} \quad x \leq -1$.

Para esboçar o gráfico note que:

$$y = \sqrt{4x^2 - 4} \iff y^2 = 4x^2 - 4, y \geq 0 \iff 4x^2 - y^2 = 4, y \geq 0 \iff$$
$$\iff \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1, y \geq 0.$$

Portanto, o gráfico de f é a parte do gráfico da hipérbole $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ acima do eixo x.

Reveja as Aulas 23 e 24, caso tenha tido dificuldade em traçar o gráfico da hipérbole.

Para fazer um bom gráfico: marque os vértices, as extremidades do eixo imaginário e trace as assíntotas. Agora, esboce a hipérbole!

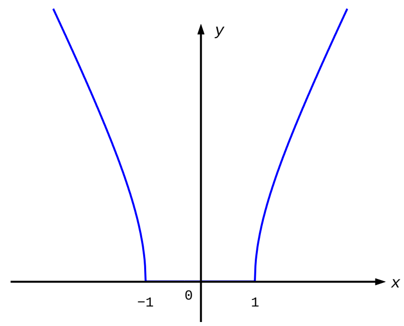


Fig. 20: $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4}$.

Consultando o gráfico de $f(x)$, concluímos que $\text{Im}(f) = [0, \infty)$.

f. $f(x) = -\sqrt{4x^2 - 4}$.

Use o item anterior como uma inspiração para solucionar esse item.

$\text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 4 \geq 0 \,\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Para esboçar o gráfico note que:

$$y = \sqrt{4x^2 - 4} \iff y^2 = 4x^2 - 4, y \leq 0 \iff 4x^2 - y^2 = 4, y \leq 0 \iff$$
$$\iff \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1, y \leq 0.$$

Portanto, o gráfico de f é a parte do gráfico da hipérbole $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ abaixo do eixo x.

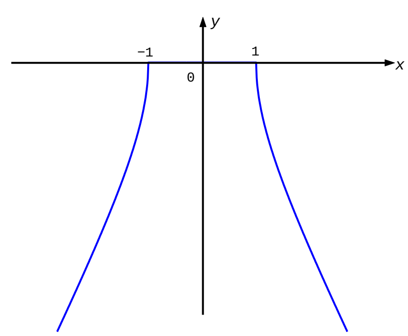


Fig. 21: $f(x) = -\sqrt{4x^2 - 4}$.

Analisando o gráfico, vemos que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$.

g. $f(x) = -\sqrt{4 - 2x^2}\,.$

Dom$(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 4 - 2x^2 \geq 0 \,\} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, pois

$4 - 2x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow 2x^2 \leq 4 \Longleftrightarrow x^2 \leq 2 \Longleftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Longleftrightarrow x - \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$

Para esboçar o gráfico note que:

$$y = -\sqrt{4 - 2x^2} \Longleftrightarrow y^2 = 4 - 2x^2, y \leq 0 \Longleftrightarrow 2x^2 + y^2 = 4, y \leq 0 \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{y^2}{4} = 1, y \leq 0.$$

Portanto, o gráfico de f é a parte do gráfico da elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ abaixo do eixo x.

Reveja as Aulas 21 e 22, caso tenha tido dificuldade em traçar o gráfico da elipse.

Para fazer um bom gráfico: marque os vértices e as extremidades do eixo menor. Agora, esboce a elipse! Tome a parte dele que é o gráfico de f.

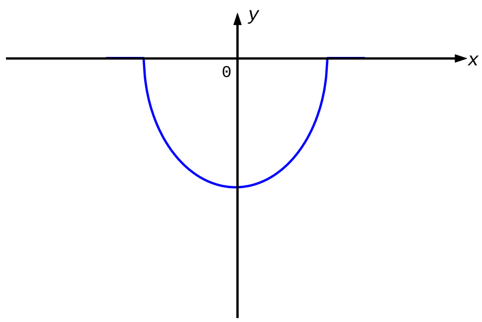


Fig. 22: $f(x) = -\sqrt{4 - 2x^2}\,.$

Consultando o gráfico de $f(x)$, concluímos que $\mathrm{Im}(f) = [-2, 0]$.

h. $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 2x}\,.$

Dom$(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x \geq 0 \,\} = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$, pois

$x^2 - 2x \geq 0 \Longleftrightarrow x(x-2) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$

Para esboçar o gráfico note que:

$$\begin{aligned} y = 2 - \sqrt{x^2 - 2x} &\Longleftrightarrow y - 2 = -\sqrt{x^2 - 2x} \\ &\Longleftrightarrow (y-2)^2 = x^2 - 2x, y - 2 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow (y-2)^2 = (x-1)^2 - 1, y \leq 2 \\ &\Longleftrightarrow \tfrac{(x-1)^2}{1} - \tfrac{(y-2)^2}{1} = 1, y \leq 2. \end{aligned}$$

Portanto, o gráfico de f é a parte do gráfico da hipérbole de equação $\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$ abaixo da reta $y = 2$.

O gráfico de muitas funções é parte do gráfico das curvas planas estudadas no Módulo 2.

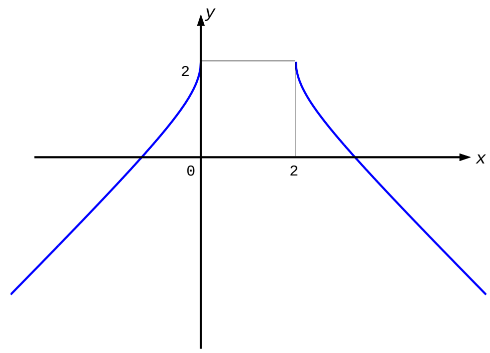


Fig. 23: $f(x) = 2 - \sqrt{x^2 - 2x}$.

Consultando o gráfico de $f(x)$, concluímos que $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 2]$.

Exercício 2

a. $f(x) = \sqrt{3x^3 + x - 16}$.

Na disciplina Cálculo I, vocês vão aprender os conceitos de continuidade e derivada e saberão tratar esse tipo de problema.

Desculpem a nossa falha. Com os conceitos aprendidos nessa disciplina vocês não sabem resolver esse exercício. O polinômio $3x^3 + x - 16$ tem duas raízes complexas não-reais conjugadas e apenas uma raiz real $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

É isso mesmo, a é um número irracional com $1{,}68 < a < 1{,}69$, $3x^3 + x - 16 > 0$ para todo $x > a$ e $\mathrm{Dom}(f) = [a, \infty)$, onde $a \approx 1{,}6836$.

Para compensar o nosso erro, apresentamos o gráfico dessa função.

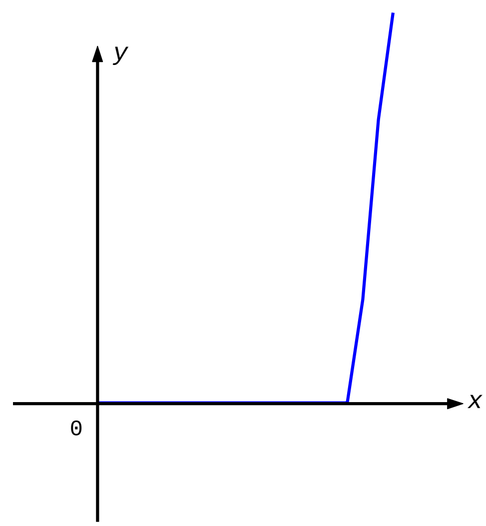


Fig. 24: $f(x) = \sqrt{3x^3 + x - 16}$.

Reveja as Aulas 18, 19 e 20 do Módulo 2. O conhecimento das propriedades das curvas planas do Módulo 2 são essenciais para o estudo de funções reais de variável real.

b. $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8}$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 8 \neq 0 \,\} = \mathbb{R} - \{\, -4, 2 \,\}$.

c. $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x+\sqrt{6-x}}$.

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid 3-x \geq 0 \quad \text{e} \quad 6-x \geq 0 \quad \text{e} \quad x+\sqrt{6-x} \neq 0\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3 \quad \text{e} \quad x+\sqrt{6-x} \neq 0\,\} \\ &= (-\infty, 3] \cap (\mathbb{R} - \{\,-3\,\}) = (-\infty,-3) \cup (-3,3], \text{ pois}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + \sqrt{6-x} = 0 &\Longleftrightarrow \sqrt{6-x} = -x \Longleftrightarrow 6-x = x^2,\ x \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2+x-6=0,\ x \leq 0 \Longleftrightarrow x = -3.\end{aligned}$$

Não esqueça que raízes quadrads são números reais não negativos.

d. $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$.

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid 2x+5 \neq 0\,\} \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\tfrac{5}{2} = -2{,}5\,\} \\ &= (-\infty, -2{,}5) \cup (-2{,}5, \infty).\end{aligned}$$

e. $f(x) = \sqrt{\frac{3-x}{3x+2}}$.

$\text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-x}{3x+2} \geq 0\,\} = (-\frac{2}{3}, 3]$, pois estudamos o sinal do numerador e do denominador da função racional, na tabela a seguir:

Este é um bom momento para você relembrar a resolução de desigualdades. O produto cruzado é proibido! Cuidado.

	$x < -\frac{2}{3}$	$x = -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$3x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{3-x}{3x+2}$	$-$	$\star$	$+$	0	$-$

Obtivemos o domínio de f consultando a tabela. Lembre que o sinal $\star$ significa que a expressão não está definida.

f. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$.

$\text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2+2x+1 = (x+1)^2 \neq 0\,\} = \mathbb{R} - \{\,-1\,\}$.

g. $f(x) = \frac{4-x^2}{x^2+3x}$, $f(x) > 0$.

$\text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2+3x \neq 0 \quad \text{e} \quad \frac{4-x^2}{x^2+3x} > 0\,\} = (-3,-2) \cup (0,2)$, pois consultamos a tabela de estudo de sinal das expressões do numerador, do denominador e da fração, na tabela a seguir, onde $x \neq -3$ e $x \neq 0$:

	$x < -3$	$-3 < x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
$4-x^2$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
x^2+3x	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\frac{4-x^2}{x^2+3}$	$-$	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$

h. $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+2x}{1-x^2}}$.

Dom$(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2+2x}{1-x^2} \geq 0 \,\} = [-2,-1) \cup [0,1)$, pois resolvemos a desigualdade proposta, na tabela de estudo de sinal das expressões envolvidas, onde $x \neq -1$ e $x \neq 1$:

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x>1$
x^2+2x	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$1-x^2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x^2+2x}{1-x^2}$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$	$-$

i. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{x+4}} = \sqrt{\frac{(x-1)(x+4)-x(x+2)}{(x+2)(x+4)}} = \sqrt{\frac{x-4}{(x+2)(x+4)}}$.

Dom$(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-4}{(x+2)(x+4)} \geq 0 \,\} = (-4,-2) \cup [4,\infty)$, pois consultamos a tabela de estudo de sinal, a seguir:

	$x<-4$	$x=-4$	$-4<x<-2$	$x=-2$	$-2<x<4$	$x=4$	$x>4$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2+6x+8	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-4}{(x+2)(x+4)}$	$-$	$\star$	$+$	$\star$	$-$	0	$+$

No item anterior, reescrevemos $(x+2)(x+4) = x^2+6x+8$. Lembre que o gráfico dessa equação do segundo grau com o coeficiente de x^2 positivo é uma parábola voltada para cima, cujos pontos do gráfico entre as raízes -4 e -2 estão abaixo do eixo x, portanto têm ordenada $y<0$. Fora do intervalo $[-4,-2]$ os pontos do gráfico têm ordenada $y>0$.

j. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-1}{x^3+x^2}}$.

Dom$(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^3+x^2 = x^2(x+1) \neq 0 \,\} = \mathbb{R} - \{\,-1, 0\,\}$.

Note que $\frac{x^2-1}{x^3+x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2(x+1)} = \frac{x-1}{x^2}$, para $x \neq -1$.

Podemos reescrever $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2}}$, com $x \neq -1$.

l. $f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x+2}$.

Dom$(f) = \mathbb{R}$, pois o discriminante de x^2+2x+2 sendo $\Delta = -4 < 0$ e o coeficiente de x^2, positivo, nos dizem que esta parábola não intersecta o eixo x. Geometricamente, a função do denominador da função racional f nunca é zero.

m. $f(x) = \sqrt{(x-2)(x^2+x-12)}$.

Dom$(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid (x-2)(x^2+x-12) \geq 0 \,\} = [-4,2] \cup [3,\infty)$, pois fizemos o estudo do sinal na seguinte tabela, onde $g(x) = (x-2)(x^2+x-12)$:

	$x < -4$	$x = -4$	$-4 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2 + x - 12$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

n. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4x^2-1}} - \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$.

$\text{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 4x^2 - 1 > 0 \quad \text{e} \quad 1 - x^2 > 0 \,\} = (-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1)$, pois resolvemos separadamente as duas desigualdades e fizemos a interseção dos conjuntos soluções, conforme descrito a seguir:

$$4x^2 - 1 > 0 \Longleftrightarrow x^2 > \tfrac{1}{4} \Longleftrightarrow |x| > \tfrac{1}{2} \Longleftrightarrow x \in S_1 = (-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, \infty)$$

e

$$1 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x^2 < 1 \Longleftrightarrow |x| < 1 \Longleftrightarrow x \in S_2 = (-1, 1).$$

Então, $\text{Dom}(f) = S_1 \cap S_2$.

Exercício 3

a. São racionais as funções dos itens **b**, **d** , **f**, **g** e **l**.

b. As interseções do gráfico de f com o eixo x correspondem as pontos x do domínio de f tais que $f(x) = 0$.

Para resolver corretamente esse item você deve consultar o resultado já calculado do domínio das funções.

- **a.** O número irracional a.
- **b.** Não há. Note que $f(x) = \frac{x-2}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{x+4}$, com $x \neq 2$.
- **c.** $x = 3$.
- **d.** $x = 3$.
- **e.** $x = 3$.
- **f.** $x = 1$, pois $x^2 - 1 = 0$ e $x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\, -1 \,\}$.
- **g.** Pela definição de f, seu gráfico nunca intersecta o eixo x.
- **h.** $x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$.
- **i.** $x = 4$.
- **j.** $x = 1$, pois $x^2 - 1 = 0 \quad \text{e} \quad x \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{\, -1, 0 \,\}$.

- **l.** $x = 5$.
- **m.** $x = 2 \quad \text{ou} \quad x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 3$.
- **n.** $x = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{2}{5}}$.

  Nesse caso,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff \sqrt{\tfrac{1}{4x^2-1}} = \sqrt{\tfrac{1}{1-x^2}} \\ &\iff \tfrac{1}{4x^2-1} = \tfrac{1}{1-x^2} \quad \text{e} \quad x \in \text{Dom}(f) = (-1, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1) \\ &\iff 4x^2 - 1 = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad x \in (-1, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1) \\ &\iff 5x^2 = 2 \quad \text{e} \quad x \in (-1, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1) \\ &\iff |x| = \sqrt{\tfrac{2}{5}} \quad \text{e} \quad x \in (-1, -\tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}, 1) \\ &\iff x = \sqrt{\tfrac{2}{5}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\tfrac{2}{5}}. \end{aligned}$$

  Observe que a desigualdade $\frac{1}{4} < \frac{2}{5} < 1$ é equivalente a $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{2}{5}} < 1$ ou $-1 < -\sqrt{\frac{2}{5}} < -\frac{1}{2}$.

c. Não há assíntotas verticais aos gráficos das funções dos itens **a**, **l** e **m**.

Para responder corretamente, volte ao item anterior e analise cuidadosamente a expressão de f.

- **b.** $x = -4$.
- **c.** $x = -3$.
- **d.** $x = -\frac{5}{2}$.
- **e.** $x = -\frac{2}{3}$.
- **f.** $x = -1$.
- **g.** $x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -3$.
- **h.** $x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1$.
- **i.** $x = -4 \quad \text{ou} \quad x = -2$.
- **j.** $x = 0$.
- **n.** $x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$. $x = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 1$.

d. As funções dos itens **a**, **e**, **h**, **i** e **m** são raízes quadradas, logo são não negativas nos seus domínios. A função do item **g**, por definição é positiva. vamos estudar o sinal das funções dos outros itens.

- **b.** $f(x) = \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \frac{1}{x+4}$, $x \neq 2$

  $f(x) > 0 \iff x > -4,\ x \neq 2$ e

  $f(x) < 0 \iff x < -4.$

- **c.** $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{x+\sqrt{6-x}}$.

  Observe que se $x \in \mathrm{Dom}(f)$ e $x \neq 3$, então $\sqrt{3-x} > 0$ e o sinal de f é o sinal de $g(x) = x + \sqrt{6-x}$.

  Vamos estudar o sinal de $g(x)$ para $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, 3)$.

  Para $x \in [0, 3)$, temos $x \geq 0$ e $\sqrt{6-x} > 0$, logo $g(x) = x + \sqrt{6-x} > 0$.

  Para $x < 0$, temos:

$$\begin{aligned} g(x) = x + \sqrt{6-x} > 0 &\iff \sqrt{6-x} > -x > 0 \\ &\iff 6 - x > (-x)^2 = x^2\,,\ x < 0 \\ &\iff x^2 + x - 6 < 0\,,\ x < 0 \\ &\iff x \in (-3, 0) \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) = x + \sqrt{6-x} < 0 &\iff 0 < \sqrt{6-x} < -x \\ &\iff 6 - x < (-x)^2 = x^2\,,\ x < 0 \\ &\iff x^2 + x - 6 > 0\,,\ x < 0 \\ &\iff x \in (-\infty, -3). \end{aligned}$$

Lembre que o gráfico da parábola $y = x^2 + x - 6$, está abaixo do eixo x entre as raízes -3 e 2.

  Concluímos, assim que:

$$\begin{array}{lll} f(x) > 0, & \text{se} & x \in (-3, 0) \cup [0, 3) = (-3, 3) \quad \text{e} \\ f(x) < 0, & \text{se} & x \in (-\infty, -3). \end{array}$$

- **d.** $f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$.

Veja o estudo do sinal nas tabelas.

	$x < -\frac{5}{2}$	$x = -\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2} < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x + 5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{2x+5}$	$+$	$\star$	$-$	0	$+$

- **f.** $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{x-1}{x+1}$

	$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	$\star$	$-$	0	$+$

- **l.** $f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x+2}$.

  Já foi observado que o discriminante do polinômio do denominador é negativo, portanto esse polinômio tem valores sempre positivos e o sinal de f é o mesmo de $x-5$. Logo,

  $f(x) > 0 \iff x > 5$ e

  $f(x) < 0 \iff x < 5$.

- **n.** $f(x) = \sqrt{\frac{1}{4x^2-1}} - \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$.

  $f(x) < 0 \iff 0 < \sqrt{\frac{1}{4x^2-1}} < \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$

  $\iff 0 < \frac{1}{4x^2-1} < \frac{1}{1-x^2}$

  $\iff 0 < 1 - x^2 < 4x^2 - 1$

  $\iff x^2 < 1 \quad \text{e} \quad 5x^2 > 2$

  $\iff |x| < 1$ e $x > \sqrt{\frac{2}{5}}$

  $\iff x \in (-1, -\sqrt{\frac{2}{5}}) \cup (\sqrt{\frac{2}{5}}, 1)$.

  Para $x \in (-\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2}{5}})$ temos que $f(x) > 0$.

Lembre que :

$0 < a < b$
se, e somente se,
$0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Exercício 4

a. $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

Faça um deslocamento de 2 unidades à direita, horizontalmente, do gráfico de $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.

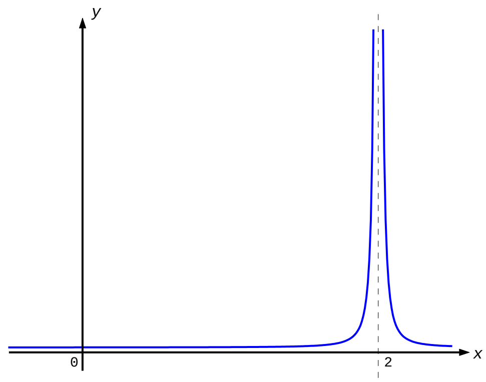


Fig. 25: $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

b. $f(x) = |x^2 - 2x + 1| = |(x-1)^2| = (x-1)^2$.

Faça um deslocamento de 1 unidade à direita, horizontalmente, do gráfico de $g(x) = x^2$. Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

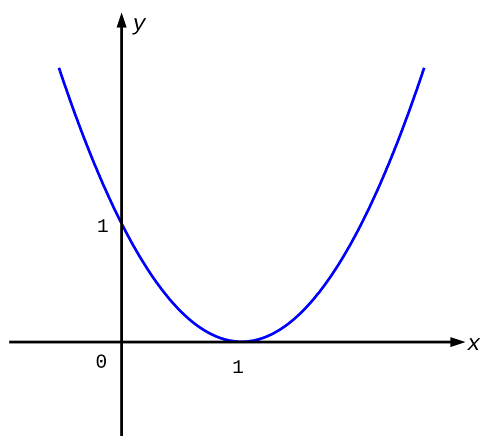


Fig. 26: $f(x) = (x-1)^2$.

c. $f(x) = (x+1)^2 + 1$.

Faça um deslocamento de 1 unidade à esquerda, horizontalmente, do gráfico de $g(x) = x^2$, obtendo o gráfico de $h(x) = (x+1)^2$.

Faça um deslocamento de 1 unidade para baixo, verticalmente, do gráfico de $h(x)$ para, finalmente, obter o gráfico de $h(x) + 1 = f(x)$.

Temos $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

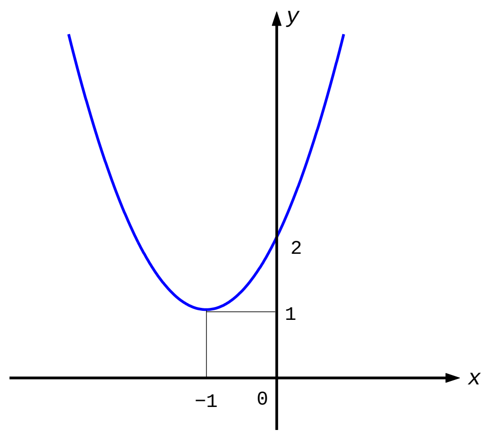


Fig. 27: $f(x) = (x+1)^2 + 1$.

d. $f(x) = |x^2 - 2x| = |(x-1)^2 - 1|$.

Faça um deslocamento de 1 unidade à direita, horizontalmente, do gráfico de $g(x) = x^2$, obtendo o gráfico de $h(x) = (x-1)^2$.

Faça um deslocamento de 1 unidade para cima, verticalmente, do gráfico de $h(x)$, para obter o gráfico de $h(x) - 1 = l(x)$.

Finalmente, para obter o gráfico de $f(x) = |l(x)|$, faça a simetria, com respeito ao eixo x, dos pontos do gráfico de $l(x)$ abaixo do eixo x e deixe fixos os pontos do gráfico de $l(x)$ acima do eixo x.

Temos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

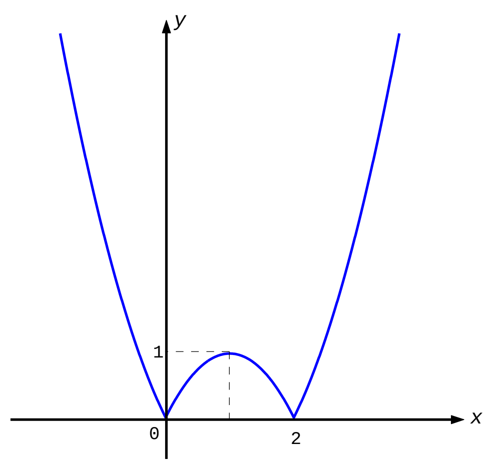


Fig. 28: $f(x) = |x^2 - 2x| = |(x-1)^2 - 1|$.

e. $f(x) = |x-2| + 1$.

Faça um deslocamento de 2 unidades à direita, horizontalmente, do gráfico de $g(x) = |x|$, obtendo o gráfico de $h(x) = |x-2|$.

Faça um deslocamento de 1 unidade para baixo, verticalmente, do gráfico de $h(x)$, para obter o gráfico de $h(x) + 1 = f(x)$.

Temos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

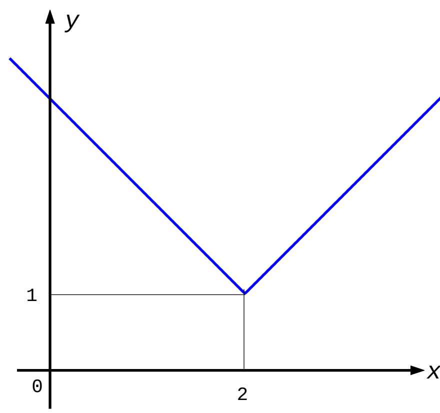


Fig. 29: $f(x) = |x-2| + 1$.

f. $f(x) = \sqrt{|x-2|} + 1$.

Faça um deslocamento de 2 unidades à direita, horizontalmente, do gráfico de $g(x) = \sqrt{|x|}$, obtendo o gráfico de $h(x) = \sqrt{|x-2|}$.

Faça um deslocamento de 1 unidade para baixo, verticalmente, do gráfico de $h(x)$, para obter o gráfico de $h(x) + 1 = f(x)$.

Temos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

A função $g(x) = \sqrt{|x|}$ é uma função par. Portanto , o seu gráfico é simétrico com respeito ao eixo y. Esboçamos apenas a parte do seu gráfico com $x \geq 0$ e tomamos a simetia com respeito ao eixo y. Observe que $g(x) = \sqrt{x}$,   se $x \geq 0$.

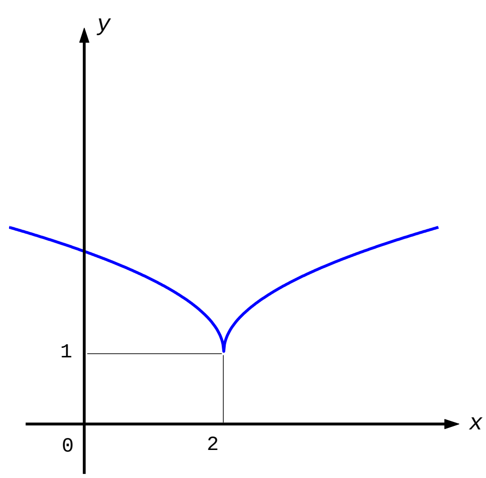


Fig. 30: $f(x) = \sqrt{|x-2|} + 1$.

g. $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$.

Faça um deslocamento de 1 unidade à esquerda, horizontalmente, do gráfico de $g(x) = \sqrt[3]{x}$, obtendo o gráfico de $h(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

Faça um deslocamento de 1 unidade para cima, verticalmente, do gráfico de $h(x)$, para obter o gráfico de $h(x) - 1 = f(x)$.

Temos $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

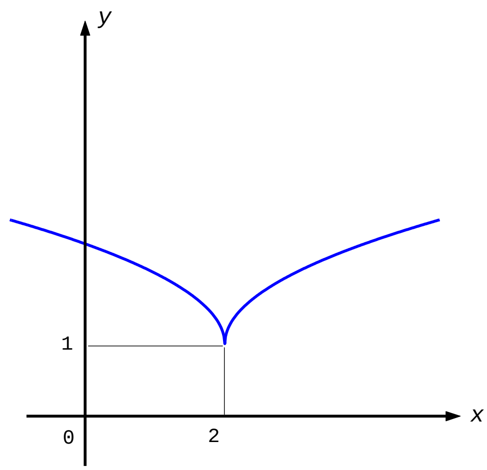


Fig. 31: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$.

A operação de composição

Exercício 1

$g(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x$ e $g(2) = (f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(4) = 18$.

Exercício 2

$\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{\,0\,\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ e

$\text{Dom}(g \circ f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0\,\} = (0, \infty)$.

Exercício 3

$a = 10$.

Exercício 4

a.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	-1	2	3	-2	0	3	-1	1
$g(x)$	0	0	1	-1	2	-2	-3	4	-1
$(g \circ f)(x)$	-1	-1	-3	-1	1	2	4	-1	-2
$(f \circ g)(x)$	-2	-2	0	3	3	2	-1	1	3
$(f \circ f)(x)$	1	3	3	-1	2	-2	-1	3	0
$(f \circ (g \circ g))(x)$	3	3	2	3	-1	0	-2	3	3

b.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	-2	2	2	-3	-4	-4	-4	-3
$g(x)$	1	0	0	-2	-1	1	-1	3	-2
$(f \circ g)(x)$	-4	-3	-3	2	2	-4	2	-4	2
$(g \circ f)(x)$	3	0	-1	-1	0	1	1	1	0
$(f \circ f)(x)$	-4	2	-4	-4	-2	3	3	3	-2
$(g \circ g \circ g)(x)$	1	-2	-2	-1	0	1	0	3	-1
$(f \circ g \circ f \circ g)(x)$	-4	-3	-3	2	2	-4	2	-4	2

Exercício 5

a. $\text{Dom}(f \circ g \circ h) = \mathbb{R} - \{\,-1, 1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}\,\}$

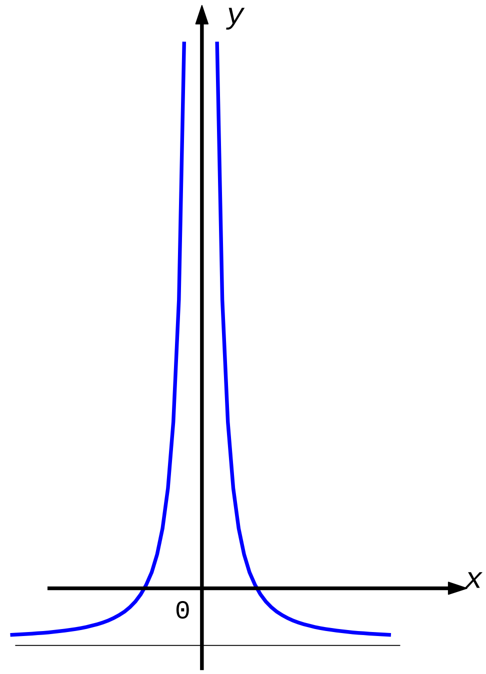
$$= (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty).$$

Temos $f(g(h(x))) = \dfrac{1}{2 - x^2}$, com $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Atenção!

b. $\text{Dom}(h \circ g) = \mathbb{R} - \{\,0\,\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Temos $h(g(x)) = \dfrac{1}{x^2} - 1 = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$.

Compare o seu desenho com o gráfico dado a seguir, feito com o software MATLAB.



Exercício 6

a. $F(x) = \sqrt{3x - x^2}$, $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 3x - x^2$.

b. $F(x) = \sqrt[3]{5 - \dfrac{2}{x+1}}$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e $f(x) = 5 - \dfrac{2}{x+1}$.

c. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f(x) = \sqrt{x-3}$.

d. $F(x) = \dfrac{x-1}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$, $g(x) = 1 - \dfrac{2}{x}$ e $f(x) = x + 1$.

Exercício 7

a . $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $0 \leq x \leq 2$

$$\text{Im}(f) = \{\, y = \sqrt{4 - x^2} \mid 0 \leq x \leq 2 \,\}$$
$$\iff \{\, y \geq 0 \mid y^2 = 4 - x^2 \text{ e } 0 \leq x \leq 2 \,\}$$
$$\iff \{\, y \geq 0 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ e } 0 \leq x \leq 2 \,\}.$$

Essa última equação é a parte do círculo de raio 2, centrado na origem, acima do eixo y. Fazendo o desenho do círculo, vemos que $\text{Im}(f) = [0, 2]$.

b. $f(f(x)) = f(\sqrt{4 - x^2}) = \sqrt{4 - (\sqrt{4 - x^2})^2} = \sqrt{4 - (4 - x^2)} =$

$$= \sqrt{x^2} = |x|,\ 0 \le x \le 2 \Longleftrightarrow f(f(x)) = x, 0 \le x \le 2.$$

Exercício 8

Sejam $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 2x - 1$ e $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

a. $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(\sqrt[3]{x})) = f(2\sqrt[3]{x} - 1) = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x} - 1}$.

b. $(f \circ h \circ g)(x) = f(h(g(x))) = f(h(2x-1)) = f(\sqrt[3]{2x-1}) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$.

c. $(h \circ f \circ g)(x) = h(f(2x-1)) = h(\dfrac{1}{2x-1}) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2x-1}}$.

Observe que $h \circ f = f \circ h$. Compare as funções dos itens **b** e **c**.

Exercício 9

a. $f(x) = |x-3|$ e $g(x) = 2x+3$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

$\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $(f \circ g)(x) = f(2x+3) = |(2x+3) - 3| = |2x|$,

$\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$ e $(g \circ f)(x) = g(|x-3|) = 2|x-3| + 3$.

b. $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$ e $g(x) = \dfrac{x+3}{x}$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ e $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \dfrac{x+3}{x} \neq 2\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$ e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{x+3}{x}) = \frac{\frac{x+3}{x}}{\frac{x+3}{x} - 2} = \frac{x+3}{x}\,\frac{x}{x+3-2x} = \frac{x+3}{3-x}$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} - \{2\} \mid \dfrac{x}{x-2} \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$ e

$$(g \circ f)(x) = g(\frac{x}{x-2}) = \frac{\frac{x}{x-2} + 3}{\frac{x}{x-2}} = \frac{x + 3(x-2)}{x-2}\,\frac{x-2}{x} = \frac{4x-6}{x}.$$

c. $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{1\}$.

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} - \{1\} \mid \dfrac{1}{x^3+1} \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} - \{1\}$ e

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{1}{x^3+1}) = (\frac{1}{x^3+1})^3 - 1 = \frac{1}{(x^3+1)^3} - 1 =$$

$$= \frac{1 - (x^3+1)^3}{x^3+1} = \frac{-x^9 - 3x^6 - 3x^3}{x^3+1}.$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 \neq -1\} = \mathbb{R} - \{0\}$ e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3-1) = \frac{1}{(x^3-1)^3+1} = \frac{1}{x^9+3x^6+3x^3}$$

d. $f(x) = \sqrt{x+1}$ e $g(x) = x^4 - 1$.

$\mathrm{Dom}(f) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x+1 \geq 0 \,\} = [-1, \infty)$ e $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

$\mathrm{Dom}(f \circ g) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 1 \geq -1 \,\} = \mathbb{R}$ e

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^4-1) = \sqrt{(x^4-1)+1} = \sqrt{x^4} = x^2$.

$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{\, x \in [-1, \infty) \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \,\} = [-1, \infty)$ e

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+1}) = (\sqrt{x+1})^4 - 1 = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x$.

e. $f(x) = 2x^3 - 1$ e $g(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2}}$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right) = 2\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}\right)^3 - 1 = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x^3-1) = \sqrt[3]{\frac{(2x^3-1)+1}{2}} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

f. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 4$.

$\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Dom}(g \circ f) = [0, \infty)$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4) = \sqrt{4} = 2$ e $(g \circ f)(x) = g(\sqrt{x}) = 4$.

g. $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ e $g(x) = 1 - x^3$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\mathrm{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$ e $\mathrm{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R}$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1-x^3) = \sqrt[3]{1-(1-x^3)} = \sqrt[3]{x^3} = x$ e

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{1-x}) = 1 - (\sqrt[3]{1-x})^3 = 1 - (1-x) = x$.

Exercício 10

$f(x) = x$, $g(x) = -x$ e $h(x) = x^2$.

a. $(h \circ (f+g))(x) = h(f(x) + g(x)) = h(0) = 0$.

b. $(h \circ f + h \circ g)(x) = h(f(x)) + h(g(x)) = x^2 + (-x)^2 = 2x^2$.

c. $h \circ (f+g) \neq h \circ f + h \circ g$

Exercício 11

Tome $f(x) = 2$, $g(x) = 1$ e $h(x) = -1$, com $x \in \mathbb{R}$. Então, $f \circ f = f$, $g \circ g = g$ e $h \circ h = h$. De fato, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2 = f(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$, mostrando que $f \circ f = f$.

Exercício 12

a. A igualdade $\dfrac{1}{f\circ g} = f\circ \dfrac{1}{g}$ é falsa.

Tome $f(x)=x^2-1$ e $g(x)=2x$. Então,

$$(\frac{1}{f\circ g})(x) = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{f(2x)} = \frac{1}{4x^2-1} \quad \text{e}$$

$$(f\circ \frac{1}{g})(x) = f(\frac{1}{g(x)}) = (\frac{1}{2x})^2 - 1 = \frac{1}{4x^2} - 1 = \frac{1-4x^2}{4x^2}.$$

b. A igualdade $\dfrac{1}{f\circ g} = \dfrac{1}{f}\circ g$ é válida. De fato,

$$(\frac{1}{f\circ g})(x) = \frac{1}{f(g(x))} = \frac{1}{f}(g(x)) = (\frac{1}{f}\circ g)(x), \text{ para cada } x\in \mathrm{Dom}(g)\ ,$$

tal que $g(x)\in \mathrm{Dom}(\frac{1}{f})$.

Funções inversíveis

Exercício 1

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	4	0	2	3	-2	-3	-4	1	-1
$f^{-1}(x)$	2	1	0	4	-3	3	-2	-1	-4

Exercício 2

a. f e g não são inversas, pois $f(g(x)) = 9x - 2$ implica $f \circ g \neq I$.

b. f e g são inversas uma da outra, pois $f \circ g = g \circ f = I$. Verifique!

c. f e g não são inversas, pois $f(g(x)) = (\sqrt[4]{x}+4)^4 - 4 \neq x$ implica $f \circ g \neq I$.

Exercício 3

a. A função não é injetora, pois as retas horizontais $y = 4$ com $a > 0$ intersectam o gráfico em dois pontos.

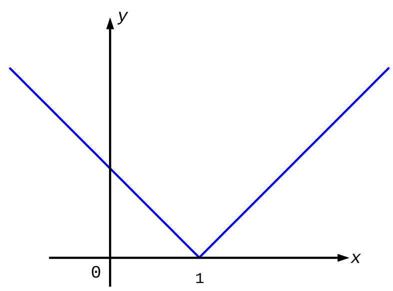


Fig. 32: $f(x) = |x-1|$.

b. A função não é injetora, pois as retas horizontais $y = a$ com $a > 1$ intersectam o gráfico em dois pontos.

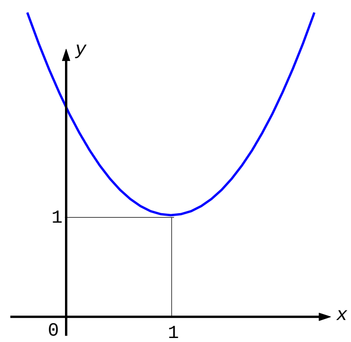


Fig. 33: $f(x) = x^2 - 2x + 2$.

c. A função é injetora, pois se traçamos retas horizontais , observamos que essas retas intersectam o gráfico de f em no máximo um ponto.

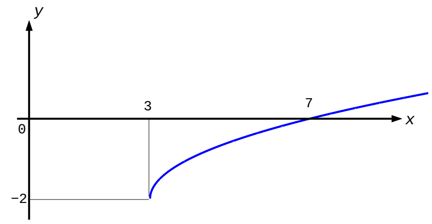


Fig. 34: $f(x) = \sqrt{x-3} - 2$.

Exercício 4

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4x}}{2} \ , \ x \geq -\frac{1}{4}$$

Exercício 5

A função dada não é inversível, pois não é injetora. O gráfico desta função está mostrado na figura a seguir.

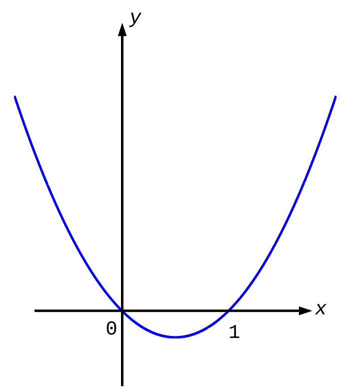


Fig. 35: $f(x) = x^2 - x$.

A função do exercício anterior tem inversa, pois só consideramos $x \geq \frac{1}{2}$ e, para esse caso, a função é bijetora. Graficamente, só consideramos metade da parábola.

Exercício 6

a. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{3}}$.

b. $f^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x} - 1}$, $0 < x \leq 5$.

c. $f^{-1}(x) = \dfrac{x^5 - 2}{4}$.

d. $f^{-1}(x) = \begin{cases} 1+\sqrt{x-1} \ , \ x \geq 1 \\ \dfrac{x+3}{2} \ , \ x < -1 \end{cases}$

e. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{x} \ , \ x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} \ , \ -1 < x < 0 \\ 2x+1 \ , \ x < -1 \end{cases}$

f. $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x} + 2 \ , x \neq 0$

g. $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1-x} \ , x \neq 1$

h. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}} \ , x \neq 0$

i. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x^3} + 2 \ , x \neq 0$

Exercício 7

a.

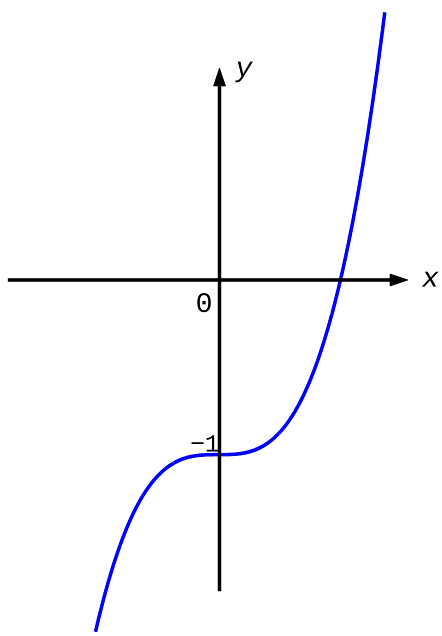


Fig. 36: $f(x) = 3x^3 - 1$.

b.

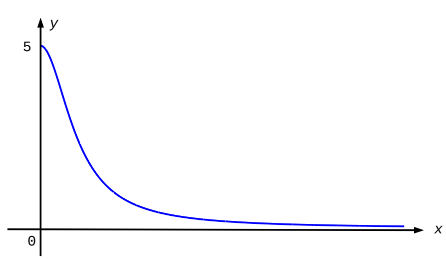


Fig. 37: $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$, $x \geq 0$.

c.

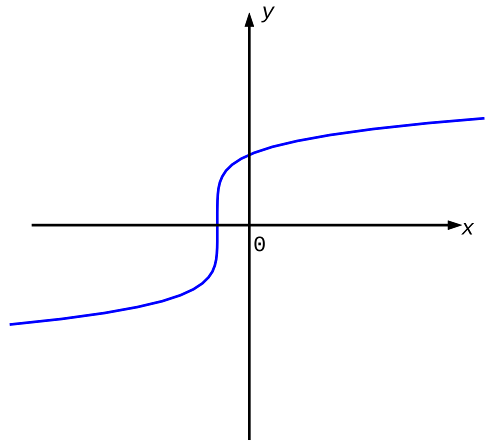
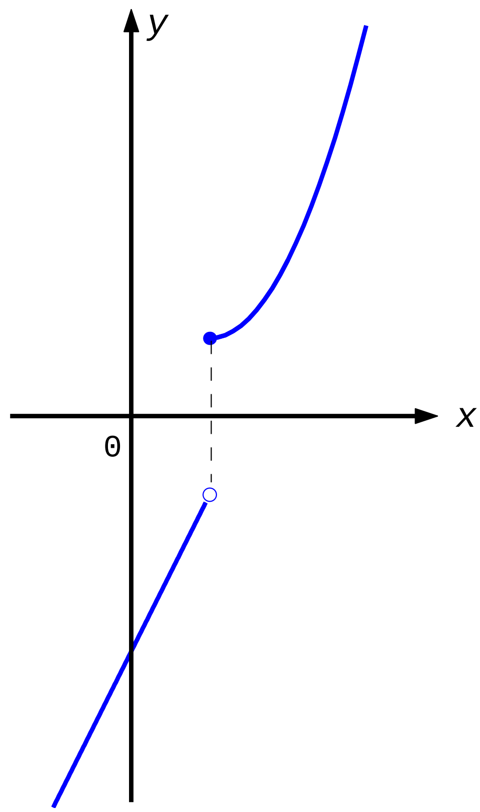
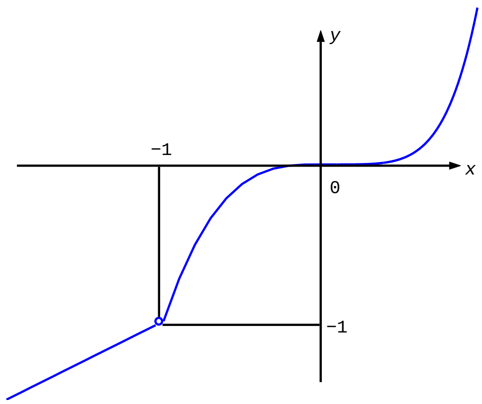


Fig. 38: $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$.

d. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2+1\,, & x \geq 1 \\ 2x-3\,, & x < 1 \end{cases}$



e. $f(x) = \begin{cases} x^5\,, & x \geq 0 \\ x^3\,, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\,, & x < -1 \end{cases}$



f.

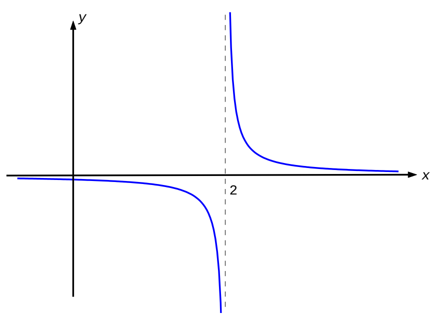


Fig. 39: $f(x) = \frac{2}{x-2}$.

g.

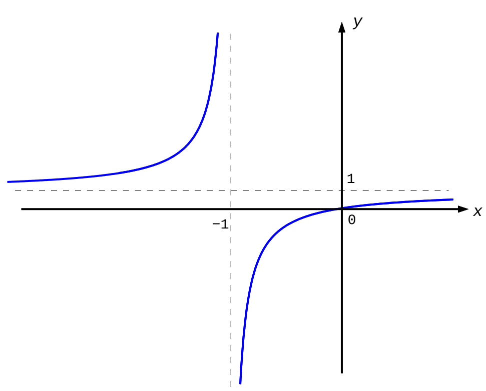


Fig. 40: $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

h.

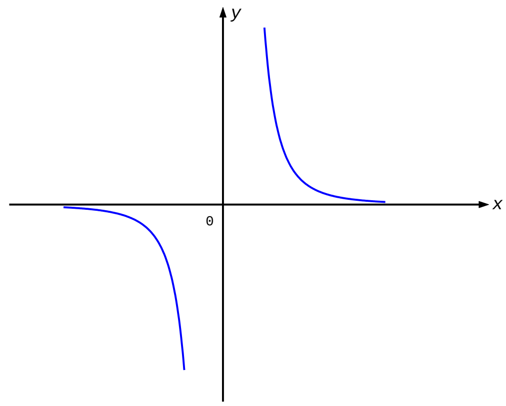


Fig. 41: $f(x) = \frac{1}{x^5}$.

i.

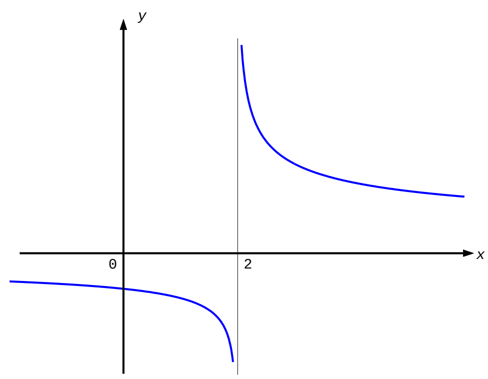


Fig. 42: $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$.

Exercício 8

$$a = 2$$

Exercício 9

a.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad acx_1x_2 + bcx_2 + adx_1 + bd = acx_1x_2 + bcx_1 + adx_2 + bd \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (ad - bc)x_1 = (ad - bc)x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ pois } ad - bc \neq 0.$$

b. $f^{-1}(x) = \dfrac{-dx + b}{cx - a}$

c. $\begin{cases} ac + cd = 0 \\ d^2 - a^2 = 0 \\ ab + bd = 0 \end{cases}$

Exercício 10

a. $f^{-1}(x) = \dfrac{-x-1}{x-1}$

b. Desculpem a nossa falha. Como $(f \circ f \circ f)(x) = \dfrac{-x+2}{2x-3}$ temos que $f \circ f \circ f \neq I$.

c. $(f \circ f)(x) = \dfrac{-x-3}{x-1}$ e $(f \circ f)^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{x+1} = f(x)$.

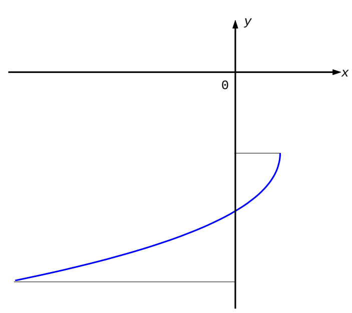
d. $f(x) = \dfrac{2(2x+1)}{2x+1} = 2$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Logo, f não é inversível.

Exercício 11

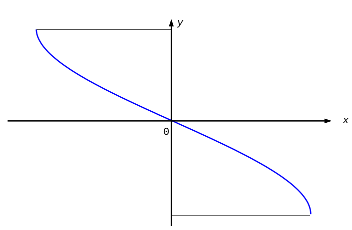
a. Considerando o critério das retas horizontais, observamos que há retas horizontais intersectando o gráfico de f em mais de um ponto.

b. Os intervalos considerados são: $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{2}]$

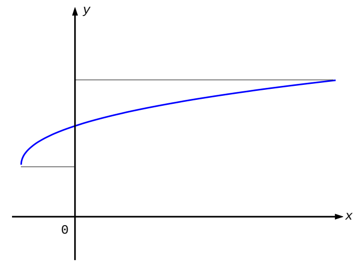
Primeiro intervalo: $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. Esse intervalo é a imagem da inversa.



Segundo intervalo: $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Esse intervalo é a imagem da inversa.



Terceiro intervalo: $[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2})$. Esse intervalo é a imagem da inversa.



Exercício 12

O gráfico da função deve ser simétrico em relação à reta $y = x$.

Exercício 13

a. Verdadeiro. O gráfico de toda função par é simétrico em relação ao eixo y. Logo, há retas paralelas ao eixo x intersectando o seu gráfico da função em mais de um ponto.

b. Falso. Veja o exercício 11. A função é ímpar e não é inversível.

c. Verdadeiro. Veja o Exercício 11. A função é ímpar e não é crescente.

d. Verdadeiro. Se as funções pares fossem crescentes ou decrescentes, elas seriam injetoras e, portanto, inversíveis.

Exercício 14

Temos,

$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow f(g(x_1)) = f(g(x_2))$.

Como f é injetora, $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow g(x_1) = g(x_2)$.

Como g é injetora, $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$. Logo, $f \circ g$ é injetora.

Além disso,

$$(f \circ g)^{-1}(x) = y \Rightarrow x = (f \circ g)(y) \Rightarrow f[g(y)] = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(y) = f^{-1}(x) \Rightarrow y = g^{-1}(f^{-1}(x)) \Rightarrow y = (g^{-1} \circ f^{-1})(x).$$

Exercício 15

a. Falso. Considere $f(x) = x$ e $g(x) = -x$. Temos $(f+g)(x) = x + (-x) = 0$. Esta função não é injetora.

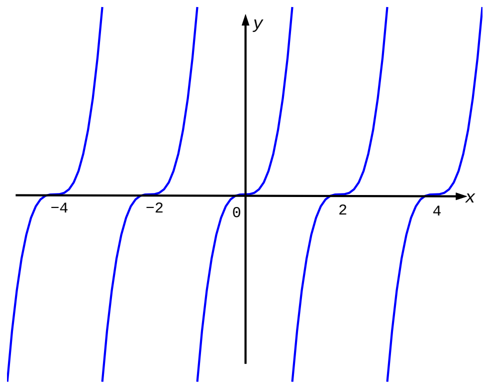
b. Falso. Considere $f(x) = x$, $x \neq 0$ e $g(x) = \frac{1}{x}$. Temos, $(f \cdot g)(x) = x \cdot \frac{1}{x} = 1, \ \ x \neq 0$. Esta função não é inversível.

Funções Trigonométricas

Exercício 1

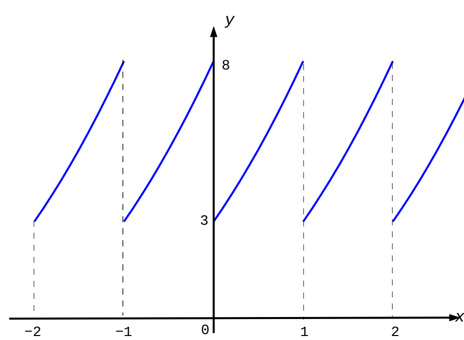
a. Função $F(x) = f(x-2n) = (x-2n)^3$, $x \in [-1+2n\,,\,1+2n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Domínio $= \mathbb{R}$, Período $= 2$, Amplitude $= 1$.



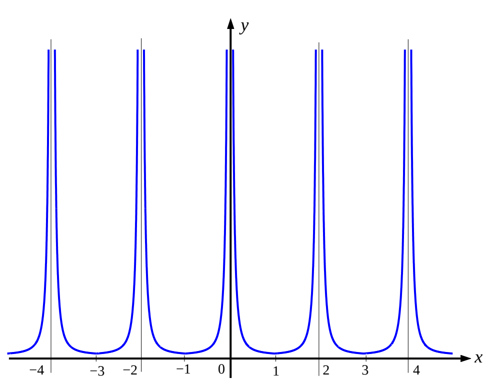
b. Função $F(x) = f(x-n) = (x-n)^2 - 1$, $x \in (2+n\,,\,3+n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Domínio $= \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, Período $= 1$, Amplitude $= \frac{5}{2}$.



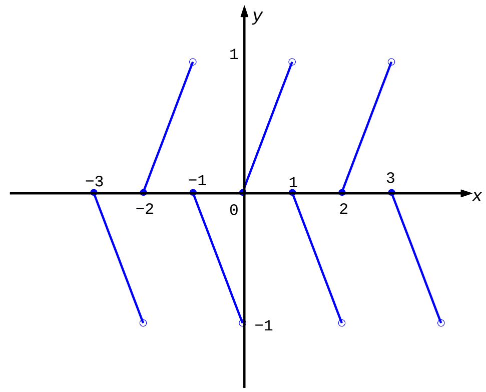
c. Função $F(x) = f(x-2n) = \frac{1}{(x-2n)^2}$, $x \in [-1+2n\,,\,2n) \cup (2n\,,\,1+2n]$.

Domínio $= \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, Período $= 2$.



d. Função $F(x) = f(x - 2n)$, $x \in [2n\,, 2 + 2n)$.

Domínio $= \mathbb{R}$, Período $= 2$, , Amplitude $= 1$.

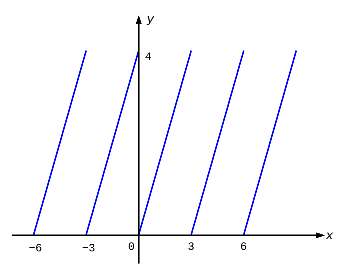


Exercício 2

a. $F(x) = f(x - 3n) = \dfrac{4}{3}(x - 3n)$, $x \in [3n\,, 3 + 3n)$

b. Período: 3, Freqüência: $\dfrac{1}{3}$, Amplitude: 2

c.



d. $F(1) = \dfrac{4}{3}$, $F(4) = \dfrac{4}{3}$, $F(-2) = \dfrac{4}{3}$, $F(6) = 0$, $F\left(\dfrac{23}{3}\right) = \dfrac{20}{9}$ e $F\left(\dfrac{97}{2}\right) = \dfrac{2}{3}$.

Exercício 3

a. $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

b. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ e $\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$ e $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

d. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{21\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $\cos\left(\dfrac{21\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Exercício 4

Consideremos M o comprimento do ponteiro dos minutos e x o ângulo em radianos que esse ponteiro faz com a vertical. A função F que descreve o deslocamento do ponteiro que marca os minutos a partir da vertical é dada por $F(x) = M \operatorname{sen} x$. O período é igual a 3600 segundos, a freqüência é de $\dfrac{1}{3600}\, Hz$, a amplitude é de $\dfrac{M}{2}$.

Para o ponteiro dos segundos a função é $f(x) = S \operatorname{sen} x$, onde S é o comprimento do ponteiro dos segundos. Observe que $T = 60$ segundos, $\omega = \frac{1}{60}\, Hz$ e a amplitude é $\frac{S}{2}$.

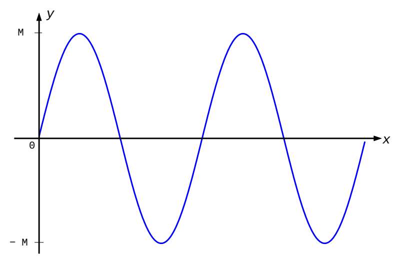


Fig. 43: $F(x) = M \operatorname{sen} x$.

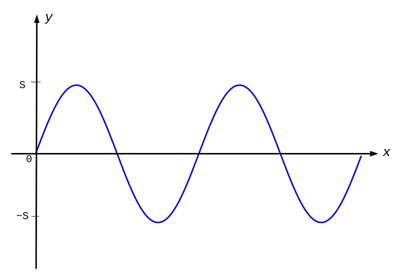


Fig. 44: $f(x) = S \operatorname{sen} x$.

O ponteiro dos segundos gira a uma velocidade 60 vezes maior que a do ponteiro dos minutos. No gráfico em função do ângulo x não vemos essa propriedade, pois as funções diferem apenas na amplitude. Precisamos de escrever o ângulo x como função do tempo dado em segundos, isto é, $x = 2\pi\omega t$.

Para o ponteiro dos minutos, obtemos: $F(t) = M \operatorname{sen}(\frac{2\pi t}{3600})$.

Para o ponteiro dos segundos, temos: $f(t) = S \operatorname{sen}(\frac{2\pi t}{60})$.

Veja os gráficos dessas funções no intervalo de tempo de 3600 segundos, que corresponde a um ciclo do ponteiro dos minutos (1 hora) e 60 ciclos do ponteiro dos segundos.

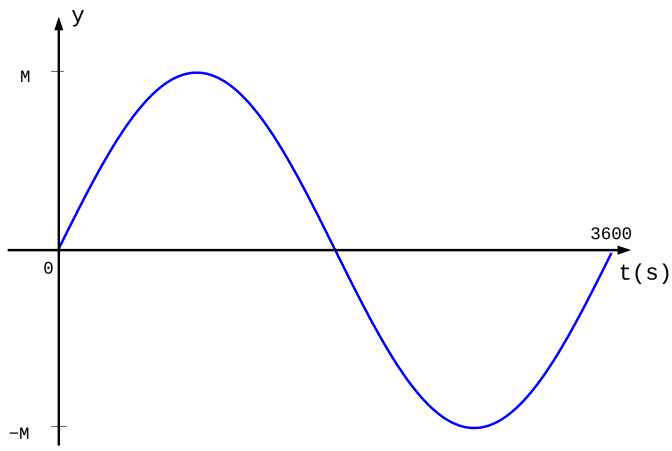


Fig. 45: $F(t) = M \operatorname{sen}(\frac{2\pi t}{3600})$.

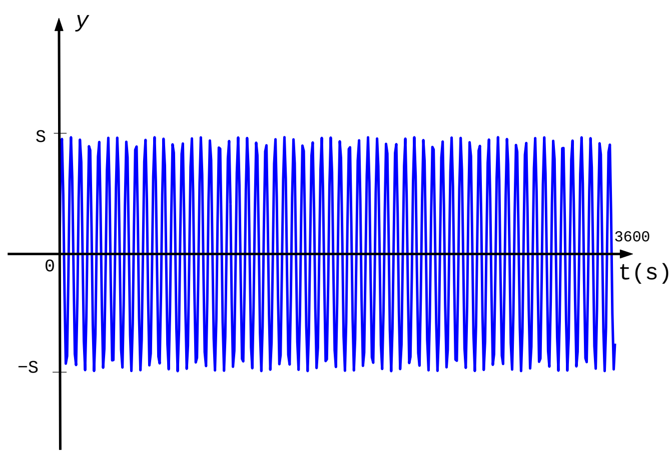
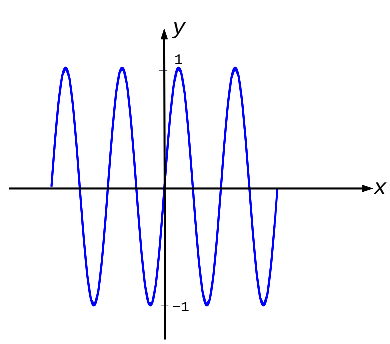


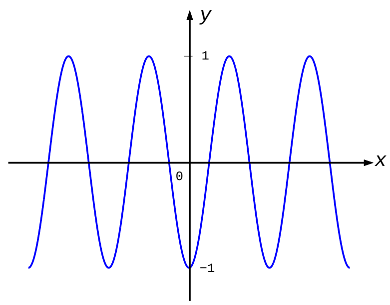
Fig. 46: $f(t) = S \operatorname{sen}(\frac{2\pi t}{60})$.

Exercício 5

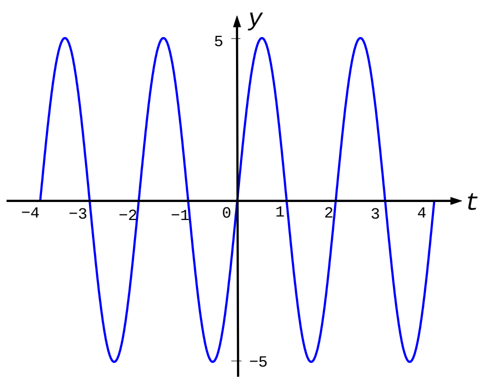
a. Período $= \dfrac{\pi}{2}$, Amplitude $= 1$, Freqüência $= \dfrac{2}{\pi}\, Hz$, Ângulo de fase $= 0$.



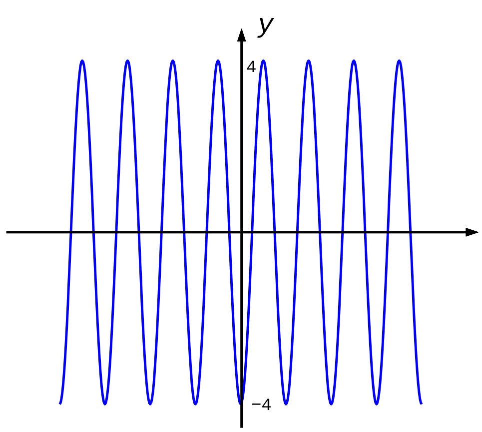
b. Período $= 2\pi$, Amplitude $= 1$, Freqüência $= \dfrac{1}{2\pi}\,Hz$, Ângulo de fase $= \pi$.



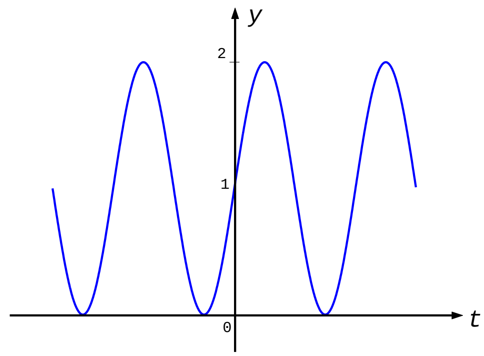
c. Período $= 2$, Amplitude $= 5$, Freqüência $= \dfrac{1}{2}\,Hz$, Ângulo de fase $= 0$.



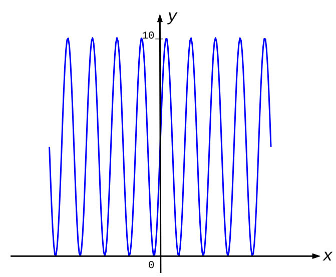
d. Período $= \dfrac{1}{2}$, Amplitude $= 4$, Freqüência $= 2\,Hz$, Ângulo de fase $= -\pi$.



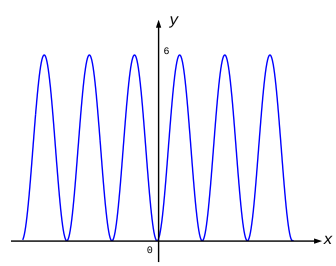
e. Período $= \dfrac{2\pi}{3}$, Amplitude $= 1$, Freqüência $= \dfrac{3}{2\pi}\,Hz$, Ângulo de fase $= 0$.



f. Período $= \dfrac{2}{9}$, Amplitude $= 5$, Freqüência $= \dfrac{9}{2}\,Hz$, Ângulo de fase $= \frac{1}{3}$.



g. Período $= \dfrac{2\pi}{3}$, Amplitude $= 3$, Freqüência $= \dfrac{3}{2\pi}\,Hz$, Ângulo de fase $= 3$.



Exercício 6

Na definição 14 do texto, consideramos um ponto P_θ de coordenadas $(\cos\theta\,,\ \operatorname{sen}\theta)$, para cada número real $\theta \in [0, 2\pi)$, pertencente a um círculo centrado na origem e de raio 1. A equação desse círculo é dada por $x^2+y^2 = 1$.

Assim, as coordenadas de P_θ satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$ e, portanto, $(\cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2 = 1$, onde θ é o comprimento do arco de $A = (1, 0)$ até P_θ, medido no sentido anti-horário.

Depois, o domínio de ambas as funções foi ampliado, de modo a construir funções periódicas. Geometricamente, passamos apenas a dar mais voltas no círculo, no sentido horário consideramos θ negativo e no sentido anti-horário, θ positivo, parando no mesmo ponto do círculo.

Exercício 7

$$\text{sen } x = 0 \Longleftrightarrow x = n\pi \ \ , \ \ n \in \mathbb{Z} \ .$$

$$\cos x = 0 \Longleftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \ \ , \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{sen } x = \cos x \Longleftrightarrow x = \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right) \ \ , \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Essas funções não têm zeros em comum.

Exercício 8

$$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2} \ \ , \ \ n \in \mathbb{Z}$$
$$\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$$

Exercício 9

Copie o gráfico das funções seno e cosseno, usando um papel transparente e faça o experimento descrito em cada item.

a. Deslocando $\frac{\pi}{2}$ unidades à direita o gráfico da função $f(x) = \cos x$, obtemos o gráfico da função $g(x) = \text{sen } x$.

b. Deslocando $\frac{\pi}{2}$ unidades à esquerda o gráfico da função $f(x) = \cos x$, obtemos o gráfico da função $g(x) = -\text{sen } x$.

c. Deslocando $\frac{\pi}{2}$ unidades à direita o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, obtemos a simetria com respeito ao eixo x do gráfico da função $g(x) = \cos x$.

d. Deslocando $\frac{\pi}{2}$ unidades à esquerda o gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$, obtemos o gráfico da função $g(x) = \cos x$.

Exercício 10

Para a função seno, podemos considerar qualquer intervalo na forma

$$\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}, (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] \ \ , \ \ n \in \mathbb{Z}$$

Para a função cosseno, podemos considerar qualquer intervalo na forma

$$[n\pi \, , (n+1)\pi] \, , \ n \in \mathbb{Z}$$

Exercício 11

$f = g \circ h \circ I \circ J$, sendo

$$J(t) = t - \phi \ , \ I(t) = \omega\, t \ , \ h(t) = sen\, 2\pi t \ , \ g(t) = At\,.$$

Funções trigonométricas - continuação

Exercício 1

a. $A = -2$, $B = 3 \Longrightarrow C = \sqrt{13}$.

$y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{13}\,\text{sen}(2t - \phi)$, sendo $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, tal que tg $\phi = \frac{2}{3}$.

b. $A = -1$, $B = -4 \Longrightarrow C = \sqrt{17}$.

$y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{17}\,\text{sen}(\pi t - \phi)$, sendo $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, tal que $\text{tg}\,\phi = -\frac{1}{4}$.

c. $A = -2$, $B = 1 \Longrightarrow C = \sqrt{5}$.

$y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{5}\,\text{sen}\left(2t + \dfrac{\pi}{3} - \phi\right)$, sendo $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, tal que $\text{tg}\,\phi = 2$.

d. Primeiramente, reescrevemos $y_1(t) = 2\cos\frac{t}{2}$ e $y_2(t) = 3\,\text{sen}\,\frac{t}{2}$. Agora, podemos calcular A e B.

$A = 2$, $B = 3 \Longrightarrow C = \sqrt{13}$.

$y_1(t) + y_2(t) = \sqrt{13}\,\text{sen}\left(\dfrac{t}{2} - \phi\right)$, sendo $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, tal que $\text{tg}\,\phi = -\frac{2}{3}$.

Lembre que:
$A\cos at + B\,\text{sen}\,at = C\,\text{sen}(at - \phi)$, onde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\text{tg}\,\phi = -\frac{A}{B}$ e $\phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Exercício 2

Para obtermos uma onda cosseno, procuramos $C, \psi \in \mathbb{R}$, com $C \geq 0$ e $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, tais que:

$$A\cos at + B\,\text{sen}\,at = C\cos(at - \psi) = C(\cos\psi\cos at + \text{sen}\,\psi\,\text{sen}\,at) =$$
$$= (C\cos\psi)\cos at + (C\,\text{sen}\,\psi)\,\text{sen}\,at).$$

Portanto, $A = C\cos\psi$, $B = C\,\text{sen}\,\psi$, $C^2 = A^2 + B^2$, $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ e $\text{tg}\,\psi = \frac{B}{A}$.

a. $\sqrt{13}\cos(2t - \psi)$, sendo $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, tal que $\text{tg}\,\psi = -\frac{3}{2}$.

b. $\sqrt{17}\cos(\pi t - \psi)$, sendo $\psi \in (0, \frac{\pi}{2})$, tal que $\text{tg}\,\psi = 4$.

c. $\sqrt{5}\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{3} - \psi\right)$, sendo $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, tal que $\text{tg}\,\psi = -\dfrac{1}{2}$.

d. $\sqrt{13}\cos\left(\dfrac{t}{2} - \psi\right)$, sendo $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, tal que $\text{tg}\,\psi = -\dfrac{3}{2}$.

Os valores de A, B, C já foram calculados no exercício anterior. Determinamos apenas $\psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Exercício 3

a. $T = \pi\ ,\ \phi = 0$

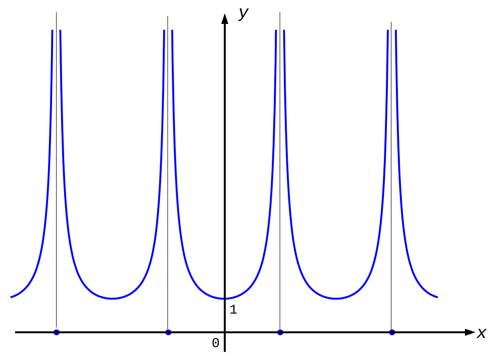


Fig. 47: $f(x) = |sec x|$.

b. $T = 4\pi\ ,\ \phi = \frac{\pi}{2}$

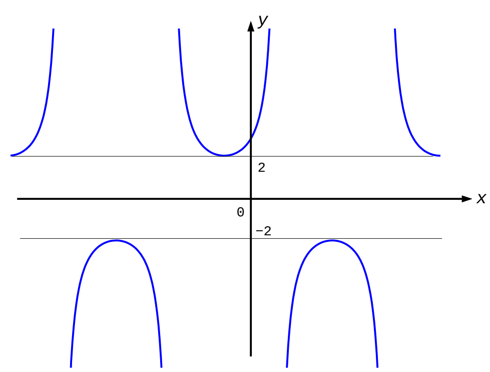


Fig. 48: $f(x) = -2\,\mathrm{cossec}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})$.

c. $T = \pi\ ,\ \phi = 0$

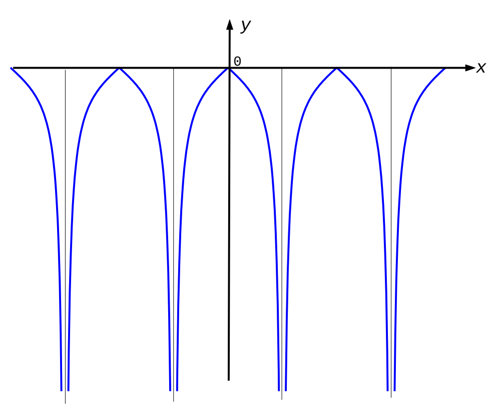


Fig. 49: $f(x) = -|\,\mathrm{tg}\, x|$.

d. $T = \frac{\pi}{2}$, $\phi = -\frac{\pi}{4}$

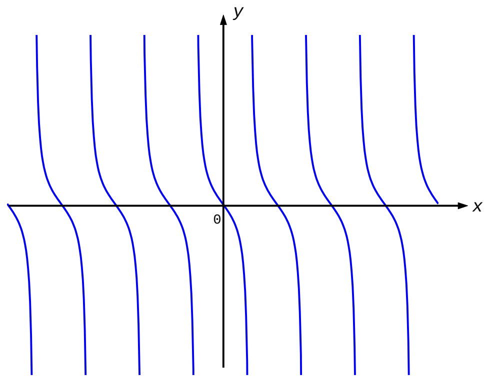


Fig. 50: $f(x) = \frac{1}{2}\,\text{cotg}\,2(x + \frac{\pi}{4})$.

e. $T = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{2}$

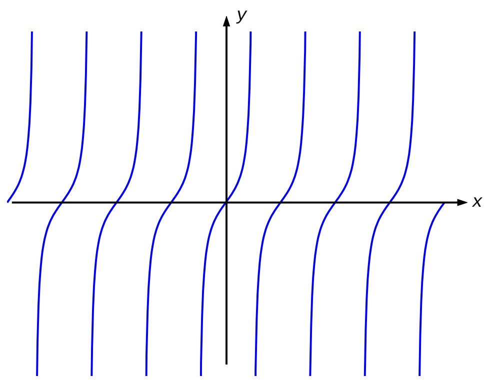


Fig. 51: $f(x) = \text{tg}\,2(x - \frac{\pi}{2})$.

f. $T = 4\pi$, $\phi = -\frac{\pi}{4}$

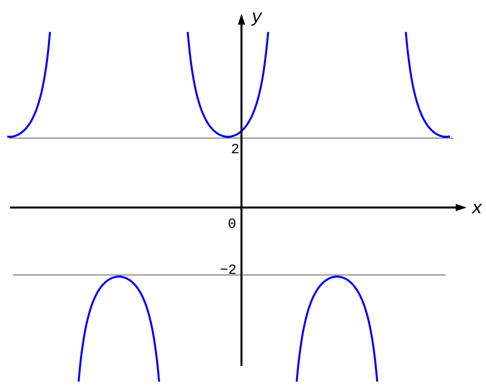


Fig. 52: $f(x) = 2\sec(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})$.

Exercício 4

É claro que, da definição de tangente e cotangente, temos a relação algébrica $g(t) = \dfrac{1}{f(t)}$. Por outro lado ambas são funções periódicas e $f(t - \frac{\pi}{2}) = g(t)$. Esta relação significa que deslocando $\frac{\pi}{2}$ unidades à direita o gráfico de f, obtemos o gráfico de g.

Exercício 5

a. $A = -1\ ,\ b = 1\ ,\ \phi = \frac{\pi}{2}$

b. $A = 1\ ,\ b = 1\ ,\ \phi = \frac{\pi}{2}$

c. $A = -1\ ,\ b = 1\ ,\ \phi = -\frac{\pi}{2}$

d. $A = 1\ ,\ b = 1\ ,\ \phi = -\frac{\pi}{2}$

e. $A = -3\ ,\ b = 3\ ,\ \phi = \frac{5\pi}{18}$

f. $A = 2\ ,\ b = -3\ ,\ \phi = -\frac{\pi}{4}$

Exercício 6

Par: $f(x) = \sec x$

Ímpares: $f(x) = \text{cossec}\, x$, $f(x) = \text{tg}\, x$, $f(x) = \text{cotg}\, x$

Exercício 7

$(f \circ g)(x) = \text{tg}^2 x$ e

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ \ n \in Z\}$.

$(g \circ f)(x) = \text{tg}(x^2)$ e

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ \ n \in \mathbb{N}\}$.

Exercício 8

$$(f \circ g)(x) = \frac{\sec\ x}{\sec\ x + 1},$$

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f \circ g) &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \in \text{Dom}(\sec)\ \text{ e }\ \sec x \neq -1 \,\} = \\ &= \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2n+1)\tfrac{\pi}{2}\ \text{ e }\ x \neq (2n+1)\pi\,, n \in \mathbb{Z} \,\}\,.\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = \sec\left(\frac{x}{x+1}\right),$$

$$\begin{aligned}\text{Dom}(g \circ f) &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\ \text{ e }\ \frac{x}{x+1} \neq (2n+1)\tfrac{\pi}{2} \,\right\} = \\ &= \left\{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\ \text{ e }\ x \neq \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2}}{1-(2n+1)\frac{\pi}{2}} \,\right\}.\end{aligned}$$

Tente visualizar no círculo trigonométrico os arcos notáveis (positicos e negativos) que têm de ser excluídos da reta real para a definição das composições.

Exercício 9

$g(x) = x^3$ e $f(x) = \operatorname{cotg} x$.

Exercício 10

a. $n\pi \leq 2x+1 < n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \frac{n\pi-1}{2} \leq x < \frac{n\pi-1}{2} + \frac{\pi}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$.

b. $f(x) = 2x+1$, $g(x) = \operatorname{tg} x$ e $h(x) = \sqrt{x}$

Exercício 11

a. $x \neq \dfrac{(2n+1)\frac{\pi}{2}+1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}-1}$ e $x \neq 1$.

b. $h(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$ e $f(x) = x^2$

Exercício 12

Devemos dividir a equação por $\cos^2 x$ e obtemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x\,,$$

com a condição $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exercício 13

a. $\operatorname{tg}(\theta_1+\theta_2) = \dfrac{\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)}{\cos(\theta_2+\theta_2)} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2\cos\theta_1}{\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2}$

Dividindo numerador e denominador por $\cos\theta_1\cos\theta_2$, obtemos

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2}{1 - \operatorname{tg}\theta_1\ \operatorname{tg}\theta_2}\,.$$

b. $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$ e $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

Exercício 14

$$\frac{1 - \operatorname{cossec} x}{\operatorname{cotg} x} = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x} \times \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x - 1}{\cos x}$$

onde $x \neq n\pi$ e $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Exercício 15

$$\frac{\operatorname{cossec} x + 1}{\operatorname{cossec} x - 1} = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x} + 1}{\frac{1}{\operatorname{sen} x} - 1} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}; \quad x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\ .$$

Por outro lado,

$$(\sec x + \operatorname{tg} x)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2 = \frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x} = \frac{(1+\operatorname{sen} x)^2}{1-\operatorname{sen}^2 x} =$$

$$= \frac{(1+\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)} = \frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}.$$

Exercício 16

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \text{ e}$$

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Lembre que:

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$,

e da relação

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

temos

$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$,

$1-\cos 2\alpha = 2\operatorname{sen}^2\alpha$.

Funções trigonométricas inversas

Exercício 1

a. $-\frac{\pi}{4}$ **b.** $\frac{\pi}{4}$ **c.** $-\frac{\pi}{6}$ **d.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **f.** $\frac{5\pi}{6}$ **g.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **h.** $\frac{\pi}{6}$

i. $\frac{5\pi}{6}$ **j.** $\frac{\pi}{4}$ **k.** $\frac{\pi}{3}$ **l.** $-\frac{\pi}{6}$

Exercício 2

a. $\frac{\sqrt{3}}{2}-2$ **b.** 3 **c.** $\frac{-2-\sqrt{3}}{8}$

d. Não tem solução. **e.** 2 **f.** Não tem solução.

A imagem da função arco seno é o intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Como $\frac{2\pi}{3} \notin \mathrm{Im}(\text{arcsen})$, a equação do item **d** não tem solução.

A equação proposta no item **f** é equivalente a $(x-1)^2 = -2$, que não tem solução no conjunto dos números reais.

Exercício 3

a. $[-1, 1]$ **b.** $\left(-\infty\,, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,, +\infty\right)$ **c.** $\mathbb{R} - \{0\}$

d. A função f não existe. Não existe valor de x para o qual seja possível calcular $f(x)$.

e. $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ **f.** $[2, 3]$ **g.** $[1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$ **h.** $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$

Funções exponencial e logaritmo

Exercício 1

- $y = \log_9 81 \Rightarrow y = 2$.
- $\log_a 8 = \frac{3}{4} \Rightarrow a = 16$.
- $\log_{49} x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{7}$.
- $\log_b(\log_b(nx)) = 1 \Rightarrow x = \dfrac{b^b}{n}$.

Exercício 2

a. $x = -2$ **b.** $x = \pm\sqrt{\log_{10} 2}$ **c.** $x = -\frac{1}{2}$

d. $x = 3$ **e.** $x = -\frac{3}{2}$ **f.** $x = \frac{\ln 100 - 5}{3}$

g. $x = \frac{1}{2}$ **h.** $x = 0$ **i.** $x = \frac{4}{3}$

j. $x = 8$ **l.** $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ **m.** $x = 11$

n. $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$, $n \in \mathbb{Z}$ **o.** $x = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

k. A equação apresentada não tem solução. Observe que:

$f(x) = \ln(x^2 + x - 2)$ tem $\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$,

$g(x) = \ln x(x-1)$ tem $\text{Dom}(g) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ e

$1 \notin \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$.

Exercício 3

a. $3x$ **b.** $\sqrt{x}$ **c.** $3\ln x + 2$ **d.** x^2

Exercício 4

$\log_2(\log_4 256) = 2$ e $\log_{\frac{3}{4}}\left(\log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{81}\right) = -1$

Exercício 5

a. $(3, +\infty)$ **b.** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ **c.** $(1, +\infty)$

d. $(1, 2) \cup (2, +\infty)$ **e.** $(1, +\infty)$ **f.** $(-1, 1)$

Exercício 6

a. $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = -1 + \log_2 x$ e $\text{Dom}(f^{-1}) = (0, +\infty)$.

b. $\text{Dom}(f) = (-1, +\infty)$; $f^{-1}(x) = 3^x - 1$ e $\text{Dom}(f^{-1}) = \mathbb{R}$.

Exercício 7

a. $f^{-1}(x) = \log_4 x$

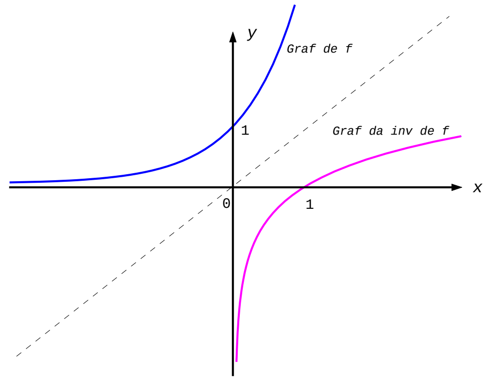


Fig. 53: $f(x) = 4^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = \log_4 x$, $x > 0$.

b. $f^{-1}(x) = \log_5 x$

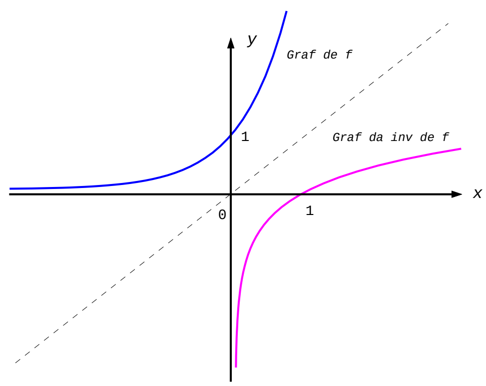


Fig. 54: $f(x) = 5^x, x \in \mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = \log_5 x$, $x > 0$.

c. $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

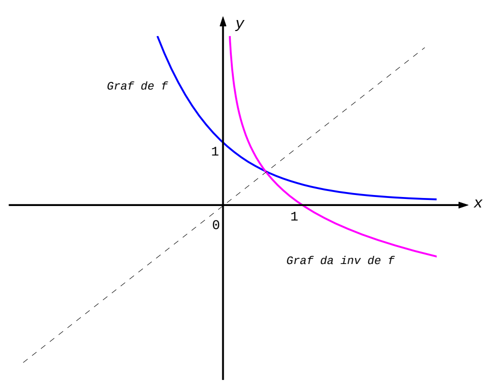


Fig. 55: $f(x) = (\frac{1}{3})^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$, $x > 0$.

d. $f^{-1}(x) = \log_{0,1} x = -\log_{10} x$.

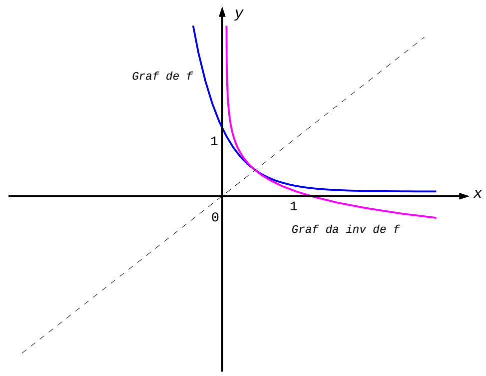


Fig. 56: $f(x) = (0,1)^x$, $x \in \mathbb{R}$ e $f^{-1}(x) = -\log_{10} x$, $x > 0$.

Exercício 8

a. Domínio $= (0, +\infty)$

Sinal de f:

- $f(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = \frac{1}{e}$
- $f(x) > 0 \iff x > \frac{1}{e}$
- $f(x) < 0 \iff x < \frac{1}{e}$

b. Domínio $= \mathbb{R}$

Sinal de f = Sinal de $1 - x^3$ = Sinal de $1 - x$:

- $f(x) = 0 \iff 1 - x^3 = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$
- $f(x) > 0$, se $x < 1$
- $f(x) < 0$, se $x > 1$

c. Domínio $= \mathbb{R}$

Sinal de f = Sinal de $-3x^2 + 2x$:

- $f(x) = 0 \iff -3x^2 + 2x = 0 \iff x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$
- $f(x) > 0$, se $0 < x < \frac{2}{3}$
- $f(x) < 0$, se $x < 0$ ou $x > \frac{2}{3}$

Exercício 9

a.

Deslocando 3 unidades verticalmente para baixo o gráfico de f, obtemos o gráfico de g.

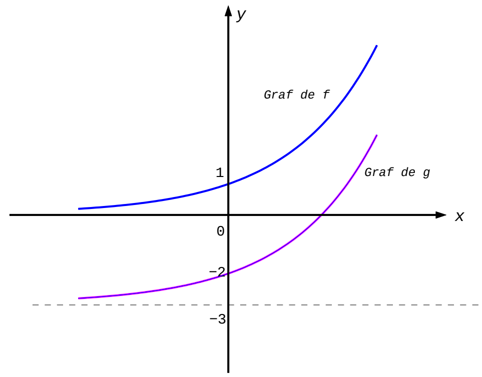


Fig. 57: $f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ e $g(x) == 2^{\frac{x}{2}} - 3$.

b.

Deslocando 2 unidades, horizontalmente, à direita e 3 unidades, verticalmente, para cima o gráfico de f, obtemos o gráfico de g.

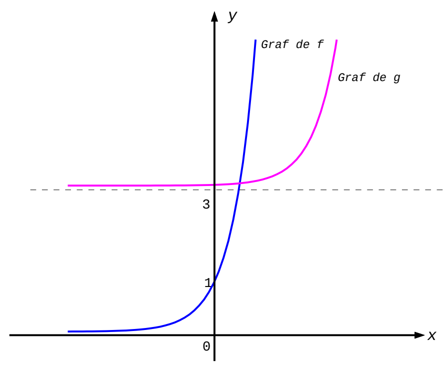


Fig. 58: $f(x) = 8^x$ e $g(x) = 8^{x-2} + 3$.

Exercício 10

a. Domínio $= (0, +\infty)$

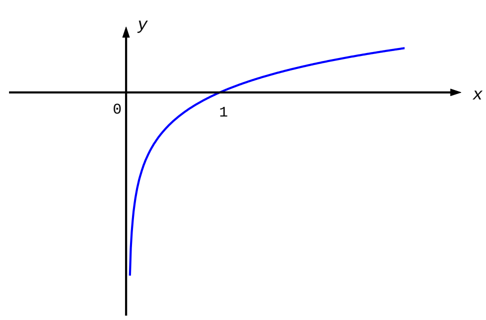


Fig. 59: $f(x) = \log_{10} x$.

b. Domínio $= (-\infty, 0)$

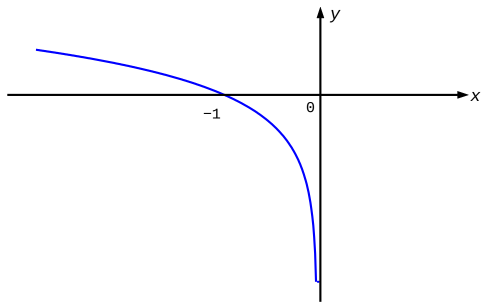


Fig. 60: $f(x) = \log_{10}(-x)$.

c. Domínio $= (0, +\infty)$

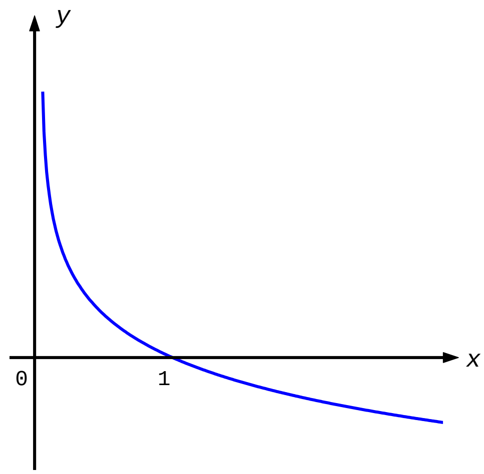


Fig. 61: $f(x) = -\log_{10} x$.

d. Domínio $= (0, +\infty)$

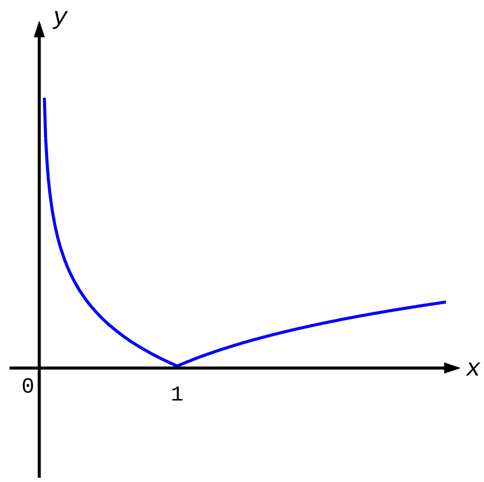


Fig. 62: $f(x) = |\log_{10} x|$.

e. Domínio $= \mathbb{R} - \{0\}$

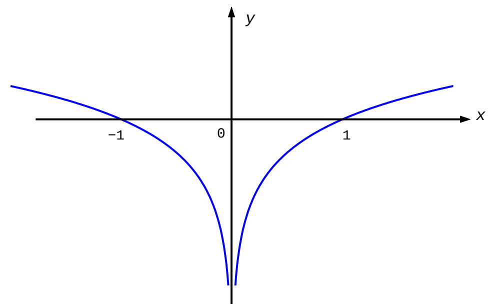


Fig. 63: $f(x) = \log_{10}|x|$.

f. Domínio $= (-1, +\infty)$

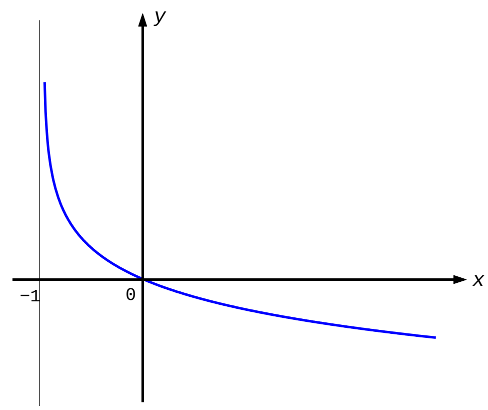


Fig. 64: $f(x) = \log_{\frac{1}{10}}(x+1)x = -\log_{10}(x+1)$.

Exercício 11

a. $g(x) = \ln x + 1$.

O gráfico de g é obtido deslocando-se o gráfico de f de uma unidade, verticalmente, para cima.

b. $g(x) = \ln x - 1$.

O gráfico de g é obtido deslocando-se o gráfico de f de uma unidade, verticalmente, para baixo.

c. $g(x) = -\ln x$.

O gráfico de g é o simétrico do gráfico de f, em relação ao eixo x

d. $g(x) = -3 \ln x$.

O gráfico de g é obtido multiplicando-se por 3 todas as ordenadas dos pontos do gráfico do item **c**. Isto é, o gráfico de g ficará mais "alongado" na vertical, que o gráfico do item **c**.

e. $g(x) = \frac{1}{2} \ln x$.

O gráfico de g é obtido multiplicando-se por $\frac{1}{2}$todas as ordenadas dos pontos do gráfico de f. O gráfico obtido será mais "contraído", na vertical, que o gráfico de f.

f. $g(x) = \ln(x - 1)$.

O gráfico de g é obtido deslocando-se o gráfico de f de uma unidade, horizontalmente, para a direita.

Exercício 12

$6,64$ horas, aproximadamente.

Exercício 13 $\dfrac{\ln 3}{\ln 2} 5750 \approx 9114$ anos.

Exercício 14

$\dfrac{\ln 3}{0,1} \approx 11$ anos.

O valor da aproximação de e não era necessário para a resolução dos Exercícios 13 e 14.

O símbolo $\approx$ significa aproximadamente.

Funções - Aplicações

Exercício 1

Aproximadamente, $22,9$ graus.

Exercício 2

Ponto: $(9,3)$

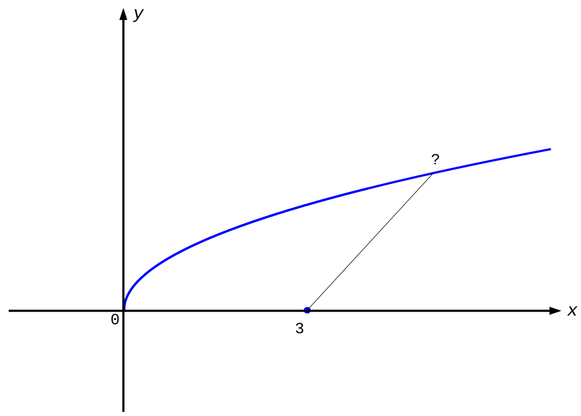


Fig. 65: $f(x)=\sqrt{x}$.

Exercício 3

O maior ângulo de visão é de $13,9679$ graus, que ocorre em $x = 2,8142$ metros. No Cálculo I você aprenderá as técnicas que permitem estudar o comportamento de funções e determinar, quando exeistem, os valores máximos e mínimos de funções reais.

a. $\theta = \text{arctg}\left(\dfrac{1,4x}{x^2+7,92}\right)$.

b. Não é possível o ângulo de visão ser de 15 graus.

c. $\theta \approx 13,17$ graus.

Exercício 4

O receptor deve ser colocado no foco da parábola: $F=(0,\frac{15}{4})$.

Observamos que o bordo da antena é um círculo. A distância do foco ao bordo é a distância do foco a qualquer ponto desse círculo. Escolhemos o ponto $P=(5,\frac{5}{3})$ do círculo.

Temos $d(F,P)=\sqrt{(5-0)^2+(\frac{5}{3}-\frac{15}{4})^2}=\sqrt{25+(\frac{15}{12})^2}=$

$$=\frac{\sqrt{3825}}{12}\approx 5,15 \text{ metros.}$$

Exercício 5

Fração inicial: $\dfrac{x}{x+1}$. Equação: $\dfrac{x+\frac{5}{2}}{x+1}=\dfrac{x+1}{x}\Longrightarrow x=2.$

Fração inicial: $\dfrac{2}{3}$.

Exercício 6

a. $t = \dfrac{\sqrt{x^2 + 56,25}}{4,5} + \dfrac{18 - x}{9}$ **b.** $t \approx 3,47$ horas, aproximadamente.

Exercício 7

Área $= 2(16 - x^2)$, com $x \in (-4, 4)$.

Exercício 8

a. $A(\theta) = (2500)\theta$.

b. $A(L) = 2500 \operatorname{arcsen}(\frac{L}{100})$, sendo L a largura.

c. Área não construída $= 5000 \operatorname{sen} \theta - (2500)\theta$.

d. Área não construída $= 50L - 2500 \operatorname{arcsen}(\frac{L}{100})$.

e. Aproximadamente, $1309\, m^2$

Exercício 9

$x = (P,Q) \Longrightarrow A(x) = x(24 - 2x)$ e a área A é máxima em $x = 6$ quilômetros.

Exercício 10

a. $\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

b. $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{4}{3}$.

Exercício 11

a. Pontos $(3, 2)$ e $(-3, 2)$.

b. Ponto $(9, 2)$.

c. Ponto $(-2, 2)$.

d. Ponto $(\frac{1}{2}, 0)$.

Exercício 12

a. O gráfico de f é a parte do gráfico da hipérbole $x^2 - y^2 = 5$, com ordenadas $y \geq 0$.

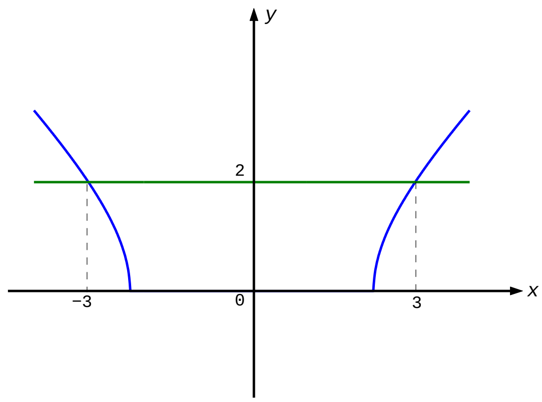


Fig. 66: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$ e $g(x) = 2$.

b. O gráfico de f é a parte do gráfico da parábola $x = y^2 + 5$, com ordenadas $y \geq 0$. O gráfico de g é a parte do gráfico da parábola $x = (y-5)^2$, com $y - 5 \leq 0$.

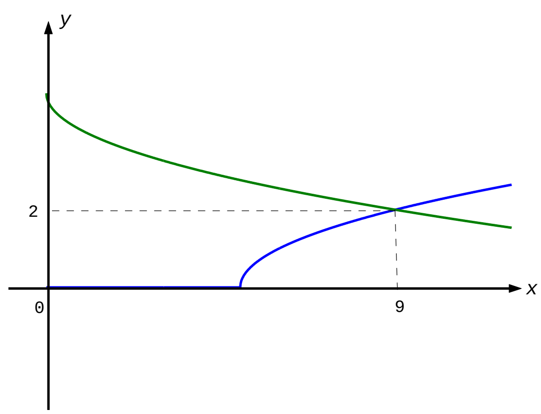


Fig. 67: $f(x) = \sqrt{x - 5}$ e $g(x) = 5 - \sqrt{x}$.

c. O gráfico de f é a parte do gráfico da parábola $x + 6 = y^2$, com ordenadas $y \geq 0$.

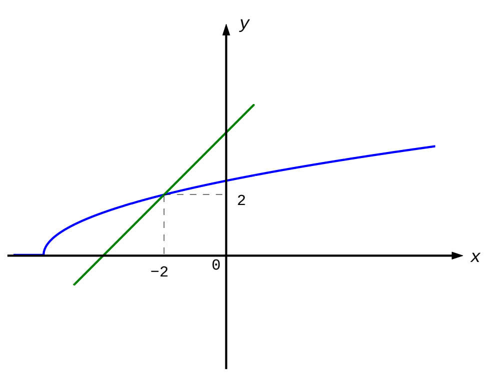


Fig. 68: $f(x) = \sqrt{x + 6}$ e $g(x) = 4 + x$.

d. O gráfico de g é a parte do gráfico da parábola $x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}y^2$, com ordenadas $y \geq 0$.

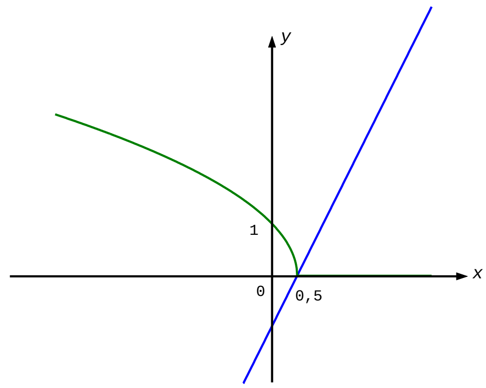


Fig. 69: $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$.

Exercício 13

a. Domínio = $\mathbb{R}$.

Interseções com o eixo x: $(-2, 0)$, $(3, 0)$ e $(1, 0)$.

Interseção com o eixo y: $(0, 12)$.

Sinal de f:

- $f(x) > 0$, se $x \in (-2, 1) \cup (3, +\infty)$.
- $f(x) < 0$, se $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 3)$.

b. Domínio = $\mathbb{R}$.

Interseções com o eixo x: $(-4, 0)$ e $(2, 0)$.

Interseção com o eixo y: $(0, -4\sqrt[3]{2})$.

Sinal de f:

- $f(x) > 0$, se $x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$.
- $f(x) < 0$, se $x \in (-4, 2)$.

c. Domínio = $(0, +\infty)$.

Interseções com o eixo x: $(4, 0)$.

Interseção com o eixo y: Não há.

Sinal de f:

- $f(x) > 0$, se $x \in (0, 4)$.
- $f(x) < 0$, se $x \in (4, +\infty)$.

d. Domínio $= \mathbb{R} - \{10\}$.

Interseções com o eixo x: $(10, 0)$.

Interseção com o eixo y: $\left(0, \frac{1}{20}\right)$.

Sinal de f:

- $f(x) > 0$, se $x \in (-10, 10)$.
- $f(x) < 0$, se $x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$.

e. Domínio $= (1, +\infty)$.

Interseções com o eixo x: Não há.

Interseção com o eixo y: Não há.

Sinal de f: Observamos que $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x-1}$, $x \neq 1$.

Logo, f é sempre positiva.

Exercício 14

Temos que $g(x) = \sqrt{x-2}$.

Definimos $g_1(x) = g(x+2) = \sqrt{x}$. O gráfico de g_1 é obtido deslocando-se o gráfico de g de duas unidades para a esquerda.

Definimos $g_2(x) = g_1(-x) = \sqrt{-x}$. O gráfico de g_2 é obtido por simetria em relação ao eixo y do gráfico de g_1.

Definimos $g_3(x) = g_2(x-2) = \sqrt{2-x} = f(x)$. O gráfico de g_3 ou de f, é obtido deslocando-se o gráfico de g_2 de duas unidades para a direita.

A solução não é única. Podemos, também, pensar da seguinte forma:

Definimos $g_1(x) = g(-x)$. O gráfico de g_1 é obtido por simetria em relação ao eixo y do gráfico de g.

Definimos $g_2(x) = g_1(x-4)$. O gráfico de g_2 é obtido deslocando-se o gráfico de g_1 de quatro unidades para a direita.

Exercício 15

a. Domínio $= \mathbb{R}$, $x_0 = 10$.

b. Domínio $=(-\infty, \frac{1}{3}]$, $x_0 = \frac{5}{16}$.

c. Domínio $= [7, +\infty)$, $x_0 = 16$.

Exercício 16

a. $f_a(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} + \dfrac{a}{\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{a} = \sqrt{a}$. Logo, $f_a(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.

b. Cálculo de $\sqrt{5}$:

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 3$
- $x_2 = \dfrac{7}{3}$
- $x_3 = \dfrac{47}{21} \approx 2,238095$
- $x_4 = \dfrac{87721}{38472} \approx 2,238012$
- $x_5 \simeq 2,236067$

Cálculo de $\sqrt{7}$:

- $x_0 = 1$
- $x_1 = 4$
- $x_2 = \dfrac{23}{8} \simeq 2,87500$
- $x_3 = \dfrac{977}{368} \simeq 2,65489$
- $x_4 = \dfrac{1902497}{719072} \simeq 2,64576$
- $x_5 \simeq 2,64575$