Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP3 - 1^o semestre de 2019 — Gabarito

Questões

1. (2,5 pontos)

   Para as seguintes funções verifique se elas tem inversas. Para as funções que tem inversa ache sua expressão (f^{-1}) e calcule sua derivada.

   (a) $f(x) = x^2 + 2$

   (b) $f(x) = x^3$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

   Solução:

   (a) $f(x) = x^2 + 2$

   $$y = x^2 + 2 \Longrightarrow y - 2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{y-2} = x$$

   A função inversa seria $f^{-1}(y) = \sqrt{y-2}$. Entretanto o domínio da inversa é $\mathbb{R}$ tal que $y > 2$ e não coincide com a imagem de f. Logo f não tem inversa.

   (b) $f(x) = x^3$

   $$y = x^3 \Longrightarrow \sqrt[3]{y} = x$$

   $$x = \sqrt[3]{y} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(y^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}y^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}$$

   (c) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$

   $$y = \frac{2x-1}{x+2} \Longrightarrow y(x+2) = 2x - 1 \Longrightarrow yx + 2y = 2x - 1$$

   $$\Longrightarrow yx - 2x = -1 - 2y \Longrightarrow (y-2)x = -1 - 2y \Longrightarrow x = -\frac{2y+1}{y-2}$$

$$x = -\frac{2y+1}{y-2} \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = \left(-\frac{(2y+1)}{(y-2)}\right)' = -\frac{(2y+1)'(y-2)-(2y+1)(y-2)'}{(y-2)^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{2\cdot(y-2)-(2y+1)\cdot 1}{(y-2)^2} = -\frac{2y-4-2y-1}{(y-2)^2} = \frac{5}{(y-2)^2}$$

2. (2,5 pontos)

Faça um esboço do gráfico da função $f(x) = x^4 - 6x + 2$, utilizando as ferramentas do cálculo.

Solução:

$$f(x) = x^4 - 6x + 2$$

$$f'(x) = 4x^3 - 6$$

$$f''(x) = 12x^2$$

Os candidatos a máximos e mínimos locais são:

$$f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4x^3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\frac{6}{4}}$$

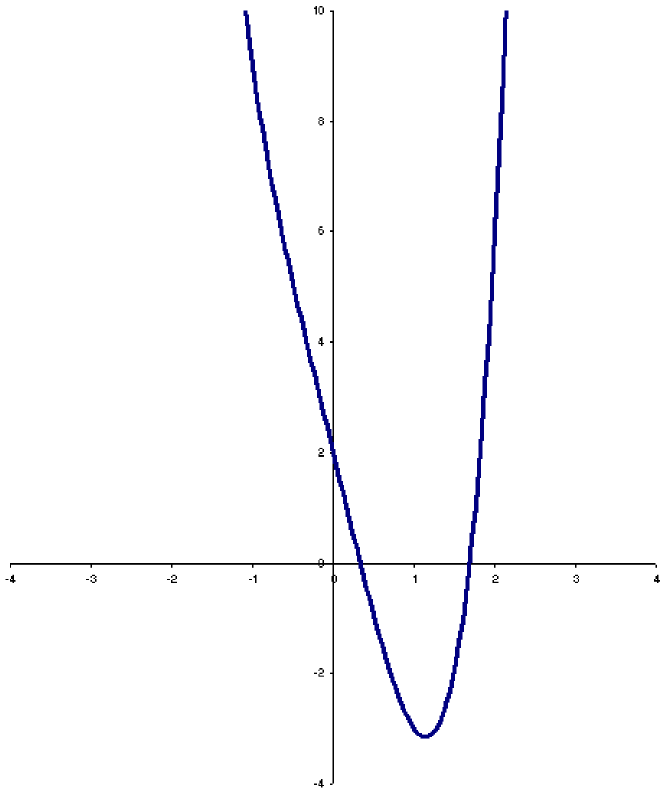
Vamos estudar o sinal da primeira derivada para verificar as regiões aonde $f(x)$ cresce e decresce.

Intervalo	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, \sqrt[3]{\frac{6}{4}})$	$-$	decrescente
$(\sqrt[3]{\frac{6}{4}}, \infty)$	$+$	crescente

Da segunda derivada surgem os candidatos a pontos de inflexão.

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Entretanto para $x > 0$ e para $x < 0$ $f''(x) > 0$, logo a função é concava para cima para $x > 0$ e para $x < 0$, e não existe ponto de inflexão em $x = 0$.



3. (2,5 pontos)

   Se $f(x) = x^2 + 1$, determine o volume do sólido gerado pela revolução, em torno do eixo x, da região sob o gráfico de $f(x)$ entre $x = -1$ e $x = 1$.

   Solução

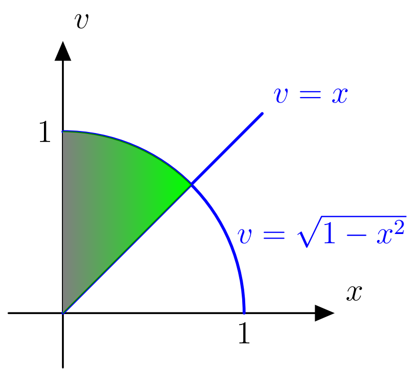
$$
\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{1} \pi (x^2+1)^2 \, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx \\
&= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^2 + x \right]_{-1}^{1} \\
&= \pi \left[\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right] \\
&= \pi \frac{56}{15}
\end{aligned}
$$

4. (2,5 pontos)

   Calcular a área da região limitada pelos gráficos de $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = x$ e $x = 0$.

   Solução:

   A figura abaixo ilustra a área desejada (preenchida na cor verde)



Temos que encontrar a interseção das duas curvas para definir os limites de integração,

$$\sqrt{1-x^2} = x \quad \longrightarrow \quad 1 - x^2 = x^2 \quad \longrightarrow \quad 2x^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

a intersecção se dá em $x = \sqrt{1/2}$ no primeiro quadrante, logo

$$A = \int_0^{\sqrt{1/2}} (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx$$

Vamos calcular a integral

$$\int (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx$$

que pode ser escrita

$$\int (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \int x\,dx$$

Vejamos primeiramente a integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

usando a mudança de variável $x = \operatorname{sen} t$, teremos

$$x = \operatorname{sen} t \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad \Longrightarrow \quad dx = \cos t\,dt$$

ademais

$$\operatorname{sen}^{-1} x = t$$

substituindo na integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\ \cos t\,dt = \int \cos t\ \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

mas das relações trigonométricas

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\\
&\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1
\end{aligned}$$

é fácil verificar que

$$\begin{aligned}
&\cos\,2t = \cos t\cos t - \operatorname{sen} t\operatorname{sen} t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = \cos^2 t - (1-\cos^2 t) = 2\cos^2 t - 1\\
&\operatorname{sen} 2t = \operatorname{sen} t\cos t + \cos t\operatorname{sen} t = 2\operatorname{sen} t\cos t
\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))\ dt &= \frac{1}{2}\left[\int 1\,dt + \int \cos(2t)\,dt\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right] + C = \frac{1}{2}\left[t + \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{2}\right] + C\\
&= \frac{1}{2}\left[t + \operatorname{sen} t\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\ \right] + C\\
&= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}\ \right] + C
\end{aligned}$$

---

e agora a integral

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

---

e finalmente

$$\int (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx = \int \sqrt{1-x^2}\,dx - \int x\,dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}^{-1} x + x\sqrt{1-x^2}\ - x^2\right] + C$$

voltando ao cálculo da área pedida

$$A = \int_0^{\sqrt{1/2}} (\sqrt{1-x^2} - x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}^{-1} x + x\sqrt{1-x^2} - x^2\right]_0^{\sqrt{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}^{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}^{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$