Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1^o semestre de 2013

Questões

1. (1,0 ponto) ---

   Mostre que a função $f(x) = x^5 + 20x - 6$ é uma função crescente para todos os valores de x na reta dos reais.

   Solução:

   $$f'(x) = 4x^4 + 20 > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

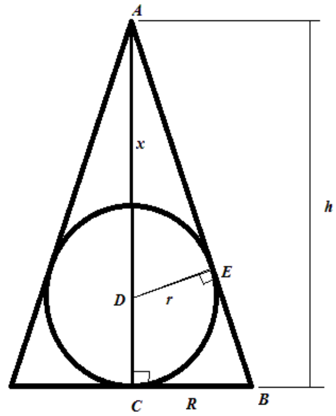
   Logo, $f(x)$ é crescente em toda a reta real.

2. (1,0 ponto) ---

   Ache as dimensões de um cone circular reto com volume mínimo V que envolva uma esfera de raio r.

   Solução:

Considere um corte no ostra a figura



Considerando, V o volume do cone, h a altura do cone, A_b a área da base do cone e R o raio da base do cone, então o volume de um cone circular reto é dado pela expressão:

$$V = \frac{1}{3}hA_b = \frac{1}{3}h(\pi R^2)$$

Seja x o comprimento do segmento que liga o topo da esfera ao pico do cone.

Mas os triângulos ABC e AED são similares, logo podemos escrever

$$\frac{AD}{AB} = \frac{r}{R}$$

porém,

$$AD = x + r$$

e do triângulo ABC

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 = R^2 + (2r + x)^2$$

$$AB = \sqrt{R^2 + (2r + x)^2}$$

substituindo na relação de similaridade

$$\frac{AD}{AB} = \frac{r}{R} \Longrightarrow \frac{x + r}{\sqrt{R^2 + (2r + x)^2}} = \frac{r}{R} \Longrightarrow \frac{(x + r)^2}{R^2 + (2r + x)^2} = \frac{r^2}{R^2}$$

$$R^2(x + r)^2 = r^2(R^2 + (2r + x)^2)$$

$$R^2(x^2 + 2xr + r^2) = r^2(R^2 + (4r^2 + 4rx + x^2))$$

$$R^2x^2 + 2xrR^2 + R^2r^2 = r^2R^2 + r^2(4r^2 + 4rx + x^2)$$

$$R^2x^2 + 2xrR^2 + R^2r^2 = r^2R^2 + 4r^4 + 4r^3x + x^2r^2$$

$$R^2x^2 + 2xrR^2 = 4r^4 + 4r^3x + x^2r^2$$

$$R^2(x^2 + 2xr) = 4r^4 + 4r^3x + x^2r^2$$

$$R^2 = \frac{4r^4 + 4r^3x + x^2r^2}{x^2 + 2xr}$$

substituindo na expressão para o volume do cone

$$V = \frac{1}{3}h(\pi R^2) = \frac{1}{3}(2r + x)\left(\pi\frac{4r^4 + 4r^3x + x^2r^2}{x^2 + 2xr}\right) = \frac{\pi r^2(2r + x)(4r^2 + 4rx + x^2)}{3(x^2 + 2xr)}$$

$$V(x) = \frac{\pi r^2(2r + x)(4r^2 + 4rx + x^2)}{3x(2r + x)}$$

$$V(x) = \frac{\pi r^2(4r^2 + 4rx + x^2)}{3x}$$

que relaciona o volume do cone (V) a uma única variável independente (x).
Devemos agora pesquisar o mínimo da função $V(x)$.
Extremos relativos $\longrightarrow V'(x) = 0$.

$$V'(x) = \left[\frac{\pi r^2(4r^2 + 4rx + x^2)}{3x}\right]' = \frac{\pi r^2}{3}\left[\frac{4r^2 + 4rx + x^2}{x}\right]'$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}\left[\frac{4r^2}{x} + 4r + x\right]' = \frac{\pi r^2}{3}\left[4r^2x^{-1} + 4r + x\right]'$$

$$= \frac{\pi r^2}{3}\left[-4r^2x^{-2} + 1\right] = \frac{\pi r^2}{3}\left[-\frac{4r^2}{x^2} + 1\right]$$

$$V'(x) = 0 \Longrightarrow \left[1 - \frac{4r^2}{x^2}\right] = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = 4r^2 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{4r^2} = \pm 2r$$

A so;ução que interessa é $x = 2r$. $x = -2r$, significa um esfera de raio 0.
Para $x = 2r$, temos

$$h = 2r + x = 2r + 2r = 4r$$

e

$$R^2 = \frac{4r^4 + 4r^3 \cdot 2r + 4r^2 r^2}{4r^2 + 4r^2} = \frac{4r^4 + 8r^4 + 4r^4}{8r^2} = \frac{16r^4}{8r^2} = 2r^2$$

$$R = \sqrt{2}r$$

Enfim, as dimensões do cone são:

$$h = 4r \quad \text{e} \quad R = \sqrt{2}r$$

3. (1,0 ponto) ———

Calcule as seguintes antiderivadas.

(a) $$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$$

(b) $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

(c) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

Solução:

(a)
$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int -4x\sqrt{1-2x^2}dx = -\frac{3}{4}\int -4x(1-2x^2)^{1/2}dx$$
$$= -\frac{3}{4}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}}(1-2x^2)^{3/2}\right] + C = -\frac{1}{2}\sqrt{(1-2x^2)^3} + C =$$

(b) $$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

Seja $u = \sqrt{x}$. Então $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \rightarrow 2\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Substituindo na integral

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \cos u\,du = 2\,\text{sen}\ u + C = 2\,\text{sen}\ \sqrt{x} + C$$

(c) $$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$$

Seja $u = x+1$, então $du = dx$ e $x = u-1$. Substituindo na integral.

$$\int x^2\sqrt{x+1}\,dx = \int (u-1)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2-2u+1)\sqrt{u}\,du =$$
$$= \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right)\,du = \frac{2}{7}u^{\frac{7}{2}} - 2\left(\frac{2}{5}\right)u^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= 2u^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{7}u^2 - \frac{2}{5}u + \frac{1}{3}\right\} + C$$
$$= 2(x+1)^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{7}(x+1)^2 - \frac{2}{5}(x+1) + \frac{1}{3}\right\} + C$$

4. (1,0 ponto)

Ache a área sob o gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ e o eixo x, entre $x = 0$ e $x = 1$.

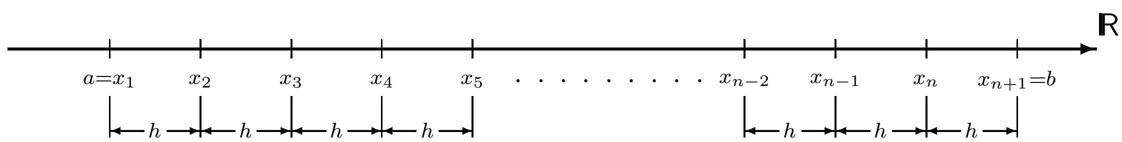
Solução:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{sen}^{-1}(0) = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}$$

5. (1,0 ponto)

Regra dos Trapézios:

Seja $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$; divida o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos com o mesmo comprimento $h = \dfrac{(b-a)}{n}$, sendo estes subintervalos delimitados pelos pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Como ilustra a seguinte figura.



Construa uma regra de integração definida pela soma das áreas dos trapézios definidos pelas extremidades dos subintervalos e pelos valores de $f(x)$ nestes extremos. Isto é, para um subintervalo qualquer $[x_i, x_{i+1}]$ a área do trapézios será

$$A_i = \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

(a) Use a regra dos trápezios com $n = 10$ para calcular a integral abaixo e compare com o valor exato.

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

Solução:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]}_{\text{área de um trapézio}}$$

onde

- n - quantidade de subintervalos no intervalo de integração $[a, b]$
- $h = \frac{b-a}{n}$

A integral a ser avaliada é fácil

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = 0{,}333333333\ldots$$

Neste caso $n = 10$, $a = 0$ e $b = 1$, portanto

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$x_i = a + ih\ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n+1$$

$$x_i = 0 + ih = ih\ , \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 11$$

$$\Rightarrow x_1 = 0{,}0; \quad x_2 = 0{,}1; \quad x_3 = 0{,}2; \quad x_4 = 0{,}3; \quad x_5 = 0{,}4; \quad x_6 = 0{,}5;$$

$$\Rightarrow x_7 = 0{,}6; \quad x_8 = 0{,}7; \quad x_9 = 0{,}8; \quad x_{10} = 0{,}9; \quad x_{11} = 1{,}0;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx \sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right]$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad = \quad & \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]}_{i=1} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_2) + f(x_3)\right]}_{i=2} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_3) + f(x_4)\right]}_{i=3} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_4) + f(x_5)\right]}_{i=4} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_5) + f(x_6)\right]}_{i=5} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_6) + f(x_7)\right]}_{i=6} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_7) + f(x_8)\right]}_{i=7} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_8) + f(x_9)\right]}_{i=8} + \\
& \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_9) + f(x_{10})\right]}_{i=9} + \underbrace{\frac{h}{2}\left[f(x_{10}) + f(x_{11})\right]}_{i=10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] \quad = \quad & \frac{h}{2}\left[f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + 2f(x_4) + \right. \\
& 2f(x_5) + 2f(x_6) + 2f(x_7) + 2f(x_8) + \\
& \left. 2f(x_9) + 2f(x_{10}) + f(x_{11})\right]
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[x_i^2 + x_{i+1}^2\right] = \frac{h}{2}\,[x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_5^2 + 2x_6^2 + 2x_7^2 + 2x_8^2 + 2x_9^2 + 2x_{10}^2 + x_{11}^2]$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[x_i^2 + x_{i+1}^2\right] = \frac{0{,}1}{2}\,[0^2 + 2\cdot[0{,}1^2 + 0{,}2^2 + 0{,}3^2 + 0{,}4^2 + 0{,}5^2 + 0{,}6^2 + 0{,}7^2 + 0{,}8^2 + 0{,}9^2\ ] + 1{,}0^2]$$

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{h}{2}\left[x_i^2 + x_{i+1}^2\right] = \frac{0{,}1}{2}\,[0^2 + 2\cdot[0{,}01 + 0{,}04 + 0{,}09 + 0{,}16 + 0{,}25 + 0{,}36 + 0{,}49 + 0{,}64 + 0{,}81\ ] + 1{,}00] = \frac{0{,}1}{2}\,[6{,}70] = 0{,}335$$

Logo, pela chamada regra dos trapézios

$$\int_0^1 x^2\,dx \approx 0{,}335$$

enquanto que o valor exato é

$$\int_0^1 x^2\,dx = 0{,}333333333\ldots$$

6. (1,0 ponto) ———

O valor médio de uma função $f(x)$ em um intervalo $[a,b]$ é definido por

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Calcule o valor médio das seguintes funções nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ em $[0,1]$
(b) $f(x) = \sec^2 x$ em $[0, \frac{\pi}{3}]$
(c) $f(x) = 3x^2 - 1$ em $[-1, 4]$
(d) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ em $[0, \pi]$

Solução:

(a) $$\frac{1}{1-0}\int_0^1 \sqrt[5]{x}\,dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}}\Big|_0^1 = \frac{5}{6}\left[1^{\frac{6}{5}} - 0^{\frac{6}{5}}\right] = \frac{5}{6}$$

(b) $$\frac{1}{\frac{\pi}{3}-0}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx = \frac{3}{\pi}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\pi}\left[\tan\frac{\pi}{3}-\tan 0\right] = \frac{3}{\pi}\left[\sqrt{3}-0\right] = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$$

(c) $$\frac{1}{4-(-1)}\int_{-1}^{4}(3x^2-1)\,dx = \frac{1}{5}\int_{-1}^{4}(3x^2-1)\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{3}x^3-x\right]_{-1}^{4} = \frac{1}{5}\left[x^3-x\right]_{-1}^{4}$$

$$= \frac{1}{5}\left[64-4-(-1)+(-1)\right] = \frac{1}{5}\cdot 60 = 12$$

(d) $$\frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} \text{sen } x-\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\cos x-\text{sen } x\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi}\left[\cos x+\text{sen } x\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\cos\pi+\text{sen } \pi-\cos 0-\text{sen } 0\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[-1+0-1-0\right] = \frac{2}{\pi}$$

7. (1,0 ponto)

Resolva as integrais indefinidas

(a) $$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

(b) $$\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$$

Solução:

(a) $$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Seja $u = x^2+1$, logo $\frac{du}{dx} = 2x$. Substituindo na integral

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x^2+1)+C$$

(b) $$\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx$$

Seja $u = x^3+5$, logo $\frac{du}{dx} = 3x^2$. Substituindo na integral

$$\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln u + C = \frac{1}{3}\ln(x^3+5)+C$$

8. (1,0 ponto)

Seja $\mathcal{R}$ a região entre o eixo x, a curva $y = x^3$, a linha $x = 2$.

(a) Ache o volume do sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo x.

(b) Ache o volume do sólido obtido por revolução de $\mathcal{R}$ em torno do eixo y.

Solução:

(a) $$V = \int_0^2 \pi y^2\, dx = \pi \int_0^2 \left(x^3\right)^2\, dx = \pi \int_0^2 x^6\, dx = \pi \left[\frac{x^7}{7}\right]_0^2 = \frac{\pi}{7}[128 - 0] = \frac{128\pi}{7}$$

(b) $$V = \int_0^2 y \cdot 2\pi x\, dx = \int_0^2 (x^3) \cdot 2\pi x\, dx = 2\pi \int_0^2 x^4\, dx = 2\pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= 2\pi \left[\frac{2}{5} - \frac{0}{5}\right] = \frac{64\pi}{5}$$

ou

$$V = \int_0^8 \left[\pi \cdot 2^2 - \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2\right] dy = \pi \int_0^8 \left[4 - y^{\frac{2}{3}}\right] dy = \pi \left[4y - \frac{3}{5} y^{\frac{5}{3}}\right]_0^8$$

$$= \pi \left[32 - \frac{3}{5}32 - 0 + 0\right] = 32\pi \left[1 - \frac{3}{5}\right] = 32\pi \left[\frac{2}{5}\right] = \frac{64\pi}{5}$$

9. (2,0 pontos) ---

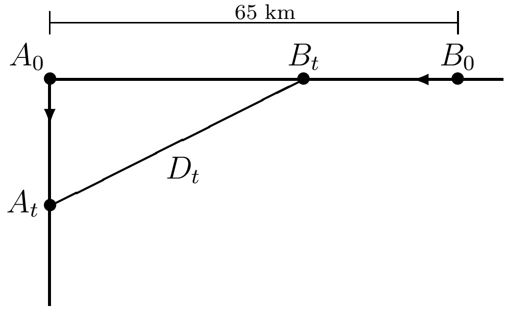
Às 9 horas da manhã, um navio B está 65 quilômetros a leste de um outro navio A. O navio B está navegando para oeste a uma velocidade de 10 km/h (10 quilômetros por hora), e o navio A está navegando para o sul a uma velocidade de 15 km/h. Se ambos mantiverem seus respectivos cursos, quando eles estarão mais próximos um do outro? Neste instante qual será a distância entre eles?

Solução:

Sejam

- A_0 - Navio A no instante 0
- A_t - Navio A no instante t
- B_0 - Navio B no instante 0
- B_t - Navio B no instante t
- $V_A = 15$ km/h - velocidade constante do navio A
- $V_B = 10$ km/h - velocidade constante do navio B
- D_0 - distância entre A e B no instante 0
- D_t - distância entre A e B no instante t

Podemos representar a geometria por um triângulo como mostra a figura



Observando o triângulo retângulo $A_0B_tA_t$, o comprimento de sua hipotenusa é a distância entre os navios A e B no instante t.

Os catetos do triângulo são A_0B_t e A_0A_t. Portanto,

$$\begin{aligned} A_0B_t &= 65 - V_B \cdot t \\ A_0A_t &= V_A \cdot t \end{aligned} \qquad (t \text{ em horas})$$

e

$$D_t^2 = (A_0B_t)^2 + (A_0A_t)^2 = (65 - V_B \cdot t)^2 + (V_A \cdot t)^2$$

função que representa a distância entre os dois navios em um instante t. Para entrar a menor distância entre eles temos que encontrar o mínimo da função.

$$\begin{aligned} D_t^2 &= (65 - 10t)^2 + (15t)^2 \\ &= 4225 - 1300t + 100t^2 + 225t^2 \\ &= 4225 - 1300t + 325t^2 \\ &= 25(13t^2 - 52t + 169) \end{aligned}$$

ou

$$D_t^2 = 25(13t^2 - 52t + 169) \Longrightarrow D_t = \sqrt{25(13t^2 - 52t + 169)} = 5(\ 13t^2 - 52t + 169\ )^{\frac{1}{2}}$$

$$D_t'(t) = 0 \Longrightarrow 25(26t - 52) = 0 \Longrightarrow t = 2h$$

ou

$$D_t'(t) = \frac{5}{2}(13t^2 - 52t + 169)^{-\frac{1}{2}}(26t - 52) = \frac{5(26t - 52)}{2\sqrt{13t^2 - 52t + 169}}$$

$$D_t'(t) = 0 \Longrightarrow 26t - 52 = 0 \Longrightarrow t = 2h$$

Portanto a hora que os navios estarão mais próximos será 11 horas. E a distância entre eles:

$$D_t = \sqrt{25(13 \cdot 4 - 52 \cdot 2 + 169} = \sqrt{25(52 - 52 \cdot 2 + 169))}$$

$$D_t = \sqrt{25(169 - 52)} = \sqrt{2925} = \sqrt{15 \cdot 15 \cdot 13} = 15\sqrt{13} \approx 54{,}083269 \text{ km}$$