Fundação CECIERJ

Consórcio cederj

Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática Para Computação

AD1 - 2° semestre de 2007 - gabarito

1. (1.0 ponto)

Determine o domínio das funções abaixo. Justifique:

(a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+4}$

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{4x+4}}$

Solução:

(a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+4}$

$3x + 4 \neq 0$

$3x \neq -4$

$x \neq \dfrac{-4}{3}$

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} | -\dfrac{4}{3}\right\}$

(b) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{4x+4}}$

$4x + 4 > 0$

$4x > -4$

$x > -1$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$

2. (1.5 ponto) ———————————————————————————————

Calcule $(f+g)$, $(f-g)$, $(f.g)$, (f/g) e dê o domínio da cada uma dessas funções:

(a) $f(x) = x + 6\ ,\ g(x) = x^2 - 2$

(b) $f(x) = 1 - 4x\ ,\ g(x) = 2x - 3$

Solução:

(a) $f(x) = x + 6\ ,\ g(x) = x^2 - 2$

$(f+g)(x) = x + 6 + x^2 - 2 = x^2 + x + 4$

$D(f+g) = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = x + 6 - (x^2 - 2) = -x^2 + x + 8$

$D(f-g) = \mathbb{R}$

$(f.g)(x) = (x+6).(x^2-2) = x^3 - 2x + 6x^2 - 12 = x^3 + 6x^2 - 2x - 12$

$D(f.g) = \mathbb{R}$

$(f/g)(x) = \dfrac{x+6}{x^2-2}$

$x^2 - 2 \neq 0$

$x^2 \neq 2$

$x \neq \pm\sqrt{2}$

$D(f/g) = \left\{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm\sqrt{2}\right\}$

(b) $f(x) = 1 - 4x\ ,\ g(x) = 2x - 3$

$(f+g)(x) = 1 - 4x + 2x - 3 = -2x - 2$

$D(f+g) = \mathbb{R}$

$(f-g)(x) = 1 - 4x - (2x - 3) = -6x + 4$

$D(f-g) = \mathbb{R}$

$(f.g)(x) = (1-4x).(2x-3) = 2x - 3 - 8x^2 + 12x = -8x^2 + 14x - 3$

$D(f.g) = \mathbb{R}$

$(f/g)(x) = \dfrac{1-4x}{2x-3}$

$2x - 3 \neq 0$

$2x \neq 3$

$x \neq \dfrac{3}{2}$

$D(f/g) = \left\{ x \in \mathbb{R} | x \neq \dfrac{3}{2} \right\}$

3. (1,0 ponto)

Calcule as funções compostas fog e gof e determine seus domínios:

$$f(x) = x^2 + 1\ ,\ g(x) = x - 1$$

Solução:

$$f(x) = x^2 + 1\ ,\ g(x) = x - 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$$

$$D(f \circ g) = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 + 1 - 1 = x^2$$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R}$$

4. (2.0 pontos) ____

Determine cada um dos tópicos abaixo utilizando as ferramentas do cálculo. Justifique. A partir disso, esboce o gráfico da função f:

$$f(x) = x^2(4 - x^2)$$

1 - Intersecções com eixos x e y;
2 - Assíntotas Horizontais e Verticais;
3 - Domínio;

Solução:

$$f(x) = (x^2)(4 - x^2)$$

iii) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais (Dom $f = \mathbb{R}$).

ii) Vamos verificar se existem assíntotas horizontais.

$$\lim_{x\to\infty}(x^2)(4 - x^2) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-x^4 + 4x^2)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4\left(-1 + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4\left(\lim_{x\to\infty} -1 + \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^4 \cdot (-1 + 0)$$

$$\lim_{x\to\infty} x^4 = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2)(4 - x^2) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-x^4 + 4x^2)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(-1 + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^4\left(\lim_{x\to-\infty} -1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x^4 \cdot (-1 + 0)$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

Portanto não existem assíntotas horizontais.

E agora vamos verificar se existem assíntotas verticais.

Não existem assíntotas verticais posto que f é contínua em todo $x \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

i) Interseções com os eixos.

Eixo x:

$$f(x) = x^2(4 - x^2)$$

os pontos onde $f(x)$ se anula (interseção com o eixo y) são chamados *zeros* ou *raízes* da função.

$$0 = x^2(4 - x^2)$$

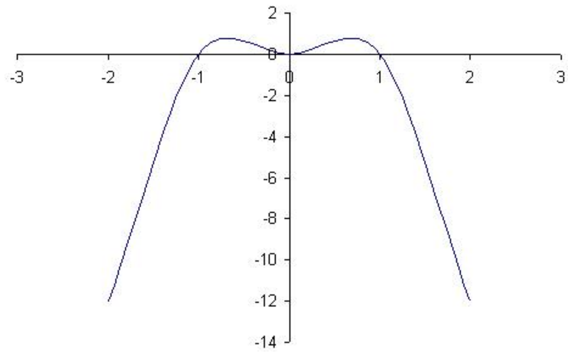
$$x^2 = 0 \ (4 - x^2) = 0$$

$$x = 0 \ x = 2/; x = -2$$

Portanto, as intersecções com o Eixo x são: $x = 0, x = 2, x = -2$.

Eixo y:

Ocorre quando $x = 0$, logo $y = f(0) = 0.(4 - 0) = 0$



5. (1.5 ponto)

Calcule a função inversa das seguintes funções e determine seus domínios:

(a) $y = \dfrac{x+2}{x-1}, x \neq 1$

(b) $y = 2x - 6$

(c) $f(x) = 3x^2 - 5$

Solução:

(a) $y = \dfrac{x+2}{x-1}, x \neq 1$

$$x = \frac{y+2}{y-1}$$

$$xy - x = y + 2$$

$$xy - y = 2 + x$$

$$y(x-1) = 2 + x$$

$$y = \frac{2+x}{x-1}$$

$$D(y^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$$

(b) $y = 2x - 6$

$$x = 2y - 6$$

$$-2y = -6 - x$$

$$2y = x + 6$$

$$y = \frac{x+6}{2}$$

$$D(y^{-1}) = \mathbb{R}$$

(c) $$f(x) = 3x^2 - 5$$

$$y = 3x^2 - 5$$

$$x = 3y^2 - 5$$

$$3y^2 = x + 5$$

$$y^2 = \frac{x+5}{3}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x+5}{3}}$$

$$\frac{x+5}{3} \geq 0$$

$$x + 5 \geq 0$$

$$x \geq -5$$

$$D(f^{-1}(x)) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq -5\}$$

6. (1.5 ponto)

Calcule os seguintes limites:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + a}{x^2 + b} =$$

(b) $$\lim_{y \to \infty} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{y}}} =$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + a}{x^2 + b} =$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} x^2 + a}{\lim_{x \to 0} x^2 + b}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} a}{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} b}$$

$$= \frac{0+a}{0+b}$$

$$= \frac{a}{b}$$

(b) $$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{y}}} =$$

$$= \frac{\lim_{y\to\infty} 1}{\lim_{y\to\infty} \left(1+2^{\frac{1}{y}}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{y\to\infty} 1}{\lim_{y\to\infty} 1 + \lim_{y\to\infty} 2^{\frac{1}{y}}}$$

$$= \frac{1}{1+2^{\frac{1}{\lim_{y\to\infty} y}}}$$

$$= \frac{1}{1+2^0}$$

$$= \frac{1}{2}$$

7. (1.5 ponto)

Verifique se as funções abaixo são contínuas. Justifique:

(a) $$f(x) = \frac{4x}{4-x^2}$$

(b) $$f(x) = \frac{x^3-2x^2-3x+6}{x-2}$$

Solução:

(a) $$f(x) = \frac{4x}{4-x^2}$$

a função f possui descontinuidade infinita em $x = +2$ e em $x = -2$ pois $f(+2)$ e $f(-2)$ não estão definidas e além disso:

$$x \to 2^- \to f(x) \to \infty$$

$$x \to 2^+ \to f(x) \to -\infty$$

$$x \to -2^- \to f(x) \to \infty$$

$$x \to -2^+ \to f(x) \to -\infty$$

A função f é contínua para valores de x tais que $x \neq +2$ e $x \neq -2$.

(b) $$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2}$$

A função f possui descontinuidade infinita em $x = 2$.
Mas,

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2 - 3)(x - 2)}{x - 2}$$

$$= x^2 - 3$$

e

$$f(2) = \lim_{x \to 2} x^2 - 3 = 1$$

Portanto, $f(x)$ é contínua para todo $x \neq 2$.