Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD2 - 1^o semestre de 2012 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto)

   Ache os extremos relativos das funções:

   (a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4+$

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

   (c) $f(x) = 2 + x^{2/3}$

   (d) $f(x) = x^2 + \dfrac{250}{x}$

   Solução:

   (a)
   $$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$
   $$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4$$
   $$f'(x) = 0 \Longrightarrow 4x^3 + 6x^2 - 6x - 4 = 0$$

   Claramente $x = 1$ é raiz de $f'(x)$. Dividindo $f'(x)$ por $(x-1)$, obtemos $4x^2+10x+4$, que fatorada torna-se $2(2x+1)(x+2)$, logo

   $$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2(x-1)(2x+1)(x+2) = 0$$

Logo $f(x)$ tem pontos críticos em $x = 1$, $x = -1/2$ e $x = -2$.

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 6$$

$$f''(1) = 18 > 0 \text{ logo } x = 1 \text{ é um ponto de mínimo relativo}$$

$$f''(-1/2) = -9 < 0 \text{ logo } x = -1/2 \text{ é um ponto de máximo relativo}$$

$$f''(-2) = 18 > 0 \text{ logo } x = -2 \text{ é um ponto de mínimo relativo}$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$f(x) = (x-2)^{-1}$$

$$f'(x) = -1(x-2)^{-2} = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

Logo f' nunca se anula, e o único ponto aonde f' não está definido é $x = 2$ que não pertence ao domínio de f. Portanto, f não tem pontos críticos e assim não tem extremos relativos.

(c) $$f(x) = 2 + x^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

Que nunca se anula, e portanto f não tem extremos relativos. Mas note que para $x < 0$ $f' < 0$ e a função é decrescente e para $x > 0$ $f' > 0$ e a função é crescente. Logo existe um mínimo absoluto em $x = 0$.

(d) $$f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{250}{x^2} \Longrightarrow 2x - \frac{250}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 5$$

$$f''(x) = 2 + \frac{500}{x^3} \Longrightarrow f''(5) = 6 > 0$$

Logo $x = 5$ é um ponto de mínimo relativo.

2. (1,0 ponto)

Ache os pontos de inflexão das seguintes funções:

(a) $$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4+$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

(c) $$f(x) = 2 + x^{2/3}$$

(d) $$f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$$

Solução:

A partir dos resultados a questão anterior temos:

(a) $$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$$

$$f''(x) = 12x^2 + 12x - 6 = 12(x^2 + x - \frac{1}{2}) = 12(x - \frac{\sqrt{3}-1}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+1}{2})$$

Logo são pontos de inflexão:

$$x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

(b) $$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

$$f''(x) = 2(x-2)^{-3} = \frac{2}{(x-2)^3}$$

que nunca se anula. Logo f não possui pontos de inflexão. Para $x < 2$ $f'' < 0$, e a função possui concavidade voltada para baixo. E para $x > 2$ $f'' > 0$, e a função possui concavidade voltada para cima.

(c) $$f(x) = 2 + x^{2/3}$$

Da questão anterior existe mudança de concavidade em $x = 0$.

(d) $$f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{500}{x^3} \Longrightarrow f''(x) = 2 + \frac{500}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^3 = -250 \Longrightarrow x = -\sqrt[3]{250}$$

Logo $x = -\sqrt[3]{250}$ é um ponto de inflexão.

3. (1,0 ponto)

Construa o gráfico da função

$$y^2(x^2 - 4) = x^4$$

Solução:

$$y^2 = \frac{x^4}{(x^2-4)}$$

Logo

$$y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$$

Que está definida somente para $x^2 > 4$, ou seja, para $x > 2$ ou $x < -2$, mais o ponto $(x, y) = (0, 0)$.

O gráfico é simétrico em relação a ambos os eixos coordenados e a origem. Vejamos então somente o primeiro quadrante.

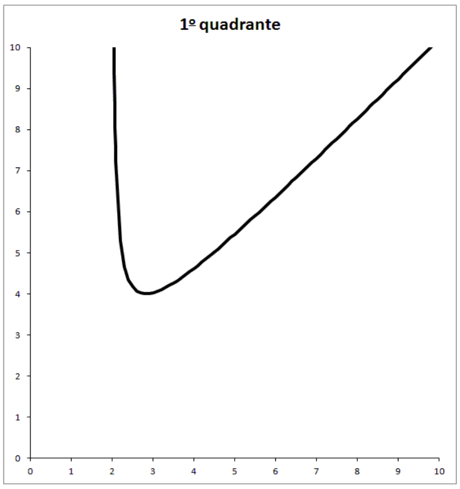
$$y' = \frac{x^3 - 8x}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$$

e

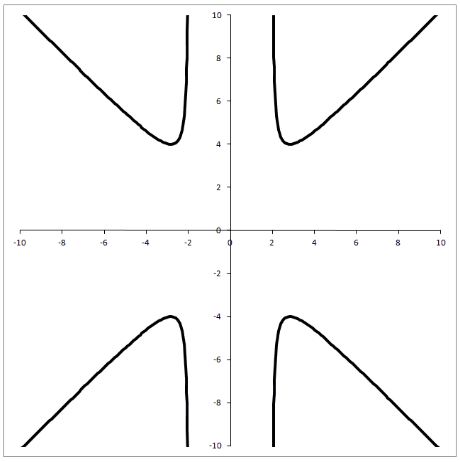
$$y'' = \frac{4x^2 + 32}{\sqrt{(x^2-4)^5}}$$

O único ponto crítico está em $x = 2\sqrt{2}$ (aonde $y = 4$), como $y'' > 0$, o gráfico tem concavidade voltada para cima e possui um mínimo relativo em $x = 2\sqrt{2}$. A curva $x = 2$ é uma assíntota vertical.

No primeiro quadrante teremos,



e por simetria



4. (1,0 ponto)

Um arame de comprimento L vai ser cortado em dois pedaços. Com um pedaço deve-se fazer um círculo, e com o outro, um triângulo equilátero. Onde devemos cortar o arame de modo que a soma das áreas do círculo e do triângulo seja (a) máxima e (b) mínima.

Solução:

Seja x o comprimento de um dos pedaços do arame, logo o comprimento do outro pedaço será $L-x$. Com o pedaço de comprimento x formemos o círculo de raio r e com o outro o triângulo de lado s. O comprimento do pedaço do arame para o círculo será $2\pi r$ e do pedaço do arame para a triângulo será 3s. Logo

$$L = 3s + x$$

A área do círculo é

$$A_c = \pi r^2 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}$$

e a área do triângulo é

$$A_t = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L-x}{3}\right)^2$$

e a área total será a soma das duas áreas

$$A = A_c + A_t = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L-x}{3}\right)^2$$

Que expressa a área total em função do comprimento de um dos pedaços de arame.

Para determinar os pontos críticos vamos derivar a expressão obtida

$$\frac{dA}{dx}=\frac{x}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}2\left(L-x\right)\left(-1\right)=\frac{x}{2\pi}-\frac{\sqrt{3}}{18}\left(L-x\right)=\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{18}\right)x-\frac{L\sqrt{3}}{18}$$

$$\frac{dA}{dx}=0\Longrightarrow\left(\frac{1}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{18}\right)x-\frac{L\sqrt{3}}{18}=0\Longrightarrow$$

$$x=\frac{\frac{L\sqrt{3}}{18}}{\frac{1}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{18}}=\frac{\frac{L\sqrt{3}}{18}}{\frac{18}{36\pi}+\frac{2\pi\sqrt{3}}{36\pi}}=\frac{\frac{L\sqrt{3}}{18}}{\frac{18+2\pi\sqrt{3}}{36\pi}}=\frac{L\sqrt{3}}{18}\frac{36\pi}{18+2\pi\sqrt{3}}=\frac{2\pi L\sqrt{3}}{18+2\pi\sqrt{3}}$$

Vejamos agora a segunda derivada

$$\frac{d^2A}{dx^2}=\frac{1}{2\pi}+\frac{\sqrt{3}}{18}$$

que é um valor sempre positivo. Isto indica que o ponto crítico será um ponto de mínimo. Como não há outro ponto crítico o máximo ocorrerá em uma das extremidades do intervalo $[0,L]$. Se $x=0$ o arame será todo usado para formar o triângulo, e a área total será

$$A=\frac{0^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L-0}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}L^2}{36}=0{,}0481125224L^2$$

Se $x=L$ o arame será todo usado para formar o círculo, e a área total será

$$A=\frac{L^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{L-L}{3}\right)^2=\frac{L^2}{4\pi}=0{,}0795774715L^2$$

Logo o máximo ocorre quando o arame é usado somente para o círculo.

Resumindo

(a) $x=L$

(b) $x=\dfrac{2\pi\sqrt{3}}{18+2\pi\sqrt{3}}\cdot L$

5. (1,0 ponto) ---

Ache as seguintes antiderivadas.

(a) $\displaystyle\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$

(b) $\displaystyle\int 5\sqrt{8x+5}dx$

Solução:

(a)
$$\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{1+2x+x^2}{\sqrt{x}}dx = \int \left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2x}{\sqrt{x}} + \frac{x^2}{\sqrt{x}}\right] dx$$
$$= \int \left[x^{-1/2} + 2x^{1/2} + x^{3/2}\right] dx =$$
$$= \frac{1}{1-1/2}x^{1/2} + 2\frac{1}{1+1/2}x^{3/2} + \frac{1}{1+3/2}x^{5/2} + C =$$
$$= \frac{1}{1/2}x^{1/2} + 2\frac{1}{3/2}x^{3/2} + \frac{1}{5/2}x^{5/2} + C =$$
$$= 2x^{1/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{2}{5}x^{5/2} + C$$

(b)
$$\int 5\sqrt{8x+5}\,dx$$

Com $u = 8x+5 \implies \frac{du}{dx} = 8$ e substituindo na integral

$$\int 5\sqrt{8x+5}\,dx = \int 5\sqrt{8x+5}\cdot\frac{8}{8}\,dx$$
$$= \frac{5}{8}\int \sqrt{8x+5}\cdot 8\,dx$$
$$= \frac{5}{8}\int \sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{10}{24}(8x+5)^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{10}{24}\sqrt{(8x+5)^3} + C$$

6. (1,0 ponto) ———————————————————————————

O valor médio de uma função f em um intervalo $[a,b]$ é definido por

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Calcule o valor médio das seguintes funções nos intervalos indicados:

(a) $f(x) = (3x+2)$ em $[2,6]$

(b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-15}}$ em $[4,8]$

(c) $f(x) = \cos x + e^{-x}$ em $[-\pi/2, \pi/2]$

Solução:

(a)
$$\frac{1}{6-2}\int_2^6 (3x+2)dx = \frac{1}{4}\left[3\frac{x^2}{2}+2x\right]_2^6$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(3\frac{6^2}{2}+2\cdot 6\right)-\left(3\frac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{108}{2}+12\right)-\left(\frac{12}{2}+4\right)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[(54+12)-(6+4)\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[66-10\right] = \frac{56}{4} = 14$$

(b)
$$\frac{1}{8-4}\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}dx = \frac{1}{4}\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}dx$$

Com $u = x^2 - 15 \implies \frac{du}{dx} = 2x$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}\ \frac{2}{2}\ dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-15}}2xdx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}u^{-\frac{1}{2}+1}+C = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}+C = \sqrt{u}+C$$
$$= \sqrt{x^2-15}+C$$

Logo
$$\frac{1}{8-4}\int_4^8 \frac{x}{\sqrt{x^2-15}}dx = \frac{1}{8-4}\left[\sqrt{x^2-15}\right]_4^8$$
$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{8^2-15}-\sqrt{4^2-15}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[\sqrt{64-15}-\sqrt{16-15}\right]$$
$$= \frac{1}{4}\left[7-1\right] = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

(c)
$$\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\cos x + e^{-x}\right]dx = \frac{1}{\pi}\left[\text{sen } x - e^{-x}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\text{sen } \frac{\pi}{2} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)-\left(\text{sen } \left(-\frac{\pi}{2}\right)-e^{+\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

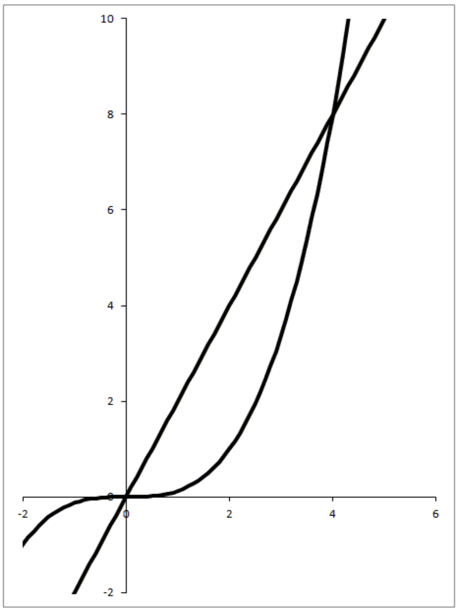
$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(1 - e^{-\frac{\pi}{2}}\right) - \left(-1 - e^{+\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2 - e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

7. (1,0 ponto)

Faz-se girar em torno do eixo y a região do primeiro quadrante limitada pelos gráficos de $y = \frac{1}{8}x^3$, $y = 2x$. Determinar o volume do sólido assim gerado.

Solução:



Intersecções:

$$\frac{1}{8}x^3 = 2x \Longrightarrow x^3 = 16x \Longrightarrow x^3 - 16x = 0 \Longrightarrow x(x^2 - 16) = 0 \Longrightarrow x(x+4)(x-4) = 0$$

Como nos interessa somente o primeiro quadrante as intersecções ocorrem em $x = 0$ $(y = 0)$ e $x = 4$ $(y = 8)$. A rotação será em torno do eixo y, logo, sendo V o volume desejado,

$$y = \frac{1}{8}x^3 \implies x = \sqrt[3]{8y} = (8y)^{\frac{1}{3}} \quad \text{e} \quad y = 2x \implies x = \frac{y}{2}$$

$$V = \int_0^8 \pi\left[4y^{2/3} - \frac{1}{4}y^2\right]dy = \int_0^8 \pi\left[\left((8y)^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2\right]dy = \int_0^8 \pi\left[4y^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}y^2\right]dy$$

$$= \pi\left[\frac{12}{5}y^{5/3} - \frac{1}{12}y^3\right]_0^8 = \pi\left[\frac{12}{5}8^{5/3} - \frac{1}{12}8^3\right] = \pi\left[\frac{384}{5} - \frac{128}{3}\right] = \frac{512\pi}{15}$$

8. (1,0 ponto)

Para as funções a seguir, determine suas antiderivadas

(a) $\int (e^x - x^e)\, dx$

(b) $\int e^{-x^2+2} \cdot x\, dx$

(c) $\int 3^{2x} dx$

Solução:

(a) $\int (e^x - x^e) dx = \int e^x dx - \int x^e dx = e^x - \frac{1}{e+1} x^{e+1} + C$

(b) $\int e^{-x^2+2} \cdot x dx$

Com $u = -x^2 + 2$, temos $\frac{du}{dx} = -2x$. Substituindo na integral

$$\int e^{-x^2+2} \cdot x dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2+2} \cdot (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int e^u du = -\frac{e^u}{2} + C = -\frac{e^{-x^2+2}}{2} + C$$

(c)
$$\begin{aligned} \int 3^{2x} dx &= \int 3^{2x} \cdot \frac{\ln 3}{\ln 3} \cdot \frac{2}{2} dx \\ &= \frac{1}{2 \ln 3} \int 3^{2x} \cdot 2 \cdot \ln 3 dx \\ &= \frac{1}{2 \ln 3} \cdot 3^{2x} + C \end{aligned}$$

9. (1,0 ponto)

A partir das propriedades de logaritmo natural deduza as seguintes propriedades de $\log_a x$:

(a) $\log_a 1 = 0$

(b) $\log_a a = 1$

(c) $\log_a uv = \log_a u + \log_a v$

(d) $\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

(e) $\log_a \frac{1}{v} = -\log_a v$

(f) $\log_a u^r = r \log_a u$

(g) $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$

Solução:

(a) $\log_a 1 = \frac{\ln 1}{\ln a} = \frac{0}{\ln a} = 0$

(b) $$\log_a a = \frac{\ln a}{\ln a} = 1$$

(c) $$\log_a uv = \frac{\ln uv}{\ln a} = \frac{\ln u + \ln v}{\ln a} = \frac{\ln u}{\ln a} + \frac{\ln v}{\ln a} = \log_a u + \log_a v$$

(d) Usando o item acima

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a uv^{-1} = \log_a u + \log_a v^{-1} = \log_a u + \frac{\ln v^{-1}}{\ln a} =$$

$$= \log_a u - 1 \cdot \frac{\ln v}{\ln a} = \log_a u - \log_a v$$

(e) Com $u = 1$ no item acima temos diretamente

$$\log_a \frac{1}{v} = -\log_a v$$

(f) $$\log_a u^r = \frac{\ln u^r}{\ln a} = \frac{r \ln u}{\ln a} = r \log_a u$$

(g) $$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{d}{dx} \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a} \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

10. (1,0 ponto)

Use a regra de L'Hôpital para calcular os limites

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x}$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{x + \text{sen } 2x}{x - \text{sen } 2x}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

(b) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(c) $$\lim_{x \to 0} \frac{x + \text{sen } 2x}{x - \text{sen } 2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 + 2\cos\, 2x}{1 - 2\cos\, 2x} = \frac{1 + 2\cos\, 0}{1 - 2\cos\, 0} = \frac{1 + 2 \cdot 1}{1 - 2 \cdot 1} = \frac{3}{-1} = -3$$