Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AD1 - 1^o semestre de 2012 - Gabarito

Questões

1. (1,0 ponto) ———————————————

   Reescreva as funções a seguir como uma composição de duas outras funções.

   (a) $y = \text{sen } x^2$

   (b) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

   (c) $y = \log_{10}(1 - x)$

   Solução:

   (a) $y = \text{sen } x^2$

   $$y = f \circ g$$

   onde

   $$f(x) = \text{sen } x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2$$

   (b) $y = \sqrt{1 + \cos x}$

   $$y = f \circ g$$

   onde

   $$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{e} \quad g(x) = 1 + \cos x$$

(c) $$y = \log_{10}(1-x)$$

$$y = f \circ g$$

onde

$$f(x) = \log_{10}(x) \quad \text{e} \quad g(x) = 1 - x$$

2. (1,0 ponto) ———

Para as seguintes funções obtenha uma expressão para suas inversas.

(a)	$y = 2x$,	para todo x
(b)	$y = x^4$,	$0 \leq x$
(c)	$y = x^2 + 2x - 1$,	$x \geq -1$
(d)	$y = 2^x$,	para todo x

Solução:

(a) $y = 2x$, para todo x

$$x = 2y \longrightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$y^{-1} = \frac{x}{2}, \quad \text{para todo } x$$

(b) $y = x^4$, $0 \leq x$

$$x = y^4 \longrightarrow y = \sqrt[4]{x}$$

$$y^{-1} = \sqrt[4]{x}$$

(c) $y = x^2 + 2x - 1$, $x \geq -1$

$$x = y^2 + 2y - 1 \longrightarrow y^2 + 2y - (1 + x) = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4(1+x)}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+1+x}}{2} = -1 \pm \sqrt{2+x}$$

logo

$$y^{-1} = -1 + \sqrt{2+x}$$

(d) $y = 2^x$, para todo x

Aplicando logaritmo de qualquer base de ambos os lados,

$$x = 2^y \longrightarrow \log x = \log 2^y \longrightarrow \log x = y \log 2 \longrightarrow y = \frac{\log x}{\log 2}$$

se for log de base 2.

$$y^{-1} = \frac{\log x}{\log 2} = \log_2 x$$

3. (1,0 ponto) ———

Sabendo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

calcule os seguintes limites.

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3\text{sen } x}{x}$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2}$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \left[3 - \frac{\text{sen } x}{x}\right]$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3\text{sen } x}{x} = \lim_{x\to 0} 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 3 \cdot 1 = 3$$

(b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

(c) $$\lim_{x\to 0} \left[3 - \frac{\text{sen } x}{x}\right] = \left[\lim_{x\to 0} 3 - \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x}\right] = \lim_{x\to 0} 3 - \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 3 - 1 = 2$$

4. (1,0 ponto) ———

Calcule os seguintes limites.

(a) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7}$$

(c) $$\lim_{x\to 5} \frac{3x^2 - 13x - 10}{2x^2 - 7x - 15}$$

(d) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$$

Solução:

(a) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$$

(b) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 5x - 7} = \lim_{x\to 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+7/2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2(x+7/2)} =$$

$$\frac{\lim_{x\to 1} x}{\lim_{x\to 1} 2(x+7/2)} = \frac{1}{2(1+7/2)} = \frac{1}{2(2/2+7/2)} = \frac{1}{(2+7)} = \frac{1}{9}$$

(c) $$\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-13x-10}{2x^2-7x-15}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)(x+2/3)}{2(x-5)(x+3/2)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x+2/3)}{2(x+3/2)}=$$

$$\frac{\lim_{x\to 5}3(x+2/3)}{\lim_{x\to 5}2(x+3/2)}=\frac{3(5+2/3)}{2(5+3/2)}=\frac{3(15/3+2/3)}{2(10/2+3/2)}=\frac{3(17/3)}{2(13/2)}=\frac{17}{13}$$

(d) $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2}=$$

$$\lim_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x}+2)=(4+4)(\sqrt{4}+2)=(8)(4)=32$$

5. (1,0 ponto) ———————————————————————————

Seja a função f definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|\,x\,|}{x} & \text{se} \quad x\neq 0\\ 1 & \text{se} \quad x=0\end{cases}$$

calcule

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

Solução:

Se $x>0$ então $|\,x\,|=x$ e se $x<0$ então $|\,x\,|=-x$. Portanto

(a) $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1$$

(b) $$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

(c) Como

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x}=-1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x}=1$$

logo o limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|}{x}$$

não existe porque os limites laterais à esquerda e à direita são diferentes.

6. (1,5 pontos) ———————————————————————————

Ache os limites infinitos.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x^2}\right)$

Solução:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(2+\frac{1}{x^2}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} 2 + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\right) = (2+0) = 2$

7. (1,5 pontos) ———

Se $f(x) = \sqrt{x}$ ache $f'(x)$ e diga qual o domínio de f'.

Solução:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \longrightarrow \quad f'(x) = \left[x^{\frac{1}{2}}\right]' = \left[\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}\right] = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Como f' só existe para $x > 0$, seu domínio é $\{x \in \mathbb{R},\ \text{tais que } x > 0\}$.

8. (2,0 pontos) ———

Verifique se as seguintes funções são contínuas em $x = 2$.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$

(c) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$

Solução:
Temos que verificar se o limite em 2 existe e se o valor da função em 2 tem o mesmo valor do limite.

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2}(x+2) = (2+2) = 4$$

$f(x)$ não é definida em $x = 2$

Portanto $f(x)$ não é contínua em $x = 2$.

(b) $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 3 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

$$g(2) = 3 \neq 4 = \lim_{x\to 2} g(x)$$

Portanto $g(x)$ não é contínua em $x = 2$.

(c) $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{se} \quad x \neq 2 \\ 4 & \text{se} \quad x = 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2} h(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

$$h(2) = 4 = \lim_{x\to 2} h(x)$$

Portanto $h(x)$ é contínua em $x = 2$.