Curso Superior de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Matemática para Computação
AP2 - 2^o semestre de 2015 - Gabarito

Questões

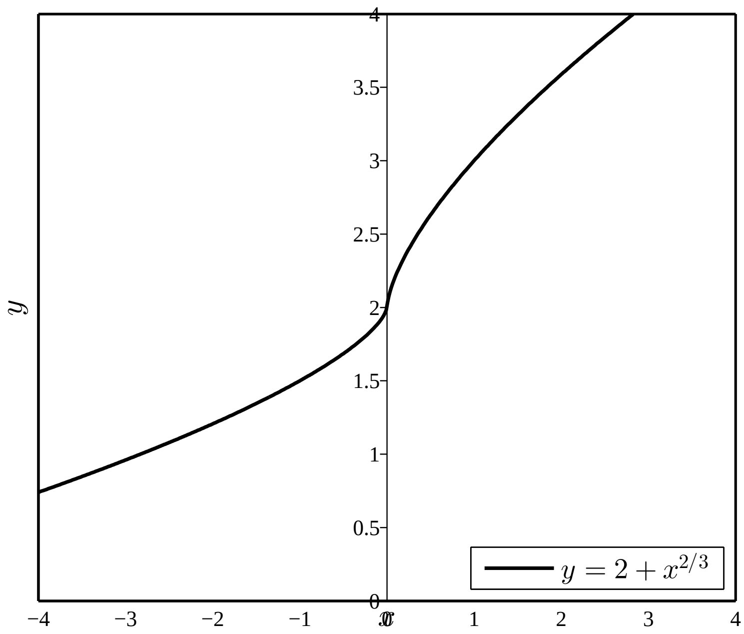
1. (2,5 pontos)

   Ache os extremos relativos da função $f(x) = 2 + x^{2/3}$ e os intervalos aonde f é crescente ou decrescente.

   Solução:

   $$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

   Logo, $x = 0$ é um ponto crítico desde que $f'(0)$ não é definido, embora $x = 0$ esteja no domínio de f. Observe que $f'(x)$ tende a ∞ quando x tende a 0. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativa e, portanto f é decrescente para $x \in (-\infty, 0)$ e quando $x > 0$, $f'(x)$ é positiva e, portanto f é crescente para $x \in (0, \infty)$. Daí podemos concluir que f tem um mínimo relativo em $x = 0$.



2. (2,5 pontos)

Encontre as seguintes antiderivadas:

(a)

$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx$$

(b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx$$

Solução:

(a)

$$\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2}\,dx = \int \left[\frac{x^3}{x^2}+\frac{5x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right]dx = \int \left[x+5-4x^{-2}\right]dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+5x-4\frac{x^{-1}}{-1}+C\right] = \frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$$

$$= \frac{x^3+10x^2+8}{2x}+C$$

(b)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}}\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+2)^{-1/4}3x^2\,dx = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3/4}(x^3+2)^{3/4}\right)+C$$

$$= \frac{4}{9}(x^3+2)^{3/4}+C$$

3. (2,5 pontos)

Usando a regra de L'Hôpital calcule os limites:

(a) $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$

(b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{e^x}$

Solução:

(a) Quando x se aproxima de 0 pela direita, $\ln x$ tende a $-\infty$. E quando x se aproxima de 0 pela direita, $1/x$ tende a $+\infty$. Logo podemos aplicar L'Hôpital.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x \ln x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -x = 0\end{aligned}$$

(b) $\dfrac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow$ L'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1/x}{1} \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0\end{aligned}$$

(c) $\dfrac{+\infty}{+\infty} \longrightarrow$ L'Hôpital

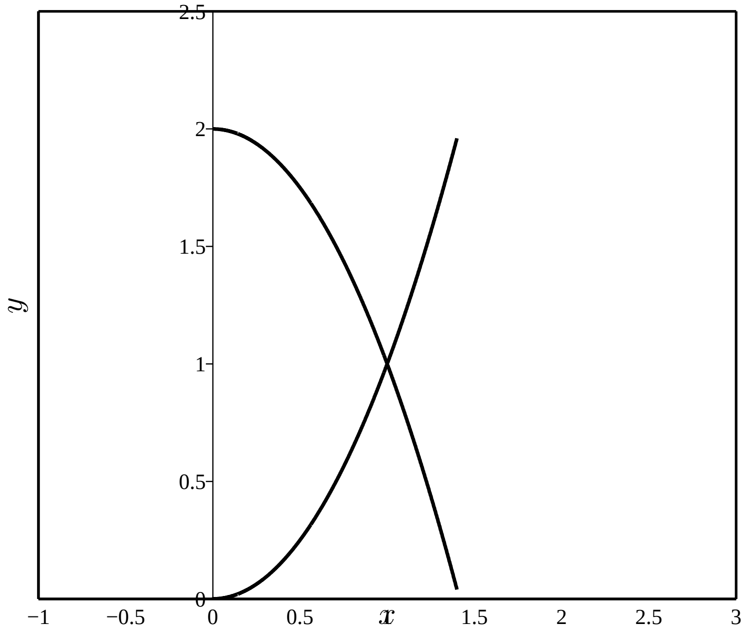
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

4. (2,5 pontos)

Ache o volume do sólido obtido por rotação em torno do eixo y da região no primeiro quadrante limitada superiormente pela parábola $y = 2 - x^2$ e inferiormente pela parábola $y = x^2$.

Solução:

O gráfico mostra as duas curvas e a região a ser rodada em torno do eixo y.



Vamos determinar a interseção das curvas no primeiro quadrante.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \implies x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 = 2 \implies x = \pm 1$$

No primeiro quadrante a interseção ocorre em $x = 1$, no ponto $(x, y) = (1, 1)$.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ x = \sqrt{2 - y} \end{cases}$$

$$V = \int_0^1 \pi r^2 \, dy + \int_1^2 \pi r^2 \, dy = \int_0^1 \pi \left(\sqrt{y}\right)^2 \, dy + \int_1^2 \pi \left(\sqrt{2 - y}\right)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^1 y \, dy + \pi \int_1^2 (2 - y)^2 \, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \pi \left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \pi \left[\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] + \pi \left[2 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{1^2}{2}\right] = \pi \frac{1}{2} + \pi \left[4 - 2 - 2 + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$