Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina: Matemática Para Computação

AD1 - 2° semestre de 2008

1. (1,0 ponto) ——————————————————————————-

   Determine o domínio das seguintes funções:

   (a) (0,5 ponto)

   $$g(x) = \sqrt{x^3 - 27}$$

   (b) (0,5 ponto)

   $$g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$$

   Solução:

   (a) (0,5 ponto)

   $$g(x) = \sqrt{x^3 - 27}$$

   $$D(g) = [3, +\infty)$$

   (b) (0,5 ponto)

   $$g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$$

   $$x^2 - 4 \neq 0$$

   $$x^2 \neq 4$$

   $$D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2 \text{ e } x \neq -2\}$$

2. (1,0 ponto) ————————————————————————————————-
   Calcule as funções compostas e determine os seus respectivos domínios:

   $$g \circ f(x) = ?$$

   Onde:

   (a) (0,5 ponto)

   $$f(x) = x^3\ ,\ g(x) = x + 1$$

   (b) (0,5 ponto)

   $$f(x) = x^2 + 4\ ,\ g(x) = 2x + 2$$

   Solução:

   (a) (0,5 ponto)

   $$f(x) = x^3\ ,\ g(x) = x + 1$$

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = x^3 + 1$$

   $$D(g \circ f) = \mathbb{R}$$

   (b) (0,5 ponto)

   $$f(x) = x^2 + 4\ ,\ g(x) = 2x + 2$$

   $$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x^2 + 4) + 2 = 2x^2 + 8 + 2 = 2x^2 + 10$$

   $$D(g \circ f) = \mathbb{R}$$

3. (1,0 ponto) ————————————————————————————————-
   Determine as funções inversas e seus domínios:

   (a) (0,5 ponto)

   $$g(x) = \frac{x+6}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$$

(b) (0,5 ponto)

$$f(x) = 3x - 5$$

Solução:

(a) (0,5 ponto)

$$g(x) = \frac{x+6}{2x-1}$$

$$y = \frac{x+6}{2x-1}$$

$$x = \frac{y+6}{2y-1}$$

$$2xy - x = y + 6$$

$$x(2y-1) = y + 6$$

$$x = \frac{y+6}{2y-1}$$

$$g^{-1}(y) = x = \frac{y+6}{2y-1}$$

Para o domínio:

$$2y - 1 \neq 0$$

$$2y \neq 1$$

$$y \neq \frac{1}{2}$$

$$D(g^{-1}(y)) = \left\{ y \in \mathbb{R} \middle| y \neq \frac{1}{2} \right\}$$

(b) (0,5 ponto)

$$f(x) = 3x - 5$$

$$y = 3x - 5$$

$$x = 3y - 5$$

$$3y = x + 5$$

$$y = \frac{x+5}{3}$$

$$g^{-1}(x) = y = \frac{x+5}{3}$$

$$D(g^{-1}(x)) = \mathbb{R}$$

4. (1,5 ponto)

Esboce o gráfico da função abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

OBS: Utilize as ferramentas do cálculo para determinar os itens abaixo.

1 - Domínio; (0,2 ponto)
2 - Intersecções com os eixos X e Y; (0,4 ponto)
3 - Assíntotas verticais e horizontais.(0,4 ponto)

Valor do gráfico: 0,5 ponto;

Solução:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

1) Claramente o domínio da função é toda a reta dos números reais exceto $x = 0$ (Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$).

2) Interseções com os eixos.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

intersecções com o eixo Y: Ocorre quando $x = 0$, logo:

$$y = \frac{1}{0}$$

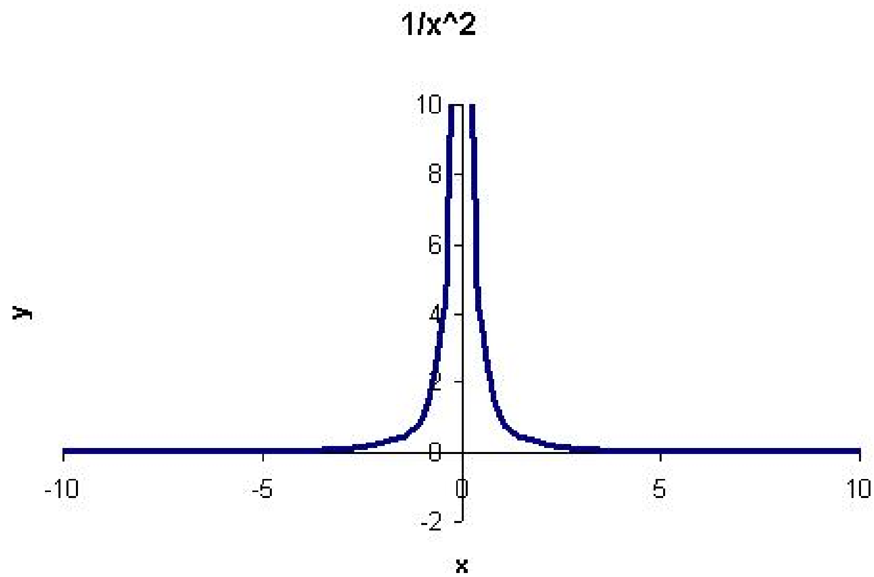
Não existem valores de y tais que $x = 0$.

intersecções com o eixo X: Ocorre quando $y = 0$, logo:

$$0 = \frac{1}{x^2}$$

Não existem valores de x tais que $y = 0$.

Portanto, não existem intersecções com os eixo X e Y.



3) Vamos verificar se existem **assíntotas horizontais**.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Portanto a assíntota horizontal é $x = 0$.

E agora vamos verificar se existem **assíntotas verticais**.
Procuramos por valores de a tais que os limites abaixo ocorram:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} \frac{1}{x^2} = \pm\infty$$

ou

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} \frac{1}{x^2} = \pm\infty$$

Portanto, o único valor de a tal que os limites são verdadeiros, é o valor $a = 0$, uma vez que,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

5. (1,5 ponto) ———————————————————————————-

Calcule os seguintes limites:

(a) (0,5 ponto)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{5x+3}\right) =$$

(b) (0,5 ponto)

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2}\right) =$$

(c) (0,5 ponto)

$$\lim_{x\to 3} \left(\frac{x}{x^3-9}\right) =$$

Solução:

(a) (0,5 ponto)

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{5x+3}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x)\left(\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}\right)}{(x)\left(\frac{5x}{x} + \frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{5 + \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{2-0}{5+0}$$

$$= \frac{2}{5}$$

(b) (0,5 ponto)

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{x^3}{x^2}}{\frac{4-x^2}{x^2}} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{\frac{4}{x^2} - 1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x$$

$$= \infty$$

(c) (0,5 ponto)

$$\lim_{x \to 3} \left(\frac{x}{x^3 - 9} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(\frac{3}{27 - 9} \right)$$

$$= \lim_{x \to 3} \left(\frac{3}{18} \right)$$

$$= \frac{3}{18}$$

6. (1,5 ponto)

Verifique se as funções abaixo são contínuas:

(a) (0,75 ponto)

$$f(x) = x^2 + 4$$

(b) (0,75 ponto)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \; se \; x \neq 3 \\ \\ 0 \; se \; x = 3 \end{cases} \tag{1}$$

Solução:

(a) (0,75 ponto)

$$f(x) = x^2 + 4$$

Pela definição de continuidade, para que uma função seja contínua em um ponto, os limites laterais, quando x tende a esse ponto, devem existir, serem iguais entre si e iguais ao valor da função $f(x)$ nesse ponto, ou seja,

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

Mas

$$\lim_{x \to 2^+} (x^2 + 4) = 8$$

$$\lim_{x \to 2^-} (x^2 + 4) = 8$$

$$f(2) = ((2)^2 + 4) = 8$$

logo $f(x) = x^2 + 4$ é contínua em $x = 2$.

a função $f(x)$ não possui descontinuidade, uma vez que é um polinômio e dessa forma contínua em qualquer $x \in \mathbb{R}$.

(b) (0,75 ponto)

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \; se \; x \neq 3 \\ \\ 0 \; se \; x = 3 \end{cases} \tag{2}$$

Pela definição de continuidade, para que uma função seja contínua em um ponto, os limites laterais, quando x tende a esse ponto, devem existir, serem iguais entre si e iguais ao valor da função $f(x)$ nesse ponto, ou seja,

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3)$$

verificando os limites laterais quando x tende a 3 pela direita e pela esquerda, temos que:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^3$$

$$= \lim_{x \to 3^+} 27$$

$$= 27$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^3$$

$$= \lim_{x \to 3^-} 27$$

$$= 27$$

mas, como $f(3) = 0$, temos que:

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) \neq f(3)$$

e

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq f(3)$$

Logo, a função $f(x)$ não é contínua em $x = 3$.

7. (1,0 ponto) ——————————————————————————-

Calcule a derivada da função f(x) abaixo:

$$f(x) = x^2 - 5x + 4$$

OBS: Utilize a definição de derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Solução:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - 5(x + \Delta x) + 4 - (x^2 - 5x + 4)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5x - 5\Delta x + 4 - x^2 + 5x - 4}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 5\Delta x}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x - 5 =$$

$$= 2x - 5$$

8. (1,5 ponto)

Calcule as derivadas abaixo:

(a) (0,5 ponto)

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$y = (x^2 + 9)(x + 3)$$

(b) (0,5 ponto)

$$\frac{dy}{dx} =$$

$$y = \frac{5}{x^7}$$

(c) (0,5 ponto)

$$\frac{dx}{dy} =$$

$$y = x^5$$

Solução:

(a) (0,5 ponto)

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 9)(x + 3)$$

$$\frac{dy}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}.v. + u.\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{dv}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x).(x+3) + (x^2+9).1$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + 6x + x^2 + 9$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x + 9$$

(b) (0,5 ponto)

$$y = \frac{5}{x^7}$$

$$u = 5 \qquad v = x^7$$

$$\frac{dy}{dx}(\frac{u}{v}) = \frac{\frac{du}{dx}.v - u.\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = 7x^6$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0.x^7 - 5.7x^6}{x^{14}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{35x^6}{x^{14}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{35}{x^8}$$

ou

$$y = 5x^{-7}$$

$$\frac{dy}{dx} = -7.5.x^{-8}$$

$$\frac{du}{dx} = -35.x^{-8}$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{35}{x^8}$$

(c) (0,5 ponto)

$$y = x^5$$

$$x = y^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}y^{\frac{1}{5}-1}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{5}y^{\frac{-4}{5}}$$