Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina - Probabilidade e Estatística

AP3 1° semestre de 2013

1 – Primeira Questão: (2,0 pontos)

Os principais defeitos que causam problemas em um computador são: mau-contato nas memórias (D1); mau-contato nas placas de expansão: vídeo, som, rede (D2); aquecimento, devido ao excesso de poeira (D3); e outros (D4). Uma manutenção preventiva diminui o risco de seu computador apresentar esses defeitos. Ela consiste em se fazer uma limpeza geral do computador e procurar falhas de hardware e de software.

Admita que: (i) sem manutenção preventiva seu computador pode apresentar os defeitos D1, D2, D3 e D4 ao longo de um ano com probabilidades 4%, 4%, 6% e 6%, respectivamente; (ii) se for feita uma manutenção preventiva, a s probabilidades do seu computador apresentar os defeitos D1, D2, D3 e D4 ao longo de um ano caem para 2,8%, 2,8%, 4,2% e 4,2%, respectivamente; (iii) as eventuais ocorrências dos problemas D1, D2, D3 e D4 são eventos independentes, com ou sem manutenção preventiva.

Pergunta-se:

a) Qual é a probabilidade de que o seu computador apresente algum defeito ao longo de um ano, se você não fizer manutenção preventiva?

Resolução:

Neste caso (sem manutenção preventiva) tem-se que

$$P(D1) = P(D2) = 0{,}04 \text{ e } P(D3) = P(D4) = 0{,}06.$$

Logo

$$P(D1^C) = P(D2^C) = 0{,}96 \text{ e } P(D3^C) = P(D4^C) = 0{,}94.$$

Como os defeitos são independentes temos que

$$P(a\lg um\_defeito) = P(D1 \cup D2 \cup D3 \cup D4) = 1 - P(D1^C \cap D2^C \cap D3^C \cap D4^C)$$

$$P(a\lg um\_defeito) = 1 - P(D1^C).P(D2^C).P(D3^C).P(D4^C) = 1 - 0{,}96.0{,}96{,}0{,}94.0{,}94 = 0{,}186$$

b) E se você fizer manutenção preventiva?

Resolução:

Com manutenção preventiva tem-se que:

$$P(D1) = P(D2) = 0{,}028 \text{ e } P(D3) = P(D4) = 0{,}042.$$

Logo: $P(D1^C) = P(D2^C) = 0{,}972$ **e** $P(D3^C) = P(D4^C) = 0{,}958$**.**

Como os defeitos são independentes temos que:

$$P(a\lg um\_defeito) = P(D1 \cup D2 \cup D3 \cup D4) = 1 - P(D1^C \cap D2^C \cap D3^C \cap D4^C)$$

$$P(a\lg um\_defeito) = 1 - P(D1^C).P(D2^C).P(D3^C).P(D4^C) = 1 - 0{,}972.0{,}972.0{,}958.0{,}958 = 0{,}1329$$

2 – Segunda questão: (1,0 ponto)

Sabe-se que na cidade de São João, 51% dos adultos são homens. Seleciona-se aleatoriamente um adulto para uma pesquisa e sabe-se que ele tem um problema coronariano. Sabe-se também, com base em dados de um órgão de controle da saúde, que 1,7% das mulheres e 9,5% dos homens têm esse problema no coração. Use essa informação para encontrar a probabilidade de que o sujeito selecionado seja um homem.

Resolução:

H = homem
M = mulher (não homem)
P(H) = 0,51 e P(M) = 0,40
P(cor/M) = 0,017
P(cor/H) = 0,095

Utilizando o Teorema de Bayes:

$$P(H/cor) = \frac{P(H).P(cor/H)}{P(H).P(cor/H) + P(M).P(cor/M)}$$

$$P(H/cor) = \frac{0{,}51.0{,}51}{0{,}51.0{,}095 + 0{,}49.0{,}017} = 0{,}8533$$

3 – Terceira questão: (2,0 pontos)

Uma urna contém 16 bolas brancas e 14 pretas. Calcular a probabilidade de ao serem retiradas 5 bolas, 3 serem brancas, quando a amostragem for:

a) com reposição

Resolução:

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

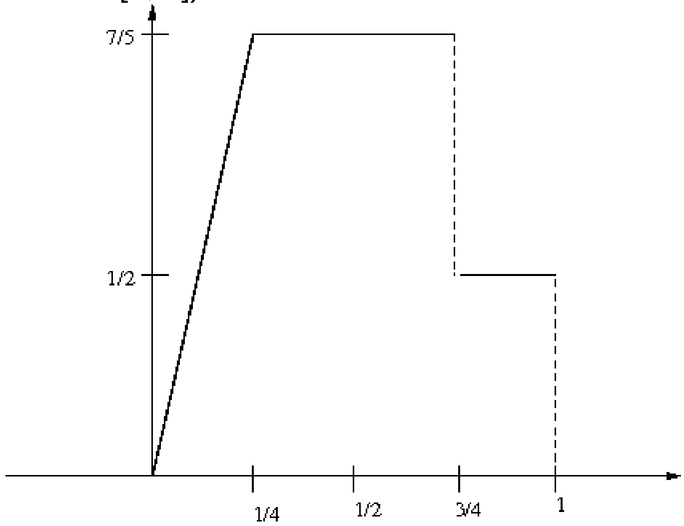
$$P(X=3) = \binom{5}{3} \frac{8}{15}^{3} (1 - \frac{8}{15})^{2} = 0{,}33$$

b) sem reposição

$$P(X=x) = \frac{\binom{n}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{16}{3}\binom{30-16}{5-3}}{\binom{30}{5}}=0,35$$

4 – Quarta questão: (2,0 pontos)
A figura abaixo representa uma função de distribuição de probabilidade (a função vale zero para valores fora do intervalo [0, 1]).



a) Prove que esta função é de fato uma função de probabilidade (0,5 ponto);
Resolução:
Observe que a função é não negativa, assim teremos de demonstrar que ela é notmalizada, ou seja,

$$\int_0^1 f(x)dx=1$$

já que é informado que a função se anula fora do intervalo [0, 1]. É necessário calcularmos esta integral, o que é equivalente a determinar a área entre o gráfico da função e o eixo x. Faremos de duas maneiras. Na primeira determinaremos as funções contínuas que compõem a função que analizamos, o que nos será útil no item b.
No intervalo [0, 1/4] temos uma reta que passa pelos pontos (0, 0) e (1/4, 7/5). Como a equação da reta pode ser dada por

$$y=a\,x+b$$

ela deve passar pelos pontos acima. Então teremos

$$\begin{aligned}0&=a\times 0+b\\ \frac{7}{5}&=a\times\frac{1}{4}+b\end{aligned}\ .$$

Do sistema acima tiramos $b=0$ **e** $a=\frac{28}{5}$ **e a equação da reta no intervalo [0, 1/4] será**

$$y=\frac{28}{5}x \quad .$$

O segundo subintervalo [1/4, 3/4] é dado por uma função constante $y=\frac{7}{5}$ **. O terceiro subintervalo [3/4, 1] é também uma função constante** $y=\frac{1}{2}$ **.**
Assim teremos que a integral da função proposta é dada por

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{1/4}\frac{28}{5}x\,dx+\int_{1/4}^{3/4}\frac{7}{5}dx+\int_{3/4}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{28}{5}\int_0^{1/4}x\,dx+\frac{7}{5}\int_{1/4}^{3/4}dx+\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{28}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/4}+\frac{7}{5}x\Big|_{1/4}^{3/4}+\frac{1}{2}x\Big|_{3/4}^{1}=\frac{28}{10}[(1/4)^2-0]+\frac{7}{5}[(\frac{3}{4})-(\frac{1}{4})]+\frac{1}{2}[1-(\frac{3}{4})]$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{14}{5}\frac{1}{16}+\frac{7}{5}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{7}{40}+\frac{7}{10}+\frac{1}{8}=1$$

Outra maneira é observar que a área total é a combinação das áreas de um triângulo de base 1/4 e altura 7/5 e dois retângulos, um de base 1/2 e altura 7/5 e outro de base 1/4 e altura 1/2. Assim teremos

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\times\frac{7}{5}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{7}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{40}+\frac{7}{10}+\frac{1}{8}=1$$

b) Calcule a média da distribuição (0,5 ponto);
Resolução:
Usaremos a definição de média de uma função de distribuição de probabilidade, ou seja,

$$\mu=\int_0^1 x\,f(x)\,dx$$

que no presente caso será

$$\int_0^1 x\,f(x)dx=\int_0^{1/4}x\frac{28}{5}x\,dx+\int_{1/4}^{3/4}\frac{7}{5}x\,dx+\int_{3/4}^{1}\frac{1}{2}x\,dx=\frac{28}{5}\int_0^{1/4}x^2dx+\frac{7}{5}\int_{1/4}^{3/4}x\,dx+\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}x\,dx$$

o que nos leva a

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{28}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/4} + \frac{7}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_{1/4}^{3/4} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{3/4}^{1} = \frac{28}{15}[(1/4)^3 - 0] + \frac{7}{10}[(\frac{3}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2] + \frac{1}{4}[1 - (\frac{3}{4})^2]$$,

e finalmente

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{28}{15}\frac{1}{64} + \frac{7}{10}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{7}{16} = \frac{469}{960} \approx 0{,}4885 = \mu$$

c) Calcule a variância da distribuição (1,0 ponto);

Resolução:

Temos a seguinte definição para a variância

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

calculando primeiro a integral.

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^{1/4} x^2 \frac{28}{5} x\,dx + \int_{1/4}^{3/4} \frac{7}{5} x^2\,dx + \int_{3/4}^{1} \frac{1}{2} x^2\,dx = \frac{28}{5}\int_0^{1/4} x^3\,dx + \frac{7}{5}\int_{1/4}^{3/4} x^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{3/4}^{1} x^2\,dx$$

ou

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{28}{5}\frac{x^4}{4}\Big|_0^{1/4} + \frac{7}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_{1/4}^{3/4} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{3/4}^{1} = \frac{28}{20}[(1/4)^4 - 0] + \frac{7}{15}[(\frac{3}{4})^3 - (\frac{1}{4})^3] + \frac{1}{6}[1 - (\frac{3}{4})^3]$$

e finalmente

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{7}{5}\frac{1}{256} + \frac{7}{15}\frac{13}{32} + \frac{1}{6}\frac{37}{64} = \frac{373}{1280} \approx 0{,}2914$$

e, portanto,

$$\sigma^2 = 0{,}2914 - (0{,}4885)^2 \approx 0{,}0527$$ **.**

5 – Quinta questão: (2,0 pontos)

Numa obra de construção operários pregam sarrafos de uma forma regular na forma de concretagem de uma viga de comprimento 12 metros. Sabe-se de outras obras que a probabilidade de um sarrafo não ficar bem fixado é igual para qualquer ponto da viga. Qual a probabilidade de que se encontre um sarrafo mal fixado:

Observe que a distribuição é a Uniforme pois a probabilidade é igual para qualquer ponto de fixação. Arbitrariamente escolheremos que uma extremidade se encontra em a = 0 e a outra em b = 12, que é o comprimento da viga. Assim sendo a distribuição será dada por

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12}$$

sendo nula fora do intervalo [0, 12]. Calcularemos a probabilidade da seguinte forma

$$P(x_1 < X\, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{12}\, dx \quad .$$

a) no primeiro metro de ambas as extremidades? (1,0 ponto)

Resolução:

Aqui teremos de calcular o complementar da probabilidade do problema de fixação ocorrer no intervalo [1, 11], ou seja, a probabilidade pedida é igual a

$$1 - P(1 < X < 11) = 1 - \int_{1}^{11} \frac{1}{12}\, dx = 1 - \frac{1}{12}\, x\,\Big|_1^{11} = 1 - \frac{1}{12}(11-1) = 1 - \frac{10}{12} = \frac{1}{6} \quad .$$

b) no dois metros centrais da viga? (1,0 ponto)

Resolução:

Este intervalo corresponde ao intervalo [5, 7] já que o meio da viga se encontra em 6. Assim teremos

$$P(5 < X < 7) = \int_{5}^{7} \frac{1}{12}\, dx = \frac{1}{12}\, x\,\Big|_5^{7} = \frac{1}{12}(7-5) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \quad .$$

6 – Sexta questão: (1,0 ponto)

Calcule as probabilidades abaixo:

a) P(X> 5,3) para a distribuição Normal de média 5,0 e variância 6,9 (0,5 ponto)

Resolução:

Aplicaremos diretamente a fórmula

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \quad .$$

Observe que o valor solicitado está acima do valor médio portanto, no uso da tabela deveremos subtrair de 0,5 o valor encontrado na tabela. Assim teremos

$$P(X > 5{,}3) = 0{,}5 - P\left(Z > \frac{5{,}3 - 5{,}0}{\sqrt{6{,}9}}\right) \approx 0{,}5 - P(Z > 0{,}1142) \approx 0{,}5 - P(Z > 0{,}11) = 0{,}5 - 0{,}0438 = 0{,}4562 \quad .$$

b) P (X < 23,4) para a distribuição Exponencial de parâmetro $\alpha = 0{,}03$ (0,5 ponto).

Resolução:

Neste caso a probabilidade é dada por

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} \alpha e^{-\alpha x}\, dx = e^{-\alpha x} - e^{-\alpha b} \quad .$$

lembrando que a e b são não negativos.

Para os valores solicitados teremos

$$P(0 < X < 23{,}4) = e^{0} - e^{-0{,}03 \times 23{,}4} = 1 - e^{0{,}702} \approx 1 - 0{,}4955 = 0{,}5045$$