GABARITO DA AD1 de Probabilidade e Estatística
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
1° semestre de 2016

Primeira questão (2 pontos)**:**
A f.d.p. (função densidade de probabilidade) da variável aleatória X é fornecida na seguinte tabela:

X	0	1	2	3	4	5
P(X)	P^2	0	P^2	p	P^2	p

(a) Encontre o valor de p.

SOLUÇÂO:

Como a soma de todas as probabilidades é igual a 1. Temos que
$P^2 + 0 + P^2 + P + P^2 + P = 1$
Logo,
$3P^2 + 2P - 1 = 0$
Resolvendo a equação temos:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3(-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

Logo, $P' = \frac{1}{3}$ e $p'' = -1$. Como p é uma probabilidade , temos que $0 < P < 1$, então a solução do problema é: $P = \frac{1}{3}$.

(b) Calcule $P(X \geq 4)$ e $P(X < 3)$.

SOLUÇÂO:

Para $P(X \geq 4)$, temos:

$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = p^2+p$, *ou seja*:

$$P(X \geq 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

Para $P(X < 3)$, temos:

$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$, ou seja,

$$P(X < 3) = 2p^2 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

(c) Calcule $P(|X - 3| > 2)$.

SOLUÇÂO:

A inequação $|X - 3| > 2$ fornece:
$P(|X - 3| > 2) = P(X - 3 < -2 \text{ ou } X - 3 > 2) = P(X - 3 < -2) + P(X - 3 > 2) =$

ou,

$P(\,|X-3|>2) = P(X<1) + P(X>5) = P(X=0) + P(X>5)$

Como não existe variável maior que 5, admitimos que $P(X>5) = 0$ e assim,

$P(\,|X-3|>2) = P(X<1) = P^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

Segunda questão (2 pontos):

Para estimular a venda de roupas nessa época de crise uma loja de bairro resolveu dar comissões para aos seus funcionários vendedores, premiando por venda na seguinte forma: cada funcionário ganharia R$10,00 de comissão por produto vendido, caso venda até dois produtos por dia. A partir da terceira venda, a comissão passa para R$40,00. Para avaliar a viabilidade da proposta o gerente contratou uma consultoria que, a partir de dados já obtidos nos últimos anos, pode fornecer a seguinte tabela, informando que o número de produtos vendidos em um dia pelos funcionários é uma variável aleatória P com a distribuição de probabilidades dada por:

Nº.produtos vendidos por vendedor	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	0,10	0,40	0,25	0,10	0,05	0,05	0,05

(a) Qual é o número médio de produtos vendidos por cada funcionário?

SOLUÇÂO:

Variável X: Número de produtos vendidos

Variável C: Comissão de cada vendedor

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

$\mu_X = 0 \times 0{,}10 + 1 \times 0{,}40 + 2 \times 0{,}25 + 3 \times 0{,}10 + 4 \times 0{,}05 + 5 \times 0{,}05 + 6 \times 0{,}05 =$

$\mu_X = 0 + 0{,}40 + 0{,}50 + 0{,}30 + 0{,}20 + 0{,}25 + 0{,}30 = 1{,}95$

(b) E o desvio padrão?

SOLUÇÂO:

Para calcular o desvio padrão precisamos inicialmente calcular a variância:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - \mu^2$$

$Var(X) = (0{,}10 \times 0^2 + 0{,}40 \times 1^2 + 0{,}25 \times 2^2 + 0{,}10 \times 3^2 + 0{,}05 \times 4^2 + 0{,}05 \times 5^2 + 0{,}05 \times 6^2) - 1{,}95^2$

$Var(X) = 0 + 0{,}40 + 1{,}00 + 0{,}90 + 0{,}80 + 1{,}25 + 1{,}80 - 3{,}8025$

$Var(X) = 6{,}15 - 3{,}8025 = 2{,}3475$

Logo, o desvio padrão: $DP = \sqrt{2{,}3475} \cong 1{,}53$

(c) Qual a comissão média de cada um deles?

SOLUÇÂO:

Nº.produtos vendidos por vendedor	0	1	2	3	4	5	6
Comissão (C)	0	10	20	60	100	140	180
P(X)	0,10	0,40	0,25	0,10	0,05	0,05	0,05

μ_C = 0,10 x 0 + 0,40 x 10 + 0,25 x 20 + 0,10 x 60 + 0,05 x 100 + 0,05 x 140 + 0,05 x 180
μ_C = 0 + 4 + 5 + 6 + 5 + 7 + 9 = 36, ou seja, R$ 36,00.

Terceira questão (2 pontos)**:**
Dois atletas, Alberto e Bernardo, disputam uma série de 6 partidas de um determinado jogo, para saber qual representará o Brasil nos jogos pré-olímpicos. No entanto, todos os jogos aconteceram na cidade de Alberto e, nesses casos, dizem que a probabilidade desse atleta ganhar a partida é 0,6. Não é possível ter empate. Se essa informação for verdadeira, qual é a probabilidade de Bernardo representar o Brasil?

SOLUÇÂO:

Para Bernardo representar o Brasil, ele precisa ganhar 3 ou mais das 6 partidas disputadas com o Alberto.
X: número de partidas ganhas por Bernardo
P: probabilidade de Bernardo ganhar uma partida
Se Alberto tem 60% de probabilidade de ganhar, e como só pode haver vitória ou derrota, a probabilidade de Bernardo ganhar é de 40%, ou seja, a probabilidade de sucesso é p = 0,4 e, neste caso utiliza-se o modelo Binomial, com n=6. Assim,
$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$
$P(X = 4) = 15 \times 0{,}6^2 \times 0{,}4^4 = 0{,}13824$
$P(X = 5) = 6 \times 0{,}6^1 \times 0{,}4^5 = 6 \times 0{,}08 \times 0{,}40 = 0{,}036864$
$P(X = 6) = 1 \times 0{,}6^0 \times 0{,}46 = 0{,}036864$
Logo,
$P(X > 3) = 0{,}13824 + 0{,}036864 + 0{,}036864$
$P(X > 3) = 0{,}1792.$

Quarta questão (2 pontos)**:**
Entre os 17 programadores de uma empresa, 12 são do sexo masculino. A empresa decide sortear 5 programadores para fazer um curso de programação do interesse da empresa. Sabe-se que seria

interessante que entre os sorteados também tivessem programadores do sexo feminino. Qual é a probabilidade dos 5 sorteados serem do sexo feminino?

SOLUÇÂO:

Modelo hipergeométrico
Tamanho da população n= 17
Tamanho da amostra r = 5
Sucesso (feminino) m = 5
Sucesso amostra k = 5

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

P(X = 5) = 792/6188 = 0,00015413

Quinta questão (2 pontos)**:**
Durante um determinado evento uma central telefônica, que fornece informações sobre o evento, recebe uma média de 10 chamadas por minuto. Supondo que as chamadas que chegam constituam uma distribuição de Poisson, qual é a probabilidade:

(a) da central não receber nenhuma chamada em um minuto?

SOLUÇÂO:

λ = 10 (média de 10 chamadas por minuto)

X : Quantidade de chamadas por minuto numa central telefônica

X ~ Poi (10)

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$P(X = 0) = \frac{10^0 e^{-10}}{0!} = e^{-10} = 4{,}54 \times 10^{-5}$

P(X = 0) = 4,54 x 10^{-5} = 0,0000454

(b) de receber no máximo 2 chamadas em 2 minutos?

SOLUÇÂO:

Y : Quantidade de chamadas a cada 2 minutos numa central telefônica

Y ~ Poi(10 x 2)

P(Y ≤ 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)

P(Y = 0) = $\frac{20^0 e^{-20}}{0!} = e^{-20}$ = 0,0000000020612

P(Y = 1) = $\frac{20^1 e^{-20}}{1!} = 20\, e^{-20}$ = 0,000000041223

P(Y = 2) = $\frac{20^2 e^{-20}}{2!} = \frac{400\, e^{-20}}{2}$ = 0,00000041223

P(Y ≤ 2) = 0,0000004555142