AD1 da disciplina Probabilidade e Estatística

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

02.2006

1^a questão - Os dados da Tabela 1 refere-se ao salário (em salários mínimos) de 20 funcionários admi-nistrativos em da indústria I_1 e a Tabela 2 fornece, por faixas salariais, os salários dos funci- onários administrativos da indústria I_2.

10,1	7,3	8,5	5	4,2	3,1	2,2	9	9,4	6,1
3,3	10,7	1,5	8,2	10	4,7	3,5	6,5	8,9	6,1

Tabela 1

Salário	*1 |--- 3*	*3 |--- 5*	*5 |---7*	*7 |--- 9*	*9 |--- 11*	*total*
Freqüência	*4*	*10*	*8*	*16*	*12*	*50*

Tabela 2

Pede-se:

(i) construa uma tabela de freqüência da Tabela 1,agrupando os dados em intervalos de amplitude 2 a partir de 1.

Salário	*freqüência*
1 |-- 3	*2*
3 |-- 5	*5*
5 |-- 7	*4*
7|-- 9	*4*
9 |-- 11	*5*
total	*20*

(ii) calcule a média e o 1º e o 3º quartil

Média: a média de salários da insdústria 1 pode ser calculada da tabela original, mas também pode-se ter o entendimento que ela deve ser calculada pela tabela do item anterior, por faixas salariais (nesse caso considerando a média dos salários da faixa em questão)

(a) pela tabela original:

$$média = \frac{\sum_{i=1}^{20} (salários)_i}{20} = \frac{128,30}{20} = 6,415$$

(b) pela tabela de faixas salariais

Faixa de Salário	*Freqüência*	*média da faixa*	*freq*media*
1 |-- 3	*2*	*2*	*4*
3 |-- 5	*5*	*4*	*20*
5 |-- 7	*4*	*6*	*24*
7 |-- 9	*4*	*8*	*32*
9 |-- 11	*5*	*10*	*50*
total (Σ)	*20*	*-*	*130*

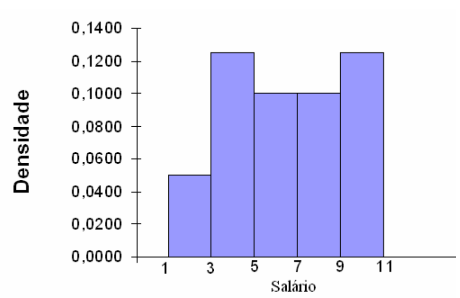
$$média = \frac{\sum_{k=1}^{5} (freq)_k \times (média.da.faixa)_k}{20} = \frac{130}{20} = 6,5$$

Quartis:

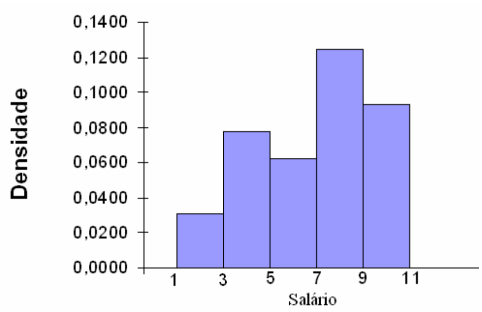
Para o 1^0 quartil o valor será a média dos valores da 5^a e 6^a posição dos valores dos salários ordenados, ou seja: $\frac{3,5+4,2}{2} = 3,85$ e para o 3^0 quartil será a média dos valores da 15^a e 16^a posição dos valores dos salários ordenados, ou seja: $\frac{8,9+9,0}{2} = 8,95$

(iii) construa os histogramas das duas indústrias

Histograma da indústria 1:



Histograma da indústria 2:



(iv) informe em que faixas estão a mediana e a moda das 2 indústrias

<u>Indústria 1</u>: mediana na faixa de 5 a 7 (aberto em 7) salários mínimos e tem moda nas faixas: 3 |-- 5 e 9 |-- 11.

<u>Indústria 2</u>: mediana e moda na faixa de 7 a 9 salários mínimos (aberto em 9)

(v) compare o desvio padrão das duas indústrias.

Indústria 1

Faixa de Salário	freqüência (f)	média da faixa	freq*media	a=(med.faixa - 6,5)²	(f) x (a)
1|-3	2	2	4	20,25	40,5
3|-5	5	4	20	6,25	31,25
5|-7	4	6	24	0,25	1
7|-9	4	8	32	2,25	9
9 |-11	5	10	50	12,25	61,25
total (Σ)	20	--	130	--	143

$$desvio.padrão = \sqrt{\text{var}} = \sqrt{\frac{143}{20}} = 2,674$$

Indústria 2

Faixa de Salário	freqüência (f)	média da faixa	freq*media	a=(med.faixa - 6,88)²	(f) x (a)
1-3	4	2	8	23,8144	95,2576
3-5	10	4	40	8,2944	82,944
5-7	8	6	48	0,7744	6,1952
7-9	16	8	128	1,2544	20,0704
9-11	12	10	120	9,7344	116,8128
total (Σ)	50	--	344	--	321,28

$$média = \frac{\sum_{k=1}^{5} (freq)_k \times (média.da.faixa)_k}{50} = \frac{344}{50} = 6,88$$

$$desvio.padrão = \sqrt{\text{var}} = \sqrt{\frac{321,28}{50}} = 2,535$$

2ª questão- Quinze pacientes de uma clinica de ortopedia foram entrevistados quanto ao número de meses previstos de fisioterapia; se haverá (S) ou não (N) seqüelas após tratamento; e o grau de complexidade da cirurgia realizada: alto (A), médio (M) ou baixo (B). Os dados são apresen - tados na Tabela 3:

Pacientes	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
Fisioterapia	*7*	*8*	*5*	*6*	*4*	*5*	*7*	*7*	*6*	*8*	*6*	*5*	*5*	*4*	*5*
Seqüelas	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*S*	*N*	*S*	*N*	*N*
Cirurgia	*A*	*M*	*A*	*M*	*M*	*B*	*A*	*M*	*B*	*M*	*B*	*B*	*M*	*M*	*A*

Tabela 3

(i)Classifique cada uma das variáveis.

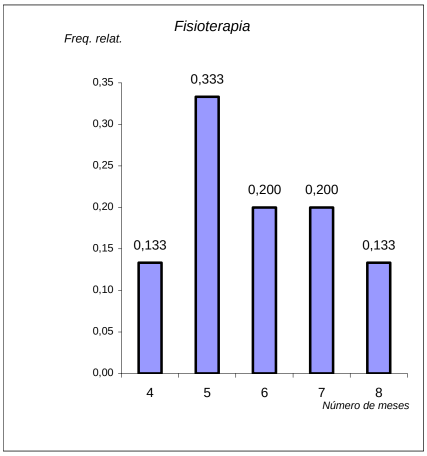
- *Fisioterapia: quantitativa discreta*
- *Seqüelas: qualitativa nominal*
- *Cirurgia: qualitativa ordinal*

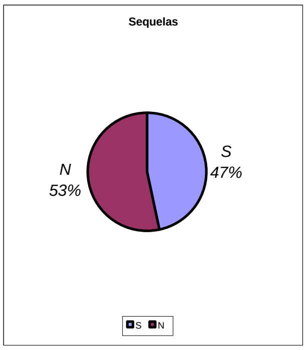
(ii)Para cada variável, construa a tabela de freqüência e faça uma representação gráfica.

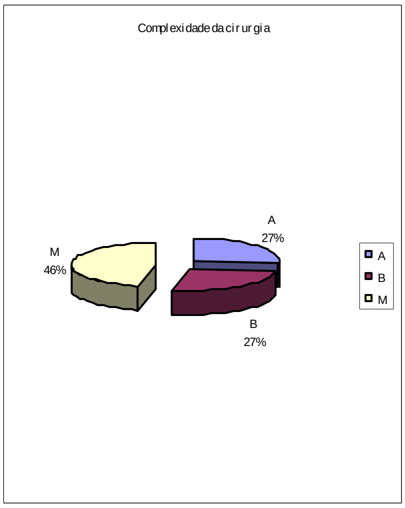
Fisioterapia	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*Total*
Freq.	*2*	*5*	*3*	*3*	*2*	*15*
Freq. Relat.	*0,133*	*0,333*	*0,200*	*0,200*	*0,133*	*1,000*

Seqüelas	S	N	total
Freq.	7	8	15
Freq. relat.	0,47	0,53	1

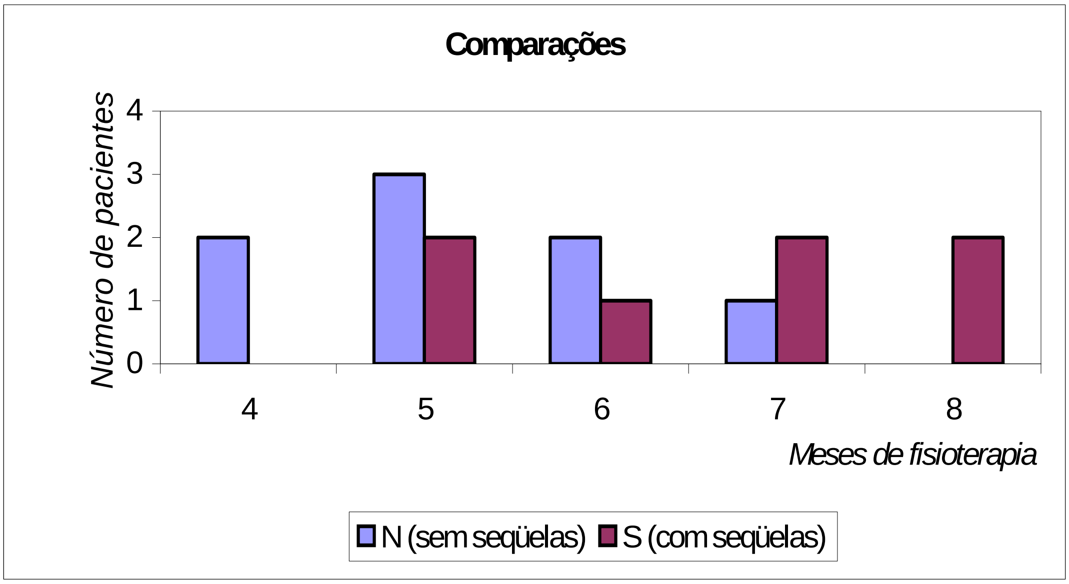
Cirurgia	A	B	M	total
Freq.	4	4	7	15
Freq. relat.	0,27	0,27	0,47	1







(iii)Para cada grupo de pacientes que não ficaram com seqüelas, faça um gráfico de barras para a variável fisioterapia. Você acha que essa variável se comporta de modo diferente nesse grupo?



3ª questão - A caixa 1, abaixo, terá seus objetos (quadrados e círculos) misturados. Pergunta-se:
(i) se for tirado apenas um objeto qual a probabilidade deste objeto selecionado ser quadrado ou ser branco?

11 objetos, sendo 6 círculos (4 cinzas e 2 brancos) e 5 quadrados (3 cinzas e 2 brancos).

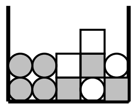
Probabilidade de ser quadrado (Q): 5/11 Probabilidade de ser círculo (C): 6/11
Probabilidade de ser branco (Br): 4/11 Probabilidade de ser cinza (Ci): 7/11

$$P(Q \cup Br) = P(Q) + P(Br) - P(Q \cap Br)$$
$$P(Q \cup Br) = \frac{5}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{11} = \frac{7}{11} = 0,64$$

(ii) se forem tirados dois objetos qual a probabilidade dos dois serem círculos?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$
$$P(A \cap B) = \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = \frac{3}{11}$$

Caixa 1



4ª questão - Em uma determinada comunidade a probabilidade de que um homem viver, a partir de hoje, mais 25 anos é 2/5 e a probabilidade de que a mulher viva estes 25 anos é 2/3. Determine a probabilidade de que daqui a 25 anos

(i) pelo menos um esteja vivo:

Chamando de P(H)e P(M) a probabilidade de um homem e de uma mulher viver mais 25 anos respectivamente, tem-se: P(H)=2/5, $P(H^c)$=3/5, P(M)=2/3 e $P(M^c)$=1/3, como os eventos são independentes desejamos calcular:

$$P(H \cup M) = P(H) + P(M) - P(H \cap M) = P(H) + P(M) - P(H)P(M)$$
$$P(H \cup M) = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5}.\frac{2}{3} = 1,067 - 0,267 = 0,800$$

(ii) ambos estejam vivos:

$$P(H \cap M) = P(H)P(M) = \frac{2}{5}.\frac{2}{3} = 0,267$$

(iii) nenhum esteja vivo:

$$P(H^c \cap M^c) = P(H^c)P(M^c) = \frac{3}{5}.\frac{1}{3} = 0,200$$

(iv) somente a mulher esteja viva:

$$P(H^c \cap M) = P(H^c)P(M) = \frac{3}{5}.\frac{2}{3} = 0,400$$

(v) somente o homem esteja vivo:

$$P(H \cap M^c) = P(H)P(M^c) = \frac{2}{5}.\frac{1}{3} = 0,133$$

5ª questão - Sejam *A* e *B* eventos tais que *P*(*A*) = p; *P*(*B*) = 0,3 e *P*(*A* U *B*) = 0,6. Calcular *p* considerando *A* e *B*:
(i)mutuamente exclusivos:

Nesse caso P(A∩B)=0. Assim,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0,6 = p + 0,3 \Rightarrow p = 0,3$$

(ii)independentes:

Nesse caso, *P(A∩B)=P(A) P(B) = 0,3p* e

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0,6 = p + 0,3 - 0,3p \Rightarrow 0,7p = 0,3 \Rightarrow p = 0,429$$

6ª questão - Considere 3 fábricas, F_1, F_2, F_3, que produzem calças jeans em lotes semanais de 150, 200 e 350 calças, respectivamente. Uma empresa compra calças dessas 3 fábricas para exportar. Ao chegar nessa empresa os lotes semanais das fábricas são misturadas. Suponha que a probabilidade de se encontrar calças defeituosas em cada uma das fábricas seja de 2%, 10% e 5%, respectivamente. Selecionando-se uma dessas calças ao acaso, determine a probabilidade de:

Chamando de A o evento peça defeituosa, temos:

$$P(F_1) = \frac{150}{700} = 0,214 \rightarrow P(A|F_1) = 0,020$$
$$P(F_2) = \frac{200}{700} = 0,286 \rightarrow P(A|F_2) = 0,100$$
$$P(F_3) = \frac{350}{700} = 0,500 \rightarrow P(A|F_3) = 0,050$$

a)ser da fábrica F_1:

$P(F_1)=0,214$

b)ser defeituosa, sabendo que a peça foi fabricada na fábrica F_1:

$P(A|F_1)=0,020$

c)ser defeituosa:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(F_1)P(A|F_1)$$
$$P(A) = 0,214 \times 0,020 + 0,286 \times 0,100 + 0,500 \times 0,050$$
$$P(A) = 0,058$$

d)ser da fábrica F_1, sabendo que a peça é defeituosa.

$$P(F_1 | A) = \frac{P(F_1)P(A|F_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(F_1)P(A|F_1)} = \frac{0,214 \times 0,020}{0,058}$$
$$P(F_1 | A) = 0,074$$

7ª questão – Durante o primeiro dia de um feriado prolongado a chegada de ônibus na Rodoviária Novo Rio se dá segundo o modelo de Poisson com taxa de 1 ônibus por minuto.

Modelo de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,...$$

(i) determine a probabilidade da chegada de 2 ônibus em um minuto qualquer desse primeiro dia de feriado:

$\lambda = 1$ ônibus por minuto

$$P(2) = \frac{e^{-1}1^2}{2!} = 0,184$$

(ii) se for possível desembarcar somente 2 ônibus por minuto, qual a probabilidade de haver ônibus sem desembarque imediato?

$\lambda = 2$ ônibus por minuto. Para não haver desembarque imediato é necessário que cheguem mais de 2 ônibus em um minuto, portanto $k \geq 3$.

$$P(k \geq 3) = 1 - P(k < 3) = 1 - [P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2)]$$
$$P(k \geq 3) = 1 - \left[\frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!}\right]$$
$$P(k \geq 3) = 1 - 0,667$$
$$P(k \geq 3) = 0,323$$

8ª questão - Sabe-se que os pacientes diagnosticados com câncer de próstata precocemente têm 85% de probabilidade de serem completamente curados. Para um grupo de 16 pacientes nessas condições, use o modelo binomial e calcule qual a probabilidade de:

p=0,85 e n=16

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,3,...,n$$

(i) treze (13) ficarem completamente curados: (*k=13*)

$$P(X=13)=\left(\frac{16!}{13!(16-13)!}\right)0,85^{13}(1-0,85)^{16-13}=0,2285$$

(ii) menos que 3 permanecerem com a doença:

Há duas formas de se ver essa questão:

a) vendo que, nesse caso, mais de 13 pacientes teriam que ser curados, ou seja: *P(X>13)=P(X=14)+P(X=15)+P(X=16);*

b)assumindo que a probabilidade denão ficar curado é 1 - 0,85 = 0,15, pode-se calcular *P(X< 3).*

Em qualquer um dos casos tem-se:

$$P(X>13)=\left(\frac{16!}{14!(16-14)!}\right)0,85^{14}(1-0,85)^{16-14}+\left(\frac{16!}{15!(16-15)!}\right)0,85^{15}(1-0,85)^{16-15}+\left(\frac{16!}{16!(16-16)!}\right)0,85^{16}(1-0,85)^{16-16}$$

$$P(X>13)=120\times0,85^{14}\times0,15^2+16\times0,85^{15}\times0,15+0,85^{16}\times0,15^0$$

$$P(X>13)=0,498$$

(iii) de 5 a 7 pacientes (inclusive, ou seja: 5 $\vdash\!\dashv$ 7) não ficarem curados.

Também com 2 formas de fazer, como no item anterior. Nesse caso, utilizei *p=0,15.*

$$P(5\le X\le 7)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)$$

$$P(5)=\left(\frac{16!}{5!(16-5)!}\right)0,15^5(1-0,15)^{16-5}=0,00002542$$

$$P(6)=\left(\frac{16!}{6!(16-6)!}\right)0,15^6(1-0,15)^{16-6}=0,00000075$$

$$P(7)=\left(\frac{16!}{7!(16-7)!}\right)0,15^7(1-0,15)^{16-7}=0,00000002$$

$$P(5\le X\le 7)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)=0,000002619$$

9ª questão – Considere a empresa que compra as calças jeans para exportar, da 6ª questão e faça um estudo das probabilidade de se encontrar um defeito, pela primeira vez, em cada uma das 20 primeiras calças a serem escolhidas ao acaso (com reposição), ou seja, de você não encontrar nenhuma calça com defeito; a seguir, de se encontrar a primeira calça com defeito; de encontrar a segunda calça com defeito, ..., até a 21ª calça com defeito (use o computador para facilitar seus cálculos).

Chamando de "sucesso" a probabilidade de encontrar uma calça defeituosa, temos pelo item "c" da 6ª questão que p=0,058. Utilizando o modelo geométrico:

$$P(X = k+1) = p\ (1-p)^k$$

tem-se:

k+1	P(X=k+1)
1	0,058
2	0,055
3	0,051
4	0,048
5	0,046
6	0,043
7	0,041
8	0,038
9	0,036
10	0,034
11	0,032
12	0,030
13	0,028
14	0,027
15	0,025
16	0,024
17	0,022
18	0,021
19	0,020
20	0,019
21	0,018

10ª questão – Num lago-laboratório pesquisadores acompanham o crescimento de 10 botos: 6 da espécie A e 4 da espécie B, avaliando periodicamente seus pesos e tamanhos. Se em determinado dia de avaliação três botos forem capturados de uma vez, utilize um modelo de probabilidade para determinar a probabilidade de:

Modelo Hipergeométrico:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}; k = \max(0, r-(n-m)), \ldots, \min(r, m)$$

10 botos *(n=10)*: 6 da espécie A *(m=6)* -→ amostra 3 botos *(r=3)*

(i) a maioria ser da espécie A:

Numa amostra com 3 botos a maioria, nesse caso, seria k=2

$$P(k=2)=\frac{\left(\dfrac{6!}{2!(6-2)!}\right)\left(\dfrac{(10-6)!}{(3-2)!((10-6)-(3-2))!}\right)}{\left(\dfrac{10!}{3!(10-3)!}\right)}$$

$$P(k=2)=\frac{\left(\dfrac{6!}{2!4!}\right)\left(\dfrac{4!}{1!3!}\right)}{\left(\dfrac{10!}{3!7!}\right)}$$

$$P(k=2)=0,50$$

(ii) todos serem da espécie A:

Nesse caso, k=3

$$P(k=3)=\frac{\left(\dfrac{6!}{3!(6-3)!}\right)\left(\dfrac{(10-6)!}{(3-3)!((10-6)-(3-3))!}\right)}{\left(\dfrac{10!}{3!(10-3)!}\right)}$$

$$P(k=3)=\frac{\left(\dfrac{6!}{3!3!}\right)\left(\dfrac{4!}{0!4!}\right)}{\left(\dfrac{10!}{3!7!}\right)}$$

$$P(k=3)=0,167$$

(iii) pelo menos 1 ser da espécie A.

Nesse caso deve-se calcular *P(k≥1)=P(k=1)+P(k=2)+P(k=3)*

$$P(k\geq 1)=P(k=1)+P(k=2)+P(k=3)$$

$$P(k=3)=\frac{\left(\dfrac{6!}{1!5!}\right)\left(\dfrac{4!}{2!2!}\right)}{\left(\dfrac{10!}{3!7!}\right)}+P(k=2)+P(k=3)$$

$$P(k=3)=0,100+0,167+0,500$$

$$P(k=3)=0,767$$