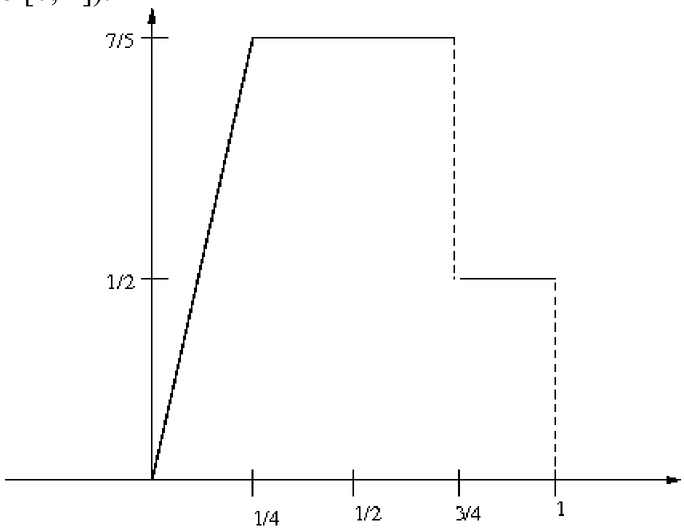
Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
Gabarito da AP2 1° semestre de 2009

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 - Primeira questão (2,5 pontos)

A figura abaixo representa uma função de distribuição de probabilidade (a função vale zero para valores fora do intervalo [0, 1]).



a) Prove que esta função é de fato uma função de probabilidade (0,5 ponto);

Da figura tiramos que os valores da função apresentada é positiva para todos os valores, o que cumpre uma das condições de ser densidade de probabilidade. Podemos dividir a figura em três regiões: a primeira, um triângulo de base 1/4 e altura 7/5, depois um retângulo 2/4 por 7/5 e finalmente um outro retângulo de dimensões 1/2 por 1/4. O total fornece a área igual a 1, assim f(x) é densidade de probabilidade.

b) Calcule a média da distribuição (0,5 ponto);
Para este item e o próximo, será necessário o cálculo de integrais. Para isto, teremos que determinar a forma da função como função de x. O primeiro trecho determinamos pela equação da reta que liga os pontos (0, 0) ao (1/4, 7/5), conforme figura anterior. O segundo e terceiros trechos são funções constantes, ou seja:

$$f(x)=28x/5\,;x\in(0,1/4)$$
$$f(x)=7/5\,;x\in(1/4,3/4)$$
$$f(x)=1/2\,;x\in(3/4,1)$$

Vamos usar a definição de valor médio dada por

$$\mu = \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^{1/4} x\frac{28x}{5}\,dx + \int_{1/4}^{3/4} x\frac{7}{5}\,dx + \int_{3/4}^{1} x\frac{1}{2}\,dx$$

ou

$$\mu = \frac{28x^3}{15}\Big|_0^{1/4} + \frac{7x^2}{10}\Big|_{1/4}^{3/4} + x^2\Big|_{3/4}^{1} = \frac{49}{60} = 0,8166\ldots$$

c) Calcule a variância da distribuição (1,0 pontos);

Partimos da definição de variância

$$\sigma^2 = \int_0^1 x^2 f(x)\,dx = \int_0^{1/4} x^2\frac{28x}{5}\,dx + \int_{1/4}^{3/4} x^2\frac{7}{5}\,dx + \int_{3/4}^{1} x^2\frac{1}{2}\,dx$$

ou

$$\sigma^2 = \frac{28x^4}{20}\Big|_0^{1/4} + \frac{7x^3}{15}\Big|_{1/4}^{3/4} + \frac{x^3}{6}\Big|_{3/4}^{1} = \frac{373}{1280} = 0,2814\ldots$$

d) Calcule a moda desta distribuição (0,5 pontos).

A moda vem direto da definição, ou seja, é o valor máximo da função, ou seja, 7/5.

2 – Segunda questão (2,5) pontos
Uma experiência foi modelada por uma distribuição Normal de média 7,52 e variância 6,25. Calcule as seguintes probabilidades. (0,5 ponto cada).

a) P(X < 7)

$$P(X<7) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{7-7,52}{\sqrt{6,25}}\right) = P(Z<-0,208) \approx 0,5-0,0832 \approx 0,4168$$

b) P(7 < X < 8)

$$P(7<X<8) = P\left(\frac{7-7,52}{\sqrt{6,25}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{8-7,52}{\sqrt{6,25}}\right) = P(-0,208<Z<0,213) \approx 0,0832+0,0832 \approx 0,1664$$

c) P(X > 8)

$$P(X>8) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{8-7,52}{\sqrt{6,25}}\right) = P(Z>0,213) \approx 0,5-0,0832 \approx 0,4168$$

d) P(X < 6)

$$P(X<6) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{6-7{,}52}{\sqrt{6{,}25}}\right) = P(Z<-0{,}608) \approx 0{,}5-0{,}2291 \approx 0{,}2709$$

e) P(X > 6)

$$P(X>6) = P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{6-7{,}52}{\sqrt{6{,}25}}\right) = P(Z>-0{,}608) \approx 0{,}5+0{,}2291 \approx 0{,}7291$$

3 – Terceira questão (2,0 pontos)

Na obra de construção de uma estrutura de madeira os operários pregam sarrafos de uma forma regular no comprimento de uma viga de 8 metros. Sabe-se de outras obras que a probabilidade de um sarrafo não ficar bem fixado é de 10% e esta probabilidade é igual para qualquer ponto da viga. Qual a probabilidade de que se encontre um sarrafo mal fixado?

Vamos denotar por Y a variável aleatória que indica a posição do sarrafo na viga. Admitindo igual probabilidade de ocorrência em todos os pontos (os sarrafos são presos de forma regular), temos que Y ~ U[0;8], com função de probabilidade dada por

Se y [0,8] então

$$f(y) = 1/8$$

Caso contrário

$$f(y) = 0$$

a) no primeiro metro de ambas as extremidades? (1,0 ponto)

Para calcular a probabilidade de Y ∈ $\{[0,1] \cup [7,8]\}$ podemos calcular a integral de f(y) em cada um desses intervalos.

$$P(Y \in [0,1]\, U [7,8]) = P(0 \le Y \le 1) + P(7 \le Y \le 8) = \int_0^1 1/8\, dy + \int_7^1 1/8\, dy = \frac{y}{8}\Big|_0^1 + \frac{y}{8}\Big|_7^8 = \frac{1}{8} + \frac{(8-7)}{8} = 1/4$$

Agora que já sabemos a probabilidade do sarrafo ser encontrado nesses intervalos basta multiplicar pela probabilidade do sarrafo estar mal fixado:

Z = variável aleatória que representa o sarrafo mal fixado no primeiro metro das extremidades

$$P(Z) = 0{,}1 \times \frac{1}{4} = 0{,}1 \times 0{,}25 = 0{,}025$$

b) no dois metros centrais da viga? (1,0 ponto)

Analogamente ao item anterior basta calcular a integral no intervalo [3,5] e multiplicar pela probabilidade do sarrafo estar mal fixado.

$$P(Y \in [3,5]) = P(3 \le Y \le 5) = \int_3^5 1/8\, dx = \frac{x}{8}\Big|_3^5 = \frac{(5-3)}{8} = 2/8 = 1/4$$

$$P(Z) = 0{,}1 \times \frac{1}{4} = 0{,}1 \times 0{,}25 = 0{,}025$$

4 – Quarta questão (1,5 pontos)

Um fabricante está sendo processado por vender seus produtos abaixo do peso declarado. Foi sorteada uma amostra aleatória que indicou o peso médio de 197,8g e a variância admitida é de 4,5 g^2. Calcule qual a probabilidade de que este lote esteja com pacotes abaixo de 200g.

É razoavel admitir que o peso real siga uma distribuição normal. Assim:

$$P(X<200)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{200-197,8}{\sqrt{4,5}}\right)=P(Z<1,04)\approx 0,3508+0,5\approx 0,8508$$

5 – Quinta questão (1,5 pontos)

Uma rede de supermercados está com um sistemas de caixas novo e não tem idéia do tempo médio de resposta do sistema quando este se encontra em carga máxima. Deve se avaliar isto o mais rápido possível pois dentro em pouco haverá uma promoção que provocaria um aumento de clientes que, por sua vez, poderia sobrecarregar o sistema. Do sistema anterior sabiam que a variância era de 10,69 s^2 e um ensaio indicava uma média de retardo de 6,4 s. Calcule com o intervalo de confiança para esta média com 92% de confiança.

Resposta: A estimativa de média se dará no intervalo

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Pelas informações do problema teremos:

$$z_{\gamma/2}=z_{0,46}=1,75$$
$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=3,27$$

Disto podemos calcular

$$IC(\mu,\gamma)=[6,4-1,75\times 3,27;6,4+1,75\times 3,27]=[0,6775;12,1225]$$