Gabarito AD1 da disciplina Probabilidade e Estatística

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

02.2010

1a questão (1,5 ponto) - Quinze pacientes de uma clínica de ortopedia foram entrevistados quanto ao números previstos de fisioterapia; se haverá (S) ou não (N) sequelas após tratamento; e o grau de complexidade da cirurgia realizada: alto (A), médio (M) ou baixo (B). Os dados são apresentados na Tabela 3:

Pacientes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Fisioterapia	7	8	5	6	4	5	7	7	5	8	5	4	5	5	4
Sequelas	S	S	N	N	N	S	S	N	N	S	N	S	S	N	N
Cirurgia	A	M	A	M	M	M	B	A	A	B	B	B	A	M	M

TABELA 3

SOLUÇÃO:

(i) classifique cada uma das variáveis;

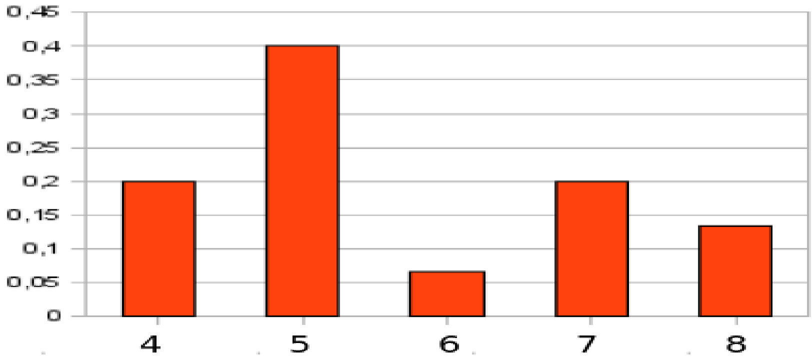
Fisioterapia é quantitativa discreta, Sequelas é qualitativa nominal e Cirurgia é qualitativa ordinal.

(ii) para cada variável, construa a tabela de frequências e faça uma representação gráfica;

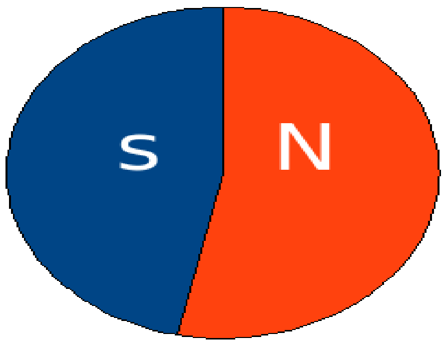
Fisioterapia	n_i	f_i	f_{ac}
4	3	0,2	0,2
5	6	0,4	0,6
6	1	0,07	0,67
7	3	0,2	0,87
8	2	0,13	1
	15	1	

Sequelas	n_i	f_i	f_{ac}
S	7	0,47	0,47
N	8	0,53	1
	15	1	

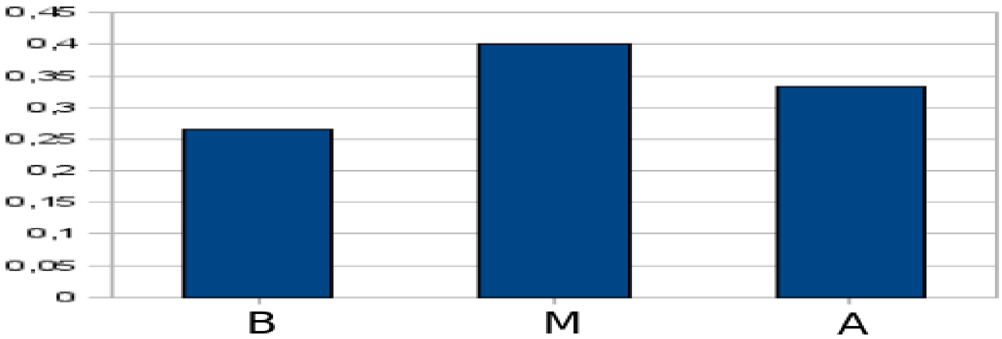
Cirurgia	n_i	f_i	f_{ac}
B	4	0,27	0,27
M	6	0,4	0,67
A	5	0,33	1
	15	1	



Fisioterapia



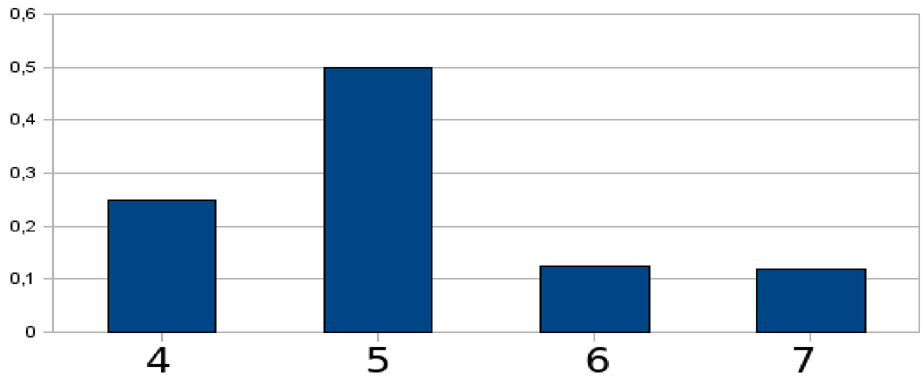
Sequela



Cirurgia

(iii) para cada grupo em que os pacientes que não ficaram com sequelas, faça um gráfico de barras para a variável fisioterapia. Você acha que essa variável se comporta de modo diferente nesse grupo?

fisioterapia sem sequela	n_i	f_i	f_{ac}
4	2	0,25	0,25
5	4	0,5	0,75
6	1	0,13	0,88
7	1	0,12	1
	8	1	



Pelos dados percebemos que o tempo de fisioterapia em geral é menor para pacientes sem sequelas.

2a questão (1,5 ponto) – Observe os valores que foram encontrados nas medições de diâmetro de maças (em mm):

40 42 45 45 48 49 50 50 50 51

51 52 55 55 57 58 59 59 60 60

61 61 62 62 63 64 64 64 65 65

65 66 67 68 68 69 69 71 71 72

72 73 75 75 78 78 79 80 80 81

82 85 87 88 89 91 92 93 96 96

98 100 101 101 101 102

Calcule (a) média; b) mediana; c) moda; d) variância; e) desvio padrão.

SOLUÇÃO:

Para a média: $\breve{x}_{obs} = \sum \frac{x_i}{n}$

Para facilitar o calculo determinemos primeiro o numerador:

$$\sum x_i = 40+42+45+45+48+49+50+50+50+51+51+52+55+55+57$$
$$+58+59+59+60+60+61+61+62+62+63+64+64+64+65+65$$
$$+65+66+67+68+68+69+69+71+71+72+72+73+75+75+78$$
$$+78+79+80+80+81+82+85+87+88+89+91+92+93+96+96$$
$$+98+100+101+101+101+102$$

Agora temos que a média é dada por:

$$\breve{x}_{obs} = \frac{\sum x_i}{66} = 70{,}09$$

Como temos uma quantidade par de termos:

$$md_{obs} = \frac{\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)}{2}$$
$$md_{obs} = \frac{(67+68)}{2} = 67{,}5$$

MODA = 50, 64, 65, 101 onde cada valor aparece 3 vezes.

$$VAR = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\left((x_i - \mu)^2\right)}{n}$$

$$VAR = 275{,}84$$

$$DP = \sqrt{(VAR)} = \sqrt{(275{,}84)} = 16{,}61$$

3ª questão (1,0 ponto) – Um experimento de laboratório é realizado para media a viscosidade do óleo de soja utilizado no preparo de alimentos, obtendo-se os seguintes valores: 0,040;0,041;0,042;0,039;0,041; e 0,039 ms/s. Calcule o valor médio, a variância, e o desvio padrão.

SOLUÇÃO:

$$\breve{x}_{obs} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i}{n}$$

$$\breve{x}_{obs}=\frac{(0,04+0,041+0,042+0,039+0,041+0,039)}{6}=0,040333333$$

$$VAR=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\left((x_i-\mu)^2\right)}{n}$$

$$VAR=\frac{(0,04-0,0403)^2+(0,041-0,0403)^2+(0,042-0,0403)^2+(0,039-0,0403)^2+(0,041-0,0403)^2+(0,039-0,0403)^2}{6}$$

$$VAR=\frac{0,00000734}{6}=0,000001223$$

$$DP=\sqrt{(VAR)}=\sqrt{(0,000001223)}=0,001106$$

4ª questão (1,0 ponto) – Em uma festa um mordomo recebeu n chapéus, mas ele esqueceu-se de identificar a quem os chapéus pertenciam e assim estes ficaram totalmente misturados. No fim da festa ele decidiu devolver os chapéus a esmo. Calcule a probabilidade de que nenhum homem receba o seu próprio chapéu.

SOLUÇÃO:

Essa questão, por ser mais complicada do que devia, funcionará como um bônus extra. Os pontos dela serão divididos igualmente entre as outras questões.

O número de casos possíveis é igual ao das permutações de n elementos, que é $n!$.

Para $n=3$ isto é $(1,2,3)$ temos:

$312, 231$

Agora suponha $n=4,$ isto é $(1,2,3,4)$ assim as permutações possíveis são:

$2143, 3142, 4123, 3412, 4312, 2413, 2341, 3421, 4321$

Para calcular o número de permutações de (1,2,3,...,n), define-se

A_i = conjunto das permutações de (1,2,3,...,n) em que o número i ocupa o i-ésimo lugar, $i \in 1,2,\dots,n$.

queremos calcular o número de elementos do conjunto Ω das permutações de $(1,2,3,\dots,n)$ que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_{1,} A_{2,\dots,} A_n$. Temos:

$$S_0=\#(\Omega)=n!$$

$$S_1=\sum (A_i)=\sum (n-1)!=n(n-1)!=n!$$
$$S_2=\sum (A_i\cap A_j)=\sum (n-2)!=C_n^2(n-2)!=\frac{n!}{2!}$$
$$S_3=\sum (A_i\cap A_j\cap A_k)=\sum (n-3)!=C_n^3(n-3)!=\frac{n!}{3!}$$

....

$$S_n=C_n^n(n-n)!=\frac{n!}{n!}$$

O número de elementos de Ω que pertencem a exatamente zero dos conjuntos $A_{1,} A_{2,\ldots,} A_n$ é:

$$a_0=\sum_{k=0}^{n-0}(-1)^k C_{0+k}^k S_{0+k}$$
$$a_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k S_k$$
$$a_0=S_0-S_1+S_2-S_3+\ldots+(-1)^n S_n$$
$$a_0=n!-n!+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{n!}{n!}$$
$$a_0=n!\left\{\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

Logo o número de permutações caóticas de $(1,2,3,\ldots,n)$ é:

$$D_n=n!\left\{\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

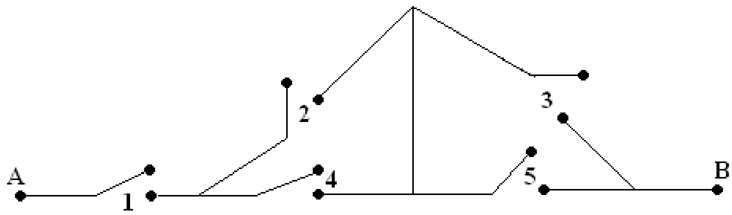
Dessa forma, a probabilidade buscada é igual ao resultado da divisão de D_n pelo total de possibilidades, isto é:

$$\frac{D_n}{n!}=\left\{\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

Observando os valores para n>4 temos que esse valor se aproxima de $e^{-1}\approx 0{,}37$.

n	P(X=n)
2	0,500
3	0,333
4	0,3750
5	0,372
6	0,371
7	0,370
8	0,370
9	0,370
10	0,370

5ª questão (1,0 ponto) - A probabilidade de fechamento de cada relé do circuito apresentado na figura abaixo é igual a p, com 0<p<1. Se todos os relés funcionam independentemente, qual é a probabilidade de que haja corrente circulando entre os terminais A e B?



SOLUÇÃO

Seja Ai o evento que ocorre se o relé está fechado, $i=1,2,3,4,5$.
Seja C o evento que ocorre se há corrente entre os terminais A e B. Queremos calcular $P(C)$.
Temos:

$$P(C)=P\left[\left(A_1\cap A_2\cap A_3\right)\cup\left(A_1\cap A_4\cap A_5\right)\cup\left(A_1\cap A_2\cap A_5\right)\cup\left(A_1\cap A_4\cap A_3\right)\right]$$

$$\begin{gathered}
P(C)=P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\right)+P\left(A_1\cap A_4\cap A_5\right)+P\left(A_1\cap A_2\cap A_5\right)\\
+P\left(A_1\cap A_4\cap A_3\right)-P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)\\
-P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_5\right)-P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\right)\\
-P\left(A_1\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)-P\left(A_1\cap A_2\cap A_4\cap A_5\right)\\
-P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)+P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)\\
+P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)+P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)\\
+P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)-P\left(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5\right)\\
P(C)=4\mathrm{p}^3-p^5-4\mathrm{p}^4-p^5+4\mathrm{p}^5-p^5\\
P(C)=4\mathrm{p}^3-4\mathrm{p}^4+p^5
\end{gathered}$$

No cálculo utilizamos a fórmula para calcular a probabilidade da união de 4 eventos não disjuntos e o fato dos eventos serem independentes.
Obtemos uma solução mais simples para o problema se prestarmos mais atenção à estrutura do circuito. Observe que para circular corrente entre A e B é necessário que o relé 1 esteja fechado e que pelo menos um entre 2 e 4 e pelo menos um entre 3 e 5 também o estejam.

Desta forma $C=A_1\cap\left(A_2\cup A_4\right)\cap\left(A_3\cup A_5\right)$. Logo:

$$P(C)=P\left(A_1\right)*P\left(A_2\cup A_4\right)*P\left(A_3\cup A_5\right)$$
$$P(C)=P\left(A_1\right)*\left(P\left(A_2\right)+P\left(A_4\right)-P\left(A_2\cap A_4\right)\right)*\left(P\left(A_3\right)+P\left(A_5\right)-P\left(A_3\cap A_5\right)\right)$$

6ª questão (1,0 ponto) – Um aluno recém formado no curso de Tecnologia em Sistemas de Computação do CEDERJ está procurando emprego. Ele está enviando seu currículo para diversas empresas. Uma notícia em revista de empregos dizia que apenas 10% dos currículos enviados resultavam em uma entrevista. Com essas informações, calcule as seguintes probabilidades:

a)O primeiro convite de entrevista ocorrerá no envio do 15º currículo;

b)Ele envia exatamente 10 currículos, qual a probabilidade de ele ser chamado para 3 entrevistas;

c)Ele envia exatamente 25 currículos. Qual a probabilidade de ele ser chamado para menos de 2 entrevistas?

SOLUÇÃO:

Seja p a probabilidade de um curriculum enviado resultar numa chamada para entrevista. Então p=0.10.

a) Neste caso queremos encontrar a probabilidade de 14 falhas seguidas de um sucesso, que é:

$$P(X=1)=(0.9)^{14}(0.1)=0{,}022876792$$

b) Neste caso o numero de repetições (número de cvs enviados) é fixo, ou seja, temos uma distribuição Binomial com n=10 e probabilidade de sucesso (ser chamado para entrevista) igual a 0.1. A probabilidade desejada é:

$$P(X=3)=\binom{10}{3}(0.1)^3(0.9)^7=(120)(0{,}001)(0{,}4782969)=0{,}057395628$$

c) Neste caso n=25 e desejamos encontrar:

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$$

$$P(X<2)=\binom{25}{0}(0.1)^0(0.9)^{25}+C_1^{25}(0.1)^1(0.9)^{24}$$

$$P(X<2)=0{,}071789799+0{,}199416108=0{,}271205907$$

7ª questão (1,0 ponto) – O tempo de chegada de um trem na Estação Central do Brasil (RJ) independente do seu destino é uma variável Exponencial com λ=1/10 chegadas por minuto. Calcule:

a)A probabilidade de uma pessoa ter que esperar mais de 60 min. pela chegada de um trem.

b)A probabilidade de um trem demorar menos de 10 minutos para chegar.

SOLUÇÃO:

Seja T o tempo entre chegadas de um trem, isto é, o tempo que você terá que esperar por um trem nesta estação. T é uma variável Exponencial com $\lambda=1/10$. Sabemos que, para uma variável exponencial, a função de distribuição é $F(t)=P(T\leq t)=1-e^{(-\lambda t)}$ e também que $P(T>t)=1-F(t)=e^{(-\lambda t)}$. Logo:

a) $P(T>60)=e^{(-60/10)}=e^{(-6)}=0.0025$

b) $P(T<60)=1-e^{(-10/10)}=1-e^{(-1)}=0.6321$

8ª questão (1,0 ponto) – Um criador de bovinos suspeita que 2% de seu rebanho estejam com um tipo de doença A. Se sua suspeita for correta:

a)Utilize o modelo binomial e determine qual a probabilidade de que, numa amostra de 10 produtos, haja no mínimo 9 sem a doença.

b)Utilize o modelo geométrico para saber se esse criador for escolher aleatoriamente 4 bovinos para mostrar em um feira, qual a probabilidade de somente o 5º estar doente?

SOLUÇÃO:

a)

$$P(x=0)=\binom{10}{0}\times(0{,}02)^0\times(0{,}98)^{10}$$
$$P(x=0)=\left(\frac{10!}{0!(10-0)!}\right)\times(0{,}02)^0\times(0{,}98)^{10}$$
$$P(x=0)=1\times1\times0{,}817072807$$
$$P(x=0)=0{,}8171$$

$$P(x=0)+P(x=1)=0.8171+\binom{10}{1}\times(0{,}02)^1\times(0{,}98)^9$$
$$P(x=0)+P(x=1)=0.8171+0.1667$$
$$P(x=0)+P(x=1)=0.9838$$

b)

Para o modelo geométrico temos:
X: número de vezes necessárias para encontrar o quinto defeituoso.
p= 0.02
q=0.98

$$P(x=5)=(0{,}98)^4\times(0{,}02)^1$$
$$P(x=5)=0.0184$$

9ª questão (1,0 ponto) – A Loterj criou uma nova raspadinha, a “Acerte Já!”, que promete que a cada 50 bilhetes um é premiado. Você decidiu que vai ganhar na raspadinha. Então começa a comprar bilhetes até encontrar um premiado. O valor de cada bilhete é de R$1,75.

SOLUÇÃO:

a)Quanto dinheiro você espera gastar?

Seja X o número de raspadinhas que você precisa comprar até encontrar a 1a. Premiada. Então X é uma variável geométrica com probabilidade p=1/50. A média de X é $E(x)=\frac{1}{p}=\frac{1}{50}$, na média você precisa comprar 50 raspadinhas para encontrar a 1a premiada. O custo deste procedimento é: $C=1{,}5X$ e então $E(C)=1{,}75\,E(C)=1{,}75*(50)=R\$87{,}5$.

b)Você resolveu comprar raspadinhas até conseguir a segunda premiada. Quanto você espera gastar?

Agora X é uma Binomial negativa com r=2 e p=1/50. A média de X passa a ser $E(X)=\frac{2}{p}=R\$100$ e o custo esperado passa a ser

$$E(C)=1{,}75\,E(C)=1{,}75*(100)=R\$175{,}00.$$

c)Qual a probabilidade de, no caso da letra b, você tenha que comprar mais de 5 bilhetes

$$P(X>5)=P(X\geq6)=1-P(X\leq5)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)-P(X=5)$$

onde:

$P(X=x)=\binom{x-1}{r-1}p^r q^{(x-r)}$ com x=r,r+1,r+2,...

E neste caso, como r=2, temos:
$P(X=x)=(x-1)p^2 q^{(x-2)}$ x=2,3,4,...

x	P(X=x)
2	0,04%
3	0,078%
4	0,115%
5	0,151%

$P(X>5)=1-(0{,}0004+0{,}00078+0{,}00115+0{,}00151)=0{,}9961=99{,}61$