Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina Probabilidade e Estatística

AP2 1° semestre de 2016

GABARITO

---

1 - Primeira questão (1,5 pontos)

Verifique quais das funções abaixo são distribuições de probabilidade. Caso alguma não seja distribuição devido à constante de normalização, apresente a função normalizada.

a) $f(x)=x(x+1)+1; x\in[-1/2,1]$

Resolução:

Por inspeção verificamos que a função é positiva dentro do intervalo apresentado. Integremos:

$$\int_{-1/2}^{1}[x(x+1)+1]dx=\int_{-1/2}^{1}(x^2+x+1)dx=\int_{-1/2}^{1}x^2\,dx+\int_{-1/2}^{1}x\,dx+\int_{-1/2}^{1}dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1/2}^{1}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1/2}^{1}+x\Big|_{-1/2}^{1}$$

ou

$$\int_{-1/2}^{1}[x(x+1)+1]dx=\frac{1^3-(-1/2)^3}{3}+\frac{1^2-(-1/2)^2}{2}\Big|_{-1/2}^{1}+1-(-1/2)=\frac{1}{3}\frac{9}{8}+\frac{1}{2}\frac{3}{4}+\frac{3}{2}=\frac{9}{4}\quad .$$

Para que a função se torne distribuição de probabilidade teremos que normalizar a função, ou seja,

$$\frac{4}{9}[(x+1)+1]; x\in[-1/2,1]$$

é distribuição de probabilidade.

b) $f(x)=x(x-1)+1; x\in[-1/2,1/2]$

Resolução:

Novamente por inspeção verificamos que a função é positiva dentro do intervalo apresentado. Integremos:

$$\int_{-1/2}^{1/2}[x(x-1)+1]dx=\int_{-1/2}^{1/2}(x^2-x+1)dx=\int_{-1/2}^{1/2}x^2\,dx-\int_{-1/2}^{1/2}x\,dx+\int_{-1/2}^{1/2}dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1/2}^{1/2}-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1/2}^{1/2}+x\Big|_{-1/2}^{1/2}$$

ou

$$\int_{-1/2}^{1/2}[x(x+1)+1]dx=\frac{(1/2)^3-(-1/2)^3}{3}-\frac{(1/2)^2-(-1/2)^2}{2}\Big|_{-1/2}^{1}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{4}-0+1=\frac{13}{12}\quad .$$

Normalizando teremos

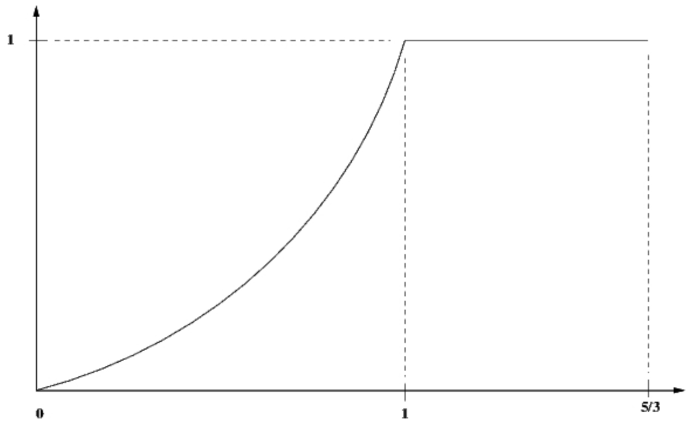
$$\frac{12}{13}[(x-1)+1]; x\in[-1/2,1/2]$$

que é distribuição de probabilidade.

c) $f(x)=-x(x-1)+1; x\in[-1,1]$

Resolução:
Observemos que, por exemplo, no ponto x = -1 a função deste item toma o valor -1. Portanto, a função não pode ser função de probabilidade.

2 – Segunda questão (2,5 pontos)
Apresentamos a função pelo gráfico abaixo que é nula fora do intervalo [0,5/3]. Além desta informação temos que entre os valores 0 e 1 a função é dada por x^2, sendo igual a um no restante do intervalo.



a) Prove que esta função é uma distribuição de probabilidade; (0,5 ponto)
Resolução:
Observe que a função é não negativa e que a função pode ser dividida em duas partes: um segmento de função e um retângulo. Integremos a função

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

e a parte retangular é dada por

$$\left(\frac{5}{3}-1\right)\times 1 = \frac{2}{3} \quad ,$$

portanto a área total é 1.

b) Ache a média desta distribuição; (0,5 ponto)
Resolução:
Por definição, a média é dada por

$$\mu = \int_0^{5/3} x f(x)\,dx = \int_0^1 x \times x^2\,dx + \int_1^{5/3} x \times 1\,dx = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^{5/3} x\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 + \frac{x^2}{2}\Big|_1^{5/3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 1^2\right] = \frac{1}{4} + \frac{8}{9} = \frac{41}{36} \approx 1{,}1388 \quad .$$

c) Determine a variância; (1,0 ponto)
Resolução:
Partindo da definição

$$\sigma^2 = \int_0^{5/3} x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

calculemos a integral

$$\int_0^{5/3} x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\times x^2\,dx+\int_1^{5/3} x^2\times 1\,dx=\int_0^1 x^4\,dx+\int_1^{5/3} x^2\,dx=\frac{x^5}{5}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^{5/3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\left[\left(\frac{5}{3}\right)^3-1^3\right]=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{125}{27}-1\right)$$

ou seja,

$$\int_0^{5/3} x^2 f(x)\,dx=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{125}{27}-1\right)=\frac{1}{5}+\frac{98}{81}\approx 1{,}4098 \quad ,$$

portanto a variância será

$$\sigma^2=1{,}4098-1{,}1388^2\approx 0{,}1129 \quad .$$

d) Determine a moda. (0,5 ponto)
Resolução:
Como a moda se dá pelo ponto (ou pontos) onde a probabilidade é máxima, então temos aqui uma distribuição de probabilidade multimodal cujos os valores vão de 1 a 5/3.

3 – Terceira questão (1,5 pontos)
Calcule as probabilidades solicitadas:
a) P(X > 1/3) para uma distribuição Normal de média 1/6 e variância 9/49.
Resolução:
Usemos a fórmula

$$P(a\le X\le b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \quad .$$

Para os valores apresentados teremos

$$P(X>1/3)=P\left(Z>\frac{1/3-1/6}{\sqrt{9/49}}\right)=P\left(Z>\frac{1/6}{3/7}\right)=P\left(Z>\frac{7}{18}\right)\approx P(Z>0{,}3888)$$

ou

$$P(X>1/3)\approx 0{,}5-P(Z<0{,}39)=0{,}5-0{,}1517=0{,}3483 \quad .$$

b) P(X < 1/3) para a distribuição da segunda questão;
Resolução:
Observemos que a probabilidade pedida está contida inteiramente no primeiro segmento da distribuição de probabilidade da segunda questão. Portanto a probabilidade será dada por

$$P()=\int_0^{1/3} f(x)\,dx=\int_0^{1/3} x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{81}\approx 0{,}0123 \quad .$$

c) P(X > 1/3) para a distribuição Exponencial com $\alpha=1/7$.
Resolução:

A probabilidade desta distribuição é dada por

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b} \quad .$$

Como a probabilidade é solicitada do ponto pedido até o infinito e sabendo que a distribuição vai a zero no infinito, a probabilidade solicitada será

$$P(X>1/3)=e^{-\frac{1}{7}\times\frac{1}{3}}=e^{-\frac{1}{21}}\approx 0{,}9535 \quad .$$

4 – Quarta questão (2,0 pontos)

Numa fábrica eram cortados arames de aço para a produção de pinos. Devido às vibrações da máquina era impossível que todos os pinos saíssem com o mesmo comprimento. Retirou-se uma amostra de 100 pinos e foi verificado que o comprimento destes pinos tinha uma média de 25 mm. A estimativa era que o desvio padrão era de 4 mm. Calcule

a) O intervalo de confiança para média com coeficiente de confiança de 70%;

Resolução:

O intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] .$$

Para os parâmetros dados podemos calcular

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{100}}=0{,}4 \quad \textbf{e} \quad z_{\gamma/2}=z_{0{,}70/2}=z_{0{,}35}=1{,}04$$

e assim

$$IC(\mu;0{,}7)=[25-1{,}04\times 0{,}4\,;\,25+1{,}04\times 0{,}4]\approx[24{,}58\,;\,25{,}42] .$$

b) O intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança de 90%.

Resolução:

Neste caso teremos

$$z_{\gamma/2}=z_{0{,}90/2}=z_{0{,}45}=1{,}65$$

o que nos dará

$$IC(\mu;0{,}7)=[25-1{,}65\times 0{,}4\,;\,25+1{,}65\times 0{,}4]\approx[24{,}34\,;\,25{,}66] .$$

5 – Quinta questão (1,5 pontos)

Numa universidade há uma série de copiadoras. Sabe-se que com cada cartucho de tonner são tiradas uma média de 12 milhares de cópias. Também foi levantado o desvio padrão igual a 4,5 milhares de cópias. O total de copiadoras é de 22. Supondo ser válido usar a distribuição Normal, calcule a probabilidade de que o tonner seja suficiente em média para:

a) mais de 13 mil cópias;

Resolução:

Usemos a fórmula abaixo

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad .$$

Pelos parâmetros dados teremos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4,5}{\sqrt{22}}\approx\frac{4,5}{4,6904}\approx 0,9594$$

e no caso deste item teremos

$$P(X>13)=P\left(Z>\frac{13-12}{0,9594}\right)=P\left(Z>\frac{1}{0,9594}\right)\approx P(Z>1,0423)\approx 0,5-P(Z<1,04)=0,5-0,3508=0,1492 \quad .$$

b) menos de 10 mil cópias;
Resolução:

$$P(X<b)=P\left(Z<\frac{10-12}{0,9594}\right)=P(Z<-2,0846)\approx P\,0,5-(Z<2,08)=0,5-0,4812=0,0188 \quad .$$

c) entre 11 mil e 14 mil cópias.
Resolução:

$$P(11<X<14)=P\left(\frac{11-12}{0,9594}<Z<\frac{14-12}{0,9594}\right)=P(-1,0423<Z<2,0846)\approx P(Z<1,04)+P(Z<2,08)=0,832 \quad .$$

6 – Sexta questão(1,0 ponto)

Uma indústria produz juntas para máquinas de alta pressão. Se investigava a durabilidade destes produtos em horas de funcionamento da máquina. Usou-se nesta análise a distribuição Exponencial com parâmetro igual a 0,00045. O fabricante garante uma durabilidade mínima de 100 horas. Pergunta-se: qual a probabilidade de que uma junta não dure este mínimo?

Resolução:

Usemos novamente a distribuição de probabilidade da distribuição Exponencial

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b} \quad .$$

Neste caso teremos

$$P(X<100)=1-e^{-0,00045\times 100}\approx 0,044 \quad ,$$

ou seja, há a probabilidade de 4,4% da junta não durar o mínimo garantido.