Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP3 1° semestre de 2018
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 – Primeira Questão (4,0 pontos)

Foi feito um estudo com os 30 funcionários de uma empresa em relação aos que "fumam" e "horas semanais de exercícios" (HE). A tabela a seguir, apresenta o resultado dessa pesquisa:

Fuma \ HE	0	1	2	3	4	Total
Sim	2	0	2	0	1	5
Não	8	2	6	2	7	25
Total	10	2	8	2	8	30

a) (0,5 ponto→ **1,0 ponto**) Monte a tabela de probabilidade conjunta

Resolução:

Fuma \ HE	0	1	2	3	4	Total
Sim	0,0667	0,0000	0,0667	0,0000	0,0333	0,1667
Não	0,2667	0,0667	0,2000	0,0667	0,2333	0,8333
Total	0,3333	0,0667	0,2667	0,0667	0,2667	1,0000

b) (1,5 ponto) Calcule o valor esperado, a variância e o desvio padrão da variável HE e fuma

Resolução:

Somente para a variável HE

Valor esperado:

HE	0	1	2	3	4	Total
P(HE)	0,3333	0,0667	0,2667	0,0667	0,2667	1,0000
HE x P(HE)	0,0000	0,0667	0,5333	0,2000	1,0667	1,8667

$$\mu_x = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = 0{,}0000 + 0{,}0667 + 0{,}5333 + 0{,}2000 + 1{,}0667 = 1{,}8667 \quad ;$$

Variância:

HE	0	1	2	3	4	Total
P(HE)	0,3333	0,0667	0,2667	0,0667	0,2667	1,0000
P X (HE - E(HE))^2	1,1615	0,0501	0,0047	0,0856	1,2136	2,5156

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i = 1{,}1615 + 0{,}0501 + 0{,}0047 + 0{,}0856 + 1{,}2136 = 2{,}5156 \quad ;$$

Desvio padrão:

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{2{,}5156}=1{,}5861 \quad .$$

c) (1,0 ponto → **1,5 ponto**) Verificar se a variável fuma é independente da variável HE? Por que?

Resolução:

(0,7 ponto para a verificação e 0,8 ponto para a justificativa)

Duas variáveis aleatórias discretas são independentes se a ocorrência de qualquer valor de uma delas não altera a probabilidade de ocorrência de valores da outra variável, para todos os valores (x,y) das variáveis (X,Y), no nosso caso, (X = HE, Y = Fuma). Logo, P(HE, Fuma) = P(HE) x P(Fuma) para qualquer par de valores de HE e Fuma. Como, por exemplo, a probabilidade de quem fuma e faz 1 hora de exercício é: P(Sim,1) = 0,0000 e P(Sim) x P(1) = 0,1667 x 0,06667 que é diferente de P(Sim, 1), então essas variáveis não são independentes, ou seja, são dependentes.

d)(1,0 ponto) Calcule a covariância entre as duas variáveis

ITEM CANCELADO: o ponto foi integrado aos itens a e c.

2 – Segunda Questão (1,0 ponto)

Em uma reunião entre amigos foram feitas empadas que continham azeitonas e outras que não continham. Sobre a mesa há duas travessas. Em uma delas há 3 empadas com azeitonas e 5 sem. Na outra há 2 empadas sem azeitonas e 4 com. Se, ao acaso, alguém escolher aleatoriamente uma destas travessas e pegar, aleatoriamente, uma das empadas, qual a probabilidade dele pegar uma empada com azeitona?

Resolução:

A probabilidade de escolhermos uma das duas travessas (T1 ou T2) é:

$$P(T1\, ou\, T2)=\frac{1}{2}=0{,}5$$

A probabilidade de escolhermos uma empada com azeitona na primeira travessa é:

$$P(azeitona\, T1)=\frac{3}{8}=0{,}375$$

A probabilidade de escolhermos uma empada com azeitona na segunda travessa é

$$P(azeitona\, T2)=\frac{4}{6}=0{,}667$$

Logo, sabendo a probabilidade de escolhermos as travessas T1 e T2, temos:

$$P(azeitona)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{6}=\frac{3}{16}+\frac{4}{12}=0{,}1875+0{,}3333=0{,}5208 \quad .$$

3 – Terceira questão (1,5 ponto)
Foi levantada uma amostra dada na tabela abaixo na qual estava estabelecido que a distribuição Normal era aplicável.

A	1,41	1,67	2,05	1,52	1,32	2,17	1,75	2,12	2,19	2,32	2,04	2,24

Estime a média e a variância por estimadores consistentes e não viciados e calcule as seguintes probabilidades:
Resolução:
Previamente calculemos a média de a variância usando os estimadores abaixo que seguem a especificação solicitada

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad e \quad S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right) \quad .$$

Com os dados fornecidos obtemos

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i=\frac{1,41+1,67+2,05+1,52+1,32+2,17+1,75+2,12+2,19+2,32+2,04+2,24}{12}=\frac{22,8}{12}=1,9 \quad .$$

Para a variância, calculemos inicialmente o somatório

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2=1,41^2+1,67^2+2,05^2+1,52^2+1,32^2+2,17^2+1,75^2+2,12^2+2,19^2+2,32^2+2,04^2+2,24^2=44,6558 \quad ,$$

logo

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{11}\left(44,6558-12\times 1,9^2\right)=\frac{1,3358}{11}\approx 0,1214 \quad .$$

a) P(1,6 < X < 1,9);
Resolução:
Com os valores obtidos anteriormente usaremos a expressão

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

que nos dará

$$P(1,6<X<1,9)=P\left(\frac{1,6-1,9}{\sqrt{0,1214}}<Z<\frac{1,9-1,9}{\sqrt{0,1214}}\right)\approx P\left(\frac{-0,3}{0,3484}<Z\right)=P(0,86<Z)=0,3051 \quad .$$

b) P(1,8 < X < 2,1).
Resolução:
Neste caso teremos

$$P(1,8<X<2,1)=P\left(\frac{1,8-1,9}{\sqrt{0,1214}}<Z<\frac{2,1-1,9}{\sqrt{0,1214}}\right)\approx P\left(\frac{-0,1}{0,3484}<Z\,\frac{0,2}{0,3484}\right)\approx P(-0,2870<Z<0,5740)$$

ou

$$P(1,8<X<2,1)\approx P(0,29<Z)+P(Z<0,57)=0,1141+0,2157=0,3298 \quad .$$

4 – Quarta questão (1,5 ponto)
Uma amostra de 10 pinos de madeira forneceu uma média de 4,7 cm de comprimento e uma variância amostral de 2,7 cm^2. Qual é a estimativa para a média (intervalo de confiança) de toda a produção se baseando nesta amostra e com um coeficiente de confiança de 95%?
Resolução:
Usaremos a fórmula para o intervalo de confiança dada por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] .$$

Com os valores dados pelo problema, podemos calcular

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{2{,}7}{10}}\approx 0{,}5196 \quad \textbf{e} \quad z_{\gamma/2}=z_{0{,}95/2}=z_{0{,}475}=1{,}96 \quad ,$$

logo

$$-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\times 0{,}5196\approx 1{,}0184 \quad .$$

Usando estes dados teremos

$$IC(\mu,\gamma)=[4{,}7-1{,}0184\,;4{,}7+1{,}0184]=[3{,}6816\,;5{,}7184] \;.$$

5 – Quinta questão (2,0 pontos) Dada a função $\frac{4}{9}(x^3-x)$

a) Mostre que ela é uma distribuição de probabilidade no intervalo [1, 2];
Resolução:
Observe que quando x = 1 a função é nula e quando x = 2 a função é igual a 8/3. Como a função é crescente no intervalo, ela não toma valores negativos. Integremos

$$\int_1^2\left[\frac{4}{9}(x^3-x)dx\right]=\frac{4}{9}\left[\int_1^2 x^3dx-\int_1^2 x\,dx\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_1^2-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{2^4-1^4}{4}-\frac{2^2-1^2}{2}\right]=\frac{4}{9}\left(\frac{15}{4}-\frac{3}{2}\right)=\frac{4}{9}\frac{15-6}{4}=1 \quad ,$$

portanto, temos uma distribuição de probabilidade.

b) Calcule P(1,2 < X < 1,8);
Resolução:

$$P(1{,}2<X<1{,}8)=\int_{1{,}2}^{1{,}8}\left[\frac{4}{9}(x^3-x)dx\right]=\frac{4}{9}\left[\int_{1{,}2}^{1{,}8} x^3\,dx-\int_{1{,}2}^{1{,}8} x\,dx\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_{1{,}2}^{1{,}8}-\frac{x^2}{2}\Big|_{1{,}2}^{1{,}8}\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{1{,}8^4-1{,}2^4}{4}-\frac{1{,}8^2-1{,}2^2}{2}\right]$$

ou ainda

$$P(1{,}2<X<1{,}8)=\frac{4}{9}\left(\frac{8{,}424}{4}-\frac{1{,}8}{2}\right)=\frac{4}{9}(2{,}106-0{,}9)=0{,}536 \quad .$$

c) Calcule o valor médio;

Resolução:

Usemos a definição de média para distribuições contínuas

$$\mu=\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2 \left[\frac{4}{9}x(x^3-x)\,dx\right]=\frac{4}{9}\left[\int_1^2 x^4\,dx-\int_1^2 x^2\,dx\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_1^2-\frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{2^5-1^5}{5}-\frac{2^3-1^3}{3}\right]$$

ou

$$\mu=\frac{4}{9}\left(\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right)=\frac{4}{9}\frac{58}{15}\approx 1,7185 \quad .$$

d) Calcule a variância.

Resolução:

Partiremos da definição da variância para distribuições contínuas

$$\sigma^2=\int_1^2 x^2 f(x)\,dx-\mu^2 \quad .$$

Como já temos a média, calculemos a integral

$$\int_1^2 x^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \left[\frac{4}{9}x^2(x^3-x)\,dx\right]=\frac{4}{9}\left[\int_1^2 x^5\,dx-\int_1^2 x^3\,dx\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{x^6}{6}\Big|_1^2-\frac{x^4}{4}\Big|_1^2\right]=\frac{4}{9}\left[\frac{2^6-1^6}{6}-\frac{2^4-1^4}{4}\right]$$

o que nos leva a

$$\int_1^2 x^2 f(x)\,dx=\frac{4}{9}\left[\frac{63}{6}-\frac{15}{4}\right]=\frac{4}{9}\frac{27}{4}=3 \quad ,$$

daí obtemos

$$\sigma^2=\int_1^2 x^2 f(x)\,dx-\mu^2=3-1,7185^2=0,0467 \quad .$$