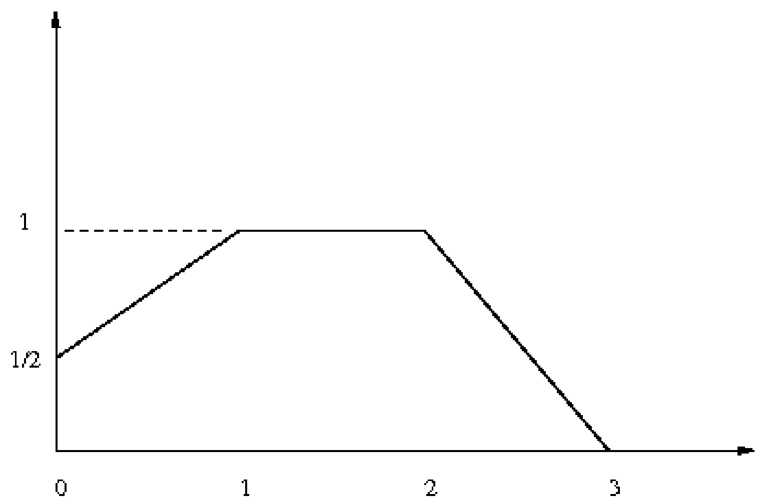
Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 1° semestre de 2010.

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Primeira questão (2,5 pontos)
Uma densidade de probabilidade é dada por P(x) = C f(x), onde f(x) é dada pela figura abaixo (onde não houver indicação a função vale zero) e C é uma constante.



a) Calcule C de tal forma que P(x) satisfaça as condições de P(x) ser uma densidade de probabilidade. (1,0 ponto)

Solução:

Há duas maneiras de resolver este item da questão. Uma é determinando a função como abaixo

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{1}{2}, se(0\leq X<1) \\ 1, se(1\leq X<2) \\ -x+3, se(2\leq X\leq 3) \end{cases}$$

e integrando cada parte da função:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$
$$\int_1^2 f(x)\,dx == \int_1^2 1\,dx = (x)\Big|_1^2 = 2-1 = 1$$
$$\int_2^3 f(x)\,dx = \int_2^3 (-x+3)\,dx = \left(-\frac{x^2}{2}+3\mathrm{x}\right)\Big|_2^3 = -\frac{9}{2}+9-\left(-\frac{4}{2}+6\right) = \frac{1}{2}$$

Para P(x) seja distribuição de probabilidades, teremos que fazer com que C seja tal que a soma das integrais acima seja 1. Assim temos que C = 4/9. Este valor deverá ser usado nos cálculos abaixo.

Outra maneira está em observarmos que a integral total é a soma da área de dois trapézios e um retângulo nos quais a figura pode ser decomposta. Basta usar as fórmulas para estas áreas para achar a constante. No entanto, para o próximo item é necessária a expressão da função.

Usando o valor achado para C:

c) Calcule o valor médio; (1,0 ponto)

Por definição, a média será igual a

$$\int_0^3 x P(x)\,dx = \int_0^3 \frac{4}{9} x f(x)\,dx = \frac{4}{9}\left[\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)dx + \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 (-x^2+3\mathrm{x})\,dx\right]$$

ou seja,

$$\mu = \frac{4}{9}\left[\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 + \left(-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^3\right] = \frac{4}{9}\ \frac{37}{12} = 1{,}3703$$

d) Calcule a moda. (0,5 pontos)

Como o valor mais freqüente é 4/9 (lembre-se 4/9 f(x)) e P(x) toma este valor entre 1 e 2, qualquer valor neste intervalo é o valor da moda.

Segunda questão (2,5 pontos)

Um conjunto de dados foi modelado segundo a distribuição Normal. A média dos dados é 10,3 e a variância 8,23.

Calcule:

a) P(X > 11) (1,0 ponto)
b) P(X < 11) (0,5 ponto)
c) P(11 < X < 12) (0,5 ponto)
d) P(X > 12) (0,5 ponto)

Solução:

Partindo dos valores de média e variância apresentados, basta usar as propriedades de simetria da distribuição Normal e fazer a mudança de variáveis para utilizar a tabela ao final da prova.

a)
$$P(X>11)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{11-10.3}{\sqrt{8.23}}\right)=P\left(Z>0{,}2440\right)$$
$$P(Z>0{,}2440)=0{,}5-P(0\leq Z<0{,}2440)=0{,}5-0{,}0948=0{,}4052$$

b) Aqui temos é o resultado é o complemento do resultado anterior, ou seja,
$$P(X<11)=1-P(x>11)=1-0{,}4052=0{,}5948$$

c)
$$P(11<X<12)=P\left(\frac{11-10{,}3}{\sqrt{8{,}23}}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{12-10{,}3}{\sqrt{8{,}23}}\right)=P(0{,}2440\leq Z\leq 0{,}5925)$$
$$=P(Z\leq 0{,}5925)-P(Z\leq 0.2440)=0{,}2224-0{,}0948=0.1277$$

d)
$$P(X>12)=1-P(X\leq 12)=1-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{12-10{,}3}{\sqrt{8{,}23}}\right)$$
$$=0{,}5-P(Z\leq 0{,}5925)=0{,}5-0{,}2224=0{,}2776$$

Terceira questão (2,5 pontos)

Se investiga numa empresa de informática a possibilidade de mudança da linguagem na qual são elaboradas as aplicações desenvolvidas. O fator avaliado é a velocidade de implementação nas linguagens. Uma equipe de programadores, experientes na linguagem usada atualmente (linguagem 1) e numa proposta para novo uso (linguagem 2), desenvolveram programas a partir do mesmo algoritmo. Abaixo vai uma tabela com os resultados de tempos obtidos para o desenvolvimento de programas baseados no algoritmo.

Linguagem 1	linguagem 2
17	18
16	14
21	19
14	11
18	23
24	21
16	10
14	13
21	19
23	24
13	15
18	20
22	18
14	16
20	21

a) Calcule um intervalo de confiança de 95% para a diferença das médias no tempo de programação;

Solução:

Vamos supor que estes dados possam ser modelados pela distribuição Normal. Assim sendo, calculemos a média e variância amostrais de para cada linguagem usando os seguintes estimadores para a média e variância

$$\bar{X}=\frac{\sum_{1}^{n} X_i}{n}$$

e

$$S^2=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2}{n-1}$$

Assim teremos para a linguagem 1 a média

$$\bar{X}_1=\frac{\sum_{1}^{15} X_i}{n}=\frac{17+16+21+14+18+24+16+14+21+23+13+18+22+14+20}{15}$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{1}^{15} X_i}{n} = \frac{271}{15} = 18{,}066$$

e para a linguagem 2

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{1}^{15} X_i}{n} = \frac{18+14+19+11+23+21+10+13+19+24+15+20+18+16+21}{15}$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{1}^{15} X_i}{n} = \frac{262}{15} = 17{,}466$$

O somatório do quadrados da amostra de tempos da linguagem 1 será

$$\sum_{1}^{15} \bar{X} = 4824$$

Daí calculamos a variância para a linguagem 1

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15} X_i^2 - 15\bar{X}^2}{14} = \frac{5077 - 15 * 18{,}066^2}{14} = \frac{181{,}294}{14} = 12{,}949$$

Sendo o intervalo de confiança dado por

$$IC(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Neste problema temos que γ = 0,95 o que corresponde na tabela da distribuição Normal para $z_{\gamma/2}$=1,96. Assim para a linguagem 1 teremos

$$z_{\gamma/2}\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} = 1{,}96\sqrt{\frac{12{,}949}{15}} = 1{,}96 \times 0{,}929 = 1{,}819$$

Adicionando os demais parâmetros teremos finalmente

$$IC_1(\mu, \gamma) = [18{,}066 - 1{,}819 ; 18{,}066 + 1{,}819] = [16{,}647 ; 19{,}885]$$

b) Por estes dados podemos concluir que a linguagem deve ser mudada?

Solução:
Observemos que a média para a linguagem 2 é 17,466 estando dentro do intervalo de confiança. Assim, por este experimento não podemos recomendar a troca da linguagem.

Quarta questão (2,5 pontos)
Numa eleição concorriam dois candidatos (A e B). Um deles, o candidato A, obteve 61% dos votos. Numa seção eleitoral, julgada representativa do eleitorado, qual a probabilidade de do candidato A ter conseguido entre 550 e 690 votos de 1105 votos? (1,0 ponto) Qual a probabilidade do candidato B ter conseguido o mesmo número de votos? (0,5 ponto)
Solução: Vamos supor válida a distribuição Normal. Sendo assim, a probabilidade será dada por

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Neste caso particular a proporção amostral é de $\hat{p}=0{,}61$ **e para este valor a estimativa amostral da variância é dada por**

$$\sigma^2 = p\frac{(1-p)}{n} = 0{,}61\,\frac{1-0{,}61}{1105} = 0{,}000215$$

ou seja $\sigma = 0{,}0146$ **e o número de votos médios é igual a** $0{,}61 \times 1105 = 674{,}05$ **e adotaremos 674.**

Assim, teremos para a probabilidade pedida a expressão

$$P(550 \le X \le 690) = P\left(\frac{550-674}{0{,}0146} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{690-674}{0{,}0146}\right) = P\left(\frac{550-674}{0{,}0146} \le Z \le \frac{690-674}{0{,}0146}\right)$$

ou

$$P(550 \le X \le 690) = P(-8473{,}1 \le Z \le 1095{,}89) = 1$$

Por complemento a resposta para o candidato B será nula.