Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina - Probabilidade e Estatística

GABARITO da AP3 1° semestre de 2017

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1ª. Questão (1,0 ponto): Sejam quatro urnas (A, B, C e D) e cada uma delas contém 10 bolas coloridas distribuídas da seguinte forma:

Urnas \ Cores	Vermelhas	Brancas	Azuis	TOTAL
A	1	6	3	10
B	6	2	2	10
C	8	1	1	10
D	0	6	4	10

Escolhe-se arbitrariamente uma urna e tira-se uma bola. Se esta bola é vermelha, qual a probabilidade dela ter sido extraída da Urna B?

<u>Solução:</u>

Probabilidade de ser escolher um urna qualquer, por exemplo, a urna B:

$$P(urna\_B) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

Probabilidade da bola ser vermelha em cada uma das urnas:

$$P(verm\_A) = \frac{1}{10} = 0{,}10$$

$$P(verm\_B) = \frac{6}{10} = 0{,}60$$

$$P(verm\_C) = \frac{8}{10} = 0{,}80$$

$$P(verm\_D) = \frac{0}{10} = 0{,}00$$

Logo,

$$P(urna\_B \mid verm) = \frac{\frac{1}{4}\times 0{,}10}{\frac{1}{4}\times 0{,}10+\frac{1}{4}\times 0{,}60+\frac{1}{4}\times 0{,}80+\frac{1}{4}\times 0{,}00} = \frac{6}{15}$$

$$P(urna\_B \mid verm) = \frac{0{,}25\times 0{,}60}{0{,}25\times 0{,}10+0{,}25\times 0{,}60+0{,}25\times 0{,}80+0{,}25\times 0{,}00} = 0{,}40$$

2ª. Questão (2,0 pontos): Considere que dois dados não viciados foram lançados, um após o outro, e deseja-se saber qual a probabilidade de que:

a) supondo que a soma é menor ou igual a 5, qual a probabilidade que as faces voltadas para cima sejam iguais?

Solução:

Sejam os eventos:

A - faces voltadas para cima sejam iguais

B - soma dos valores das faces voltadas para cima seja menor ou igual a 5.

Assim, o espaço amostral para o experimento “lançamento de dois dados” tem 36 elementos.

A={(1,1); (2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)}

B={(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(3,1);(3,2);(4,1)}

Assim:

a) $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{10/36} = \frac{2}{10} = 0{,}2000$

b) supondo que as faces voltadas para cima são iguais, qual a probabilidade aa soma dos valores sejam menores ou iguais a 5?

Solução:

$$P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} = 0{,}3333$$

3ª Questão (2,0 pontos): Estudos mostraram que há 73% de chance de consumidores do sexo feminino apresentarem uma reação positiva a anúncios publicitários com crianças. Uma agência está conduzindo um estudo, apresentando um novo anúncio para 5 consumidoras. Qual é a probabilidade de que pelo menos 3 das 5 consumidores apresentem reação positiva?

Solução:

Como estamos interessados em observar a possibilidade de, em 5 homens pelo menos 3 reagirem positivamente a um anúncio e a probabilidade de cada homem reagir positivamente é 0,73, podemos realizar esta contagem através do modelo de probabilidade binomial.

Assim,

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times (0{,}73)^3 \times (0{,}27)^2 = 10 \times 0{,}3890 \times 0{,}0729 = 0{,}2836$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times (0{,}73)^4 \times (0{,}27)^1 = 5 \times 0{,}284 \times 0{,}27 = 0{,}3834$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \times (0{,}73)^5 \times (0{,}27)^0 = 1 \times 0{,}2073 \times 1 = 0{,}2073$$

$$P(X \geq 3) = 0{,}2836 + 0{,}3834 + 0{,}2073 = 0{,}8743$$

4ª. Questão (2,0 pontos) Se avaliava o nível de contaminação por metais pesados na população de um bairro que foi construído sobre um antigo ferro velho. Num estudo preliminar se fez uma amostragem de dez pessoas e foram identificados os seguintes valores para chumbo no sangue, dados em unidades arbitrárias:

Paciente	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Quantidade	2,35	2,17	3,05	2,95	2,32	2,15	2,25	3,12	2,29	2,22

Obs: Use estimadores não viciados e consistentes.

a) Estime a média dos valores:

Solução:

Um estimador não viciado e consistente da média é

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad .$$

Escreveremos então

$$\overline{X} = \frac{2{,}35 + 2{,}17 + 3{,}05 + 2{,}95 + 2{,}32 + 2{,}15 + 2{,}25 + 3{,}12 + 2{,}29 + 2{,}22}{10} = \frac{24{,}87}{10} = 2{,}487$$

.

b) Estime a variância dos valores;

Solução:

Um estimador não viciado e consistente que usaremos é

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$$

e calcularemos primeiro o somatório do quadrado dos valores medidos, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 2{,}35^2 + 2{,}17^2 + 3{,}05^2 + 2{,}95^2 + 2{,}32^2 + 2{,}15^2 + 2{,}25^2 + 3{,}12^2 + 2{,}29^2 + 2{,}22^2 = 63{,}2107$$

.

partindo deste resultados poderemos escrever

$$S^2 = \frac{1}{9}\left(63{,}2107 - 10 \times 2{,}487^2\right) = \frac{63{,}2107 - 61{,}85169}{9} \approx 0{,}1510$$

.

c) Supondo que a distribuição destes valores pode ser descrita pela distribuição Normal, calcule a probabilidade de encontrar pessoas com quantidade de chumbo no sangue maior que 2,6.

Solução:

A probabilidade é dada por

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

Calculemos

$$P(X < 2{,}6) = P\left(Z < \frac{2{,}6 - 2{,}487}{\sqrt{0{,}1510}}\right) \approx P\left(Z < \frac{0{,}113}{0{,}3886}\right) \approx P(Z < 0{,}29) = 0{,}1141,$$

daí obtemos que a probabilidade pedida é de

$$P(X > 2{,}6) = 0{,}5 - 0{,}1141 = 0{,}3859 .$$

5ª. Quinta questão (1,0 ponto): Determine o intervalo de confiança para a média com os dados da quarta questão. Coeficiente de confiança de 92%.

Solução:

A expressão para o intervalo de confiança é dada por

$$IC(\mu,\gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Com nossos dados teremos

$$IC(\mu,\gamma) = \left[2{,}487 - z_{0,46}\frac{0{,}3886}{\sqrt{10}} ; 2{,}487 + z_{0,46}\frac{0{,}3886}{\sqrt{10}}\right] = [2{,}487 - 1{,}75 \times 0{,}1229 ; 2{,}487 + 1{,}75 \times 0{,}1229]$$

ou

$$IC \approx [2{,}27\,;\,2{,}70].$$

6ª. Questão (2,0 pontos): A função está $x^3 - x$ associada a um problema estatístico no intervalo [1,2]. No entanto, ela não se encontra normalizada.

a) Normalize a função de forma a termos uma distribuição de probabilidade;

Solução:

Integremos a função

$$\int_1^2 (x^3 - x)\,dx = \int_1^2 x^3\,dx - \int_1^2 x\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{4}\left(2^4 - 1\right) - \frac{1}{2}\left(2^2 - 1\right) = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{9}{4},$$

portanto a função normalizada será escrita como

$$\frac{4}{9}\left(x^3 - x\right).$$

b) Calcule P(X < 1,3) para a distribuição obtida;

Solução:

A probabilidade será dada por

$$P(X < 1{,}3) = \int_1^{1{,}3} \frac{4}{9}\left(x^3 - x\right)dx = \frac{4}{9}\left[\int_1^{1{,}3} x^3 dx - \int_1^{1{,}3} x dx\right] = \frac{4}{9}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_1^{1{,}3} - \frac{x^2}{2}\Big|_1^{1{,}3}\right] = \frac{4}{9}\left[\frac{1{,}3^4 - 1}{4} - \frac{1{,}3^2 - 1}{2}\Big|_1^{1{,}3}\right]$$

e daí

$$P(X < 1{,}3) = \frac{1{,}8561}{9} - \frac{2}{9}0{,}69 = 0{,}0529\,.$$

c) Calcule o valor médio da distribuição obtida;

Solução:

Usemos a definição de média para uma distribuição de probabilidade contínua

$$\mu = \int_1^2 x f(x)dx = \int_1^2 x\frac{4}{9}\left(x^3 - x\right)dx = \frac{4}{9}\left[\int_1^2 x^4 dx - \int_1^2 x^2 dx\right] = \frac{4}{9}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_1^2\right] = \frac{4}{9}\left[\frac{2^5 - 1}{5} - \frac{2^3 - 1}{3}\right]$$

ou ainda

$$\mu = \frac{4}{9}\left(\frac{31}{5} - \frac{7}{3}\right) = \frac{232}{135} \approx 1{,}7185\,.$$

d) Calcule a variância da distribuição obtida.

Solução:

Usaremos agora a definição para a variância de uma distribuição de probabilidade contínua

$$\sigma^2 = \int_1^2 x^2 f(x)\,dx - \mu^2$$

,

calculando inicialmente a integral

$$\int_1^2 x^2 f(x)dx = \int_1^2 x^2 \frac{4}{9}\left(x^3 - x\right)dx = \frac{4}{9}\left[\int_1^2 x^5 dx - \int_1^2 x^3 dx\right] = \frac{4}{9}\left[\frac{x^6}{6}\Big|_1^2 - \frac{x^4}{4}\Big|_1^2\right] = \frac{4}{9}\left[\frac{2^6-1}{6} - \frac{2^4-1}{4}\right]$$

que resulta em

$$\int_1^2 x^2 f(x)dx = \frac{4}{9}\left[\frac{63}{6} - \frac{15}{4}\right] = 3\,.$$

Assim teremos

$$\sigma^2 = \int_1^2 x^2 f(x)dx - \mu^2 = 3 - \left(\frac{232}{135}\right)^2 \approx 0{,}0467\,.$$