Probabilidade e Estatística

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho

Regina Célia Paula Leal Toledo

Probabilidade e Estatística

Livro Texto:

[1] "Noções de Probabilidade e Estatística"
Marcos Nascimento Magalhães e Antonio Carlos Pedroso de Lima, Edusp (2005).

[2] "Probabilidade: Um Curso Introdutório"
Carlos A. B. Dantas, Edusp (2004).

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

Aula 8

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho
Regina Célia Paula Leal Toledo

Variáveis aleatórias contínuas

Conteúdo:

8.1 Introdução. O que são e para que são variáveis contínuas?
8.2 Função densidade de probabilidade
8.3 Medidas de posição
8.4 Variância
8.5 Momentos de Probabilidade

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

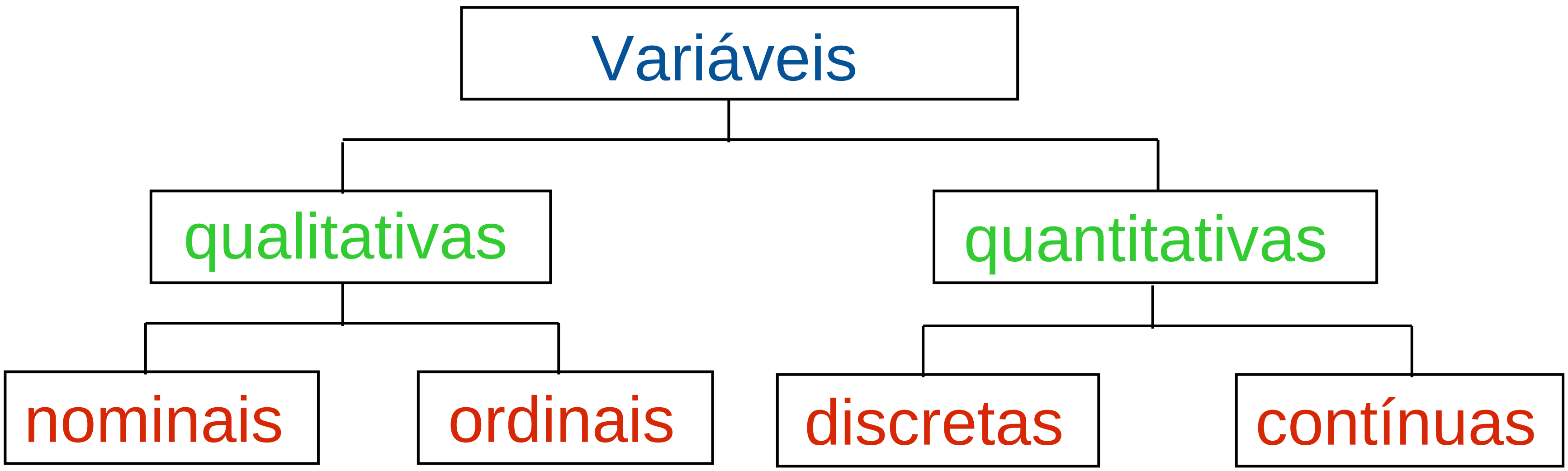
$$\sigma_X^2 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$A \cap B = \varnothing$$

8.1 Introdução

O que são variáveis contínuas?

Recordando da primeira aula...



8.1 Introdução

Variáveis quantitativas:

São variáveis de natureza numérica, obtidas através de contagem ou mensuração.

Variáveis quantitativas discretas:

Obtidas a partir de contagem sendo normalmente inteiras. Os valores são finitos e enumeráveis.

Variáveis quantitativas contínuas:

Obtidas normalmente por mensuração e podem assumir quaisquer valores reais.

8.1 Introdução

O que são variáveis contínuas?

São variáveis que pertencem a um intervalo dos números reais.

8.1 Introdução

Exemplos de variáveis contínuas

→ Tamanho de parafusos produzidos numa fábrica.

→ Peso dos pãozinhos numa padaria.

→ Área atacada por uma praga agrícola.

Apesar dos dois primeiros exemplos terem um padrão (tamanho e diâmetro do parafuso ou o peso do pão) ocorrem pequenas variações devido ao processo de produção.

8.1 Introdução

Um exemplo para ajudar a pensar...

Exemplo 6.1 da referência 1

Existe um lençol de água numa região. Pelas sondagens preliminares, este lençol se encontra entre 20 e 100 metros de profundidade.

Usando sondas, num determinado local escolhido aleatoriamente, perfuramos até achar água.

Isto nos dá uma variável aleatória X, profundidade onde se encontrou água.

Esta variável toma qualquer valor no intervalo [20, 100].

Como não temos nada que nos prove em contrário, suporemos que achar água em todas profundidades são equiprováveis.

8.1 Introdução

Uma proposta de apresentação dos dados

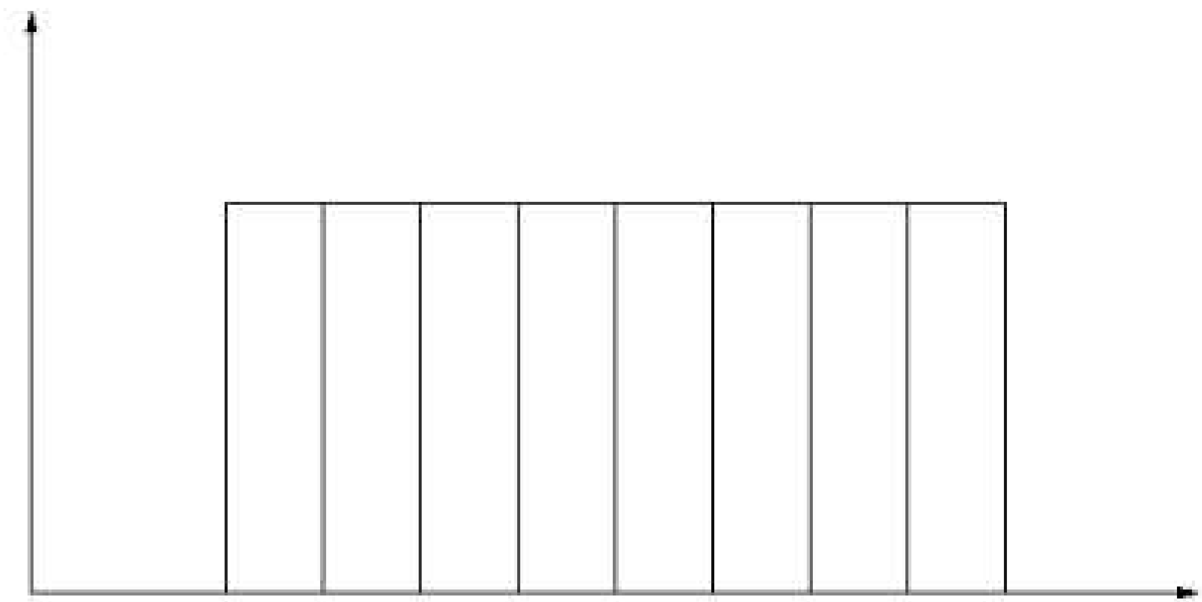
Vamos dividir os valores de profundidade em oito faixas de dez metros

Como todos os valores são supostos equiprováveis, vamos supor adicionalmente que cada faixa também sejam equiprováveis, ou seja, valores em cada faixa tenha frequência relativa igual a 1/8.

Façamos um histograma com esta situação de forma que as ordenadas serão as densidades de forma que cada retângulo seja a frequência relativa do intervalo

8.1 Introdução

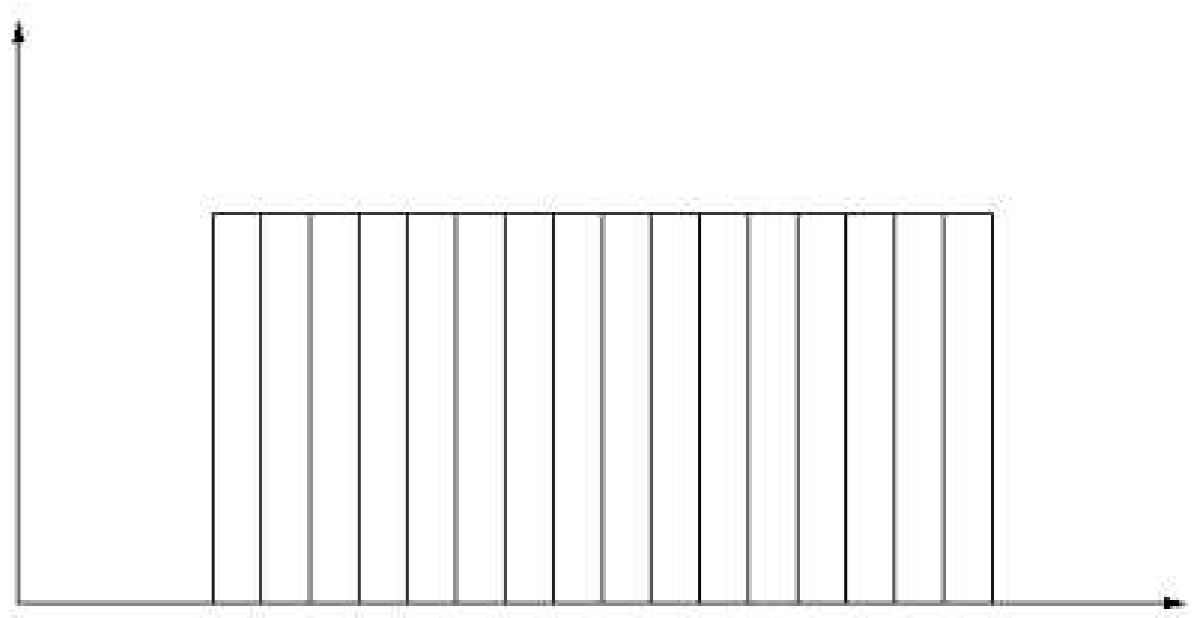
Histograma 1



Poderiamos fazer a mesma coisa criando faixas de largura de cinco metros, um metro ou qualquer outra medida. Por exemplo, poderíamos fazer a discretização como na próxima figura.

8.1 Introdução

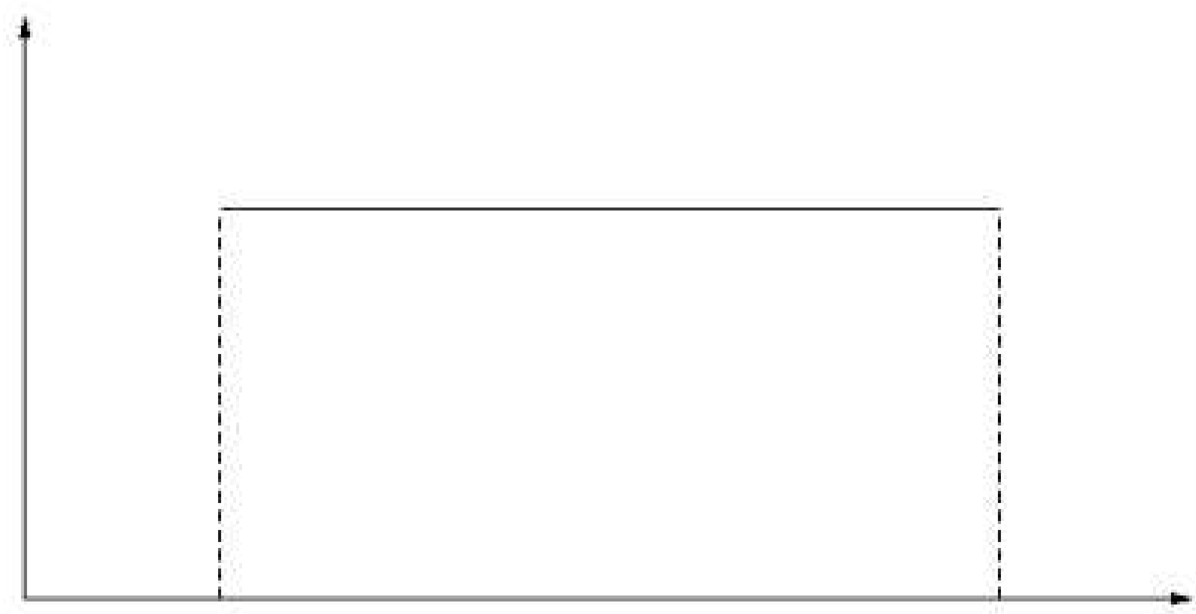
Histograma 2



Continuando o procedimento, fazemos a passagem do discreto para o contínuo, obtemos, no limite, um retângulo.

8.1 Introdução

Histograma 2



Pela interpretação geomética do integral ....

8.1 Introdução

Pela interpretação geométrica da integral fica fácil saber o que faremos:

→ Substituiremos o somatório pela integral.

8.1 Introdução

→Reveja o material de Matemática para a Computação !

8.1 Introdução

No contínuo teremos uma função: A função densidade de probabilidade:

Uma função auxiliar no cálculo de probabilidades

Formalmente....

8.2 Função densidade de probabilidade

Uma função $f(\mathbf{X})$ é uma função contínua de probabilidade ou função densidade de probabilidade, para uma variável aleatória $\mathbf{X}$, se satisfaz duas condições:

→ $f(\mathbf{X}) \geq 0$, para todo $\mathbf{X}$ ∈ (–∞, ∞)

→ a área definida por $f(\mathbf{X})$ é igual a 1.

A segunda condição pode ser escrita como,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

8.2 Função densidade de probabilidade

Para calcular probabilidades, para a ≥ b

$$P(a \leq \mathbf{X} \leq b) = \int_a^b f(x)dx = 1$$

que representa a área sob a função densidade de probabilidade definida pelo intervalo [a, b].

Obs: $P(\mathbf{X} = x) = 0$

ou seja, para variáveis aleatórias contínuas, a probabilidade de um valor isolado é zero.

8.2 Função densidade de probabilidade

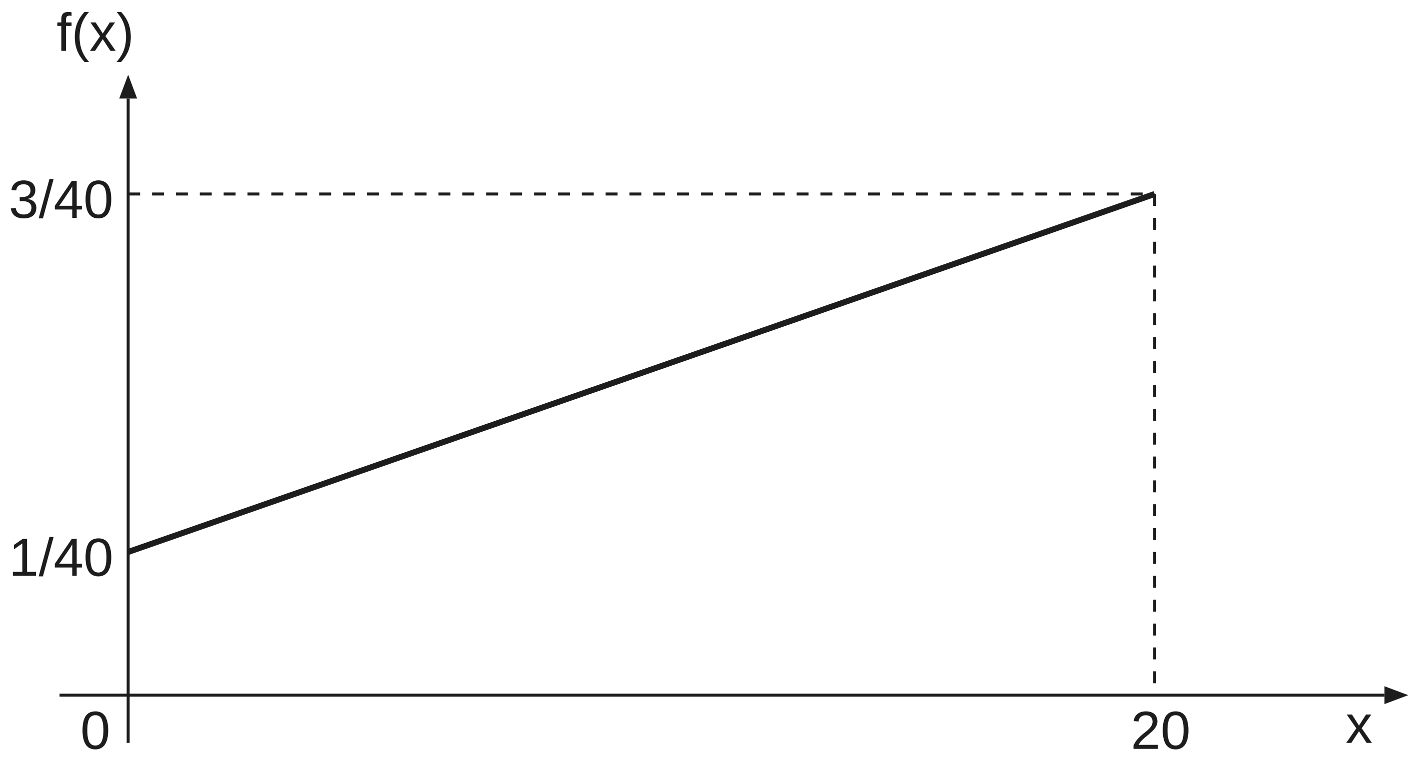
Um exemplo:

Arqueólogos, estudaram uma região e estabeleceram um modelo teórico para a variável $\mathbf{C}$, comprimento dos fósseis da região (escala em cm).

$$f(c) = \begin{cases} \dfrac{1}{40}\left(\dfrac{c}{10}+1\right) & \text{se } 0 \le c \le 20 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Graficamente....

8.2 Função densidade de probabilidade



8.2 Função densidade de probabilidade

Observe:

A função é positiva.

A integral dentro do intervalo [0, 20] é igual a 1*

Mais importante: ....

* Faça o cálculo como exercício.

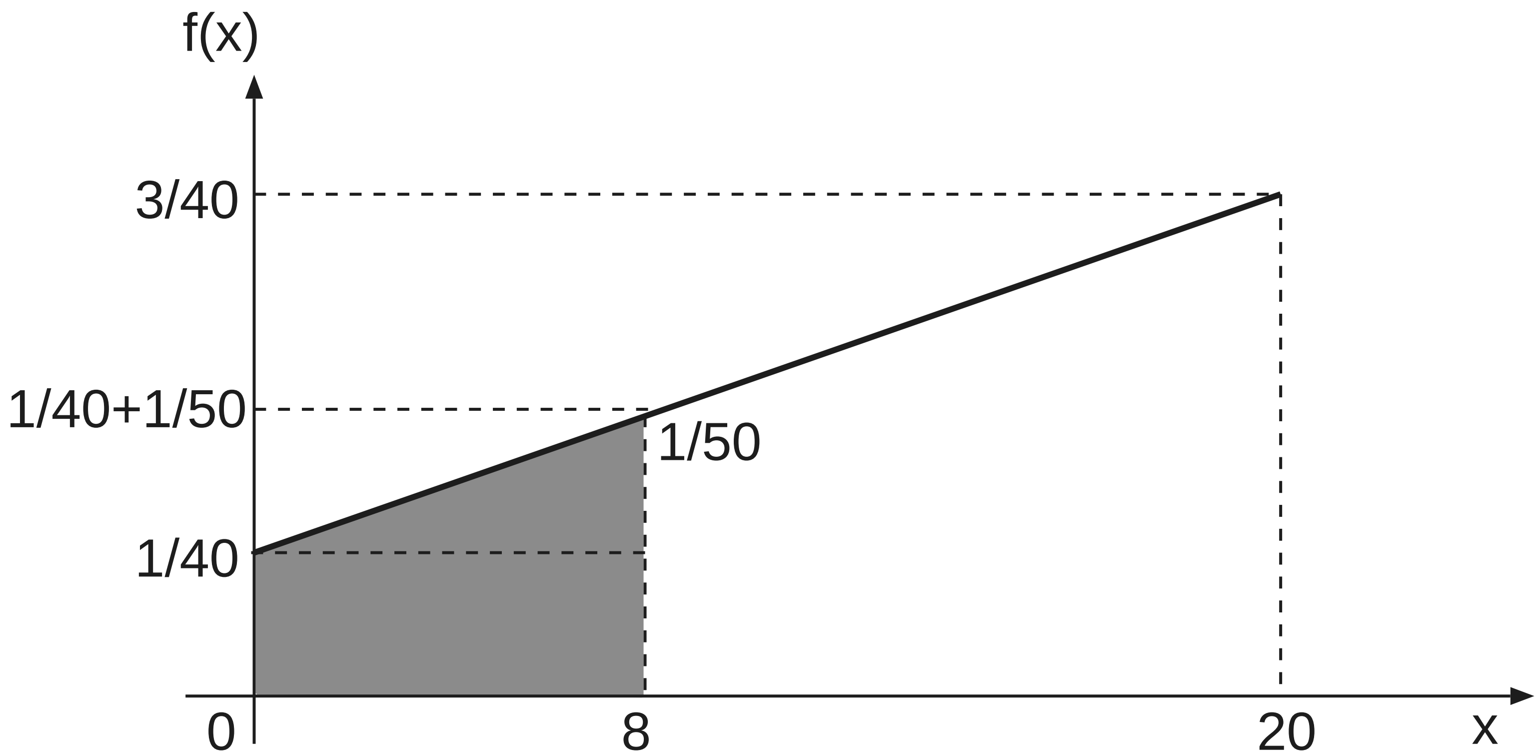
8.2 Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade foi estabelecida por um modelo!

A modelagem da informação, ou seja, os pressupostos que fazemos sobre a informação, é a fonte do sucesso ou do fracasso em analisar tendências.

8.2 Função densidade de probabilidade

Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso, tenha o comprimento inferior a 8 cm? Graficamente podemos expressar esta questão como abaixo:



8.2 Função densidade de probabilidade

Qual a probabilidade de um fóssil, escolhido ao acaso, tenha o comprimento inferior a 8 cm?

Calculando a área sobreada (um trapézio) obtemos

$$P(\mathbf{C} < 8) = \frac{7}{25} = 0,28$$

ou seja, a probabilidade de achar um fóssil menor que 8 cm é de 28%.

8.3 Medidas de posição

O valor esperado (média) da variável aleatória contínua $\mathbf{X}$, com função densidade de probabilidade $f(\mathbf{X})$ é dada por

$$E(\mathbf{X}) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

8.3 Medidas de posição

A mediana é o valor Md que tem a propriedade

$$P(\mathbf{X} > Md) \geq 0,5$$

e

$$P(\mathbf{X} \leq Md) \geq 0,5$$

8.3 Medidas de posição

A moda é o valor Mo tal que,

$$f(Mo) = max \ f(x)$$

8.4 Variância

A variância é definida como,

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

ou ainda,

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

com

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

e σ é chamado de desvio padrão.

8.5 Momentos de Probabilidade

Chamamos a média de Momento de Probabilidade de Ordem 1

$$E(\mathbf{X}) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

e chamamos à variança em relação a origem (ou centrada na origem) de Momento de Probabilidade de Ordem 2

$$E(\mathbf{X}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

8.5 Momentos de Probabilidade

De forma análoga, podemos definir o momento de probabilidade de qualquer ordem, por exemplo **n**, como abaixo

$$E(\mathbf{X}^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$$

Os mais importantes são os momento apresentados, ou seja, o de primeira e segunda ordens. Em algumas aplicações são usados os momentos de terceira e quarta ordem que mostram assimetria da distribuição e o "estreitamento" da mesma, respectivamente.

8.5 Momentos de Probabilidade

Analogias físicas

→ A média ou esperança, tem uma analogia com a física como o centro de massa de uma distribuição de partículas dadas pela suas posições e distribuição;

→ A variância pode ser interpretada fisicamente como o momento de inércia da distribuição em torno do centro de gravidade (a média).

8.5 Momentos de Probabilidade

De volta ao problema dos arqueólogos

A variável $\mathbf{C}$, comprimento do fóssil, tem a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(c) = \begin{cases} \frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right) & \text{se } 0 \leq c \leq 20 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos calcular a média e a variância de $\mathbf{C}$.

8.5 Momentos de Probabilidade

De volta ao problema dos arqueólogos

A média, pela definição será

$$\mu = \int_0^{20} c \frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right) dc = \frac{35}{3} \approx 11,66\,\text{cm}$$

8.5 Momentos de Probabilidade

De volta ao problema dos arqueólogos

e como o segundo momento é dado por

$$E(C^2)=\int_0^{20} c^2\frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right)dc=\frac{500}{3}\approx 166{,}66$$

nos dá para a variância

$$\sigma_C^2=E(C^2)-\mu^2=\frac{275}{9}=30{,}56\,cm^2$$

e o desvio padrão será

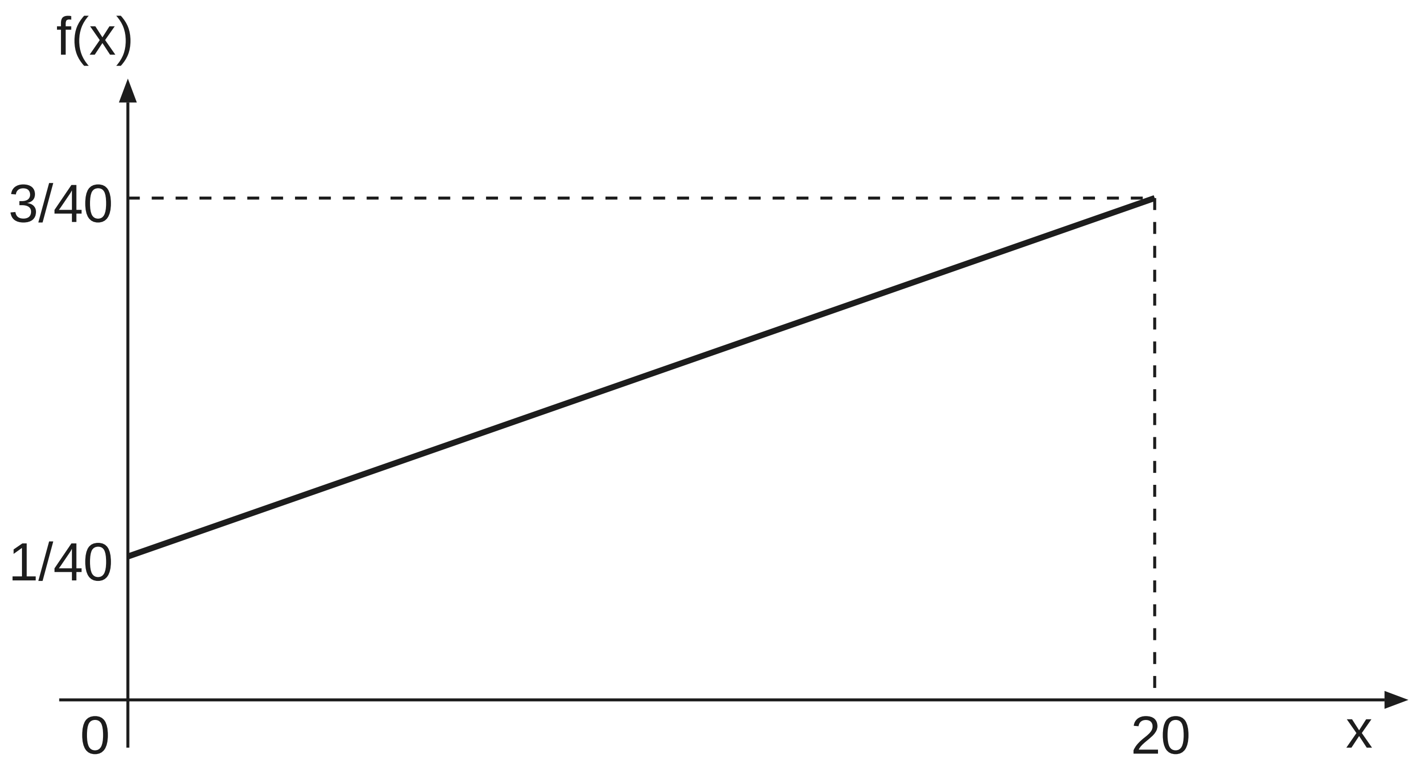
$$\sigma_C=\sqrt{30{,}56}\approx 5{,}53\,cm$$

8.5 Momentos de Probabilidade

De volta ao problema dos arqueólogos

Com a definição de moda dada por $f(Mo) = max\ f(x)$

e observando o gráfico temos que Mo = 20



8.5 Momentos de Probabilidade

De volta ao problema dos arqueólogos

Como a mediana é definida por

$$P(\mathbf{X} > Md) \geq 0,5 \text{ e } P(\mathbf{X} \leq Md) \geq 0,5$$

já que temos o valor da mediana e sabendo que a função densidade de probabilidade é contínua no intervalo [0, 20], basta calcular

$$P(\mathbf{C} > Md) \geq 0,5$$

ou

$$\mu = \int_0^{Md} \frac{1}{40}\left(\frac{c}{10}+1\right) dc = \frac{1}{400}\frac{Md^2}{2} + \frac{Md}{40} = 0,5$$

8.5 Momentos de Probabilidade

De volta ao problema dos arqueólogos

que é equivalente a

$$Md^2 + 20\ Md - 400 = 0$$

que tem uma solução positiva dada por

$$Md \text{ €} \approx 12{,}36$$

Aula 8

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho
Regina Célia Paula Leal Toledo

Variáveis aleatórias contínuas

Conteúdo:

8.1 Introdução. O que são e para que são variáveis contínuas?

8.2 Função densidade de probabilidade

8.3 Medidas de posição

8.4 Variância

8.5 Momentos de Probabilidade

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$\sigma_X^2 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$A \cap B = \emptyset$$