Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 1° semestre de 2015
GABARITO

Observações:

- A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal
- É permitido o uso de máquina de calcular
- Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
- **Utilize em todos os cálculos pelo menos três casas decimais**
- Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas
- Você pode usar lápis para responder as questões
- **Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível**
- Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas
- **Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.**

---

1 - Primeira questão (1,5 pontos)

Verifique quais das funções abaixo são distribuições de probabilidade. Caso alguma não seja devido à constante de normalização, apresente a função normalizada.

Resolução:

Os itens abaixo devem verificar se a função proposta é não negativa no intervalo de definição [a, b] e que se integral desta função dentro do intervalo de definição seja 1.

a) $f(x)=x^2-x\,;\, x\in[1,2]$

Resolução:

Observe que a função é positiva dentro do intervalo e, portanto, cumpre a primeira exigência. Calculando a integral

$$\int_1^2 (x^2-x)\,dx=\int_1^2 x^2\,dx-\int_1^2 x\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=\frac{2^3-1^3}{3}-\frac{2^2-1^3}{2}=\frac{7}{3}-\frac{3}{2}=\frac{14-9}{6}=\frac{5}{6}\quad ,$$

o que indica que a função deveria ser normalizada para ser função de distribuição o que resulta na distribuição devidamente normalizada dada portanto por

$$f(x)=\frac{6}{5}(x^2-x);\, x\in[1,2]\quad .$$

b) $f(x)=x^3-x+1\,;\, x\in[-1,3]$

Resolução:

Observe que a função é não negativa dentro do intervalo e, portanto, cumpre a primeira exigência. Vejamos a segunda exigência:

$$\int_{-1}^3 (x^3-x+1)\,dx=\int_{-1}^3 x^3dx-\int_{-1}^3 x\,dx+\int_{-1}^3 dx=\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^3-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^3+x\Big|_{-1}^3=\frac{3^4-(-1)^4}{4}-\frac{3^2-(-1)^2}{2}+3-(-1)\quad ,$$

ou

$$\int_{-1}^{3}\left(x^3-x+1\right)dx=20-4+4=20 \quad .$$

Para que a função seja função de distribuição devemos normalizá-la, ou seja,

$$f(x)=\frac{x^3-x+1}{20};x\in[-1,3] \quad .$$

c) $f(x)=\frac{2}{3}sen(x);x\in[3/2,16/5]$

Resolução:

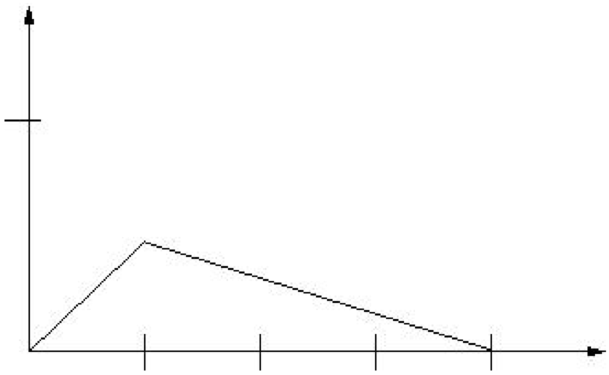
Com um breve exame da função fica fácil perceber que ela toma valores negativos para x > π ≈ 3,141592, já que o intervalo toma os valores [1,5;3,2]. Portanto, não é função de distribuição.

2 – Segunda questão (2,5 pontos)

Dada a função abaixo

$$f(x)= \begin{matrix} x/2,\ se\ \ 0\leq\ x\ \leq 1\ ; \\ -(x-4)/6,\ se\ \ 1\leq\ x\ \leq 4. \end{matrix}$$

Recomendação: Faça um gráfico.



OBS: Os eixos não estão proporcionais

a) Prove que esta função é uma distribuição de probabilidade;

Resolução:

A função é claramente não negativa no intervalo apresentado. Integremos

$$\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x}{2}dx-\int_1^4 \frac{x-4}{6}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^4 x\,dx-4\int_1^4 dx\right)$$

ou ainda

$$\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left[\frac{4^2-1^2}{2}-4\times(4-1)\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left(\frac{15}{2}-12\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$$

Você pode fazer este item usando a fórmula da área do triângulo.

b) Ache a média desta distribuição;
Resolução:

$$\mu=\int_0^4 x f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx-\int_1^4 x\frac{x-4}{6}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^4 x^2 dx-4\int_1^4 x\,dx\right)$$

ou

$$\mu=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_1^4-4\frac{x^2}{2}\Big|_1^4\right)=\frac{1-0}{6}-\frac{1}{6}\left[\frac{4^3-1^3}{3}-2(4^2-1^2)\right]=\frac{1}{6}\left(1-\frac{63}{3}+30\right)=\frac{5}{3}=1{,}666\ldots \quad .$$

c) Determine a variância
Resolução:
Pela definição de variância

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2 \quad ,$$

só necessitamos calcular a integral abaixo, já que temos a média pelo item anterior:

$$\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_0^1 \frac{x^3}{2}dx-\int_1^4 x^2\frac{x-4}{6}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^3 dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^4 x^3 dx-4\int_1^4 x^2 dx\right)$$

que resulta em

$$\int_a^b x^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_1^4-4\frac{x^3}{3}\Big|_1^4\right)=\frac{1-0}{8}-\frac{1}{6}\left[\frac{4^4-1^4}{4}-\frac{4}{3}(4^3-1^3)\right]=\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\left(\frac{255}{4}-\frac{4}{3}63\right)=\frac{7}{2}=3{,}5 \quad ,$$

logo

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2=\frac{7}{2}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{13}{18}=0{,}7222\ldots \quad .$$

d) Determine a moda.
Resolução:
A moda são os pontos nos quais a probabilidade é máxima. Se você fez o gráfico recomendado, ficará fácil verificar que este ponto é x = 1, ou seja, a distribuição é monomodal. Se não fez o gráfico, é fácil verificar por uma pequena inspeção.

3 – Terceira questão (2,0 pontos)
Calcule as probabilidades solicitadas:
a) P(X < 6,3) para uma distribuição Normal de média 5,9 e variância 13,69.
Resolução:
Usaremos fórmula

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right) ,$$

que para este caso dará

$$P(X<6{,}3)=P\left(Z<\frac{6{,}3-5{,}9}{\sqrt{13{,}69}}\right)=P\left(Z<\frac{0{,}4}{3{,}7}\right)\approx P(Z<0{,}1081)\approx 0{,}5+P(Z>0{,}11)=0{,}5+0{,}0438=0{,}5438 \quad .$$

b) P(0,5 < X < 3,4) para média 3,5 e variância 2,89;
Resolução:

$$P(0,5<X<3,4)=P\left(\frac{0,5-3,5}{\sqrt{2,89}}<Z<\frac{3,4-3,5}{\sqrt{2,89}}\right)=P\left(\frac{-3}{1,7}<Z<-\frac{0,1}{1,7}\right)\approx P(-1,7647<Z<-0,0588)\ ,$$

ou

$$P(0,5<X<3,4)\approx P(Z<1,76)+P(Z<0,06)=0,4608-0,0239=0,4369\ .$$

c) P(0,5 < X < 1,5) para a distribuição da segunda questão;
Resolução:
Usaremos aqui

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_a^1 x\,dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^b x\,dx-4\int_1^b dx\right)\ ,$$

no intervalo [0, 4]. No caso presente teremos

$$P(0,5<X<1,5)=\int_{0,5}^{1,5} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{0,5}^{1} x\,dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^{1,5} x\,dx-4\int_1^{1,5} dx\right)=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,5}-\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^{1,5}-4x\Big|_1^{1,5}\right)$$

ou

$$P(0,5<X<1,5)=\frac{0,5^2}{4}-\frac{1}{6}\left[\frac{1,5^2-1^2}{2}-4(1,5-1)\right]=\frac{1}{16}-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{8}-2\right)=\frac{5}{12}=0,4166...\ .$$

d) P(0,6 < X < 2,9) para a distribuição Exponencial com $\alpha=0,18$.
Resolução:
Aqui usaremos

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b}\ .$$

No caso desta questão teremos

$$P(0,6<X<2,9)=e^{-0,18\times 0,6}-e^{-0,18\times 2,9}=e^{-0,108}-e^{-0,522}\approx 0,3043\ .$$

4 – Quarta questão (2,0 ponto)
Uma empresa utiliza material de demolição de um antigo edifício para baratear os custos na construção de um novo e, para isto, faz uso de uma máquina que tritura a estrutura de concreto da demolição. Nos testes de regulagem da máquina foram recolhidas 100 amostras das quais se esperavam que o tamanho médio dos fragmentos estivessem entre 3 e 5 cm. A média das amostras foi 4,7 cm. De outra construção já se tinha avaliado uma variância de 21 cm^2. Calcule qual a probabilidade da máquina estar trabalhando dentro das especificações.

Resolução:
Usaremos novamente a fórmula de probabilidade para a distribuição Normal

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\ .$$

Com os valores dados na questão teremos

$$P(3<X<5)=P\left(\frac{3-4,7}{\sqrt{21}/\sqrt{100}}<Z<\frac{5-4,7}{\sqrt{21}/\sqrt{100}}\right)\approx P\left(\frac{-1,7}{0,4582}<Z<\frac{0,3}{0,4582}\right)\approx P(-3,7101<Z<0,6547)$$

ou

$$P(3<X<5)\approx P(-3,71<Z<0,65)=0,5+2422=0,7422$$ **,**

ou seja, há uma probabilidade maior que 74% da máquina estar regulada.

5 – Quinta questão (2,0 pontos)
Calcule o intervalo de confiança para a dimensão dos fragmentos obtidos na máquina trituradora da questão 4 com um coeficiente de confiança de 80%.
Resolução:
Usaremos a fórmula

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$ **.**

Para ambos os itens teremos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{21}{100}}\approx 0,4582$$

assim ficamos com

$$IC(\mu,\gamma)=[4,7-z_{\gamma/2}0,4582\,;4,7+z_{\gamma/2}0,4582]$$ **.**

onde $\gamma=0,8$ **, portanto teremos**

$$IC(\mu,\gamma)=[4,7-z_{0,4}\,0,4582\,;4,7+z_{0.4}\,0,4582]$$

Aqui, usando a tabela de distribuição Normal, tiramos

$$z_{0,4}=1,29$$ **,**

o que nos leva a

$$IC(\mu,\gamma)=[4,7-1,29\times 0,4582\,;4,7+1,29\times 0,4582]\approx[4,11\,;5,29]$$ **.**