Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 2° semestre de 2014
GABARITO

Nome :

Assinatura :

Observações:

- A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal
- É permitido o uso de máquina de calcular
- Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
- Utilize em todos os cálculos pelo menos três casas decimais
- Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas
- Você pode usar lápis para responder as questões
- **Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível**
- Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas
- **Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.**

---

1 - Primeira questão (1,5 pontos)

Verifique quais da funções abaixo são distribuições de probabilidade.

a) $f(x)=\frac{3}{8}x^2; x\in[0,2]$

Resolução:

A função não toma valores negativos. Sendo assim, integremos a função no seu intervalo de definição, ou seja,

$$\int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx=\frac{3}{8}\int_0^2 x^2 dx=\frac{3}{8}\frac{x^3}{3}|_0^2=\frac{1}{8}8=1 \quad .$$

Portanto é distribuição de probabilidade.

b) $f(x)=x; x\in[-1,1]$

Resolução:

Observem que a função toma valores negativos no intervalo [-1,0). Portanto, não pode ser distribuição de probabilidade.

c) $f(x)=\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1-x}{3}\right); x\in[-2,0]$

Resolução:

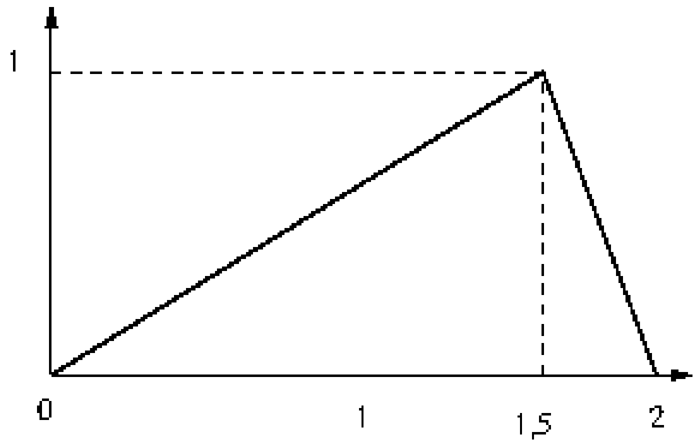
Não é difícil perceber que este polinômio de segundo grau tem seu valor mínimo em x=0, onde vale 1/12 e valor máximo em x= -2 com valor 5/4. Assim, ela é não negativa em todo o intervalo. Integremos, então, esta função

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1-x}{3}\right)dx=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0}x^2\,dx+\int_{-2}^{0}\left(\frac{1-x}{3}\right)dx\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}|_{-2}^{0}+\frac{1}{3}\int_{-2}^{0}dx-\frac{1}{3}\int_{-2}^{0}x\,dx\right]$$ **ou**

$$\int_{-2}^{0}\frac{1}{4}\left(x^2+\frac{1-x}{3}\right)dx=\frac{1}{4}\left[\frac{8}{3}+\frac{x}{3}|_{-2}^{0}-\frac{1}{3}\frac{x^2}{2}|_{-2}^{0}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{8}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{6}\right]=1$$ **,**

ou seja, a função dada é uma distribuição de probabilidade.

2 – Segunda questão (1,5 ponto)
Dado o gráfico abaixo



sendo a função zero fora do intervalo [0, 2]. Calcule

a) O Valor médio;
Resolução:
Descreveremos a distribuição como a composição de duas retas, uma definida pelos pontos (0; 0) e (1,5; 1) e a outra pelos pontos (1,5; 1) e (2, 0).

Partindo da equação da reta dada por $y=a+b\,x$ **podemos escrever para o primeiro par de pontos**

$$0=a+b\times 0 \quad \textbf{e} \quad 1=a+b\times 1{,}5 \quad .$$

Da primeira equação tiramos que $a=0$ **que substituída na segunda resulta em** $b=\frac{2}{3}$ **. Assim a equação para esta primeira reta será** $y=\frac{2}{3}x$ **.**

Para o segundo par de pontos teremos

$$1=a+b\times 1{,}5 \quad \textbf{e} \quad 0=a+b\times 2 \quad .$$

Da segunda equação tiramos que $a=-2b$ **que substituindo na primeira equação resulta em** $b=-2$ **que, por sua vez, nos dá** $a=4$ **. A equação da segunda reta será** $y=4-2x$ **.**
Calculemos agora o valor médio que é dado no nosso caso por

$$\mu=\int_{0}^{2}x\,f(x)\,dx=\int_{0}^{1,5}x\left(\frac{2}{3}x\right)dx+\int_{1,5}^{2}x\,(4-2\,x)\,dx=\frac{2}{3}\int_{0}^{1,5}x^2dx+4\int_{1,5}^{2}x\,dx-2\int_{1,5}^{2}x^2dx$$ **ou**

$$\mu=\frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1,5}+4\frac{x^2}{2}\Big|_{1,5}^{2}-2\frac{x^3}{3}\Big|_{1,5}^{2}=\frac{2}{9}\left(\frac{27}{8}\right)+2\left(4-\frac{9}{4}\right)-\frac{2}{3}\left(8-\frac{27}{8}\right)=\frac{7}{6}\approx 1,1666 \quad .$$

b) A variância;

Resolução:

A variância de uma função contínua é dada, no nosso caso por

$$\sigma^2=\int_0^2 x^2 f(x)\,dx-\mu^2 \quad .$$

Calculemos a integral

$$\int_0^2 x^2 f(x)dx=\int_0^{1,5} x^2\left(\frac{2}{3}x\right)dx+\int_{1,5}^{2} x^2(4-2x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{1,5} x^3\,dx+4\int_{1,5}^{2} x^2 dx-2\int_{1,5}^{2} x^3\,dx$$ **, então**

$$\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}\Big|_0^{1,5}+4\frac{x^3}{3}\Big|_{1,5}^{2}-2\frac{x^4}{4}\Big|_{1,5}^{2}=\frac{1}{6}\frac{81}{16}+\frac{4}{3}\left(8-\frac{27}{8}\right)-\frac{1}{2}\left(16-\frac{81}{16}\right)=\frac{37}{24}\approx 1,5416 \quad .$$

Com este valor obtemos a variância

$$\sigma^2=\int_0^2 x^2 f(x)\,dx-\mu^2=\frac{37}{24}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{13}{72}\approx 0,1805 \quad .$$

c) A moda.

Resolução:

A moda é o valor, ou valores, para o qual(is) a distribuição tem valor máximo. Observe que na figura o valor máximo se dá em 1,5. Portanto, a distribuição é monomodal e o valor da moda é 1,5.

3 – Terceira questão (2,0 pontos)

Calcule as probabilidades solicitadas:

a) P(X < 6,7) para uma distribuição Normal de média 4,5 e variância 13,69.

Resolução:

Usaremos a fórmula

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right) \quad ,$$

que para a nossa situação será escrita como

$$P(X<6,7)=P\left(Z<\frac{6,7-4,5}{\sqrt{13,69}}\right)=P\left(Z<\frac{2,2}{3,7}\right)\approx P(Z<0,59)=0,5+0,2224=0,7224 \quad .$$

b) P(0,2 < X < 1,6) para a distribuição da segunda questão;

Resolução:

Aqui teremos

$$P(0,2<X 1,6)=\int_{0,2}^{1,6} f(x)\,dx=\int_{0,2}^{1,5}\left(\frac{2}{3}x\right)dx+\int_{1,5}^{1,6}(4-2x)\,dx=\frac{2}{3}\int_{0,2}^{1,5} x\,dx+4\int_{1,5}^{1,6} dx-2\int_{1,5}^{1,6} x\,dx$$ **ou**

$$P(0{,}2<1{,}6)=\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_{0,2}^{1,5}+4x\Big|_{1,5}^{1,6}-2\frac{x^2}{2}\Big|_{1,5}^{1,6}=\frac{1}{3}\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{25}\right)+4(1{,}6-1{,}5)-\left(\frac{64}{25}-\frac{9}{4}\right)=\frac{62}{75}\approx 0{,}8266 \quad .$$

c) P(0,2 < X < 3,1) para a distribuição Exponencial com $\alpha=0{,}32$.
Resolução:
Temos que a probabilidade dada nesta distribuição pode ser escrita como

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b} \quad ,$$

que para o nosso caso terá os valores

$$P(0{,}2<X<3{,}1)=e^{-0{,}32\times 0{,}2}-e^{-0{,}32\times 3{,}1}\approx 0{,}9380-0{,}3708=0{,}5672 \quad .$$

d) P(-2,5 < X < 2,1) para a distribuição Uniforme no intervalo [-3, 4].
Resolução:
Para esta distribuição a probabilidade será dada por

$$P(a<X<b)=\frac{1}{B-A}\int_a^b dx \quad ,$$

onde [A, B] é o intervalo relativa à distribuição.
Com os valores do problema teremos

$$P(-2{,}5<X<2{,}1)=\frac{1}{4-(-3)}\int_{-2,5}^{2,1} dx=\frac{1}{7}[2{,}1-(-2{,}5)]=\frac{4{,}6}{7}\approx 0{,}6571 \quad .$$

4 – Quarta questão (2,5 pontos)
Um fabricante de sabonetes está tentando avaliar a aceitação de um de seus produtos. Fez, então, uma pesquisa prévia com 50 consumidores e descobriu que 30% aprovavam o produto. Baseado nisto, quantos consumidores deverão ser entrevistados para termos um coeficiente de confiança igual a 90% e um erro de estimação de no máximo 10%?
Resolução:
Temos que a proporção dos consumidores é de 0,3. Assim $\hat{p}=0{,}3$ **. Tomando a fórmula de variância para proporções, ou seja,**

$$\sigma^2=\hat{p}(1-\hat{p}) \quad ,$$

poderemos estimar este valor como $\sigma^2=0{,}3(1-0{,}3)=0{,}21\Rightarrow\sigma\approx 0{,}4582$ **. Tomando agora que a amplitude de confiança desejada é de 10%, com a mesma dada por**

$$2z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad ,$$

e tendo que $z_{0,9/2}=z_{0,45}=1{,}64$ **, teremos**

$$0{,}1=2\times 1{,}64\frac{0{,}4582}{\sqrt{n}}\Rightarrow\sqrt{n}=\frac{2\times 1{,}64\times 0{,}4582}{0{,}1}\Rightarrow\sqrt{n}\approx 15{,}028\Rightarrow n\approx 226 \quad ,$$

portanto, deverão ser entrevistados pelo menos 226 pessoas.

5 – Quinta questão (2,5 pontos)

As barras de chocolate de uma determinada linha de produção de um a fábrica tem peso nominal de 190g. No entanto, se duvidava do funcionamento de uma máquina desta linha de produção. Foram recolhidas 20 barras desta máquina e foi obtida a média de 186g.

a)Sabendo que a variância para este tipo de produto é de $106{,}09g^2$, estabeleça com coeficiente de confiança de 75% o intervalo de confiança para a média (1,5 ponto);

Resolução:

A fórmula para o intervalo de confiança é dada por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Para os valores dados teremos $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{106{,}09}}{\sqrt{20}}=\frac{10{,}3}{\sqrt{20}}\approx 2{,}3031$ **e** $z_{\gamma/2}=z_{0{,}375}\approx 1{,}15$ **.**

Assim teremos

$$IC(\mu,0{,}75)=[186-1{,}15\times 2{,}3031;186+1{,}15\times 2{,}3031]\approx[183{,}35;188{,}64].$$

b)Com esta informação, o que podemos dizer do funcionamento da máquina? (1,0 ponto).

Resolução:

Embora o uso do intervalo de confiança não seja a melhor ferramenta para este tipo de estudo, vemos que o intervalo de confiança sempre está abaixo do valor nominal de 190g. Portanto, esta máquina deve ser revisada.