Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística
Gabarito da AP1 do 2° semestre de 2007

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1ª questão (2,0 pontos)- Conhece-se os resultados de pesquisas aplicadas em relação aos salários dos funcionários do setor de contabilidade de duas empresas, apresentados a seguir:

Empresa A

Funcionários	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Salário (em Reais)	1.210,00	1.480,00	970,00	960,00	600,00	680,00	720,00	450,00	570,00	500,00

Empresa B

Faixas Salariais (em reais)	Freqüência (*ni*)	Freqüência relativa (*fi*)	Freqüência acumulada (*fac*)
450,00 ├ 650,00	12	0,32	0,32
650,00 ├ 850,00	6	0,16	0,48
850,00 ├ 1.050,00	4	0,1	0,58
1.050,00 ├ 1.250,00	7	0,18	0,76
1.250,00 ├ 1.500,00	9	0,24	1
Total	38	1	

Calcule a média aritmética, variância e desvio padrão dos salários das 2 empresas e a faixa de salário onde se encontram a moda e a mediana. Na empresa B tomar como representante de cada faixa, o seu ponto médio.

Resposta:

Empresa A:

Func.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∑	∑/10
Salário (sal) (em reais)	1.210,00	1.480,00	970,00	960,00	600,00	680,00	720,00	450,00	570,00	500,00	8.140,00	814,00
(sal-média)	396,00	666,00	156,00	146,00	-214,00	-134,00	-94,00	-364,00	-244,00	-314,00	0,00	-
(sal-média)^2	156.816	443.556	24.336	21.316	45.796	17.956	8.836	132.496	59.536	98.596	1.009.240	100.924

Média:

$$x_{obs} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{8140,00}{10} = 814,00$$

Variância:

$$var_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{obs})^2 = \frac{1.009.240,00}{10} = 100.924,00$$

Desvio padrão:

$$dp_{obs} = \sqrt{\mathrm{var}_{obs}} = 317,69$$

Ou, considerando a Empresa A por faixas salariais:

Faixas	Freq.	Freq. Relat	Média Sal. por faixa (mf)	ni x mf	(mf-média)	ni x (mf-média)	ni x (mf-média)^2
Salariais (em reais)	(*ni*)	(*fi*)					
450,00 ├ 650,00	4	0,4	550,00	2.200,00	-262,50	-1.050,00	275.625,00
650,00 ├ 850,00	2	0,2	750,00	1.500,00	-62,50	-125,00	7.812,50
850,00 ├ 1.050,00	2	0,2	950,00	1.900,00	137,50	275,00	37.812,50
1.050,00 ├ 1.250,00	1	0,1	1.150,00	1.150,00	337,50	337,50	113.906,30
1.250,00 ├ 1.500,00	1	0,1	1.375,00	1.375,00	562,50	562,50	316.406,30
Total (∑)	10	1		8.125,00		0,00	751.562,50

Média:

$$x_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_i x_i = \frac{8.125,00}{10} = 812,50$$

Variância:

$$\mathrm{var}_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_{obs})^2 = \frac{1}{10}(751.562,50) = 75.156,25$$

Desvio padrão:

$$dp_{obs} = \sqrt{\mathrm{var}_{obs}} = 274,15$$

Moda: faixa 1 (450,00 ├ 650,00)
Mediana: faixa 2 (650,00 ├ 850,00)

<u>Empresa B:</u>

Faixas	Freq	Média Sal. por faixa (mf)	ni x mf	(mf-média)	ni x (mf-média)	ni x (mf-média)^2
Salariais (em reais)	(*ni*)					
450,00 ├ 650,00	12	550,00	6.600,00	-379,61	-4.555,32	1.729.245,00
650,00 ├ 850,00	6	750,00	4.500,00	-179,61	-1.077,66	193.558,50
850,00 ├ 1.050,00	4	950,00	3.800,00	20,39	81,56	1.663,00
1.050,00 ├ 1.250,00	7	1.150,00	8.050,00	220,39	1.542,73	340.002,30
1.250,00 ├ 1.500,00	9	1.375,00	12.375,00	445,39	4.008,51	1.785.350,00
Total	38		35.325,00		0,00	4.049.819,00

Média:

$$x_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_i x_i = \frac{35.325,00}{38} = 929,61$$

Variância:

$$\text{var}_{obs} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_{obs})^2 = \frac{1}{38}(4.049.819,00) = 106.574,19$$

Desvio padrão:

$$dp_{obs} = \sqrt{\text{var}_{obs}} = 326,46$$

Moda: faixa 1 (450,00 ├ 650,00)
Mediana: faixa 3 (850,00 ├ 1050,00)

<u>2ª questão (1,5 pontos)</u>- *Maria e Joaquim jogaram 120 partidas de xadrez, das quais 20 ficaram empatadas, Joaquim ganhou 40 e Maria ganhou 60. Como teste final Maria e Joaquim concordaram em jogar 3 partidas e José, intuitivamente, acha que:*

1. *Maria tem 17% de probabilidade de ganhar as 3 partidas;*
2. *é de 2% a probabilidade de 2 partidas terminarem empatadas;*
3. *a probabilidade dos dois ganharem alternadamente, ou seja, quem ganhar a 1ª partida ganhar também a 3ª*, é de 14%.

a) *Verifique, utilizando a teoria da probabilidade, se José acertou algum dos itens.*
b) *Em qual deles ele teve maior acerto?*
c) *Em qual deles ele errou mais?*

Resposta:

Dados do problema:

Probabilidade do evento empate => $P(empate) = \frac{20}{120} = 0,1667$

Probabilidade do evento Joaquim ganhar => $P(Joaquim) = \frac{40}{120} = 0,3333$

Probabilidade do evento Maria ganhar => $P(Maria) = \frac{60}{120} = 0{,}5$

Item 1) Maria ganhar as 3 partidas. Tem-se:

$$P(Maria \cap Maria \cap Maria) = P(Maria) \times P(Maria) \times P(Maria)$$
$$P(Maria \cap Maria \cap Maria) = 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5$$
$$P(Maria \cap Maria \cap Maria) = 0{,}125$$

Logo, a probabilidade de Maria ganhar as 3 partidas é de 12,50% e não 17% como afirmado no item 1.

Item 2) Duas partidas terminarem empatadas. Pode ser utilizada a distribuição binomial, considerando-se a probabilidade de 2 empates como uma probabilidade de sucesso, ou seja:

$$P(2.empates) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$
$$P(2.empates) = \left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right) p^k q^{n-k}$$
$$P(2.empates) = \left(\frac{3!}{2!(3-2)!}\right) 0{,}1667^2 (1 - 0{,}1667)^1$$
$$P(2.empates) = 0{,}0695$$

Ou seja, a probabilidade de ocorrer empate em duas partidas é de 0,0695 ou 6,95% e não 2% como afirmado no item 2.

Item 3) A probabilidade de que os vencedores sejam alternados, ou seja, Joaquim vence a primeira e terceira e Maria a segunda partida ou Maria vence a primeira e a terceira e Joaquim vence a segunda. Pode ser calculado por:

$$P(alternado) = P(Maria \cap Joaquim \cap Maria) + P(Joaquim \cap Maria \cap Joaquim)$$
$$P(alternado) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)$$
$$P(alternado) = \frac{5}{36} = 0{,}1389$$

Ou seja, no item 3 é que José teve o maior índice de acerto (pode-se até considerar que acertou o valor), pois 13,89% $\cong$ 14,00%. No item 2 foi o que ele mais errou, mais de 100%! Ele pensou em 2% e a probabilidade encontrada foi 6,95%!

*<u>3ª questão (1,5 pontos)</u>- 60% dos estudantes do curso de Tecnologia em Sistemas de Computação de uma certa cidade do interior do Estado do Rio são mulheres e 4% dos alunos e 1% das alunas que fazem este curso, têm **menos** de 1,70m de altura. Se um estudante escolhido ao acaso tiver menos que 1,70m de altura, qual a probabilidade de que ele seja do sexo masculino?*

Resposta:

Dados do problema:
Evento M = Mulher

Evento H = Homem
Evento A^+ = ter mais de 1,70m de altura
Evento A^- = ter menos de 1,70m de altura

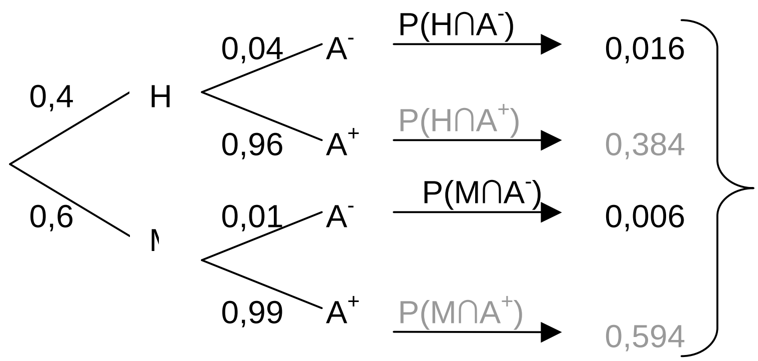
O que se quer $\Rightarrow$ $P(H/A^-) = \dfrac{P(H \cap A^-)}{P(A^-)}$

Tem-se:

$$P(M) = 0{,}60$$
$$P(A^-{}_{mulher}) = 0{,}01$$
$$P(H) = P(M^c) = (1 - 0{,}60) = 0{,}40$$
$$P(A^-{}_{homem}) = 0{,}04$$

$Necessita-se:$
$$P(A^-) = ??$$
$$P(H \cap A^-) = ??$$
$Sabe-se:$
$$P(A^-) = P(M \cap A^-) + P(H \cap A^-)$$
$ou:$
$$P(A^-) = 1 - P(A^+)$$

Assim tem-se:



$P(A^-) = P(H \cap A^-) + P(M \cap A^-)$
$P(A^-) = 0{,}016 + 0{,}006$
$P(A^-) = 0{,}022$

Logo,

$$P(H/A^-) = \frac{P(H \cap A^-)}{P(A^-)} = \frac{0{,}016}{0{,}022} = 0{,}727$$

Logo, a probabilidade de que ele seja do sexo masculino é de 0,727 ou 72,70%

<u>4ª questão (2,0 pontos)</u>- *Uma fábrica enviou 2 caixas com cobertores, azuis e verdes, para serem distribuídos em uma determinada comunidade. A primeira caixa continha 30 cobertores azuis e 20 verdes e a segunda, 40 cobertores azuis e 10 verdes. Um menino queria ganhar um cobertor azul e percebeu que, se ele tirasse o cobertor na segunda caixa, ele teria "mais chance" de ganhar o cobertor azul. Permitiu-se que ele joguasse uma moeda honesta ao acaso e se desse cara, ele sortearia o cobertor da primeira caixa e se desse coroa, da segunda. O cobertor azul foi sorteado. Qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento da moeda?*

Resposta:

Dados do problema:

$$P(Cara) = P(Coroa) = 0{,}50$$

$$P(Azul / Cara) = \frac{3}{5}$$

$$P(Azul / Coroa) = \frac{4}{5}$$

Quer se saber:

$$P(Cara / Azul) = \frac{P(Azul \cap Cara)}{P(Azul)}$$

Cálculo da Probabilidade de ser Azul:

$$\Pr obabilidade\_de\_Azul = P(Azul \cap Caixa_1) \cup P(Azul \cap Caixa_2)$$

$$P(Azul \cap Caixa_1) = P(Caixa_1) \times P(Azul\_Caixa_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

$$P(Azul \cap Caixa_2) = P(Caixa_2) \times P(Azul\_Caixa_2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{10}$$

Assim,

$$P(Azul) = P(Azul \cap Caixa_1) + P(Azul \cap Caixa_2)$$

$$P(Azul) = \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

Cálculo da probabilidade de ser cara, uma vez que um cobertor azul foi sorteado:

$$P(Cara / Azul) = \frac{P(Azul \cap Cara)}{P(Azul)} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}4286$$

A probabilidade é de 0,4286 ou 42,86%

<u>5ª questão(3,0 pontos)</u> - Imagine a segunda caixa de cobertores da 4ª questão. Utilize modelos discretos de probabilidade para calcular:

a) Qual a probabilidade de que em 30 cobertores retirados desta segunda caixa, com reposição, encontre-se no máximo 2 verdes?
b) Qual a probabilidade de que o 6º cobertor retirado com reposição, seja o primeiro verde

a ser retirado?

Resposta:

Item a) Com reposição da amostra – Modelo Binomial

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$$
$$p(X \leq 2) = \left[\frac{30!}{0! \times (30-0)!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{30}\right] + \left[\frac{30!}{1! \times (30-1)!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{29}\right] + \left[\frac{30!}{2! \times (30-2)!} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{2} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{28}\right]$$
$$p(X \leq 2) = 0{,}00124 + 0{,}00929 + 0{,}03366$$
$$p(X \leq 2) = 0{,}04419$$

Assim, a probabilidade de encontrar no máximo 2 verdes em um amostra de 30 é de: 0,04419 ou 4,419%

Item b) O evento sucesso é achar um cobertor verde no 6º teste, isto é, o sexto cobertor a ser retirado ser verde. Assim temos:
Modelo geométrico

$$P(verde) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$
$$P(x = 6) = \frac{1}{5}(1 - \frac{1}{5})^{5}$$
$$P(x = 6) = 0{,}065536$$

Logo, a probabilidade de encontrar cobertor verde somente na sexta retirada é de: 0,065536 ou 6,5536%.