Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 2° semestre de 2015
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 - Primeira questão (1,5 pontos)
Verifique quais das funções abaixo são distribuições de probabilidade. Caso alguma não seja distribuição devido à constante de normalização, apresente a função normalizada.

a) $f(x)=e^x-2\,;x\in[0,2]$

Resolução:
Observe que a função acima toma valores negativos. Por exemplo, na origem a função vale -1. Portanto, não pode ser uma função de distribuição de probabilidade.

b) $f(x)=\dfrac{x^4-x}{11}\,;x\in[0,2]$

Resolução:
Por uma breve inspeção é possível verificar que a função é não negativa no intervalo especificado.
Integremos

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 \frac{x^4}{11}dx-\int_0^2 \frac{x}{11}dx=\frac{1}{11}\left[\int_0^2 x^4\,dx-\int_0^2 x\,dx\right]=\frac{1}{11}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_0^2-\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right]=\frac{1}{11}\left(\frac{2^5}{5}-\frac{2^2}{2}\right)$$

então

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{11}\frac{22}{5}=\frac{2}{5}\quad .$$

Assim, a função normalizada será

$$f(x)=\frac{5}{2}\frac{x^4-x}{11}=\frac{5}{22}\left(x^4-x\right);\,x\in[0,2]\quad .$$

c) $f(x)=\dfrac{3}{5}\left(x^2-\dfrac{x}{2}\right);\,x\in[0,2]$

Resolução:
Observe que a função toma valores negativos no intervalo [0,1/2]. Portanto, esta função não é uma distribuição de probabilidade.

2 – Segunda questão (2,5 pontos)
Dada a função abaixo

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{18}\,;\,x\in[0,3]$$

sendo nula fora do intervalo especificado.

a) Prove que esta função é uma distribuição de probabilidade; (0,5 ponto)
Resolução:
Repare que fica claro que a função é não negativa no intervalo dado. Integremos

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 \frac{x^2}{18}dx+2\int_0^3 \frac{x}{18}dx=\frac{1}{18}\left[\int_0^3 x^2 dx+2\int_0^3 x\,dx\right]=\frac{1}{18}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^3+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^3\right]=\frac{1}{18}\left(\frac{3^3}{3}+2\frac{3^2}{2}\right)$$

o que resulta em

$$\int_0^3 f(x)dx=\frac{18}{18}=1 \quad .$$

b) Ache a média desta distribuição; (0,5 ponto)
Resolução:
Pela definição de média teremos

$$\mu=\int_0^3 x f(x)dx=\int_0^3 x\frac{x^2}{18}dx+2\int_0^3 x\frac{x}{18}dx=\frac{1}{18}\left[\int_0^3 x^3 dx+2\int_0^3 x^2 dx\right]=\frac{1}{18}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^3+2\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\right]=\frac{1}{18}\left(\frac{3^4}{4}+2\frac{3^3}{3}\right)$$

.
Finalmente teremos

$$\mu=\frac{1}{18}\frac{153}{4}=\frac{17}{8}=2{,}125 \quad .$$

c) Determine a variância; (1,0 ponto)
Resolução:
A definição de variância é dada por

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2 \quad .$$

Já temos a média, calculemos a integral.

$$\int_0^3 x^2 f(x)dx=\int_0^3 x^2\frac{x^2}{18}dx+2\int_0^3 x^2\frac{x}{18}dx=\frac{1}{18}\left[\int_0^3 x^4 dx+2\int_0^3 x^3 dx\right]=\frac{1}{18}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_0^3+2\frac{x^4}{4}\Big|_0^3\right]=\frac{1}{18}\left(\frac{3^5}{5}+2\frac{3^4}{4}\right)$$

que nos leva a escrever

$$\int_0^3 x^2 f(x)dx=\frac{1}{18}\frac{891}{10}=\frac{99}{20} \quad .$$

Com este valor e o da média teremos

$$\sigma^2 = \frac{99}{20} - \left(\frac{17}{8}\right)^2 \approx 0{,}4344 \quad .$$

d) Determine a moda. (0,5 ponto)
Resolução:
A função é monótona crescente. Como a moda é o valor para o qual a probabilidade é máxima, a moda aqui será o valor extremo do intervalo, ou seja, 3.

3 – Terceira questão (1,5 pontos)
Calcule as probabilidades solicitadas:
a) P(X < 1,3) para uma distribuição Normal de média 0,9 e variância 4,41.
Resolução:
Usaremos

$$P(X<b) = P\left(Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) .$$

No nosso caso teremos

$$P(X<1{,}3) = P\left(Z < \frac{1{,}3-0{,}9}{\sqrt{4{,}41}}\right) = P\left(Z < \frac{0{,}4}{2{,}1}\right) \approx 0{,}5 + P(Z<0{,}19) = 0{,}5 + 0{,}0753 = 0{,}5753 .$$

b) P(X < 1,3) para a distribuição da segunda questão;
Resolução:
Aqui teremos

$$P(X<1{,}3) = \int_0^{1{,}3} f(x)\,dx = \frac{1}{18}\left[\int_0^{1{,}3} x^2\,dx + 2\int_0^{1{,}3} x\,dx\right] = \frac{1}{18}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1{,}3} + 2\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1{,}3}\right] = \frac{1}{18}\left(\frac{1{,}3^3}{3} + 2\,\frac{1{,}3^2}{2}\right) \approx 0{,}1346 \quad .$$

c) P(X < 1,3) para a distribuição Exponencial com $\alpha = 0{,}39$.
Resolução:

$$P(a<X<b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$$

que no nosso caso se resumirá à

$$P(X<1{,}3) = \int_0^{1{,}3} \alpha e^{-\alpha x}\,dx = 1 - e^{-0{,}39\times 1{,}3} \approx 0{,}3977 \quad .$$

4 – Quarta questão (2,0 ponto)

Um conjunto de dados foi modelado segundo a distribuição Normal. A média dos dados é 18,34 e a variância 51,84.

Calcule:

Resolução:

Como acima, usaremos a probabilidade dada por

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

que com os dados apresentados nos dará a fórmula genérica

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-18,34}{\sqrt{51,84}}<Z<\frac{b-18,34}{\sqrt{51,84}}\right)=P\left(\frac{a-18,34}{7,2}<Z<\frac{b-18,34}{7,2}\right).$$

a) P(X > 19) (0,5 ponto)

Resolução:

$$P(X>19)=P\left(Z>\frac{19-18,34}{7,2}\right)=P\left(Z>\frac{0,66}{7,2}\right)\approx 0,5-P(Z>0,09)=0,5-0,0359=0,4641.$$

b) P(X < 19) (0,5 ponto)

Resolução:

A probabilidade aqui é a complementar da anterior, ou seja

$$P(X<19)=1-P(X>19)=1-0,4641=0,5359 .$$

c) P(17 < X < 22) (0,5 ponto)

Resolução:

$$P(17<X<22)=P\left(\frac{17-18,34}{7,2}<Z<\frac{22-18,34}{7,2}\right)=P\left(-\frac{1,34}{7,2}<Z<\frac{3,66}{7,2}\right)\approx P(-0,19<Z<0,51)$$

ou

$$P(17<X<22)=P(z<0,51)+P(Z<0,19)=0,1950+0,0753=0,2703.$$

d) P(X > 22) (0,5 ponto)

Resolução:

$$P(X>22)=P\left(Z>\frac{22-18,34}{7,2}\right)=P\left(Z>\frac{3,66}{7,2}\right)\approx 0,5-P(Z>0,51)=0,5-0,1950=0,305.$$

5 – Quinta questão (2,5 pontos)

Um serviço de entregas de encomendas estava sob avaliação. Suponha que o modelo Normal é adequado à análise. Análises feitas nos anos anteriores indicavam uma variância igual a 7,84 $(\text{dias})^2$. Os dados colhidos indicavam uma média de 4,6 dias para a conclusão de 90 entregas. Estime a média para a conclusão de uma entrega com coeficiente de confiança de 75%.

Resolução:

A fórmula para o intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Com nossos dados

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{7,84}}{\sqrt{90}}\approx\frac{2,8}{9,4868}\approx 0,2951 \text{ e } z_{0,75/2}=z_{0,375}=1,15 \text{ ,}$$

e que resulta em

$$IC(\mu;0,75)=[4,6-1,15\times 0,2951;\,4,6+1,15\times 0,2951]\approx IC[4,26;\,4,94] \text{ .}$$