Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística
AP1 1° semestre de 2009

Nome –

Assinatura –

Observações:
i) Prova sem consulta;
ii) O uso da máquina de calcular.é permito;
iii) Todos os cálculos têm que ser mostrados **passo a passo** para a questão ser considerada;
iii) Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas;
iv) Você pode usar lápis para responder as questões;
v) Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas;
vi) Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 ª questão (2,5 pontos):
a) Determine a média, a mediana, a moda, a variância e o desvio padrão do seguinte conjunto de dados: (309; 81; 452; 530; 70; 55; 198; 266)

Organizando os dados: 55, 70, 81, 198, 266, 309, 452, 530

$$\bar{x}_{obs} = \frac{(55 + 70 + 81 + 198 + 266 + 309 + 452 + 530)}{8} = 245{,}125$$

$$md_{obs} = \frac{198 + 266}{2} = 232$$

$$mo_{obs} = \text{não tem modo!}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{8}\{ (55 - 245{,}125)^2 + (70 - 245{,}125)^2 + (81 - 245{,}125)^2 + (198 - 245{,}125)^2 + (266 - 245{,}125)^2 + (309 - 245{,}125)^2 + (452 - 245{,}125)^2 + (530 - 245{,}125)^2\}$$

$$\sigma^2 = \{(-190{,}125)^2 + (-175{,}125)^2 + (-164{,}125)^2 + (-47{,}125)^2 + 21{,}125^2 + 64{,}125^2 + 207{,}125^2 + 285{,}125^2\}$$

$$\sigma^2 = 28091.172$$

$$desvio = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{28091.172} = 167.60$$

b) Qual seria o efeito sobre a média e a mediana de um conjunto de números se adicionássemos 10:
(i) a um dos números
(ii) a cada um dos números
OBS: não precisa fazer as contas para responder ao item b.

a) A um dos números

Supondo que tenhamos os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

A média seria dada por $\bar{x}_{obs} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

E assim, ao adicionar 10 a um dos números teríamos

$$\bar{x}_{obs2} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + (10 + x_i) + \cdots + x_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n}{n} + \frac{10}{n}$$

$$\bar{x}_{obs2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{10}{n} = \bar{x}_{obs} + \frac{10}{n}$$

b) a cada um dos números

$$\bar{x}_{obs3} = \frac{(10 + x_1) + (10 + x_2) + \cdots + (10 + x_i) + \cdots + (10 + x_n)}{n}$$

$$\bar{x}_{obs3} = \frac{\overbrace{10 + 10 + \cdots + 10}^{n\ vezes}}{n} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_i + \cdots + x_n}{n}$$

$$\bar{x}_{obs3} = \frac{10n}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 10 + \bar{x}_{obs}$$

<u>2 ª questão (1,0 pontos):</u>

Em uma sala temos o seguinte grupo de pessoas: 3 moças com menos de 21 anos, 5 rapazes com mais de 21 anos, 4 rapazes com menos de 21 anos, 6 moças com mais de 21 anos. Uma pessoa é escolhida ao acaso dentre as 18. Os seguintes eventos são definidos:

A: a pessoa tem mais de 21 anos;
B: a pessoa tem menos de 21 anos;
C: a pessoa é um rapaz;
D: a pessoa é uma moça.

Calcular:

a) P(B U D);
b) P($A^C \cap C^C$).

<u>Resolução:</u>

$$\Omega = \{5R, 4r, 6M, 3m\} \therefore p = \frac{1}{18}$$

$$A = \{5R, 6M\} \therefore P(A) = \frac{11}{18}$$

$$B = \{4r, 3m\} \therefore P(B) = \frac{7}{18}$$

$$C = \{5R, 4r\} \therefore P(C) = \frac{9}{18}$$

$$D = \{6M, 3m\} \therefore P(D) = \frac{9}{18}$$

a) P(B U D) = P(B) + P(D) – P(B ∩ D)
Como B ∩ D = {3m}, temos que P(B ∩ D) = 3/18.

Logo:

$$P(B\ U\ D) = \frac{7}{13} + \frac{9}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$$

c) $P(A^C \cap C^C) = P(\ (A\ U\ C)^C) = 1 - P(A\ U\ C) = 1 - \{P(A) + P\ (C) - P(A \cap C)\}$.
Como $A \cap C = \{5R\}$ e $P(A \cap C) = 5/18$, temos que:

$P(A^C \cap C^C) = 1 - \{11/18 + 9/18 - 5/18\} = 1/6$

Ou

Como $A^C = B$ e $C^C = D$ temos:

$A^C \cap C^C = B \cap D = \{3m\}$ o que nos dá: $P(A^C \cap C^C) = 3/18 = 1/6$

<u>3 ª questão (1,0 pontos):</u>
Sejam A e B eventos tais que P(A) = 0,2 ; P(B)=P; P(A U B) = 0,6. Calcular P considerando A e B:

a) Mutuamente exclusivos;
b) Independentes.

a) A e B mutuamente exclusivos => $P(A \cap B) = 0$ como

$$P(A\ U\ B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,6 = 0,2 + P - 0 \Rightarrow P = 0,4$$

b) A e B independentes => $P(A \cap B) = P(A).P(B) = 0,2\ .\ P$ como

$$P(A\ U\ B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0,6 = 0,2 + P - 0,2P \Rightarrow 0,4 = 0,8P \Rightarrow P = 0,5$$

<u>4 ª questão (1,5 pontos):</u>
Um lote de 120 lâmpadas é entregue ao controle de qualidade de uma firma. O responsável pelo setor seleciona 5 peças. O lote será aceito se forem observadas 0 ou 1 defeituosas. Há 20 defeituosas no lote. a) Qual a probabilidade de o lote ser aceito? b) admitindo-se que o lote seja aceito, qual a probabilidade de ter sido observado só um defeito?

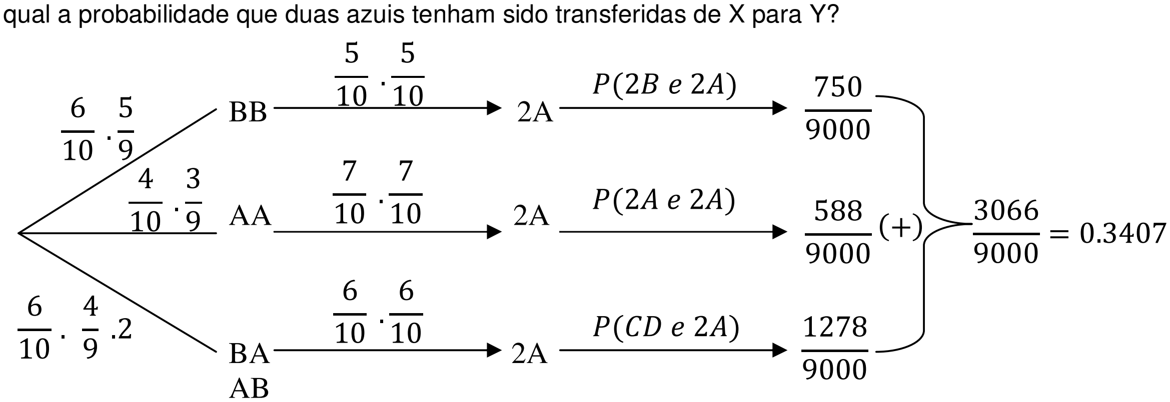
$$P(d) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \qquad\qquad P(d^c) = \frac{5}{6}$$

$$P(A) = P(0d\ ou\ 1d) = P(5d^c) + P(1d\ e\ 4d^c) =$$
$$P(d^c d^c d^c d^c d^c) + P(d d^c d^c d^c d^c).\binom{5}{1\quad 4} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + \frac{1}{6}.\left(\frac{5}{6}\right)^4.5 = 0,4019 + 0,4019 =$$

a) $0,8038.$

b) $P(1d/A) = \frac{P(1d \cap A)}{P(A)} = \frac{0,4019}{0,8038} = 0,5$

<u>5 ª questão (1,5 pontos):</u>
Uma urna X tem 6 bolas brancas e 4 azuis. A urna Y tem 3 bolas brancas e 5 azuis. Passam-se duas bolas de X para Y e a seguir retiram-se duas bolas de Y com reposição. Sabendo-se que ocorreram duas bolas azuis, qual a probabilidade que duas azuis tenham sido transferidas de X para Y?



$$P(2A/2A) = \frac{P(2A \text{ e } 2A)}{P(2A)} = \frac{588/900}{3066/900} = \frac{588}{3066} = 0{,}1918$$

6 ª questão (1,0 pontos):

Sabe-se que uma moeda mostra a face cara 4 vezes mais do que a face coroa, quando lançada. Esta moeda é lançada 4 vezes. Seja X o número de caras que aparece, determine:

a) E(X)
b) P(1 ≤ X < 3)

Seja P(r) = p e P(c) = 4p com p+4p = 1 => p=0,2 e logo:

$$P(c) = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

$$P(r) = 0{,}2$$

$$P(X = 0) = P(4r) = (0{,}2)^4 = 0.0016$$

$$P(X = 1) = P(1c \text{ e } 3r) = (0{,}8).(0{,}2)^3.4 = 0{,}0256$$

$$P(X = 2) = P(2c \text{ e } 2r) = (0{,}8)^2.(0{,}2)^2.6 = 0{,}1536$$

$$P(X = 3) = P(3c \text{ e } 1r) = (0{,}8)^3.(0{,}2).4 = 0{,}4096$$

$$P(X = 4) = P(4c) = (0{,}8)^4 = 0{,}4096$$

X	P(X)	X.P(X)	X² . P(X)
0	0,0016	0	0
1	0,0256	0,0256	0,0256
2	0,1536	0,3072	0,6144
3	0,4096	1,2288	3,6864
4	0,4096	1,6384	6,5536
	1	3,20	10,88

a) E(X) = 3,20
b) P(1<=X<3) = P(X=1) + P(X=2) = 0,0256 + 0,1536 = 0,1792

7 ª questão (1,5 pontos):

Em uma empresa, pequenos motores são guardados em caixas de 50 unidades. Um inspetor de qualidade examina cada caixa, antes da posterior remessa, testando 5 motores. Se nenhum motor for defeituoso, a caixa é aceita. Se pelo menos um for defeituoso, todos os 50 motores são testados. Há 6 motores, defeituosos numa caixa. Qual a probabilidade de que seja necessário examinar todos os motores dessa caixa?

X: número de motores defeituosos da amostra.
N = 50
r = 6
n = 5

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{6}{0}\binom{44}{5}}{\binom{50}{5}} = 1 - 0{,}5126 = 0{,}4874$$

Boa Prova!

Algumas fórmulas

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$\bar{x}_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

P(X=xj)= 1/k, *j=1,2,…,k*

$$P(X = x_k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}, k = 0,1,..,n$$

P(X = k) = p (1-p)^k com 0 ≤ p ≤ 1 e k = 1,2, ….

$$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,...$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k = \max(0, r-(n-m)),..., \min(r,m)$$