Gabarito da AD1 de Probabilidade e Estatística

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

<u>1ª questão</u>: Os dados da Tabela 1 referem-se ao salário (em número de salários mínimos) de 20 fun-cionários administrativos em uma indústria I_1 e a Tabela 2 fornece, por faixas salariais, os salários dos funcionários administrativos da indústria I_2.

9,9	7,5	8,4	5,1	4,2	3,1	2,2	9	9,4	6,1
3,3	10,7	1,5	8,2	10,1	4,7	3,5	6,6	9	6,1

Tabela 1

Salário	*1 |--- 3*	*3 |--- 5*	*5 |---7*	*7 |--- 9*	*9 |--- 11*	*total*
Freqüência	*4*	*10*	*8*	*16*	*12*	*50*

Tabela 2

Pede-se:

(i) Construa uma tabela de freqüência para a Tabela 1, utilizando faixas que possibilitem comparações com os dados da Tabela 2 e verifique se a mediana e a moda das 2 indústrias estão na mesma faixa de salários. Identifique quais são as faixas;

Solução:

Organizando os dados da Tabela 1 por faixas de valores, temos:

Salário	*1 |--- 3*	*3 |--- 5*	*5 |---7*	*7 |--- 9*	*9 |--- 11*	*total*
Freqüência	*2*	*5*	*4*	*3*	*6*	*20*

Tabela 1

Comparando as faixas de valores para moda e a mediana nas duas industrias, temos:

	Mediana	*Moda*
Indústria 1	*5 |--- 7*	*9 |--- 11*
Indústria 2	*7 |--- 9*	*7 |--- 9*

A mediana e a moda nas duas indústrias não estão na mesma faixa de valores.

(ii) Sabendo que a média dos salários da indústria I_2 é de 6,72 salários mínimos e que o desvio padrão é de 2,46 salários, compare a média e o desvio da padrão das duas indústrias (Obs: *considere, para o cálculo da média e do desvio padrão, a média de salários das respectivas faixas*).

Solução:

Utilizando as faixas de valores da Industria 1 para o cálculo da média e variância, temos:

Faixa de Salário	1 |-- 3	3 |-- 5	5 |-- 7	7 |-- 9	9 |-- 11	Total (Somat)
freqüência (f_i)	2	5	4	3	6	20
média da faixa ($mf_i = x_i$)	2	4	6	8	10	
freq x media (f_i x_i)	4	20	24	24	60	132
a_i=(med.faixa - med. salarios)² = (x_i - media)²	21,16	6,76	0,36	1,96	11,56	41,8
(f_i) x (a_i)	42,32	33,8	1,44	5,88	69,36	152,8

$$media = \frac{1}{n}\sum_{1}^{k} f_i x_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{5} f_i x_i = \frac{132}{20} = 6,6$$

$$Var(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - media)^2\, j_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} a_i\, f_i = \frac{152,8}{20} = 7,64$$

$$Desv.Padrão = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{7,64} = \sqrt{2,76}$$

Comparando a média e o desvio padrão:

	Média	*Desvio Padrão*
Indústria 1	*6,6*	*2,76*
Indústria 2	*6,72*	*2,46*

<u>2^a questão:</u> *Treze* pacientes de uma clínica de ortopedia foram entrevistados quanto ao número de meses previstos de fisioterapia; se haverá (S) ou não (N) seqüelas após tratamento; e o grau de complexidade da cirurgia realizada: alto (A), médio (M) ou baixo (B). Os dados são apresentados na Tabela abaixo:

Pacientes	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
Fisioterapia	*7*	*8*	*5*	*6*	*4*	*5*	*7*	*7*	*6*	*8*	*6*	*5*	*5*
Seqüelas	*S*	*S*	*N*	*N*	*N*	*S*	*S*	*N*	*N*	*S*	*S*	*N*	*S*
Cirurgia	*A*	*M*	*A*	*M*	*M*	*B*	*A*	*M*	*B*	*M*	*B*	*B*	*M*

(i) classifique cada uma das variáveis;

Solução:

Fisioterapia: variável quantitativa discreta.
Sequelas: variável qualitativa nominal.
Cirurgia: variável qualitativa ordinal.

(ii) para cada variável, construa a tabela de freqüências (relativas e absolutas).

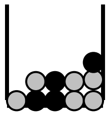
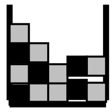
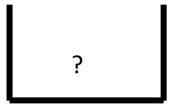
Solução:

Nº meses fisioterapia	f_i	f_r
4	*1*	*0,0769*
5	*4*	*0,3077*
6	*3*	*0,2308*
7	*3*	*0,2308*
8	*2*	*0,1538*
TOTAL	*13*	*1*

Sequelas	f_i	f_r
Sim	*7*	*0,5385*
Não	*6*	*0,4615*
TOTAL	*13*	*1,0000*

Complexidade da Cirugia	f_i	f_r
A	*3*	*0,2308*
M	*6*	*0,4615*
B	*4*	*0,3077*
TOTAL	*13*	*1,0000*

3ª questão: Na Caixa 1 há 10 círculos (4 pretos e 6 cinzas) que serão colocados na Caixa 3 junto com os 13 quadrados (5 pretos e 8 cinzas) que estão na Caixa 2. Pergunta-se:

Caixa 1  Caixa 2  Caixa 3 

(i) Se for tirado apenas um objeto da Caixa 3, qual a probabilidade deste objeto selecionado ser cinza?

Solução:

Seja o evento C: objeto retirado da caixa 3 ser cinza
P(C) = 14 / 23 = 0,6089

(ii) Se forem tirados simultaneamente dois objetos da Caixa 3, qual a probabilidade dos dois serem círculos?

Solução:

Seja o evento L: objeto retirado da caixa 3 ser um círculo.
P(2 círculos) = 10 / 23 x 9/22 = 0,4348 x 0, 4091 = 0,1779

(iii) Se após o primeiro sorteio de um objeto da Caixa 3, for feito um outro sorteio, com a Caixa 3 completa (10 círculos e 13 quadrados), qual a probabilidade dos dois serem quadrados? E destes quadrados serem cinza?

Solução:

Então a chance de retirar 2 quadrados, com reposição, é
13/23 x 13/23 = 0,5652 x 0,5652 = 0,3195

A chance de retirar 2 quadrados cinzas, com reposição, é
8/23 x 8/23 = 0,3478 x0,3478 = 0,1210

4ª questão: Considere 3 fábricas de baterias para carros, F_1, F_2, F_3. Uma determinada loja compra todos as baterias que revende dessas 3 fábricas, sendo 25% da fábrica F_1, 45% da F_2 e 30% da F_3. Ao chegar na loja todos as baterias recebem um rótulo com nome da loja. Suponha que a probabilidade de se encontrar baterias defeituosas de cada uma das fábricas F_1, F_2, F_3 seja de 2%, 10% e 5%, respectivamente. Selecionando-se uma dessas baterias ao acaso, determine a probabilidade de:

i) ser defeituosa, sabendo que a bateria foi fabricada na fábrica F_1;

Solução:

Seja o evento D: peça estar defeituosa. Então:

$P(F_1) = 0,25;$
$P(F_2) = 0,45;$
$P(F_3) = 0,30;$
$P(D/ F_1) = 0,02;$
$P(D/ F_2) = 0,10;$
$P(D/ F_3) = 0,05$

$\boxed{P(D/ F_1) = 0,02}$

ii) ser da fábrica F_2, sabendo que a bateria é defeituosa.

Solução:

$$P(F_2/D) = \frac{P(D/F2) \times P(F2)}{P(D/F_1) \times P(F_1) + P(D/F_2) \times P(F_2) + P(D/F_3) \times P(F_3)} \quad \text{(Teorema de Bayes)}$$

$$P(F_2/D) = \frac{0,10 \times 0,45}{0,02 \times 0,25 + 0,10 \times 0,45 + 0,05 \times 0,30} = \frac{0,045}{0,065} = 0,6923$$

5ª questão: Há um surto de pneumonia em uma determinada região e sabe-se que se os pacientes forem diagnosticados precocemente têm 78% de probabilidade de se curarem sem necessidade de internação. Para um grupo de 25 pacientes que estão aguardando resultados dos exames para saber se serão internados ou não, calcule qual a probabilidade de:
(i) menos de 2 necessitarem de internação;

Solução:

Seja p =probabilidade de cura com necessidade de internação , p =0,22.

Utilizando a distribuição binomial com n=25
X ~ Binomial (25, 0,22)

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,3,\dots,n$$

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$$

$$P(X<2)=\binom{25}{0}0{,}22^0(0{,}78)^{25}+\binom{25}{1}0{,}22^1(0{,}78)^{24}=0{,}0162$$

(ii) somente o quinto paciente a ter o laudo divulgado necessitar de internação.

Solução:

Utilizando a distribuição geométrica com p = 0,22

X ~ Geométrica(p)

$$P(X=x)=p.q^{x-1}$$

$$P(X=5)=0{,}22\times 0{,}78^{5-1}=0{,}22\times 0{,}78^4=0{,}08143$$

6a questão: Um fabricante de um determinado produto eletrônico suspeita que 1,8 % de seus produtos apresentam algum defeito. Se sua suspeita for correta, utilize um modelo de variável aleatória discreta adequado (uniforme, Bernoulli, binomial, geométrico, Poisson, hipergeométrico) e determine:

(i) qual a probabilidade de que, numa amostra com 9 de seus produtos,
(a) não tenha nenhum defeituoso;
(b) tenha menos de dois (2) produtos defeituosos

Solução:

a) não tenha nenhum defeituoso

O modelo indicado para a variável aleatória que conta número de produtos defeituosos em um total de 9 produtos é o binomial, onde a função de probabilidade é dada por:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,3,\dots,n$$

n é o total de produtos, k a quantidade de sucessos que desejo verificar, C(n,k) é a combinação de n elementos tomados de k em k, p a probabilidade de sucesso em uma única tentativa, ou seja a probabilidade de um produto ser defeituoso, e q a probabilidade de fracasso. Assim, p= 0,018 e q=1-p=0,982, então temos

$$P(X=0)=\binom{9}{0}(0{,}018)^0(0{,}982)^{(9-0)}=0{,}8492$$

portanto a probabilidade de não encontrarmos nenhum eletrônico com defeito na amostra é de 84,92%.

b) *tenha menos de dois (2) produtos defeituosos*

Neste caso temos:

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$$

Já calculamos no item anterior P(X=0), então daremos continuidade calculando P(X=1), de onde obtemos

$$P(X=0)=\binom{9}{1}(0{,}018)^1(0{,}982)^{(9-1)}=0{,}1401$$

$$P(X<2)=0{,}8492+0{,}1401=0{,}9893$$

Logo a probabilidade de encontrarmos menos de dois produtos com defeito na amostra é de 98,93%.

(ii) se o fabricante for escolher aleatoriamente 5 desses produtos para mostrar a um vendedor, qual a probabilidade de somente o quinto estar defeituoso?

Solução:

Neste caso utilizaremos o modelo geométrico, já que os primeiros 4 produtos não devem apresentar defeitos (fracasso) e somente o 5º deve ser defeituoso (sucesso), temos então

$$P(X=k)=pq^k$$

onde k é número de vezes que antecede o primeiro sucesso e p a probabilidade de sucesso em uma única tentativa e q a probabilidade de fracasso.

$$P(X=4)=0{,}018\times 0{,}982^4=0{,}0167$$

logo a probabilidade de somente o último produto apresentar defeito em uma amostra de 5 é de 1,67%.

<u>7a questão</u>: Num aquário de um instituto de pesquisa, pesquisadores acompanham o crescimento de 20 peixes de água doce: 12 da espécie A e 8 da espécie B, avaliando periodicamente seus pesos e tamanhos. Se em determinado dia de avaliação três peixes forem capturados de uma única vez, utilize um modelo de probabilidade para determinar a probabilidade de:

(i) a maioria ser da espécie A;

Solução:

Modelo Hipergeométrico

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}};\ k=\max(0,r-(n-m)),\ldots,\min(r,m)$$

20 peixes (n=20): 12 da espécie A (m=12) e 8 da espécie B

Numa amostra com 3 peixes (r=3), a maioria ser da espécie A, k=2

$$P(X=2) = \frac{\left(\frac{12!}{2!10!}\right)\left(\frac{8!}{1!7!}\right)}{\left(\frac{20!}{3!17!}\right)} = \frac{66 \times 8}{1140} = \frac{528}{1140} = 0{,}4632$$

(ii) pelo menos 1 ser da espécie A.

Solução:

Vamos pensar pelo evento complementar. Pelo menos 1 ser da espécie A é igual a 1-nenhum ser da espécie A.
K=0 (nenhum da espécie A)

$$P(X=0) = \frac{\left(\frac{12!}{0!12!}\right)\left(\frac{8!}{3!5!}\right)}{\left(\frac{20!}{3!17!}\right)} = \frac{1 \times 56}{1140} = \frac{56}{1140} = 0{,}0491$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}0491 = 0{,}9509$$

<u>**VALOR DAS QUESTÕES**</u>: a questão 2 vale 1,0 ponto e as outras questões valem 1,5 pontos. Os pontos são igualmente distribuídos entre os itens.