Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística
AP3 2° semestre de 2016
GABARITO CORRIGIDO

Nome :

Assinatura :

Observações:

- A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal
- É permitido o uso de máquina de calcular
- Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
- Utilize em todos os cálculos pelo menos três casas decimais
- Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas
- Você pode usar lápis para responder as questões
- **Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível**
- Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas
- **Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas**

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

---

1 – Primeira questão (3,0 Pontos)
Seja uma variável aleatória X cuja distribuição dada pela tabela a seguir:

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0	0,9 p^2	0,6 p^2	0,8 p	1,2 p	1,5 p^2

a) Encontre o valor de p
Resolução:

Como **a soma das probabilidades é igual a 1, ou seja,** $\sum_{i=0}^{4} p_i(x)=1$ **temos que :**

$$3p^2+2p=1 \rightarrow 3p^2+2p-1=0 \rightarrow p=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm 4}{6}=\begin{cases} p=-1 \\ p=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Como p **é uma probabilidade, ela não pode assumir o valor negativo, então temos que** $p=\frac{1}{3}$ **.**

b) Calcule P (X ≥ 4)
Resolução:
Neste caso, X pode ser 4 e 5, logo:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{6}{5}p + \frac{3}{2}p^2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{6} = \frac{17}{30} \approx 0{,}5667$$

c) Calcule P (X < 3)
Resolução:
Neste caso, X pode ser 0, 1 e 2

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0 + p^2 + p^2 = 2p^2 = \frac{2}{9}$$

2 – Segunda questão (2,0 Pontos)
Uma farmácia, em momento de reorganização de seu estoque, acondicionou várias caixas de um mesmo remédio, em recipientes maiores. Um determinado remédio A foi acondicionada em recipientes contendo 30 caixas cada. Um funcionário, por distração, misturou em um mesmo recipiente, 16 caixas deste remédio que estavam dentro de seu prazo de validade, e 14 caixas do medicamento com prazo de validade vencido. Um fiscal, ao acaso, selecionou esse mesmo recipiente para inspecionar, e retirou dele 5 caixas de remédios escolhidas aleatoriamente. Calcular a probabilidade de ao serem retiradas essas 5 caixas de remédio, 3 estarem dentro do prazo de validade, quando a amostragem for:

a) com reposição
Resolução:
Aqui pode-se utilizar a distribuição binomial

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

onde:

$$x = 3$$

$$n = 5$$

$$p = \frac{16}{30} = \frac{8}{15} = 0{,}5333...$$

Logo:

$$P(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(1 - \frac{8}{15}\right)^{5-3} = 0{,}3304$$

b) sem reposição
Resolução:
Neste outro caso, deve-se utilizar a distribuição hipergeométrica

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

onde:

$x = 3$

$n = 5$

$N = 30$

$k = 16$

Logo:

$$P(X=3)=\frac{\binom{16}{3}\binom{30-16}{5-3}}{\binom{30}{5}}=\frac{560\times 91}{142\,506}\approx 0{,}3576$$

3 – Terceira questão (1 ponto)

Um fabricante de produtos de madeira produziu um lote de cavilhas (pinos de madeira usados na montagem de móveis). Foi feita uma amostra de 130 cavilhas deste lote. Supondo que a amostra é grande o suficiente para se usar a distribuição Normal, avalie a probabilidade das cavilhas terem o comprimento no intervalo [48, 50] mm, sabendo que historicamente a média de comprimento das cavilhas é de 52 mm e a variância 41 mm^2.

Resolução:

Usaremos a distribuição Normal supondo que a amostra é compatível com esta distribuição

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

No caso específico deste problema usaremos

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

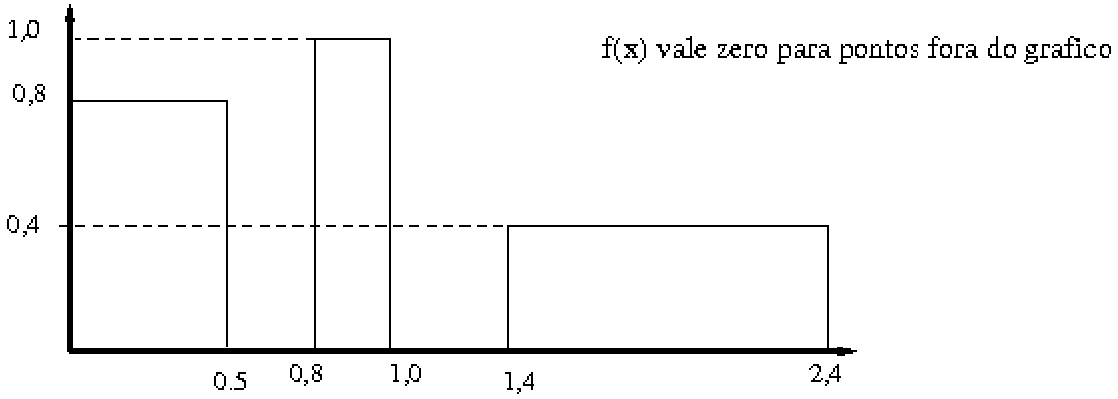
Temos que $\mu=52;\ \sigma^2=41;\ n=130\Rightarrow\frac{\sigma}{\sqrt{130}}=\frac{\sqrt{41}}{\sqrt{130}}\approx 0{,}5616$ **logo**

$$P(48<X<50)=P\left(\frac{48-52}{0{,}5616}<Z<\frac{50-52}{0{,}5616}\right)=P\left(\frac{-4}{0{,}5616}<Z<-\frac{2}{0{,}5616}\right)\approx P(-7{,}1225<Z<-3{,}5613)$$

ou

$$P(48<X<50)\approx P(Z<-3{,}56)+P(-7{,}13<Z)=0\ .$$

4 – Quarta questão (2 pontos)
Dado o gráfico abaixo:



a) Prove que f(x) é uma densidade; (0,5 ponto)
Resolução:
Sabemos que para que uma função seja densidade de probabilidade são necessários que a função seja não negativa e que a sua integral seja igual a 1, soma de todas as probabilidades. Claramente a função é não negativa. Integremos o que é a soma de funções constantes que tomam os valores a seguir dentro dos intervalos apresentados:

$$f(x)=0{,}8\in[0;0{,}5];f(x)=1\in[0{,}8;1];0{,}4\in[1{,}4;2{,}4]$$

sendo nula no restante do domínio.
Assim teremos,

$$\int_0^{2,4} f(x)\,dx=\int_0^{0,5} 0{,}8\,dx+\int_{0,8}^{1} 1\,dx+\int_{1,4}^{2,4} 0{,}4\,dx=0{,}8\int_0^{0,5} dx+\int_{0,8}^{1} dx+0{,}4\int_{1,4}^{2,4} dx=0{,}8\times x|_0^{0,5}+x|_{0,8}^{1}+0{,}4\times x|_{1,4}^{2,4}$$

ou

$$\int_0^{2,4} f(x)\,dx=0{,}8\times 0{,}5+(1-0{,}8)+0{,}4(2{,}4-1{,}4)=0{,}4+0{,}2+0{,}4=1 \quad .$$

É claro que poderíamos chegar a esta conclusão calculando a área dos retângulos que se apresentam na figura.

b) Calcule o valor médio; (0,5 ponto)
Resolução:
Usemos

$$\mu=\int_a^b x f(x)\,dx$$

para calcular a média da distribuição no intervalo [a, b] onde ela é válida. No caso presente teremos

$$\mu=\int_0^{2,4} x f(x)\,dx=0{,}8\int_0^{0,5} x\,dx+\int_{0,8}^{1} x\,dx+0{,}4\int_{1,4}^{2,4} x\,dx=0{,}8\times\frac{x^2}{2}|_0^{0,5}+\frac{x^2}{2}|_{0,8}^{1}+0{,}4\times\frac{x^2}{2}|_{1,4}^{2,4}$$

ou

$$\mu = 0{,}4 \times 0{,}5^2 + \frac{+(1^2 - 0{,}8^2)}{2} + 0{,}2(2{,}4^2 - 1{,}4^2) = 0{,}1 + 0{,}18 + 0{,}76 = 1{,}04 \quad .$$

c) Calcule a variância; (0,5 ponto)
Resolução:
Sabemos que a variância é dada por

$$\sigma^2 = \int_0^3 x^2 f(x) dx - \mu^2 \text{ .}$$

calculemos inicialmente a integral, ou seja,

$$\int_0^{2,4} x^2 f(x) dx = 0{,}8 \int_0^{0,5} x^2 dx + \int_{0,8}^{1} x^2 dx + 0{,}4 \int_{1,4}^{2,4} x^2 dx = 0{,}8 \times \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,5} + \frac{x^3}{3}\Big|_{0,8}^{1} + 0{,}4 \times \frac{x^3}{3}\Big|_{1,4}^{2,4}$$

o que resulta em

$$\int_0^{2,4} x^2 f(x) dx = \frac{8}{30} \times 0{,}5^3 + \frac{+(1^3 - 0{,}8^3)}{3} + \frac{4}{30}(2{,}4^3 - 1{,}4^3) = \frac{1}{30} + \frac{61}{375} + \frac{554}{375} \approx 1{,}6733 \quad .$$

Daqui obtemos

$$\sigma^2 = \int_0^3 x^2 f(x) dx - \mu^2 = 1{,}6733 - 1{,}04^2 \approx 0{,}5917$$

d) Calcule a moda. (0,5 ponto)
Sendo a moda o valor correspondente ao ponto (ou pontos) de maior probabilidade, vemos que esta distribuição é multimodal em [0,8;1].

5 – Quinta questão (2 pontos)
Uma firma de implosões suspeita de que as espoletas das cargas explosivas estão com problemas de fabricação. São detonadas 25 espoletas de uma caixa de 100 escolhida aleatoriamente do estoque e verificou-se que cinco espoletas falharam. Supondo que a estatística do experimento é compatível com o modelo Normal, calcule a estimativa para a média de espoletas que falhariam com coeficiente de confiança de 95%. Um padrão estabelece que a variância deste tipo de produto vale 2,7 falhas^2.
Resolução:
A solicitação da questão é de calcularmos o intervalo para a média. Assim usaremos

$$IC(\mu,\gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \text{ .}$$

Os dados fornecidos nos dão: $\sigma^2 = 2{,}7 ; \gamma = 0{,}95$ **o que nos dá** $\sigma = \sqrt{2{,}7} \approx 1{,}6431 ; z_\gamma/2 = z_{0,475} = 1{,}96$ **. Tomemos 5, o número de falhas, como a média e 25 o tamanho da amostra. Logo,**

$$IC(\mu,\gamma) = \left[5 - 1{,}96\frac{1{,}6431}{\sqrt{25}} ; 5 + 1{,}96\frac{1{,}6431}{\sqrt{25}}\right] \approx [5 - 1{,}96 \times 0{,}3286 ; 5 + 1{,}96 \times 0{,}3286] \approx [4{,}36 ; 5{,}64] \text{ .}$$

Em termos de número de espoletas diremos que o número de falhas será algo entre 4 e 6.

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.