Gabarito da AD1 de Probabilidade e Estatística

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

2° semestre de 2019

Professores: Otton T. da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Questão 1 (1,0 ponto)- Considere os conjuntos de dados a seguir e calcule a média, a mediana e a moda.

a) 3, 5, 2, 6, 5, 9, 5, 2, 8, 6.

Solução:

Conjunto de dados: 2, 2, 3, 5, 5, 5, 6, 6, 8, 9

Média: μ= 5,1;

Mediana: Md = 5;

Moda: Mo = 5

b) 20, 9, 7, 2, 12, 7, 20, 15, 7.

Solução:

Conjunto de dados: 2, 7, 7, 7, 9, 12, 15, 20, 20.

Média: μ= 11,0;

Mediana: Md = 9;

Moda: Mo = 7.

Questão 2 (1,5 ponto) - Um determinado remédio está sendo testado para combater os efeitos nocivos de um determinado inseto, que causa febre, dores de cabeça e outros sintomas. Os dados a seguir indicam o tempo de recuperação (em horas) de cada indivíduo: 3, 90, 23, 46, 2, 42, 47, 37, 12, 51, 11, 1, 3, 3, 45, 3, 4, 11, 2, 8, 56, 39, 22, 16, 5 e 52.

a) (0,5 pontos) Determine a média, mediana e desvio padrão.

Solução:

Conjunto de dados: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 8, 11, 11, 12, 16, 22, 23, 37, 39, 42, 45, 46, 47, 51, 52, 56, 90.

Media : $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{26} X_i}{26} = 24{,}38$

Mediana: Md = (12+16)/2=14

Desvio padrão: $Dp = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{n}} = \sqrt{\frac{13.890{,}15}{26}} = 23{,}11$

b) (1,0 ponto) Separe esse conjunto em três grupos: (i) Grupo 1: aqueles em que a cura se deu de forma rápida, considerando esse tempo menor ou igual do que 12 horas; (ii) Grupo 2: o que tiveram a cura no tempo esperado e considerado norma, quando esse tempo é maior do que 12 horas e menor ou igual a 45; (iii) Grupo 3: aqueles que tiveram tempo de cura mais lento do que esperado, quando o tempo de cura for maior do que 45 horas. Se chamarmos de coeficiente de variação (CV) a relação entre o desvio padrão (DP) e a média M, ou seja, CV = DP/M, compare os coeficientes de variação desses três grupos.

Solução:

Grupo 1: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 8, 11, 11, 12

Grupo 2: 16, 22, 23, 37, 39, 42, 45

Grupo 3 : 46, 47, 51, 52, 56, 90.

Utilizando as mesmas expressões do item (a), temos:

	Media	Dp	CV
Grupo 1	5,231	3,876	0,741
Grupo 2	32,000	10,556	0,330
Grupo 3	57,000	15,122	0,265

Podemos observar que o grupo de cura rápida, grupo 1, apresentou maior coeficiente de variação e o grupo com cura lenta, grupo 3, menor coeficiente de variação.

Questão 3 (0,5 pontos)- Em uma caixa há 2 bolas amarelas, 5 bolas azuis e 7 bolas verdes. Se retirarmos uma única bola, qual a probabilidade dela ser verde ou amarela?

Solução:

Espaço amostral

Número total de bolas: 14.

Os eventos retirar bola verde ou amarela são mutuamente exclusivos, pois a ocorrência de um impede a ocorrência do outro. Logo,

Probabilidade de retirar bola verde: $P_{verde} = 7/14 = 0{,}5000$

Probabilidade de retirar bola amarela: $P_{amarela} = 2/14 = 0{,}1429$

Assim, a probabilidade de retirar uma bola verde ou amarela é dada pela união dos eventos, ou seja:

$P(\text{verde} \cup \text{amarela}) = P_{verde} + P_{amarela} = 9/14$

Questão 4 (1,0 ponto) - De uma sacola contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15 retira-se uma bola. Qual é a probabilidade desta bola ser divisível por 3 ou divisível por 4?

Solução:

O espaço amostral é dado por $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 \}$

Chamando de:

E_3 o evento da ocorrência das bolas com números divisíveis por 3:

$E_{D3} = \{ 3, 6, 9, 12, 15 \}$

E por E_4 o evento da ocorrência das bolas com números divisíveis por 4:

$E_{D4} = \{ 4, 8, 12 \}$

Logo, a probabilidade de sair uma bola com número divisível por 3 é $P_{(D-3)} = 5/15$ e a probabilidade de sair uma bola com número divisível por 4 é $P_{(D-4)} = 3/15$. Como estamos interessados em uma ocorrência ou em outra, devemos encontrar a união de eventos mas, nesse caso, eles não são mutuamente exclusivos e, nesse caso:

$P((D3) \cup (D4)) = P_{(D3)} + P_{(D4)} – (P_{(D3)} \cap P_{(D4)}) = 5/15 + 3/15 - 1/15 = 7/15$

$P((D3) \cup (D4)) = 0{,}4667$

Questão 5 (3,0 pontos)- Uma empresa formará um comitê para se posicionar sobre determinados temas de seu interesse, e que será constituído por três estagiários escolhidos aleatoriamente entre os dez estagiários dessa empresa. O primeiro escolhido será o coordenador do comitê, o segundo será o fiscal e o terceiro escolhido será o secretário do comitê. Metade desses dez estagiários está há pouco tempo na empresa e a outra metade já está para se formar e concorrendo a um emprego definitivo na empresa.

Solução:

Designando de N ao estagiário novo e A ao estagiário antigo, podemos ter as seguintes configurações, onde o primeiro é coordenador, o segundo é o fiscal e o terceiro o secretário do comitê:

H= { NNN, NNA, NAN, ANN, NAA, ANA, AAN, NNN }

O evento B_k = { k estagiários novos no comitê} ou seja, B_0, B_1, B_2, B_3 designam nenhum, um, dois ou três estagiários novos no comitê, respectivamente, e A = {coordenador é um estagiário antigo}. Assim, cada configuração tem uma probabilidade associada, ou seja:

Configurações do comitê	Probabilidade
1- NNN	(5/10)x(4/9)x(3/8) = 3/36
2- NNA	(5/10)x(4/9)x(5/8) = 5/36
3- NAN	(5/10)x(5/9)x(4/8) = 5/36
4- ANN	(5/10)x(5/9)x(4/8) = 5/36
5- NAA	(5/10)x(5/9)x(4/8) = 5/36
6- ANA	(5/10)x(5/9)x(4/8) = 5/36
7- AAN	(5/10)x(4/9)x(5/8) = 5/36
8- AAA	(5/10)x(4/9)x(3/8) = 3/36

Tabela 1: Tabela de probabilidades

a) Qual é a probabilidade de que esse comitê tenha no mínimo dois estagiários novos?

Solução:

Nesse caso queremos encontrar $P(B_2 \cup B_3) = P(B_2) + P(B_3)$, onde $P(B_2)$ = 5/36 + 5/36 + 5/36 = 15/36 e $P(B_3)$ = 3/36. Logo,

$P(B_2 \cup B_3) = P(B_2) + P(B_3)$ = 15/36 + 3/36 = 18/36 = 0,5.

b) Qual a probabilidade do coordenador ser um estagiário antigo?

Solução:

O coordenador é um estagiário antigo nas configurações 4 e de 6 a 8 da tabela 1, ou seja,

P(A) = 5/36 + 5/36 + 5/36 + 3/36 = 18/36 = 0,5.

c) Qual é a probabilidade do coordenador ser um estagiário novo e que, além dele ter mais um estagiário novo?

Solução:

Nesse caso, P(coord. mais um N), temos as configurações 2 e 3:

P(coord. mais um N) = 5/36 + 5/36 15/36 = 0,417

d) Se soubermos que o coordenador é um estagiário antigo, qual a probabilidade dos outros dois serem estagiários novos?

Solução:

Nesse caso queremos saber $P(B_2|A) = P(B_2 \cap A)/P(A)$ = (5/36)/(18/36) = 5/18 = 0,278.

e) Se o comitê tem dois estagiários novos, qual é a probabilidade que o coordenador seja um estagiário antigo?

Solução:

De forma semelhante ao item anterior, $P(A|B_2) = P(A \cap B_2)/P(B_2)$ = 5/15 = 0,333.

f) Se o comitê tem pelo menos um estagiário novo, qual é a probabilidade de que o coordenador seja um estagiário novo?

Solução:

Sendo A^c a probabilidade do coordenador ser um estagiário novo, queremos saber:

$P(A^c|\{B_1 \cup B_2 \cup B_3\}) = P(A^c \cap \{B_1 \cup B_2 \cup B_3\}) / P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) =$

$P(A^c|\{B_1 \cup B_2 \cup B_3\}) = (P(A^c \cap B_1) + P(A^c \cap B_2) + P(A^c \cap B_3)) / (P(B_1) + P(B_2) + P(B_3))$

$P(A^c|\{B_1 \cup B_2 \cup B_3\}) = (18/36) / (33/36) = 18/33 = 0,5455.$

Questão 6 (1,0 ponto) - Em uma prova de múltipla escolha, cada questão tem 5 alternativas, sendo apenas uma delas correta. Ao não saber a resposta, o aluno "chuta" aleatoriamente uma resposta qualquer entre as possíveis escolhas. Levando-se em conta um aluno que saiba 50% do conteúdo, pergunta-se:

a) Qual será a chance de ele acertar uma das 5 questões, escolhida aleatoriamente?

Solução:

Considerando os eventos:

A = acertar a questão

B = saber o conteúdo

$\underline{B}$ = não saber o conteúdo e "chutar" a resposta

com P(B) = 0,5. Assumindo que se o aluno sabe o conteúdo ele irá acertar a questão, ou seja, P(A|B) = 1 e que se ele não sabe o conteúdo ele chutará uma das 5 alternativas com probabilidades iguais de acertar, ou seja, $P(A|\underline{B}) = 0,2$, podemos calcular a Probabilidade Total de acerto da questão dado por:

$P(A) = P(B).P(A|B) + P(\underline{B}).P(A|\underline{B}) = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0,2 = 0,6.$

b) Qual a chance de ele acertar exatamente 3 questões?

Solução:

A probabilidade dele acertar exatamente 3 questões é dada pelo modelo binomial pela:

$$P(acertar\ 3\ questões) = \binom{5}{3}(0,6)^3(1-0,6)^{5-2}$$

$$P(acertar\ 3\ questões) = 0,3456$$

Questão 7 (1,0 ponto)- Um avião lança 3 bombas em um navio. Esse navio só será afundado se 2 ou mais bombas a atigirem. Sabendo que a probabilidade da bomba acertar o navio é de 0,4, qual é a probabilidade de o navio afundar devido às bombas?

Solução:

Modelo binomial com:

P(navio afundar) = P(acertar 2 bombas) + P(acertar 3 bombas)

e p = 0,4. Assim,

$$P(acertar\ 2\ bombas) = \binom{3}{2}(0,4)^2(1-0,4)^{3-2} = 0,288$$

$$P(acertar\ 3\ bombas) = \binom{3}{3}(0,4)^3(1-0,4)^{3-3} = 0,064$$

Logo,

P(navio afundar) = 0,288 + 0,064 = 0,352.

Questão 8- (1,0 ponto)- Três 3 moedas estrangeiras foram colocadas por engano em um cofrinho no qual já haviam algumas moedas nacionais e o cofre ficou com um total de 12 moedas. Suponha que, devido a dificuldade de tirar as moedas do cofrinho sem quebrá-lo, vamos retirar ao acaso um total de 4 moedas, qual a probabilidade de retirarmos no mínimo 1 moeda estrangeira?

Solução:

Seja X a variável aleatória que conta o número de moedas estrangeiras retiradas do cofrinho. Então, estamos interessados no cálculo de P(X ≥ 1). Nesse caso o modelo hipergeométrico deve ser utilizado com N = 12, M = 3 e n = 4 que é dado por:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Logo,

$$\mathbb{P}(X\geq 1)=1-\mathbb{P}(X=0)=1-\frac{\binom{3}{0}\binom{9}{4}}{\binom{12}{4}}\approx 0,7454.$$