Gabarito da AD1 de Probabilidade e Estatística
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
2° semestre de 2016

Primeira questão (2,5 pontos)**:** Fez-se uma pesquisa com 1000 brasileiros que vão assistir as Olimpíadas de 2016 no Rio para fazer um estudo sobre a renda familiar dessas pessoas, em salários mínimos (S.M.) e o número de cartões de créditos.

Renda (em S.M.)	Ponto médio de cada faixa (X)	Não tem cartões de crédito (f_0)	Tem um cartão de crédito (f_1)	Tem mais de um cartão de crédito (f_2)	Somatório
Menos de 10 S.M.	5	270	80	50	400
De 10 a 20 S.M.	15	90	200	40	330
De 20 a 30 S.M.	25	50	50	50	150
Mais de 30 S.M.	35(*)	10	30	80	120
Somatório	-	420	360	220	1.000

Uma pessoa foi escolhida ao acaso. Calcule:

(a) (1,5 pontos) A média, em S.M., a moda e o desvio padrão das pessoas que foram pesquisadas e que têm um cartão de crédito e compare-as com as mesmas medidas considerando agora, as pessoas que não têm cartão de crédito.

SOLUÇÃO:

(*) Nesse caso, como nada mais foi informado sobre a última faixa salarial, assumimos a média como 35. Outras possibilidades poderão ser aceitas desde que justificadas.

- Análise dos salários mínimos dos que possuem um cartão de crédito:

Média: $E(X) = \frac{\sum_{i(} x_i \times f_{1i)}}{\sum_i f_{1i}} = \frac{5\times80+15\times200+25\times50+35\times30}{80+200+50+30} = \frac{5700}{360} = 15{,}8333 S.M.$

Moda: a classe modal é a segunda classe, de 10 a 20 S.M.

Variância: Var(X) = $\frac{1}{N}\sum f_i \times X_i^2 - (E(X))^2$

Xi	Xi . Xi	fi	fi.Xi . Xi
5	25	80	2.000
15	225	200	45.000
25	625	50	31.250
35	1.225	30	36.750
			115.000

Var(X)= $\frac{1}{N}\sum f_i \times X_i^2 - (E(X))^2 = \frac{115.000}{360} - 15{,}83335^2$ = 68,7554

DP(X) = 8,2919

- Análise dos salários mínimos dos que não possuem cartão de crédito:

Média: $E(X) = \frac{\sum_{i(} x_i \times f_{0i)}}{\sum_i f_{1i}} = \frac{270\times5+90\times15+50\times25+10\times35}{270+90+50+10} = \frac{4300}{420} = 10{,}2381$

Moda: a classe modal é a primeira classe, menos de 10 S.M.

Variância: Var(X)= $\frac{1}{420}\sum f_i \; \times X_i^2 \; - \; (E(X))^2$

Xi	Xi . Xi	fi	fi.Xi	fi.Xi . Xi
5	25	270	1.350	6.750
15	225	90	1.350	20.250
25	625	50	1.250	31.250
35	1.225	10	350	12.250

Var(X) = 63,0385

DP(X) = 7,9396

(b) (0,5 pontos) As probabilidades:

- De que a pessoa tenha renda entre 20 e 30 S.M.

SOLUÇÃO:

P(entre 20 e 30 S.M.) = $\frac{150}{1.000} = 0{,}1500$

- Se a pessoa tiver renda ente 10 e 20 S.M., qual a probabilidade de que ela não tenha cartão de crédito?

SOLUÇÃO:

P(não ter cartão/ renda entre 10 e 20 S.M.) = $\frac{90}{330} = \; 0{,}2727$

(c) (0,5 pontos) Existe independência ente faixa de renda dessas pessoas, e o número de cartões de crédito que ela tem? Justifique a sua resposta.

SOLUÇÂO:

Não existe independência. Para existir independência, para todos os pares (i,j) de faixa de renda (FR_i) e a para a informação ter ou não cartões (C_j) necessitaríamos ter:

$P(FR_i \cap C_j) = P(FR_i) \times P(C_j)$.

Se para qualquer um desses pares isso não acontecer, é porque não existe dependência. Assim, por exemplo, pessoas com renda até 10 SM e que não têm cartões:

P(até 10 SM e não tem cartões) = 270 / 1000 = 0,27
P(até 10 SM) = 400/1000 = 0,40
P(não tem cartões) = 420 / 1000 = 0,42
P(até 10 SM) X P(não tem cartões) = 0,40 X 0,42 = 0,168

Como P(até 10 SM e não tem cartões) ≠ P(até 10 SM) X P(não tem cartões) não existe independência entre os eventos em questão (0,168 ≠ 0,27) .

Segunda questão (1,0 ponto)Os clientes de um banco têm três opções de investimento: poupança, CDB e fundos.

20 % dos clientes do banco têm caderneta de poupança,
5 % dos clientes do banco têm CDB,
25 % dos clientes do banco têm aplicações em fundos.

Suponha que cada cliente só pode ter um destes investimentos no banco, ou seja, estas 3 modalidades de investimentos são exclusivas. O banco realizou uma pesquisa entre seus clientes para avaliar o interesse pelo lançamento de um novo tipo de seguro de vida. Dos clientes que aplicam em poupança, 10 % se interessaram pelo seguro. Dos clientes que investem em CDB, 30 % se interessaram pelo seguro, e dentre os clientes que aplicam em fundos, 40 % demonstraram interesse pelo novo produto. Um cliente do banco é selecionado
aleatoriamente.

(a) (0.4 pontos) Qual a probabilidade dele se interessar pelo novo seguro de vida?

SOLUÇÂO:

As seguintes probabilidades são dadas:

P(poupança) = 20%
P(CDB) = 5%
P(fundos) = 25%

As modalidades de investimento são exclusivas, logo:

$P(\text{poupança} \cap \text{CDB}) = P(\text{poupança} \cap \text{fundos}) = P(\text{CDB} \cap \text{fundos}) = P(\text{poupança} \cap \text{CDB} \cap \text{fundos}) = 0.$

Também são fornecidas as seguintes probabilidades condicionais em termos do interesse por seguro de vida:

P(Seguro| poupança) = 0,10
P(Seguro| CDB) = 0,30
P(Seguro| fundos) =0,40

A união dos clientes em cada uma destas categorias forma o universo de clientes e a interseção destas 3 categorias é nula (quanto tomadas duas a duas ou em conjunto). Assim:

$$Int_{seguro} = (\text{seguro} \cap \text{CDB}) \cup (\text{seguro} \cap \text{poupança}) \cup (\text{seguro} \cap \text{fundos})$$

Assim, o evento "se interessar pelo novo seguro" mostrado acima, é uma união de eventos mutuamente exclusivos e portanto sua probabilidade é apenas a soma das probabilidades dos eventos que compõem a união. Logo, a probabilidade desejada torna-se:

$$P(Int_{seguro}) = P(Int_{seguro} \cap \text{CDB}) + P(Int_{seguro} \cap \text{poupança}) + P(Int_{seguro} \cap \text{fundos}) \qquad (1)$$

A probabilidade de cada uma dessas interseções pode ser escrita como:

$$P(Int_{seguro} \cap \text{CDB}) = P(Int_{seguro} \mid \text{CDB}).P(\text{CDB})$$

Da mesma forma para $P(Int_{seguro} \cap \text{poupança})$ e $P(Int_{seguro} \cap \text{fundos})$. Substituindo em (1) temos:

$$P(Int_{seguro}) = P(Int_{seguro} \mid \text{CDB}).P(\text{CDB}) + P(Int_{seguro} \mid \text{poupança}).P(\text{poupança}) + P(Int_{seguro} \mid \text{fundos}).P(\text{fundos})$$

Logo,

$P(\text{seguro}) = (0{,}30 \times 0{,}05) + (0{,}10 \times 0{,}20) + (0{,}40 \times 0{,}25) = 0{,}015 + 0{,}02 + 0{,}1 = 0{,}135 = 13.5\%$

(b) (0.6 pontos) Dado que o cliente está interessado no novo seguro de vida, qual a probabilidade dele aplicar em poupança? E em CDB?

SOLUÇÂO`:

Aplicação direta do teorema de Bayes. Desejamos calcular:

$P(\text{CDB} \mid Int_{seguro})$ e $P(\text{poupança} \mid Int_{seguro})$

Pela definição de probabilidade condicional:

P(CDB | Int_{seguro}) = P (Int_{seguro} ∩CDB) / P(Int_{seguro}) = P(Int_{seguro} | CDB). P(CDB) / P(Int_{seguro})

P(CDB | Int_{seguro}) = $\frac{0{,}3\times0{,}05}{0{,}135}$ = 0,1111

Da mesma forma:

P(poupança | Int_{seguro}) = $\frac{0{,}10\times0{,}20}{0{,}135}$ = 0,1481

<u>Terceira questão</u> (1,0 ponto) Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos, sem reposição, 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca?

<u>SOLUÇÃO</u>:

Temos um total de 16 bolinhas na caixa sendo 4 bolas verdes (V_d), 4 azuis (A), 4 vermelhas (V_e) e 4 brancas (B). A probabilidade do evento de nosso interesse pode ser expresso pela seguinte expressão:

$$P(V_d, A, V_e, B) = \frac{4}{16}\times\frac{4}{15}\times\frac{4}{14}\times\frac{4}{13} = \frac{256}{43680} = 0{,}0059$$

<u>Quarta questão</u> (1,0 ponto) Foi feito um sorteio em que cada interessado tira, de um recipiente opaco, uma bola contendo um número (0 ou 1). Cada interessado sorteia um bola ao acaso e se ele tirar o número 1, ganha um prêmio. Após cada sorteio a bola selecionada é substituída por duas bolas contendo o outro número (por exemplo, se foi retirada uma bola com o número 1 devem ser colocadas, no recipiente, 2 bolas contendo zero). Sabendo que inicialmente o recipiente continha 8 bolas contendo o zero (0) e 10 bolas com o número um (1), deseja-se saber qual a probabilidade de que o segundo interessado ganhe um prêmio, ou seja, sorteie um bola com o número 1?

<u>SOLUÇÃO:</u>

Seja $B0_i$ = {evento encontrar bola preta no sorteio "i"} e seja $B1_{i}$ = {evento encontrar bola branca no sorteio "i"}. O evento $B1_2$, bola branca no segundo sorteio pode ser escrito como:

$$B1_2 = (B1_2 \cap B0_1) \cup (B1_2 \cap B1_1)$$

Inicialmente temos que P($B0_1$) = 8/18 e P($B1_1$) = 10/18. Suponha que na primeira retirada tenha sido sorteada uma bola com o 0 (zero). Então, antes da segunda retirada a caixa conterá 7 bolas com 0 e 12 bolas com o número 1. Se no primeiro sorteio a bola sorteada for com número 1, para o segundo sorteio a caixa conterá 10 bolas com 0 e 9 bolas com 1. Então, a probabilidade condicional de uma bola branca ser extraída no segundo sorteio será, para cada um dos casos:

$$P(B1_2|B0_1) = \frac{12}{19} \text{ e } P(B1_2|B1_1) = \frac{9}{19}.$$

Pela definição de probabilidade condicional tem-se:

$$P(B1_2 \cap B0_1) = P(B1_2|B0_1)P(B0_1) = \frac{12}{19}\times\frac{8}{18} = 0{,}2807$$

e,

$$P(B1_2 \cap B1_1) = P(B1_2|B1_1)P(B1_1) = \frac{9}{19}\times\frac{10}{18} = 0{,}2632$$

Logo,

$$P(B1_2) = P(B1_2 \cap B0_1) + P(B1_2 \cap B1_1) = 0{,}2807 + 0{,}2632 = 0{,}5439.$$

Quinta questão (1,5 pontos) Um pote contém 30 balas, 12 delas sabor caramelo e 18 sabor chocolate. 9 balas são selecionadas ao acaso. Seja X o número de balas de chocolate retiradas na amostra (dentre os 9 selecionadas). Calcule qual a probabilidade de X ser igual a 4 quando:

(a) A amostragem é feita com reposição, ou seja, cada bala é selecionada e depois recolocada no pote.

SOLUÇÃO:

Para 30 observações, que contar o número de balas de chocolate contidas em 9 balas, onde a probabilidade de que uma bala seja de chocolate é $\frac{18}{30} = 0{,}6$ pois a amostragem é feita com reposição. Assim, o modelo de probabilidade indicado para este tipo de situação é o modelo binomial.

X: número de balas de chocolate

P: probabilidade de que uma bala seja de chocolate

P = 0,6

n = 9

$$P(X = 4) = \binom{9}{4}\ 0{,}6^4\ \ 0{,}4^5\ = 126\ \times\ 0{,}1296\ \times 0{,}0102 = 0{,}1666$$

(b) A amostragem é feita sem reposição, ou seja, cada bala é selecionada não retorna ao pote.

SOLUÇÃO:

Neste caso temos: N = 30 (tamanho da população = quantidade de balas), n = 9 (tamanho da amostra), X = número de balas de chocolate na amostra, p = 18/30 (proporção de balas de chocolate na população).

Como a amostragem é sem reposição:

$$P(X = 4) = \frac{\binom{18}{4}\binom{12}{5}}{\binom{30}{9}} = \frac{3.060\ \times 792}{14.307.150} = \frac{2.423.520}{14.307.150} = 0{,}1694$$

Sexta questão (2,0 pontos) Durante o primeiro dia das Olimpíadas a chegada de ônibus na Rodoviária Novo Rio se dá segundo o modelo de Poisson com taxa de 1 ônibus por minuto.

(a) determine a probabilidade da chegada de 2 ônibus em um minuto qualquer desse primeiro dia das Olimpíadas.

SOLUÇÃO:

A variável X que conta o número de ônibus que chegar por minuto segue o modelo Poison, com taxa de 1 ônibus por minuto.

Então,

$$P(X = 2) = \frac{e^{-1}\ 1^2}{2!} = \frac{0{,}3679}{2} = 0{,}1839$$

(b) se for possível desembarcar somente 2 ônibus por minuto, qual a probabilidade de haver ônibus sem desembarque imediato?

SOLUÇÃO:

A variável X continua sendo o número de ônibus que chegar por minuto segue o modelo Poison, mas agora com taxa de 2 ônibus por minuto. Assim, a probabilidade de haver ônibus sem desembarque imediato se dá quando X=0.

Então,

$$P(X > 2) = 1 - \{P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)\} =$$

$$P(X > 2) = 1 - \{0{,}184 + 0{,}368 + 0{,}368\} = 0{,}08$$

Sétima questão (1,0 ponto) Uma país controla a natalidade dos casais e eles podem ter no máximo dois filhos. Assim, cada casal poderá ter 0 filhos, 1 filho ou 2 filhos e admitamos que cada uma dessas opções têm a mesma probabilidade de ocorrência. Admitamos também que as probabilidades de nascimento de homens e de mulheres são iguais. Sejam X e Y, respectivamente, o número de filhos homens e o número de filhas mulheres respectivamente, de um casal escolhido ao acaso. Pergunta-se:

(a) X e Y são variáveis aleatórias independentes? Por que?

SOLUÇÃO:

Os casais têm no máximo dois filhos. Nesse contexto, cada uma das possibilidades em termos do número de filhos, 0 filhos, 1 filho e 2 filhos, têm a mesma probabilidade, ou seja, 1/3 para cada uma delas. Consideramos que as probabilidades de nascimento de homens e de mulheres são iguais. Então, entre os que têm apenas 1 filho (o que ocorre com probabilidade 1/3), temos metade para cada sexo, isto é, 1/6 para 1 filho homem e 1/6 para uma filha mulher. Analogamente, entre os que têm 2 filhos (o que também ocorre com probabilidade 1/3), de novo cada uma das 4 possibilidades de combinações dos sexos tem a mesma chance: 2 homens tem probabilidade 1/12, 2 mulheres tem probabilidade 1/12, 1 homem e 1 mulher tem probabilidade 1/6. Sejam X e Y, respectivamente, o número de filhos homens e o número de filhas mulheres de um casal escolhido ao acaso. Assim, se quisermos saber, por exemplo, a possibilidade do casal não ter filhos homens (0 homens) temos o somatório: 1/3 (probab. de 0 filhos) + 1/6 (probab. de ter 1 filho e ele ser mulher) + 1/12 (probab. de 2 filhos e ambos serem mulheres, ou seja, nenhum homem). Logo:

X	0	1	2
P(X=x)	$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{12}$	$\frac{1}{12}$

X e Y têm ambos a mesma distribuição de probabilidade.

X e Y não são variáveis aleatórias independentes. Porque para um caso

$P(X=0, Y=0) = \frac{1}{3} \neq P(X=0)P(Y=0) = \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{49}{144}$.

(b) Qual a Cov(X,Y)?

SOLUÇÃO:

Temos que Cov(X,Y) = E(XY) – E(X)E(Y). Como E(X0 = E(Y), pela tabela anterior temos que:

E(X) = E(Y) = 0 x 7/12 + 1 x 4/12 + 2 x 1/12 = 1/2 .

Sabemos que a variável XY só pode assumir somente os valores 0 e 1, uma vez que o número de filhos por casal é até 2. Assim, para que que XY assuma o valor 2, teríamos que ter o produto: 1 homem e 2 mulheres, ou ao contrário, ou seja 3 filhos. Logo,

XY	0	1
P(XY)	5/6	1/6

e, E(XY) = 0 x 5/6 + 1 x 1/6 = 1/6.

Pela propriedade, temos Cov(X,Y) = E(XY) – E(X)E(Y) = 1/6 – (1/2).(1/2) = – 1/12