Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

**Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina Probabilidade e Estatística**
**AP3 1° semestre de 2016**
**GABARITO**

---

Observações:
- A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal
- É permitido o uso de máquina de calcular
- Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
- **Utilize nos cálculos quatro casas decimais arrendondando para duas só ao final**
- Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas
- Você pode usar lápis para responder as questões
- **Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível**
- Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas
- **Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.**

---

*Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo*

**1 – Primeira Questão (2,5 pontos)** Considere três urnas: a primeira contém 10 bolas azuis e 8 vermelhas, a segunda 12 bolas azuis e 6 brancas e a terceira 9 bolas vermelhas e 5 brancas.
a) Uma urna é escolhida ao acaso e uma bola é retirada. Qual a probabilidade de que essa bola seja branca? (1,0 ponto)
**Resolução:**
**Urna 1: 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas**
**Urna 2: 12 bolas azuis e 6 brancas**
**Urna 3: 9 bolas vermelhas e 5 brancas**
**(i) Probabilidade de ser branca na Urna i (P(b|Ui))**
**P(b|U1) = 0; P(b|U2) = 6/18; P(b|U3) = 5/14**
**(ii) Probabilidade de escolher uma determinada urna:**
**P(U1) = P(U2) = P(U3) = 1/3**
**(iii) Probabilidade de ser branca (Teor. Probabilidade Total)**
**P(b) = P(b|U1) . P(U1) + P(b|U2) . P(U2) + P(b|U3) . P(U3)**
**P(b) = 0 . 1/3 + 6/18 . 1/3 + 5/14 . 1/3**
**P(b) = 0,2302**
b) Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola branca. Qual a probabilidade de que essa urna seja a segunda? (1,5 pontos)
**Resolução:**
**Se a bola for branca ela poderá ser da segunda urna (U2) ou da terceira urna (U3). Queremos saber a probabilidade de ser da segunda urna, ou seja:**

$$P(U2|b) = \frac{P(b|U2).P(U2)}{P(b)} = \frac{\left(\frac{6}{18}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}{0{,}2302} = 0{,}4827$$

***P (U2|b) = 0,4827***

**2 – Segunda Questão ( 2,5 pontos)** Animados com as Olimpíadas que se aproximam, dois grupos de amigos, os Para Sempre e os Sempre Juntos, resolveram fazer uma competição de lançamentos de bolas à rede. Um dos membros do grupo disse que acerta 20% dos lançamentos de olhos vendados. O grupo de amigos Para Sempre apostou que nos 10 lançamentos que ele fizer na competição, ele acertará no máximo uma vez. O outro grupo, os Sempre Juntos, acha que esse acerto só acontecerá em sua última tentativa (a décima). Verifique a probabilidade em cada uma das situações:

a) (1,5 pontos) acertar na cesta no máximo uma vez

**Resolução:**

**Pode-se aplicar, neste caso, o modelo binomial com *p=0,2* e como se quer saber a probabilidade dele acertar no máximo uma vez, existem duas possibilidades: não acertar a cesta nenhuma vez e acertar apenas um vez. Assim,**

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$P(X \le 1) = \binom{10}{0} 0{,}2^0 (1-0{,}2)^{(10-0)} + \binom{10}{1} 0{,}2^1 (1-0{,}2)^{(10-1)}$$
$$P(X \le 1) = 1 \times 1 \times 0{,}8 + 10 \times 0{,}2 \times 0{,}8^9$$
$$P(X \le 1) = 0{,}37581$$

b) (1,0 ponto) acertar somente na décima tentativa.

**Resolução:**

**Pode-se pensar, nesse caso, que temos *k* ensaios de Bernoulli que precedem o 1º sucesso e aplicar o modelo Geométrico.**

$$P(X = 10) = p \times (1-p)^{k-1} = 0{,}2 \times (1-0{,}2)^9 = 0{,}2 \times 0{,}8^9 = 0{,}02684$$
$$P(X = 10) = 0{,}02684$$

**3 – Terceira questão – (2,0 pontos)** Numa fábrica de papel se avaliava o desempenho de uma máquina picadora de madeira. Se os sarrafos de madeira que saíam da máquina fosse muito grandes alongaria o processamento químico, se fosse pequenos demais a qualidade do papel seria comprometida. Sabe-se de um estudo anterior que o comprimento dos sarrafos segue a distribuição Normal e que a variância típica é 1,02 $cm^2$. Foram recolhidas 30 amostras de sarrafos e se chegou à média de comprimento igual a 3,1 cm. Estime o intervalo de confiança para a média com o coeficiente de confiança igual a 75%.

**Resolução:**

**O intervalo de confiança é dado por**

$$IC(\mu,\gamma) = \left[ \bar{X} - z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \, ; \, \bar{X} + z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] .$$

**Pelos valores dados pelo problema teremos**

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1{,}02}}{\sqrt{30}} \approx 0{,}1844 \quad \textbf{e} \quad z_{\gamma/2} = z_{0{,}75/2} = z_{0{,}375} = 1{,}15 \quad .$$

**Assim teremos**

$$IC(3{,}1;0{,}7) = [3{,}1 - 1{,}15 \times 0{,}1844 \, ; \, 3{,}1 + 1{,}15 \times 0{,}1844] \approx [3{,}1 - 0{,}2121 \, ; \, 3{,}1 + 0{,}2121] \approx [2{,}89 \, ; \, 3{,}31] \; .$$

**4 – Quarta questão – (1,0 ponto)** Uma corda está sendo testada quanto em que ponto da mesma vai se dar o rompimento. Para isto um segmento de um metro é colocado numa máquina onde a corda será tencionada. Verificou-se que a corda pode se romper em qualquer ponto do seu comprimento com igual probabilidade. Queremos estimar qual a probabilidade que esta corda irá se romper dentro de uma faixa de 10 cm em torno do centro da corda (10 cm para cada lado!).

**Resolução:**

**Usaremos a distribuição Uniforme já que a probabilidade de rompimento é igual em todo comprimento da corda:**

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad .$$

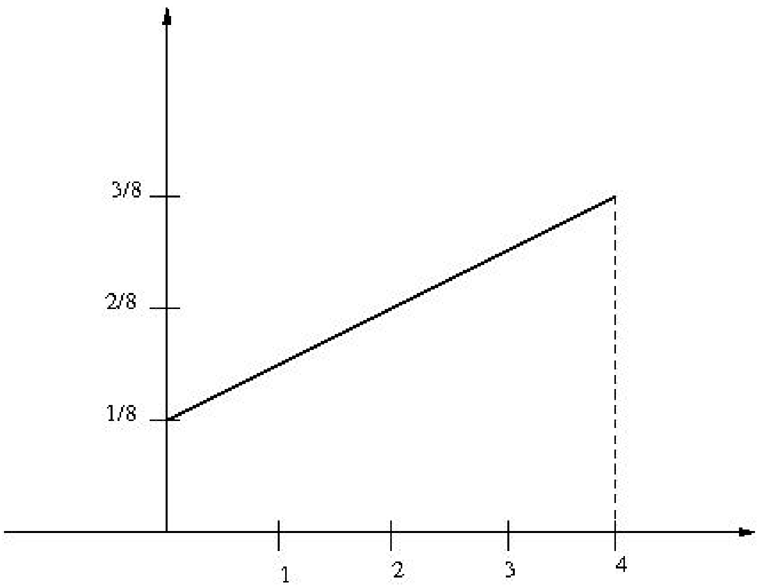
**Como não são dados os valores de a e b, faremos a = 0 e b = 100, que corresponde a usarmos uma escala de centímetros. Daí**

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{100-0}=0{,}01 \quad .$$

**O centro da corda está em 50 cm, portanto a probabilidade de romper 10 centímetros para cada lado em torno do centro será**

$$P(40<X<60)=\int_{40}^{60} 0{,}01\,dx=0{,}01\,x|_{40}^{60}=0{,}01(60-40)=0{,}2 \quad .$$

**5 – Quinta questão – (2,0 ponto)** A figura abaixo apresenta uma função (as escalas não são proporcionais e a distribuição vale zero para x < 0 e x > 4).




a) Prove que a função dada pela figura é uma distribuição de probabilidade;

**Resolução:**

**Por uma inspeção simples do gráfico verificamos que a função é não negativa.**

**Achemos inicialmente a reta dada pelos pontos (0;1/8) e (4;3/8) que define a distribuição em questão. Como a equação de uma reta é dada por**

$$y=a+b\,x$$

**temos para o primeiro ponto a equação**

$$\frac{1}{8}=a+b\times 0\Rightarrow a=\frac{1}{8} \quad .$$

**Para o segundo ponto teremos**

$$\frac{3}{8}=a+b\times 4 \quad .$$

**Usando o valor já determinado para *a* teremos**

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{8}+b\times 4\Rightarrow b=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$$

**portanto a equação será**

$$y=\frac{1}{8}+\frac{x}{16} \quad .$$

**Podemos determinar se é normalizada por duas maneiras. A primeira é observando que na figura que temos um trapézio no intervalo de validade da distribuição. Assim a área determinada pelo trapézio será**

$$\frac{1/8+3/8}{2}\times 4=\frac{1/2}{2}\times 4=1 \quad .$$

**A outra maneira é integrando a função encontrada acima, ou seja,**

$$\int_0^4\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}\right)dx=\frac{1}{8}\int_0^4 dx+\frac{1}{16}\int_0^4 x\,dx=\frac{1}{8}\,x\Big|_0^4+\frac{1}{16}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4=\frac{1}{8}(4-0)+\frac{1}{16}\left(\frac{4^2}{2}-0^2\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1 \quad .$$

b) Calcule P(X < 3) para esta distribuição;

**Resolução:**

**Neste caso teremos**

$$P(0<X<3)=\frac{1}{8}\int_0^3 dx+\frac{1}{16}\int_0^3 x\,dx=\frac{1}{8}\,x\Big|_0^3+\frac{1}{16}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^3=\frac{1}{8}(3-0)+\frac{1}{16}\left(\frac{3^2}{2}-0^2\right)=\frac{3}{8}+\frac{1}{16}\times\frac{9}{2}=\frac{21}{32}=0{,}65625 \quad .$$

c) Calcule o valor médio desta distribuição;

**Resolução:**

**Pela definição de média temos**

$$\mu=\int_0^4 x\,f(x)\,dx=\int_0^4 x\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}\right)dx=\frac{1}{8}\int_0^4 x\,dx+\frac{1}{16}\int_0^4 x^2\,dx=\frac{1}{8}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^4+\frac{1}{16}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{4^2-0^2}{16}+\frac{4^3-0^3}{48}=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}\approx 2{,}3333 \quad .$$

d) Calcule a variância desta distribuição.

**Resolução:**

**Partindo da definição**

$$\sigma^2=\int_0^4 x^2 f(x)\,dx-\mu^2$$

**calculemos a integral**

$$\int_0^4 x^2 f(x)\,dx \int_0^4 x^2\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}\right)dx=\frac{1}{8}\int_0^4 x^2\,dx+\frac{1}{16}\int_0^4 x^3\,dx=\frac{1}{8}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^4+\frac{1}{16}\,\frac{x^4}{4}\Big|_0^4=\frac{4^3-0^3}{24}+\frac{4^4-0^4}{64}$$

**ou**

$$\int_0^4 x^2 f(x)\,dx \int_0^4 x^2\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{16}\right)dx=\frac{64}{24}+\frac{256}{64}=\frac{8}{3}+4=\frac{20}{3}\approx 6{,}6667 \quad .$$

**Daí obtemos**

$$\sigma^2=\int_0^4 x^2 f(x)\,dx-\mu^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{11}{9}\approx 1{,}2222 \quad .$$

**Tabela da distribuição Normal**
**N(0,1)**

| $z_c$ | 0,00 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,06 | 0,07 | 0,08 | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,0040 | 0,0080 | 0,0120 | 0,0160 | 0,0199 | 0,0239 | 0,0279 | 0,0319 | 0,0359 |
| 0,1 | 0,0398 | 0,0438 | 0,0478 | 0,0517 | 0,0557 | 0,0596 | 0,0636 | 0,0675 | 0,0714 | 0,0753 |
| 0,2 | 0,0793 | 0,0832 | 0,0871 | 0,0910 | 0,0948 | 0,0987 | 0,1026 | 0,1064 | 0,1103 | 0,1141 |
| 0,3 | 0,1179 | 0,1217 | 0,1255 | 0,1293 | 0,1331 | 0,1368 | 0,1406 | 0,1443 | 0,1480 | 0,1517 |
| 0,4 | 0,1554 | 0,1591 | 0,1628 | 0,1664 | 0,1700 | 0,1736 | 0,1772 | 0,1808 | 0,1844 | 0,1879 |
| 0,5 | 0,1915 | 0,1950 | 0,1985 | 0,2019 | 0,2054 | 0,2088 | 0,2123 | 0,2157 | 0,2190 | 0,2224 |
| 0,6 | 0,2257 | 0,2291 | 0,2324 | 0,2357 | 0,2389 | 0,2422 | 0,2454 | 0,2486 | 0,2517 | 0,2549 |
| 0,7 | 0,2580 | 0,2611 | 0,2642 | 0,2673 | 0,2704 | 0,2734 | 0,2764 | 0,2794 | 0,2823 | 0,2852 |
| 0,8 | 0,2881 | 0,2910 | 0,2939 | 0,2967 | 0,2995 | 0,3023 | 0,3051 | 0,3078 | 0,3106 | 0,3133 |
| 0,9 | 0,3159 | 0,3186 | 0,3212 | 0,3238 | 0,3264 | 0,3289 | 0,3315 | 0,3340 | 0,3365 | 0,3389 |
| 1,0 | 0,3413 | 0,3438 | 0,3461 | 0,3485 | 0,3508 | 0,3531 | 0,3554 | 0,3577 | 0,3599 | 0,3621 |
| 1,1 | 0,3643 | 0,3665 | 0,3686 | 0,3708 | 0,3729 | 0,3749 | 0,3770 | 0,3790 | 0,3810 | 0,3830 |
| 1,2 | 0,3849 | 0,3869 | 0,3888 | 0,3907 | 0,3925 | 0,3944 | 0,3962 | 0,3980 | 0,3997 | 0,4015 |
| 1,3 | 0,4032 | 0,4049 | 0,4066 | 0,4082 | 0,4099 | 0,4115 | 0,4131 | 0,4147 | 0,4162 | 0,4177 |
| 1,4 | 0,4192 | 0,4207 | 0,4222 | 0,4236 | 0,4251 | 0,4265 | 0,4279 | 0,4292 | 0,4306 | 0,4319 |
| 1,5 | 0,4332 | 0,4345 | 0,4357 | 0,4370 | 0,4382 | 0,4394 | 0,4406 | 0,4418 | 0,4429 | 0,4441 |
| 1,6 | 0,4452 | 0,4463 | 0,4474 | 0,4484 | 0,4495 | *0,4505 | 0,4515 | 0,4525 | 0,4535 | 0,4545 |
| 1,7 | 0,4554 | 0,4564 | 0,4573 | 0,4582 | 0,4591 | 0,4599 | 0,4608 | 0,4616 | 0,4625 | 0,4633 |
| 1,8 | 0,4641 | 0,4649 | 0,4656 | 0,4664 | 0,4671 | 0,4678 | 0,4686 | 0,4693 | 0,4699 | 0,4706 |
| 1,9 | 0,4713 | 0,4719 | 0,4726 | 0,4732 | 0,4738 | 0,4744 | 0,4750 | 0,4756 | 0,4761 | 0,4767 |
| 2,0 | 0,4772 | 0,4778 | 0,4783 | 0,4788 | 0,4793 | 0,4798 | 0,4803 | 0,4808 | 0,4812 | 0,4817 |
| 2,1 | 0,4821 | 0,4826 | 0,4830 | 0,4834 | 0,4838 | 0,4842 | 0,4846 | 0,4850 | 0,4854 | 0,4857 |
| 2,2 | 0,4861 | 0,4864 | 0,4868 | 0,4871 | 0,4875 | 0,4878 | 0,4881 | 0,4884 | 0,4887 | 0,4890 |
| 2,3 | 0,4893 | 0,4896 | 0,4898 | 0,4901 | 0,4904 | 0,4906 | 0,4909 | 0,4911 | 0,4913 | 0,4916 |
| 2,4 | 0,4918 | 0,4920 | 0,4922 | 0,4925 | 0,4927 | 0,4929 | 0,4931 | 0,4932 | 0,4934 | 0,4936 |
| 2,5 | 0,4938 | 0,4940 | 0,4941 | 0,4943 | 0,4945 | 0,4946 | 0,4948 | 0,4949 | *0,4951 | 0,4952 |
| 2,6 | 0,4953 | 0,4955 | 0,4956 | 0,4957 | 0,4959 | 0,4960 | 0,4961 | 0,4962 | 0,4963 | 0,4964 |
| 2,7 | 0,4965 | 0,4966 | 0,4967 | 0,4968 | 0,4969 | 0,4970 | 0,4971 | 0,4972 | 0,4973 | 0,4974 |
| 2,8 | 0,4974 | 0,4975 | 0,4976 | 0,4977 | 0,4977 | 0,4978 | 0,4979 | 0,4979 | 0,4980 | 0,4981 |
| 2,9 | 0,4981 | 0,4982 | 0,4982 | 0,4983 | 0,4984 | 0,4984 | 0,4985 | 0,4985 | 0,4986 | 0,4986 |
| 3,0 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4987 | 0,4988 | 0,4988 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4989 | 0,4990 | 0,4990 |
| 3,1 | 0,4990 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4991 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4992 | 0,4993 | 0,4993 |
| 3,2 | 0,4993 | 0,4993 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4994 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 |
| 3,3 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4995 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4996 | 0,4997 |

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.