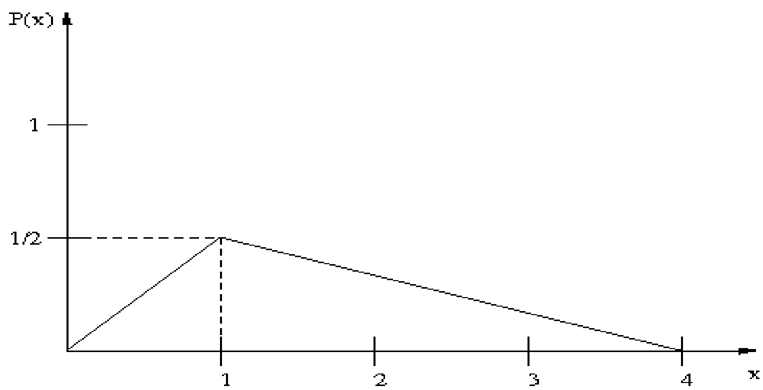
Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 1° semestre de 2012
GABARITO - Corrigido

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 – Primeira questão (2,0 pontos)
A figura abaixo expressa uma função.



Obs: As escalas dos eixos não são proporcionais.

a) Demonstre que esta função é uma distribuição de probabilidade; (0,5)
Resolução:

Para determinarmos se esta função é distribuição de probabilidade deveremos verificar se

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1 \quad .$$

No entanto sabemos, usando a interpretação geométrica da integral, que a integral é igual à área entre a função dada e o eixo x. Observe que a área do pedaço da função no intervalo [0, 1] corresponde a área do triângulo de base 1 e altura 1/2 e a área do pedaço da função no intervalo [1, 4] é a área do triângulo de base 3 e altura também 1/2. Assim a área total será

$$\frac{1\times\frac{1}{2}}{2}+\frac{3\times\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \quad .$$

Mais fácil ainda: A distribuição é um triângulo de base 4 e altura 1/2.

Outra maneira de resolver esta questão é determinando as expressões das funções determinadas pelas figuras.

Observe que as duas partes são segmentos de retas. Tendo dois pontos como referência podemos determinar cada equação da reta correspondente. Dado que a equação da reta é dada por

$$y=a\,x+b$$

e observando no gráfico que a primeira reta passa pelos pontos (0,0) e (1, 1/2) teremos as equações

$$\begin{array}{l} 0=a\times 0+b \\ \frac{1}{2}=a\times 1+b \end{array}.$$

Da primeira equação temos que b = 0 e da segunda que a = 1/2. Assim a equação da reta no intervalo [0, 1] será

$$y=\frac{x}{2}\ .$$

A segunda reta no intervalo [1, 4] passa pelos pontos (1, 1/2) e (4, 0). Assim teremos as equações a serem satisfeitas

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2}=a\times 1+b \\ 0=a\times 4+b \end{array}.$$

Da segunda equação tiramos que $b=-4\times a$ **que levado à primeira equação no dará** $a=\frac{1}{6}$ **e, portanto,** $b=\frac{4}{6}$ **e a equação da reta pode ser apresentada como**

$y=-\frac{x-4}{6}$ **. De maneira mais formal**

$$f(x)=\begin{array}{l} x/2,\ se\ \ 0\leq\ x\ \leq 1; \\ -(x-4)/6,\ se\ \ 1\leq\ x\ \leq 4. \end{array}.$$

Calculemos a integral

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx-\int_1^4 \frac{x-4}{6}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{6}\int_1^4 (x-4)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^4 x\,dx-\int_1^4 4\,dx\right)$$

ou ainda

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}|_0^1-\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}|_1^4-4x|_1^4\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left[\frac{16-1}{2}-4(4-1)\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \quad .$$

b) Calcule a média da distribuição; (1,0)

Resolução:

Partiremos da definição da média, ou seja,

$$\mu=\int_a^b x f(x)\,dx \quad .$$

Aproveitando os cálculos anteriores podemos escrever

$$\mu=\int_0^4 x f(x)\,dx=\int_0^1 x\times\frac{x}{2}\,dx-\int_1^4 x\times\frac{x-4}{6}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx-\frac{1}{6}\int_1^4 (x^2-4\mathrm{x})\,dx$$

que resulta em

$$\mu=\frac{1}{2}\int_0^1 x^2\,dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^4 x^2\,dx-\int_1^4 4\mathrm{x}\,dx\right)=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}|_0^1-\frac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3}|_1^4-4\frac{x^2}{2}|_1^4\right)$$

ou ainda

$$\mu=\frac{1}{2}\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\frac{64-1}{3}-2(16-1)\right)=\frac{1}{6}+\frac{9}{6}=\frac{5}{6}=1{,}6666 \quad .$$

c) Calcule a moda da distribuição. (0,5)

Resolução:

A moda é, por definição, o valor para o qual a probabilidade é máxima. No nosso caso, basta observar o gráfico para termos que a moda é 1.

2 – Segunda questão (2,5 pontos)

Calcule das seguintes probabilidades dado que a distribuição é Normal e a média tem o valor 2,3.

Em todas as resoluções usaremos a fórmula

$$P(a>X>b)=P\left(\frac{a-2{,}3}{\sigma}>Z>\frac{b-2{,}3}{\sigma}\right)$$

e suas variantes.

a) $P(X>1{,}8)\, com\, \sigma^2=11{,}56$; (0,5)

Resolução:

$$P(X>1{,}8)=P\left(Z>\frac{1{,}8-2{,}3}{\sqrt{11{,}56}}\right)=P\left(Z>-\frac{0{,}5}{3{,}4}\right)=P(Z>-0{,}14705)\approx P(Z>-0{,}15)$$

ou

$$P(X>1{,}8)=0{,}5+0{,}0586=0{,}5596\ .$$

b) $P(X<1{,}8)\,com\,\sigma^2=16{,}81$; (0,5)

Resolução:

$$P(X<1{,}8)=P\left(Z<\frac{1{,}8-2{,}3}{\sqrt{16{,}81}}\right)=P\left(Z<-\frac{0{,}5}{4{,}1}\right)=P(Z<-0{,}12195)\approx P(Z<-0{,}12)=0{,}5-0{,}0478$$

ou

$$P(X<1{,}8)=0{,}5-0{,}0478=0{,}4522\ .$$

c) $P(1{,}2<X<2{,}4)\,com\,\sigma^2=16$; (0,5)

Resolução:

$$P(1{,}2<X<2{,}4)=P\left(\frac{1{,}2-2{,}3}{\sqrt{16}}<Z<\frac{2{,}4-2{,}3}{\sqrt{16}}\right)=P\left(-\frac{1{,}1}{4}<Z<\frac{0{,}1}{4}\right)$$

ou

$$P(1{,}2<X<2{,}4)=P(-0{,}275<Z<0{,}025)\approx P(-0{,}28<Z<0{,}03)$$

ou ainda

$$P(1{,}2<X<2{,}4)=P(Z>0{,}28)+P(Z<0{,}03)=0{,}1103+0{,}0120=0{,}1223$$

d) $P(2{,}4<X<2{,}9)\,com\,\sigma^2=16$; (0,5)

Resolução:

$$P(2{,}4<X<2{,}9)=P\left(\frac{2{,}4-2{,}3}{\sqrt{16}}<Z<\frac{2{,}9-2{,}3}{\sqrt{16}}\right)=P\left(\frac{0{,}1}{4}<Z<\frac{0{,}6}{4}\right)$$

ou

$$P(2{,}4<X<2{,}9)=P(0{,}025<Z<0{,}15)\approx P(0{,}03<Z<0{,}15)$$

e finalmente

$$P(2{,}4<X<2{,}9)=P(Z<0{,}15)-P(Z<0{,}03)=0{,}0596-0{,}0120=0{,}0476\ .$$

e) $P(2{,}3<X<8{,}9)\,com\,\sigma^2=11{,}56.$ (0,5).

Resolução:

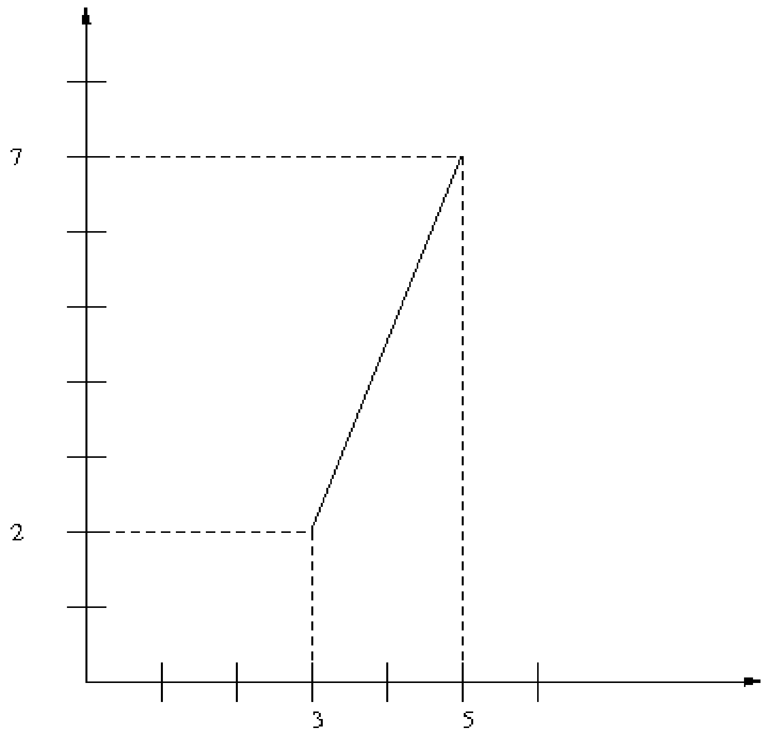
$$P(2{,}3<X<8{,}9)=P\left(\frac{2{,}3-2{,}3}{\sqrt{11{,}56}}<Z<\frac{8{,}9-2{,}3}{\sqrt{11{,}56}}\right)=P\left(0<Z<\frac{6{,}6}{3{,}4}\right)=P(Z<1{,}9411)$$

ou

$$P(2{,}3<X<8{,}9)\approx P(Z<1{,}94)=0{,}4738$$

3 – Quarta questão (2,0 pontos)

Numa pesquisa se estabeleceu que a probabilidade que governava um fenômeno tinha como perfil a função apresentada abaixo.



No entanto, a função não está normalizada, ou seja, a integral desta função dentro do intervalo [3,5] não dá o valor 1.

a) Determine a constante que faz com que a função acima seja uma distribuição de probabilidade; (1,0)

Resolução:

Da mesma forma que na primeira questão, basta calcularmos a área entre a curva e o eixo x. Olhando para a figura vemos que a área da função é igual a área de um trapézio ou ainda a soma das áreas de um quadrado e um triângulo. Resolveremos como soma do quadrado de lado 2 e um triângulo de base 2 e altura 5, ou seja,

$$A=2^2+\frac{1}{2}2\times 5=4+5=9 \quad .$$

Assim a constante de normalização será 1/9.

Outra maneira é acharmos a equação da reta que passa pelos pontos (3, 2) e (5, 7), ou seja,

$$\begin{array}{l} 2=a\times 3+b \\ 7=a\times 5+b \end{array} \quad .$$

Resolvendo este sistema teremos a = 5/2 e b = -11/2. Nossa reta será dada por

$$y=\frac{1}{2}(5x-11)\quad .$$

Integrando esta função no intervalo [3, 5] teremos

$$\int_3^5 \frac{1}{2}(5\mathrm{x}-11)\,dx=\frac{1}{2}\left(5\int_3^5 x\,dx-11\int_3^5 dx\right)=\frac{1}{2}\left(5\,\frac{x^2}{2}\Big|_3^5-11\,x\Big|_3^5\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}(25-9)-11(5-3)\right)$$

ou seja

$$\int_3^5 \frac{1}{2}(5\mathrm{x}-11)\,dx=\frac{1}{2}(40-22)=\frac{18}{2}=9\quad .$$

Com o valor encontrado podemos escrever o cálculo de probabilidades como

$$P(a<X<b)=\frac{1}{9}\int_a^b \frac{1}{2}(5\mathrm{x}-11)\,dx=\frac{1}{18}\int_a^b (5\mathrm{x}-11)\,dx\quad .$$

b) Calcule a probabilidade P(3,1 < X < 4,3); (0,5)
Resolução:
Neste caso teremos

$$P(3{,}1<X<4{,}3)=\frac{1}{18}\int_{3,1}^{4,3}(5\mathrm{x}-11)\,dx\quad .$$

Observe que podemos usar os resultados parciais da integração feita no item a

$$\frac{1}{18}\int_{3,1}^{4,3}(5\mathrm{x}-11)\,dx=\frac{1}{18}\left(5\,\frac{x^2}{2}\Big|_{3,1}^{4,3}-11\,x\Big|_{3,1}^{4,3}\right)=\frac{1}{18}\left[\frac{5}{2}(18{,}49-9{,}61)-11(4{,}3-3{,}1)\right]$$

ou

$$\frac{1}{18}\int_{3,1}^{4,3}(5\mathrm{x}-11)\,dx=\frac{1}{18}\left(\frac{5}{2}\times 8{,}88-11\times 1{,}2\right)=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}\quad .$$

c) Calcule a probabilidade P(4 < X < 5).   (0,5)

$$\frac{1}{18}\int_4^5 (5\mathrm{x}-11)\,dx=\frac{1}{18}\left(5\,\frac{x^2}{2}\Big|_4^5-11\,x\Big|_4^5\right)=\frac{1}{18}\left[\frac{5}{2}(25-16)-11(5-4)\right]=\frac{1}{18}\left(\frac{5}{2}\times 9-11\right)$$

e finalmente

$$P(4<X<5)=\frac{23}{36}=0{,}6388\quad .$$

4 – Quinta questão (2,5 pontos)

Numa cidade se fez um levantamento do peso de seus habitantes adultos. Uma amostra considerada significativa (100 habitantes) deu como resultado 63,5 kg. No entanto, a média real não podia ser levantada no tempo da pesquisa pois a cidade tinha 53 200 habitantes adultos segundo o último recenseamento. Se estima que a variância seja de 38,44 kg^2.

Resolução:

Para os itens abaixo usaremos a fórmula

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[63{,}5-z_{\gamma/2}\frac{\sqrt{38{,}44}}{\sqrt{100}};63{,}5-z_{\gamma/2}\frac{\sqrt{38{,}44}}{\sqrt{100}}\right]$$

ou ainda

$$IC(\mu,\gamma)=\left[63{,}5-z_{\gamma/2}0{,}62;63{,}5-z_{\gamma/2}0{,}62\right]\quad .$$

a) Calcule o intervalo de confiança para a média verdadeira com coeficiente de confiança de 90%; (1,5 pontos)

$$IC(\mu,0{,}9)=\left[63{,}5-z_{0{,}45}0{,}62;63{,}5-z_{0{,}45}0{,}62\right]=\left[63{,}5-1{,}65\times0{,}62;63{,}5+1{,}65\times0{,}62\right]$$

então

$$IC(\mu,0{,}9)\approx\left[62{,}47;64{,}52\right]$$

b) Calcule o intervalo de confiança para a média verdadeira com coeficiente de confiança de 95%; (1,0 ponto)

$$IC(\mu,0{,}95)=\left[63{,}5-z_{0{,}475}0{,}62;63{,}5-z_{0{,}475}0{,}62\right]=\left[63{,}5-1{,}96\times0{,}62;63{,}5+1{,}96\times0{,}62\right]$$

e finalmente

$$IC(\mu,0{,}95)\approx\left[62{,}29;64{,}72\right]\quad .$$

5 – Quinta questão (1,0 ponto)

No laboratório de uma fábrica de cabos verificava-se o ponto que rompimento de uma amostra da produção. Dois metros de cabo era tracionado até o rompimento e constatou-se que o ponto de rompimento em relação aos extremos obedecia uma distribuição Uniforme. Calcule a probabilidade de rompimento da corda entre 0,5 metros e 0,8 metros, ou seja, P(0,5 < X 0,8). Suponha que a corda esteja presa de tal forma que consideremos o intervalo [0, 2] como o válido para a distribuição de probabilidade.

Resolução:

A distribuição Uniforme no intervalo [a,b]

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

nos dá para o cálculo da probabilidade o valor

$$P(c < X < d) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dx$$

onde c e d estão dentro do intervalo [a, b].

Para os parâmetros dados a função de distribuição será

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

dentro do intervalo [0, 2]. Para facilitar as contas, supus que a corda tem uma ponta fixada no ponto x = 0 e a outra no ponto x = 2. A probabilidade pedida será

$$P(0{,}5 < X < 0{,}8) = \int_{0{,}5}^{0{,}8} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{0{,}5}^{0{,}8} dx = \frac{1}{2} \left(x \Big|_{0{,}5}^{0{,}8} \right) = \frac{1}{4} (0{,}8 - 0{,}5) = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15 \quad .$$