Gabarito da AD1 de Probabilidade e Estatística
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
1° semestre de 2013

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1) (1,5 pontos) Conhece-se os resultados de pesquisas aplicadas aos funcionários do setor de contabilidade de duas empresas, apresentados a seguir, onde n_i é a frequência de ocorrência de cada valor e, para a variável escolaridade temos que:

1 significa que o funcionário tem o curso fundamental completo
2 significa que o funcionário tem o curso médio completo
3 significa que o funcionário tem o curso superior completo

Empresa A

	faixa salarial (em reais)	n_i	Escolaridade
1	300,00 |- 800,00	24	1
2	800,00 |- 1300,00	8	1
3	1300,00 |- 1800,00	18	2
4	1800,00 |- 2300,00	12	2
5	2300,00 |- 2800,00	5	3
6	2800,00 |- 3300,00	2	3
7	3300,00 |- 3800,00	2	3
8	3800,00 |- 4300,00	1	3
9	4300,00 |- 4800,00	3	3
10	4800,00 |- 5300,00	1	3
11	5300,00 |- 5800,00	1	3
12	5800,00 |- 6300,00	2	3
13	6300,00 |- 6800,00	5	3
14	6800,00 |- 7300,00	7	3
Total		91	

Empresa B

	faixa salarial (em reais)	n_i	escolaridade
1	300,00 |- 800,00	6	1
2	800,00 |- 1300,00	4	1
3	1300,00 |- 1800,00	2	2
4	1800,00 |- 2300,00	2	2
5	2300,00 |- 2800,00	2	2
6	2800,00 |- 3300,00	1	3
7	3300,00 |- 3800,00	1	3
8	3800,00 |- 4300,00	1	3
9	4300,00 |- 4800,00	1	3
10	4800,00 |- 5300,00	1	3
Total		21	

a) Comparando as duas empresas verifique como é a distribuição dos funcionários em relação à escolaridade nas 2 empresas (proporção de funcionários de nível fundamental, médio e superior). Calcule qual tem a maior proporção de funcionários que não concluíram o nível superior.

Solução:
Empresa A

Escolaridade	n_i	freq. relativa	fac
1	32	0,35	0,35
2	30	0,33	0,68
3	29	0,32	1,00
Total	91	1	-

Empresa B

Escolaridade	n_i	freq. relativa	fac
1	10	0,48	0,48
2	6	0,29	0,76
3	5	0,24	1,00
total	21	1,00	-

- Na empresa A 35% dos funcionários têm curso fundamental completo, 33% tem o curso médio completo e 32% têm o curso superior enquanto que na empresa B, 48% têm o curso fundamental completo, 29% têm o curso médio completo e apenas 24% completaram o curso superior.

- Em relação aos funcionários que não concluíram o nível superior (escolaridade 1 + escolaridade 2): na empresa B 76% dos funcionários não concluíram o curso superior e na empresa A 68% dos funcionários estão na mesma situação, ou seja somente com o curso fundamental ou médio completo.

b) Qual a média, dos salários dos funcionários com curso superior? E em que faixa salarial se encontram a moda e a mediana? (Considere para o cálculo da média, a média de salários da respectiva faixa).

Solução:
Empresa A
Os funcionários com nível superior, escolaridade 3, são 29 funcionários que vão da faixa salarial 5 até a faixa 14 na tabela, que pode ser reescrita como:

	n_i	escolaridade	salário médio por faixa (R$)
5	5	3	2550,00
6	2	3	3050,00
7	2	3	3550,00
8	1	3	4050,00
9	3	3	4550,00
10	1	3	5050,00
11	1	3	5550,00
12	2	3	6050,00
13	5	3	6550,00
14	7	3	7050,00
Total	29		

Assim, o cálculo da média salarial da empresa A pode ser dado por:

$$x_{obs} = \frac{\sum_{i=5}^{14} n_i x_i}{29} =$$

$$= \frac{5*2550,00+2*3050,00+2*3350,00+1*4050,00+3*4550,00+1*5050,00+1*5550,00+2*6050,00+5*6550,00+7*7050,00}{29} =$$

$$x_{obs} = \frac{148.450,00}{29} = 5118,97$$

Ou seja, a média salarial dos funcionários de nível superior da empresa A é R$5118,97. A moda dos salários está na faixa 1, com 24 funcionários e a mediana, posição 46, está na terceira faixa salarial, de R$ 1300,00 a R$1800,00.

Empresa B

Os funcionários com nível superior desta empresa, são 5 funcionários que vão da faixa salarial 6 a faixa 10 na tabela. Assim, o cálculo da média salarial da empresa B (mostrado agora como tabela) pode ser dado por:

	faixa salarial (em reais)	n_i	escolaridade	média em real (por faixa)	ni*média/faixa
6	2800,00 |- 3300,00	1	3	3050,00	3050,00
7	3300,00 |- 3800,00	1	3	3550,00	3550,00
8	3800,00 |- 4300,00	1	3	4050,00	4050,00
9	4300,00 |- 4800,00	1	3	4550,00	4550,00
10	4800,00 |- 5300,00	1	3	5050,00	5050,00
Total		5		Somatório=	20250,00

$$x_{obs} = \frac{\sum_{i=6}^{10} n_i x_i}{5} = 4050,00$$

Para a empresa B, o salário médio dos funcionários com nível superior é R$ 4050,00, a moda também está na faixa 1, com 6 funcionários e a mediana, posição 11, está na terceira faixa salarial, de R$ 1300,00 a R$1800,00.

2) (1,0 ponto) Uma companhia de seguros analisou a freqüência com que 2000 segurados (1000 homens e 1000 mulheres) usaram o hospital. Os resultados estão apresentados na tabela:

	Homens	Mulheres
Usaram o hospital	100	150
Não usaram o hospital	900	850

a) Qual a probabilidade de que uma pessoa segurada use o hospital?
Solução:
P = Número de pessoas que usam / número de pessoas seguradas, P = 250/2000.

b) O uso do hospital independe do sexo do segurado?
Solução:
A probabilidade de uma mulher usar é 150 mulheres/2000 pessoas.
A probabilidade de um homem usar é 100 homens/2000 pessoas.
Logo o uso depende do sexo escolhido.

3) (0,5 ponto) Dos funcionários de uma empresa, 60% são do sexo masculino, 30% tem curso superior completo, e 20% são do sexo masculino e tem curso superior completo. Se um funcionário é selecionado aleatoriamente, qual a probabilidade de que seja do sexo masculino ou tenha curso superior completo?

Solução:
Considere M: masculino, S: curso superior e MS: Masculino e Superior

$$P(M \cup S) = P(M) + P(S) - P(M \cap S) = 0{,}60 + 0{,}30 - 0{,}20 = 0{,}70$$

4) (1,0 ponto) A probabilidade de que as vendas de automóveis aumentem no próximo mês (A) é estimada em 0,40. A probabilidade de que aumentem as vendas de peças de reposição (R) é estimada em 0,50. A probabilidade de que ambas aumentem é de 0,10. Qual a probabilidade de que aumentem as vendas de automóveis durante o mês, dado que foi informado que as vendas de reposição aumentaram.

Solução:
Considera P(A) = 0,40 ; P(R) = 0,50 ; P(A ∩R) = 0,10 .
Como queremos P(A / R) , usamos a fórmula :
P(A / B) = P(A ∩B) / P(B) → P(A / R) = P(A ∩R) / P(R) = 0,10 / 0,50 = 0,20.

5) (0,5 ponto) Uma máquina produz um equipamento eletrônico que pode apresentar nenhum, um, dois, três ou quatro defeitos, com probabilidades 90%, 4%, 3%, 2% e 1%, respectivamente. O preço de venda de um equipamento perfeito é de R$ 20,00 e, à medida que apresente defeitos, o preço cai 50% para cada defeito apresentado. Qual é a esperança do preço médio de venda desse equipamento?

Solução:
A distribuição é:

Defeito	x_i	$P(x_i)$	$x_i \cdot P(x_i)$
0	20,00	0,90	18
1	10,00	0,04	0,4
2	5,00	0,03	0,15
3	2,50	0,02	0,05
4	1,25	0,01	0,0125
Σ	1	18,6125	

Logo o preço médio de venda será:

$$\mu = E(X) = \sum x_i P(x_i) = 18 + 0{,}4 + 0{,}15 + 0{,}05 + 0{,}0125 = 18{,}61$$

6) (1,0 ponto) Uma urna contém 16 bolas brancas e 14 pretas. Calcular a probabilidade de ao serem retiradas 5 bolas, 3 serem brancas, quando a amostragem for:

a) com reposição

Solução:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{8}{15}\right)^{3}\left(1-\frac{8}{15}\right)^{5-3} = 0{,}33$$

b) sem reposição

Solução:

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{16}{3}\binom{30-16}{5-3}}{\binom{30}{5}}=0{,}35$$

7) (0,5 ponto) De 6 trabalhadores de uma determinada fábrica, 3 trabalham há mais de cinco anos ou mais. Se quatro trabalhadores são aleatoriamente escolhidos deste grupo de seis, qual a probabilidade de que dois estejam na companhia há cinco ou mais anos?

Solução:

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\binom{6-3}{4-2}}{\binom{6}{4}}=0{,}6$$

8) (1,0ponto) A probabilidade de um indivíduo sofrer uma reação alérgica, resultante da injeção de determinado soro é de 0,01. Determinar a probabilidade de entre 200 indivíduos, submetidos a este soro, nenhum sofrer reação alérgica.

Solução: Usaremos a distribuição de Poisson, onde n = 200, p = 0,01 e λ = n p = 2

$$P(X=x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(X=0)=\frac{2^{0}e^{-2}}{0!}= e^{-2}=0{,}13$$

9) (1,0 ponto) Um casal quer muito ter um filho mas precisará recorrer a técnica de inseminação artificial. Sabe-se que a eficiência da referida técnica é de 0,20 e o custo de cada inseminação U$ 2000,00.

a) Qual a probabilidade de que o casal obtenha êxito na terceira tentativa?
Solução:

$$P(X = k) = p\, q^{k-1}$$

$$P(X = 3) = (0{,}2)(0{,}8)^2 = 0{,}13$$

b) Qual o custo esperado deste casal para obter o primeiro filho?
Solução:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}2} = 5$$

Então, o custo esperado para obter o primeiro filho é de 5 x R$ 2.000,00, isto é R$ 10.000,00.

10) (1,0 ponto) No fichário de um hospital, estão arquivados os prontuários de 20 pacientes, que deram entrada no PS apresentando algum problema cardíaco. Destes, 5 sofreram infarto. Retirando-se uma amostra ao acaso de 3 destes prontuários, qual a probabilidade de que dois deles sejam de pacientes que sofreram infarto?

Solução:

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{20-5}{3-2}}{\binom{20}{3}} = 0{,}13$$

11) (1,0 ponto) Em uma cidade onde carros têm que ser avaliados para controle de emissão de poluentes, 25% de todos os carros testados emitem quantidades excessivas de poluentes. No entanto, o teste não é perfeito e pode indicar resultados errados. Desta forma, carros que emitem excesso de poluentes podem não ser detectados pelo teste e carros que não emitem excesso de poluentes podem ser considerados erroneamente fora do padrão de emissão. Quando efetivamente testados, 99% dos carros fora do padrão são detectados e 17% dos carros em bom estado são considerados fora do padrão por erro do teste. Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste emita realmente excesso de poluentes?

Solução:

Seja T o evento “carros emitem quantidades excessivas de poluentes” e B o evento “carro dentro das normas de emissão de poluentes”

$$P(T) = 0{,}25 \ \ e \ \ P(B) = 0{,}75$$

Seja E o evento “carro reprovado no teste”.

$P(E/T) = 0{,}99 \ \ e \ \ P(E/B) = 0{,}17$ e queremos $P(T\ /\ E) = ?$

Segundo o Teorema de Bayes, temos :

$$P(T\ /\ E) = \frac{P(E \cap T)}{P(E)} = \frac{P(E/T)P(T)}{P(E)}$$

$$P(E) = P(E/T)\ \ P(T) + P(E/T^c)\ \ P(T^C) = 0{,}99\ \times 0{,}25 + 0{,}75\ \times 0{,}17$$
$$= 0{,}2475 + 0{,}1275 = 0{,}375$$

$$P(T/E) = \frac{P(E/T)\ \ P(T)}{P(E)} = \frac{0{,}99\ \times 0{,}25}{0{,}375} = \frac{0{,}2475}{0{,}375} = 0{,}66$$