Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 1° semestre de 2018
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia de Paula Toledo

1 - Primeira questão (2,0 pontos)
Uma função densidade de uma variável aleatória é dada por um triângulo que tem seus vértices nos pontos (0;0), (1,5; *a*), (2; 0). Fora do intervalo [0, 2] a função é nula.
a) Determine o valor de *a* de forma que tenhamos de fato uma densidade de probabilidade (0,5 pontos)
Resolução: Existem várias maneiras de calcular a integral relativa a este triângulo. Uma maneira é usar diretamente a fórmula que dá a área de um triângulo dados os vértices, ou seja

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad ,$$

ou seja, a área é a metade do módulo do determinante da matriz apresentada acima e $(x_{1,}y_1),(x_{2,}y_2),(x_{3,}y_3)$ **são as coordenadas dos vértices. Para nossos dados teremos**

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1,5 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a \quad ,$$

portanto para termos o triângulo como distribuição de probabilidade, a deverá ser igual a 1.

Outra maneira é fazendo o desenho do triângulo que nos dará que a altura do triângulo é *a* **e a base é 2. Assim a área do triângulo será**

$$A=\frac{1}{2}B\times h=\frac{1}{2}2\times a=1 \quad .$$

Outra ainda (mais útil para o encaminhamento da questão) é achar as equações das retas que constituem o triângulo. Como a equação da reta é dada por

$$y=\alpha x+\beta \quad ,$$

para os pontos (0; 0) e (1,5; a) teremos as equações

$$0=\alpha\times 0+\beta \quad e \quad a=\alpha\times 1,5+\beta \quad .$$

Da primeira equação tiramos que $\beta=0$ **. Com esta informação e a segunda equação tiramos que** $\alpha=\frac{2}{3}a$ **. A equação será**

$$y=\frac{2}{3}a\,x\,;\,x\in[0,\frac{3}{2}]$$

que foi colocado em frações para facilitar a notação e as contas.

A segunda reta é dada pelos pontos (3/2, a) e (2, 0) e, portanto, teremos as equações

$$a=\alpha\times\frac{3}{2}+\beta \quad e \quad 0=\alpha\times 2+\beta \quad .$$

Da segunda equação temos que $\beta=-2\alpha$ **a que substituída na primeira equação nos dá** $\alpha=-2\alpha$ **e, portanto,** $\beta=4a$ **. A equação será**

$$y=-2\,x\,a+4\,a=2\,a(2-x)\,;\,x\in[3/2,2] \quad .$$

Integremos e

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{3/2}\frac{2}{3}x\,dx+\int_{3/2}^{2}a(-2\,x+4)dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}x\,dx-2\,a\int_{3/2}^{2}x\,dx+4\,a\int_{3/2}^{2}dx=\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{3/2}-2\,a\frac{x^2}{2}\Big|_{3/2}^{2}+4\,a\Big|_{3/2}^{2} \quad ,$$

ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^2-a\left[2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+4\,a\left(2-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}-(4-\frac{9}{4})+4\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+a\frac{1}{4} \quad .$$

Para ser distribuição de probabilidade é necessário que o valor obtido acima seja 1, logo a = 1 e as equações serão

$$y=\frac{2}{3}x\,;\,x\in[0,\frac{3}{2}] \quad \textbf{e} \quad y=-2\,x+4=2(2-x);\,x\in[3/2,2] \quad .$$

b) Calcule o valor médio da distribuição encontrada (0,5 ponto);

Resolução:

Pela definição de média teremos

$$\mu=\int_a^b x\,f(x)dx=\int_0^{3/2}\frac{2}{3}x^2dx+\int_{3/2}^{2}x(-2\,x+4)dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}x^2dx-2\int_{3/2}^{2}x^2dx+4\int_{3/2}^{2}x\,dx$$

ou

$$\mu=\frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{3/2}-2\frac{x^3}{3}\Big|_{3/2}^{2}+4\frac{x^2}{2}\Big|_{3/2}^{2}=\frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{2}{3}\left[2^3-\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]+2\left[2^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]=\frac{2}{9}\frac{27}{8}-\frac{2}{3}\left(8-\frac{27}{8}\right)+2\left(4-\frac{9}{4}\right)$$

e finalmente

$$\mu=\frac{3}{4}-\frac{37}{12}+\frac{7}{2}=\frac{7}{6}\approx 1{,}6667 \quad .$$

c) Calcule a variância da distribuição encontrada (0,5 ponto);

Resolução:

Pela definição de variância para distribuições contínuas, ou seja,

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2 \quad ,$$

calculemos a integral, ou seja,

$$\int_a^b x^2 f(x)dx=\int_0^{3/2}\frac{2}{3}x^3\,dx+\int_{3/2}^{2}x^2(-2x+4)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}x^3dx-2\int_{3/2}^{2}x^3\,dx+4\int_{3/2}^{2}x^2\,dx\quad ,$$

o que nos leva a

$$\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}\Big|_0^{3/2}-2\frac{x^4}{4}\Big|_{3/2}^{2}+4\frac{x^3}{3}\Big|_{3/2}^{2}=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^4-\frac{1}{2}\left[2^4-\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]+\frac{4}{3}\left[2^3-\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]=\frac{1}{6}\frac{81}{16}-\frac{1}{2}\left(16-\frac{81}{16}\right)+\frac{4}{3}\left(8-\frac{27}{8}\right)$$

ou ainda

$$\frac{27}{32}-\frac{175}{32}+\frac{37}{6}=\frac{37}{24}\approx 1{,}5417$$

Assim a variância será dada portanto

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2=\frac{37}{24}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{13}{72}\approx 0{,}1806$$

d) Calcule a moda desta distribuição encontrada (0,5 ponto).

Resolução:

Pela definição de moda, esta distribuição é monomodal e o valor é 3/2, que é o ponto onde a distribuição toma seu maior valor.

2 – Segunda questão (1,5 pontos)

Verifique se as expressões abaixo são funções de probabilidade. Caso alguma não seja devido à constante de normalização, apresente a função normalizada.

a) $f(x)=x^2-x+1\,;\,x\in[0{,}3]$ (0,5 ponto);

Resolução:

Um breve exame da função assegura que ela é positiva dentro do intervalo especificado. Por exemplo, o ponto de mínimo ou máximo de um polinômio do segundo grau é dado por

$-\frac{b}{2a}$ **e neste ponto o polinômio vale** $-\frac{\Delta}{4}a=\frac{4ac-b^2}{4a}$ **.**

O ponto será de mínimo se o termo se a **for positivo e se máximo se** a **for negativo.**
Substituindo os valores do problema teremos $x=1/2$ **para o ponto de mínimo, pois** *a = 1* **e neste ponto o polinômio vale** $y=(4-1)/4=3/4$ **. Portanto, esta função será sempre positiva.**
Integremos

$$\int_0^3(x^2-x+1)dx=\int_0^3 x^2\,dx-\int_0^3 x\,dx+\int_0^3 dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3-\frac{x^2}{2}\Big|_0^3+x\Big|_0^3=\frac{3^3}{3}-\frac{3^2}{2}+3=9-\frac{9}{2}+3=\frac{15}{2}\quad .$$

Para ser uma de distribuição temos que normalizá-la, ou seja, a expressão abaixo é uma distribuição de probabilidade,

$$f(x)=\frac{2}{15}(x^2-x+1)\,;\,x\in[0{,}3]\quad .$$

b) $f(x)=x^3+x^2-x\,;\,x\in[-3{,}3]$ (0,5 ponto);

Resolução:

Observe que a função acima toma valores negativos próximo ao valor zero. Por exemplo, em $f(1/2)=-1/8$ **. Logo, não é uma distribuição de probabilidade.**

c) $f(x)=sen(x)\cos(x); x\in[0,\pi/2]$ (0,5 ponto).

Resolução:

Tanto seno como cosseno são não negativos dentro do intervalo portanto, o produto também será. Integremos

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)\cos(x)\,dx=-\cos^2\frac{(x)}{2}\Big|_0^{\pi/2}=-\frac{1}{2}\left[\cos^2(\pi/2)-\cos^2(0)\right]=-\frac{1}{2}(0-1)=\frac{1}{2}\ .$$

Para termos uma distribuição de probabilidade teremos que normalizar por este fator, ou seja,

$$f(x)=2\,sen(x)\cos(x); x\in[0,\pi/2]$$

é distribuição de probabilidade.

3 – Terceira questão (2,0 pontos)

Foi obtido os seguintes números de votos para seções eleitorais em um bairro de uma cidade.

Seção	123	124	125	126	127	128	129	130
Votos	489	380	312	375	310	377	478	415

a) Calcule os estimadores para a média e para a variância para estas urnas. Use estimadores não viciados e consistentes. (1,0 ponto)

Resolução:

Usaremos o estimador dado por

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i$$

que é não viciado e consistente. Para os valores acima teremos

$$\hat{\mu}=\frac{1}{8}\sum_1^8 x_i=\frac{(489+380+312+375+310+377+478+415)}{8}=\frac{3136}{8}=392\ .$$

Para o estimador da variância usaremos

$$\sigma^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2-n\bar{X}^2\right)\ .$$

Teremos

$$\sum_1^8 x_i^2=489^2+380^2+312^2+375^2+310^2+377^2+478^2+415^2=1260428$$

o que nos permitirá escrever, tomando a estimativa para a média que determinamos,

$$\sigma^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^n X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{7}(1260428-8\times392^2)=\frac{31116}{7}\approx4445,1429\ .$$

b) Calcule o intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança de 92%. (1,0 ponto)

Resolução:
O intervalo de confiança é dado portanto

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] .$$

Usando os valores obtidos anteriormente, teremos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{4445,1429}}{\sqrt{8}}\approx 23,5721 \quad \textbf{e} \quad z_{\gamma/2}=z_{0,46}=1,75 \quad .$$

Assim teremos

$$IC(\mu,\gamma)=[392-1,75\times 23,5721\,;\,392+1,75\times 23,5721]\approx[351\,;\,433] ,$$

já que tratamos de votos.

4 – Quarta questão (1,0 ponto)
Num lote de 1000 tijolos foi retirada uma amostra aleatória de 20 unidades. Suponha que este lote será aceito se os comprimentos dos tijolos desta amostra variarem entre 17,9 cm e 18,8 cm. O fabricante afirma que a média de comprimento dos tijolos é de 18,2 cm e 8 cm de desvio padrão. Calcule a probabilidade dos tijolos se encontrarem dentro da faixa de valores requisitada. Suponha que é possível usar a distribuição Normal.
Resolução:
Aqui temos a aplicação direta da probabilidade dada pela distribuição Normal dada uma amostra, ou seja,

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) .$$

Substituindo pelos valores do problema teremos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{8}{\sqrt{20}}\approx 1,7889$$

que resulta em

$$P(17,9<X<18,8)=P\left(\frac{17,9-18,2}{1,7889}<Z<\frac{18,8-18,2}{1,7889}\right)=P(-0,1677<Z<0,3354)\approx P(-0,17<0,34)$$

ou seja,

$$P(17,9<X<18,8)\approx P(0,17<Z)+P(0,34<Z)=0,0675+0,1331=0,2006 \quad .$$

5 – Quinta questão (1,0 ponto)
Estava em preparo um teste de durabilidade de uma nova fechadura que segue um novo padrão de segurança. O teste supõe que a durabilidade será tal que não será necessária nenhuma manutenção a não ser lubrificações periódicas. O fabricante supos que a durabilidade da fechadura obedecesse uma distribuição Normal. Esta suposição funcionou bem com uma linha similar de fechaduras e usou-se como referência que a variância era de 14,4 anos^2. Pergunta-se: qual deverá ser o tamanho da amostra para que a amplitude do intervalo de 95% de confiança para a vida média seja de 8 anos?

Resolução:
O intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

O que é pedido efetivamente está relacionado com a amplitude de intervalo na estimativa do intervalo de confiança, ou seja,

$$A=2z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,$$

ou seja, queremos

$$n=\left(2z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{A}\right)^2.$$

Para os valores estabelecidos pelo problema teremos

$$n=\left(2\times z_{0,95/2}\frac{\sqrt{14,4}}{8}\right)^2=\left(\frac{1,96\times 3,7947}{4}\right)^2=1,8594^2\approx 3,4574$$

Como vemos, pelos valores dados, é necessário apenas três amostras, já que não tem sentido amostras fracionárias.

6 – Sexta questão (2,5 pontos)
Calcule as seguintes probabilidades.

a) P(0,35<X<1,42) para a distribuição de probabilidade da primeira questão;
Resolução:

$$P(0,35<X<1,42)=\int_{0,35}^{1,42}\frac{2}{3}x\,dx$$

pois a segunda parte da distribuição não participa do intervalo onde foi solicitada a probabilidade.

$$P(0,35<X<1,42)=\frac{2}{3}\int_{0}^{3/2}x\,dx=\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_{0,35}^{1,42}=\frac{1,42^2-0,35^2}{3}=\frac{2,0164-0,1225}{3}=0,6313$$

b) P(0,35<X<1,42) para a distribuição Normal de média 1,52 e variância 2,18;
Resolução:
Aqui teremos

$$P(0,35<X<1,42)=P\left(\frac{0,35-1,52}{\sqrt{2,18}}<Z<\frac{1,42-1,52}{\sqrt{2,18}}\right)=P\left(\frac{-1,17}{1,4765}<Z<\frac{-0,1}{1,4765}\right)=P(-0,7924<Z<-0,0677)$$

e então

$$P(0,35<X<1,42)\approx P(-0,79<Z<-0,07)=P(0,79<Z)-P(0,07<Z)=0,2852-0,0279=0,2573\quad.$$

c) P(1,42<X<3,23) para a distribuição Normal de média 1,52 e desvio padrão 3,2;

Resolução:

$$P(1,42<X<3,23)=P\left(\frac{1,42-1,52}{3,2}<Z<\frac{3,23-1,52}{3,2}\right)=P\left(\frac{-0,1}{3,2}<Z<\frac{1,71}{3,2}\right)=P(-0,0313<Z<0,5344)$$

ou

$$P(1,42<X<3,23)\approx P(-0,03<Z<0,53)=P(0,03<Z)+P(0,53<Z)=0,0120-0,2019=0,2139 \quad .$$

d) P(0,35>X>1,42) para uma distribuição de Exponencial com $\alpha=1,52$;

Resolução:

Usaremos

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b} \quad .$$

Aqui teremos

$$P(0,35>X>1,42)=1-P(0,35<X<1,42)=1-e^{-1,52\times 0,35}+e^{-1,52\times 1,42}=1-e^{-0,532}+e^{-2,1584}$$

ou

$$P(0,35>X>1,42)\approx 0,5281 \quad .$$

e) P(0,35<X<3,23) para uma distribuição uniforme no intervalo [0, 5].

Resolução:

$$P(0,35<X<3,23)\frac{1}{5-0}\int_{0,35}^{3,23} dx=\frac{1}{5}(3,23-0,35)=\frac{2,88}{5}=0,576$$

Atenção:

I) Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

II) As respostas da AD serão digitadas no editor de sua conveniência e após isto gerado um arquivo de formato pdf que será enviado como resposta de suas questões. Digitalizações de material escrito não serão aceitos e terão nota zero como resultado;

II) Todos os cálculos deverão ser feitos com pelo menos quatro casas decimais e arrendondados para duas APENAS ao final, seja na lista ou na prova.

III) Tenha cuidado quanto a notação. Caso não a siga, você terá pontos descontados, seja na lista ou na prova.

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.