Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
GABARITO da AP3 1° semestre de 2011

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Questão 1- (2,5 pontos)

Num aquário de um instituto de pesquisa pesquisadores acompanham o crescimento de 20 peixes de água doce, 12 da espécie A e 8 da espécie B, avaliando periodicamente seus pesos e tamanhos. Num determinado dia de avaliação três peixes forem capturados de uma única vez. Utilize um modelo de probabilidade para determinar a probabilidade de:

a) Todos serem da espécie A

Resposta:

Dados do problema:

20 peixes – 12 de A e 8 de B.

Modelo Hipergeométrico

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Tamanho da população n= 20

Tamanho da amostra r = 3

Sucesso (espécie A) m = 12

Sucesso amostra k = 3

$$P(X=3)=\frac{\binom{12}{3}\binom{20-12}{3-3}}{\binom{20}{3}}=\frac{220*1}{1140}=0{,}193$$

b) Pelo menos 1 ser da espécie A.

Resposta:

Sucesso amostra k =1 ou k=2 ou k=3 (k ≥ 1)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\binom{12}{0}\binom{20-12}{3-0}}{\binom{20}{3}} = 1 - \frac{1 * 56}{1140} = 0{,}951$$

Questão 2- (2,5 pontos)

Uma fábrica tem 278 funcionários classificados de acordo com a tabela abaixo:

Idade	Sexo		**TOTAL**
	Masculino (M)	Feminino (F)	
< 25 anos (A)	40	50	**90**
25-35 anos (B)	43	43	**86**
> 35 anos (C)	57	45	**102**
TOTAL	**140**	**138**	**278**

Uma pessoa que trabalha nesta fábrica é escolhida ao acaso. Calcule as seguintes probabilidades: P(M), P(B), P(A ∩ F), P(C U M), P(B / F), P(M / A). Os eventos A e F são independentes?

Resposta:

$$P(M) = \frac{140}{278} = 0{,}5036 \rightarrow 50{,}36\%$$

$$P(B) = \frac{86}{278} = 0{,}3093 \rightarrow 30{,}93\%$$

$$P(A \cap F) = \frac{50}{278} = 0{,}1799 \rightarrow 17{,}993\%$$

$$P(C \cup M) = P(C) + P(M) - P(C \cap M) = \frac{102 + 140 - 57}{278} = 0{,}6655 \rightarrow 66{,}55\%$$

$$P(B / F) = \frac{P(B \cap F)}{P(F)} = \frac{43}{138} = 0{,}3116 \rightarrow 31{,}16\%$$

$$P(M / A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{40}{90} = 0{,}4444 \rightarrow 44{,}44\%$$

Como $P(A / F) = \frac{50}{138} = 0{,}3623 \neq P(A) = \frac{90}{278} = 0{,}3237$, os eventos não são independentes.

Questão 3 - (2,0 pontos)

Numa eleição concorriam dois candidatos, A e B. Um deles, o candidato A, obteve 60% dos votos.

Resposta:

Partiremos da suposição que podemos usar a distribuição Normal. Sendo assim, a probabilidade será dada por

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

portanto, necessitamos de calcular a média e variância amostrais. A proporção amostral da votação, p, foi de 60%, ou seja, p = 0,6. Assim teremos

$$\sigma^2 = p\frac{(1-p)}{n} = 0{,}6\frac{(1-0{,}6)}{1006} = 0{,}000238 \Rightarrow \sigma = 0{,}0154$$

e para a média amostral $\mu = 0{,}6 \times 1006 = 603{,}6$.

Com estes valores resolveremos os itens solicitados.
Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade do candidato A ter conseguido entre 590 e 620 votos de 1006 votos numa seção eleitoral julgada representativa do eleitorado? (1,0 ponto)

Resposta:

$$P(590 \le X \le 620) = P\left(\frac{590-603{,}6}{0{,}0154} \le Z \le \frac{620-603{,}6}{0{,}0154}\right) = P(-883{,}1 \le Z \le 1064{,}9) \approx 1 \text{ .}$$

b) Qual a probabilidade do candidato B ter conseguido o mesmo número de votos? (1,0 ponto)

Resposta:

Por complementaridade a probabilidade do candidato B conseguir a mesma votação é nula.

Questão 4 - (1,5 pontos)

Uma amostra de 10 pinos de madeira forneceu uma média de 4,7 cm de comprimento e uma variância amostral de 2,7 cm^2. Qual é a estimativa para a média (intervalo de confiança) de toda a produção se baseando nesta amostra e com um coeficiente de confiança de 95%?

Resposta:

A definição de intervalo de confiança é

$$IC(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

onde aqui temos

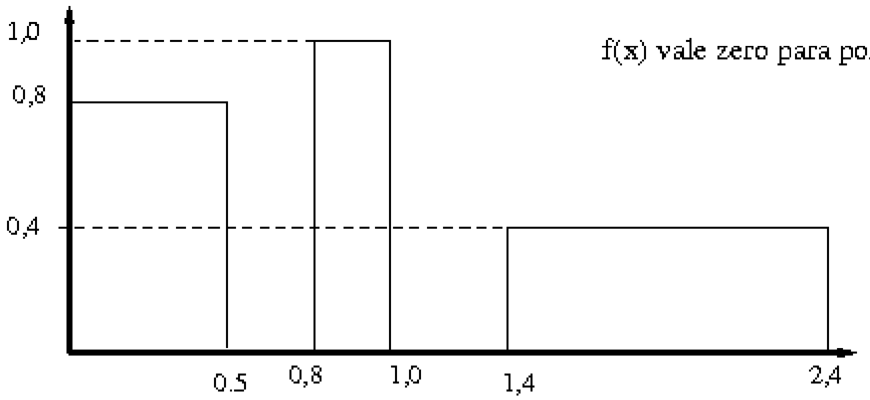
$$\bar{X}=4,7\ ;\ \frac{\sigma^2}{10}=0,27\Rightarrow\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\approx 0,519\ ;\ z_{\gamma/2}=z_{0,95/2}=z_{0,475}\approx 1,96$$

Assim teremos

$$IC(\mu,\gamma)=[4,7-1,96\times 0,519\ ;\ 4,7+1,96\times 0,519]=[3,682\ ;\ 5,717]\ .$$

Questão 5 - (1,5 pontos)

Dado o gráfico abaixo:



a) Prove que f(x) é uma densidade (0,5 ponto)

Resposta:

As partes não nulas da função se constituem de três retângulos e, portanto, a integral da função é a soma das áreas destes retângulos. Além disto, por inspeção do gráfico temos que os valores tomados pela função são não negativos. Verifiquemos o valor da área total da função. Examinando o gráfico e coletando dele as bases e alturas dos retângulos teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=0,5\times 0,8+0,2\times 1+1\times 0,4=0,4+0,2+0,4=1$$

b) Calcule o valor médio (0,5 ponto)

Resposta:

A definição de valor médio é dada por

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

que para o caso de nossa distribuição teremos a expressão

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{0}^{0,5} x \times 0,8\, dx + \int_{0,8}^{1,0} x \times 1\, dx + \int_{1,4}^{2,4} x \times 0,4\, dx$$

pois nos intervalos [0,5; 0,8] e [1,0; 1,4] a distribuição é nula, assim como fora do intervalo [0; 2,4]. Teremos então

$$\mu = 0,8\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,5} + 1\,\frac{x^2}{2}\Big|_{0,8}^{1} + 0,4\,\frac{x^2}{2}\Big|_{1,4}^{2,4} = 0,4 \times 0,25 + \frac{1-0,64}{2} + 0,4 \times \frac{5,76-1,96}{2} = 1,04$$

c) Calcule a moda (0,5 ponto)

Resposta:
Como a moda é o valor para o qual a distribuição tem seu maior valor, temos que esta distribuição é multimodal e qualquer valor no intervalo [0,8; 1,0] é moda da distribuição.