Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 1° semestre de 2013

1 - Primeira questão (2,5 pontos)

Verifique se as expressões a seguir são funções densidade de probabilidade, supondo que elas se anulam fora dos intervalos especificados. Caso o problema seja da distribuição não ser normalizada, normalize e apresente a distribuição obtida.

Em todas as questões usaremos que para que uma função num intervalo [a, b] seja densidade de probabilidade é necessário que ela seja não negativa dentro do intervalo e que seja normalizada, ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

ou ainda, que a área sob a curva no intervalo seja igual a 1.

a. $f(x)=3x$, se $1/2 \le x \le 1/2$.

Resolução:
Observe que a função é não nula no intervalo. No entanto, o intervalo se constitui de um único ponto e, portanto, a área é nula e, é claro, que não faz sentido normalizá-la. Logo, esta não é uma distribuição de probabilidade.

b. $f(x)=x^3/4$, se $0 \le x \le 2$.

Resolução:
Claramente a função é não negativa dentro do intervalo dado. Apliquemos a fórmula diretamente

$$\int_0^2 \frac{x^3}{4}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 x^3 dx = \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = \frac{1}{16}\left(2^4 - 0\right) = \frac{16}{16} = 1 \quad ,$$

ou seja, esta função é densidade de probabilidade dentro do intervalo onde está definida.

c. $f(x)=(x-3)/2$, se $3 \le x \le 5$.

Resolução:
Observe que a função é linear valendo zero num extremo do intervalo e 1 no outro extremo. Temos que ela é não negativa. Integremos diretamente

$$\int_3^5 \frac{x-3}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int_3^5 x\,dx-3\int_3^5 dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_3^5-3x\Big|_3^5\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{25-9}{2}-3(5-3)\right]=\frac{1}{2}(8-6)=1 \quad ,$$

ou seja, temos mais uma função de distribuição de probabilidade. No entanto, observe que se você tivesse feito um gráfico você constataria que a função no intervalo é um triângulo de altura 1 e base 2, ou seja, tem área 1.

d. $f(x)=2 \;,\; se \;\; 0\leq x \leq 2.$

Resolução:
É claro que a função é não negativa. Integrando no intervalo dado teremos

$$\int_0^2 2\,dx=2\int_0^2 dx=2x\Big|_0^2=2(2-0)=4 \quad ,$$

portanto, esta função não é distribuição de probabilidade. No entanto, o valor encontrado (4) é a constante de normalização. Se dividirmos a função original por este fator então teremos uma distribuição de probabilidade no intervalo dado, ou seja,

$$f(x)=\frac{1}{2}$$

é distribuição de probabilidade no intervalo [0, 2]. Da mesma forma que no item anterior, o valor da integral obtida é facilmente calculada se você observar que a função originalmente dada forma no intervalo um quadrado de lado dois, sendo a área igual a 4.

e. $f(x)= \begin{array}{l} x/2,\; se \;\; 0\leq x \leq 1; \\ -(x-4)/6,\; se \;\; 1\leq x \leq 4. \end{array}$

Resolução:
Apliquemos a integral à função dada,

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{x}{2}\,dx+\int_1^4 -\left(\frac{x-4}{6}\right)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{6}\int_1^4 (x-4)\,dx$$

ou

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^4 x\,dx-\int_1^4 4\,dx\right)=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4\right)$$

e finalmente

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\frac{1-0}{2}-\frac{1}{6}\left[\frac{16-1}{2}-4(4-1)\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left(\frac{15}{2}-12\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1 \quad ,$$

ou seja, esta função é distribuição de probabilidade. Novamente, este item poderia ser resolvido graficamente.

2 – Segunda questão (1,5 pontos)

A função apresentada abaixo é uma distribuição de probabilidade. Calcule qual é a média, a variância e a moda desta distribuição.

$$f(x) = \begin{cases} (2+x)/4, & se\ -2 \le x \le 0; \\ (2-x)/4, & se\ 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Facilitará a compreensão fazer um gráfico.
Resolução:
A definição de média e variância são

$$\mu = \int_a^b x f(x)\,dx \quad ; \quad \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 ; E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx \quad .$$

Calculemos a média

$$\mu = \int_{-2}^{2} x f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x\,\frac{2+x}{4}\,dx + \int_{0}^{2} x\,\frac{2-x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0} x(2+x)\,dx + \int_{0}^{2} x(2-x)\,dx\right]$$

ou

$$\mu = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0} 2x\,dx + \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{2} 2x\,dx - \int_{0}^{2} x^2\,dx\right] = \frac{1}{4}\left[x^2|_{-2}^{0} + \frac{x^3}{3}|_{-2}^{0} + x^2|_{0}^{2} - \frac{x^3}{3}|_{0}^{2}\right]$$

ou ainda

$$\mu = \frac{1}{4}\left[(0-4) + \frac{0+8}{3} + (4-0) - \frac{8-0}{3}\right] = \frac{1}{4}\left(-4 + \frac{8}{3} + 4 - \frac{8}{3}\right) = 0 \quad ,$$

ou seja, a média está na origem, o que pode ser observado se você fez o gráfico.
Calculemos agora a variância.

$$E(x^2) = \int_{-2}^{2} x^2 f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,\frac{2+x}{4}\,dx + \int_{0}^{2} x^2\,\frac{2-x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0} x^2(2+x)\,dx + \int_{0}^{2} x^2(2-x)\,dx\right]$$

que seguindo os cálculos, obtemos

$$E(X^2) = \frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0} 2x^2\,dx + \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{2} 2x^2\,dx - \int_{0}^{2} x^3\,dx\right] = \frac{1}{4}\left[2\frac{x^3}{3}|_{-2}^{0} + \frac{x^4}{4}|_{-2}^{0} + 2\frac{x^3}{3}|_{0}^{2} - \frac{x^4}{4}|_{0}^{2}\right]$$

finalmente

$$E(X^2) = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}(0+8) + \frac{0-16}{4} + \frac{2}{3}(8-0) - \frac{(16-0)}{4}\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{3} - 4 + \frac{16}{3} - 4\right) - \frac{1}{4}\frac{8}{3} = \frac{2}{3} \quad .$$

Com estes resultados obtemos que a variância vale

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{2}{3} - 0 = \frac{2}{3}$$

3- Terceira questão (2,0 pontos)
Calcule as probabilidades abaixo.

a) P(X > 4) supondo que a distribuição é uniforme no intervalo [1,6]. (0,5)
Resolução:
A distribuição uniforme é definida por

$f(x) - \frac{1}{b-a};\, a \leq x \leq b$ **sendo nula fora do intervalo [a, b]. Neste caso particular teremos**

$$f(x) - \frac{1}{6-1} = \frac{1}{5};\, 1 \leq x \leq 6 \quad .$$

Pela definição de probabilidade de uma distribuição contínua, ou seja,

$$P(a > X > b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

teremos

$$P(X > 4) = \int_4^6 \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\int_4^6 dx = \frac{1}{5} x|_4^6 = \frac{1}{5}(6-4) = \frac{2}{5} \quad .$$

Esta distribuição é tão simples que podemos calculá-la a partir do seu gráfico.

b) P(1,12 < X < 3,23) supondo que a distribuição segue o modelo Exponencial com $\alpha = 1{,}17$.
Resolução:
No caso específico da distribuição Exponencial teremos a probabilidade dada por

$$P(a < X < b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$$

que no caso solicitado será

$$P(1{,}12 < X < 3{,}23) = e^{-1{,}17 \times 1{,}12} - e^{-1{,}17 \times 3{,}23} = e^{-1{,}3104} - e^{-3{,}7791} = 0{,}26971 - 0{,}02284 = 0{,}24687$$

c) P(-1,34 < X < 1,51) supondo que a distribuição é a da segunda questão.
Resolução:
Aqui a probabilidade será dada por

$$P(-1{,}34 < X < 1{,}51) = \int_{-1{,}34}^{1{,}51} f(x)\,dx = \int_{-1{,}34}^{0} \frac{2+x}{4}\,dx + \int_0^{1{,}51} \frac{2-x}{4}\,dx = \frac{1}{4}\left[\int_{-1{,}34}^{0} (2+x)\,dx + \int_0^{1{,}51} (2-x)\,dx\right]$$

e seguindo os mesmos passos que fizemos na questão 2, obtemos

$$P(-1{,}34<X<1{,}51)=\frac{1}{4}\left[2\int_{-1{,}34}^{0}dx+\int_{-1{,}34}^{0}x\,dx+2\int_{0}^{1{,}51}dx-\int_{0}^{1{,}51}x\,dx\right]$$

e então

$$P(-1{,}34<X<1{,}51)=\frac{1}{4}\left[2x\Big|_{-1{,}34}^{0}+\frac{x^2}{2}\Big|_{-1{,}34}^{0}+2x\Big|_{0}^{1{,}51}-\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1{,}51}\right]$$

ou

$$P(-1{,}34<X<1{,}51)=\frac{1}{4}\left[2(0+1{,}34)+\frac{0-(1{,}34)^2}{2}+2(1{,}51-0)-\frac{(1{,}51^2-0)}{2}\right]$$

e finalmente

$$P(-1{,}34<X<1{,}51)=\frac{2{,}68-0{,}8978+3{,}02-1{,}14005}{4}\approx 0{,}9155 \quad .$$

d) P(0,73<X<2,18), distribuição Normal, dado média igual a 1,31 e variância 1,13.
Resolução:
Temos que a probabilidade neste caso é dada por

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

para podermos usar a tabela reduzida. Com os valores dados neste item teremos

$$P(0{,}73<X<2{,}18)=P\left(\frac{0{,}73-1{,}31}{\sqrt{1{,}14}}<Z<\frac{2{,}18-1{,}31}{\sqrt{1{,}14}}\right)=P\left(\frac{-0{,}58}{1{,}0677}<Z<\frac{0{,}87}{1{,}0677}\right)$$

ou

$$P(0{,}73<X<2{,}18)=P(-0{,}5432<Z<0{,}8148)\approx P(Z>0{,}54)+P(Z<0{,}81) \quad .$$

onde usamos as propriedades de simetria em relação à origem que a distribuição reduzida possui, lembrando que a origem é a média da distribuição Normal reduzida. Usando a tabela teremos

$$P(0{,}73<X<2{,}18)\approx 0{,}2054+0{,}2910=0{,}4964 \quad .$$

4- Quarta questão (2,0 pontos)

Se examinava uma sequência de medidas de um parâmetro de uma amostra de rochas:

UA	2,66	5,36	3,02	4,22	3,36	4,48	3,02	4,56	4,67	4,65

Tal parâmetro está associado à viabilidade de exploração econômica de um mineral de cobre. Para tal é necessário que a média seja superior a 4,1 com um nível de significância de 10%. Verifique esta hipótese baseado na tabela acima e usando estimadores não viciados.

Resolução:

Usaremos os seguintes estimadores não viciados

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \textbf{e} \quad S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2-n\bar{X}^2\right) \quad .$$

Para a média teremos

$$\mu=\frac{2{,}66+5{,}36+3{,}02+4{,}22+3{,}36+4{,}48+3{,}02+4{,}56+4{,}67+4{,}65}{10}=\frac{40}{4}=4 \quad .$$

O somatório do quadrado do valor das amostras será

$$\sum_{1}^{n} x_i^2=2{,}66^2+5{,}36^2+3{,}02^2+4{,}22^2+3{,}36^2+4{,}48^2+3{,}02^2+4{,}56^2+4{,}67^2+4{,}65^2=167{,}4394$$

e daí obtemos a variância como

$$\sigma^2=\frac{1}{9}\left(167{,}4394-10\times 4^2\right)=\frac{7{,}4394}{9}=0{,}8266 \quad .$$

Com estes valores podemos partir para o cálculo do teste de hipótese solicitado. Como hipótese nula, suporemos que o minério não é economicamente viável. Portanto a hipótese alternativa é que o minério é viável economicamente. Assim, teremos como teste

$$\alpha=P\left(\bar{X}<x_c|\mu=4{,}1\right)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{x_c-4{,}1}{\sqrt{0{,}8266}/\sqrt{10}}\right)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{x_c-4{,}1}{0{,}2875}\right)$$

que agora nos mapeia da distribuição geral para a reduzida, ou seja, o cálculo acima é equivalente a escrevermos

$$\alpha=P\left(Z<z_c\right) \quad .$$

Para o valor dado para o nível de significância (10%), encontramos na tabela o valor de -1,28 (lembre-se que a busca na tabela de distribuição Normal reduzida será feita pelo complementar de 0,1, ou seja, 0,4, e que o valor será o negativo do valor encontrado). Comparando as expressão obtida com a mesma na distribuição reduzida, teremos

$$z_c=\frac{x_c-4{,}1}{0{,}2875}\Rightarrow x_c=0{,}2875\,z_c+4{,}1=0{,}2875\times(-1{,}28)+4{,}1=3{,}732 \quad .$$

A Região Crítica será dada por

$$RC = \{x \in \Re : x < 3{,}732\}$$

Como o valor que nos interessa é que a média seja pelo menos igual a 4,1, chegamos a conclusão que o minério não é viável para exploração.

5 – Quinta questão (1,0 pontos)

Estava em preparo um teste de durabilidade de uma nova fechadura que segue um novo padrão de segurança. O teste supõe que a durabilidade será tal que não será necessária nenhuma manutenção a não ser lubrificações periódicas. O fabricante supos que a durabilidade da fechadura obedecesse uma distribuição Normal. Esta suposição funcionou bem com uma linha similar de fechaduras e usou-se como referência que o desvio padrão era de 4,2 anos. Pergunta-se: qual deverá ser o tamanho da amostra para que a amplitude do intervalo de 95% de confiança para a vida média seja de 5 anos?

Resolução:

É solicitado a amplitude de intervalo. Esta é dada por

$$2 \times z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad .$$

No nosso caso teremos para 95 % de confiança o valor $z_{0,95/2} = z_{0,475} = 1{,}96$ **o que nos permite escrever**

$$2 \times 1{,}96 \frac{4{,}2}{\sqrt{n}} = 5 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2 \times 1{,}95 \times 4{,}2}{5} = 3{,}276$$

o que nos leva a achar n = 10,7321. Portanto, o número de amostras deverá ser de no mínimo 11. Ou seja, quase que o fabricante de fechaduras acertou de primeira o tamanho da amostra.

6 - Sexta questão (1,0 pontos)

Se extraiu 12 amostras de uma fonte de água mineral e a média amostral foi de 5,32 mg de conteúdo mineral por litro. Sabemos de uma outra fonte próxima que a variância relevante ao problema é de 7,4. Determine qual é o intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança de 85%.

Resolução:

Para este intervalo de confiança temos $z_{0,85/2} = z_{0,425} = 1{,}44$ **. Assim, o intervalo de confiança será dado por**

$$IC(4{,}32 ; 0{,}85) = \left[4{,}32 - 1{,}44 \frac{\sqrt{7{,}4}}{\sqrt{12}} ; 4{,}32 + 1{,}44 \frac{\sqrt{7{,}4}}{\sqrt{12}}\right] = [4{,}32 - 1{,}1308 ; 4{,}32 + 1{,}1308]$$

ou

$$IC(4{,}32 ; 0{,}85) = [3{,}1892 ; 5{,}4508] \quad .$$

Atenção:

I) Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

II) Todos os cálculos deverão ser feitos com pelo menos quatro casas decimais e arrendondados para duas APENAS ao final.