Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística
Gabarito da AP1 1°semestre de 2014

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Questão 1 (2,5 pontos) Uma empresa quer patrocinar um atleta de uma modalidade de corrida. Para isso, solicitou informações sobre as últimas 5 corridas de dois atletas. A tabela abaixo mostra os tempos, em minutos, gastos por esses atletas.

Atleta A	Atleta B
17,8	**19,3**
19,2	**19,7**
20,2	**19,9**
19,3	19,1
21	19,5

Mesmo sabendo que o melhor tempo obtido nessa modalidade de corrida, pertence ao atleta A, decidiu-se que a escolha seria feita baseada em dados estatísticos. Para isso, escolheu-se como medidas de comparação: o tempo médio de cada atleta; a regularidade do comportamento de cada um nas pistas, medido pelo desvio padrão. Caso uma das duas medidas empatassem, deveria ser verificado qual atleta tem se saído melhor na maioria das corridas. Baseados nessas informações verifique qual dos dois atletas deve ser patrocinado e justifique sua escolha.

Solução:

	Atleta A		Atleta B	
	tempo	(tempo-média)	tempo	(tempo-média)
1	17,8	2,89	19,3	0,04
2	19,2	0,09	19,7	0,04
3	20,2	0,49	19,9	0,16
4	19,3	0,04	19,1	0,16
5	21	2,25	19,5	0
Soma	97,5	5,76	97,5	0,4
(Soma)/5	***19,5***	***1,152***	***19,5***	***0,08***
	Média	***Variância***	***Média***	***Variância***

Desvio padrão dos tempos do Atleta A $\sigma = \sqrt{1,152} = 1,0733$

Desvio padrão dos tempos do Atleta B $\sigma = \sqrt{0,08} = 0,2828$

O tempo médio dos dois atletas é o mesmo, mas a regularidade do comportamento do Atleta B é maior, uma vez que tem menor desvio padrão.

Questão 2 (1,0 ponto) Suponha que P (A) = ½ e P (B^C) = 1/3. Verifique se os eventos A e B podem ser disjuntos (ou mutuamente exclusivos).

Solução:
Para que os eventos A e B sejam disjuntos $P(A \cap B) = 0$.

Sabe-se que $P(B^c) = \frac{1}{3}$, então $P(B) = \frac{2}{3}$, uma vez que $P(B^c) + P(B) = 1$.

Sabe-se também que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A \cap B) = \frac{7}{6} - P(A \cap B)$$

Se igualarmos $P(A \cap B)$ a zero na expressão anterior, temos que $P(A \cup B) = \frac{7}{6}$ >1. Como $P(A \cup B)$ é uma probabilidade, deve estar entre 0 e 1. Logo o valor encontrado é absurdo. Assim, a probabilidade $P(A \cap B)$ não pode ser zero e, portanto, A e B não são disjuntos.

Questão 3 (2,5 pontos) Numa competição de tiro ao alvo a cidade A, que não tem uma tradição nesse esporte, decidiu enviar um representante que acerta na mosca do alvo, somente em 20% dos tiros. Um grupo de pessoas (grupo A) acha que nos 10 tiros, que ele dará na competição, ele acertará no máximo uma vez. Um outro grupo (grupo B) acha que esse acerto só acontecerá em sua última tentativa (a décima). Verifique a probabilidade em cada uma das situações: (i)acertar no máximo uma vez; (ii) acertar somente na décima tentativa.

Solução:

(i) Acertar no máximo uma vez

A probabilidade de acertar na mosca no máximo uma vez é pode ser considerada como diversos ensaios de Bernoulli independentes, com a mesma probabilidade de sucesso, com probabilidade de ocorrência de 0,20. Assim:

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0} 0.2^0 (1 - 0.2)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.2^1 (1 - 0.2)^{10-1} =$$
$$1 \times 1 \times 0.8^{10} + 10 \times 0.2 \times 0.8^9 = 0.8^{10} + 2 \times 0.8^9 = 0.37581.$$

(ii) Acertar somente na décima tentativa

Neste caso podemos pensar em k ensaios de Bernoulli que precedem o 1º sucesso, que aconteceria na décima tentativa, e aplicar o modelo Geométrico, ou seja:

$$P(X = k) = p(1 - p)^k, \; k = 0,1,2,\ldots$$

Ou,

$$P(X = 9) = 0{,}2(1 - 0{,}2)^9 = 0{,}2 \times 0{,}8^9 = 0{,}02684$$

Questão 4 (2,0 pontos) Dois adversários A e B disputam uma série de 8 partidas de um determinado jogo. A probabilidade de A ganhar uma partida é 0,55 e não há empate. Qual é a probabilidade de B ganhar a série (ganhar a maioria dos jogos)?

Solução:

Como descrito, não é permitido o empate. Como a probabilidade de A ganhar uma partida é 0,55 e serão 8 partidas, esse experimento pode ser caracterizado por uma distribuição Binomial, onde X é número de vitórias de A. Assim, a probabilidade de A ganhar a maioria dos jogos acontece se ele ganhar 5 ou mais jogos, ou seja, P(X ≥ 5).

$$P(X \geq 5) = \binom{8}{5}(0{,}55)^5(0{,}45)^3 + \binom{8}{6}(0{,}55)^6(0{,}45)^2 + \binom{8}{7}(0{,}55)^7(0{,}45)^1 + \binom{8}{8}(0{,}55)^8(0{,}45)^0$$

$$P(X \geq 5) = 56 \times 0{,}0503 \times 0{,}0911 + 28 \times 0{,}0276 \times 0{,}2025 + 8 \times 0{,}0152 \times 0{,}45 + 1 \times 0{,}0084 \times 1$$

$$P(X \geq 5) = 0{,}2568 + 0{,}1569 + 0{,}0548 + 0{,}0084 = 0{,}4769$$

Questão 5 (2,0 pontos) Em uma cidade onde carros têm que ser avaliados para controle de emissão de poluentes, 25% de todos os carros testados emitem quantidades excessivas de poluentes. No entanto, o teste não é perfeito e pode indicar resultados errados. Desta forma, carros que emitem excesso de poluentes podem não ser detectados pelo teste e carros que não emitem excesso de poluentes podem ser considerados erroneamente fora do padrão de emissão. Quando efetivamente testados, 99% dos carros fora do padrão são detectados e 17% dos carros em bom estado são considerados fora do padrão por erro do teste. Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste emita realmente excesso de poluentes?

Solução:

Seja T o evento "carros emitem quantidades excessivas de poluentes" e B o evento "carro dentro das normas de emissão de poluentes". Sabe-se que *P(T) = 0,25* e, desta forma, *P(B) = 0,75*.

Chamando-se de E o evento "carro reprovado no teste " tem-se:

$$P(E/T) = 0{,}99 \quad e \quad P(E/B) = 0{,}17$$

E deseja-se saber *P(T / E)*. Segundo o Teorema de Bayes, temos :

$$P(T/E) = \frac{P(E \cap T)}{P(E)} = \frac{P(E/T)P(T)}{P(E)}$$

$$P(E) = P(E/T)P(T) + P(E/T^C)P(T^C) = 0{,}99 \times 0{,}25 + 0{,}75 \times 0{,}17$$

$$P(E) = 0{,}2475 + 0{,}1275 = 0{,}3750$$

Logo,

$$P(T/E) = \frac{P(E/T)P(T)}{P(E)} = \frac{0{,}99 \times 0{,}25}{0{,}375} = \frac{0{,}2475}{0{,}375} = 0{,}66$$