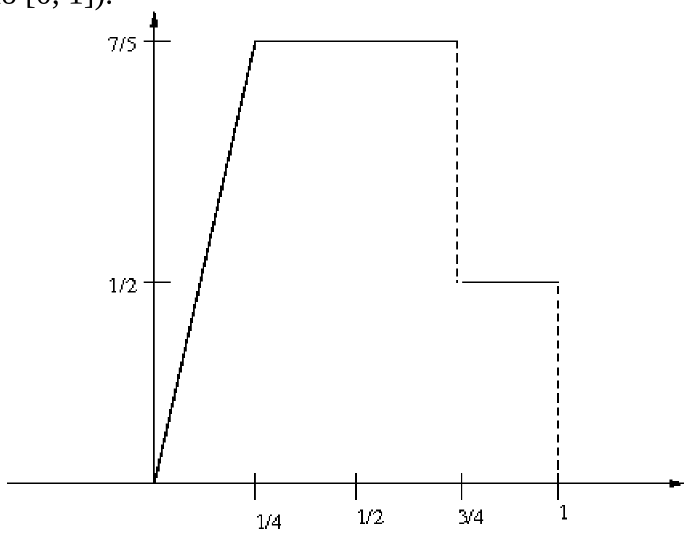
Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 1° semestre de 2016
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia de Paula Toledo

1 - Primeira questão (2,5 pontos)
A figura abaixo representa uma função de distribuição de probabilidade (a função vale zero para valores fora do intervalo [0, 1]).



a) Prove que esta função é de fato uma função de probabilidade (0,5 ponto);

Resolução:

Observe que a função é não negativa em todo o intervalo de validade. Nos resta calcular a integral da função neste intervalo.

Podemos fazer de duas maneiras:

i) Observe que o trecho entre x = 0 até x = 1/4 é uma reta que podemos obter usando os pontos extremos da mesma, ou seja, (0,0) e (1/4 , 7/5). Como a equação da reta é dada por

$$y=ax+b$$

do primeiro ponto tiramos que b = 0. Do segundo ponto teremos

$$\frac{7}{5}=a\frac{1}{4}\Rightarrow a=\frac{28}{5} \quad ,$$

assim a equação será $y=\frac{28}{5}x$ **.**

O restante da função são dois segmentos de funções constantes.

Integremos:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^{1/4}\frac{28}{5}x\,dx+\int_{1/4}^{3/4}\frac{7}{5}dx+\int_{3/4}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{28}{5}\int_0^{1/4}x\,dx+\frac{7}{5}\int_{1/4}^{3/4}dx+\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}dx=\frac{28}{5}\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/4}+\frac{7}{5}x\Big|_{1/4}^{3/4}+\frac{1}{2}x\Big|_{3/4}^{1}$$

ou

$$\int_o^1 f(x)\,dx=\frac{28}{10}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2-0\right]+\frac{7}{5}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{28}{10}\times\frac{1}{16}+\frac{7}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=1 \quad .$$

Claramente podemos resolver este item somando as áreas do triângulo dado pelo primeiro trecho da função com as áreas dos retângulos que constituem o restante da função.

b) Calcule a média da distribuição (0,5 ponto);
Resolução:
Pela definição a média é dada por

$$\mu=\int_a^b x\,f(x)\,dx \quad .$$

No nosso caso teremos

$$\mu=\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\int_0^{1/4}\frac{28}{5}x^2\,dx+\int_{1/4}^{3/4}\frac{7}{5}x\,dx+\int_{3/4}^{1}\frac{1}{2}x\,dx=\frac{28}{5}\int_0^{1/4}x^2\,dx+\frac{7}{5}\int_{1/4}^{3/4}x\,dx+\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}x\,dx=\frac{28}{5}\times\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/4}+\frac{7}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_{1/4}^{3/4}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{3/4}^{1} \quad .$$

Daí

$$\mu=\frac{28}{15}\times\left[\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]+\frac{7}{10}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right]+\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]\approx 0{,}4885$$

c) Calcule a variância da distribuição (1,0 pontos);
Resolução:
A definição da variância nos dá

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\mu^2 \quad .$$

Calculemos a integral

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\int_0^{1/4}\frac{28}{5}x^3\,dx+\int_{1/4}^{3/4}\frac{7}{5}x^2\,dx+\int_{3/4}^{1}\frac{1}{2}x^2\,dx=\frac{28}{5}\int_0^{1/4}x^3\,dx+\frac{7}{5}\int_{1/4}^{3/4}x^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{3/4}^{1}x^2\,dx=\frac{28}{5}\times\frac{x^4}{4}\Big|_0^{1/4}+\frac{7}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_{1/4}^{3/4}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_{3/4}^{1}$$

ou ainda

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\frac{28}{20}\times\left[\left(\frac{1}{4}\right)^4\right]+\frac{7}{15}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3\right]+\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]\approx 0{,}2914 \quad .$$

Com isto podemos calcular a variância

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\mu^2=0{,}2914-0{,}4885^2\approx 0{,}0527 \quad .$$

d) Calcule a moda desta distribuição (0,5 pontos).
Resolução:
A moda é o ponto (ou conjunto de pontos) onde a distribuição de probabilidade tem o seu máximo. No caso da distribuição de probabilidade aqui apresentada, temo que esta distribuição é multimodal e seu valor vai de 1/4 a 3/4 .

2 – Segunda questão (1,5 pontos)

Verifique se as expressões abaixo são funções de probabilidade:

a) $f(x)=2(1-x);0\leq x\leq 1$
Resolução:
Observe que no intervalo dado a função é não negativa. Integremos

$$\int_0^1 2(1-x)\,dx=2\left[\int_0^1 dx-\int_0^1 x\,dx\right]=2\left[(1-0)-\frac{1^2}{2}-0\right]=1 \quad .$$

É distribuição de probabilidade.

b) $f(x)=2(1-x);1\leq x\leq 2$
Resolução:
A função acima toma valores negativos dentro do intervalo apresentado. Logo não é distribuição de probabilidade.

c) $f(x)=sen(x);0\leq x\leq \pi/2$
Resolução:
A função é não negativa no intervalo apresentado. Integremos

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)\,dx=-\cos(x)|_0^{\pi/2}=-(0-1)=1 \quad .$$

Portanto é distribuição de probabilidade.

3 – Terceira questão (1,0 ponto)

Uma empresa fazia um levantamento do setor de atendimento ao consumidor. O tempo de atendimento de cada cliente, T, foi modelado por uma densidade Exponencial (1,3). Calcule:

a) $P(T<1,1)$
Resolução:
A probabilidade para a distribuição Exponencial é dada por

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b} \quad .$$

No caso deste item teremos

$$P(0<T<1,1)=1-e^{-1,3\times 1,1}\approx 0,76069 \quad .$$

b) $P(T<1,2|T\leq 3,2)$
Resolução:
Neste caso teremos

$$P(T<1,2|T\leq 3,2)=\frac{P(T<1,2)}{P(t<3,2)}=\frac{1-e^{-1,3\times 1,2}}{1-e^{-1,3\times 3,2}}\approx\frac{0,7898}{0,9843}\approx 0,8023 \quad .$$

4 – Quarta questão (1,0 ponto)

Um fabricante de produtos de madeira teve problemas com uma máquina de produzir palitos. Esta máquina estava com um nível de defeitos de 20%. Faça as devidas hipóteses sobre amostras retiradas para controle:

Resolução:

Em ambas as situações vamos supor que é válido nos utilizarmos do Teorema Central do Limite e, desta maneira, possamos usar a distribuição Normal. Além disto, como trabalharemos com proporção de defeitos, usaremos para calcular a variância a expressão $Var(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}$ **.**

a) Foi tomada uma amostra de 10 palitos. Qual a probabilidade desta amostra conter menos de 30% de palitos defeituosos?

Resolução:

A proporção de defeitos é de 20% e a estimativa para a a variância é $Var(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}=0{,}2\frac{1-0{,}2}{10}=0{,}016$ **. Sendo assim, a probabilidade de termos na amostra menos de 30% de defeitos é**

$$P(\bar{X}<0{,}3)=P\left(Z<\frac{0{,}3-0{,}2}{\sqrt{0{,}016}}\right)\approx P(Z<\ 0{,}7905)\approx P(Z<0{,}79)=0{,}2852$$

b) Se a amostra for de 30 palitos, qual será a probabilidade da amostra conter menos de 30% de palitos defeituosos?

Resolução: A proporção de defeitos é de 30% e a estimativa para a variância é $Var(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}=0{,}2\frac{1-0{,}2}{30}\approx 0{,}0053$ **. Sendo assim, a probabilidade de termos na amostra menos de 30% de defeitos é**

$$P(\bar{X}<0{,}3)=P\left(Z<\frac{0{,}3-0{,}2}{\sqrt{0{,}0053}}\right)=P(Z<\ 1{,}3736)\approx P(Z<1{,}37)\approx 0{,}4147$$

ou seja, a triplicação do tamanho da amostra aumentou em quase uma vez e meia a probabilidade de encontrarmos palitos defeituosos.

5 – Quinta questão (1,5 ponto)

O comprimento de uma peça produzida numa fábrica tem média 27 cm e variância 6 cm^2 sendo que a amostra estudada era de 30 peças. Esta produção foi modelada pela distribuição Normal. Calcule as seguintes probabilidades:

Resolução:

Usaremos a distribuição Normal dada por

$$P(a\leq X\leq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leq Z\leq\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

que para os dados fornecidos teremos

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-27}{\sqrt{6}/\sqrt{30}} \leq Z \leq \frac{b-27}{\sqrt{6}/\sqrt{30}}\right) \approx P\left(\frac{a-27}{0{,}4472} \leq Z \leq \frac{b-27}{0{,}4472}\right)$$

a) De uma peça ter comprimento maior que 28 cm;
Aqui teremos

$$P(X>28) = P\left(Z > \frac{28-27}{0{,}4472}\right) = P(Z>2{,}2361) \approx 1 - P(Z<2{,}24) = 0{,}5 - 0{,}4875 = 0{,}0125 \quad .$$

b) De uma peça ter comprimento entre 27 cm e 31 cm;
Resolução:
Teremos neste caso

$$P(27 \leq X \leq 31) = P\left(\frac{27-27}{0{,}4472} \leq Z \leq \frac{31-27}{0{,}4472}\right) = P(Z \leq 8{,}9445) = 1$$

c)De ter sido produzida uma peça com menos de 26 cm;
Resolução:
Aqui ficaremos com

$$P(X \leq 26) = P\left(Z \leq \frac{26-27}{0{,}4472}\right) = P(Z \leq 2{,}2361) \approx P(Z \leq 2{,}24) = 0{,}4875 \quad .$$

6 – Sexta questão (1,0 ponto)
Foi sorteada uma amostra de 18 postos de saúde da rede pública em uma determinada cidade e anotado o número de casos de dengue em cada uma delas no mês de fevereiro. Os resultados foram: 10, 8, 5, 4, 3, 7, 1, 11, 3, 6, 6, 7, 3, 4, 8, 9, 5, 5. Deseja-se estimar o número médio de casos e sua variância para otimizar o apoio à população. Faça estimativas para a média e a variância usando estimadores consistentes. Baseado nestes valores, calcule o intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança igual a 95%.
Resolução:
Para a média usaremos o estimador

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i \quad .$$

Neste caso teremos

$$\bar{X} = \frac{1}{18}(10+8+5+4+3+7+1+11+3+6+6+7+3+4+8+9+5+5) = \frac{105}{18} = \frac{35}{6} \approx 5{,}8333 \quad .$$

Para a variância usaremos

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2\right) \quad .$$

Determinemos o somatório

$$\sum_{1}^{n} X_i^2 = 10^2+8^2+5^2+4^2+3^2+7^2+1^2+11^2+3^2+6^2+6^2+7^2+3^2+4^2+8^2+9^2+5^2+5^2 = 735$$

então teremos

$$S^2 = \frac{1}{18-1}\left[735 - 18\times\left(\frac{35}{6}\right)^2\right] = \frac{1}{17}\times\frac{245}{2}\approx 7,2059 \quad .$$

Calculemos o intervalo de confiança dado por

$$IC(\mu,\gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] .$$

Pelo que temos obtemos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{7,2059}}{\sqrt{18}} \approx 0,6327 \quad \textbf{e} \quad z_{\gamma/2} = z_{0,95/2} = z_{0,475} = 1,96 \quad ,$$

dai

$$z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,6327\times 1,96 \approx 1,24$$

logo

$$IC(\mu, 0,95) = [5,8333 - 1,24\ ;\ 5,8333 - 1,25] \approx [4,59\ ;\ 7,07] .$$

7 – Sétima questão (1,5 pontos)
Calcule as seguintes probabilidades.

a) P(0,1<X<0,8) para a distribuição de probabilidade da primeira questão;
Resolução:
Neste caso a probabilidade será dada por

$$P(0,1 < X < 0,8) = \int_{0,1}^{0,8} f(x)dx = \frac{28}{5}\int_{0,1}^{1/4} x\,dx + \frac{7}{5}\int_{1/4}^{3/4} dx + \frac{1}{2}\int_{3/4}^{0,8} dx = \frac{28}{5}\times\frac{x^2}{2}\Big|_{0,1}^{1/4} + \frac{7}{5}\,x\Big|_{1/4}^{3/4} + \frac{1}{2}\,x\Big|_{3/4}^{0,8}$$

e então

$$P(0,1 < X < 0,8) = \frac{28}{10}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 0,1^2\right] + \frac{7}{5}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(0,8 - \frac{3}{4}\right) = \frac{28}{10}\times\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{100}\right) + \frac{7}{5}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 0,05 = 0,872 \quad .$$

b) P(X> 2,1) para uma distribuição de Exponencial com $\alpha = 1,05$;
Resolução:
Aqui achamos a probabilidade do ponto solicitado até o infinito. Mas quando x tende ao infinito a distribuição de probabilidade tende a zero. Portanto teremos

$$P(X > 2,1) = e^{-1,05\times 2,1} \approx 0,1102$$

c) P(3,2 < X < 4,5) para uma distribuição uniforme no intervalo [-1, 6].
Resolução
A densidade de probabilidade é dada neste caso por

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{6-(-1)}=\frac{1}{7}$$

sendo nula fora do intervalo [-1,6]. Assim, a probabilidade solicitada será dada por

$$P(3{,}2<X<4{,}5)=\int_{3,2}^{4,5}\frac{1}{7}\,dx=\frac{1}{7}\int_{3,2}^{4,5}dx=\frac{1}{7}x\Big|_{3,2}^{4,5}=\frac{4{,}5-3{,}2}{7}\approx 0{,}1857 \quad .$$

Atenção:

I) Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

II) Todos os cálculos deverão ser feitos com pelo menos quatro casas decimais e arrendondados para duas APENAS ao final, seja na lista ou na prova.

III) Tenha cuidado quanto a notação. Caso não a siga você terá pontos descontados seja na lista ou na prova.