Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 1° semestre de 2013
GABARITO REVISADO

i) Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
ii) Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível;
iii) Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

---

1 – Primeira questão (2,0 pontos)
Verifique quais da funções abaixo são distribuições de probabilidade.

Para que uma função num intervalo [a, b] seja densidade de probabilidade é necessário que ela seja não negativa dentro do intervalo e que seja normalizada, ou seja,

$$\int_a^b f(x)\,dx=1 \quad .$$

a) $f(x)=\frac{3}{7}x^2 ; x\in[0,2]$

Resolução:

$$\int_0^2 \frac{3}{7}x^2\,dx=\frac{3}{7}\int_0^2 x^2\,dx=\frac{3}{7}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{1}{7}(2^3-0)=\frac{8}{7} \quad .$$

A função é não negativa no intervalo mas não é normalizada. Portanto, não é função de distribuição de probabilidade.

b) $f(x)=x ; x\in[0,2]$

Resolução:

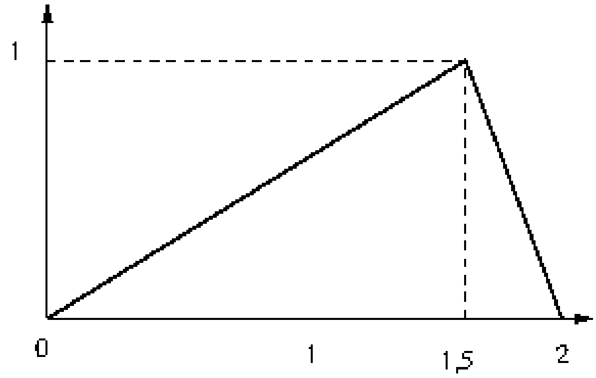
$$\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=\frac{(2^2-0)}{2}=2 \quad .$$

A função é não negativa no intervalo mas não é normalizada. Portanto, não é função de distribuição de probabilidade.

c) $f(x)=\cos(x); x\in[\pi/3,\pi]$

Resolução:
Observe que o valor de cosseno toma valores negativos dentro do intervalo. Portanto, a função acima não é função distribuição de probabilidade no intervalo dado.

d)



sendo zero fora do intervalo [0,2].

Resolução:
Podemos fazer esta questão de duas maneiras básicas. A primeira por integração numérica direta. Para isto temos que obter as funções que são as retas acima. A reta que vai do ponto (0,0) ao ponto (1,5; 1) pode ser obtida substituindo estes valores na equação da reta, ou seja,

$$y=ax+b \quad ,$$

e cai no sistema de equações abaixo

$$0=a\times 0+b$$
$$1=a\times 1{,}5+b$$

que tem como solução $(a=2/3, b=0)$ **. A equação é portanto** $y=\frac{2}{3}x$ **.**
Para a reta que vai do ponto (1,5; 1) ao ponto (2,0) teremos

$$1=a\times 1{,}5+b$$
$$0=a\times 2+b$$

sistema que tem como solução $(a=-2, b=4)$ **e a equação será** $y=-2x+4$ **.**

Integrando teremos

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^{3/2}\frac{2}{3}x\,dx+\int_{3/2}^{2}(-2\mathrm{x}+4)dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2}x\,dx-2\int_{3/2}^{2}x\,dx+4\int_{3/2}^{2}dx$$

ou

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{3/2}-2\frac{x^2}{2}\Big|_{3/2}^{2}+4x\Big|_{3/2}^{2}=\frac{1}{3}[(3/2)^2-0]-[2^2-(3/2^2)]+4(2-3/2)$$

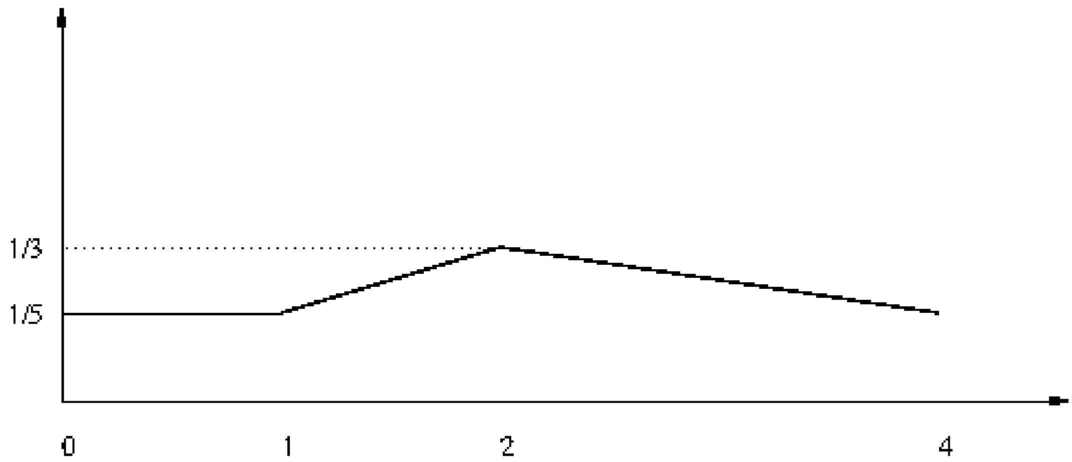
e finalmente

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\frac{9}{4}-\left(4-\frac{9}{4}\right)+4\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{7}{4}+2=1 \quad ,$$

portanto é função distribuição de probabilidade.
Claramente há um meio mais simples de chegar a esta conclusão. Basta observar que a área abaixo da curva é constituída pela soma da área de dois triângulos, ambos de altura 1. Um tem base 1,5 e o outro base 0,5. Portanto a soma das áreas dará

$$\frac{1{,}5\times 1}{2}+\frac{0{,}5\times 1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 \quad .$$

2 – Segunda questão (2,0 ponto)
Dado o gráfico abaixo:



b) Escreva a expressão como função;   (0,5 pontos)
Resolução:
O que faremos aqui está descrito numa das formas de resolver a questão 1 d, ou seja, calcularemos as equações das retas que constituem a função dada no gráfico.
A reta que é definida pelos pontos (0, 1/5) e (1, 1/5) é simplesmente um valor constante (1/5) e a equação será $y=\frac{1}{5}$ **.**
A reta definida pelos pontos (1, 1/5) e (2, 1/3) será calculada pelo uso do seguinte sistema de equações

$$\frac{1}{5}=a\times 1+b$$
$$\frac{1}{3}=a\times 2+b$$

de dá como resultado $\left(a=\frac{2}{15,}b=\frac{1}{15}\right)$ **e a equação da reta será** $y=\frac{1}{15}(2x+1)$ **.**

O último segmento de reta é definido pelos pontos (2, 1/3) e (4, 1/5). Isto resulta no sistema

$$\frac{1}{3}=a\times 2+b$$
$$\frac{1}{5}=a\times 4+b$$

que dá como resultado $\left(a=-\frac{1}{15},b=\frac{7}{15}\right)$ **e a equação da reta será** $y=\frac{1}{15}(-x+7)$ **.**

c) Calcule o valor médio; (0,5 pontos)

Resolução:

A definição de média é dada por

$$\mu=\int_a^b x f(x)dx \quad .$$

No nosso caso teremos

$$\mu=\int_0^4 x f(x)dx=\int_0^1 \frac{1}{5}x\,dx+\int_1^2 \frac{1}{15}x(2x+1)dx+\int_2^4 \frac{1}{15}x(-x+7)dx$$

ou

$$\mu=\frac{1}{5}\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{15}\left[2\int_1^2 x^2dx+\int_1^2 x\,dx-\int_2^4 x^2dx+7\int_2^4 x\,dx\right]$$

que resulta em

$$\mu=\frac{1}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{15}\left[2\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{x^3}{3}\Big|_2^4+7\frac{x^2}{2}\Big|_2^4\right]$$

o que nos leva a

$$\mu=\frac{1}{10}(1^2-0)+\frac{1}{15}\left[\frac{2}{3}(2^3-1^3)+\frac{1}{2}(2^2-1^2)-\frac{1}{3}(4^3-2^3)+\frac{7}{2}(4^2-2^2)\right]$$

finalmente

$$\mu=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\left[\frac{14}{3}+\frac{3}{2}-\frac{56}{3}+42\right]=\frac{1}{10}+\frac{59}{30}=\frac{31}{15}\approx 2{,}0666 \quad .$$

d) Calcule a variância; (0,5 pontos)

Resolução:

A variância é definida como

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2; E(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)\,dx \quad .$$

Já temos a média, calculemos a integral acima.

$$E(X^2)=\int_0^4 x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{1}{5}x^2\,dx+\int_1^2 \frac{1}{15}x^2(2x+1)\,dx+\int_2^4 \frac{1}{15}x^2(-x+7)\,dx \quad .$$

Continuando os cálculos teremos

$$E(X^2)=\frac{1}{5}\int_0^1 x^2\,dx+\frac{1}{15}\left[2\int_1^2 x^3\,dx+\int_1^2 x^2\,dx-\int_2^4 x^3\,dx+7\int_2^4 x^2\,dx\right]$$

que por sua vez nos dá

$$E(X^2)=\frac{1}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{1}{15}\left[2\frac{x^4}{4}\Big|_1^2+\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-\frac{x^4}{4}\Big|_2^4+7\frac{x^3}{3}\Big|_2^4\right]$$

e daí

$$E(X^2)=\frac{1}{15}(1^3-0)+\frac{1}{15}\left[\frac{2}{4}(2^4-1^4)+\frac{1}{3}(2^3-1^3)-\frac{1}{4}(4^4-2^4)+\frac{7}{3}(4^3-2^3)\right]$$

que nos dá o resultado

$$E(X^2)=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\left[\frac{15}{2}+\frac{7}{3}-\frac{240}{4}+\frac{392}{3}\right]=\frac{163}{30}\approx 5{,}4333 \quad .$$

Assim a variância será

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=\frac{163}{30}-\left(\frac{31}{15}\right)^2=\frac{523}{450}\approx 1{,}16222$$

e) Calcule a moda. (0,5 pontos)

Resolução>

A definição de moda diz que este valor corresponde ao valor(es) onde a probabilidade é máxima. No caso, basta inspecionar a figura para verificarmos que a moda é 2.

3 – Terceira questão (1,5 pontos)
Uma experiência foi modelada por uma distribuição Normal de média 5,9 e variância 13,69. Calcule as seguintes probabilidades. (0,5 ponto cada).
Usaremos sempre a mesma fórmula

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

junto com as propriedades de simetria da distribuição Normal. Como a média e a variância são sempre as mesmas teremos

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-5,9}{\sqrt{13,69}}<Z<\frac{b-5,9}{\sqrt{13,69}}\right)=P\left(\frac{a-5,9}{3,7}<Z<\frac{b-5,9}{3,7}\right)$$

a) P(X < 6,3)
Resolução:

$$P(X<6,3)=P\left(Z<\frac{6,3-5,9}{3,7}\right)=0,5+P(Z<0,1081)\approx 0,5+P(Z<0,11)=0,5+0,0438=0,5438$$

b) P(6,3 < X < 7,1)
Resolução:

$$P(6,3<X<7,1)=P\left(\frac{6,3-5,9}{3,7}<Z<\frac{7,1-5,9}{3,7}\right)=P(0,1081<Z<0,3243)\approx P(0,11<Z<0,32)$$

daí

$$P(6,3<X<7,1)=P(Z<0,32)-P(Z<0,11)=0,1255-0,0438=0,0817$$

c) P(X > 7,1)
Resolução:

$$P(X>7,1)=P\left(Z>\frac{7,1-5,9}{3,7}\right)=0,5-P(Z>0,3243)\approx 0,5-P(Z>0,32)=0,5-0,1255=0,3745$$

4 – Quarta questão (2,5 pontos)
Um produto estava em avaliação para lançamento. A questão era que não se sabia se o número de amostras era relevante ou não. Assim, foi feita uma amostragem prévia escolhendo por conveniência 10 amostras que estão apresentadas abaixo.

P	9,4	14,1	12,8	28,7	13,1	13,8	24,9	14,4	29,3	19,5

a) Usando estimadores não viciados e coeficiente de confiança igual a 92%, estime qual deveria ser o tamanho da amostra para que a amplitude do intervalo de confiança seja igual ou menor a 7. (2,0 pontos)
Resolução:

Observe que o que é pedido aqui está relacionado com a amplitude de confiança que é dada por

$$2\times z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad .$$

No nosso caso temos que a grandeza acima é 7 e o coeficiente de confiança de 92% que resulta em $z_{\gamma/2}=1{,}75$ **. Observe que o valor de n na fórmula acima NÃO É o tamanho da amostra de tentativa mas a que é teoricamente necessária. Calculemos agora a variância usando os estimadores não viciados para a variância e para média dados por**

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_1^n X_i^2-n\bar{X}^2\right) \quad \textbf{e} \quad \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i \quad .$$

No nosso caso será

$$\bar{X}=\frac{1}{10}(9{,}4+14{,}1+12{,}8+28{,}7+13{,}1+13{,}8+24{,}9+14{,}4+29{,}3+19{,}5)=18 \quad .$$

Para o somatório contido na expressão da variância teremos

$$\sum_1^n X_i^2=9{,}4^2+14{,}1^2+12{,}8^2+28{,}7^2+13{,}1^2+13{,}8^2+24{,}9^2+14{,}4^2+29{,}3^2+19{,}5^2=3702{,}86$$

e assim teremos a estimativa para a variância dada por

$$S^2=\frac{1}{10-1}(3702{,}86-10\times 18^2)=51{,}4288$$

o que nos dá uma estimativa necessária $\sigma=\sqrt{51{,}4288}\approx 7{,}1713$ **. Finalmente substituindo na fórmula da amplitude de confiança teremos**

$$2\times 1{,}75\frac{7{,}1713}{\sqrt{n}}=7$$

que nos leva a $\sqrt{n}=25{,}0955/7\approx 3{,}5856\Rightarrow n\approx 12{,}8568$ **. Isto significa que a amostra mínima necessária seria de 13 amostras.**

b) Compare o número obtido com o usado inicialmente, ou seja, dez. A que conclusão você chega? (0,5 ponto)

Resolução:

Verificamos que a amostra inicial provavelmente foi pequena em relação a teoricamente adequada.

5 – Quinta questão (2,0 ponto)

Foi feita uma aferição da produção de sabonetes de uma fábrica. O peso médio de 20 amostras resultou em 87, 3g.

a) Sabendo que a variância para este tipo de produto é de 38,44g^2 , estabeleça com coeficiente de confiança de 80% o intervalo de confiança para a média. (1,5 pontos)

Resolução:

O intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu, \gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\right] .$$

Para os valores dados teremos

$$IC(\mu, 0{,}8)=\left[87{,}3-1{,}28\frac{\sqrt{38{,}44}}{\sqrt{20}};87{,}3+1{,}28\frac{\sqrt{38{,}44}}{\sqrt{20}};\right]$$

ou

$$IC(\mu, 0{,}8)\approx[87{,}3-1{,}28\times1{,}3863;87{,}3+1{,}28\times1{,}3863]\approx[85{,}5225;89{,}0744] .$$

b) Com este resultado, o que você pode afirmar quanto a produção se o peso especificado do sabonete é 90g? (0,5 ponto)

Resolução:

A conclusão é simples: pela amostra, a produção deste sabonete está fora de especificação.