AD 2 da disciplina Probabilidade e Estatística

Professores Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

01.2007

I) Uma amostra de dez balas de uma fábrica de doces foi avaliada e obteve-se os valores em gramas: 3,53; 3,43; 3,70; 3,59; 3,54; 3,50; 3,55; 3,56; 3,54; 3,63. (2,5 pontos)

a) Calcule estimativas para a média usando os estimadores abaixo:

$$\hat{\mu}_1 = (valor\ máximo + valor\ mínimo)/2 \quad (0{,}5)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i \quad (0{,}5)$$

Solução: Por inspeção temos que os valores máximo e mínimo são 3,43 e 3,70. Assim obtemos

$$\mu_1 = \frac{(Valor\ maximo + Valor\ minimo)}{2} = \frac{3{,}43 + 3{,}70}{2} = 3{,}565$$

$$\mu_2 = \frac{1}{n}\sum_1^n x_i = \frac{35{,}57}{10} = 3{,}557$$

b) Calcule também as estimativas para a variância baseado nos estimadores abaixo:

$$\hat{\sigma}_1 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \bar{X})^2 \quad (1{,}0)$$

$$\hat{\sigma}_2 = \left(\frac{valor\ máximo - valor\ mínimo}{2}\right)^2 \quad (0{,}5)$$

Solução: Usaremos para o cálculo de σ_1 o valor das duas médias obtidas anteriormente. Assim,

$$\hat{\sigma}_{11} = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \mu_1)^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - 3{,}565)^2 = 0{,}004825$$

e

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - \mu_2)^2 = \frac{1}{n}\sum_1^n (x_i - 3{,}5557)^2 = 0{,}0047610$$

Calculando agora a outra estimativa da variância, que independe das médias, teremos

$$\hat{\sigma}_2 = \left(\frac{valor\ máximo - valor\ mínimo}{2}\right)^2 = 0{,}018225$$

Observe que as estimativas diferentes tanto podem ser próximas, como no caso das médias, como serem bem diferentes, como no caso das variâncias mas concordam em essência.

II) Num lote de 1000 tijolos foi retirada uma amostra de 10 unidades cujos comprimentos variaram entre 17,9 e 18, 7 cm. O fabricante afirma que a média de comprimento dos tijolos é de 18, 3 cm e a variância de 6 cm^2. Baseado nisto, qual a probabilidade do lote de tijolos ser rejeitada com base na amostra? (2,0 pontos)

Solução: Verifiquemos a probabilidade dos tijolos esteja compatível com a média dada pelo fabricante tomando por base os valores extremos encontrados na amostra, ou seja,

$$P(X<17{,}9\, ou\, X>18{,}7)=1-P(17{,}9\leqslant X\leqslant 18{,}7)$$

Temos que a variância é dada por

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{6}{\sqrt{12}}=1{,}7320$$

Calculando a probabilidade

$$P(17{,}9\leqslant X\leqslant 18{,}7)=P\left(\frac{17{,}9-18{,}3}{1{,}7320}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{18{,}7-18{,}3}{1{,}7320}\right)$$

$$P(17{,}9\leqslant X\leqslant 18{,}7)=P\,|-0{,}2309<Z<0{,}2309|=0{,}0910\,x2=0{,}182$$

Portanto a probabilidade é de 18% de que os tijolos estejam for a de especificação.

III) Um conjunto de dados tem média 5 e desvio padrão igual a 1,5. Calcule a probabilidade de a média amostral ser (1,5 pontos)

a) Maior que 5; (0,5)
b) Menor que 7; (0,5)
c) Estar entre 5 e 7. (0,5)

Solução: É dado que a distribuição é Normal com média 5 e desvio padrão 1,5. Aplicando diretamente a fórmula

$$P(a\leq X\leq b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\leq Z\leq\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ou de outro modo

$$P(X>a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

adaptadas a cada caso, teremos

a) $P(X>5)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{5-5}{1{,}5}\right)=P|Z>0|=0{,}5$

b) $P(X<7)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{5-7}{1,5}\right)=P\left(Z<-4/3\right)=P(Z<1,33)=0,4082$

c) Podemos obter este item tanto pel ouso da fórmula quanto pelos resultados anteriormente obtidos. Faremos esta última abordagem:

$$P(5\leqslant X\leqslant 7)=P(0\leqslant X\leqslant 7)-P(0\leqslant X\leqslant 5)=(0\leqslant Z\leqslant 1,33)-P(0\leqslant Z\leqslant 0)=0,4082$$

IV) Numa granja temos que a variância do peso dos frangos igual à 25,5g^2. Foram retirados uma duzia de frangos da linha de embalagem e o peso médio foi de 1650g. Estime a média da produção supondo que o peso dos frangos siga um modelo Normal e que se desejamos um coeficiente de confiança de 90%. (1,5 pontos)

Solução: Calculemos o intervalo de confiança deste problema, ou seja,

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Com o coeficiente de confiança de 90% consultando a tabela de distribuição Normal teremos

$$z_{\gamma/2}=z_{0,45}=1,65$$

Assim

$$IC(\mu,0,9)=\left[1650-1,65\frac{25,5}{\sqrt{12}};1650+1,65\frac{25,5}{\sqrt{12}}\right]$$

ou

$$IC(\mu,0,9)=[1650-7,361;1650+7,361]=[1642,6;1657,3]$$

V) Uma indústria metalúgica afirma que o nível de um determinado sal metálico de suas águas servidas ultrapassou o nível de 28,0 mg/m^3 em 12 dias no último mês (de 30 dias). Um estudo independente, suspeitando dos dados da empresa, fez medidas independentes durante 21 dias e observando que o nível de 28,0 mg/m^3 foi ultrapassado 9 vezes. Qual seria a probabilidade dos dados da metalúrgica estarem errados a um nível de 5%? (2,5 pontos)

Solução: Façamos alguns cálculos preliminares.

Pelos dados da indústria a proporção amostral de ocorrência de ultrapassagem do nível de referência do sal foi de

$$P=\frac{12}{30}=0,4$$

Devemos testar a hipótese deste valor ter sido ultrapassado a partir do relatório independente. Como estamos trabalhando com proporção amostral, usemos o estimador de variância dado por

$$\sigma^2 = p\frac{(1-p)}{n}$$

Suporemos podemos usar a distribuição Normal, ou seja,

$$\hat{P} \sim N(p, p(1-p)/n)$$

A Região Critica é dada por

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < p_{c1}\, ou\, x > p_{c2}\}$$

Para o valor do nível exigido temos que

$$P(\hat{p} < p_{c1} : H_o) = \frac{0{,}05}{2} \quad \text{e} \quad P(\hat{p} > p_{c2} : H_o) = \frac{0{,}05}{2}$$

Pela hipótese p = 0,4 e a distribuição será

$$\hat{P} \sim N(0{,}4, 0{,}24/21) = N(0{,}4, 0{,}0114)$$

Logo

$$P(\hat{p} < p_{c1} : H_0) = P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}} < \frac{p_{c1} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}}\right) = \frac{0{,}05}{2}$$

Pela tabela da ditribuição Normal temos que

$$\frac{p_{c1} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}} = -1{,}65$$

o que nos dá

$$p_{c1} = 0{,}223$$

$$\frac{p_{c2} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}} = 1{,}65$$

o que nos dá

$$p_{c2} = 0{,}455$$

Dái temos

$$RC = \{ x \in \mathbb{R} : x < 0{,}223 \; ou \; x > 0{,}455 \}$$

ou seja, não existe base para discordar do relatório da indústria metalúrgica.