



Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina Probabilidade e Estatística

AD2 2º semestre de 2014

GABARITO

1 - Primeira questão (2,0 pontos)

Mostre que as funções abaixo são densidades de probabilidade dentro dos intervalos especificados. Determine a média e a variância das distribuições de probabilidade.

Resolução:

Para que uma função seja distribuição de probabilidade é necessário que ela seja não negativa no intervalo dado e que a integral desta função neste intervalo seja igual a 1.

a. $f(x) = \frac{3x^2}{2}$, se $-1 \leq x \leq 1$;

Resolução:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{3x^2}{2} dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{3}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{(1+1)}{2} = 1 .$$

Agora calculemos a média

$$\mu = \int_{-1}^1 x f(x) dx = \int_{-1}^1 x \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{3}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{2} (1-1) = 0 .$$

Este resultado é consequência da simetria da distribuição em torno da origem.

Para o cálculo da variância de todas as questões usaremos

$$\sigma^2 = \int_a^b x^2 f(x) dx - \mu^2 .$$

Já tendo a média, calculemos a integral.

$$\int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = \int_{-1}^1 x^2 \frac{3x^2}{2} dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{3}{2} \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{3}{10} (1+1) = \frac{3}{5} = 0,6 .$$

Assim a variância será

$$\sigma^2 = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - \mu^2 = 0,6 - 0 = 0,6 .$$

b. $f(x) = \frac{4}{5}(x^3 + x)$, se $1 \leq x \leq \sqrt{2}$;

Resolução:

$$\int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{5}(x^3 + x) dx = \frac{4}{5} \left[\int_1^{\sqrt{2}} x^3 dx + \int_1^{\sqrt{2}} x dx \right] = \frac{4}{5} \left[\frac{x^4}{4} \Big|_1^{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\sqrt{2}} \right] ,$$

ou

$$\int_1^{\sqrt{2}} f(x) dx = \frac{4}{5} \left[\frac{4-1}{4} + \frac{2-1}{2} \right] = \frac{4}{5} \frac{5}{4} = 1 .$$

Calculemos a média

$$\mu = \int_1^{\sqrt{2}} x f(x) dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4}{5} x (x^3 + x) dx = \frac{4}{5} \left[\int_1^{\sqrt{2}} x^4 dx + \int_1^{\sqrt{2}} x^2 dx \right] = \frac{4}{5} \left[\frac{x^5}{5} \Big|_1^{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} \right] ,$$

ou

$$\mu = \frac{4}{5} \left[\frac{x^5}{5} \Big|_1^{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{2}} \right] = \frac{4}{5} \left[\frac{\sqrt{2}^5 - 1}{5} + \frac{\sqrt{2}^3 - 1}{3} \right] \approx \frac{4}{5} \left(\frac{5,6568 - 1}{5} + \frac{2,8284 - 1}{3} \right) \approx 1,2325 .$$

Calculemos a integral abaixo necessária para o cálculo da variância

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^2 f(x) dx = \int_1^{\sqrt{2}} x^2 \frac{4}{5} (x^3 + x) dx = \frac{4}{5} \left[\int_1^{\sqrt{2}} x^5 dx + \int_1^{\sqrt{2}} x^3 dx \right] = \frac{4}{5} \left[\frac{x^6}{6} \Big|_1^{\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4} \Big|_1^{\sqrt{2}} \right] ,$$

ou

$$\int_1^{\sqrt{2}} x^2 f(x) dx = \frac{4}{5} \left[\frac{\sqrt{2}^6 - 1}{6} + \frac{\sqrt{2}^4 - 1}{4} \right] = \frac{4}{5} \left(\frac{8 - 1}{6} + \frac{4 - 1}{4} \right) = \frac{23}{15} \approx 1,5333 .$$

Assim a variância será

$$\sigma^2 = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - \mu^2 = 1,5333 - 1,2325^2 \approx 0,0142 .$$

c. $f(x) = \frac{9}{8}x$, se $1 \leq x \leq 5/3$;

Resolução:

$$\int_1^{\frac{5}{3}} f(x) dx = \int_1^{\frac{5}{3}} \frac{9}{8} x dx = \frac{9}{8} \int_1^{\frac{5}{3}} x dx = \frac{9}{8} \frac{x^2}{2} \Big|_1^{\frac{5}{3}} = \frac{9}{8} \frac{\left(\frac{25}{9} - 1\right)}{2} = \frac{9}{8} \frac{16}{9} \frac{1}{2} = 1 .$$

Calculemos a média

$$\mu = \int_1^{\frac{5}{3}} x f(x) dx = \int_1^{\frac{5}{3}} x \frac{9}{8} x dx = \frac{9}{8} \int_1^{\frac{5}{3}} x^2 dx = \frac{9}{8} \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{8} \left[\left(\frac{5}{3} \right)^3 - 1 \right] \approx 1,3611 \quad .$$

Calculemos a integral abaixo que é necessária no cálculo da variância

$$\int_1^{\frac{5}{3}} x^2 f(x) dx = \int_1^{\frac{5}{3}} x^2 \frac{9}{8} x dx = \frac{9}{8} \int_1^{\frac{5}{3}} x^3 dx = \frac{9}{8} \frac{x^4}{4} \Big|_1^{\frac{5}{3}} = \frac{9}{32} \left[\left(\frac{5}{3} \right)^4 - 1 \right] = \frac{17}{9} \approx 1,8888 \quad .$$

Daqui tiramos que a variância será

$$\sigma^2 = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - \mu^2 = 1,8888 - 1,3611^2 \approx 0,0362 \quad .$$

$$d. \quad f(x) = \begin{cases} (2+x)/4, & \text{se } -2 \leq x \leq 0; \\ (2-x)/4, & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases} \quad .$$

Resolução:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 \frac{2+x}{4} dx + \int_0^2 \frac{2-x}{4} dx = \frac{2}{4} \int_{-2}^0 dx + \frac{1}{4} \int_{-2}^0 x dx + \frac{2}{4} \int_0^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^2 x dx \quad ,$$

ou

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \left[2x \Big|_{-2}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + 2x \Big|_0^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 \right] = \frac{1}{4} \left[2(0+2) + \frac{0-4}{2} + 2(2-0) - \frac{4-0}{2} \right] \quad ,$$

finalmente

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{4-2+4-2}{4} = 1 \quad .$$

Calculemos a média

$$\int_{-2}^2 x f(x) dx = \frac{2}{4} \int_{-2}^0 x dx + \frac{1}{4} \int_{-2}^0 x^2 dx + \frac{2}{4} \int_0^2 x dx - \frac{1}{4} \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{4} \left[2 \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 + 2 \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \right] \quad ,$$

então

$$\mu = \frac{1}{4} \left[(0-4) + \frac{0+8}{3} + (4-0) - \frac{8-0}{3} \right] = 0 \quad ,$$

o que corresponde simetria da distribuição.

Novamente calculemos a integral necessária para o cálculo da variância, ou seja,

$$\int_{-2}^2 x^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 x^2 \frac{(2+x)}{4} dx + \int_0^2 x^2 \frac{(2-x)}{4} dx = \int_{-2}^0 \frac{2}{4} x^2 dx + \int_{-2}^0 \frac{x^3}{4} dx + \int_0^2 \frac{2}{4} x^2 dx - \int_0^2 \frac{x^3}{4} dx ,$$

ou

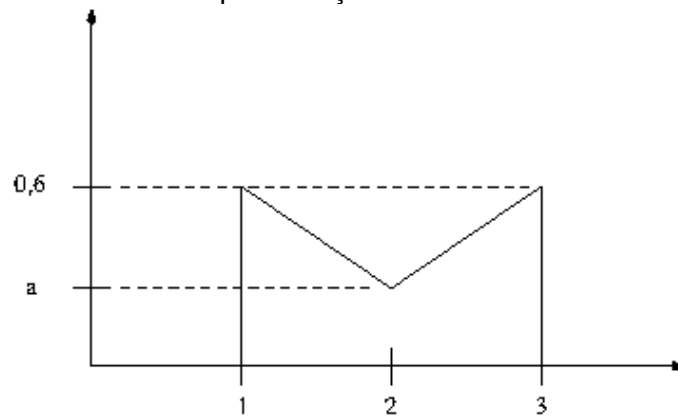
$$\int_{-2}^2 x^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \frac{8}{3} - \frac{1}{4} \left(\frac{16}{4} \right) + \frac{1}{2} \frac{8}{3} - \frac{1}{4} \frac{16}{4} = \frac{4}{3} - 1 + \frac{4}{3} - 1 = \frac{2}{3} .$$

Finalizemos com o cálculo da variância

$$\sigma^2 = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - \mu^2 = \frac{2}{3} - 0^2 = \frac{2}{3} \approx 0,6666 .$$

2 – Segunda questão (1,5 pontos)

A função abaixo será usada para cálculos probabilísticos de um determinado fenômeno. No entanto, a função ainda não foi normalizada e, portanto, deverá ser. Normalize a função determinando o valor de **a** e após isto, calcule a média, a variância assim como a moda da mesma. Observamos que a função é nula fora do intervalo [1, 3].



Resolução:

Existem pelo menos duas maneiras de determinar o valor de **a** . Uma maneira (a mais simples) parte da observação que a área total da função (que corresponde à integral no intervalo) é a soma da área de dois trapézios (olhe a figura de lado). Além disto as áreas de cada trapézio são iguais entre si. Portanto, basta calcular a área de um deles e multiplicar por 2. Assim, sabendo que a área de um trapézio é dada pela média das bases multiplicada pela altura do trapézio, teremos

$$\int_1^3 f(x) dx = 2 \times \left(\frac{0,6+a}{2} \times 1 \right) = 0,6+a .$$

Como esta integral deve ser igual a 1 para ser distribuição de probabilidade, temos que **a = 0,4**.

Feito isto, para dar segmento à questão, x calculemos quais seriam as equações das retas correspondentes aos segmentos de reta acima, ou seja, os determinados pelos pontos (1; 0,6) e (2; 0,4) e o outro determinado por (2; 0,4) e (3; 0,6). Como a equação da reta é dada por

$$y = ax + b ,$$

façamos que ela seja satisfeita para cada par de pontos,

$$\begin{aligned} 0,6 &= a \times 1 + b, \\ 0,4 &= a \times 2 + b \end{aligned} \quad \text{para a reta dada pelos pontos (1; 0,6) e (2; 0,4)}$$

$$\text{e } \begin{aligned} 0,4 &= a \times 2 + b, \\ 0,6 &= a \times 3 + b \end{aligned} \quad \text{para a reta dada pelos pontos (2; 0,4) e (3; 0,6).}$$

Resolvemos estes sistemas encontramos as retas

$$y = -0,2x + 0,8 = \frac{4-x}{5} \quad \text{para a reta dada pelos pontos (1; 0,6) e (2; 0,4)}$$

$$y = 0,2x = \frac{x}{5} \quad \text{para a reta dada pelos pontos (2; 0,4) e (3; 0,6).}$$

Calculemos a média que é dada por

$$\mu = \int_1^3 x f(x) dx = \int_1^2 x \frac{4-x}{5} dx + \int_2^3 x \frac{x}{5} dx = \frac{1}{5} \left[\int_1^2 x(4-x) dx + \int_2^3 x^2 dx \right] ,$$

ou

$$\mu = \frac{1}{5} \left[4 \int_1^2 x dx - \int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx \right] = \frac{1}{5} \left[4 \frac{x^2}{2} \Big|_1^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 \right] ,$$

$$\mu = \frac{2 \times (4-1) - (8-1)/3 + (27-8)/3}{5} = \frac{6-7/3+19/3}{5} = \frac{6+4}{5} = 2 .$$

Este valor não é nenhuma surpresa pois a função é simétrica em torno de 2.

Calculemos a variância que é dada por

$$\sigma^2 = \int_1^3 x^2 f(x) dx - \mu^2 .$$

Já temos a média, então calculemos a integral,

$$\int_1^3 x^2 f(x) dx = \int_1^2 x^2 \frac{4-x}{5} dx + \int_2^3 x^2 \frac{x}{5} dx = \frac{1}{5} \left[\int_1^2 x^2(4-x) dx + \int_2^3 x^3 dx \right] ,$$

ou

$$\int_1^3 x^2 f(x) dx = \frac{1}{5} \left[4 \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x^3 dx + \int_2^3 x^3 dx \right] = \frac{1}{5} \left[4 \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 + \frac{x^4}{4} \Big|_2^3 \right],$$

ou ainda

$$\int_1^3 x^2 f(x) dx = \frac{1}{5} \left[\frac{4}{3} (8-1) - \frac{16-1}{4} + \frac{81-16}{4} \right] = \frac{28/3 - 15/4 + 65/4}{5} = \frac{131}{30} = 4,3666 \text{ .}$$

Assim a variância será

$$\sigma^2 = \int_1^3 x^2 f(x) dx - \mu^2 = \frac{131}{30} - 2^2 = \frac{127}{30} \approx 0,3666 \text{ .}$$

Por definição a moda é dada pelos valores para os quais a probabilidade é máxima. Aqui temos uma situação multimodal pois a probabilidade é máxima nos pontos 1 e 3 e estes valores constituem a resposta.

3 – Terceira questão (1,0 ponto)

Uma amostra de dez balas de uma fábrica de doces foi avaliada e se obteve os seguintes valores em gramas: 3,53; 3,43; 3,70; 3,59; 3,54; 3,50; 3,55; 3,56; 3,54; 3,63. Usando estimadores consistentes e não viciados, calcule:

Resolução:

Os estimadores para a média e a variância são dados por

$$\mu_2 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \qquad \sigma_2^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2 \right)$$

a) a média;

Resolução:

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{3,53+3,43+3,70+3,59+3,54+3,50+3,55+3,56+3,54+3,63}{10} = \frac{35,57}{10} = 3,557$$

.

b) a variância.

Resolução:

Com a média calculada, calculemos o somatório abaixo

$$\sum_{i=1}^{10} X_i^2 = 3,53^2 + 3,43^2 + 3,70^2 + 3,59^2 + 3,54^2 + 3,50^2 + 3,55^2 + 3,56^2 + 3,54^2 + 3,63^2 = 126,5701$$

Assim teremos

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - 10 \bar{X}^2 \right) = \frac{1}{9} (126,5701 - 10 \times 3,557^2) \approx 13,6681 \approx 13,67 \text{ .}$$

4 - Quarta questão (1,5 pontos)
 Calcule as probabilidades abaixo.

a) $P(X > 8,4)$ supondo que a distribuição é Uniforme no intervalo $[3, 18]$;

Resolução:

A probabilidade de uma distribuição Uniforme é dada por

$$P(a < X < b) = \frac{1}{B - A} \int_a^b dx \quad ,$$

onde $[A, B]$ ($B > A$) é o intervalo onde está definida a distribuição. No caso teremos

$$P(X > 8,4) = \frac{1}{18 - 3} \int_{8,4}^{18} dx = \frac{1}{15} (18 - 8,4) = \frac{9,6}{15} = 0,64$$

b) $P(0,31 < X < 2,19)$ supondo que a distribuição segue o modelo Exponencial com $\alpha = 0,62$;

Resolução:

Aqui a probabilidade será dada por

$$P(a < X < b) = \int_a^b \alpha e^{-\alpha x} dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b} \quad .$$

No caso específico teremos

$$P(0,31 < X < 2,19) = e^{-0,62 \times 0,31} - e^{-0,62 \times 2,19} \approx 0,8251 - 0,2572 \approx 0,5679 \quad .$$

c) $P(1,3 < X < 2,4)$ supondo que a distribuição seja a da segunda questão.

Resolução:

Aqui a probabilidade será dada por

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{4-x}{5} dx + \int_2^b \frac{x}{5} dx = \frac{1}{5} \left[\int_a^2 (4-x) dx + \int_2^b x dx \right] \quad .$$

Na situação específica do problema teremos

$$P(1,3 < X < 2,4) = \frac{1}{5} \left[4 \int_{1,3}^2 dx - \int_{1,3}^2 x dx + \int_2^{2,4} x dx \right] = \frac{1}{5} \left[4x \Big|_{1,3}^2 - \frac{x^2}{2} \Big|_{1,3}^2 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^{2,4} \right] \quad ,$$

$$P(1,3 < X < 2,4) = \frac{1}{5} \left[4(2 - 1,3) - \frac{4 - 1,69}{2} + \frac{5,76 - 4}{2} \right] = \frac{2,8 - 1,155 + 0,88}{5} = 0,505 \quad .$$

5 - Quinta questão (1,5 pontos)

Numa experiência de campo levantou-se 10 amostras com os valores abaixo em unidades arbitrárias.

L	8,1	12,5	12,5	18,2	23,4	18,8	14,9	15,4	19,2	18,3
---	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------

Usando estimadores não viciados, calcule o intervalo de confiança para a valor médio da amostra com um coeficiente de confiança de 75%.

Resolução:

Usaremos os estimadores

$$\mu_2 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_1^n X_i \qquad \sigma_2^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 - n \bar{X}^2 \right).$$

Para os dados fornecidos teremos

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_1^n X_i = \frac{8,1+12,5+12,5+18,2+23,4+18,8+14,9+15,4+19,2+18,3}{10} = \frac{161,3}{10} = 16,13$$

Calculemos agora o somatório

$$\sum_1^n X_i^2 = 8,1^2 + 12,5^2 + 12,5^2 + 18,2^2 + 23,4^2 + 18,8^2 + 14,9^2 + 15,4^2 + 19,2^2 + 18,3^2 = 2773,05 ,$$

assim teremos para a variância

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{9} \left(\sum_{i=1}^{10} X_i^2 - 10 \bar{X}^2 \right) = \frac{2773,05 - 10 \times 16,13^2}{9} = 19,0312 .$$

Temos que o intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

que para nossas informações, ou seja,

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{19,0312}{10}} = \sqrt{1,90312} \approx 1,3795 \quad , \quad z_{\gamma/2} = z_{0,75/2} = z_{0,375} = 1,15 \quad \text{e} \quad \bar{X} = 16,13$$

nos dará

$$IC(\mu; 0,75) = [16,3 - 1,15 \times 1,3795 ; 16,3 + 1,15 \times 1,3795] \approx [14,71 ; 17,89] .$$

6 – Sexta questão (1,0 pontos) **QUESTÃO ANULADA. ACRESCENTEM 0,17 PONTOS AO VALOR DAS DEMAIS QUESTÕES.**

Num lote de 1000 tijolos foi retirada uma amostra de 12 unidades cujos comprimentos variaram entre 17,9 e 18,7 cm. O fabricante afirma que a média de comprimento dos tijolos é de 18,3 cm e a variância de 6 cm². Baseado nisto, qual a probabilidade do lote de tijolos ser rejeitado com base na amostra? Suponha que é possível usar a distribuição Normal.

7 - Sétima questão (1,5 pontos)

Uma indústria metalúrgica afirma que o nível de um determinado sal metálico de suas águas servidas ultrapassou o nível de 28,0 mg/m³ em 12 dias no último mês (de 30 dias). Um estudo independente fez, suspeitando dos dados da empresa, medidas durante 21 dias, a partir do primeiro alerta oficial de contaminação, observando que o nível de 28,0 mg/m³ foi ultrapassado 9 vezes. Qual seria a probabilidade dos dados da metalúrgica estarem errados a um nível de 5%?

Resolução:

Façamos alguns cálculos preliminares.

Pelos dados da indústria a proporção amostral de ocorrência de ultrapassagem do nível de referência do sal foi de

$$p = \frac{12}{30} = 0,4$$

Devemos testar a hipótese deste valor ter sido ultrapassado a partir do relatório independente. Como estamos trabalhando com proporção amostral, usemos o estimador de variância dado por

$$\sigma^2 = p \frac{(1-p)}{n}$$

Suporemos podemos usar a distribuição Normal, ou seja,

$$\hat{p} \sim N(p, p(1-p)/n)$$

A Região Crítica é dada por

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < p_{c1} \text{ ou } x > p_{c2}\}$$

Para o valor do nível exigido temos que

$$P(\hat{p} < p_{c1} : H_0) = \frac{0,05}{2} \quad \text{e} \quad P(\hat{p} > p_{c2} : H_0) = \frac{0,05}{2}$$

Pela hipótese $p = 0,4$ e a distribuição será

$$\hat{p} \sim N(0,4, 0,24/21) = N(0,4, 0,0114)$$

Logo

$$P(\hat{p} < p_{c1} : H_0) = P\left(\frac{\hat{p} - 0,4}{\sqrt{(0,0114)}} < \frac{p_{c1} - 0,4}{\sqrt{(0,0114)}}\right) = \frac{0,05}{2}$$

Pela tabela da distribuição Normal temos que

$$\frac{p_{c1} - 0,4}{\sqrt{(0,0114)}} = -1,65 \quad \text{o que nos dá } p_{c1} = 0,223$$

$$\text{por sua vez teremos } \frac{p_{c2} - 0,4}{\sqrt{(0,0114)}} = 1,65 \quad \text{o que nos dá } p_{c2} = 0,455 .$$

Portanto

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < 0,223 \text{ ou } x > 0,455\}$$

ou seja, não existe base para discordar do relatório da indústria metalúrgica.

Atenção:

I) Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

II) Todos os cálculos deverão ser feitos com pelo menos quatro casas decimais e arredondados para duas APENAS ao final.

III) Tenha cuidado quanto a notação. Caso não a siga você terá pontos descontados seja na lista ou na prova.