Probabilidade e Estatística

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho

Regina Célia Paula Leal Toledo

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Probabilidade e Estatística

Livro Texto:

[1] "Noções de Probabilidade e Estatística"
Marcos Nascimento Magalhães e Antonio Carlos Pedroso de Lima, Edusp (2005).

[2] "Probabilidade: Um Curso Introdutório"
Carlos A. B. Dantas, Edusp (2004).

Aula 9

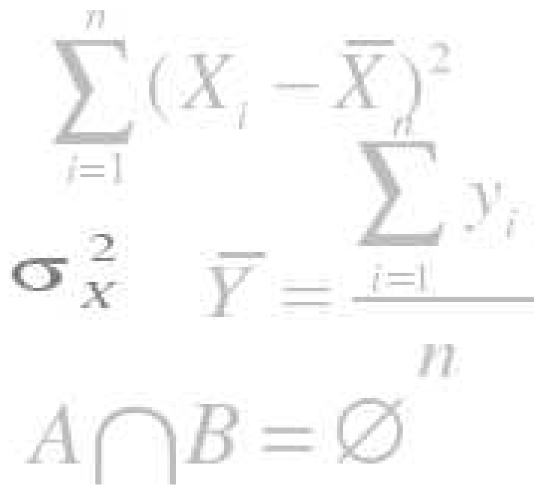
Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho
Regina Célia Paula Leal Toledo

Variáveis aleatórias contínuas II
Modelos Contínuos

Conteúdo:

9.1 Modelos contínuos
9.2 Modelo uniforme contínuo
9.3 Modelo exponencial
9.4 Modelo normal
9.5 Mais alguns modelos contínuos



9.1 Modelos Contínuos

Como foi explicitado no exemplo dos arqueólogos, geralmente temos um modelo teórico que nos permite analisar uma informação, ou seja, fazemos pressupostos baseados no conhecimento do problema que será estudado.

Caso o modelo for mal escolhido, poderemos chegar a conclusões distorcidas, portanto....

"Os números não mentem mas podemos mentir com os números"

9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos

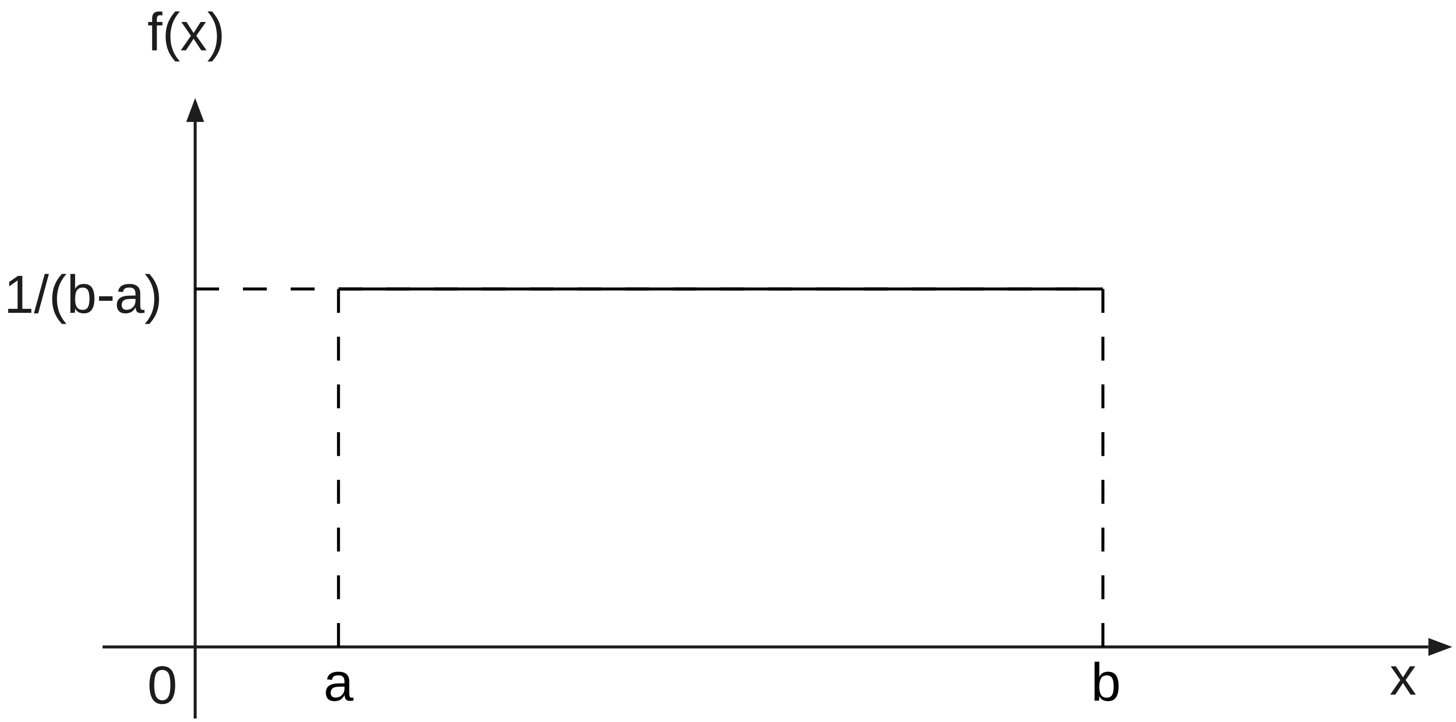
A densidade de probabilidade de uma variável aleatória $\mathbf{X}$ no intervalo [a, b], a < b, é dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

ou graficamente...

9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos



9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos

b deve ser menor que ***a*** e resultado da subtração deve ser positivo;

Neste modelo se supõe que os valores possíveis para a variável aleatória têm a mesma probabilidade de ocorrência.

9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos

Esperança (média, primeiro momento)

$$\mu=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2}$$

Segundo momento centrado

$$E(X^2)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Variância

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos

Exemplo: Para verificar a resistência à pressão de tubos de PVC, o fabricante experimenta amostras de tubos aplicando pressão até acontecer o primeiro vazamento. Os tubos tem 6 metros de comprimento e o ponto no qual houve a falha é anotado pela distância em relação aos seus extremos.

Escolhe-se um tubo ao acaso para ser inspecionado.

Qual a probabilidade de que neste tubo ocorra um vazamento a 1 metro das extremidades?

reveja a aula 4: Probabilidades

9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos

Chamamos de $\mathbf{X}$ a variável aleatória que indica a distância do vazamento à uma extremidade.

Supondo que todos os pontos do tubo tem igual probabilidade de vazarem, vamos usar o modelo uniforme contínuo com a seguinte densidade de probabilidade com a = 0 (posição inicial do tubo) b = 6 (posição final), ou seja,

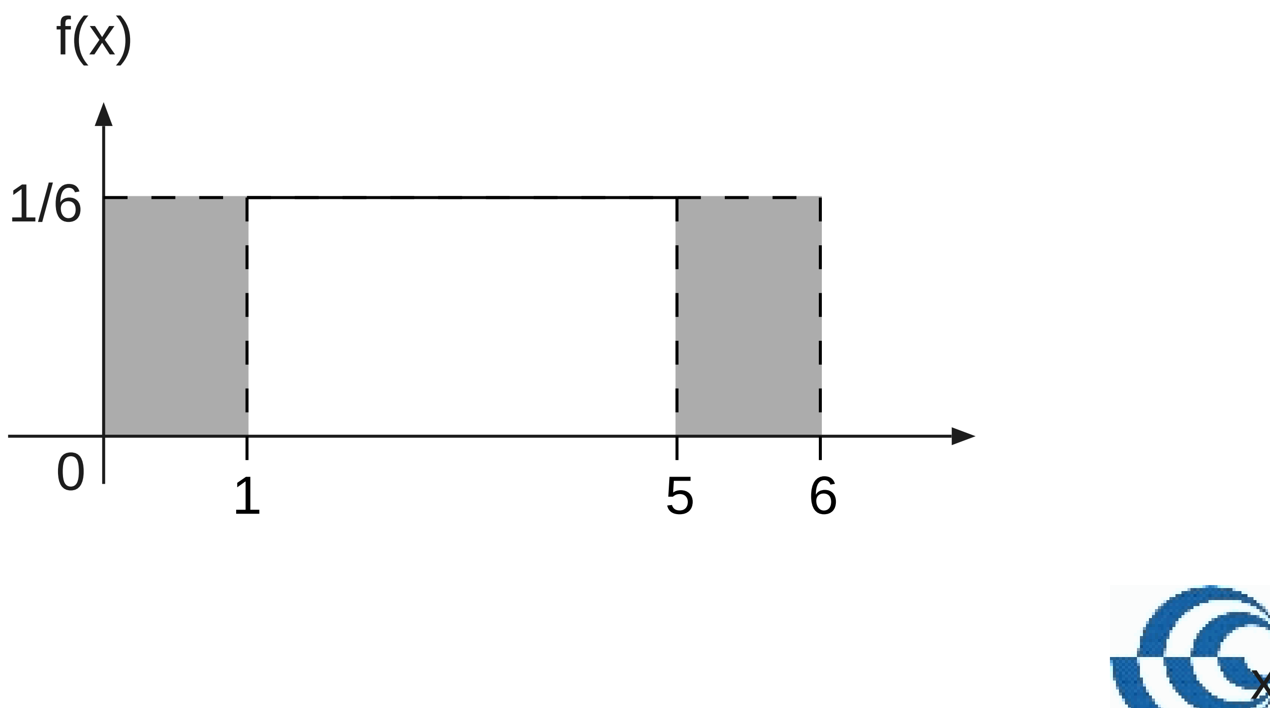
$$f(X) = \begin{cases} 1/6, & \text{se } 0 \leq x \leq 6; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos

A probabilidade que queremos é $\mathbf{X} \in \{[0,1] \cup [5,6]\}$ que é a do vazamento ocorrer a um metro das extremidades.

Graficamente...



9.2 Modelo Uniforme Contínuo

Principais Modelos Contínuos

Portanto a probabilidade que queremos calcular será

$$P(\mathbf{X} \in \{[0,1] \cup [5,6]\}) = P(0 \leq \mathbf{X} \leq 1) + P(5 \leq \mathbf{X} \leq 6)$$

e aqui temos uma soma já que os intervalos [0,1] e [5,6] são disjuntos. Usando a densidade de probabilidade para calcularmos a probabilidade temos

$$\int_0^1 \frac{1}{6}\mathrm{dx} + \int_5^6 \frac{1}{6}\mathrm{dx} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Neste caso a distribuição é dada pela expressão abaixo

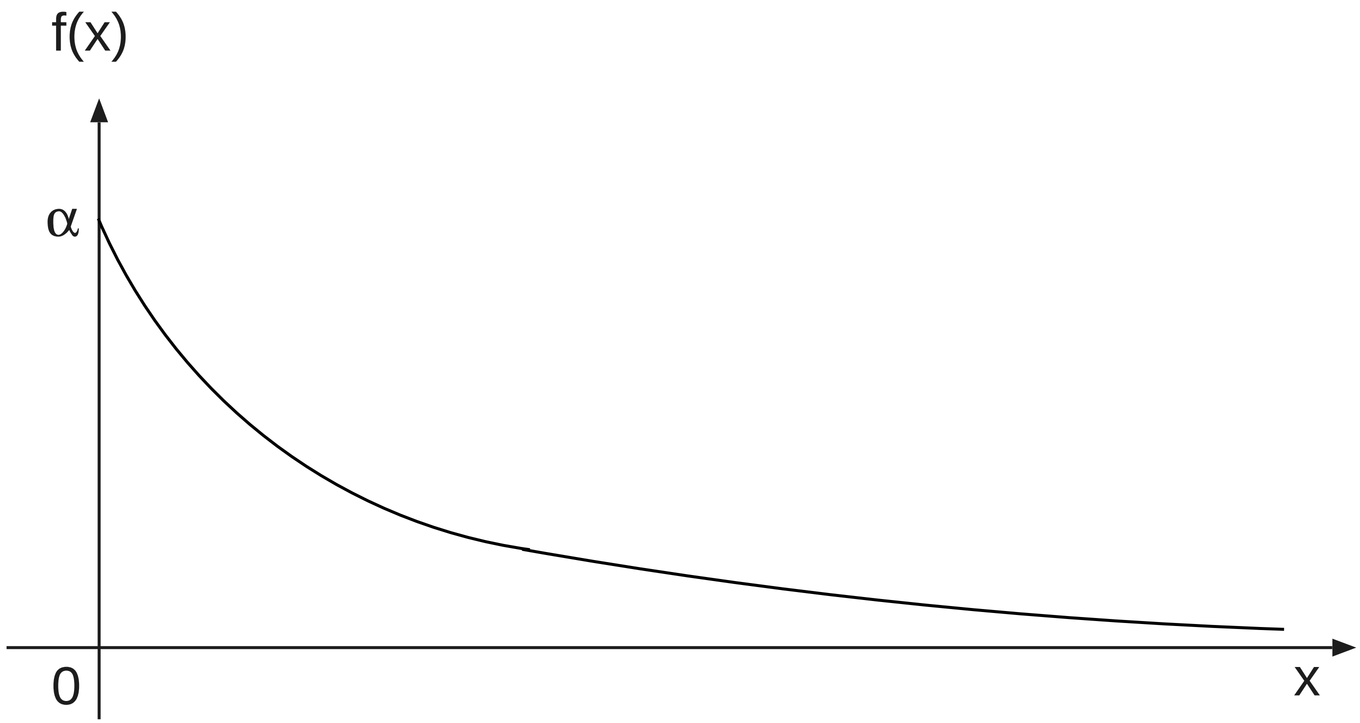
$$f(x)=\begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde $\alpha > 0$. Graficamente ....

X

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos



9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Esperança (média, primeiro momento)

$$\mu = \int_0^{\infty} \alpha x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$$

Segundo momento centrado

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \alpha x^2 e^{-\alpha x} dx$$

Variância

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{1}{\alpha^2}$$

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Muito usado em áreas como física, computação, engenharia e biologia.

- → Vida útil de equipamentos;
- → Tempos de falha;
- → Tempo de sobrevivência de uma espécie;
- → Decaimento radioativo

são problemas geralmente trabalhados por este modelo.

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Exemplo:

Uma empresa produz lâmpadas que tem como tempo de duração média igual a 8000 horas. É dada uma garantia de reposição se a lâmpada durar menos de 50 horas.

Baseado nestes dados e supondo que o problema possa ser modelado pelo modelo exponencial, calcule a proporção de trocas por defeito de fabricação.

x

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Exemplo:

Este caso é de aplicação direta da definição da distribuição integrando no intervalo de duração que permite o uso da garantia, ou seja, no intervalo [0, 50] e com $\alpha = 1/8000$

$$P(T<50)=\int_0^{50} \frac{1}{8000} e^{\frac{-t}{8000}} dt = 1 - e^{\frac{50}{8000}} \approx 0{,}006$$

ou seja, a proporção de trocas por defeito será de 0,6%.

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Esta distribuição tem uma propriedade chamada de falta de memória.

Vamos ilustrar esta propriedade através de um exemplo

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Exemplo

Uma fonte radioativa emite radiação. O tempo entre emissões é uma variável aleatória $\mathbf{X}$ (medida em minutos) com distribuição exponencial de parâmetro $\alpha = 0{,}2$.

Calcule a probabilidade de haver uma emissão em um intervalo inferior a 2 minutos.

$$P(X<2)=\int_0^2 0{,}2\,e^{-0{,}2x}\,dx=-e^{-0{,}4}+1\approx 0{,}33$$

X

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Exemplo

Vamos explorar um pouco as propriedades da distribuição exponencial continuando o exercício. Calculemos agora a probabilidade do intervalo ser superior ou igual a 7 saben-do-se que este intervalo é superior ou igual a 5 minutos.

Traduzindo para probabilidades:

Queremos saber a probabilidade condicional $P(\mathbf{X} \geq 7|\mathbf{X} \geq 5)$

Relembrando a aula 4 de Probabilidades vamos escrever ....

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Exemplo (continuação)

$$P(X \geq 7 | X \geq 5) = \frac{P(X \geq 7, X \geq 5)}{P(X \geq 5)} = \frac{P(X \geq 7)}{P(X \geq 5)}$$

ou ainda

$$\frac{\int_7^\infty 0{,}2\, e^{-0{,}2\,x} dx}{\int_5^\infty 0{,}2\, e^{-0{,}2\,x} dx} = \frac{e^{-1,4}}{e^{-1}} \approx 0{,}67$$

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Exemplo (continuação)

Podemos calcular $P(\mathbf{X} \geq 2)$ como o complementar de $P(\mathbf{X} < 2)$ que nos dá

$$\int_2^{\infty} 0,2e^{-0,2} dx \approx 0,67$$

Observe, então, que temos, neste caso a seguinte igualda-de

$$P(\mathbf{X} \geq 7 | \mathbf{X} \geq 5) = P(\mathbf{X} \geq 2)$$

9.3 Modelo Exponencial

Principais Modelos Contínuos

Exemplo (continuação)

Isto não é coincidência!

É a manifestação da propriedade chamada de falta de memória.

Se estamos avaliando um problema de, por exemplo, durabilidade de um equipamento temos que a probabilidade dele durar, digamos, t + s anos (sabendo que ele já durou s anos) é igual a probabilidade de um equipamento novo durar t anos, ou seja,neste modelo podemos esquecer a informação "idade" do equipamento e só importa a probabilidade que quanto mais ele poderá durar.

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

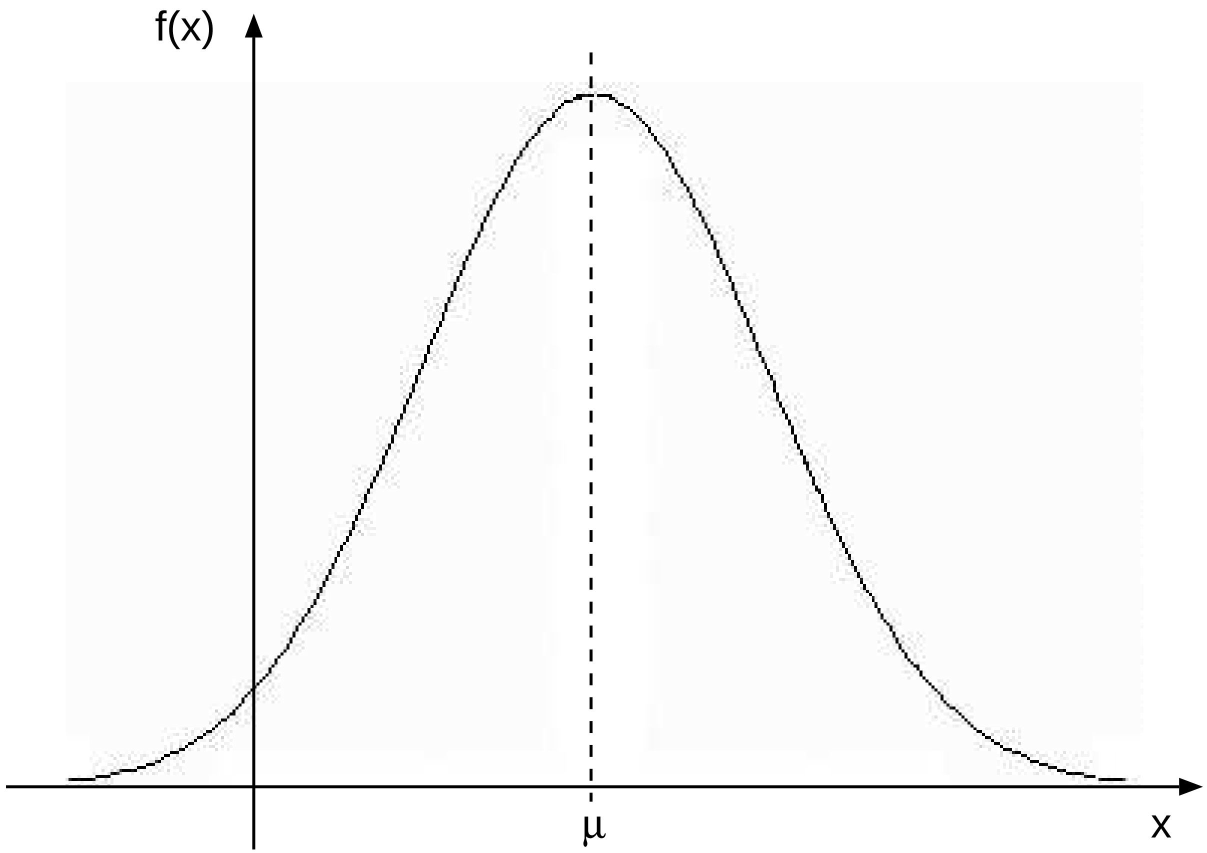
Uma variável aleatória contínua tem distribuição normal (ou gaussiana) com parâmentros μ e σ^2 se sua função densidade é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

que pode ser representada pela figura

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos



Densidade Normal

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Esperança (média, primeiro momento)	μ
Segundo momento centrado	$\sigma^2 - \mu^2$
Variância	σ^2

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Propriedades:

$\rightarrow$ $f(x)$ é simétrica em relação a média

$\rightarrow$ $f(x)$ vai a zero quando ***x*** tende para infinito (positivamente ou negativamente)

$\rightarrow$ $f(x)$ tem seu valor máximo quando ***x*** é a média

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

- → É aplicável em situações que envolvem eventos aleatórios;
- → Relacionada com o Téorema do Limite Central, do qual falaremos mais a frente.
- → É uma aproximação de várias outras distribuições, incluindo a Binomial

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

No cálculo de probabilidades com esta distribuição é necessário calcular a integral

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

que só pode ser resolvida numericamente, de forma aproximada.

Nos trabalhos manuais se usam tabelas.

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Modelo normal - Transformação de variáveis

Para evitar a criação desnecessária de várias tabelas com valores μ e σ^2 de utiliza-se uma transformação que conduz sempre ao cálculo de probabilidades com média 0 e variância 1.

Uma distribuição com média 0 e variância 1 é chamada *Distribuição Normal Padrão* ou *Distribuição Normal Reduzida.*

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Modelo normal - Transformação de variáveis

Façamos a mudança de variável $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$

Pelas propriedades da média e da variância, obtemos

$$E(Z) = E(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma} E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}[E(X) - \mu] = 0$$

$$Var(Z) = Var(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2} Var(X) = 1$$

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Modelo normal - Transformação de variáveis

Da mesma forma, para determinar a probabilidade de $\mathbf{X} \in [a,b]$ escreveremos

$$P(a \leq X \leq b) = P(a-\mu \leq X-\mu \leq b-\mu) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ou seja, a partir de qualquer valor da média e do desvio padrão, podemos obter as probabilidades a partir da *Distribuição Normal Reduzida*.

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Exemplo

Um estudo do Sindicato dos Bancários indica que 30% dos funcionários do banco tem problemas com o estresse, provenientes das condições de trabalho. Numa amostra de 200 bancários, qual a probabilidade de pelo menos 50 deles estarem nesta situação?

Suposições

→ Os bancários são sorteados ao acaso

→ Supomos que todos tem a mesma probabilidade de estarem estressados

Escolhendo a Distribuição Binomial para a variável **X** ~ b(200;0,3)

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Exemplo

Escolhendo a Distribuição Binomial para a variável $\mathbf{X}$~ b(200;0,3) a probabilidade desejada é dada por

$$P(X \geq 50) = \sum_{k=50}^{200} \binom{200}{k} 0{,}3^{k}\, 0{,}7^{200-k}$$

de cálculo tedioso mesmo com uma calculadora.

Mas a Distribuição Normal é uma aproximação da Binomial. Vejamos quanto no caso deste exemplo.

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Exemplo

Do que foi estudado da Distribuição Binomial, se $\mathbf{X}$ ~ b(200;0,3) então

$$E(\mathbf{X}) = np = 60$$

e

$$Var(\mathbf{X}) = np(1-p) = 42$$

Vamos considerar estes valores como a média e a variância da distribuição normal, ou seja,

$$\mathbf{Y} \sim N(\mu = 60, \sigma^2 = 42)$$

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Exemplo

O que nos dá

$$P(X \geq 50) \approx P(Y \geq 50) = P\left(\frac{Y-60}{\sqrt{42}} \geq \frac{50-60}{\sqrt{42}}\right) = P(Z \geq -1{,}54) = 0{,}9382$$

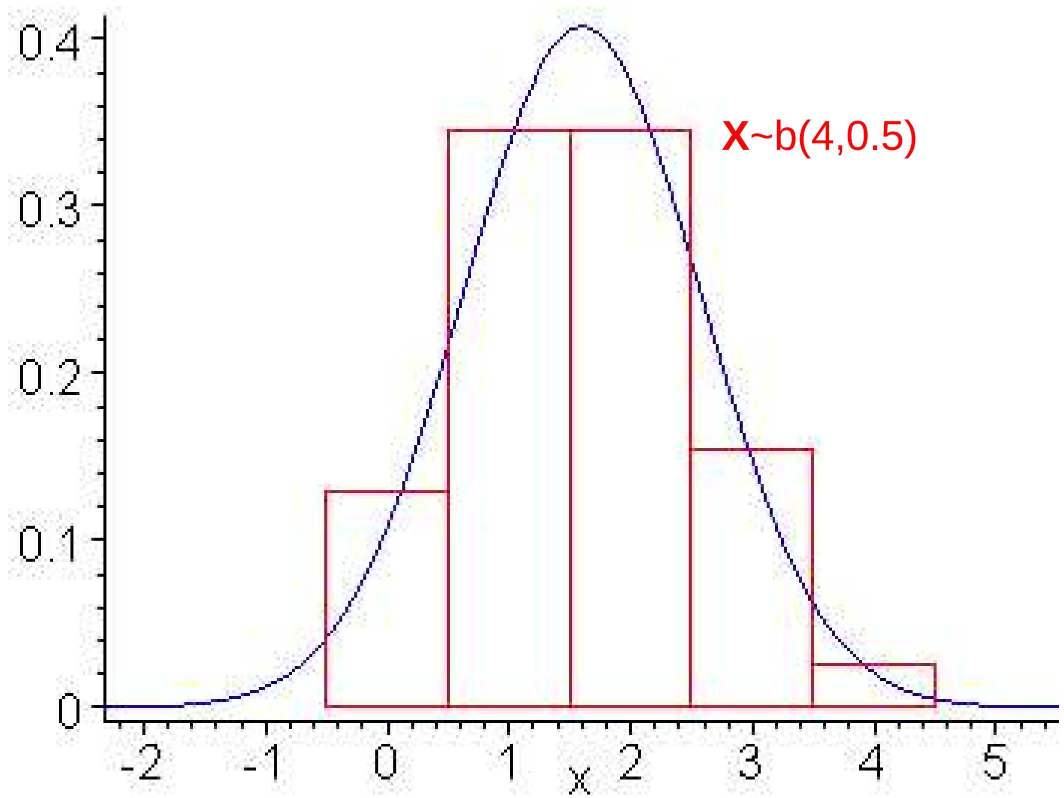
O resultado direto da distribuição binomial nos dá 0,9484, indicando boa correspondência dos valores.

Já que falamos nisto.....

9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

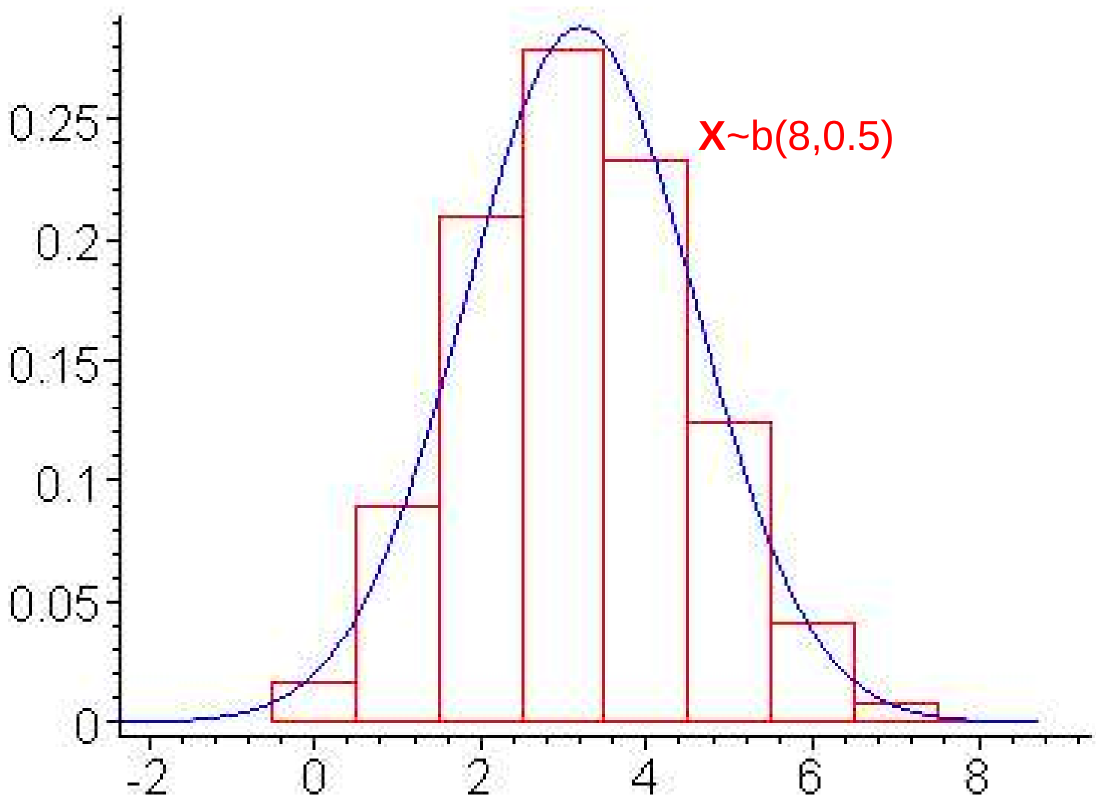
Modelo normal - Quanto a distribuição Normal é próxima da Binomial?



9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

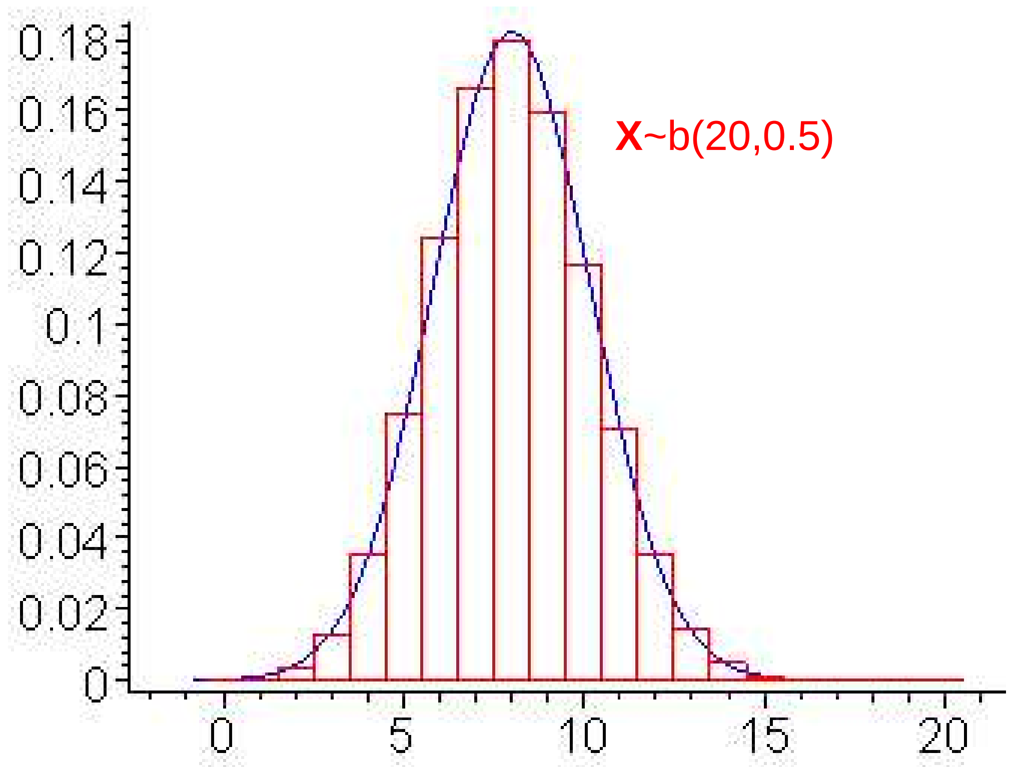
Modelo normal - Quanto a distribuição Normal é próxima da Binomial?



9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

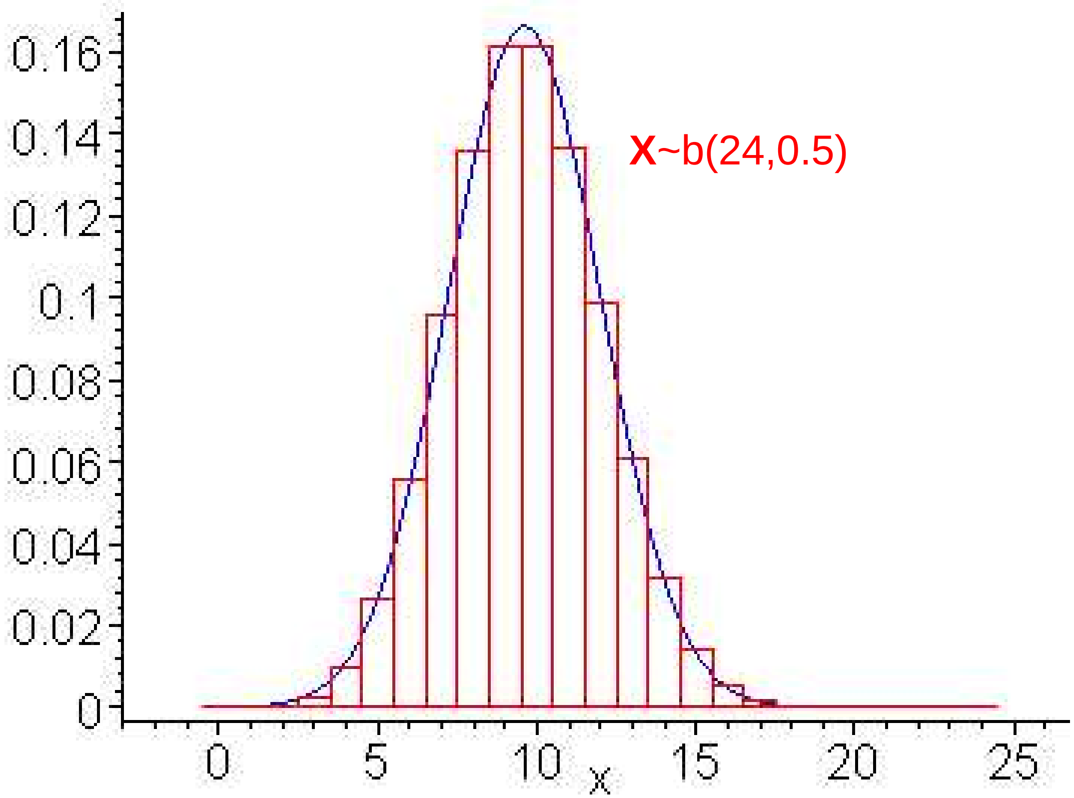
Modelo normal - Quanto a distribuição Normal é próxima da Binomial?



9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Modelo normal - Quanto a distribuição Normal é próxima da Binomial?



9.4 Modelo Normal

Principais Modelos Contínuos

Modelo normal - Quanto a distribuição Normal é próxima da Binomial?

→ Quanto maior for o número de ensaios

→ Quanto mais próximo ***p*** for de 1/2

mais próximo a distribuição Normal será da Binomial

9.5 Mais alguns modelos contínuos

Distribuição Gama

$$f(x) = \frac{\lambda^r x^{(r-1)} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)}$$

para r inteiro temos as chamadas Distribuições de Erlang, primeiramente usadas para modelar a duração de chamadas telefônicas em 1917.

9.5 Mais alguns modelos contínuos

Distribuição de Weibull

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{x}{\eta}\right)^{(\beta-1)} exp^{\left[\left(-\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right]}$$

para $\beta = 1$ se reduz a distribuição exponencial.

9.5 Mais alguns modelos contínuos

E todos os que forem necessários, incluindo um que você inventar....

Aula 9

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho
Regina Célia Paula Leal Toledo

Variáveis aleatórias contínuas II
Modelos Contínuos

Conteúdo:

9.1 Modelos contínuos
9.2 Modelo uniforme contínuo
9.3 Modelo exponencial
9.4 Modelo normal
9.5 Mais alguns modelos contínuos

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$$

$$\sigma_X^2 \qquad \bar{Y}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$A\cap B=\varnothing$$

Fundação CECIERJ
Consórcio cederj