Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 2° semestre de 2010.

Gabarito

Nome :

Assinatura :

Observações:
1. A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal;
2. É permitido o uso de máquina de calcular;
3. Todos os cálculos têm que ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada;
4. Use caneta para preencher o seu nome e assine as folhas de questões e as de respostas;
5. Você pode usar lápis para responder as questões;
6. Escreva **legivelmente**;
7. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas;
8. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas.
9. **As respostas nas folhas das questões serão ignoradas.**

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Primeira questão (2,5 pontos)
Uma densidade de probabilidade é dada por P(x) = C f(x) (C é uma constante), onde f(x) é dada por

$$x^2-2x+2; x\in[0,2]\quad .$$

sendo nula fora deste intervalo.
a) Calcule C de tal forma que P(x) satisfaça as condições de P(x) ser uma densidade de probabilidade. (1,0 ponto)
Solução:
Uma distribuição de probabilidade deve ser não negativa no intervalo de definição e também deve ser normalizada, ou seja, sua integral deve valer 1 dentro do intervalo de definição:

$$\int_a^b f(x)\,dx=1\quad .$$

No nosso caso teremos então

$$\int_0^2 C(x^2-2\text{x}+2\,dx)=1$$

ou seja,

$$\int_0^2 C(x^2-2\text{x}+2\,dx)=C(\frac{x^3}{3}-x^2+2\text{x})|_0^2=1$$

ou

$$C(\frac{8}{3}-4+4)=1$$

logo $C=3/8$ **.**

b) Calcule o valor médio; (0,5 ponto)
Por definição temos

$$\mu=\int_a^b x\,f(x)dx$$

assim teremos para a nossa função

$$\mu=\frac{3}{8}\int_0^2 x(x^2-2\text{x}+2)dx=\frac{3}{8}(\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+x^2)|_0^2=\frac{3}{8}(\frac{16}{4}-\frac{16}{3}+4)=\frac{3}{8}\frac{8}{3}=1$$

c) Calcule a variância. (1,0 ponto)
A definição de variância para distribuições de probabilidade contínuas é

$$\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$$

onde

$$E^2(X^2)=\int_a^b x^2 f(x)dx$$

No nosso caso teremos

$$E(X^2)=\frac{3}{8}\int_0^2 x^2(x^2-2\text{x}+2)dx=\frac{3}{8}(\frac{x^5}{5}-\frac{2}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3)|_0^2=\frac{3}{8}(\frac{32}{5}-\frac{32}{4}+\frac{16}{3})=\frac{3}{8}\frac{56}{15}=\frac{7}{5}$$

e daí

$$\sigma^2 = \frac{7}{5} - 1 = \frac{2}{5}$$

Segunda questão (2,5 pontos)

Um conjunto de dados foi modelado segundo a distribuição Normal. A média dos dados é 23,2 e a variância 14,4.

Solução:

Calculamos as probabilidades usando

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b+\mu}{\sigma}\right)$$

que nos permitirá, com o auxílio das propriedades de simetria da distribuição Normal, usar a tabela da distribuição Normal padrão.

Calcule:

a) P(X > 25) (0,5 ponto)

Solução:

$$P(X > 25) = 0{,}5 - P\left(Z > \frac{25 - 23{,}2}{\sqrt{(14{,}4)}}\right) = 0{,}5 - P\left(Z > \frac{1{,}8}{3{,}794}\right)$$

ou ainda

$$P(X > 25) = 0{,}5 - P(Z > 0{,}474) = 0{,}5 - 0{,}1808 = 0{,}3192$$

b) P(X < 27) (0,5 ponto)

Solução:

$$P(X < 27) = 0{,}5 + P\left(Z < \frac{27 - 23{,}2}{\sqrt{(14{,}4)}}\right) = 0{,}5 + P(Z < 1{,}001) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413$$

c) P(25 < X < 27) (0,5 ponto)

Solução:

$$P(25 < X < 27) = P\left(\frac{25 - 23{,}2}{\sqrt{(14{,}4)}} < Z < \frac{27 - 23{,}2}{\sqrt{(14{,}4)}}\right) = P(0{,}474 < Z < 1{,}001)$$

ou

$$P(25 < X < 27) = -0{,}1808 + 0{,}3413 = 0{,}1605$$.

Observe que podemos obter este resultado apenas usando os valores calculados no itens anteriores e usando das propriedades da distribuição Normal.

d)P(X > 29) (0,5 ponto)

Solução:

$$P(X>29)=0{,}5-P\left(Z>\frac{29-23{,}2}{\sqrt{(14{,}4)}}\right)=0{,}5-P(Z>1{,}5287)=0{,}5-0{,}4357=0{,}0643$$

e)P(X < 23) (0,5 ponto)
Solução:

$$P(X<23)=0{,}5+P\left(Z<\frac{23-23{,}2}{\sqrt{(14{,}4)}}\right)=0{,}5+P(Z<0{,}0527)=0{,}5-0{,}0199=0{,}4801$$

Terceira questão (2,5 pontos)
Numa indústria se faz um pesado teste de corrosão em placas padronizadas de um determinado tipo de aço. Depois de teste se conta quantos pontos de ferrugem surgem nas chapas obtendo a tabela abaixo.

Chapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Pontos	80	69	91	78	83	92	96	83	86	93	91	70	81

Baseado nestes dados:
a) estime o número médio de pontos de ferrugem e sua variância. (1,0 ponto)

Solução:

Usemos os estimadores para média e variância

$$\bar{X}=\frac{\sum_{1}^{n} X_i}{n} \quad \textbf{e} \quad S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right) \quad .$$

Para os nossos dados obtemos

$$\bar{X}=\frac{80+69+91+78+83+92+96+83+86+93+91+70+81}{13}=\frac{1093}{13}=84{,}0769 \quad .$$

Para a variância teremos

$$\sum_{1}^{n} X_i^2=6400+4761+8281+6084+6889+8464+9216+6889+7396$$
$$+8649+8281+4900+6561=92771$$

$$S^2 = \frac{1}{12}\left(92771 - 13 \times 84{,}0769^2\right) = 71{,}9102$$

b) Suponha ser possível usar a distribuição Normal. Estime a probabilidade de se encontrar chapas deste tipo com mais de 86 pontos de ferrugem. (1,5 pontos)
Solução:

Se podemos usar a distribuição Normal então a probabilidade procurada é

$$P(X > 86) = 0{,}5 - P(Z > \frac{86 - 84{,}0769}{\sqrt{71{,}9102}}) = 0{,}5 - P(Z > \frac{1{,}9231}{8{,}4799})$$

$$P(X > 86) = 0{,}5 - P(Z > 0{,}2267) = 0{,}409$$

Quarta questão (2,5 pontos)

A população da Probabilândia é bem homogênea. O Ministério da Saúde da Probabilândia usa como referência 67 $(mg/ml)^2$ para a variância da taxa de colesterol total da população. Numa região do país foram examinadas 62 pessoas e este exame resultou numa média de 142 mg/ml de colesterol total nesta amostra da população. Determine o intervalo de confiança para a média verdadeira usando um coeficiente de 95%.
Solução:
Por definição o intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \text{ .}$$

O valor $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **no nosso caso é dado por**

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{67}{62}} = 1{,}0806$$

Pelo uso da tabela de distribuição Normal padrão temos $z_{\gamma/2} = 1{,}96$ **.**
Assim obtemos

$$IC(\mu, 95) = [142 - 1{,}96 \times 1{,}0806 ; 142 + 1{,}96 \times 1{,}0806] = [139{,}88 ; 144{,}11]$$