Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP3 1° semestre de 2007
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

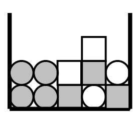
1 - Primeira questão (2,0 pontos)

Foram colocados misturados em uma determinada caixa, quadrados e círculos, cinza e brancos, como mostrado na Figura 1. Pergunta-se:
se for tirado apenas um objeto qual a probabilidade deste objeto selecionado ser quadrado ou ser branco?

Observação: essa item foi anulado por causa da cor cinza não ter aparecido da Figura. Os pontos serão divididos proporcional ao valor deste item. Os poucos alunos que fizeram a questão teoricamente não serão prejudicados.

(ii) se forem tirados dois objetos qual a probabilidade dos dois serem círculos?

Figura 1 →



- *Resposta:*

6 círculos: 4 cinzas e 2 brancos
5 quadrados: 3 cinzas e 2 brancos

Probabilidades:
- *Quanto ao formato:*

Probabilidade de ser círculo (C): $P(C) = \frac{6}{11} = 0{,}5455$

Probabilidade de ser quadrado (Q): $P(Q) = \frac{5}{11} = 0{,}4545$

- *Quanto a cor:*

Probabilidade de ser um objeto cinza (Ci): $P(Ci) = \frac{7}{11} = 0{,}6364$

Probabilidade de ser um objeto branco (Br): $P(Br) = \frac{4}{11} = 0{,}3636$

- *Quanto a ser quadrado branco:* $P(Q \cap Br) = \frac{2}{11} = 0{,}1818$

(i) *Probabilidade de ser quadrado ou ser branco P(Q U Br) (1,0 ponto):*

$$P(Q \cup Br) = P(Q) + P(Br) - P(Q \cap Br) = 0{,}4545 + 0{,}3634 - 0{,}1818 = 0{,}6361$$

(ii) *Probabilidade de dois objetos retirados serem círculos (1,0 ponto* → 1,1pontos*)*

Sem reposição:
probabilidade do primeiro objeto ser círculo: P(C)=0,5455
probabilidade condicional (segundo objeto): $P(C_2|C_1)=5/10=0{,}5$

$$P(C_2 | C_1) = \frac{P(C_2 \cap C_1)}{P(C_1)}$$
$$P(C_2 \cap C_1) = P(C_1)P(C_2 | C_1)$$
$$P(C_2 \cap C_1) = \frac{6}{11} \times \frac{5}{10} = 0{,}2727$$

2 - Segunda questão (2,5 pontos → 2,8 pontos)

Considere 3 fábricas, F_1, F_2, F_3, que produzem calças jeans em lotes semanais de 150, 200 e 350 calças, respectivamente. Uma empresa compra calças dessas 3 fábricas para exportar. Ao chegar nessa empresa os lotes semanais das fábricas são misturadas. Suponha que a probabilidade de se encontrar calças defeituosas em cada uma das fábricas seja de 2%, 10% e 5%, respectivamente. Selecionando-se uma dessas calças ao acaso, determine a probabilidade de:

(i)ser defeituosa (1,5 pontos → 1,7 pontos):

$$P(F_1) = \frac{150}{700} = 0{,}214 \rightarrow P(A | F_1) = 0{,}020$$
$$P(F_2) = \frac{200}{700} = 0{,}286 \rightarrow P(A | F_2) = 0{,}100$$
$$P(F_3) = \frac{350}{700} = 0{,}500 \rightarrow P(A | F_3) = 0{,}050$$

Chamando de A o evento peça defeituosa, temos:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3} P(F_1)P(A\,|\,F_1)$$
$$P(A)=0,214\times 0,020+0,286\times 0,100+0,500\times 0,050$$
$$P(A)=0,058$$

(ii)ser da fábrica F_1, sabendo que a peça é defeituosa (1,0 ponto → 1,1 pontos).

$$P(F_1\,|\,A)=\frac{P(F_1)P(A\,|\,F_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(F_1)P(A\,|\,F_1)}=\frac{0,214\times 0,020}{0,058}$$
$$P(F_1\,|\,A)=0,074$$

3 - Terceira questão (2,5 pontos → 2,8 pontos)

Sabe-se que os pacientes diagnosticados com câncer de próstata precocemente têm 85% de probabilidade de serem completamente curados. Para um grupo de 16 pacientes nessas condições, use o modelo binomial e calcule qual a probabilidade de:

(i) 13 ficarem completamente curados (→ 1,1 pontos):

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,3,...,n$$

$$n=16;\quad k=13;\quad p=0,85$$

$$P(X=13)=\left(\frac{16!}{13!(16-13)!}\right)0,85^{13}(1-0,85)^{16-13}$$

$$P(X=13)=560\times 0,120905\times 0,003375=0,2285$$

(ii) menos que 3 permanecerem com a doença (→ 1,7 pontos).

a) vendo que, nesse caso, mais de 13 pacientes teriam que ser curados, ou seja:

P(X>13)=P(X=14)+P(X=15)+P(X=16);

b) assumindo que a probabilidade de não ficar curado é $P(A^c)$=1 - 0,85 = 0,15, pode-se calcular *P(X< 3).*

Em qualquer um dos casos tem-se:

$$P(X>13)=\left(\frac{16!}{14!(16-14)!}\right)0{,}85^{14}(1-0{,}85)^{16-14}+\left(\frac{16!}{15!(16-15)!}\right)0{,}85^{15}(1-0{,}85)^{16-15}+\left(\frac{16!}{16!(16-16)!}\right)0{,}85^{16}(1-0{,}85)^{16-16}$$

$$P(X>13)=120\times 0{,}85^{14}\times 0{,}15^{2}+16\times 0{,}85^{15}\times 0{,}15+0{,}85^{16}\times 0{,}15^{0}$$

$$P(X>13)=120\times 0{,}10277\times 0{,}0225+16\times 0{,}08735\times 0{,}15+1\times 0{,}07425\times 0{,}15$$

$$P(X>13)=0{,}498266$$

4 - Quarta questão (1,5 pontos → 1,7 pontos)

Dê a condição para que a função abaixo seja uma densidade de probabilidade.

$$f(x)=ax^{2};0\leq x\leq 2$$

Solução:
Pela definição a densidade de probabilidade deve ser não negativa e sua integral deve ser igual a 1 dentro do intervalo no qual ela está definida. Observe que a primeira propriedade está garantida por inspeção se $a>0$. Integremos a função dada no intervalo [0, 2]

$$\int_0^2 a\,x^2\,dx - a\int_0^2 x^2\,dx - a\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 - a\left(\frac{8}{3}-\frac{0}{3}\right) - \frac{8}{3}\,a$$

Como é necessário que esta integral seja igual a 1, a condição que temos para que isto aconteça é que façamos $a=3/8$.

5- Quinta questão (1,5 pontos → 1,7 pontos)

Identifique as hipóteses testadas em cada situação apresentada abaixo:

a) Houve um vazamento de água contaminada de uma siderúrgica para um rio. A direção da siderúrgica afirmam que o nível de contaminação do rio foi menor que 20% acima dos valores máximos de toxidade durante o primeiro dia do vazamento. Ambientalistas não concordam. (0,5 pontos)

Solução:

O teste é entre $contaminação<0{,}2$ e $contaminação\geq 0{,}2$

b) Um sistema de proteção contra picos de alta tensão está sendo posto em dúvida, apesar de ter havido apenas poucos eventos de falhas. Pela análise do sistema, se suspeita que o modelo mais adequado para analisar o caso seja o Exponencial. (0,5 pontos)

Solução:

Devemos verificar se a distribuição é exponencial. Se o_i é a freqüência observada e e_i é a freqüencia esperada, podemos avaliar a adequação pela fórmula

$$Q^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{|o_i - e_i|^2}{e_i}$$

Se Q_{max} é o valor além do qual não podemos considerar a distribuição adequada, o teste será entre $Q < Q_{max} e\, Q > Q_{max}$.

c) Uma firma de implosões suspeita de que as espoletas das cargas explosivas estão com problemas de fabricação. São detonadas 10 espoletas de uma caixa de 100 e se anotou a proporção das falhas e comparadas à especificação do fabricante. (0,5 pontos)

Solução:

Seja n o número de falhas e n_f o número médio de falhas especificadas pelo fabricante. Testamos $n < n_f contra\; n > n_f.$