Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP3 2° semestre de 2015
GABARITO

Observações:

- A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal
- É permitido o uso de máquina de calcular
- Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
- **Utilize nos cálculos quatro casas decimais arrendondando para duas só ao final**
- Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas
- Você pode usar lápis para responder as questões
- **Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível**
- Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas
- **Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.**

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 – Primeira questão – (2,5 pontos) Seja uma variável aleatória X com a distribuição de probabilidade dada pela tabela a seguir:

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0	p^2	0	0	p	p^2

(a) (1,0 pto.) Encontre o valor de p.

Resolução:

Como a soma das probabilidades é igual a 1, ou seja, $\sum_{i=0}^{4} p_i(x)=1$ **temos que**

$$2p^2+p=1 \Rightarrow p=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\times 2}}{2\times 2}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow p_1=-1\,;\,p_2=0{,}5$$.

Já que p é uma probabilidade, p não pode tomar valores negativos, então p = 0,5.

(b) (1,5 ptos) Encontro o valor de A e B sendo A = Pr (X ≥ 4) e B = Pr (X < 3) .

Resolução:

- $P(x\geq 4)$ **: neste caso X pode ser 4 e 5. Logo:**
- $P(X<3)=Pe(X=0)+Pr(X=1)+Pr(X=2)=0+p^2+0=p^2=0{,}25$

2 – Segunda questão – (2,5 pontos) Um atirador acerta na mosca do alvo 20% dos tiros.

(a) (1,0 pto) Qual a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no 10º tiro?

Resolução:

Probabilidade de sucesso = 0,2

Distribuição geométrica: $P(X=10)=0{,}8^9\times 0{,}2=0{,}0268$

(b) (1,5 ptos) Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?
Resolução:
Probabilidade de sucesso = 0,2
Distribuição binomial:

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{10}{0}0{,}2^0\times 0{,}8^{10}+\binom{10}{1}0{,}2^1\times 0{,}8^9=0{,}1074+0{,}2684=0{,}3758$$

<u>3 – Terceira questão – (2,0 pontos)</u>
Um conjunto de dados segue a distribuição Normal de média 5,3 e variância 1,4. Calcule as probabilidades abaixo:
Resolução:
Dado que a média e a variância é igual para todos, vamos substituir estes valores na equação

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ou seja,

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-5{,}3}{\sqrt{1{,}4}}<Z<\frac{b-5{,}3}{\sqrt{1{,}4}}\right)\approx P\left(\frac{a-5{,}3}{1{,}1832}<Z<\frac{b-5{,}3}{1{,}1832}\right)$$

a) *P(X > 5,5);*
Resolução:

$$P(X>5{,}5)=P\left(Z>\frac{5{,}5-5{,}3}{1{,}1832}\right)=P\left(Z>\frac{0{,}2}{1{,}1832}\right)\approx 0{,}5-P(Z>0{,}17)0{,}5-0{,}0675=0{,}4325$$

b) *P(4,8 < X < 5,6);*
Resolução:

$$P(4{,}8<X<5{,}6)=P\left(\frac{4{,}8-5{,}3}{1{,}1832}<Z<\frac{5{,}6-5{,}3}{1{,}1832}\right)=P\left(\frac{-0{,}5}{1{,}1832}<Z<\frac{0{,}3}{1{,}1832}\right)\approx P(-0{,}42<Z<0{,}25)$$

ou

$$P(4{,}8<X<5{,}6)=P(Z<0{,}42)+P(Z<0{,}25)=0{,}1628+0{,}0987=0{,}2615$$

c) *P(4,9 < X);*
Resolução:

$$P(4{,}9<X)=P(X>4{,}9)=P\left(Z>\frac{4{,}9-5{,}3}{1{,}1832}\right)=P\left(Z>\frac{-0{,}4}{1{,}1832}\right)\approx P(Z>-0{,}34)$$

ou

$$P(4{,}9<X)=P(X>4{,}9)=0{,}5+P(z>0{,}34)=0{,}5+0{,}1331=0{,}6331$$

d) *P(5,2 < X < 5,4).*
Resolução:

$$P(5{,}2<X<5{,}4)=P\left(\frac{5{,}2-5{,}3}{1{,}1832}<Z<\frac{5{,}4-5{,}3}{1{,}1832}\right)=P\left(\frac{-0{,}1}{1{,}1832}<Z<\frac{0{,}1}{1{,}1832}\right)$$

ou

$$P(5{,}2 < X < 5{,}4) = 2 \times P(Z > 0{,}08) = 2 \times 0{,}0319 = 0{,}0638$$

<u>*4 – Quarta questão – (2,0 pontos)*</u> Numa fábrica de papel se avaliava o desempenho de uma máquina picadora de madeira. Se os sarrafos de madeira que saíam da máquina fosse muito grandes, alongaria o processamento químico, se fosse pequenos de mais, a qualidade do papel seria comprometida. Sabe-se de um estudo anterior que o comprimento dos sarrafos segue a distribuição Normal e que a variância típica é 0,04 cm^2. Foram recolhidas 40 amostras de sarrafos e se chegou à média de comprimento igual a 4,8 cm. Faça uma estimativa da média com o coeficiente de confiança igual a 95%.

Resolução:

A fórmula para o intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu,\gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,;\, \bar{X} + z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

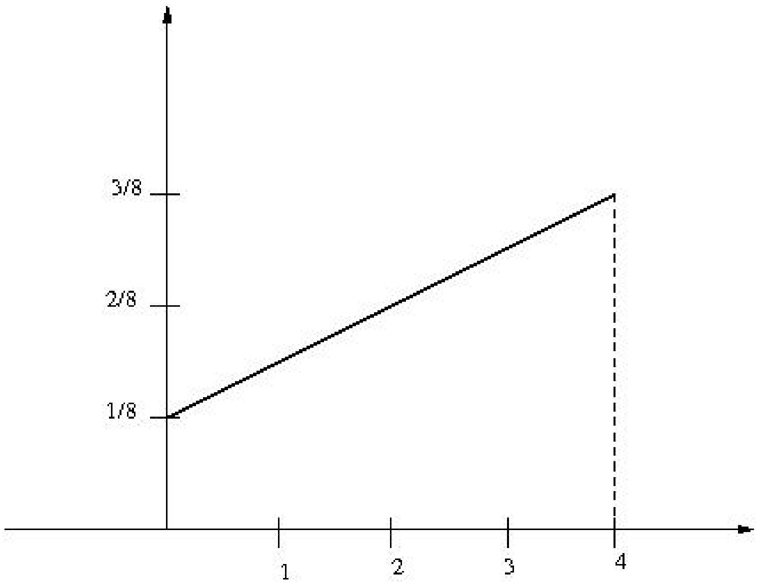
Para os parâmetros dados temos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{0{,}04}}{\sqrt{40}} = \sqrt{\frac{0{,}04}{40}} = \sqrt{0{,}001} \approx 0{,}0316 \,; z_{\gamma/2} = z_{0{,}95/2} = z_{0{,}475} = 1{,}95 \,.$$

Assim,

$$IC(\mu; 0{,}95) = [4{,}8 - 1{,}95 \times 0{,}0316 \,;\, 4{,}8 + 1{,}95 \times 0{,}0316] \approx [4{,}74 \,;\, 4{,}86] \,.$$

<u>*5 – Quinta questão – (1,0 ponto)*</u> A figura abaixo apresenta uma distribuição de probabilidades (as escalas não são proporcionais e a distribuição vale zero para x < 0 e x > 4). Calcule quais são os valores, relativos à esta distribuição, solicitados nos itens a e b.



a) P(X > 2);

Resolução:

Podemos obter a equação da reta pelos valores retirados da figura, ou seja, a reta passa pelos pontos (0,1/8) e (4, 3/8). Como a equação da reta é dada por $y = ax + b$ **, teremos**

$$\frac{1}{8}=a\times 0+b$$
$$\frac{3}{8}=a\times 4+b$$
.

Resolvendo este sistema temos $a=1/16\,;b=1/8$ **e a equação será** $y=\frac{1}{16}(x+2)$ **.**
As probabilidades para esta distribuição serão dadas por

$$P(a<X<b)=\int_a^b \frac{1}{16}(x+2)\,dx=\frac{1}{16}\int_a^b (x+2)\,dx$$
.

Assim,

$$P(X>2)=\frac{1}{16}\int_0^2 (x+2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\int_0^2 x\,dx+2\int_2^4 dx\right]=\frac{1}{16}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_2^4+2x\Big|_2^4\right]$$

ou

$$P(X>2)=\frac{1}{16}\left[\frac{4^2-2^2}{2}+(4-2)\times 2\right]=\frac{1}{16}\left(\frac{16-4}{2}+4\right)=\frac{10}{16}=0{,}625$$
.

Também poderia ser calculado pela área do trapézio determinado entre os valores x=2 e x=4.
b) Valor médio;
Resolução:
Partindo da definição de média, ou seja,

$$\mu=\int_a^b x\,f(x)\,dx$$
,

teremos

$$\mu=\int_a^b x\,f(x)\,dx=\int_0^4 \frac{1}{16}\,x(x+2)dx=\frac{1}{16}\int_0^4 x(x+2)\,dx=\frac{1}{16}\left[\int_0^4 x^2dx+2\int_0^4 x\,dx\right]=\frac{1}{16}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^4+2\times\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\right]$$

ou

$$\mu=\frac{1}{16}\left(\frac{4^3}{3}+4^2\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{64}{3}+16\right)=\frac{7}{3}\approx 2{,}3333$$
.