Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP3 2° semestre de 2017
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 – Primeira Questão (1,0 ponto)

Seja uma variável aleatória X com a distribuição de probabilidade dada pela tabela a seguir:

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0	p^2	0	0	p	p^2

Calcule o valor de p.

Resolução:

Como a soma das probabilidades igual a 1, ou é seja, $\sum_{i=0}^{4} p_i(x)=1$ **temos que :**

$$2p^2+p=1\rightarrow 2p^2+p-1=0\rightarrow p=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\times 2}}{2\times 2}=\frac{-1\pm 3}{4}\Rightarrow p=-1;\, p=0{,}5$$

Como *p* é uma probabilidade, ela não pode assumir o valor negativo, então temos que p = 0,5.

2 – Segunda Questão (2,5 pontos)

Os alunos do curso de Engenharia Mecânica da UFF fizeram um carro teste e na fase de testes verificou-se que ele poderia e ter problemas mecânicos ou elétricos. Se ele tiver problemas mecânicos, não para de andar, mas se tiver problemas elétricos, precisa parar imediatamente. A chance de esse veículo ter problemas mecânicos é de 0,2. Já a chance do mesmo veículo ter problemas elétricos é de 0,15 se não houve problema mecânico precedente, e de 0,25 se houve problema mecânico precedente.

Calcule:

a) (1,0 pto.) Qual é a probabilidade de o veículo parar em determinado dia?

Resolução:

Sejam os eventos: M= ter problema mecânico e E= ter problema elétrico. Sabemos que:

P(M) = 0,20 e, consequentemente, P(não M) = 0,80;
P(E | não M)=0,15;
P(E | M)=0,25.

Sabemos também que o veículo só irá parar se houver problema elétrico. Então precisamos calcular a probabilidade total de haver um problema elétrico, independente de ter havido ou não um problema mecânico.

$$P(E)=P(M)\times P(E|M)+P(\text{não } M)\times P(E|\text{não } M)$$

ou

$$P(E)=0{,}20\times 0{,}25+0{,}8\times 0{,}15=0{,}17 \quad .$$

b) (1,5 pto.) Se o veículo parou em certo dia, qual a chance de que tenha havido defeito mecânico?

Resolução:

Nesse caso, devemos calcular a probabilidade de ter havido defeito mecânico, condicionado ao fato de já sabermos que o veículo parou. Para isso utilizamos o Teorema de Bayes:

$$P(M|E)=\frac{P(M)\times P(E\vee M)}{P(E)}=\frac{0{,}20\times 0{,}25}{0{,}17}=0{,}2941\quad .$$

3 – Terceira questão – (1,5 pontos)

Um atirador acerta na mosca do alvo 20% dos tiros. Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?

Resolução:

Probabilidade de sucesso = 0,2

Distribuição binomial:

$$P(X\leq 1)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{10}{0}\times 0{,}2^0\times 0{,}8^{10}+\binom{10}{1}\times 0{,}2^1\times 0{,}8^9$$

ou

$$P(X\leq 1)\approx 0{,}1074+0{,}2684=0{,}3758\quad .$$

4 – Quarta questão – (2,0 pontos)

Foi levantada uma amostra dada na tabela abaixo na qual estava estabelecido que a distribuição Normal era aplicável.

A	1,41	1,67	2,05	1,52	1,32	2,17	1,75	2,12	2,19	2,32	2,04	2,24

Estime a média e a variância por estimadores consistentes e não viciados e calcule as seguintes probabilidades:

Resolução:

Usaremos os seguintes estimadores para a média e variância que são consistentes e não viciados

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \quad e \quad S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)\quad .$$

Para os dados apresentados teremos

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1{,}41+1{,}67+2{,}05+1{,}52+1{,}32+2{,}17+1{,}75+2{,}12+2{,}19+2{,}32+2{,}04+2{,}24}{12}=\frac{22{,}8}{12}=1{,}9$$

e calculemos o somatório contido no estimador da variância

$$\sum_{i=1}^{n}X_i^2=1{,}41^2+1{,}67^2+2{,}05^2+1{,}52^2+1{,}32^2+2{,}17^2+1{,}75^2+2{,}12^2+2{,}19^2+2{,}32^2+2{,}04^2+2{,}24^2=44{,}6558\quad .$$

Estes cálculos nos permite escrever

$$S^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{11}\left(44{,}6558-12\times 1{,}9^2\right)=\frac{1{,}3358}{11}\approx 0{,}12143\Rightarrow S\approx 0{,}34847\quad .$$

a) P(1,8 < X < 2,1);
Resolução:
Usando

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

teremos

$$P(1{,}8<X<2{,}1)=P\left(\frac{1{,}8-1{,}9}{0{,}34847}<Z<\frac{2{,}1-1{,}9}{0{,}34847}\right)=P(-0{,}28697<Z<0{,}57394)\approx P(-0{,}29<Z<0{,}57)$$

ou

$$P(1{,}8<X<2{,}1)\approx P(Z<0{,}29)+P(Z<0{,}57)=0{,}1141+0{,}2157=0{,}3298 \quad .$$

b) P(2,0 < X < 2,2).
Resolução:

$$P(2{,}0<X<2{,}2)=P\left(\frac{2{,}0-1{,}9}{0{,}34847}<Z<\frac{2{,}2-1{,}9}{0{,}34847}\right)=P(0{,}28697<Z<0{,}86090)\approx P(0{,}29<Z<0{,}86)$$

ou ainda

$$P(2{,}0<X<2{,}2)\approx P(Z<0{,}86)-P(Z<0{,}29)=0{,}3051-0{,}1141=0{,}191 \quad .$$

5 – Quinta questão – (1,0 ponto)
Uma firma de implosões detonou 5 espoletas de cada caixa de 100 espoletas num teste de segurança. Foram detonadas espoletas de 10 caixas num total de 50 espoletas e verificou-se uma média de falhas de 0,7 espoleta. Supondo que a estatística do experimento é compatível com o modelo Normal, calcule o intervalo de confiança para a média de espoletas que falhariam com coeficiente de confiança de 95%. Um padrão estabelece que a variância deste tipo de produto vale 1,9 falhas^2.
Resolução:
Temos o intervalo de confiança dado por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

pelas informações do problema teremos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{1{,}9}}{\sqrt{50}}\approx\frac{1{,}37840}{7{,}07106}\approx 0{,}19493 \quad \textbf{e} \quad z_{\gamma/2}=z_{0{,}475}=1{,}96$$

assim

$$IC(\mu,\gamma)=[0{,}7-1{,}96\times 0{,}19493\,;0{,}7+1{,}96\times 0{,}19493]\approx[0{,}31792\,;1{,}08207]\approx[0{,}32\,;1{,}08]\,.$$

6 – Sexta questão – (2,0 pontos) Dada a função $\frac{3}{4}(2x^2-x^3)$

a) Mostre que ela é uma distribuição de probabilidade no intervalo [0, 2];

Resolução:

Observe que a função se anula em x = 0, o mesmo acontecendo para x = 2, sendo positiva dentro do intervalo (0,2). Integremos

$$\int_0^2 \frac{3}{4}(2x^2-x^3)\,dx=\frac{3}{4}\left[2\int_0^2 x^2\,dx-\int_0^2 x^3\,dx\right]=\frac{3}{4}\left[2\frac{x^3}{3}\Big|_0^2-\frac{x^4}{4}\Big|_0^2\right]=\frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}\times 8-\frac{1}{4}\times 16\right]=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$$

b) Calcule P(X < 1,6);

Resolução:

Para a nossa questão teremos

$$\int_0^{1,6} \frac{3}{4}(2x^2-x^3)\,dx=\frac{3}{4}\left[2\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1,6}-\frac{x^4}{4}\Big|_0^{1,6}\right]=\frac{3}{4}\left[\frac{2}{3}\times 1{,}6^3-\frac{1}{4}\times 1{,}6^4\right]\approx\frac{3}{4}\times 1{,}0923\approx 0{,}8192$$

c) Calcule o valor médio;

Resolução:

Pela definição de valor médio teremos

$$\mu=\int_0^2 x f(x)\,dx=\int_0^2 \frac{3}{4}x(2x^2-x^3)\,dx=\frac{3}{4}\left[2\int_0^2 x^3\,dx-\int_0^2 x^4\,dx\right]=\frac{3}{4}\left[2\frac{x^4}{4}\Big|_0^2-\frac{x^5}{5}\Big|_0^2\right]=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\times 16-\frac{1}{5}\times 32\right]$$

ou

$$\mu=\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}\times 16-\frac{1}{5}\times 32\right]=\frac{3}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{6}{5}=1{,}2 \quad .$$

d) Calcule a variância.

Resolução:

A definição da variância é dada por

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\mu^2 \quad .$$

Determinemos a integral

$$\int_0^2 x^2 f(x)\,dx=\int_0^2 \frac{3}{4}x^2(2x^2-x^3)\,dx=\frac{3}{4}\left[2\int_0^2 x^4\,dx-\int_0^2 x^5\,dx\right]=\frac{3}{4}\left[2\frac{x^5}{5}\Big|_0^2-\frac{x^6}{6}\Big|_0^2\right]=\frac{3}{4}\left[\frac{2}{5}\times 32-\frac{1}{6}\times 64\right]$$

ou

$$\int_0^2 x^2 f(x)\,dx=\frac{3}{4}\times\frac{32}{15}=\frac{8}{5}=1{,}6 \quad .$$

Isto nos permite escrever

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\mu^2=\frac{8}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{4}{25}=0{,}16 \quad .$$