Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 1° semestre de 2011

Nome :

Assinatura :

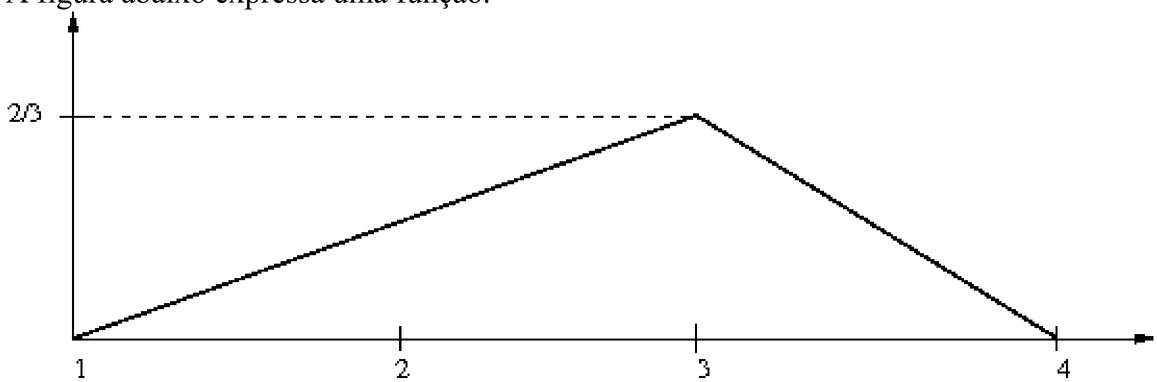
Observações:

(i) A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal.
(ii) É permitido o uso de máquina de calcular.
(iii) Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
(iv) Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
(v) Você pode usar lápis para responder as questões.
(vi) As respostas devem ser escritas de forma legível;
(vii) Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
(viii) Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 - Primeira questão (2,0 pontos)

A figura abaixo expressa uma função.



a) Demonstre que de fato esta função é uma distribuição de probabilidade; (0,5)

Resolução:

Verificamos diretamente que a função é não negativa. Falta, então, verificarmos se a integral da função é igual a 1.

A maneira mais simples de calcular a integral parte de se perceber que a área total é igual a área de um triângulo de altura 2/3 e base 3, ou seja,

$$Area=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(4-1)\right)=1 \quad .$$

No entanto, esta maneira de calcular não nos ajuda nas questões posteriores. Façamos de maneira mais complicada mas mais útil.

Achemos as equações das retas que liga os pontos (1,0) e (3, 2/3) assim como a reta que liga os pontos (3, 2/3) e (4, 0). Como a equação da reta é dada por

$$y=a\,x+b$$

para os pontos (1,0) e (3, 2/3) teremos

$$0=a\,1+b$$
$$\frac{2}{3}=a\,3+b$$

Da primeira temos que a = -b. Substituindo na segunda temos que b = -1/3. Logo a equação da primeira reta é

$$y=\frac{1}{3}(x-1)$$

Para a segunda reta será dada pelos pontos (3, 2/3) e (4, 0), ou seja,

$$\frac{2}{3}=a\,3+b$$
$$0=a\,4+b$$

Da segunda equação temos que a = -b/4 que substituído na primeira equação nos dá b = 8/3. Portanto, a segunda reta sera dada por

$$y=\frac{1}{3}(-2\,x+8) \quad .$$

Integremos estas funções nos respectivos intervalos de validade

$$Area=\int_1^3 \frac{1}{3}(x-1)\,dx+\int_3^4 \frac{1}{3}(-2\,x+8)\,dx=\frac{1}{3}\left[\int_1^3 (x-1)\,dx+\int_3^4 (-2\,x+8)\,dx\right]$$

ou ainda

$$Area=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^3+\left(-x^2+8\,x\right)\Big|_3^4\right]=\frac{1}{3}(2+1)=1 \quad .$$

b) Calcule a média da distribuição; (0,5)

Resolução:

A definição da média é dada por

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

onde a função f(x) aqui apresentada é a distribuição de probabilidade. No nosso caso teremos

$$\mu=\int_{1}^{3} \frac{1}{3} x(x-1)\, dx+\int_{3}^{4} \frac{1}{3} x(-2x+8)\, dx=\frac{1}{3}\left[\int_{1}^{3} (x^2-x)\, dx+\int_{3}^{4} (-2x^2+8x)\, dx\right]$$

ou ainda

$$\mu=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^3+\left(-2\frac{x^3}{3}+4x^2\right)\Big|_3^4\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{14}{3}-\frac{10}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

c) Calcule a variância da distribuição; . (0,5)

Resolução:

A variância é definida por

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx-\mu^2$$

onde, novamente, f(x) é a distribuição de probabilidade. Assim sendo teremos

$$\sigma^2=\int_{1}^{3} \frac{1}{3} x^2(x-1)\, dx+\int_{3}^{4} \frac{1}{3} x^2(-2x+8)\, dx-\mu^2=\frac{1}{3}\left[\int_{1}^{3} (x^3-x^2)\, dx+\int_{3}^{4} (-2x^3+8x^2)\, dx\right]-\mu^2$$

ou ainda

$$\sigma^2=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^3+\left(-\frac{x^4}{2}+8\frac{x^2}{3}\right)\Big|_3^4\right]-\mu^2=\frac{1}{3}\left(\frac{34}{3}+\frac{67}{6}\right)=\frac{45}{2}-\left(\frac{4}{9}\right)^2$$

ou finalmente

$$\sigma^2=7{,}3024\ .$$

d) Calcule a moda da distribuição. (0,5)

Resolução:

A moda é o ponto no qual a probabilidade é máxima, ou seja, a moda é 3.

2 – Segunda questão (2,0 pontos)

Uma massa de dados tem distribuição Normal. Ficou estabelecido que a média destes dados tem o valor 23,5 e a variância 5,29. Calcule as probabilidades abaixo (2 pontos):
Resolução:

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ou ainda

$$P(X > a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \; .$$

a) $P(X > 25,0)$; (0,5)

$$P(X > 25) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{25-23,5}{\sqrt{5,29}}\right) = P(Z > 0,65) = 0,2422$$

b) $P(X < 23,0)$; (0,5)

$$P(X < 23) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{23-23,5}{\sqrt{5,29}}\right) = P(Z < 0,21) = 0,5 - 0,0832 = 0,4168$$

c) $P(23,0 < X < 27,0)$; (0,5)

$$P(23 < X < 27) = P\left(\frac{23-23,5}{\sqrt{5,29}} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{27-23,5}{\sqrt{5,29}}\right) = P(0,21 \le Z \le 1,52)$$

ou

$$P(23 < X < 27) = 0,5 + 0,4347 - (0,5 - 0,0832) = 0,5179$$

d) $P(X < 25,0)$; (0,5)

Por complementaridade do item a teremos

$$P(X < 25,0) = 1 - P(X > 25,0) = 1 - 0,2422 = 0,7578$$

3 - Terceira questão (2,0 pontos)

Numa pedreira verificou-se que a distribuição de probabilidade de se encontrar pedregulhos de volume entre [1, 9] cm^3 era aproximadamente linear e dada por

$$f(x) = \frac{1}{16}\left(1 + \frac{x}{3}\right)$$

Calcule a probabilidade de encontrarmos pedregulhos
Resolução:
A probabilidade será dada neste caso pela integração da função de distribuição dentro do intervalo dado em cada um dos casos. No caso geral será

$$P(a<X<b)=\frac{1}{16}\int_a^b\left(1+\frac{x}{3}\right)dx=\frac{1}{16}\left(b+\frac{b^2}{2}\right)-\left(a+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{1}{16}\left[b-a+\frac{1}{6}\left(b^2-a^2\right)\right]$$

ou simplificando

$$P(a<X<b)=\frac{b-a}{16}\left(1+\frac{a+b}{6}\right)$$

a) menores que 4 cm^3 mas maiores que 2 cm^3; (1,0)
Resolução:

$$P(2<X<4)=\frac{4-2}{16}\left(1+\frac{2+4}{6}\right)=\frac{2}{16}\times 2=\frac{1}{4}$$

b) maiores que 7 cm^3 mas menores que 9 cm^3; (0,5)

$$P(7<X<9)=\frac{9-7}{16}\left(1+\frac{7+9}{6}\right)=\frac{2}{16}\times\left(1+\frac{8}{3}\right)=\frac{11}{24}$$

c) menores que 7 cm^3 mas maiores que 4 cm^3. (0,5)

$$P(4<X<7)=\frac{7-4}{16}\left(1+\frac{4+7}{6}\right)=\frac{3}{16}\times\left(1+\frac{11}{6}\right)=\frac{17}{32}$$

4 – Quarta questão (2,0 pontos)

Uma fornecedora de energia elétrica apresentou numa região faltas de energia. Esta fornecedora prepara um relatório semestral. São desconhecidas a média e variância para esta região mas, por analogia à regiões semelhantes, sabemos que a variância é de 144 $minuto^2$. Uma amostra de 60 dias indicou uma média de 65 minutos de tempo sem energia. Qual é a média verdadeira com confiança de 90%?
Resolução:
Queremos aqui o intervalo de confiança para esta média, ou seja,

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Sendo assim com os valores dados e para um coeficiente de confiança de 90%

$$\bar{X}=65 \qquad z_{\gamma/2}=z_{0,45}=1,64 \;\; ; \;\; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{60}}=\frac{12}{7,7459}\approx 1,549 \;\; .$$

Assim,

$$IC(\mu,\gamma)=[65-1,64\times 1,549 \,;\, 65+1,64\times 1,549]=[62,459 \,;\, 67,540]$$

5 - Quinta questão (2,0 pontos)

Uma firma importou sandálias mas, devido à reclamações anteriores, resolveu fazer um teste num lote que chegou recentemente. Retirou-se trinta sandálias e nestas foram aplicados testes destrutivos de resistência. Para que as sandálias sejam aceitas é necessário que a probabilidade de se encontrar uma sandália cuja as tiras se rompam a menos de 30 kg de esforço seja menor que 5%. Sabendo que a média de resistência da amostra é de 25 kg, a variância é de 15 kg^2 e supondo ser válido o uso da distribuição Normal, diga se o lote deve ser aceito ou não.
Resolução:
Se a distribuição é a Normal esta será dada por

$$N(\mu,\sigma^2)=N(25,15/30)=N(25,2)$$

daí a probabilidade será

$$P(X<30)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{25-30}{\sqrt{2}}\right)=P(Z<-3,5355)\approx 0$$

ou seja, as sandálias serão aprovadas.

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.