Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 1° semestre de 2015
GABARITO

1 - Primeira questão (2,0 pontos)

Verifique se as expressões a seguir são funções densidade de probabilidade, supondo que elas se anulam fora dos intervalos especificados. Caso o problema seja da distribuição não ser normalizada, normalize e apresente a distribuição obtida.

$a.\ f(x)=\frac{2}{3}x\ ,\ se\ -1/2\leq x\leq 1/2.$

Resolução:
Observe que a função tem valores negativos para valores de x negativos. Portanto, não é distribuição de probabilidades.

$b.\ f(x)=(x-3)/2\ ,\ se\ 3\leq x\leq 5.$

Resolução:
Neste caso a função apresentada tem valores não negativos dentro do intervalo [3, 5]. Integremos para verificar se é uma função normalizada

$$\int_3^5 \frac{x-3}{2}dx=\int_3^5 \frac{x}{2}dx-\int_3^5 \frac{3}{2}dx=\frac{1}{2}\int_3^5 x\,dx-\frac{3}{2}\int_3^5 dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_3^5-\frac{3}{2}x\Big|_3^5=\frac{5^2-3^2}{4}-\frac{3}{2}(5-3)=\frac{16}{4}-\frac{6}{2}=4-3=1$$

portanto é distribuição de probabilidade.

$c.\ f(x)=e^x;x\in[-1,1].$

Resolução:
Claramente a função não toma valores negativos dentro do intervalo especificado, portanto, integremos

$$\int_{-1}^1 e^x\,dx=e^x\Big|_{-1}^1=e^1-e^{-1}\approx 2{,}7182-0{,}3678=2{,}3504\ .$$

Assim, para que a função seja normalizada é necessário que dividamos pela constante de normalização achada acima, ou seja,

$$f(x)=\frac{e^x}{e^1-e^{-1}};x\in[-1,1].$$

$d.\quad f(x)= \begin{cases} x/2, & se\ \ 0\leq\ x\ \leq 1; \\ -(x-4)/6, & se\ \ 1\leq\ x\ \leq 4. \end{cases}$

Resolução:
Integremos a função deste item

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{x}{2}dx-\int_1^4 \frac{x-4}{6}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx-\frac{1}{6}\left(\int_1^4 x\,dx-4\int_1^4 dx\right)$$

ou

$$\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-\frac{1}{6}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^4-4x\Big|_1^4\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left[\frac{4^2-1^2}{2}-4\times(4-1)\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left(\frac{15}{2}-12\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1\quad .$$

2 – Segunda questão (2,0 pontos)

A função apresentada abaixo é uma distribuição de probabilidade. Calcule qual é a média, a variância e a moda desta distribuição.

$$f(x)= \begin{cases} \frac{2}{3}x, & se\ \ 0\leq\ x\ \leq\frac{3}{2}; \\ -2x+4, & se\ \ \frac{3}{2}\leq\ x\ \leq 2. \end{cases}$$

Faça um gráfico para facilitar o entendimento.
a) Média

$$\mu=\int_0^2 x f(x)\,dx=\int_0^{3/2} x\frac{2}{3}x\,dx+\int_{3/2}^2 x(-2x+4)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2} x^2dx-2\int_{3/2}^2 x^2dx+4\int_{3/2}^2 x\,dx$$

ou

$$\mu=\frac{2}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_0^{3/2}-2\frac{x^3}{3}\Big|_{3/2}^2+4\frac{x^2}{2}\Big|_{3/2}^2=\frac{2}{9}(3/2)^3-\frac{2}{3}[2^3-(3/2)^3]+2[2^2-(3/2)^2]=\frac{3}{4}-\frac{37}{12}+\frac{7}{2}=\frac{7}{6}$$

b) Variância
Resolução:
A Variância é dada por

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)\,dx-\mu^2\quad .$$

Calculemos a integral

$$\int_0^2 x^2 f(x)\,dx=\int_0^{3/2} x^2\frac{2}{3}x\,dx+\int_{3/2}^2 x^2(-2x+4)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^{3/2} x^3dx-2\int_{3/2}^2 x^3dx+4\int_{3/2}^2 x^2dx$$

que resulta em

$$\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}|_0^{3/2}-2\frac{x^4}{4}|_{3/2}^{2}+4\frac{x^3}{3}|_{3/2}^{2}=\frac{1}{6}(3/2)^4-\frac{1}{2}[2^4-(3/2)^4]+\frac{4}{3}[2^3-(3/2)^3]$$

e finalmente

$$\int_0^2 x^2 f(x)dx=\frac{27}{32}-\frac{525}{96}+\frac{37}{6}=\frac{37}{24}\quad ,$$

portanto a variância será

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2=\frac{37}{24}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{13}{72}\quad .$$

3- Terceira questão (2,0 pontos)
Calcule as probabilidades abaixo.

a) P(-1 < X < 3) supondo que a distribuição é uniforme no intervalo [-6,6]. (0,5);
Resolução:
Por definição, a probabilidade para esta distribuição uniforme será

$$P(-1<X<3)\frac{1}{6-(-6)}\int_{-1}^{3} dx=\frac{1}{12}[3-(-1)]=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\quad .$$

b) P(2,21 < X < 4,36) supondo que a distribuição segue o modelo Exponencial com $\alpha=0{,}98$;
Resolução:

A probabilidade no caso da distribuição exponencial é

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b}$$

que no caso corresponde à

$$P(2{,}21<X<4{,}36)=e^{-0{,}98\times 2{,}21}-e^{-0{,}98\, 4{,}36}=e^{-2{,}1658}-e^{-4{,}2728}\approx 0{,}1147-0{,}0139=0{,}1008\quad .$$

c) P(0,52 < X < 1,84) supondo que a distribuição é a da segunda questão;
Resolução:
A probabilidade será dada por

$$\int_{0{,}52}^{1{,}84} f(x)dx=\int_{0{,}52}^{3/2}\frac{2}{3}x\,dx+\int_{3/2}^{1{,}84}(-2x+4)dx=\frac{2}{3}\int_{0{,}52}^{3/2}x\,dx-2\int_{3/2}^{1{,}84}x\,dx+4\int_{3/2}^{1{,}84}dx=\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}|_{0{,}52}^{3/2}-2\frac{x^2}{2}|_{3/2}^{1{,}84}+4x|_{3/2}^{1{,}84}$$

ou seja,

$$\int_{0,52}^{1,84} f(x)dx=\frac{(3/2)^2-0,52^2}{3}-[1,84^2-(3/2)^2]+4(1,84-3/2)=\frac{1,9796}{3}-1,1356+4\times 0,34\approx 0,8843$$

d) P(2,86<X<6,44), distribuição Normal, dado média igual a 2,9 e variância 2,15.
Resolução:
Usaremos diretamente a fórmula

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right),$$

ou seja,

$$P(2,86<X<6,44)=P\left(\frac{2,86-2,9}{\sqrt{2,15}}<Z<\frac{6,44-2,9}{\sqrt{2,15}}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{-0,04}{1,4663}<Z<\frac{3,54}{1,4663}\right)=P(-0,0273<Z<2,4142)$$

que resulta em

$$P(2,86<6,44)=P(0,0273<Z)+P(2,4142<Z)\approx P(0,03<Z)+P(2,41<Z)=0,0120+0,4920=0,504$$

4- Quarta questão (2,0 pontos)

Numa sondagem no solo marinho se avaliava o nível de contaminação por mercúrio oriundo de exploração ilegal de ouro na foz de rio da região. Foi obtida a seguinte tabela partindo de várias amostras:

Hg	2,97	5,41	3,12	4,37	3,61	4,46	3,42	4,64	5,11	4,89

A situação seria considerada gravíssima se a média fosse superior a 3,8 com um nível de significância de 20%. Verifique a hipótese de contaminação usando estimadores não viciados.
Resolução:
Partiremos do pressuposto que é possível usarmos a distribuição Normal. Sendo assim, usemos os seguintes estimadores não viciados para a média e a variância

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} X_i \quad \textbf{e} \quad \sigma^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n} X_i^2-n\mu^2 \quad ,$$

o que nos dará

$$\mu=\frac{2,97+5,41+3,12+4,37+3,61+4,46+3,42+4,64+5,11+4,89}{10}=4,2$$

e

$$\sum_{1}^{10} X_i^2=2,97^2+5,41^2+3,12^2+4,37^2+3,61^2+4,46^2+3,42^2+4,64^2+5,11^2+4,89^2=183,0942$$

logo

$$\sigma^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n} X_i^2-n\mu^2=\frac{183,0942}{9}-10\times 4,2^2=0,7438 \quad .$$

Com isto e partindo da exigência de significância de 20%, escreveremos

$$0,2=P(\bar{X}\, x_c|\mu=4,2)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{x_c-4,2}{\sqrt{0,7438/10}}\right)=P\left(Z<\frac{x_c-4,2}{\sqrt{0,7438/10}}\right)=P\left(Z<\frac{x_c-4,2}{0,2727}\right)=P(Z<z_c)$$

e portanto

$$z_c=\frac{x_c-4,2}{0,2727}\Rightarrow x_c=4,2+z_c\times 0,2727 \quad .$$

Usando a tabela Normal temos que o valor correspondente à significância solicitada dá $z_c=0,84$ **donde**

$$x_c=4,2+0,84\times 0,2727=4,4291 \quad .$$

Isto claramente indica que o índice de contaminação é grave.

Obs: Uma interpretação possível deste problema é que seria um teste para média com variância desconhecida. Neste caso pode ser usada t-Student sendo correta esta abordagem. No entanto, nesta questão a ideia está em exercitar os conceitos de estimadores, além do teste em si.

5 - Quarta questão (1,0 ponto)
Uma empresa fez um levantamento do setor de atendimento ao consumidor. O tempo de atendimento de cada cliente em minutos, T, foi modelado por uma densidade Exponencial (2,6), ou seja, $\alpha=2,6$. Calcule:

Resolução:
Aqui usaremos

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b} \quad .$$

a) $P(T<1,5)$

Resolução:

$$P(X<1,5)=\int_0^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=1-e^{-2,6\times 1,5}\approx 1-0,0202\approx 0,98 \quad .$$

b) $P(T<1,5|T\leq 2)$

Resolução:
Por definição

$$P(T<1,5|T\leq 2)=\frac{P(T<1,5)}{P(T\leq 2)}=\frac{1-e^{-2,6\times 1,5}}{1-e^{-2,6\times 2}}=\frac{0,9798}{0,9955}=0.9842 \quad .$$

6 - Sexta questão (1,0 pontos)

Se extraíram 30 amostras de uma linha de engarrafamento de óleo vegetal. A média amostral do conteúdo das garrafas foi de 883ml. Sabemos experimentalmente que, baseado em outra linha de produção, a variância relevante ao problema é de 120 ml^2. Determine qual é o intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança de 70%.

Resolução:

Usaremos a fórmula

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

que pelos dados fornecidos teremos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{120}{30}}=\sqrt{4}=2 \quad \textbf{e} \quad z_{\gamma/2}=z_{70/2}=z_{0,35}=1,04 \quad .$$

Assim,

$$IC(883;0,7)=[883-1,04\times 2\,;883+1,04\times 2]=[880,92\,;885,08]\ .$$