Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina Probabilidade e Estatística

AP2 1° semestre de 2008

Gabarito

Nome :

Assinatura :

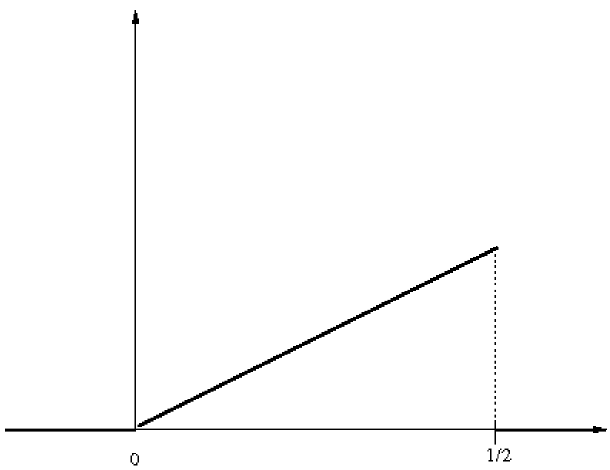
Observações:

1. A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal.
2. É permitido o uso de máquina de calcular.
3. Todos os cálculos têm que ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
4. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
5. Você pode usar lápis para responder as questões.
6. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
7. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 - Primeira questão (2,0 pontos)

Na figura abaixo está esquematizada (não está em escala uniforme) uma proposta de distribuição de probabilidade que é linear no intervalo [0, 1/2] e se anula fora deste intervalo.



a) Calcule o coeficiente angular da reta de tal forma que esta proposta seja realmente uma distribuição de probabilidade (0,5 ponto);

Solução: A reta que passa pela origem tem como equação y = ax. No intervalo [0,1/2] ela é não negativa, assim para que ela seja uma distribuição de probabilidade, a integral desta função no intervalo [0, 1/2] deverá ser igual a 1. Assim,

$$\int_0^{1/2} a\,x dx = 1$$

ou seja,

$$a\frac{x^2}{2}\Big|_0^{1/2} = 1 \Rightarrow a = 8$$

b) Calcule o valor médio da distribuição (0,5 ponto);

Solução: Pela definição de média para distribuições contínuas teremos que calcular a integral abaixo

$$\mu = \int_0^{1/2} x f(x) dx = \int_0^{1/2} x\,8\,x dx = 8\int_0^{1/2} x^2 dx$$

ou seja,

$$\mu = 8\frac{x^3}{3}\Big|_0^{1/2} = \frac{8}{3}\frac{1}{8} = \frac{1}{3}$$

c) Calcule a variância da distribuição (0,5 ponto);

Solução: Partindo da definição de variância para distribuições contínuas calculemos

$$\sigma^2 = \int_0^{1/2} x^2 f(x) dx = \int_0^{1/2} x^2\,8\,x dx = 8\int_0^{1/2} x^3 dx$$

ou seja,

$$\sigma^2 = 8\frac{x^4}{4}\Big|_0^{1/2} = \frac{8}{4}\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$

d) Calcule a moda desta distribuição (0,5 pontos).

Solução: Pela definição de moda esta se dá nos pontos nos quais a distribuição atinge valor máximo. No caso só há um ponto de máximo no ponto x =1/2 que é a moda.

2 - Segunda questão (2,0 pontos)

Um fabricante de produtos de madeira produziu um lote de cavilhas (pinos de madeira usados na montagem de móveis). Foram retiradas aleatoriamente 10 cavilhas deste lote. Faça as hipóteses devidas e avalie a probabilidade do lote estar dentro dos padrões, segundo a análise destas 10 amostras, sabendo que historicamente a média de comprimento das cavilhas é de 33 mm e a variância 30 mm^2.

Solução: Uma suposição: o número de amostras é o suficiente para que a distribuição Normal pode ser utilizada da seguinte forma

$$N\left(33;\frac{30}{10}\right)=N(33;3,0)$$

Assim, a probabilidade do lote ser aprovado partindo da amostra é dada por

$$P(t_1<\bar{X}<t_2)=P\left(\frac{t_1-33}{1,7320}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{t_2-33}{1,7320}\right)$$

ou

$$P(t_1<\bar{X}<t_2)=P((t_1-33)0,5773<Z<(t_2-33)0,5773)$$

Como os tamanhos para as peças não foram dados no enunciado, a resposta dispensa cálculos além destes.

3 – Terceira questão (2,0 pontos)

Este mesmo fabricante de produtos de madeira se deparou com outra questão: Um novo produto exigia a colagem de chapas de madeira e não se tinha idéia de quanta cola seria necessária para a produção. Fez-se 20 colagens experimentais e foram necessários 3,9 kg de cola no total. No entanto, pela experiência de colagem em outros produtos semelhantes, se estima que a variância seja igual a 0,2 kg^2. Supondo que é válido modelar o problema por uma distribuição Normal faça uma estimativa, por intervalo, da média de gasto de cola com um coeficiente de confiança de 95%.
Solução: As média e variância amostrais do problema são

$$\mu=3,9;\sigma^2=0,2/20=0,01$$

Do coeficiente de confiança de 95% obtemos da tabela de distribuição Normal o valor $z_{\gamma/2}=z_{0,475}=1,96$ **. Assim, o intervalo de confiança será dado por**

$$IC(\mu;0,95)=[3,9-1,96\sqrt{0,01};3,9+1,96\sqrt{0,01}]=[3,704;4,096]$$

4 – Quarta questão (2,0 pontos)

Nosso fabricante favorito de produtos de madeira teve uma encrenca com uma máquina que começou a produzir palitos com elevado grau de defeitos: 30%. Faça as devidas hipóteses sobre amostras retiradas para controle.

Em ambas as situações vamos supor que é válido nos utilizarmos do Teorema Central do Limite e, desta maneira, possamos usar a distribuição Normal. Além disto, como trabalharemos com proporção de defeitos, usaremos para calcular a variância a expressão $Var(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}$ **.**

a) Foi tomada uma amostra de 10 palitos. Qual a probabilidade desta amostra conter menos de 40% de palitos defeituosos? (1,0 ponto)

Solução: A proporção de defeitos é de 30% e a estimativa para a a variância é $Var(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}=0{,}3\frac{(1-0{,}3)}{10}=0{,}021$ **. Sendo assim, a probabilidade de termos na amostra menos de 40% de defeitos é**

$$P(\bar{X}<0{,}4)=P\left(\frac{\bar{X}-0{,}3}{\sqrt{0{,}021}}<\frac{0{,}4-0{,}3}{\sqrt{0{,}021}}\right)=P(Z< \ 0{,}690)\approx 0{,}2549$$

b) Se a amostra for de 30 palitos, qual será a probabilidade da amostra conter menos de 40% de palitos defeituosos? (1,0 ponto)

Solução: A proporção de defeitos é de 30% e a estimativa para a a variância é $Var(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}=0{,}3\frac{(1-0{,}3)}{30}=0{,}007$ **. Sendo assim, a probabilidade de termos na amostra menos de 40% de defeitos é**

$$P(\bar{X}<0{,}4)=P\left(\frac{\bar{X}-0{,}3}{\sqrt{0{,}007}}<\frac{0{,}4-0{,}3}{\sqrt{0{,}007}}\right)=P(Z< \ 1{,}1952)\approx 0{,}4744$$

ou seja, a triplicação do tamanho da amostra praticamente dobrou a probabilidade de encontrarmos palitos defeituosos.

5 – Quinta questão (2,0 pontos)

Foi feito um novo tipo de controle do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. O teste preliminar indicou que em 380 regiões houve queda de 55% na população do mosquito em todas as regiões. Ao se refazer o teste, problemas de ordem climática permitiram o exame de apenas 235 regiões que indicaram a mesma queda anterior na população do mosquito, ou seja, 55%. Por estes dados, qual a conclusão a qual se pode chegar, ao nível de 5%, sobre a eficiência do novo tipo de controle do mosquito em todas a regiões?

Solução: A hipótese nula será que a eficiência do novo tipo de controle seja igual a 55%. Vamos supor que podemos usar o Teorema Central do Limite e, portanto, trabalharemos com a distribuição Normal. A variância amostral será dada por $Var(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}=0{,}55\frac{(1-0{,}55)}{235}=0{,}00105$ **. Ou seja, a distribuição** $N(0{,}55\,;0{,}00105)$ **governa a estatística. A região crítica será dada por**

$$RC=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x<p_{c1}\,ou\,x>p_{c2}\}$$

Para o nível 5% teremos

$$P\left(\hat{p}<p_{c1}|H_0\right)=\frac{0,05}{2} \quad e \quad P\left(\hat{p}>p_{c2}|H_0\right)=\frac{0,05}{2} \;.$$

Assim teremos

$$P\left(\hat{p}<p_{c1}|H_0\right)=P\left(\frac{\hat{p}-0,55}{\sqrt{0,00105}}<\frac{p_{c1}-0,55}{\sqrt{0,00105}}\right)=0,025$$

ou seja,

$$\frac{p_{c1}-0,55}{\sqrt{0,00105}}=-1,96\Rightarrow p_{c1}=0,486$$

Para o cálculo do outro valor crítico faz-se operações similares e obtemos

$$RC=\{x\in\mathbb{R}|x<0,486 \;\; ou \; x>0,614\}$$

ou seja, o valor levantado pela amostra concorda com a avaliação inicial.

Tabela da distribuição Normal

N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.