Gabarito de AD1 de Probabilidade e Estatística
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
2° semestre de 2015

Questão 1 (1,0 ponto) - Um laboratório clínico precisa se decidir por um entre dois instrumentos (A e B) que será utilizado para fazer dosagens químicas no sangue. Foram preparadas soluções contendo uma concentração conhecida (10mg = ml) da substância a ser dosada. Os resultados obtidos, para esta concentração, com cada instrumento são os seguintes:

Instrumento A: 8 10 7 15 16 12 6 8 10 13

Instrumento B: 11 10 11 9 12 9 10 8 11 10

Sabendo-se que um instrumento é considerado mais preciso quanto menor for a variabilidade dos dados em relação ao valor exato e é considerado não viciado se a média desses valores corresponde ao verdadeiro valor, avaliar esses instrumentos quanto à sua precisão e verificando se as leituras não são viciadas. Qual instrumento é mais preciso? Pode-se considerar que um dos instrumentos apresentou resultado viciado? Nesse caso, qual deles?

<u>Solução</u>:

Calculando a média e o desvio padrão, temos:

										Média	Desvio padrão
A:	8	10	7	15	16	12	6	8	10	13	10,5	3,2
B:	11	10	11	9	12	9	10	8	11	10	10,1	1,1

Tanto o instrumento A quanto o B não medem a média corretamente, podendo ser considerados viciados. Calculando o desvio padrão em relação ao valor exato, pode-se observar que o instrumento B tem menor variabilidade. Assim, o resultado pode ser considerado viciado, pois não consegue representar o valor exato da média, embora a média do Instrumento B esteja mais próxima do valor real. E também é o instrumento B que tem o menor desvio padrão.

Questão 2 (1,0 ponto) - Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos sem reposição 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca?

<u>Solução</u>:

Considerando:

$P(E_1)$ a probabilidade de tirarmos uma bola verde, que é $P(E_1) = 4/16$. Como não há reposição, a cada retirada o número de elementos do espaço amostral diminui em uma unidade.

$P(E_2)$ a probabilidade de tirarmos uma bola azul que é $P(E_2) = 4/15$.

$P(E_3)$ a probabilidade de tirarmos uma bola vermelha que é $P(E_3) = 4/14$.

$P(E_4)$ a probabilidade de tirarmos uma bola branca que é $P(E_4) = 4/ 13$.

Então chamando de $P(E_1E_2E_3E_4)$ a probabilidade de tirarmos as bolas conforme as restrições do enunciado, temos:

$$P(E_1E_2E_3E_4) = \frac{4}{16} \times \frac{4}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{4}{13} = \frac{256}{43.680} = 0{,}0059 \quad .$$

Questão **3** (1,0 ponto) **-** Um dado é viciado, de modo que cada número par tem duas vezes mais chances de aparecer num lançamento, que qualquer número ímpar. Determine a probabilidade de num lançamento aparecer um número primo?

<u>Solução</u>:

A partir das informações do enunciado tem-se que:

P(2) = P(4) = P(6) = 2.P(1) = 2.P(3) = 2.P(5).

Sabe-se que:

P(2) + P(4) + P(6) + P(1) + P(3) + P(5) = 1, ou seja, a soma das probabilidades dos eventos elementares é igual a 1.

Seja P(2) = k. Então, P(2) = P(4)= P(6)= k e P(1) = P(3)= P(5)= k/2

Pode-se então escrever que:

k + k + k + k/2 + k/2 + k/2 = 1 ou (9k)/2= 1 → k = 2/9.

Assim, tem-se que: P(2) = P(4) = P(6) = 2/9 e P(1) = P(3) = P(5) = 2/18 = 1/9.

O evento sair número primo corresponde a sair o 2, ou sair 3 ou o 5. Logo,

P(2) + P(3) + P(5) = 2/9 + 1/9 + 1/9 = 4/9

Questão **4** (1,0 ponto) Suponha-se que um escritório possua 100 calculadoras, algumas científicas (Ci) e outras normais (No), algumas novas (N) e outras usadas (U), conforme apresentado na tabela abaixo. Uma pessoa entra no escritório, pega uma calculadora ao acaso, e descobre que é nova. Qual a probabilidade de que seja científica?

	Ci	**No**
N	40	30
U	20	10

<u>Solução:</u>

N: Evento – Calculadora ser nova.

Ci: Evento – Calculadora ser científica.

Trata - se de um problema de probabilidade condicional.

Assim, de acordo com as informações da tabela acima temos que:

N = 100 e (Ci∩N) = 40

Logo, $P(Ci|N) = \frac{P(Ci \cap N)}{P(N)} = \frac{40}{70} \cong 0{,}5714 = 57{,}14\%$

Questão 5 (1,0 ponto) - Um determinada peça é manufaturada por três fábricas, 1, 2 e 3. Sabe-se que 1 produz o dobro de peças que 2, e que 2 e 3 produziram o mesmo número de peças. Sabe-se que 2% das peças produzidas por 1 e por 2 são defeituosas, enquanto que 4% daquelas produzidas por 3 são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas em um depósito e depois uma delas é extraída ao acaso. Qual a probabilidade de que seja defeituosa?

Solução:

Sejam os eventos D = {a peça é defeituosa} e Ei = {a peça provém da fábrica i}. Pelo teorema da Probabilidade Total, temos que:

P(D) = P(D|E1)×P(E1) + P(D|E2)×P(E2) + P(D|E3)×P(E3)

P(D) = 0,02 ×1/2 + 0,02×1/4 + 0,04×1/4 = 0,025.

Questão **6** (1,0 ponto) **-** Seja uma variável aleatória X dada na tabela a seguir:

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	0	p^2	p^2	p	p	p^2

(a) Encontre o valor de p.

Solução:

Como a soma das probabilidades é igual a 1, ou seja, $\sum_{i=0}^{4} p_i(x) = 1$ temos que :

$$3p^2 + 2p = 1 \;\rightarrow\; 3p^2 + 2p - 1 = 0 \;\rightarrow\; p = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \begin{cases} p = -1 \\ p = \frac{1}{3} \end{cases}$$

→Como p é uma probabilidade, ela não pode assumir o valor negativo, então temos que $p = \frac{1}{3}$.

(b) Calcule P (X ≥ 4) e P (X < 3) .

Solução:

- P (X ≥ 4): neste caso, X pode ser 4 e 5, logo:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) = p + p^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

- P (X < 3): neste caso, X pode ser 0, 1 e 2:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0 + p^2 + p^2 = 2p^2 = \frac{2}{9}$$

Questão 7 (1,0 ponto) - Foi feita uma pesquisa encomendada por um supermercado para avaliar o saída de produtos de uma determinada marca e a gratificação a ser paga aos vendedores pela venda desses produtos. A proposta é que cada vendedor receba comissões de venda, distribuídas da seguinte forma: se ele vende até 2 produtos em um dia, ele ganha uma comissão de R$10,00 por produto vendido. A partir da terceira venda, a comissão passa para R$50,00. Estudos mostram que o número de produtos vendidos em um dia pelos funcionários é uma variável aleatória P com a seguinte distribuição de probabilidades:

Nº de produtos	0	1	2	3	4	5
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,3	0,1	0,05	0,05

(a) Deseja-se saber qual é o número médio de produtos vendidos por cada vendedor e qual o desvio padrão.

Solução:

Variável X: Número de produtos vendidos

Variável C: Comissão de cada vendedor

Média

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

μ_X = 0 x 0,1 + 1 x 0,4 + 2 x 0,2 + 3 x 0,1 + 4 x 0,05 + 5 x 0,05

μ_X = 0 + 0,4 + 0,6 + 0,3 + 0,2 + 0,25 = 1,7500

Variância

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - \mu^2$$

$Var(X) = 0{,}1x0^2 + 0{,}4x1^2 + 0{,}3x2^2 + 0{,}1x3^2 + 0{,}05x4^2 + 0{,}05x5^2 – 1{,}75^2$

Var(X) = 0 + 0,4 + 1,2 + 0,9 + 0,8 + 1,25 – 3,0625

Var(X) = 4,55 – 3,06251 = 1,4875

Desvio Padrão = $\sqrt{1{,}4875} \cong$ 1,2196

(b) Qual a comissão média de cada um deles?

Solução:

Nº de produtos	0	1	2	3	4	5
Comissão	0	10	20	70	120	170
Probabilidade de venda	0,1	0,4	0,3	0,1	0,05	0,05

Cálculo da comissão média:

μ_C = 0,1 x 0 + 0,4 x 10 + 0,3 x 20 + 0,1 x 70 + 0,05 x 120 + 0,05 x 170

μ_C = 0 + 4 + 6 + 7 + 6 + 8,5 = 31,5

ou, a comissão média por cada vendedor é R$ 31,50

Questão 8 (1,0 ponto)-

(a) Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Qual a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no 10º tiro?

Solução:

Probabilidade de sucesso = 0,2

Distribuição geométrica: $P(X = 10) = 0{,}8^9 \times 0{,}2 = 0{,}0268$.

(b) Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros. Se ele dá 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?

Solução:

Probabilidade de sucesso = 0,2

Distribuição binomial:

$$P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{10}{0}(0{,}2)^0 (0{,}8)^{10} + \binom{10}{1}(0{,}2)^1 (0{,}8)^9$$

$$P(X \le 1) = 0{,}1074 + 0{,}2684 = 0{,}3758$$

Questão 9 (1,0 ponto) - Uma concessionária quer fazer um estudo sobre a probabilidade de acidentes em uma estrada. Ela sabe que normalmente há 2 acidentes para cada 100 km e quer determinar qual a probabilidade de que

(a) ocorram pelo menos 3 acidentes em 250 km?

Solução:

X: número de acidentes por β Km (Poisson)

$$\beta = 250$$

$$\lambda = 250 \times 0{,}02 = 5$$

$$\boldsymbol{P(X \ge 3) - 1 - P(X < 3) - 1 - \{P(X - 0) + P(X - 1) + P(X - 2)\} -}$$

$$P(X > 3) = 1 - \left(\frac{e^{-5} \times 5^0}{0!} + \frac{e^{-5} \times 5^1}{1!} + \frac{e^{-5} \times 5^2}{2!} \right) = 1 - (0{,}0067 + 0{,}0337 + 0{,}0842) = 0{,}8753$$

(b) ocorram 5 acidentes em 300 km?

Solução:

Neste caso,

$$\beta = 300$$

$$\lambda = 300 \times 0{,}02 = 6$$

$$P(X=5)=\left(\frac{e^{-6}\times 6^{5}}{5!}\right)=0{,}1606\rightarrow 16{,}06\%$$

Questão 10 (1,0 ponto) - Uma empresa quer aumentar sua produtividade e sugeriu que seus funcionários façam um curso de treinamento que aumenta a produtividade dos funcionários em 80% dos casos. 10 funcionários foram escolhidos aleatoriamente para participam deste curso. Encontre a probabilidade de:

(a) exatamente 7 funcionários aumentarem a produtividade;

Solução:

p = probabilidade de sucesso   p=0,8

X: número de funcionários que aumentaram a produtividade

$$P(X=7)=\binom{10}{7}\ 0{,}8^{7}\quad 0{,}2^{3}=120\ \times 0{,}2097\ \times 0{,}008=0{,}2013$$

(b) pelo menos 3 funcionários não aumentarem a produtividade;

Solução:

$$P(Y\geq 3)=1-P(Y<3)$$
$$P(Y<3)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)$$
$$P(Y=0)=\binom{10}{0}\ 0{,}2^{0}\quad 0{,}8^{10}=0{,}1186$$
$$P(Y=1)=\binom{10}{1}\ 0{,}2^{1}\quad 0{,}8^{9}=10\times 0{,}2\times 0{,}1342=0{,}2684$$
$$P(Y=2)=\binom{10}{2}\ 0{,}2^{2}\quad 0{,}8^{8}=45\times 0{,}04\times 0{,}1678=0{,}302$$
$$P(Y<3)=0{,}689$$
$$P(Y\geq 3)=1-P(Y<3)=1-0{,}689=0{,}311$$

(c) não mais que 8 funcionários aumentarem a produtividade.

Solução:

$$P(X<8)=1-P(X\geq 8)$$
$$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)$$
$$P(X=8)=\binom{10}{8}\ 0{,}8^{8}\quad 0{,}2^{2}=45\times 0{,}1678\ \times 0{,}04=0{,}302$$
$$P(X=9)=P(Y=1)=0{,}2684$$
$$P(X=10)=P(Y=0)=0{,}1186$$
$$P(X<8)=0{,}311$$