Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP3 2° semestre de 2019

Observações:
- A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal
- É permitido o uso de máquina de calcular
- Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
- **Utilize nos cálculos pelo menos cinco casas decimais arrendondando para duas só ao final**
- Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas
- Você pode usar lápis para responder as questões
- **Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível**
- Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas
- **Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões ou em folhas marcadas como rascunho não serão corrigidas.**
- **É PROIBIDO O USO DE CELULARES DURANTE A PROVA SOB QUALQUER PRETEXTO.**

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 – **Primeira Questão (2,0 pontos)** De uma sacola contendo 18 bolas numeradas de 1 a 18 retira-se uma bola.
a) Qual é a probabilidade da numeração desta bola ser um número divisível por 2 e por 3? (1,0 ponto)
Resolução:
O espaço amostral é dado por

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 \}.$$

Chamando de:

E_{D2} o evento da ocorrência das bolas com números divisíveis por 2:

$$E_{D2} = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 \}$$

e por E_{D3} o evento da ocorrência das bolas com números divisíveis por 3:

$$E_{D3} = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18 \}.$$

Logo, a probabilidade de sair uma bola com número divisível por 2 é $P_{(D2)} = 9/18 = 0,5$ e a probabilidade de sair uma bola com número divisível por 3 é $P_{(D3)} = 6/18 = 0,3333$. Como estamos interessados em uma ocorrência E em outra, devemos encontrar a intersecção dos eventos, ou seja:

$$P((D2) \cap (D3)) = 3/18 = 0,1667.$$

b) Qual a probabilidade da numeração desta bola ser um número divisível por 2 ou por 3? (1,0 ponto)
Resolução:
Nesse caso, como estamos interessados em uma ocorrência ou em outra, devemos encontrar a união de eventos mas, nesse caso, eles não são mutuamente exclusivos. Logo:

$$\mathbf{P((D2) \cup (D3)) = P_{(D2)} + P_{(D3)} - (P_{(D2)} \cap P_{(D3)}) = 9/18 + 6/18 - 3/18 = 12/18}$$

ou

$$\mathbf{P((D2) \cup (D3)) = 0{,}6667.}$$

2 – **Segunda Questão (1,0 ponto)** Em dias que chovem muito (acima da média) a probabilidade dos funcionários de uma indústria faltarem ao trabalho é de 0,06. Já em dias normais, ela é igual a 0,01. Considerando que em 1/8 dos dias de trabalho chove muito, qual é a probabilidade de 1 funcionário não ter faltado em um dia qualquer?
Resolução:
Queremos calcular a probabilidade de um funcionário não faltar em um dia qualquer, independente de chover ou não.
Sejam os eventos:
C = chove
N = normal

Então:

$$\mathbf{P(falta) = P(C\ ) \,.\, P(falta/C) + P(N) \,.\, P(falta/N)}$$

ou

$$\mathbf{P(falta) = (1/8) \times 0{,}06 + (7/8) \times 0{,}01 \text{ logo } P(falta) = 0{,}01625.}$$

A probabilidade de não haver falta é o evento complementar a P(falta), ou seja:

$$\mathbf{P(não\ faltar) = 1 - P(falta) \text{ logo } P(não\ faltar) = 0{,}98375.}$$

3 – **Terceira Questão (2,0 pontos)** Em um lago-laboratório pesquisadores acompanham o crescimento de 10 botos sendo 6 da espécie A e 4 da espécie B, e avaliam periodicamente seus pesos e tamanhos. Se em determinado dia de avaliação 2 botos forem capturados de uma vez, determine a probabilidade de pelo menos um ser da espécie A.
Resolução:
Usemos o Modelo Hipergeométrico:

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}};\, k=max(0,r-(n-m),\ldots,min(r,m))$$

Nesse caso temos:

10 botos (n=10):
6 da espécie A (m=6)
amostra 2 botos (r=2)

e quer se calcular P (k ≥ 1) = P(k = 1) + P(k = 2).
Então,

$$P(k\geq 1)=P(k=1)+P(k=2) \quad \textbf{e então} \quad P(k\geq 1)=0{,}5333+0{,}3333 \quad ,$$

logo

$$P(k\geq 1)=0{,}8666 \quad .$$

4 – **Quarta questão – (2,0 pontos)**
Calcule as probabilidades abaixo:
a) P(X > 1,5) – Distribuição Normal com média 1,9 e desvio padrão 6,324;
Resolução:
A fórmula padrão de cálculo de probabilidade para a distribuição Normal é

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right) .$$

Observe que o valor a partir do qual se quer calcular está abaixo da média, portanto,

$$P(X>1{,}5)=0{,}5+P(X<1{,}5)=0{,}5+P\left(Z<\frac{1{,}5-1{,}9}{6{,}324}\right)\approx 0{,}5+P\left(Z<-\frac{0{,}4}{6{,}324}\right)\approx 0{,}5+P(Z<-0{,}0633)$$

ou seja,

$$P(X>1{,}5)\approx 0{,}5+P(Z<0{,}06)=0{,}5+0{,}0239=0{,}5239 \quad .$$

b) P(X > 1,5) – Distribuição exponencial com α = 0,421;
Resolução:
Nesta distribuição a probabilidade é calculada usando

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b} \quad .$$

Observemos que neste caso a integral será do valor dado até o infinito onde a distribuição vale zero. Assim, escreveremos

$$P(X>1{,}5)=P(X<1{,}5)=e^{-0{,}421\times 1{,}5}=e^{-0{,}6315}\approx 0{,}5318 \quad .$$

c) P(1,3 < X < 1,5) – Distribuição Normal com média 1,1 e variância 3,249;
Resolução:
Aqui aplicaremos direto a fórmula para a distribuição Normal

$$P(1{,}3<X<1{,}5)=P\left(\frac{1{,}3-1{,}1}{\sqrt{3{,}249}}<Z<\frac{1{,}5-1{,}1}{\sqrt{3{,}249}}\right)\approx P\left(\frac{0{,}2}{1{,}8025}<Z<\frac{0{,}4}{1{,}8025}\right)$$

ou

$$P(1{,}3<X<1{,}5)\approx P(0{,}1110<Z<0{,}2220)\approx P(0{,}11<Z<0{,}22)=0{,}0871-0{,}0438=0{,}0433 \ .$$

d) P(X<1,5) – Distribuição dada pela função $f(x)=-\frac{3}{4}(x-3)(x-1)$, válida no intervalo $[1,3]$ e nula fora deste intervalo.
Resolução:
Para esta distribuição a probabilidade para um caso geral será dada por

$$P(a<X<b)=\int_a^b -\frac{3}{4}(x-3)(x-1)\,dx\,;a\,e\,b\in[1,3]\quad .$$

Para o caso específico do item teremos

$$P(X<1{,}5)=\int_1^{1,5} -\frac{3}{4}(x-3)(x-1)\,dx=-\frac{3}{4}\int_1^{1,5}(x^2-4x+3)\,dx=-\frac{3}{4}\left[\int_1^{1,5} x^2dx-4\int_1^{1,5} x\,dx+3\int_1^{1,5} dx\right]$$

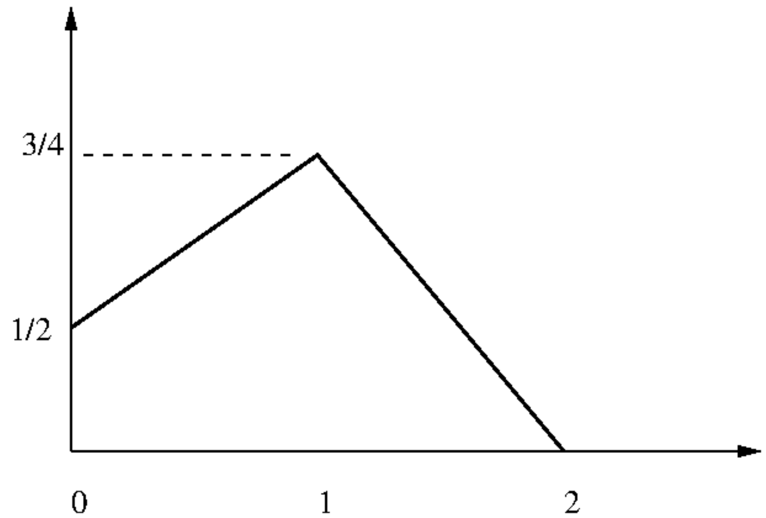
ou ainda

$$P(X<1{,}5)=-\frac{3}{4}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_1^{1,5}-4\frac{x^2}{2}\Big|_1^{1,5}+3x\Big|_1^{1,5}\right]=-\frac{3}{4}\left[\frac{1{,}5^3-1^3}{3}-2(1{,}5^2-1^2)+3(1{,}5-1)\right]=-\frac{3}{4}\left(\frac{19}{24}-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{5}{24}\right)$$

e finalmente

$$P(X<1{,}5)=-\frac{3}{4}\times\left(-\frac{5}{24}\right)=\frac{5}{32}=0{,}15625\quad .$$

5 – **Quinta questão – (1,5 pontos)**
A função apresentada abaixo é uma distribuição de probabilidade no intervalo [0, 2] .



a) Demonstre que esta função é realmente uma distribuição de probabilidade (0,5 ponto);
Resolução:
Observe que a função é claramente não negativa. Para verificarmos se a função é normalizada, note que a área da função acima do eixo x é a soma da área de um trapézio de bases iguais a $1/2\ \ e\ \ 3/4$ **e altura 1 e um triângulo de base 1 e altura ¾. Assim a área total será**

$$A=A_{Trap}+A_{Triang}=\frac{b+B}{2}\times h+\frac{b\times h}{2}=\frac{1/2+3/4}{2}\times 1+\frac{1}{2}(1\times 3/4)=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1\quad .$$

b) Calcule a probabilidade P(0,35 < X < 1,80) para esta distribuição (1,0 ponto).
Resolução:
Achemos as expressões dos segmentos de reta que definem a distribuição. Um segmento é definido pelos pontos $(0,1/2),(1,3/4)$ **e o segundo pelos pontos** $(1,3/4),(2,0)$ **. Usando a expressão** $y=ax+b$ **para representar as retas, calculemos a primeira,**

$$1/2=a\times 0+b\Rightarrow b=1/2\ \ \textbf{e}\ \ 3/4=a+1/2\Rightarrow a=1/4$$

sendo a equação $y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(x+2)$ **.**

Usando o segundo par de pontos, teremos

$$3/4=a+b \quad \textbf{e} \quad 0=2a+b \quad \textbf{que nos dá} \quad a=-3/4 \;\; e \;\; b=3/2$$

e a equação será $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}=\frac{3}{4}(-x+2)$ **. A probabilidade geral para esta distribuição será dada por**

$$P(a<X<b)=\int_a^1 \frac{x+2}{4}dx+\int_1^b \frac{3}{4}(-x+2)dx=\frac{1}{4}\int_a^1 (x+2)dx+\frac{3}{4}\int_1^b (2-x)dx \quad .$$

No caso específico deste item teremos

$$P(0{,}35<X<1{,}80)=\frac{1}{4}\int_{0,35}^{1}(x+2)dx+\frac{3}{4}\int_1^{1,8}(2-x)dx=\frac{1}{4}\left[\int_{0,35}^{1} x\,dx+2\int_{0,35}^{1} dx\right]+\frac{3}{4}\left[2\int_1^{1,8} dx-\int_1^{1,8} x\,dx\right] \quad ,$$

ou

$$P(0{,}35<X<1{,}80)=\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{0,35}^{1}+2x\Big|_{0,35}^{1}\right]+\frac{3}{4}\left[2x\Big|_1^{1,8}-\frac{x^2}{2}\Big|_{0,35}^{1}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1^2-0{,}35^2}{2}+2(1-0{,}35)\right]+\frac{3}{4}\left[2(1{,}8-1)-\frac{1{,}8^2-1^2}{2}\right]$$

e finalmente

$$P(0{,}35<X<1{,}8)=\frac{1}{4}(0{,}43875+1{,}3)+\frac{3}{4}(1{,}6-1{,}12)\approx 0{,}4347+0{,}36=0{,}7947 \quad .$$

6 – **Sexta questão – (1,5 ponto)**
Se aproxima o verão e, numa avaliação prévia para o combate à dengue, levantou-se os casos de 10 postos de saúde da rede pública em uma determinada cidade no mês de setembro. Os resultados foram: 10, 8, 5, 4, 3, 7, 3, 8, 9, 5. Suponha que podemos usar a distribuição Normal.
a) Faça uma estimativa da média e da variância com estimadores não viciados (0,5 ponto);
Resolução:
Usaremos os seguintes estimadores que são não viciados

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i \quad \textbf{e} \quad \sigma^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right)$$

Calculemos estas estimativas. Primeiro a média

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i=\frac{10+8+5+4+3+7+3+8+9+5}{10}=\frac{62}{10}=6{,}2 \quad .$$

Calculemos agora o seguinte somatório

$$\sum_1^n X_i^2=10^2+8^2+5^2+4^2+3^2+7^2+3^2+8^2+9^2+5^2=442 \quad ,$$

logo

$$\sigma^2=\frac{1}{9}\left(442-10\times6{,}2^2\right)=\frac{57{,}6}{9}=6{,}4 \ .$$

b) Baseado nestes valores, calcule o intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança igual a 95% (1,0 ponto).
Resolução:
Com as informações anteriores e de posse da fórmula

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

podemos escrever $z_{\gamma/2}=z_{0{,}95/2}=z_{0{,}475}=1{,}96$ **e** $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{6{,}4}}{\sqrt{10}}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8$ **e daí**

$$z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}96\times0{,}8=1{,}568 \ ,$$

logo

$$IC(\mu,\gamma)=[6{,}2-1{,}568\,;6{,}2+1{,}568]=[4{,}632\,;7{,}768] \ .$$

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.