Consórcio cederj Fundação CECIERJ

Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

**Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação**
**Disciplina Probabilidade e Estatística**
**AP3 2° semestre de 2010**

**Nome :**

**Assinatura :**

---

Observações:

1. A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal;
2. É permitido o uso de máquina de calcular;
3. Todos os cálculos têm que ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada;
4. Use caneta para preencher o seu nome e assine as folhas de questões e as de respostas;
5. Você pode usar lápis para responder as questões;
6. Escreva **legivelmente**;
7. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas;
8. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas.
9. **As respostas nas folhas das questões serão ignoradas.**

---

*Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo*

Questão 1- (2,5 pontos)

Sabe-se que uma determinada moeda viciada, quando lançada, mostra a face cara (c) quatro vezes mais do que a face coroa (r), ou seja, se: P(r) = p tem-se que P(c) = 5p. Esta moeda é lançada 5 vezes. Sendo X o número de caras que podem aparecer nesse lançamento, monte uma tabela com as possíveis ocorrências nesses 5 lançamentos e determine:

a) (1.5 pontos) a média, a variância e o desvio padrão

b) (1.0 ponto) P( X > 2 )

***RESPOSTA:***

*Seja* $P(r)=p$ *e* $P(c)=5\text{p}$ *com p + 5p = 1 => p = 0,166* · logo

$$P(c)=5*0{,}166=0{,}83$$
$$P(r)=1*0{,}166=0{,}166$$
$$P(X=0)=P(5\text{r})=(0{,}166)^5=0{,}000128601$$
$$P(X=1)=P(1\text{c}\,e\,4\text{r})=5*(0{,}83)*(0{,}166)^4=0{,}003215021$$
$$P(X=2)=P(2\text{c}\,e\,3\text{r})=10*(0{,}83)^2*(0{,}166)^3=0{,}032150206$$
$$P(X=3)=P(3\text{c}\,e\,2\text{r})=10*(0{,}83)^3*(0{,}166)^2=0{,}160751029$$
$$P(X=4)=P(4\text{c}\,e\,1\text{r})=5*(0{,}83)^4*(0{,}166)^1=0{,}401877572$$
$$P(X=5)=P(5\text{c}\,e\,0\text{r})=1*(0{,}83)^5*(0{,}166)^0=0{,}401877572$$

| *X* | *P(X)* | *X*P(X)* | *X²*P(X)* |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| *0* | 0,000128601 | *0* | *0* |
| *1* | 0,003215021 | *0,0032150* | *0,0032150* |
| 2 | 0,032150206 | *0,0643004* | *0,1286008* |
| *3* | 0,160751029 | *0,4822531* | *1,4467593* |
| *4* | 0,401877572 | *1,6075103* | *6,4300412* |
| 5 | 0,401877572 | *2,0093879* | *10,0469393* |
| | *1* | *4,1666667* | *18,0555556* |

(a) $E(X)=4{,}1666666667$

$$VAR(X)=18{,}05-(4{,}1666666667)^2=0{,}69$$
$$dp(X)=\sqrt{VAR(X)}=0{,}83$$

(b)
$$P(X>2)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$
$$P(X>2)=0{,}160751029+0{,}401877572+0{,}401877572=0{,}964506173$$

Questão 2 – (2,5 pontos) Um criador de bovinos suspeita que 2% de seu rebanho esteja com um tipo de doença A. Se sua suspeita for correta:
a) (1.5 pontos) Determine qual a probabilidade de que, numa amostra de 10 produtos, haja no mínimo 9 sem a doença.
b) (1.0 ponto) Se esse criador for escolher aleatoriamente 4 bovinos para mostrar em um feira, qual a probabilidade de somente o 5° estar doente?

*SOLUÇÃO:*

*a)*

$$P(x=0)=\binom{10}{0}\times(0{,}02)^0\times(0{,}98)^{10}$$
$$P(x=0)=\left(\frac{10!}{0!(10-0)!}\right)\times(0{,}02)^0\times(0{,}98)^{10}$$
$$P(x=0)=1\times1\times0{,}817072807$$
$$P(x=0)=0{,}8171$$

$$P(x=0)+P(x=1)=0.8171+\binom{10}{1}\times(0{,}02)^1\times(0{,}98)^9$$
$$P(x=0)+P(x=1)=0.8171+0.1667$$
$$P(x=0)+P(x=1)=0.9838$$

b)

*Para o modelo geométrico temos:*
*X: número de vezes necessárias para encontrar o quinto doente.*
*p= 0.02*
*q=0.98*

$$P(x=5)=(0{,}98)^4\times(0{,}02)^1$$
$$P(x=5)=0.0184$$

Questão 3 – (2,0 pontos) Uma companhia de reflorestamento fez um teste com um novo lote de sementes de seu fornecedor. Retirou uma amostra de 50 semestres e as colocou para germinar. Os testes indicaram que as sementes da amostra brotaram em média em 17,3 dias. Estudos levados sobre outros lotes indicaram uma variância de 4,3 dias$^2$. O fabricante quer estimar a média do tempo de brotação do lote de sementes com um coeficiente de confiança de 95%.

**Solução:**
**Por definição o intervalo de confiança é dado por**

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

**O valor** $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **no nosso caso é dado por**

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{4,3}{50}}=0,2932$$

**Pelo uso da tabela de distribuição Normal padrão temos** $z_{\gamma/2}=1,96$ **. Assim obtemos**

$$IC(\mu,95)=[17,3-1,96\times 0,2932\,;\,17,3+1,96\times 0,2932]=[16,73\,;\,17,87]$$

**Grosso modo, temos uma diferença entre brotações de aproximadamente um dia.**

Questão 4 – (1,5 pontos) Dada a função abaixo

$$f(x)=\frac{2}{5}(x+1)$$

a) Prove que ela é realmente uma distribuição de probabilidade no intervalo [1, 2] e suposta nula fora deste intervalo;
**Solução: Uma distribuição de probabilidade deve ser não negativa no intervalo de definição e também deve ser normalizada, ou seja, sua integral deve valer 1 dentro do intervalo de definição:**

$$\int_a^b f(x)\,dx=1\ .$$

**No nosso caso teremos então**

$$\int_1^2 \frac{2}{5}(x+1\,dx)=\frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2=\frac{2}{5}\frac{5}{2}=1$$

**ou seja,**

b) Ache a média desta distribuição;
**Por definição temos**

$$\mu=\int_a^b x\,f(x)\,dx$$

**assim teremos para a nossa função**

$$\mu=\frac{2}{5}\int_1^2 x(x+1)\,dx=\frac{2}{5}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=\frac{2}{5}\frac{23}{6}=\frac{23}{15}\approx 1,533$$

c) Calcule a probabilidade P(1,3 < X < 1,6).
**Basta integrar a distribuição dentro deste intervalo, ou seja,**

$$\int_{1,3}^{1,6} f(x)\,dx = \frac{2}{5}\int_{1,3}^{1,6}(x+1\,dx) = \frac{2}{5}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{1,3}^{1,6} = \frac{2}{5}\,0,735 = 0,294 \text{ .}$$

Questão 5 – (1,5 pontos) Uma série de amostras de brita foram tiradas de uma pedreira. Temos que o valor da média é de 10 $cm^3$ para o volume das britas e se estima que a variância é $(5\ cm^3)^2$. Quer se saber qual a probabilidade de que as britas se encontrem no intervalo [7, 11] $cm^3$ para valores diferentes do número amostras de brita (n) dadas por
**Solução:**
**Aqui supomos que podemos usar a distribuição Normal e que queremos a probabilidade das britas se encontrem no intervalo [7,11], ou seja,**

$$P(7<\bar{X}<11) \text{ .}$$

**Para todos os valores do tamanho da amostra teremos a média amostral 10 e variância 5 não se esquecendo que a variância amostral varia com o número de espécimes. Assim, teremos**

a) n = 10;

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{5}{10}} = 0,7071 \text{ **logo**}$$

$$P(7<\bar{X}<11) = P\left(\frac{7-10}{0,7071} < Z < \frac{11-10}{0,7071}\right) = P(-4,247 < Z < 1,414) \approx 0,5+0,4207 \approx 0,9207$$

b) n = 16;

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = 0,5590$$

$$P(7<\bar{X}<11) = P\left(\frac{7-10}{0,5590} < Z < \frac{11-10}{0,5590}\right) = P(-5,366 < Z < 1,7889) \approx 0,5+0,4625 \approx 0,9625$$

c) n = 25;

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{5}{25}} = 0,4472$$

$$P(7<\bar{X}<11) = P\left(\frac{7-10}{0,4472} < Z < \frac{11-10}{0,4472}\right) = P(-6,708 < Z < 2,236) \approx 0,5+0,4861 \approx 0,9861$$

**ou seja, para este valor de variância e intervalo de valores a menor das amostras é de boa qualidade.**