Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

AD1 de Probabilidade e Estatística

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

II.2013

Observação: Nas questões 6 e 9 será considerado, principalmente, se as questões estão montadas corretamente.

1) (1 ponto) As análises dos níveis do "colesterol bom" no sangue (HDL) medidos em cinco pacientes foi de 29, 55, 58, 61 e 63 mg/dL. Determine:

(a) a média;

$$\bar{x} = \frac{29+55+58+61+63}{5} = \frac{266}{5} = 53.2$$

A média para essa amostra é 53.2 mg/dL

(b) a variância desta amostra

$$var = \frac{1}{5}\left((29-53.2)^2 + (55-53.2)^2 + (58-53.2)^2 + (61-53.2)^2 + (63-53.2)^2\right)$$

$$var = \frac{1}{5}\left((-24.2)^2 + (1.8)^2 + (4.8)^2 + (7.8)^2 + (9.8)^2\right)$$

$$var = \frac{1}{5}(585.64 + 3.24 + 23.04 + 60.84 + 96.04) = \frac{768.8}{5} = 153.76$$

(c) o desvio padrão;

$$dp = \sqrt{var} = \sqrt{153.6} = 12.4$$

2) (0.5 ponto) Três moedas são lançadas simultaneamente. Determine qual a probabilidade das três moedas caírem com a mesma face para cima, ou seja, três caras ou três coroas.

Seja p_k a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda e p_c a probabilidade de sair coroa.

Seja o evento A: três moedas caírem com a mesma face para cima; A pode ocorrer de duas maneiras, quando as três faces forem cara ou quando as três faces forem coroas.

Então:

$P(A) = P(três\ moedas\ em\ cara) + P(três\ moedas\ cairem\ coroa)$

$P(A) = p_k \times p_k \times p_k + p_c \times p_c \times p_c$
Como $p_c = p_k = \frac{1}{2}$, temos que
$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

3) Uma urna que contém 6 bolas vermelhas, 4 brancas e 5 azuis.

3.1) (1 ponto) Uma bola é retirada ao acaso. Determinar a probabilidade dela:
(a) ser vermelha;

$$P(vermelha) = \frac{6}{15} = 0.4$$

(b) ser branca;

$$P(branca) = \frac{4}{15} = 0.27$$

(c) ser azul;

$$P(azul) = \frac{5}{15} = 0.33$$

(d) não ser vermelha;

$$P(\tilde{n}\ vermelha) = \frac{9}{15} = 0.6$$

(e) ser vermelha ou branca.

$$P(vermelha\ ou\ branca) = P(vermelha) + P(branca) = \frac{6+4}{15} = 0.67$$

3.2) (0.5 ponto) Se 3 bolas forem retiradas sequencialmente, com reposição, qual a probabilidade
de sairem na ordem vermelha, branca e azul?

Seja B o evento as bolas sairem na ordem vermelha, branca e azul, retiradas com reposição.
Então P(B) seria a probabilidade da 1ª bola ser vermelha e a 2ª bola ser branca e a 3ª bola ser azul. Como as retiradas são com reposição, nas três retiradas eu tenho 15 bolas na urna.

$$P(B) = \frac{6}{15} \times \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} = 0.036$$

3.3) (0.5 ponto) O mesmo do item anterior, considerando agora que as bolas são retiradas
simultaneamente (sem reposição).

Seja C o evento as bolas sairem na ordem vermelha, branca e azul, retiradas sem reposição..

Então P(C) seria a probabilidade da 1ª bola ser vermelha e a 2ª bola ser branca e a 3ª bola ser azul. Como as retiradas são sem reposição, cada retirada, o total de bolas na urna é diferente.

$$P(C) = \frac{6}{15} \times \frac{4}{14} \times \frac{5}{13} = 0.4 \times 0.29 \times 0.38 = 0.044$$

4) (1 ponto) Uma bolsa contém 4 bolas brancas e 2 pretas e uma outra contém 3 bolas brancas e 5 pretas. Se for retirada uma bola de cada bolsa, determine a probabilidade de:

(a) ambas serem brancas:

A bola retirada de uma bolsa é branca e a bola retirada da outra bolsa também é branca, ou seja,

$$P(ambas\ brancas) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = 0.67 \times 0.375 = 0.25$$

(b) ambas serem pretas:

$$P(ambas\ pretas) = \frac{2}{6} \times \frac{5}{8} = 0.33 \times 0.625 = 0.21$$

(c) uma ser branca e a outra preta.

$$P(\text{uma branca e outra preta}) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{8} =$$

$$= 0.67 \times 0.625 + 0.33 \times 0.375 = 0.42 + 0{,}12 = 0.54$$

5) (0.5 ponto) Em uma determinada escola de treinamento de profissionais com 2000 alunos, 500 fazem curso de montagem de máquinas, 300 fazem curso de mecânica e 200 fazem os dois cursos. Se um aluno que faz o curso de montagem de máquinas for selecionado ao acaso, qual a probabilidade dele também estar fazendo o curso de mecânica?

Sejam os eventos:
MA: montagem de máquinas
ME: mecânica

$$P(ME/MA) = \frac{P(ME \cap MA)}{P(MA)} = \frac{200}{500} = 0.4$$

6) Uma companhia aérea vende 125 tickets para um vôo que contém somente 120 lugares, sabendo que existe a probabilidade de alguns passageiros não comparecerem. Se os passageiros não se conhecem, tendo o comportamento independente um do outro, e sabendo que estudos mostram que a probabilidade de que um passageiro não apareça é 0.1 determine:

(a) (0.8 ponto) Qual é a probabilidade de que cada passageiro que aparecer consiga um lugar?

Seja a variável X: número de passageiros que desistiram de suas passagens. Total de 125 passageiros compraram suas passagens (n=125) e "*p*" a probabilidade de que um passageiro desista de sua passagem, onde *p* = 0.1.

Cada passageiro que chegar terá lugar se não comparecerem 5 ou mais passageiros, ou seja,
$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = \ 1 - [\ P(X=0) + P(X=1)\ + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)]$

$$P(X=0) = \binom{125}{0} \times 0.1^0 \times 0.9^{125} = 1.906 \times 10^{-6}$$

$$P(X=1) = \binom{125}{1} \times 0.1^1 \times 0.9^{124} = 2.65 \times 10^{-5}$$

$$P(X=2) = \binom{125}{2} \times 0.1^2 \times 0.9^{123} = 0.000182$$

$$P(X=3) = \binom{125}{3} \times 0.1^3 \times 0.9^{122} = 0.000831$$

$$P(X=4) = \binom{125}{4} \times 0.1^4 \times 0.9^{121} = 0.002817$$

$P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = \ 1 - [1.906 \times 10^{-6} + \ 2.65 \times 10^{-5} + 0.000182 + 0.000831 + 0.002817] = 1 - 0.003859$

Então, $P(X \geq 5) = 0.996141$

(b) (0.7 ponto) Qual é a probabilidade de que um vôo parta com assentos vazios?

Um vôo partir com assentos vazios é equivalente a X > 5.

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = \ 1 - [\ P(X=0) + P(X=1)\ + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)]$

$$P(X=5) = \binom{125}{5} \times 0.1^5 \times 0.9^{120} = 0.007574$$

$P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = \ 1 - [1.906 \times 10^{-6} + \ 2.65 \times 10^{-5} + 0.000182 + 0.000831 + 0.002817 + 0.007574] = 1 - 0.011432 = 0.9886$

$P(X > 5) = 0.9886$

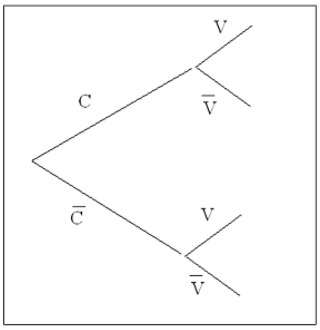
7) (0.5 ponto) Um credor está a procura de João e a probabilidade de encontrá-lo em casa é de 0,4. Qual a probabilidade do credor encontrá-lo uma vez em casa, fazendo 5 tentativas?

Mais uma vez temos um modelo binomial, onde X: número de vezes que o credor encontra João em casa, "*p*"=0.4 é a probabilidade do credor encontrar João em casa, n=5. Então

$$P(X=1) = \binom{5}{1} \times 0.4^1 \times 0.6^{5-1} = 5 \ \times 0.4 \ \times 0.13 = 0.26$$

8) Em um grupo de pessoas suspeitas de terem cometido um crime, uma será sorteada para que lhe apliquem o “soro da verdade", para fazer parte de sua defesa, já que todas se declaram inocentes. Sabe-se que este soro, quando aplicado, é 90% eficaz quando a pessoa é culpada e 99% eficaz quando ele é inocente. Sabendo-se que 95% das pessoas desse grupo nunca cometeram um crime, pergunta-se:

Vamos definir os seguintes eventos (veja a figura abaixo):



C = “suspeito é culpado”,
$\overline{C}$ = “suspeito é inocente”
V = “soro indica culpado”
$\overline{V}$ = “soro indica inocente”

Note que você tem que definir os eventos de acordo com a execução do experimento. Ao se aplicar um soro da verdade, a resposta é “culpado” ou “inocente” e não “soro acerta” ou “soro erra”. Os dados do problema nos dão as seguintes probabilidades:

$P(V|C)=0.90$ $P(\overline{V}|\overline{C})=0.99$ $P(\overline{C})=0.95$

Usando o resultado sobre probabilidade do evento complementar, obtemos que:

$P(\overline{V}|C)=0.10$ $P(V|\overline{C})=0.01$ $P(C)=0.05$

A partição do espaço amostral é definida pelos eventos C e $\overline{C}$,para os quais temos as probabilidades a priori. Os eventos de interesse são V e $\overline{V}$.

(a) (0.5 ponto) Qual é a probabilidade de o soro dar a resposta certa?

Seja o evento A =“soro acerta o diagnóstico”. Note que o soro pode diagnosticar corretamente sendo o suspeito culpado ou inocente. Veja a tabela a seguir.

		Suspeito	
		Inocente $\overline{C}$	Culpado C
Resultado do soro	inocente $\overline{V}$	OK!	erro
	culpado V	erro	OK!

Dessa forma, $A = (C \cap V) \cup (\overline{C} \cap \overline{V})$
Logo,

$P(A) = P(C \cap V) + P(\overline{C} \cap \overline{V})$
$P(A) = P(C \cap V) + P(\overline{C} \cap \overline{V}) = P(C) \times P(V|C) + P(C) \times P(V|C) = 0.05 \times 0.90 + 0.95 \times 0.99 = 0.9855$

(b) (0.5 ponto) Se o soro indica “culpado", qual é a probabilidade de o suspeito ser inocente?

Queremos calcular P($\overline{C}$ | V). Por definição temos que:

P ($\overline{C}$ | V) = $\frac{P(\overline{C} \cap V)}{P(V)}$

O soro pode indicar culpado sendo o suspeito culpado (acerto do diagnóstico) ou inocente (erro no diagnóstico), ou seja:

P (V) = P (V ∩ C) + P(V ∩ $\overline{C}$) = P(V |C) × P(C) + P(V |$\overline{C}$) × P($\overline{C}$)=

= 0.90 × 0. 05 + 0. 01 × 0.95 = 0. 045 + 0.0095 = 0.0545

e P(V ∩ $\overline{C}$) = P(V |$\overline{C}$) × P($\overline{C}$) = 0. 01 × 0.95 = 0.0095.

Logo, $P(\bar{C}/V) = \frac{0{,}0095}{0{,}0545} = 0.1743$

9) Placas de circuito impresso são testadas. Um lote contém 140 placas e 20 são selecionadas sem substituição para teste.

(a) (0.5 ponto) Se 20 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que haja ao menos duas placas defeituosas na amostra?

Novamente, temos um modelo binomial, onde X: número de placas defeituosas na amostra de tamanho n=20

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{20}{0}\binom{120}{20}}{\binom{140}{20}} = 0.035618$$

$$P(X = 1) = \frac{\binom{20}{1}\binom{120}{19}}{\binom{140}{20}} = 0.141063$$

$P(X < 2) = 0.035618 + 0.141063 = 0.176681$ e $P(X \geq 2) = 1 - 0.18 = 0.82$

(b) (0.5 ponto) Se 5 placas são defeituosas, qual é a probabilidade de que haja ao menos duas placas defeituosas na amostra?

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0}\binom{135}{20}}{\binom{140}{20}} = 0.457059$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{135}{19}}{\binom{140}{20}}=0.394019$$

$P(X<2)=0.457059+0.394019=0.85$ e $P(X\geq 2)=\ 1-\ 0.85=0.15$

10) (1 ponto) Um lote de 200 peças contém 35 que são defeituosas. Três peças são selecionadas aleatoriamente e sem reposição. Determine:

(a) Qual a probabilidade de que a terceira seja defeituosa?

Podemos obter a terceira peça defeituosa das seguintes maneiras:

	1ª peça	2ª peça	3ª peça	probabilidades
A	Defeituosa	Ñ Defeituosa	Defeituosa	$\frac{35}{200}\times\frac{165}{199}\times\frac{34}{198}=\frac{196350}{7880400}=0.025$
B	Ñ Defeituosa	Defeituosa	Defeituosa	$\frac{165}{200}\times\frac{35}{199}\times\frac{34}{198}=\frac{196350}{7880400}=0.025$
C	Defeituosa	Defeituosa	Defeituosa	$\frac{35}{200}\times\frac{34}{199}\times\frac{33}{198}=\frac{39270}{7880400}=0.005$
D	Ñ Defeituosa	Ñ Defeituosa	Defeituosa	$\frac{165}{200}\times\frac{164}{199}\times\frac{35}{198}=\frac{947100}{7880400}=0.12$

Então, a probabilidade pedida é igual a P(A) + P(B) + P(C) + P(D) = 0.175

(b) Qual a probabilidade de que todas sejam defeituosas?

$P(C)=0.005$

(c) Qual a probabilidade de que ao menos uma seja defeituosa?

E equivalente a calcular 1- P(nenhuma defeituosa)

$$P(nenhuma\ defeituosa)=\frac{165}{200}\times\frac{164}{199}\times\frac{163}{198}=\frac{4410780}{7880400}=0.56$$

$P(ao\ menos\ uma\ defeituosa)=1-0.56=0.44$

(d) Qual a probabilidade de que no máximo duas sejam defeituosas?

$P(no\ máximo\ duas\ defeituosas)=1-P(três\ defeituosas)=1-0.005=0.995$