PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
3ª. AVALIAÇÃO PRESENCIAL
2º. Semestre de 2013
Profa. Keila Mara Cassiano (UFF)

GABARITO

1. **(4,0 pontos)** Os dados abaixo referem-se a notas de uma turma de Estatística:

4,6	4,7	4,7	4,9	4,9	5,0	5,0	5,0	5,0	6,0
6,5	6,5	6,8	6,9	6,9	7,0	7,0	7,0	7,1	7,1
7,4	7,4	7,4	8,8	8,8	8,8	8,8	9,0	9,0	9,0
9,0	9,2	9,2	9,2	9,4	9,5	9,5	9,5	10,0	10,0

a) **(0,5 pt)** Construa um diagrama de ramo-e-folhas com estes dados;
b) **(0,5 pt)** Determine a nota média desta turma;
c) **(1,0 pt)** Determine a moda e a mediana das notas desta turma;
d) **(1,0 pt)** Determine os valores de Q_1, Q_2 e Q_3;
e) **(1,0 pt)** Faça um Box-plot destes dados.

<u>Solução:</u>
a)

4	*6 7 7 9 9*
5	*0 0 0 0*
6	*0 5 5 8 9 9*
7	*0 0 0 1 1 4 4 4*
8	*8 8 8 8*
9	*0 0 0 0 2 2 2 4 5 5 5*
10	*0 0*

b)
Média:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{297{,}5}{40} = \mathbf{7{,}4375.}$$

c)
Moda:
Tri modal, pois tem três valores com máxima freqüência (4). As modas são:

$$x_1^* = 5{,}0$$
$$x_2^* = 8{,}8$$
$$x_3^* = 9{,}0$$

Mediana:

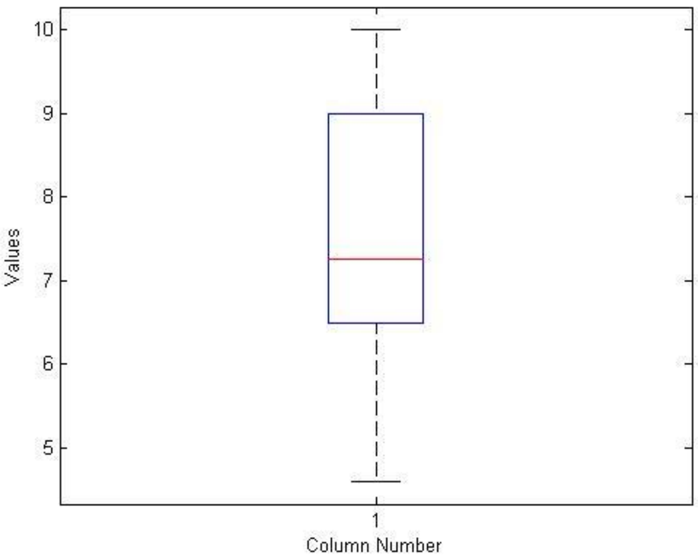
$$Q_2 = \frac{x_{20} + x_{21}}{2} = \frac{7{,}1 + 7{,}4}{2} = \mathbf{7{,}25.}$$

d)
Q_2 *já foi calculado no item anterior.*

$$Q_1 = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{6{,}0 + 6{,}5}{2} = \mathbf{6,25}.$$

$$Q_3 = \frac{x_{30} + x_{31}}{2} = \frac{9{,}0 + 9{,}0}{2} = \mathbf{9,0}.$$

e)
Box-plot.
$IC = Q_3 - Q_1 = 9{,}0 - 6{,}25 = 2{,}75.$
$S = Q_3 + (1{,}5 \times IC) = 9{,}0 + (1{,}5 \times 2{,}75) = 9{,}0 + 4{,}125 = 13{,}125.$
$I = Q_1 - (1{,}5 \times IC) = 6{,}25 - (1{,}5 \times 2{,}75) = 6{,}25 - 4{,}125 = 2{,}125.$
Se menores valores observados forem menores que I, então eles são dados discrepantes.
Se maiores valores observados forem maiores que S, então eles são dados discrepantes.



2. **(2,0 pontos)** Nas Olimpíadas de Matemática de um determinado país, a pontuação média foi de 70 pontos com um desvio padrão de 20 pontos. Estatísticos notaram que as pontuações destas Olimpíadas seguiam uma distribuição Normal de Probabilidade. Se selecionarmos aleatoriamente um estudante que tenha realizado estas provas das Olimpíadas, qual a probabilidade de ele ter obtido:
a) **(0,5 pt)** Mais que 70 pontos;
b) **(0,5 pt)** Menos que 80 pontos;
c) **(0,5 pt)** Entre 50 e 60 pontos;
d) **(0,5 pt)** Entre 65 e 75 pontos.

<u>Solução</u>:

a)

$$Pr(X > 70) = \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{70 - 70}{20}\right) = \Pr(Z > 0) = \mathbf{0,5}.$$

b)

$$\Pr(X < 80) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{80-70}{20}\right) = \Pr(Z < 0{,}5) = 0{,}5 + tab(0{,}5)$$
$$= 0{,}5 + 0{,}1915 = \mathbf{0{,}6915}.$$

c)

$$\Pr(50 < X < 60) = \Pr\left(\frac{50-70}{20} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{60-70}{20}\right) = \Pr\,(-1 < Z < -0{,}5)$$
$$= \Pr(0{,}5 < Z < 1) = tab(1) - tab(0{,}5) = 0{,}3413 - 0{,}1915 = \mathbf{0{,}1498}.$$

d)

$$\Pr(65 < X < 75) = \Pr\left(\frac{65-70}{20} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{75-70}{20}\right) = \Pr\,(-0{,}25 < Z < 0{,}25)$$
$$= 2 \times \text{tab}(0{,}25) = 2 \times 0{,}0987 = \mathbf{0{,}1974}.$$

3. **(3,0 pontos)** Considere os seguintes eventos complementares A, B e C tais que $\Pr(A) = 0{,}3$, $\Pr(B) = 0{,}6$ e $\Pr(C) = ?$ em um mesmo espaço amostral Ω. Considere também o evento X no mesmo espaço amostral tal que $\Pr(X|A) = 0{,}5$, $\Pr(X|B) = 0{,}7$ e $\Pr\,(X|C) = 0{,}8$. Determine:

a) **(0,5 pt)** $\Pr\,(C)$;
b) **(1,0 pt)** $\Pr\,(X)$;
c) **(1,0 pt)** $\Pr\,(A|X)$;
d) **(0,5 pt)** $\Pr\,(B \cup C)$.

<u>Solução</u>:

a)

Como os eventos são complementares, então $\Pr(A) + \Pr(B) + \Pr(C) = 1$. *Assim,* $\mathbf{Pr(C) = 0{,}1}$.

b)

Pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$\Pr(X) = \Pr(A)\Pr(X|A) + \Pr(B)\Pr(X|B) + \Pr(C)\Pr\,(X|C)$$
$$= (0{,}3 \times 0{,}5) + (0{,}6 \times 0{,}7) + (0{,}1 \times 0{,}8) = 0{,}15 + 0{,}42 + 0{,}08 = \mathbf{0{,}65}.$$

c)

$$\Pr(A|X) = \frac{\Pr(A)\Pr(X|A)}{\Pr(X)} = \frac{0{,}15}{0{,}65} = \mathbf{0{,}2307}.$$

d)

Como os eventos são complementares, então $\Pr(B \cap C) = 0$.

Assim:

$$\Pr(B \cup C) = \Pr(B) + \Pr(C) = 0{,}6 + 0{,}1 = \mathbf{0{,}7}.$$

4. **(1,0 ponto)** Uma variável aleatória X segue uma distribuição Binomial de Probabilidade tal que: $X \sim Binomial(4; 0{,}2)$. Determine:

a) **(0,5 pt)** $\Pr(X \geq 2)$;
b) **(0,5 pt)** $E(X)$.

<u>Solução</u>:

a)

$\Pr(X \geq 2) = 1 - \Pr(X < 2) = 1 - [\Pr(X = 0) + \Pr(X = 1)]$

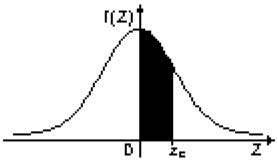
$$= 1 - \left[\binom{4}{0}(0{,}2)^0(0{,}8)^4 + \binom{4}{1}(0{,}2)^1(0{,}8)^3\right]$$
$$= 1 - [(1 \times 1 \times 0{,}4096) + (4 \times 0{,}2 \times 0{,}512)]$$
$$= 1 - [0{,}4096 + 0{,}4096] = 1 - 0{,}8192 = \mathbf{0{,}1808}.$$

b)

$$E(X) = np = 4 \times 0{,}2 = \mathbf{0{,}8}.$$

Anexo:

Parte da tabela de distribuição normal padrão.



$\Pr(0 \leq Z \leq Z_c)$

Z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767