**AD2 da disciplina Probabilidade e Estatística**

**GABARITO**

*Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo*

*02.2007*

i) (2,0 pontos com cada item valendo 0,5 ponto)

Verifique se as expressões a seguir são funções densidade de probabilidade (as funções se anulam fora dos intervalos especificados).

Solução:

A densidade de probabilidade deve não negativa no domínio no qual está definida e sua integral no domínio deve ser igual a 1.

$a.\ \ f(x)=3\mathrm{x}\ \ ,\ se\ \ 0\leq\ x\ \leq 1\,.$

Solução: A função é não negativa no intervalo, no entanto

$$\int_0^1 3\mathrm{x}\,dx=3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{3}{2}$$

Portanto, não é densidade de probabilidade.

$b.\ \ f(x)=\cos(x)\ \ ,0\leq x\leq \pi/2.\ \ A\ \ integral\ \ de\ \ \cos(x)\ \ é\ \ sen(x).$

Novamente a função não negativa no domínio e a sua integral é

$$\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=sen x\Big|_0^{\pi/2}=1$$

$c.\ \ f(x)=(x-3)/2\ \ ,\ se\ \ 3\leq\ x\ \leq 5\,.$

Observe que no domínio a função é não negativa e sua integral

$$\int_3^5\frac{x-3}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_3^5 x\,dx-3\int_3^5 dx\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_3^5-3\mathrm{x}\Big|_3^5\right)=1$$

¿

$$f(x)=\begin{cases}(2+x)/4\ \ se\ \ -2\leq\ x\ \leq 0;\\ (2-x)/4\ \ se\ \ 0\leq\ x\ \leq 2.\end{cases}$$

Novamente a função acima não toma valores negativos dentro do domínio. Temos, pois, calcular a integral para verificar a sua normalização, ou seja, se a integral vale 1. O cálculo pode ser feito de duas maneiras, uma diretamente pela definição da integral, ou seja

$$\int_{-2}^{0} \frac{2+x}{4}dx+\int_{0}^{2} \frac{2-x}{4}dx=\frac{1}{4}\left(\int_{-2}^{0}(2+x)dx+\int_{0}^{2}(2-x)dx\right)=\frac{1}{4}(2+2)=1$$

É, portanto, densidade de probablidade.

Outra maneira é perceber que as funções definem dois triângulos de mesma base (2) e mesma altura (½). Faça um desenho para constatar ou apenas calcule os valores da função nos pontos -2, 0 e 2. Cada triângulo tem área ½.

ii) (2,0 pontos)

Foi sorteada uma amostra de 18 postos de saúde da rede pública em uma determinada cidade e anotado o número de casos de dengue em cada uma delas no mês de setembro. Os resultados foram: 10, 8, 5, 4, 3, 7, 1, 11, 3, 6, 6, 7, 3, 4, 8, 9, 5, 5. Deseja-se estimar o número médio de casos e sua variância para apoio à população devido ao início da época chuvosa. Obtenha seguintes estimadores:

$$\mu_1=\frac{(valormínimo+valormáximo)}{2}$$

$$\mu_2=\bar{X}$$

Solução: o Primeiro estimador dará como resultado (1 + 11)/2 = 5,5 enquanto o segundo dará (10 + 8 + 5 + 4 + 3 + 7 + 1 + 11 + 3 + 6 + 6 + 7 + 3 + 4 + 8 + 9 + 5 + 5)/18 = 5,55.

(0,5 ponto no total)

Calcule também os estimadores da variância (use as duas estimativas de média)

$$\sigma^2=\frac{(valormáximo)^2-(valormínimo)^2}{2}$$

$$\sigma^2=\frac{1}{17}\left(\sum_{1}^{18} X_i^2-18\bar{X}^2\right)$$

Solução: Pelo primeiro estimador temos (11² – 1²)/2 = 60 enquanto o segundo estimador teremos usando o primeiro estimador para a média ($10^2 + 8^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 7^2 + 1^2 + 11^2 + 3^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 3^2 + 4^2 + 8^2 + 9^2 + 5^2 + 5^2 - 18 \cdot 5{,}55)/17 = 37{,}41$ e com o segundo estimador para a média 37,35.

(0,5 ponto no total)

Diga qual o estimador mais adequado para a média e para a variância. (1,0 ponto)

Os segundos estimadores da média e da variância são os mais adequados pois levam em consideração a totalidade dos dados. O fato dos valores das médias diferirem de pouco apenas indicam uma situação particular e que não pode ser generalizada.

iii) (2,0 pontos)
O tempo de espera, em minutos, na fila de votação numa certa zona eleitoral com urna eletrônica, foi modelado segundo uma distribuição Uniforme Contínua com valores entre 0 e 10. Responda:

Se a distribuição é uniforme e de domínio [0, 10], ela valerá $1/(10-0)=1/10$ dentro do intervalo e zero fora do mesmo. As probabilidades serão dadas pela a área delimitada dentor de cada sub-intervalo especificado.

a) qual a probabilidade de um eleitor demorar mais de 9 minutos? (0,5 ponto)
Aqui a área é da que vai de 9 até 10, ou seja, a probablidade é 1/10.

b) qual a probabilidade o tempo de espera ser inferior a 3 minutos? (0,5 ponto)

Aqui a área é a que vai de 0 até 3 e a probablidade será 3/10.

c) você deseja pedir a um amigo que espere um tempo *t* para lhe dar uma carona. Qual deve ser o valor de *t* para não perder a carona com probabilidade *0,8*? (1,0 ponto)

Aqui temos a situação inversa das precedentes. A probabilidade é 0,8. Como a distribuição é uniforme, o tempo de espera solicitado será de 8 minutos.

iv) (2,0 pontos)
O comprimento de uma peça produzida numa fábrica tem média 30 cm e variância 3 $cm^2$ sendo que a amostra estudada era de 50 peças. Esta produção foi modelada pela distribuição Normal. Calcule as seguintes probabilidades:

Solução: Como a produção foi modelada pela distribuição Normal, cada item abaixo consiste em consultas na tabela da função normal e uso das propriedades das probabilidades. Para os dados aqui apresentados a distribuição Normal terá a forma

$$N(\mu,\sigma^2)=N(30\,;3/50)=N(30\,;0{,}06)$$

Assim as probabilidades serão calculadas a partir da tabela da seguinte forma:

$$P(a\leq X\leq b)=P\left(\frac{a-30}{0{,}245}\leq Z\leq\frac{b-30}{0{,}245}\right)$$

Observem que todos os resultados são antecipáveis pelo valores das média e variância.

a) De uma peça ter comprimento maior que 31 cm; (0,5 ponto)

$$P(X>31)=P\left(Z>\frac{31-30}{0{,}245}\right)=P(Z>4{,}081)=\frac{1}{2}-P(0\leq Z\leq 4{,}081)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

b) De uma peça ter comprimento entre 28 cm e 32 cm; (1,0 ponto)

$$P(28\leq X\leq 32)=P\left(\frac{28-30}{0{,}245}\leq Z\leq\frac{32-30}{0{,}245}\right)=P(-8.163\leq Z\leq 8.163)=1$$

c)De ter sido produzida uma peça com menos de 26 cm; (0,5 ponto)

$$P(0\leq X\leq 26)=P\left(Z\leq\frac{26-30}{0{,}245}\right)=P(Z\leq -16{,}326)=0$$

v) (2,0 pontos)
Uma amostra de 20 observações de uma variável aleatória Normal forneceu média de 5,5 e variância amostral 4. Deseja-se testar, ao nível de significância de 5%, se a média na população é igual ou é menor que 6 (1,0 ponto). Qual é a conclusão? (1,0 ponto).

Solução: Temos que fazer um teste de hipótese sobre o valor da média do problema. Vamos tomar como hipótese nula que a média é igual à 6 e a verificaremos com o nível de significância $\alpha=0{,}05$ . Assim, vamos escrever o problema como

$$\alpha=P(erro\,tipo\,I)=P(rejeitar\,H_0|H_0\,verdadeira)=P(\bar{X}<x_c|\mu=5{,}5)=P(Z<z_c)$$

onde

$$z_c = \frac{x_c - 5{,}5}{2/\sqrt{20}} \quad \text{e daí} \quad x_c = 5{,}5 + z_c\, 2/\sqrt{20}$$

e a probabilidade será calculada pela complementaridade e, assim, $z_c$ tomará valores negativos.

Para o nível de significância de 5% teremos

$$0{,}05 = P(Z < z_c) \Rightarrow 0{,}5 - 0{,}05 = P(Z < z_c) \Rightarrow 0{,}45 = P(Z < z_c)$$

que nos dá $z_c$ = -1,64. Assim teremos

$$x_c = 5{,}5 - 1{,}64\left(\frac{2}{\sqrt{20}}\right) = 4{,}766$$

Portanto, rejeitamos a hipótese nula.