**Gabarito - AD1 da disciplina Probabilidade e Estatística**

*Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo*

*01.2019*

**Questão 1** (1,5 ptos) - Um grupo de trabalhadores conseguiu informações sobre os salários de duas empresas. Da Empresa A o grupo conseguiu informações sobre o número de salários mínimos (s.m.) dos seus 20 funcionários e da Empresa B os trabalhadores obtiveram informações sobre as faixas salarias, também em salários mínimos, dos seus 50 funcionários, dados a seguir:

Empresa A

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10,1 | 9,4 | 8,5 | 5 | 4,2 | 3,1 | 2,2 | 9 | 7,3 | 6,1 |
| 6,1 | 8,9 | 6,5 | 3,5 | 4,7 | 10 | 8,1 | 1,5 | 10 | 3,3 |

Empresa B

| Salários | 1 ⊢ 3 | 3 ⊢ 5 | 5 ⊢ 7 | 7 ⊢ 9 | 9 ⊢ 11 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Frequência | 4 | 10 | 8 | 16 | 12 | 50 |

(a) Construa uma tabela de frequências da Empresa A, agrupando os dados em intervalos de amplitude 2, a partir de 1 s.m. (como os dados da Empresa B).

**SOLUÇÂO:**

Tabela das faixas salariais dos 20 trabalhadores:

| *Salário* | *freqüência* |
|---|---|
| *1 \|-- 3* | *2* |
| *3 \|-- 5* | *5* |
| *5 \|-- 7* | *4* |
| *7\|-- 9* | *4* |
| *9 \|-- 11* | *5* |
| *total* | *20* |

(b) Calcule as médias salariais das duas empresas:

**SOLUÇÂO:**

*Para a empresa A:*

*Existem 2 possibilidades de se resolver a questão, e encontraremos resultados aproximados: pelos dados da tabela original e pela tabela de faixas salariais.*

*1 - Pelos dados da tabela original:*

$$média = \frac{\sum_{i=1}^{20} (salários)_i}{20} = \frac{127,5}{20} = 6,375$$

*2 - Pela tabela de faixas salariais dos 20 trabalhadores (calculada no item anterior):*

| Faixa de Salário | Freqüência | média da faixa | freq*media |
|---|---|---|---|
| 1 \|-- 3 | 2 | 2 | 4 |
| 3 \|-- 5 | 5 | 4 | 20 |
| 5 \|-- 7 | 4 | 6 | 24 |
| 7 \|-- 9 | 4 | 8 | 32 |
| 9 \|-- 11 | 5 | 10 | 50 |
| total ( Σ ) | 20 | - | 130 |

Observações:

*- a frequência é a obtida no item (a)*

*- a média da faixa => ponto médio da faixa. Ex: 1 |-- 3 =>* $\frac{1+3}{2} = 2$

*- frequencia* média => produto da frequência pela média.*

Logo, a média é dada por:

$$média = \frac{\sum_{k=1}^{5} (freq)_k \times (média.da.faixa)_k}{20} = \frac{130}{20} = 6,5$$

*Para a empresa B:*

*Somente pela tabela de faixas salariais dos 50 trabalhadores, da empresa B, dada no enunciado, a seguir:*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Salários | 1 ⊢ 3 | 3 ⊢ 5 | 5 ⊢ 7 | 7 ⊢ 9 | 9 ⊢ 11 | total |
| Frequência | 4 | 10 | 8 | 16 | 12 | 50 |

| Faixa de Salário | Freqüência | média da faixa | freq*media |
|---|---|---|---|
| 1 \|-- 3 | 4 | 2 | 8 |
| 3 \|-- 5 | 10 | 4 | 40 |
| 5 \|-- 7 | 8 | 6 | 48 |
| 7 \|-- 9 | 16 | 8 | 128 |
| 9 \|-- 11 | 12 | 10 | 120 |
| total ( Σ ) | 50 | - | 344 |

$$média = \frac{\sum_{k=1}^{5} (freq)_k \times (média.da.faixa)_k}{50} = \frac{344}{50} = 6,88$$

*(c) Calcule e compare o desvio padrão da Empresa A com o da Empresa B.*

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

Empresa A

| faixa de salário | freqüência (freq) | média da faixa | freq*media da faixa | a=(media da faixa - media)² | freq x (a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1\|-3 | 2 | 2 | 4 | $a=(2-6{,}5)^2=20{,}25$ | 40,50 |
| 3\|-5 | 5 | 4 | 20 | $a=(4-6{,}5)^2=6{,}25$ | 31,25 |
| 5\|-7 | 4 | 6 | 24 | $a=(6-6{,}5)^2=0{,}25$ | 1,00 |
| 7\|-9 | 4 | 8 | 32 | $a=(8-6{,}5)^2=2{,}25$ | 9,00 |
| 9 \|-11 | 5 | 10 | 50 | $a=(10-6{,}5)^2=12{,}25$ | 61,25 |
| total ( Σ ) | 20 | -- | 130 | -- | 143,00 |

O desvio padrão é dado por:

$$desvio.padrão = \sqrt{var}$$

$$desvio.padrão = \sqrt{\frac{143}{20}} = 2{,}674$$

Empresa B

| faixa de salário | frequencia (freq) | média da faixa | freq*media da faixa | a=(media da faixa - media)² | freq x (a) |
|---|---|---|---|---|---|
| 1-3 | 4 | 2 | 8 | $a=(2-6{,}88)^2=23{,}8144$ | 95,2576 |
| 3-5 | 10 | 4 | 40 | $a=(4-6{,}88)^2=8{,}2944$ | 82,944 |
| 5-7 | 8 | 6 | 48 | $a=(6-6{,}88)^2=0{,}7744$ | 6,1952 |
| 7-9 | 16 | 8 | 128 | $a=(8-6{,}88)^2=1{,}2544$ | 20,0704 |
| 9-11 | 12 | 10 | 120 | $a=(10-6{,}88)^2=9{,}7344$ | 116,8128 |
| total ( Σ ) | 50 | -- | 344 | -- | 321,28 |

Nesse caso o desvio padrão é dado por:

$$desvio.padrão = \sqrt{\frac{321{,}28}{50}} = 2{,}535$$

Ou seja, o desvio padrão dos salários da Empresa A é maior do que da Empresa B.

**Questão 2** (1,0 pto) **-** Um caixa contém 6 esferas, sendo 4 cinzas e 2 brancas, e 5 cubos, sendo 3 cinzas e 2 brancos. Pergunta-se:

(a) apenas um objeto da caixa, qual a probabilidade dele ser cubo ou ser branco?

**SOLUÇÂO:**

11 objetos, sendo 6 esferas (4 cinzas e 2 brancas) e 5 cubos (3 cinzas e 2 brancos).

Probabilidade de ser cubo (C): P(C) = 5/11

Probabilidade de ser esfera (E): P(E) = 6/11
Probabilidade de ser branco (Br): P(Br) = 4/11
Probabilidade de ser cinza (Ci): P(Ci) = 7/11

$$P(C \cup Br) = P(C) + P(Br) - P(C \cap Br)$$
$$P(C \cup Br) = \frac{5}{11} + \frac{4}{11} - \frac{2}{11}$$
$P(C \cup Br) = \frac{7}{11}$ = 0,64

(b) Se forem tirados dois objetos dessa caixa, qual a probabilidade dos dois serem esferas?

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

Supondo os objetos A e B

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

Nesse caso, P(B) = P(E)

$$P(A \cap B) = \frac{6}{11} \times \frac{5}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{11}$$

Em princípio, subtende-se que os objetos tenham sido retirados sem reposição. No entanto, caso tenha existido outra interpretação, desde que esteja claro, pode-se considerar os resultados considerados com reposição. Nesse caso,

$$P(A \cap B) = \frac{6}{11} \times \frac{6}{11}$$

$$P(A \cap B) = \frac{36}{121}$$

**Questão 3** (2,0 ptos) - Baseado em dados obtidos anteriormente concluiu-se que a probabilidade de um determinado animal, do sexo masculino, viver a partir da presente data , mais 25 anos , é de 2/5 e a probabilidade de que a fêmea viva esses 25 anos é de 2/3. Determine a probabilidade de que daqui a 25 anos:

(a) Que pelo menos um esteja vivo (macho ou fêmea).

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

Chamando de P(M) e P(F) a probabilidade de um macho e de uma fêmea viverem mais 25 anos respectivamente, tem-se:

P(M) = 2/5
$P(M^c)$= 1 – P(M) = 3/5 (complementar)

P(F) = 2/3
$P(F^c)$ = 1 - P(F) = 1/3 (complementar)

como os eventos são independentes desejamos calcular:

$$\mathrm{P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)}$$
$$\mathrm{P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M) \times P(F)}$$
$$\mathrm{P(M \cup F)} = \frac{2}{5} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = 1{,}067 - 0{,}267 = 0{,}800$$

(a) Ambos estejam vivos

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

$$P(M \cap F) = P(M) \times P(F) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = 0{,}267$$

(c) Nenhum esteja vivo.

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

Nesse caso, utilizamos as probabilidades complementares.

$$P(M^c \cap F^c) = P(M^c) \times P(F^c) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = 0{,}200$$

(b) Somente a fêmea esteja viva.

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

$$P(M^c \cap F) = P(M^c) \times P(F) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = 0{,}400$$

**Questão 4** (2,0 ptos) **-** Considere 3 fábricas (F1, F2 e F3) que produzam respectivamente 150, 200 e 350 jaquetas para uma determinada loja. Uma funcionária da loja, por descuido, misturou as jaquetas produzidas pelas três fábricas. Suponha que a probabilidade de se encontrar uma jaqueta defeituosa em cada uma das fábricas seja de 2%, 10% e 5% respectivamente, Selecionando-se uma dessas jaquetas ao acaso, determine a probabilidade de:

(a) Ser da fábrica F1.

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

Chamando de A o evento peça defeituosa, temos:

$$P(F_1) = \frac{150}{700} = 0{,}214$$
$$P(A|F_1) = 0{,}02$$

$$P(F_2) = \frac{200}{700} = 0{,}286$$
$$P(A|F_2) = 0{,}10$$

$$P(F_3) = \frac{350}{700} = 0{,}500$$
$$P(A|F_3) = 0{,}05$$

E a probabilidade $P(F_1)$, já calculada, é:

$$P(F_1) = \frac{150}{700} = 0{,}214$$

(b) Ser defeituosa.

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(F_i)P(A|F_i)$$

$$P(A) = P(F_1)P(A|F_1) + P(F_2)P(A|F_2) + P(F_3)P(A|F_3)$$
$$P(A) = 0{,}214 \times 0{,}020 + 0{,}286 \times 0{,}100 + 0{,}500 \times 0{,}050$$
$$P(A) = 0{,}00428 + 0{,}0286 + 0{,}025$$
$$P(A) = 0{,}05788$$
$$P(A) = 0{,}058$$

(c ) Ser defeituosa, sabendo-se que a jaqueta é da fábrica F1.

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

É a probabilidade já especificada no enunciado:

$$P(A|F_1) = 0{,}02$$

(c) Ser da fábrica F1, sabendo-se que é defeituosa.

**<u>SOLUÇÂO:</u>**

$$P(F_1|A) = \frac{P(F_1)P(A|F_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(F_i)P(A|F_i)}$$

No item (a) temos o valor de $P(F_1)$, no item (b) vemos que, o denominador desta fração, é P(A) e $P(A|F_1)$ é 0,02, conforme enunciado também. Logo,

$$P(F_1|A) = \frac{P(F_1)P(A|F_1)}{P(A)}$$

$$P(F_1|A) = \frac{0{,}214 \times 0{,}020}{0{,}058}$$

$P(F_1|A) = 0{,}074$

**Questão 5** (1,5 ponto) – Considere que a loja que compra essas jaquetas da questão anterior, faça um estudo de probabilidades para encontrar, pela primeira vez, um defeito em cada uma das 15 primeiras jaquetas, escolhidas ao acaso, e COM reposição (ou seja, inicialmente de não se encontrar nenhuma jaqueta com defeito. Depois, de encontrar a primeira peça com defeito; depois, de encontrar a segunda peça com defeito e assim, respectivamente).

**SOLUÇÂO:**

Chamando de "sucesso" a probabilidade de encontrar uma jaqueta defeituosa temos, pelo item "b" da 4ª questão, que p = 0,058. Utilizando o modelo geométrico:

$$P(X = k+1) = p\ (1-p)^k$$

tem-se:

| k+1 | P(X=k+1) |
|---|---|
| 1 | 0,058 |
| 2 | 0,055 |
| 3 | 0,051 |
| 4 | 0,048 |
| 5 | 0,046 |
| 6 | 0,043 |
| 7 | 0,041 |
| 8 | 0,038 |
| 9 | 0,036 |
| 10 | 0,034 |
| 11 | 0,032 |
| 12 | 0,030 |
| 13 | 0,028 |
| 14 | 0,027 |
| 15 | 0,025 |
| 16 | 0,024 |

**Questão 6** (0,5 ponto) - Sejam *A* e *B* eventos tais que *P*(*A*) = p; *P*(*B*) = 0,3 e *P*(*A* U *B*) = 0,6. Calcular *p* considerando *A* e *B*:

(i) mutuamente exclusivos:

**SOLUÇÂO:**

Nesse caso P(A∩B) = 0. Assim,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0{,}6 = p + 0{,}3$

$p = 0{,}3$

(ii) independentes:

**SOLUÇÂO:**

Nesse caso, *P (A∩B) = P(A); P(B) = 0, logo,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0{,}6 = p + 0{,}3 - 0{,}3p$$
$$p - 0{,}3p = 0{,}6 - 0{,}3$$
$$0{,}7p = 0{,}3$$
$$p = \frac{0{,}3}{0{,}7}$$
$$p = 0{,}429$$

**Questão 7** (1,5 ptos) - Sabe-se que mulheres que são diagnosticadas com cancer de útero precocemente têm 95% de probabilidade de serem curadas completamente. Para um grupo de 16 paciente nessas condições, calcule a probabilidade de:

(a) Treze ficarem completamente curadas.

**SOLUÇÂO:**

*p=0,95 e n=16; Modelo binomial*

$$P(X = k) = \binom{n}{k} x p^k x (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,3, \dots, n$$

Treze ficarem completamente curadas. $(k = 13)$

$$P(X = 13) = \left(\frac{16!}{13!\,(16-13)!}\right) 0{,}95^{13}(1-0{,}95)^{16-13} = \left(\frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1}\right) \times 0{,}95^{13} \times 0{,}05^3$$
$$P(X = 13) = 560 \times 0{,}5133 \times 0{,}000125$$
$$P(X = 13) = 0{,}035931$$

(b) menos que 2 permanecerem com a doença:

**SOLUÇÂO:**

Há duas formas de se ver essa questão:

- vendo que, nesse caso, mais de 14 pacientes teriam que ser curados, ou seja:
  *P(X >14) = P (X=15) + P(X=16)*
- assumindo que a probabilidade de não ficar curado é 1 - 0,95 = 0,05, pode-se calcular
  *P(X< 2).*

Em qualquer um dos casos tem-se:

$$P(X > 14) = \left(\frac{16!}{15!\,(16-15)!}\right) 0{,}95^{15}(1-0{,}95)^{16-15} + \left(\frac{16!}{16!\,(16-16)!}\right) 0{,}95^{16}(1-0{,}95)^{16-16}$$

$$P(X > 14) = 16 \times 0{,}95^{15} \times 0{,}05 + 0{,}95^{16} \times 0{,}05^0$$
$$P(X > 14) = 0{,}8 \times 0{,}95^{15} + 0{,}95^{16}$$
$$P(X > 14) = 0{,}95^{15}(0{,}8 + 0{,}95)$$
$$P(X > 14) = 0{,}95^{15}(1{,}75)$$
$$P(X > 14) = 0{,}4633 \times 1{,}75$$
$$P(X > 14) = 0{,}81076$$

(c) de 5 a 7 pacientes não ficarem curados.

**SOLUÇÂO:**

Também com 2 formas de fazer, como no item anterior. Nesse caso, utilizei *p = 0,05. (complementar)*

$$P(5 \leqslant X \leqslant 7) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$P(X = 5) = \left(\frac{16!}{5!\,(16-5)!}\right) 0{,}05^5 (1 - 0{,}05)^{16-5}$$

$$P(X = 5) = \left(\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}\right) 0{,}05^5 (0{,}95)^{11}$$

Simplificando possíveis fatores entre numerador e denominador, obtemos:

$$P(X = 5) = 14 \times 13 \times 12 \times 2 \times 0{,}05^5 \times 0{,}5688$$
$$P(X = 5) = 4368 \times 0{,}05^5 \times 0{,}5688$$
$$P(X = 5) = 0{,}0007764$$
$$P(X = 6) = \left(\frac{16!}{6!\,(16-6)!}\right) 0{,}05^6 (1 - 0{,}05)^{16-6}$$
$$P(X = 6) = \left(\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}\right) 0{,}05^6 (0{,}95)^{10}$$

Simplificando possíveis fatores entre numerador e denominador, obtemos:

$$P(X = 6) = (14 \times 13 \times 11 \times 4) \times 0{,}05^6 \times 0{,}5987$$
$$P(X = 6) = 8008 \times 0{,}05^6 \times 0{,}5987$$
$$P(X = 6) = 0{,}00007491$$
$$P(X = 7) = \left(\frac{16!}{7!\,(16-7)!}\right) 0{,}05^7 (1 - 0{,}05)^{16-7}$$
$$P(X = 7) = \left(\frac{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}\right) 0{,}05^7 (0{,}95)^9$$

Simplificando possíveis fatores entre numerador e denominador, obtemos:

$$P(X = 7) = (16 \times 5 \times 13 \times 11) \times 0{,}05^7 \times 0{,}63025$$
$$P(X = 7) = 11440 \times 0{,}05^7 \times 0{,}6302$$
$$P(X = 7) = 0{,}000005633$$

*Logo,*

$$P(5 \leqslant X \leqslant 7) = P(5) + P(6) + P(7)$$
$$P(5 \leqslant X \leqslant 7) = 0{,}0007764 + 0{,}00007491 + 0{,}000005633$$
$$P(5 \leqslant X \leqslant 7) = 0{,}0008569$$