Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP3 1° semestre de 2018
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 – Primeira Questão (3,0 pontos)

Um restaurante popular apresenta apenas dois tipos de refeições: salada completa ou um prato à base de carne. Considere que 20% dos fregueses do sexo masculino preferem a salada, 30% das mulheres escolhem carne, 75% dos fregueses são homens. Para um freguês desse restaurante, sorteado ao acaso, obtenha a probabilidade dele:

Resolução:

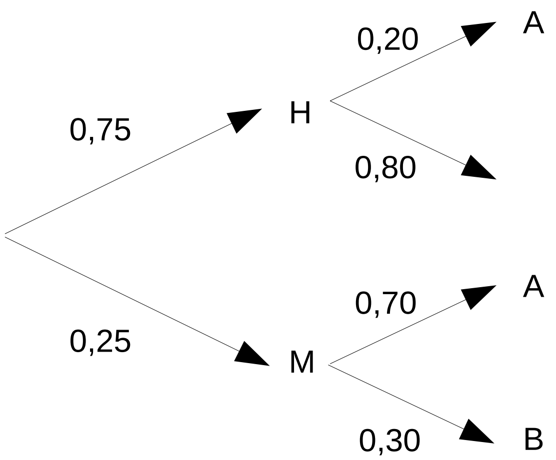
***Obs**: essa é uma questão praticamente igual a uma questão da AD1. Coloco aqui uma outra forma para desenvolver a questão.*

Consideram-se os seguintes eventos:

H: freguês é homem | **A: freguês prefere salada**
M: freguês é mulher | **B: freguês prefere carne.**

Temos pelo enunciado: **P(H) = 0,75,**
P (A/H) = 0,20 e
P(B/M) = 0,30.

Com isso, podemos construir o seguinte diagrama de árvore:



a) preferir salada;

Resolução:

Temos que calcular P(A). Utilizando o diagrama de árvore, temos que

$$P(A)=P(A\cap H)+P(A\cap M)=P(A/H)P(H)+P(A/M)P(M)=0{,}25\times0{,}75+0{,}70\times0{,}25=0{,}325 \quad .$$

b) preferir carne dado que é um homem;
Resolução:
Temos que calcular P(B/H). Pelo diagrama de árvore, temos que P(B/H) = 0,80

c) ser uma mulher, sabendo-se que prefere salada?
Resolução:
Temos que calcular P(M / A). Mas, sabemos que

$$P(M/A)=\frac{P(M)P(A/M)}{P(A/H)P(H)+P(A/M)P(M)} \quad .$$

Logo, utilizando o item (a) e o diagrama de árvore, temos que

$$P(M/A)=\frac{0{,}25\times 0{,}70}{0{,}20\times 0{,}75+0{,}25\times 0{,}70}=0{,}538 \quad .$$

2 – Segunda Questão (1,0 ponto)
Ao lançar um dado muitas vezes uma pessoa percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência que a face 1, e que as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado não viciado. Lançando-se o dado uma vez, qual a probabilidade de sair a face 1?
Resolução:
Temos que:

A probabilidade de sair a face 1 é P(1) = x**,**
a probabilidade de sair a face 6 é P(6) = 2x,
a probabilidade de sair qualquer outra face: P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 1/6.

Calculando P(1) e P(6) temos

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=1$$

então

$$x+1/6+1/6+1/6+1/6+2x=1 \Rightarrow 3x=1-4/6 \Rightarrow x=1/9$$

Logo: $P(1)=1/9$.

3 – Terceira questão – (1,0 pontoo)
Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um corte por 2000 m. Qual é a probabilidade de que um rolo com comprimento de 4000 m apresente no máximo dois cortes?
Resolução:
Usaremos a distribuição de Poisson $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k}!;\, k=0,1,2,\cdots$ **usando** $\lambda=2$

Seja Y o número de cortes em um rolo de 4000 m, logo:

$$P(Y\leq 2)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)$$

ou

$$P(Y\leq 2)=\frac{e^{-2}2^0}{0!}+\frac{e^{-2}2^1}{1!}+\frac{e^{-2}2^2}{2!}=0{,}13534+0{,}27067+0{,}26067=0{,}6767 \quad .$$

4 – Quarta questão – (1,5 ponto)
Numa linha de produção era desejável verificar o tempo de montagem de um módulo eletrônico. Foi calculado uma média amostral de 10 equipamentos se obtendo 19,3 minutos. Calculou-se então outra média amostral com 100 equipamentos e foi obtido o valor 18,4 minutos. Para os dois casos a variância era de 1,69 minutos^2. Avalie o intervalo de confiança para as duas situações com coeficiente de confiança de 95%.
Resolução:
A fórmula para intervalo de confiança é dada por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Para os dois casos $\gamma=0{,}95$ **o que implica** $z_{\gamma/2}=z_{0,475}=1{,}96$ **. Como** $\sigma^2=1{,}69$ **, então** $\sigma=1{,}3$.
Para o primeiro caso a média amostral é 19,3 e $n=10$ **e, portanto,** $\sqrt{n}\approx 3{,}1623$ **. Com estes dados teremos**

$$IC(\mu,)=\left[19{,}3-1{,}96\frac{1{,}3}{3{,}1623};19{,}3+1{,}96\frac{1{,}3}{3{,}1623}\right]\approx[19{,}3-0{,}8057;19{,}3+0{,}8057]\approx[18{,}49;20{,}11].$$

Para o segundo caso a média amostral é 18,4 e $n=100$ **, ou seja,** $\sqrt{n}=10$ **. Logo**

$$IC(\mu,)=\left[18{,}4-1{,}96\frac{1{,}3}{10};18{,}4+1{,}96\frac{1{,}3}{10}\right]\approx[18{,}4-0{,}2548;18{,}4+0{,}2548]\approx[18{,}15;18{,}65]$$

5 – Quinta questão – (1,5 pontos)
Verifique quais das funções abaixo são distribuição de probabilidades.

a) $f(x)=\frac{6}{5}(x^2-x); x\in[1,2]$;

Resolução:
É fácil verificar que esta função é não negativa no intervalo dado. Integremos.

$$\int_1^2\frac{6}{5}(x^2-x)\,dx=\frac{6}{5}\left[\int_1^2 x^2\,dx-\int_1^2 x\,dx\right]=\frac{6}{5}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-\frac{x^2}{2}\Big|_1^2\right]=\frac{6}{5}\left[\frac{8-1}{3}-\frac{4-1}{2}\right]=\frac{6}{5}\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}\right)=\frac{6}{5}\frac{5}{6}=1 .$$

É um distribuição de probabilidade.

b) $f(x)=\frac{x^2+2x}{18}; x\in[0,3]$;

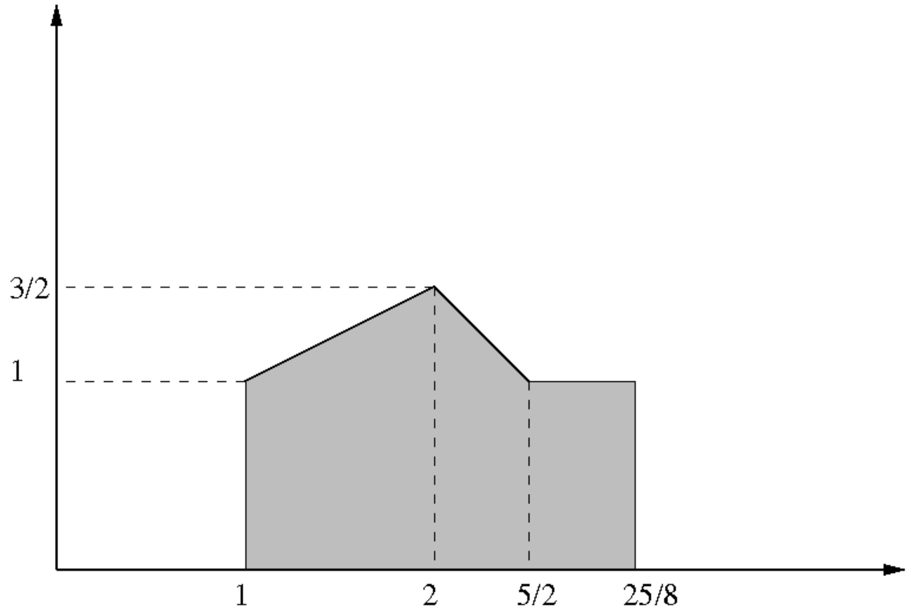
Resolução:
Novamente é fácil perceber que a função é não negativa no intervalo. Integremos.

$$\int_0^3\frac{x^2+2x}{18}\,dx=\frac{1}{18}\left[\int_0^3 x^2\,dx+2\int_0^3 x\,dx\right]=\frac{1}{18}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^3+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^3\right]=\frac{1}{18}\left[\frac{27}{3}+9\right]\frac{18}{18}=1 .$$

Esta também é uma distribuição de probabilidade.

c) $f(x)=e^x-2; x\in[0,2]$ **.**
Resolução:
É fácil perceber que esta função toma valores negativos no intervalo. Por exemplo, em x = 0 a função toma o valor -1.
Assim, esta função não é distribuição de probabilidade.

6 – Sexta questão – (2,0 pontos) Na figura abaixo temos uma função que deve ser normalizada para termos uma função de distribuição de probabilidade, observando que fora do intervalo [1, 25/8] a função é nula.



a)Normalize a função obtendo a distribuição de probabilidade;
Resolução:
A distribuição é composta de trapézios e um retângulo. Podemos calcular a área total, que corresponde a integral dentro do intervalo, da seguinte forma:

$$A_1+A_2+A_3=\frac{(3/2+1)}{2}\times(2-1)+\frac{(3/2+1)}{2}\times(5/2-2)+1\times(25/8-5/2)=\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{8}=\frac{5}{2}\quad .$$

Mas isto não nos ajuda muito nas questões que se seguem. Achemos as funções correspondentes a cada segmento da função.
No intervalo [1, 2] a reta pode ser obtida usando a equação $y=ax+b$ **para os pontos (1, 1) e (2, 3/2), ou seja,**

$1=a\times1+b; \frac{3}{2}=a\times2+b$ **resultando no sistema de equações lineares** $\begin{matrix} a+b=1 \\ 2a+b=\frac{3}{2} \end{matrix}$ **que tem como solução** $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ **o que nos da equação da reta** $y=\frac{1}{2}(x+1)$ **.**

No intervalo [2, 5/2] obteremos a reta pelos pontos (2, 3/2) e (5/2, 1). Substituindo na equação da reta teremos $\frac{3}{2}=a\times2+b; 1=a\times\frac{5}{2}+b$ **que resulta no sistema** $\begin{matrix} 2a+b=\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2}\times a+b=1 \end{matrix}$ **de solução**

$a=-1, b=\frac{7}{2}$ **dando a reta** $y=-x+\frac{7}{2}$ **.**

O último segmento no intervalo [5/2; 25/8] é a função constante de valor 1. Integremos

$$\int_{1}^{25/8} f(x)\,dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{2}(x+1)\,dx+\int_{2}^{5/2}\left(-x+\frac{7}{2}\right)dx+\int_{5/2}^{25/8}1\,dx=\frac{1}{2}\left[\int_{1}^{2}x\,dx+\int_{1}^{2}dx\right]-\int_{2}^{5/2}x\,dx+\frac{7}{2}\int_{2}^{5/2}dx+\int_{5/2}^{25/8}dx$$

que desenvolvendo nos dá

$$\int_{1}^{25/8} f(x)\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+x\Big|_1^2\right]-\frac{x^2}{2}\Big|_2^{5/2}+\frac{7}{2}x\Big|_2^{5/2}+x\Big|_{5/2}^{25/8}=\frac{1}{2}\left[\frac{4-1}{2}+(2-1)\right]-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{5}{2}\right)^2-2^2\right]+\frac{7}{2}\left(\frac{5}{2}-2\right)+\left(\frac{25}{8}-\frac{5}{2}\right)$$

e, finalmente,

$$\int_{1}^{25/8} f(x)\,dx=\frac{5}{4}-\frac{9}{8}+\frac{7}{4}+\frac{5}{8}=\frac{5}{2}\quad .$$

Esta é a constante de normalização.

b) Calcule a probabilidade P(1,2 < X < 2,8) da distribuição obtida;
Resolução:
A probabilidade para o caso desta distribuição de probabilidade será dada por

$$P(1{,}2<2{,}8)=\frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}\int_{1,2}^{2}(x+1)\,dx+\int_{2}^{5/2}\left(-x+\frac{7}{2}\right)dx+\int_{5/2}^{2,8}dx\right]\quad .$$

Aproveitemos o valor já calculado no item anterior, correspondente a segunda integral, ou seja,

$$P(1{,}2<2{,}8)=\frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}\int_{1,2}^{2}(x+1)\,dx+\frac{5}{8}+\int_{5/2}^{2,8}dx\right]=\frac{2}{5}\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{1,2}^{2}+x\Big|_{1,2}^{2}\right]+\frac{5}{8}+x\Big|_{5/2}^{2,8}\right\}=\frac{2}{5}\left[\frac{16}{25}+\frac{2}{5}+\frac{5}{8}+\frac{3}{10}\right]=0{,}786\quad .$$

c) Calcule o valor médio da distribuição obtida;
Resolução:
Pela definição de média, teremos

$$\mu=\int_{1}^{25/8}x f(x)\,dx=\frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}\int_{1}^{2}x(x+1)\,dx+\int_{2}^{5/2}x\left(-x+\frac{7}{2}\right)dx+\int_{5/2}^{25/8}x\,dx\right]$$

ou

$$\mu=\frac{2}{5}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_{1}^{2}x^2\,dx+\int_{1}^{2}x\,dx\right]-\int_{2}^{5/2}x^2\,dx+\frac{7}{2}\int_{2}^{5/2}x\,dx+\int_{5/2}^{25/8}x\,dx\right\}=\frac{2}{5}\left[\frac{x^3}{6}\Big|_1^2+\frac{x^2}{4}\Big|_1^2-\frac{x^3}{3}\Big|_2^{5/2}+\frac{7}{4}x^2\Big|_2^{5/2}+\frac{x^2}{2}\Big|_2^{25/8}\right]$$

logo

$$\mu=\frac{2}{5}\left\{\frac{2^3-1^3}{6}+\frac{2^2-1^2}{4}-\frac{(5/2)^3-2^3}{3}+\frac{7}{4}\left[(5/2)^2-2^2\right]+\frac{(25/8)^2-5/2^2}{2}\right\}=\frac{2}{5}\left[\frac{7}{6}+\frac{3}{4}-\frac{61}{24}+\frac{63}{16}+\frac{67}{48}\right]=\frac{649}{320}\approx 2{,}0281$$

d) Calcule a variância da distribuição obtida.

Resolução:
A definição de variância é

$$\sigma^2=\int_1^{25/8} x^2 f(x)\,dx-\mu^2 \quad .$$

Calculemos a integral

$$\int_1^{25/8} x^2 f(x)\,dx=\frac{2}{5}\left[\frac{1}{2}\int_1^{2} x^2(x+1)\,dx+\int_2^{5/2} x^2\left(-x+\frac{7}{2}\right)dx+\int_{5/2}^{25/8} x^2\,dx\right]$$

ou ainda

$$\int_1^{25/8} x^2 f(x)\,dx=\frac{2}{5}\left\{\frac{1}{2}\left[\int_1^{2} x^3\,dx+\int_1^{2} x^2\,dx\right]-\int_2^{5/2} x^3\,dx+\frac{7}{2}\int_2^{5/2} x^2\,dx+\int_{5/2}^{25/8} x^2\,dx\right\}$$

e desenvolvendo teremos

$$\int_1^{25/8} x^2 f(x)\,dx=\frac{2}{5}\left[\frac{x^4}{8}\Big|_1^2+\frac{x^3}{6}\Big|_1^2-\frac{x^4}{4}\Big|_2^{5/2}+\frac{7}{6}x^3\Big|_2^{5/2}+\frac{x^3}{3}\Big|_{5/2}^{25/8}\right]$$

que resulta em

$$\int_1^{25/8} x^2 f(x)\,dx=\frac{2}{5}\left\{\frac{2^4-1^4}{8}+\frac{2^3-1^3}{6}-\frac{(5/2)^4-2^4}{4}+\frac{7}{6}\left[(5/2)^3-2^3\right]+\frac{(25/8)^3-5/2^3}{3}\right\}$$

e finalmente

$$\int_1^{25/8} x^2 f(x)\,dx=\frac{2}{5}\left[\frac{15}{8}+\frac{7}{6}-\frac{369}{64}+\frac{427}{48}+\frac{7625}{1536}\right]=\frac{3421}{768}\approx 4{,}4544 \quad .$$

Agora calculemos a variância

$$\sigma^2=\int_1^{25/8} x^2 f(x)\,dx-\mu^2=\frac{3421}{768}-\left(\frac{649}{320}\right)^2\approx 0{,}3411 \quad .$$

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.