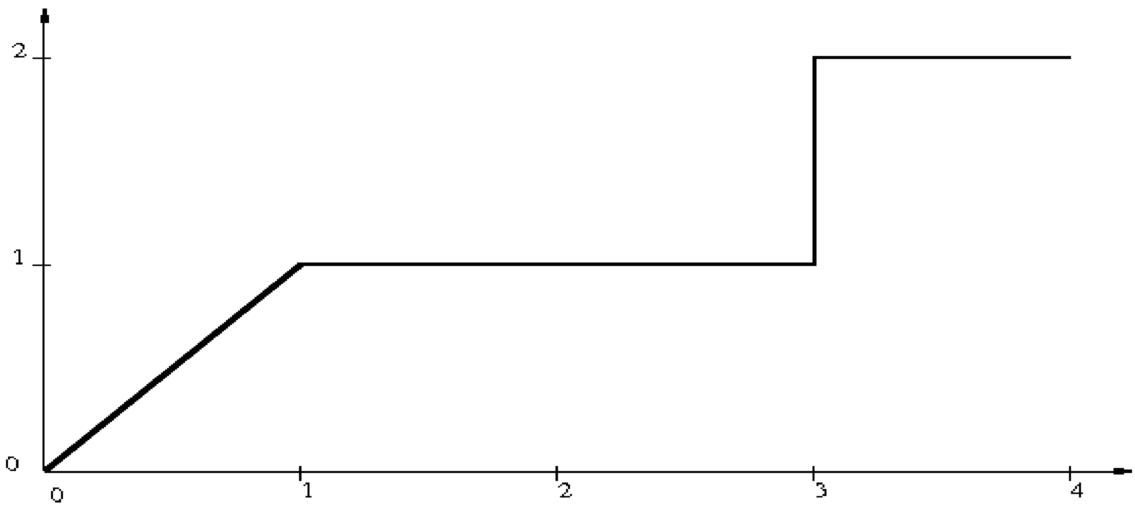
Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 2° semestre de 2016
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia de Paula Toledo

1 - Primeira questão (2,0 pontos)
A figura abaixo representa uma função (a função vale zero para valores fora do intervalo [0, 4]).



a) Normalize esta função para que seja uma função de probabilidade;
Resolução:
A função é constituída pela união de um triângulo de altura 1 e base 1 e dois retângulos, um de base 2 e altura 1 outro com base 1 e altura 2. Assim a integral no intervalo [0, 4] será igual a

$$\frac{1\times 1}{2}+2\times 1+1\times 2=\frac{9}{2} \quad ,$$

portanto a constante de normalização será 2/9.

Podemos dizer também que a função é constituída de um segmento de reta de equação y = x no intervalo [0,1) e de duas funções constantes: y = 1 no intervalo [1, 3] e y = 2 no intervalo [3, 4]. Com isto podemos escrever que a integral dentro do intervalo será

$$\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 1\times dx+\int_3^4 2\times dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 dx+2\int_3^4 dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_1^3+2x\Big|_3^4=\frac{1-0}{2}+(3-1)+2(4-3)=\frac{1}{2}+2+2=\frac{9}{2}$$

b) Calcule a média da distribuição de probabilidade obtida;
Resolução:
Partamos da definição de média

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

que no nosso caso específico será

$$\mu=\int_0^4 x f(x)\,dx=\frac{2}{9}\left[\int_0^1 x\times x\,dx+\int_1^3 x\,dx+2\int_3^4 x\,dx\right]=\frac{2}{9}\left[\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^3 x\,dx+2\int_3^4 x\,dx\right]=\frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+2\frac{x^2}{2}\Big|_3^4\right]$$

ou seja

$$\mu=\frac{2}{9}\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+2\frac{x^2}{2}\Big|_3^4\right]=\frac{2}{9}\left[\frac{1-0}{3}+\frac{9-1}{2}+(16-9)\right]=\frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}+4+7\right]=\frac{2}{9}\frac{34}{3}=\frac{68}{27}\approx 2{,}5185 \quad .$$

c) Calcule a variância da distribuição de probabilidade obtida;
Resolução:
Partamos da definição da variância

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-\mu^2$$

e calculemos a integral

$$\int_0^4 x^2 f(x)\,dx=\frac{2}{9}\left[\int_0^1 x^2\times x\,dx+\int_1^3 x^2\,dx+2\int_3^4 x^2\,dx\right]=\frac{2}{9}\left[\int_0^1 x^3\,dx+\int_1^3 x^2\,dx+2\int_3^4 x^2\,dx\right]=\frac{2}{9}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^3+2\frac{x^3}{3}\Big|_3^4\right]$$

ou ainda

$$\int_0^4 x^2 f(x)\,dx=\frac{2}{9}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^3+2\frac{x^3}{3}\Big|_3^4\right]=\frac{2}{9}\left[\frac{1-0}{4}+\frac{27-1}{3}+\frac{2}{3}(64-27)\right]=\frac{2}{9}\left[\frac{1}{4}+\frac{26}{3}+\frac{74}{3}\right]=\frac{2}{9}\frac{402}{12}=\frac{403}{54}\approx 7{,}4630 \quad ,$$

portanto

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-\mu^2=\frac{403}{54}-\left(\frac{68}{27}\right)^2\approx 1{,}1200 \quad .$$

d) Calcule a moda desta distribuição de probabilidade obtida.
Resolução:
Como a moda se constitui no intervalo onde a probabilidade é maior, temos aqui um caso multimodal no intervalo [3, 4].

2 – Segunda questão (1,5 pontos)

Verifique se as expressões abaixo são funções de probabilidade. Caso alguma função **não** for distribuição de probabilidade **mas seja não negativa**, normalize e calcule a variância da mesma.

a) $f(x)=\frac{2}{3}(2-x)\,;0\le x\le 1$

Resolução:
Por uma rápida inspeção verificamos que a função acima é não negativa. Calculemos a integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{2}{3}(2-x)\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 (2-x)\,dx=\frac{2}{3}\left[2\int_0^1 dx-\int_0^1 x\,dx\right]=\frac{2}{3}\left[2x\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

ou ainda

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{2}{3}\left[2x|_0^1-\frac{x^2}{2}|_0^1\right]=\frac{2}{3}\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\frac{3}{2}=1 \quad .$$

Portanto é distribuição de probabilidade e não necessitamos de calcular a variância.

b) $f(x)=\frac{2}{3}(2-x); 1\le x\le 2$

Resolução:

Novamente é simples verificar que neste intervalo a função também é não negativa. Integremos

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \frac{2}{3}(2-x)dx=\frac{2}{3}\int_1^2 (2-x)dx=\frac{2}{3}\left[2\int_1^2 dx-\int_1^2 x\,dx\right]=\frac{2}{3}\left[2x|_1^2-\frac{x^2}{2}|_1^2\right]$$

e finalmente

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{2}{3}\left[2x|_1^2-\frac{x^2}{2}|_1^2\right]=\frac{2}{3}\left[2\times(2-1)-\frac{1}{2}(4-1)\right]=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3} \quad .$$

Para que a função seja distribuição de probabilidade dentro deste intervalo teremos que normalizá-la, ou seja,

$$f(x)=3\times\frac{2}{3}(2-x)=2(2-x); 1\le x\le 2$$

é distribuição de probabilidade.

Achemos a variância

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\mu^2 \quad .$$

Observe que teremos que calcular a média que é dada por

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx \quad .$$

$$\mu=\int_1^2 x\times 2(2-x)dx=2\int_1^2 (2x-x^2)dx=2\left[2\int_1^2 x\,dx-\int_1^2 x^2 dx\right]=2\left[2\frac{x^2}{2}|_1^2-\frac{x^3}{3}|_1^2\right]=2\left[(4-1)-\frac{8-1}{3}\right]$$

ou seja

$$\mu=2(3-\frac{7}{3})=\frac{4}{3}\approx 1{,}3333 \quad .$$

Calculemos agora a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx=\int_1^2 x^2\times 2(2-x)dx=2\int_1^2 (2x^2-x^3)dx=2\left[2\int_1^2 x^2 dx-\int_1^2 x^3 dx\right]=2\left[2\frac{x^3}{3}|_1^2-\frac{x^4}{4}|_1^2\right]=2\left[\frac{2}{3}(8-1)-\frac{16-1}{4}\right]$$

e então

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = 2\left(\frac{14}{3} - \frac{15}{4}\right) = \frac{11}{6} \quad .$$

Com isto obteremos

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \mu^2 = \frac{11}{6} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \approx 0{,}0556 \quad .$$

c) $f(x) = \cos(x)\,;\, 0 \le x \le \pi/2$

Resolução:

Claramente a função é não negativa no intervalo. Integremos

$$\int_{0}^{\pi/2} \cos x\, dx = sen\, x\Big|_0^{\pi/2} = (1-0) = 1$$

portanto é distribuição de probabilidade e não há necessidade de calcularmos a variância.

3 – Terceira questão (2,0 pontos)

Calcule as probabilidades abaixo

a) $P(1 < X < 2{,}35)$ para distribuição Exponencial de parâmetro $\alpha = 1{,}53$;

Resolução:

Sabemos que a probabilidade para esta distribuição é dada por

$$P(a < X < b) = \int_{a}^{b} \alpha e^{-\alpha x}\, dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$$

portanto,

$$P(1 < X < 2{,}35) = e^{-1{,}53\times 1} - e^{-1{,}53\times 2{,}35} = e^{-1{,}53} - e^{-3{,}5955} \approx 0{,}1891$$

b) $P(1 < X < 2{,}35)$ para a distribuição obtida na primeira questão;

Resolução:

Nesta faixa de valores a probabilidade será dada por

$$P(1 < X < 2{,}35) = \frac{2}{9}\int_{1}^{2{,}35} dx = \frac{2}{9}\, x\Big|_1^{2{,}35} = \frac{2}{9}(2{,}35-1) = \frac{2}{9}\times 1{,}35 = 0{,}3 \quad .$$

c) $P(1 < X < 2{,}35)$ para distribuição Normal de desvio padrão 3,35 e média 2,91;

Resolução:

A probabilidade aqui é dada por

$$P(a < X < b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) .$$

Com os dados apresentados teremos

$$P(1 < X < 2{,}35) = P\left(\frac{1-2{,}91}{3{,}35} < Z < \frac{2{,}35-2{,}91}{3{,}35}\right) = P\left(-\frac{1{,}91}{3{,}35} < Z < -\frac{0{,}56}{3{,}35}\right) = P(-0{,}5701 < Z < -0{,}1672)$$

ou

$$P(1<X<2{,}35)\approx P(-0{,}57<Z<-0{,}17)=P(Z<0{,}57)-P(Z<0{,}17)=0{,}2157-0{,}0675=0{,}1482\ .$$

d) $P(1<X<2{,}35)$ para a distribuição Uniforme no intervalo [-3,5].

Resolução:

A probabilidade para a distribuição Uniforme é calculada portanto

$$P(a<X<b)=\frac{1}{B-A}\int_a^b dx\ ;X\in[A,B]\ .$$

Assim sendo temos que

$$P(1<X<2{,}35)=\frac{1}{5-(-3)}\int_1^{2{,}35} dx=\frac{1}{8}x\Big|_1^{2{,}35}=\frac{2{,}35-1}{8}\approx 0{,}1687\ .$$

4 – Quarta questão (1,0 ponto)

Uma empresa utiliza material de demolição de um antigo edifício para baratear os custos na construção de um novo e, para isto, faz uso de uma máquina que tritura a estrutura de concreto da demolição. Nos testes de regulagem da máquina foram recolhidas 100 amostras das quais se esperavam que o tamanho médio dos fragmentos estivessem entre 3 e 5 cm. A média das amostras foi 4,7 cm. De outra construção já se tinha avaliado uma variância de 21 cm^2.

a) Calcule qual a probabilidade da máquina estar trabalhando dentro das especificações.

Resolução:

Trabalharemos com a hipótese que podemos usar a distribuição Normal. Sendo assim teremos para a probabilidade

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)\ .$$

Usando os valores apresentados teremos

$$P(3<X<5)=P\left(\frac{3-4{,}7}{\sqrt{21}/\sqrt{100}}<Z<\frac{5-4{,}7}{\sqrt{21}/\sqrt{100}}\right)=P\left(\frac{-1{,}7}{\sqrt{21}/10}<Z<\frac{0{,}3}{\sqrt{21}/10}\right)\approx P\left(\frac{-1{,}7}{0{,}4583}<Z<\frac{0{,}3}{0{,}4583}\right)$$

ou

$$P(3<X<5)\approx P(-3{,}71<Z<0{,}65)=0{,}5+P(Z<0{,}65)=0{,}5+0{,}2422=0{,}7422\ .$$

b) Se a variância fosse de 47 cm^2 qual seria a probabilidade?

Resolução:

Aqui neste caso teríamos

$$P(3<X<5)=P\left(\frac{-1{,}7}{\sqrt{47}/10}<Z<\frac{0{,}3}{\sqrt{47}/10}\right)\approx P\left(\frac{-1{,}7}{0{,}6856}<Z<\frac{0{,}3}{0{,}6856}\right)=P(-2{,}4796<Z<0{,}4376)$$

ou seja,

$$P(3<X<5)\approx P(-2{,}48<Z<0{,}44)=P(Z<2{,}48)+P(Z<0{,}44)=0{,}4934+0{,}1700=0{,}6634$$

e a probabilidade de adequação da máquina abaixou com o aumento da variância.

5 – Quinta questão (1,0 ponto) Numa eleição concorriam dois candidatos A e B. Um deles, o candidato A, obteve 55% dos votos. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade do candidato A ter conseguido entre 596 e 610 votos de 1280 votos numa seção eleitoral julgada representativa do eleitorado? (0,5 ponto)

Resolução:

Partiremos do pressuposto que podemos usar a distribuição Normal. Como não temos explicitamente a variância, usaremos a proporção amostral. Já temos a proporção dos votos (0,55) calculemos uma estimativa da variância que é dada por

$$\sigma^2 = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0,55(1-0,55)}{1280} \approx 0,0002 \Rightarrow \sigma \approx 0,0141 \quad .$$

Assim, a distribuição Normal será $\hat{p} = N(0,55\,;0,0002)$ **. A proporção dada por 0,55 nos dá o número de votos igual a 704. Calculemos a probabilidade usando**

$$P(a<X<b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Os valores 596 e 610 nos dão as proporções 0,465625 e 0,4765625 e usaremos 0,4656 e 0,4766. Assim teremos

$$P(596 < X < 610) = P\left(\frac{0,4656-0,55}{0,0141} < Z < \frac{0,4766-0,55}{0,0141}\right) = P\left(-\frac{0,0844}{0,0141} < Z < -\frac{0,0734}{0,0141}\right) \approx P(-5,9858 < Z < -5,2057)$$

o que significa que a probabilidade é nula.

b) Qual a probabilidade do candidato B ter conseguido o mesmo número de votos? (0,5 ponto)

Resolução:

O candidato B tem o complemento do candidato A, ou seja, 45% dos votos. Assim teremos

$$\hat{p} = N(0,45\,;0,0002)$$

daí teremos

$$P(596 < X < 610) \approx P(1,11 < Z < 1,89) = P(Z < 1,89) - P(Z < 1,11) = 0,4706 - 0,3665 = 0,1041 \ .$$

6 – Sexta questão (1,5 ponto)

Numa experiência de campo levantou-se 12 amostras com os valores abaixo em unidades arbitrárias.

L	18,3	14,9	18,9	19,2	17,8	19,6	17,6	21,1	20,1	19,3	18,1	20,8

Usando estimadores não viciados, calcule o intervalo de confiança para a valor médio da amostra com um coeficiente de confiança de 85%.

Resolução:

Temos que o intervalo de confiança é dado por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] .$$

Usaremos os seguintes estimadores não viciados para o cálculo da média e da variância

$$\mu_2=\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}X_i \qquad\qquad \sigma_2^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right) .$$

Assim sendo teremos

$$\mu_2=\bar{X}=\frac{1}{12}\sum_{1}^{12}X_i=\frac{18,3+14,9+18,9+19,2+17,8+19,6+17,6+21,1+20,1+19,3+18,1+20,8}{12}=\frac{225,7}{12}\approx 18,8083 .$$

Para a variância teremos o somatório

$$\sum_{1}^{12}X_i^2=18,3^2+14,9^2+18,9^2+19,2^2+17,8^2+19,6^2+17,6^2+21,1^2+20,1^2+19,3^2+18,1^2+20,8^2=4275,47$$

que nos permite escrever

$$\sigma_2^2=\frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{12}X_i^2-12\bar{X}^2\right)=\frac{4275,47-12\times 18,8083^2}{11}\approx\frac{30,4292}{11}\approx 2,7662\Rightarrow\sigma\approx 1,6631 .$$

Com o coeficiente de confiança de 85%, teremos

$$z_{\gamma/2}=z_{85/2}=z_{0,425}=1,44 \quad .$$

Com estas informações teremos

$$IC(\mu,\gamma)=\left[18,8083-1,44\times\frac{1,6631}{\sqrt{12}};18,8083+1,44\times\frac{1,6631}{\sqrt{12}}\right]=[18,8083-0,6913;18,8083+0,6913]=[18,117;19,4996]$$

7 – Sétima questão (1,0 ponto)

Uma amostra de 32 observações de uma variável aleatória Normal forneceu média de 5,6 e variância amostral 4,2. Deseja-se testar, ao nível de significância de 10%, se a média na população é igual ou é menor que 5,8. Qual é a conclusão?

Resolução:

Usaremos como hipótese nula H_0 : μ = 5,8 e como hipótese alternativa H_a : μ < 5,8. Usando as informações dadas teremos

$$z_\alpha=-1,28$$

pelo complemento do valor de α, o que coloca a região de rejeição para valores menores que -1,28.

Calculemos agora z

$$z=\frac{\bar{X}-\mu}{S^2/\sqrt{n}}=\frac{5,6-5,8}{\sqrt{4,2}/\sqrt{32}}\approx-\frac{0,2}{0,3623}=-0,5520 \quad .$$

Assim verificamos que podemos afirmar que a hipótese H_0 não pode ser rejeitada.

Atenção:

I) Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

II) Todos os cálculos deverão ser feitos com pelo menos quatro casas decimais e arrendondados para duas APENAS ao final, seja na lista ou na prova.

III) Tenha cuidado quanto a notação. Caso não a siga, você terá pontos descontados, seja na lista ou na prova.

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.