Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Disciplina - Probabilidade e Estatística

Gabarito da AP3 do 2° semestre de 2011

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Questão 1 – (2,5 pontos) Uma urna contém 3 moedas. Uma tem duas caras, a outra é uma moeda justa, e a terceira é uma moeda viciada com probabilidade que saia cara igual a 0,75. Uma dessas moedas é selecionada aleatoriamente da urna, e é lançada.

a) Se o resultado for cara, qual a probabilidade que essa moeda selecionada seja a terceira moeda (a que é viciada)?

Resolução

Considerando as variáveis
cara : se o resultado do lançamento for cara;
coroa: se o resultado do lançamento for coroa;
M1 : a moeda tem duas caras;
M2 : a moeda justa;
M3 : a moeda viciada com probabilidade de cara 0.75,

Desejamos saber P(M3|cara) .)

Dados do problema:

$$P(M_1) = \frac{1}{3}, P(cara \mid M_1) = 0,50$$

$$P(M_2) = \frac{1}{3}, P(cara \mid M_2) = 1$$

$$P(M_3) = \frac{1}{3}, P(cara \mid M_3) = 0,75$$

$$P(M_3 \mid cara) = \frac{P(M_3 \cap\ cara)}{P(cara)} = \frac{P(M_3) \cdot P(cara / M_3)}{P(cara)}$$

portanto o que precisamos calcular $P(cara)$ ..

$$P(cara) = P(M_1 \cap\ cara) + P(M_2 \cap\ cara) + P(M_3 \cap\ cara)$$

$$P(cara) = P(M_1) \cdot P(cara / M_1) + P(M_2) \cdot P(cara / M_2) + P(M_3) \cdot P(cara / M_3)$$

$$P(cara) = \frac{1}{3} \times 0,50 + \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0,75$$

$$P(cara) = 0,75$$

logo temos:

$$P(M_3 \mid cara) = \frac{P(M_3 \cap \ cara)}{P(cara)} = \frac{P(M_3) \cdot P(cara / M_3)}{P(cara)}$$

$$P(M_3 \mid cara) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}75}{0{,}75}$$

$$P(M_3 \mid cara) = \frac{1}{3}$$

b) E se o lançamento fornecer coroa como resultado, qual a probabilidade de que essa moeda lançada seja esta viciada?

Resolução

Agora desejamos saber P(M3|coroa) .)

Dados do problema:

$$P(M_1) = \frac{1}{3}, P(coroa \mid M_1) = 0{,}50$$

$$P(M_2) = \frac{1}{3}, P(coroa \mid M_2) = 0$$

$$P(M_3) = \frac{1}{3}, P(coroa \mid M_3) = 0{,}25$$

$$P(M_3 \mid coroa) = \frac{P(M_3 \cap \ coroa)}{P(coroa)} = \frac{P(M_3) \cdot P(coroa / M_3)}{P(coroa)}$$

portanto agora precisamos calcular $P(coroa)$ ..

$$P(coroa) = P(M_1 \cap \ coroa) + P(M_2 \cap \ coroa) + P(M_3 \cap \ coroa)$$

$$P(coroa) = P(M_1) \cdot P(coroa / M_1) + P(M_2) \cdot P(coroa / M_2) + P(M_3) \cdot P(coroa / M_3)$$

$$P(coroa) = \frac{1}{3} \times 0{,}50 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times 0{,}25$$

$$P(cara) = 0{,}25$$

como esperado. Assim:

$$P(M_3 \mid coroa) = \frac{P(M_3 \cap \ coroa)}{P(coroa)} = \frac{P(M_3) \cdot P(coroa / M_3)}{P(coroa)}$$

$$P(M_3 \mid coroa) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}25}{0{,}25}$$

$$P(M_3 \mid cara) = \frac{1}{3}$$

Questão 2 – (2,5 pontos) Sabe-se que há um surto de pneumonia em uma determinada região e se os pacientes forem diagnosticados precocemente têm 85% de probabilidade de se curarem sem necessidade de internação. Para um grupo de 20 pacientes que estão na fila aguardando laudo para saber se serão internados ou não, calcule qual a probabilidade de:

menos de 2 pacientes necessitarem de internação;

Resolução:

Modelo Binomial

$$P(X = x_k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}, k = 0,1,\ldots,n$$

Considerando n=20 e uma das opções:

p= 0,85 (sucesso: não ser internado) → P(X>18) mais de 18 (19 ou 20) não foram internados
ou
p= 0,15 (sucesso: ser internado) → P(X<2) menos de 2 (1 ou 2) serem internados

Utilizando p=0,15 e P(X<2)

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X < 2) = \binom{20}{0} \times 0{,}15^0 \times (1-0{,}15)^{20-0} + \binom{20}{1} \times 0{,}15^1 \times (1-0{,}15)^{20-1}$$

$$P(X < 2) = \frac{20!}{0!20!}(0{,}15)^0 \times (0{,}85)^{20} + \frac{20!}{1!19!}(0{,}15)^1 \times (0{,}85)^{19} = 0{,}03876 + 0{,}13679 = 0{,}1755$$

somente o quinto paciente a ter o laudo divulgado necessitar de internação.

Resolução:

$$P(X = k+1) = p(1-p)^k$$

$$P(X = 5) = 0{,}15(1-0{,}15)^4 = 0{,}15 \times 0{,}5220 = 0{,}0783$$

$$P(X = k+1) = p(1-p)^k$$

$$P(X = 5) = 0{,}15(1-0{,}15)^4 = 0{,}15 \times 0{,}5220 = 0{,}0783$$

Questão 3 – (1,5 pontos) Numa fábrica de papel se avalia se uma picadeira de madeira. Se os pedaços são muito pequenos perde-se tempo nesta fase do processamento, se os pedaços são muito grandes o processamento posterior se torna oneroso. Se sabe que o tamanho ideal está entre 20 e 35 milímetros. Da máquina sabemos que a média de tamanho dos pedaços é 21milímetros com variância 22 mm^2. Colheu-se, então, 20 pedaços de madeira. Qual será a probabilidade da máquina estar funcionando devidamente supondo que podemos usar a distribuição Normal para modelar o processo e tendo como referência esta amostra?

Resolução:

A suposição é de que a amostra segue a distribuição Normal. Portanto, a probabilidade desejada é obtida com o uso da fórmula abaixo:
$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$.

Aqui temos $\sigma^2 = 22 \Rightarrow \sigma = \sqrt{22} \approx 4,69$ e daí

$$P(20 \le X \le 35) = P\left(\frac{20-21}{4,69} \le Z \le \frac{35-21}{4,69}\right) = P(-0,2132 \le Z \le 2,9850) \approx P(-0,21 \le Z \le 2,99)$$

ou
$P(20 \le X \le 35) = 0,0832 + 0,4986 = 0,5819$.

Questão 4 – (2,0 pontos) Calcule as probabilidades abaixo supondo que a distribuição é Normal, a média é 1,3 e que a variância é igual a 3,61.

Resolução:

Usaremos diretamente as fórmulas

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ou ainda

$$P(X > a) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{a-\mu}{\sigma}\right) .$$

No nosso caso $\sigma^2 = 3,61 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3,61} = 1,9$ e $\mu = 1,3$.

a. P(X< 1,1)

$$P(X < 1,1) = P\left(Z < \frac{1,1-1,3}{1,9}\right) = P(Z < -0,1052) \approx P(Z < -0,11)$$

ou
$P(X < 1,1) = 0,5 - P(Z > 0,11) = 0,5 - 0,0438 = 0,4562$.

b. P(X>2,3)

$$P(X > 2,3) = P\left(Z > \frac{2,3-1,3}{1,9}\right) = P(Z < 0,5263) \approx P(Z > 0,53) = 0,5 - 0,2019 = 0,2981$$

c. P(1,5<X<2,3)

$$P(1,5 \le X \le 2,3) = P\left(\frac{1,5-1,3}{1,9} \le Z \le \frac{2,3-1,3}{1,9}\right) = P(0,1052 \le Z \le 0,5263) \approx P(0,11 \le Z \le 0,53)$$

ou
$P(1,5 \le X \le 2,3) = -0,0438 + 0,2019 = 0,1581$

d. P(1,1<X<1,5)

$$P(1,1 \le X \le 1,5) = P(-0,1052 \le Z \le 0,1052) = P(-0,11 \le Z \le 0,11) = 2 \times 0,0438 = 0,0876$$

Questão 5 – (1,5 pontos) Um serviço pela Internet se encontrava em testes. De um outro serviço semelhante se tinha a informação que o tempo de acesso tinha uma variância de 15,21 minutos^2. Num dos testes se obteve em 120 conexões uma média de 17 minutos. Qual é o intervalo de confiança da média verdadeira com coeficiente de confiança de 90%?

Resolução:

A fórmula para o intervalo de confiança é

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\,\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Para esta questão os parâmetros são

$$\bar{X}=17 \quad z_{\gamma/2}=z_{0,45}=1,64\ ;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{15,21}}{\sqrt{120}}\approx\frac{3,9}{10,9544}\approx 0,356\ .$$

Assim teremos o seguinte resultado

$$IC(17\,;0,9)=[17-1,64\times 0,356\,;\,17+1,64\times 0,356]\approx[16,41\,;\,17,58].$$