Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 2° semestre de 2007.

Nome :

Assinatura :

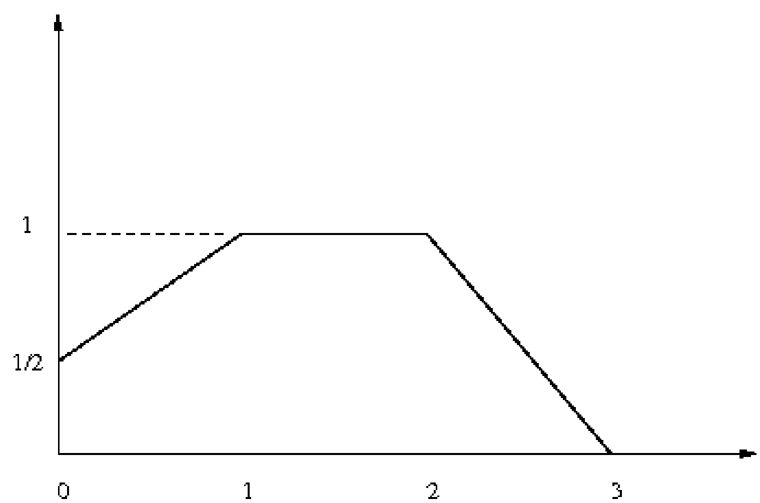
Observações:

1. A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal;
2. É permitido o uso de máquina de calcular;
3. Todos os cálculos têm que ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada;
4. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas;
5. Você pode usar lápis para responder as questões;
6. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas;
7. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. **As respostas nas folhas de questões serão ignoradas.**

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Primeira questão (2,5 pontos)

Uma densidade de probabilidade é dada por P(x) = C f(x), onde f(x) é dada pela figura abaixo (onde não houver indicação a função vale zero) e C é uma constante.



a) Escreva a expressão da função f(x); (0,5 pontos)
Solução:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{1}{2}, se(0\leq X<1) \\ 1, se(1\leq X<2) \\ -x+3, se(2\leq X\leq 3) \end{cases}$$

b) Calcule C de tal forma que P(x) satisfaça as condições de P(x) ser uma densidade de probabilidade. (1,0 ponto)
Solução:
Integrando cada parte da função, obtemos

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$
$$\int_1^2 f(x)dx==\int_1^2 1\,dx=(x)\Big|_1^2=2-1=1$$
$$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 (-x+3)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+3\mathrm{x}\right)\Big|_2^3=-\frac{9}{2}+9-\left(-\frac{4}{2}+6\right)=\frac{1}{2}$$

Para P(x) seja distribuição de probabilidades, teremos que fazer com que C seja tal que a soma das integrais acima seja 1. Assim temos que C = 4/9. Este valor deverá ser usado nos cálculos abaixo.

Usando o valor achado para C:
c) Calcule o valor médio; (0,5 pontos)

Por definição, a média será igual a

$$\int_0^3 x\,P(x)\,dx=\int_0^3 \frac{4}{9}xf(x)\,dx=\frac{4}{9}\left[\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)dx+\int_1^2 x\,dx+\int_2^3 (-x^2+3\mathrm{x})\,dx\right]$$

ou seja,

$$\mu=\frac{4}{9}\left[\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2+\left(-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^3\right]=\frac{4}{9}\ \frac{37}{12}=1{,}3703$$

d) Calcule a moda. (0,5 pontos)

Como o valor mais freqüente é 4/9 (lembre-se 4/9 f(x)) e P(x) toma este valor entre 1 e 2, qualquer valor neste intervalo é o valor da moda.

Segunda questão (2,5 pontos)

Um conjunto de dados foi modelado segundo a distribuição Normal. A média dos dados é 10,3 e a variância 8,23.

Calcule:

a) P(X > 11) (1,0 ponto)
b) P(X < 11) (0,5 ponto)
c) P(11 < X < 12) (0,5 ponto)
d) P(X > 12) (0,5 ponto)

Solução:

Partindo dos valores de média e variância apresentados, basta usar as propriedades de simetria da distribuição Normal e fazer a mudança de variáveis para utilizar a tabela ao final da prova.

a)
$$P(X>11)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{11-10.3}{\sqrt{8.23}}\right)=P(Z>0{,}2440)$$
$$P(Z>0{,}2440)=0{,}5-P(0\leq Z<0{,}2440)=0{,}5-0{,}0948=0{,}4052$$

b) Aqui temos é o resultado é o complemento do resultado anterior, ou seja,
$$P(X<11)=1-P(x>11)=1-0{,}4052=0{,}5948$$

c)
$$P(11<X<12)=P\left(\frac{11-10{,}3}{\sqrt{8{,}23}}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{12-10{,}3}{\sqrt{8{,}23}}\right)=P(0{,}2440\leq Z\leq 0{,}5925)$$
$$=P(Z\leq 0{,}5925)-P(Z\leq 0.2440)=0{,}2224-0{,}0948=0.1277$$

d)
$$P(X>12)=1-P(X\leq 12)=1-P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{12-10{,}3}{\sqrt{8{,}23}}\right)$$
$$P(X>12)=1{,}0-P(Z\leq 0{,}5925)=1{,}0-0{,}2224=0{,}7776$$

Terceira questão (2,5 pontos)

Numa granja temos que a variância do peso dos frangos igual à $490{,}0g^2$. Foram retirados 10 frangos da linha de embalagem e o peso médio foi de 1520g.

a)Estime o intervalo de confiança da média de peso na produção supondo que o peso dos frangos siga um modelo Normal e que se desejamos um coeficiente de confiança de 90%. (1,0 ponto).

b)Faça o mesmo cálculo supondo que a amostra agora é de 30 frangos, a média amostral de 1560g e mesmo coeficiente de confiança (0,5 ponto).

c)Compare os resultados. A que conclusão você chega partindo dos valores obtidos? (1,0 ponto)

Solução: Calculemos o intervalo de confiança deste problema, ou seja,

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Com o coeficiente de confiança de 90% consultando a tabela de distribuição Normal teremos

$$z_{\gamma/2}=z_{0,45}=1{,}65$$

Assim

$$IC(\mu,0{,}9)=\left[1520-1{,}65\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{10}}\,;1520+1{,}65\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{10}}\right]$$

ou

$$IC(\mu,0{,}9)=[1520-11{,}55\,;1520+11{,}55]=[1508{,}45\,;1531{,}55]$$

b) No segundo caso temos que

$$IC(\mu,0{,}9)=\left[1560-1{,}65\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{30}}\,;1560+1{,}65\frac{\sqrt{490}}{\sqrt{30}}\right]$$

$$IC(\mu,0{,}9)=[1560-6{,}66\,;1560+6{,}66]=[1553{,}33\,;1566{,}66]$$

c) Observamos um estreitamento do intervalo de confiança devido ao aumento no número de amostras.

Quarta questão (2,5 pontos)

Vários hospitais estavam sendo avaliados para uma possível ampliação. Para isto colheram-se dados quanto ao tempo de ocupação de leitos. Suponha que o modelo Normal é adequado à análise assim como, devido à experiências anteriores, há indícios de uma variância igual a 8,1 $(\text{dias})^2$. Num determinado hospital os dados colhidos indicavam uma média de 6,4 dias para 80 internações. Estime a média de dias de internação deste hospital com coeficiente de confiança de 95%.

$$\bar{X} = 6,4$$
$$\sigma^2 = 81$$
$$Amostra = 80$$
$$\gamma = 95$$
$$Z\gamma_1 = -1,96$$
$$Z\gamma_2 = 1,96$$
$$IC(\mu, 95) = \left[6,4 - 1,96\sqrt{\frac{8,1}{80}}; 6,4 + 1,96\sqrt{\frac{8,1}{80}}\right]$$
$$IC(\mu, 95) = [5,776; 7,023]$$