Probabilidade e Estatística

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho

Regina Célia Paula Leal Toledo

Aula 5

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho
Regina Célia Paula Leal Toledo

Variáveis aleatórias discretas

Conteúdo:

5.1 Função discreta de probabilidade

5.2 Função de distribuição de probabilidade

5.3 Alguns modelos discretos

- 5.3.1 Modelo uniforme discreto
- 5.3.2 Modelo Binomial
- 5.3.3 Modelo geométrico
- 5.3.4 Modelo de Poisson
- 5.3.5 Modelos Hipergeométrico

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$\sigma_X^2 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

$$A \cap B = \varnothing$$

5 Variáveis aleatórias discretas

Obtida a partir do estudo das freqüências

Suposições feitas a respeito da realização do fenômeno

função de probabilidade ("chance")

5 Variáveis aleatórias discretas

Obtida a partir do estudo das freqüências

Suposições feitas a respeito da realização do fenômeno

função de probabilidade ("chance")

variáveis quantitativas contínuas e discretas

Aleatório:

a cada possível valor ⇨ probabilidade de ocorrência

Uma *variável aleatória* é uma função com valores numéricos, cujo valor é determinado por "fatores de chance".

Assim, uma quantidade $\mathbf{X}$, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada:

Uma variável aleatória é uma função com valores numéricos, cujo valor é determinado por "fatores de chance".

Assim, uma quantidade $\mathbf{X}$, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada:

variável aleatória discreta se assume valores num conjunto enumerável, com determinada probabilidade.

Por exemplo: número de jogos empatados, número de defeitos na fabricação de sapatos...

Uma variável aleatória é uma função com valores numéricos, cujo valor é determinado por "fatores de chance".

Assim, uma quantidade $\mathbf{X}$, associada a cada possível resultado do espaço amostral, é denominada:

variável aleatória discreta se assume valores num conjunto enumerável, com determinada probabilidade.

Por exemplo: número de jogos empatados, número de defeitos na fabricação de sapatos...

variável aleatória contínua se seu conjunto de valores é qualquer intervalo dos números reais, sendo assim um conjunto não enumerável.

Por exemplo: altura dos eucaliptos após 3 anos, duração de uma conversa telefônica,...

5.1 Função discreta de probabilidade (ou função de probabilidade)

Seja $\mathbf{X}$ uma variável aleatória discreta e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ seus possíveis valores. A função de probabilidade é a função que atribui a cada valor da variável a sua probabilidade de ocorrência.

$\mathbf{X}$	$\mathbf{x}_1$	$\mathbf{x}_2$	$\cdots$	$\mathbf{x}_n$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

ou, a notação:

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) = p(\mathbf{x}_i) = p_i, \quad i = 1, 2 \cdots$$

com

$$0 \leq p(\mathbf{x}_i) \leq 1 \;\; \text{e} \;\; \sum_i p_i = 1$$

Variáveis aleatórias são completamente caracterizadas pela sua função de probabilidade. Assim, é fundamental saber: dada uma variável de interesse, qual a função de probabilidade que melhor representa seu comportamento na população?

Variáveis aleatórias são completamente caracterizadas pela sua função de probabilidade. Assim, é fundamental saber: dada uma variável de interesse, qual a função de probabilidade que melhor representa seu comportamento na população?

Exemplos

Exemplo 1

Dados do último censo em uma determinada região:

20% das famílias não têm filhos

30% têm 1 filho

35% têm 2 filhos

e o restante se divide em 3, 4 ou 5 filhos igualmente.

Qual será a função de probabilidade para a variável "*número de filhos*"?

Sendo $\mathbf{N}$ a variável aleatória número de filhos que pode assumir os valores $\mathbf{N} = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5
p_i	$0,20$	$0,30$	$0,35$	p	p	p
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$			
	20%	30%	35%			

Sendo $\mathbf{N}$ a variável aleatória número de filhos que pode assumir os valores $\mathbf{N} = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5
p_i	$0,20$	$0,30$	$0,35$	p	p	p

Sabemos que:

$$P(N=0)+P(N=1)+P(N=2)+P(N=3)+P(N=4)+P(N=5)=1$$
$$0,20+0,30+0,35+p+p+p=1$$

Sendo $\mathbf{N}$ a variável aleatória número de filhos que pode assumir os valores $\mathbf{N} = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5
p_i	$0,20$	$0,30$	$0,35$	p	p	p

Sabemos que:

$$P(N=0)+P(N=1)+P(N=2)+P(N=3)+P(N=4)+P(N=5)=1$$
$$0,20+0,30+0,35+p+p+p=1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 0,85+3p=1 \\ \\ p=\dfrac{1-0,85}{2}=\dfrac{0,15}{3}=0,05 \end{array}}$$

Sendo $\mathbf{N}$ a variável aleatória número de filhos que pode assumir os valores $\mathbf{N} = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5
p_i	$0,20$	$0,30$	$0,35$	p	p	p

Sabemos que:

$$P(N=0)+P(N=1)+P(N=2)+P(N=3)+P(N=4)+P(N=5)=1$$
$$0,20+0,30+0,35+p+p+p=1$$

$$0,85+3p=1$$

$$p=\frac{1-0,85}{2}=\frac{0,15}{3}=0,05$$

$\mathbf{N}$	0	1	2	3	4	5
p_i	$0,20$	$0,30$	$0,35$	$0,05$	$0,05$	$0,05$

Exemplo 2:

As estacas para a fundação de um prédio devem atingir 15m de profundidade. A cada 5m os operadores fazem a medição da resistência do solo para ver se há alterações nessa resistência, o que acarretará na necessidade de se tomar medidas que alteram o preco final da obra. Sabendo que a probabilidade de alteração nessa resistência é de 0,1 e que em cada alteração o valor da obra será acrescido de 50 UPCs (unidade padrão de construção), quer se saber como se comportará variável "*acréscimo do custo da obra*"?

Exemplo 2:

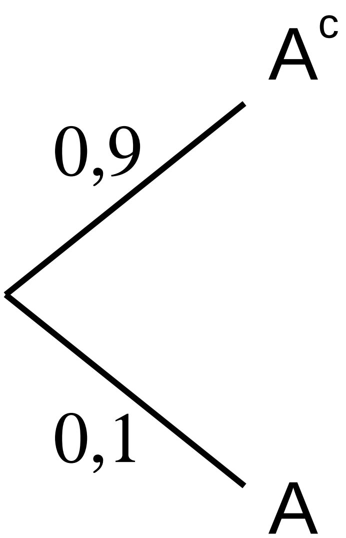
As estacas para a fundação de um prédio devem atingir 15m de profundidade. A cada 5m os operadores fazem a medição da resistência do solo para ver se há alterações nessa resistência, o que acarretará na necessidade de se tomar medidas que alteram o preco final da obra. Sabendo que a probabilidade de alteração nessa resistência é de 0,1 e que em cada alteração o valor da obra será acrescido de 50 UPCs (unidade padrão de construção), quer se saber como se comportará variável "acréscimo do custo da obra"?

15m $\rightarrow$ 3 medições

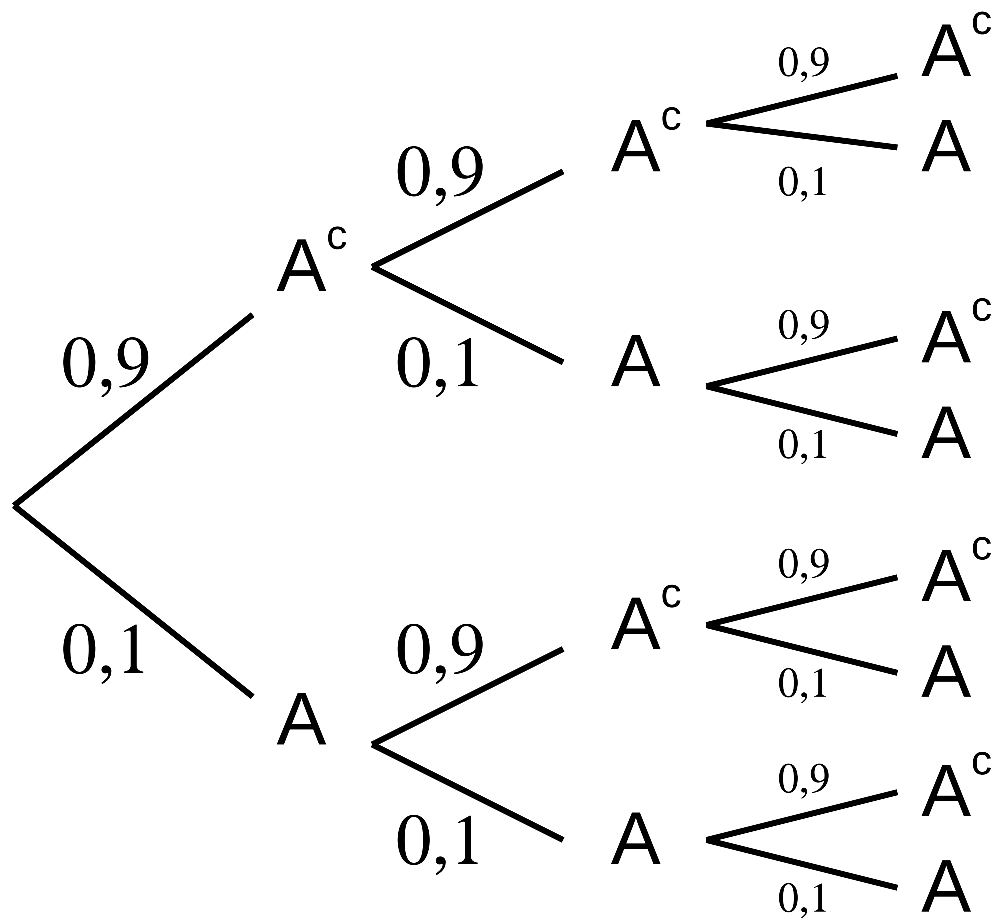
A $\rightarrow$ alteração na resistência do solo

A^c $\rightarrow$ complementar (sem alteração)

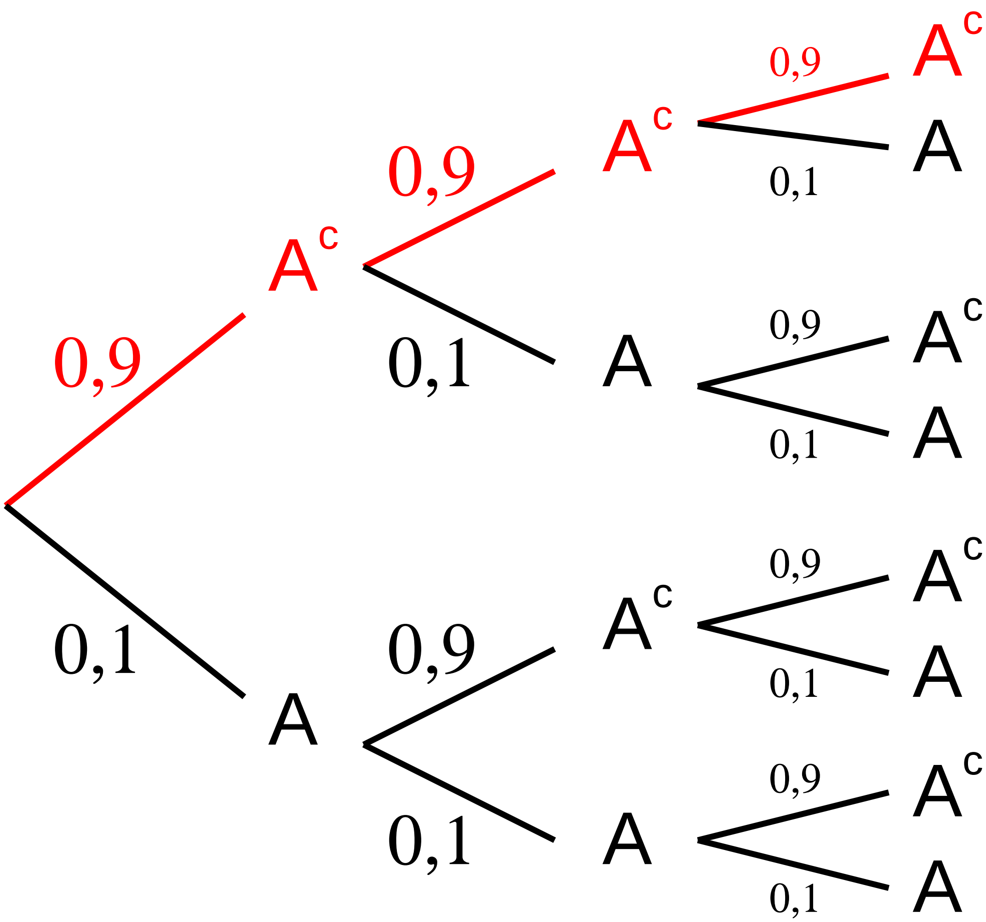
Árvore de Probabilidades



Árvore de Probabilidades

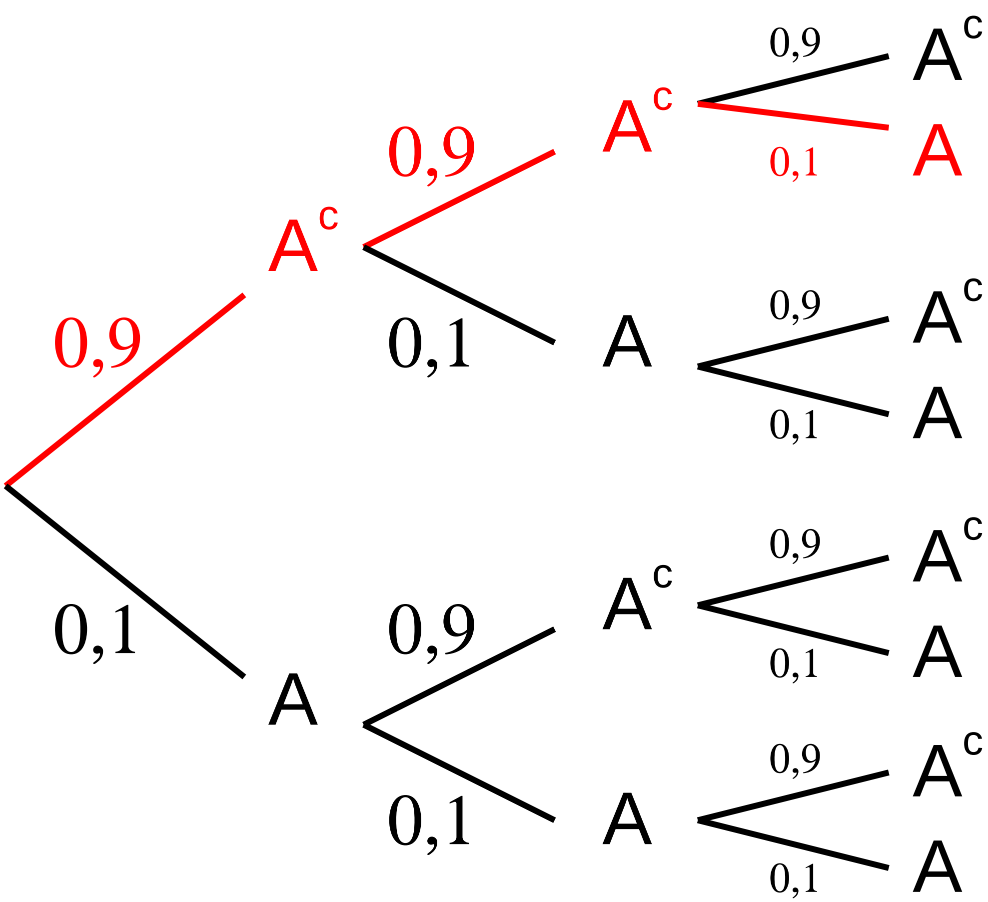


Árvore de Probabilidades



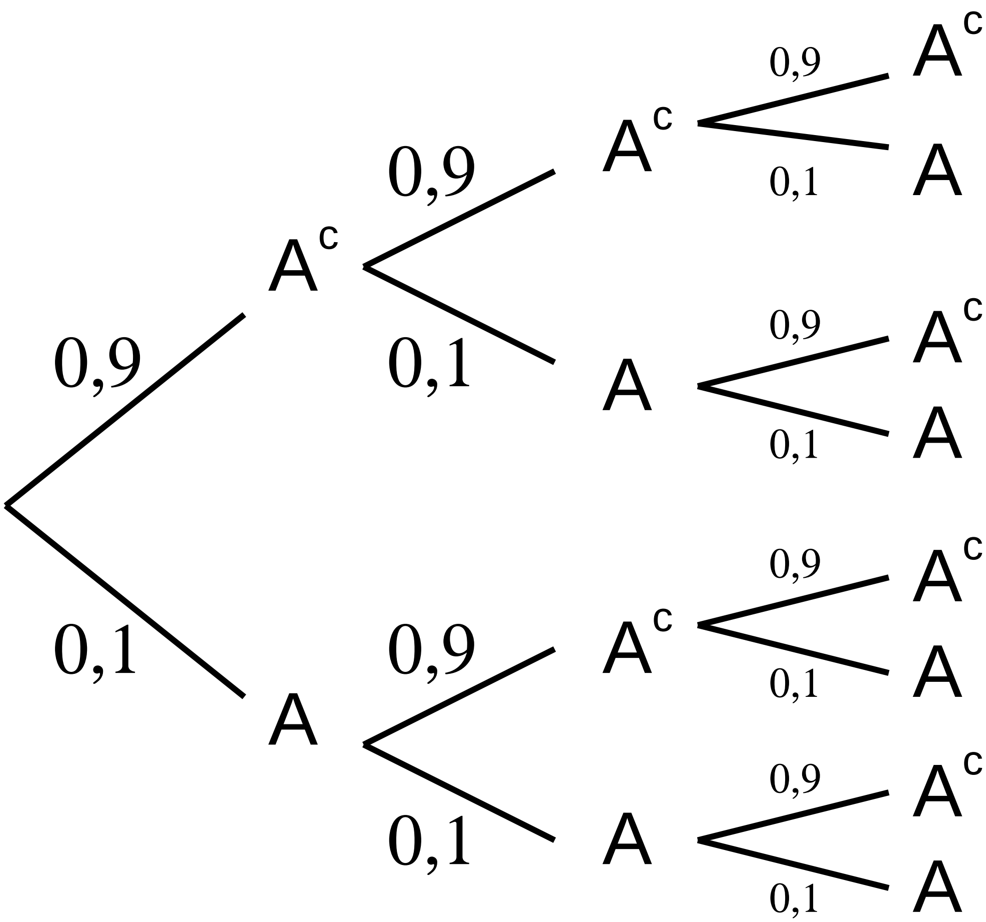
valores	probabilidade	custo extra (CE)
$A^cA^cA^c$	$(0,9)^3 = 0,729$	0

Árvore de Probabilidades



valores	probabilidade	custo extra (CE)
$A^cA^cA^c$	$(0,9)^3 = 0,729$	0
A^cA^cA	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50

Árvore de Probabilidades



valores	probabilidade	custo extra (CE)
$A^cA^cA^c$	$(0,9)^3 = 0,729$	0
A^cA^cA	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A^cA\ A^c$	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A^cA\ A$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\ A^cA^c$	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A\ A^cA$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\ A\ A^c$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\ A\ A$	$(0,1)^3 = 0,001$	150

Observe que:

- associamos a cada evento do espaço amostral a um valor da variável aleatória CE. Assim CE assumiu os valores:

$CE_1 = 0$; $CE_2 = 50$; $CE_3 = 100$; $CE_4 = 150$

Observe que:

- associamos a cada evento do espaço amostral a um valor da variável aleatória CE. Assim CE assumiu os valores:

$$CE_1 = 0; \quad CE_2 = 50; \quad CE_3 = 100; \quad CE_4 = 150$$

- podemos ter um mesmo valor para a variável associado a mais de um elemento do espaço amostral. Por exemplo $P(\,CE = 50\,)$, incluem todas as possibilidades de somente uma alteração em qualquer uma das 3 medições. Como os eventos são disjuntos a probabilidade de união é a soma das probabilidades de cada evento, ou:

$$\begin{aligned} P(\,CE = 50\,) &= P(\,A^c A^c A \;\cup\; A^c A\, A^c \;\cup\; A\, A^c A^c\,) \\ &= P(\,A^c A^c A\,) + P(\,A^c A\, A^c\,) + P(\,A\, A^c A^c\,) \\ &= 0{,}081 + 0{,}081 + 0{,}081 \\ &= 0{,}243 \end{aligned}$$

valores	probabilidade	custo extra (CE)
$A^cA^cA^c$	$(0,9)^3 = 0,729$	0
A^cA^cA	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A^cA\,A^c$	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A^cA\,A$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\,A^cA^c$	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A\,A^cA$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\,A\,A^c$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\,A\,A$	$(0,1)^3 = 0,001$	150

$$\boxed{P(\,CE=0\,) = 1\,.\,0,729 = 0,729}$$

$$P(\,CE=50\,) = 3\,.\,0,081 = 0,243$$

$$P(\,CE=100\,) = 3\,.\,0,009 = 0,027$$

$$P(\,CE=150\,) = 1\,.\,0,001 = 0,001$$

CE	0	50	100	150
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

valores	probabilidade	custo extra (CE)
$A^cA^cA^c$	$(0,9)^3 = 0,729$	0
A^cA^cA	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A^cA\,A^c$	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A^cA\,A$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\,A^cA^c$	$(0,9)^2.0,1 = 0,081$	50
$A\,A^cA$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\,A\,A^c$	$0,9.(0,1)^2 = 0,009$	100
$A\,A\,A$	$(0,1)^3 = 0,001$	150

P(CE=0) = 1 . 0,729 = 0,729

$\boxed{\text{P(CE=50) = 3 . 0,081 = 0,243}}$

P(CE=100) = 3 . 0,009 = 0,027

P(CE=150) = 1 . 0,001 = 0,001

CE	0	50	100	150
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

5.2 Função de distribuição de probabilidade (ou função acumulada de probabilidades) de uma variável aleatória discreta

Seja $\mathbf{X}$ uma variável aleatória discreta e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ seus possíveis valores. A função distribuição de probabilidade é definida, pela seguinte expressão:

$$F(\mathbf{x}) = P(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$$

sendo **x** qualquer número real.

5.3 Alguns modelos discretos

Dada uma distribuição de probabilidades é evidente que alguns valores são mais prováveis do que outros. Em geral, do ponto de vista prático não há necessidade de calcular as probabilidades individuais para se encontrar a distribuição de probabilidades.

Existem vários "tipos" de distribuição que podem ser descritos por "modelos de distribuição". Um pequeno número de modelos proporciona solução para um grande número de problemas.

5.3 Alguns modelos discretos

Dada uma distribuição de probabilidades é evidente que alguns valores são mais prováveis do que outros. Em geral, do ponto de vista prático não há necessidade de calcular as probabilidades individuais para se encontrar a distribuição de probabilidades.

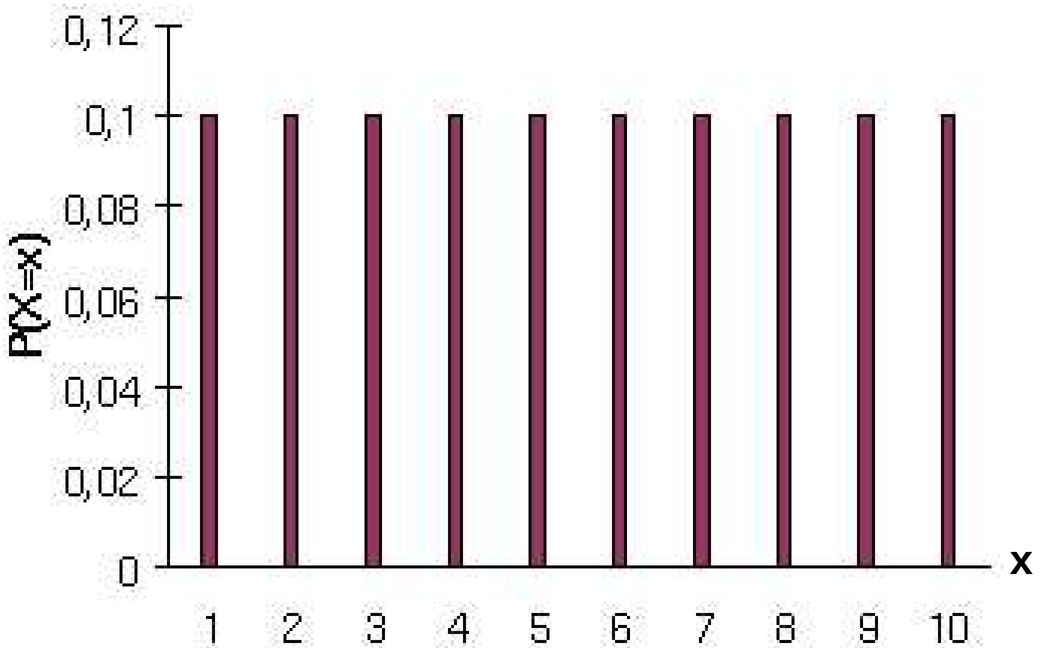
Existem vários "tipos" de distribuição que podem ser descritos por "modelos de distribuição". Um pequeno número de modelos proporciona solução para um grande número de problemas.

Modelos
- Uniforme
- Binomial
- Geométrico
- Poisson
- Hipergeométrico

5.3.1 Modelo uniforme discreto

Seja $\mathbf{X}$ uma variável aleatória discreta e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \cdots$ seus possíveis valores. Dizemos que $\mathbf{X}$ segue um *modelo uniforme discreto* se atribui uma mesma probabilidade a cada um de seus valores, ou seja:

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_j) = \frac{1}{k} \qquad \forall j = 1, 2, \cdots, k.$$



Exemplo: uma rifa tem 100 bilhetes numerados (de 1 a 100). Quero comprar 5 bilhetes. Terei mais chance de ganhar se eu comprar os bilhetes em ordem ou sorteados?

Exemplo: uma rifa tem 100 bilhetes numerados (de 1 a 100). Quero comprar 5 bilhetes. Terei mais chance de ganhar se comprar os bilhetes com numeração sequencial ou com numeração escolhida ao acaso?

Chamando de $\mathbf{x}_i$ o *número sorteado*, com *i = 1, 100*, e assumindo a honestidade da rifa, temos que:

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_j) = \frac{1}{100}, j = 1, 2, \ldots, 100 \longrightarrow$$ modelo uniforme discreto.

Exemplo: uma rifa tem 100 bilhetes numerados (de 1 a 100). Quero comprar 5 bilhetes. Terei mais chance de ganhar se comprar os bilhetes com numeração sequencial ou com numeração escolhida ao acaso?

Chamando de $\mathbf{x}_i$ o *número sorteado*, com *i = 1, 100*, e assumindo a honestidade da rifa, temos que:

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_j) = \frac{1}{100}, j = 1, 2, \ldots, 100 \longrightarrow$$ modelo uniforme discreto.

Assim, comprando 5 bilhetes a probabilidade de ganhar é 5/100, independente se os números dos bilhetes são sequenciais ou não.

5.3.2 Modelo Binomial

Em muitas situações a variável de interesse só pode assumir 2 valores: positivo ou negativo; concorda ou não concorda; sim ou não; ...

5.3.2 Modelo Binomial

Em muitas situações a variável de interesse só pode assumir 2 valores: positivo ou negativo; concorda ou não concorda; sim ou não; ...

- Quer se saber se jovens entre 18 e 25 anos concluíram o segundo grau. O evento de interesse (sucesso) é: "o jovem concluiu o segundo grau".
- Quer se fazer um estudo para saber se os moradores de uma região foram atingidos por uma moléstia contagiosa. O evento de interesse (sucesso) é: "a pessoa examinada foi contagiada".
- Numa prova de múltipla escolha cada questão em 5 alternativas e só uma é considerada correta. O evento de interesse (sucesso) é o número de questões corretas.

5.3.2 Modelo Binomial

Em muitas situações a variável de interesse só pode assumir 2 valores: positivo ou negativo; concorda ou não concorda; sim ou não; ...

- Quer se saber se jovens entre 18 e 25 anos concluíram o segundo grau. O evento de interesse (sucesso) é: "o jovem concluiu o segundo grau".
- Quer se fazer um estudo para saber se os moradores de uma região foram atingidos por uma moléstia contagiosa. O evento de interesse (sucesso) é: "a pessoa examinada foi contagiada".
- Numa prova de múltipla escolha cada questão em 5 alternativas e só uma é considerada correta. O evento de interesse (sucesso) é o número de questões corretas.

5.3.2 Modelo Binomial

Em muitas situações a variável de interesse só pode assumir 2 valores: positivo ou negativo; concorda ou não concorda; sim ou não; ...

- Quer se saber se jovens entre 18 e 25 anos concluíram o segundo grau. O evento de interesse (sucesso) é: "o jovem concluiu o segundo grau".
- Quer se fazer um estudo para saber se os moradores de uma região foram atingidos por uma moléstia contagiosa. O evento de interesse (sucesso) é: "a pessoa examinada foi contagiada".

Numa prova de múltipla escolha cada questão em 5 alternativas e só uma é considerada correta. O evento de interesse (sucesso) é o número de questões corretas.

Ensaio de Bernoulli: numa única tentativa de experimento, considera-se somente a ocorrência ou não de um determinado evento (sucesso ou fracasso) e com probabilidade de ocorrência de sucesso igual a *p*.

Considerando "1" a ocorrência de sucesso e "0" a sua não ocorrência, temos:

k	0	1
p_i	$1-p$	p

Sua função discreta de probabilidade é dada por:

$$P(\mathbf{X}=k)=p^k(1-p)^{1-k} \quad , \qquad k=0,1.$$

Consideremos a repetição de *n* ensaios de Bernoulli independentes e todos com a mesma probabilidade de sucesso *p*. A variável aleatória que conta o número total de sucessos é denominada Binomial e sua função de probabilidade é dada por:

$$P(\mathbf{X}=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \mathbf{k}=0,1,2,\cdots,n.$$

Utilizaremos a notação $\mathbf{X} \sim b(n,p)$.

Lembrando...

Expressão do coeficiente binômial de Newton

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{3}{0} = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3!}{1 \times 3!} = 1$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times (2 \times 1)} = 3$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times (1)} = 3$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!0!} = 1$$

Exemplo:

1 - Um dado é lançado 50 vezes e quer se saber qual a probabilidade de sair 8 vezes faces com o número 6?

Exemplo:

1 - Um dado é lançado 50 vezes e quer se saber qual a probabilidade de sair 8 vezes faces com o número 6?

Número de tentativas → $n = 50$

Probabilidade de sucesso (em um evento) → $p = 1/6$ (dado "honesto")

Número de sucessos → 8 (8 vezes faces com número 6)

Exemplo:

1 - Um dado é lançado 50 vezes e quer se saber qual a probabilidade de sair 8 vezes faces com o número 6?

Número de tentativas → *n = 50*

Probabilidade de sucesso (em um evento) → *p = 1/6* (dado "honesto")

Número de sucessos → 8 (8 vezes faces com número 6)

$$P(\mathbf{X}=8)=\binom{50}{8}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{8}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)^{50-8}$$

$$P(\mathbf{X}=8)=\frac{50!}{8!\,42!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{8}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{42}=0.15103$$

Exemplo:

2- No exemplo das estacas para a fundação de um prédio podemos considerar que, em cada situação, aplicamos o modelo de Bernoulli, assumindo que o resultado de cada medição não é influenciado pela medição anterior, ou seja, são independentes.

Podemos definir como "sucesso" a "não" ocorrência de alteração na resistência do solo, pois não implica em custo extra.

Exemplo:

2- No exemplo das estacas para a fundação de um prédio podemos considerar que, em cada situação, aplicamos o modelo de Bernoulli, assumindo que o resultado de cada medição não é influenciado pela medição anterior, ou seja, são independentes.

Podemos definir como "sucesso" a "não" ocorrência de alteração na resistência do solo, pois não implica em custo extra.

Assim: sucesso - A^c (Complementar de A)

fracasso - A

Exemplo:

2- No exemplo das estacas para a fundação de um prédio podemos considerar que, em cada situação, aplicamos o modelo de Bernoulli, assumindo que o resultado de cada medição não é influenciado pela medição anterior, ou seja, são independentes.

Podemos definir como "sucesso" a "não" ocorrência de alteração na resistência do solo, pois não implica em custo extra.

Assim: sucesso - A^c (Complementar de A)

fracasso - A

Podemos assumir que em 15 metros - 3 medições - podemos ter *0, 1, 2 ou 3* sucessos, com custo extra $CE_k = 150$, *100, 50 ou 0 (zero)*, com k variando de *0, 1, 2 e 3* respectivamente.

$$\boxed{P(\mathbf{X} = k) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ k \end{array} \right) \times 0,9^k \times 0,1^{n-k}, k = 0,1,2,3}$$

$$P(\mathbf{X}=k)=\binom{3}{k}\times 0,9^{k}\times 0,1^{n-k}, k=0,1,2,3$$

Para k=0 (CE=150)

$$\boxed{P(\mathbf{X}=0)=\binom{3}{0}\times 0,9^{0}\times 0,1^{3-0}=1\times 1\times 0,001=0,001}$$

Para k=1 (CE=100)

$$P(\mathbf{X}=1)=\binom{3}{1}\times 0,9^{1}\times 0,1^{3-1}=3\times 0,9\times 0,01=0,027$$

Para k=2 (CE=50)

$$P(\mathbf{X}=2)=\binom{3}{2}\times 0,9^{2}\times 0,1^{3-2}=1\times 0,81\times 0,1=0,243$$

Para k=3 (CE=0)

$$P(\mathbf{X}=3)=\binom{3}{3}\times 0,9^{3}\times 0,1^{3-3}=1\times 0,729\times 1=0,729$$

CE	0	50	100	150
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

$$P(\mathbf{X}=k)=\left(\begin{array}{c}3\\k\end{array}\right)\times 0,9^{k}\times 0,1^{n-k}, k=0,1,2,3$$

Para k=0 (CE=150)

$$P(\mathbf{X}=0)=\left(\begin{array}{c}3\\0\end{array}\right)\times 0,9^{0}\times 0,1^{3-0}=1\times 1\times 0,001=0,001$$

Para k=1 (CE=100)

$$P(\mathbf{X}=1)=\left(\begin{array}{c}3\\1\end{array}\right)\times 0,9^{1}\times 0,1^{3-1}=3\times 0,9\times 0,01=0,027$$

Para k=2 (CE=50)

$$P(\mathbf{X}=2)=\left(\begin{array}{c}3\\2\end{array}\right)\times 0,9^{2}\times 0,1^{3-2}=1\times 0,81\times 0,1=0,243$$

Para k=3 (CE=0)

$$P(\mathbf{X}=3)=\left(\begin{array}{c}3\\3\end{array}\right)\times 0,9^{3}\times 0,1^{3-3}=1\times 0,729\times 1=0,729$$

CE	0	50	100	150
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Fundação CECIERJ Consórcio cederj

3 - Uma prova tipo teste de 20 questões independentes, cada uma tem alternativa falso e verdadeiro. Se um aluno resolve a prova respondendo a esmo as questões, qual a probabilidade de tirar 5?

3 - Uma prova tipo teste de 20 questões independentes, cada uma tem alternativa falso e verdadeiro. Se um aluno resolve a prova respondendo a esmo as questões, qual a probabilidade de tirar 5?

Número de tentativas $\longrightarrow$ $n = 20$

Probabilidade de sucesso (em um evento) $\longrightarrow$ $p = 0{,}5$ (?)

Numero de sucessos $\longrightarrow$ k = 10 acertos

3 - Uma prova tipo teste de 20 questões independentes, cada uma tem alternativa falso e verdadeiro. Se um aluno resolve a prova respondendo a esmo as questões, qual a probabilidade de tirar 5?

Número de tentativas → *n = 20*

Probabilidade de sucesso (em um evento) → *p = 0,5* (?)

Numero de sucessos → k = 10 acertos

$$P(\mathbf{X}=10)=\binom{20}{10}\times 0,5^{10}\times 0,5^{20-10}$$

$$P(\mathbf{X}=10)=\frac{20!}{10!10!}\times 0,5^{10}\times 0,5^{10}=0,17620$$

5.3.3 Modelo Geométrico

Dizemos que a variável aleatória **X** tem distribuição geo-métrica de parâmetro *p* se sua função de probabilidade tem a forma:

$$P(\mathbf{X}=k)=p(1-p)^k$$

com $0 \leq p \leq 1 \quad \text{e} \quad k=1,2,\cdots$

Utilizamos a notação **X**~*G(p)*

5.3.3 Modelo Geométrico

Dizemos que a variável aleatória **X** tem distribuição geométrica de parâmetro *p* se sua função de probabilidade tem a forma:

$$P(\mathbf{X} = k) = p(1-p)^k$$

com $0 \leq p \leq 1 \quad \text{e} \quad k = 1, 2, \cdots$

Utilizamos a notação **X**~*G(p)*

Se interpretarmos *p* como a probabilidade de sucesso, o modelo geométrico pode ser visto como o número de ensaios de Bernoulli que precedem o primeiro sucesso.

Assim, consideremos tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento que admite sucesso com probabilidade *p* (e fracasso com probabilidade 1-*p*). Seja **X** o número de tentativas para o aparecimento do primeiro sucesso. Logo,

X=0 que corresponde ao sucesso na primeira tentativa (S);

X=1 que corresponde ao fracasso na primeira tentativa e sucesso na segunda (FS);

E assim sucessivamente

Assim, consideremos tentativas sucessivas e independentes de um mesmo experimento que admite sucesso com probabilidade *p* (e fracasso com probabilidade 1-*p*). Seja **X** o número de tentativas para o aparecimento do primeiro sucesso. Logo,

X=0 que corresponde ao sucesso na primeira tentativa (S);

X=1 que corresponde ao fracasso na primeira tentativa e sucesso na segunda (FS);

E assim sucessivamente

O espaço amostral para esse experimento é o conjunto:

{S, FS, FFS, FFFS, ... , FF...FS, ... }

elemento genérico

Exemplos

1- Quando você percorre pela primeira vez uma determinada avenida, a probabilidade de se encontrar um sinal aberto é de 25% (p=0,25). Se você passar pela avenida 5 vezes qual a probabilidade de encontrar o sinal aberto somente na quinta vez?

Exemplos

1- Quando você percorre pela primeira vez uma determinada avenida, a probabilidade de se encontrar um sinal aberto é de 25% (p=0,25). Se você passar pela avenida 5 vezes qual a probabilidade de encontrar o sinal aberto somente na quinta vez?

- Número de vezes para a obtenção do primeiro sucesso (sinal aberto) $\longrightarrow$ *5* (precedem o primeiro sucesso $X=4$)

- $p = 0{,}25$

Exemplos

1- Quando você percorre pela primeira vez uma determinada avenida, a probabilidade de se encontrar um sinal aberto é de 25% (p=0,25). Se você passar pela avenida 5 vezes qual a probabilidade de encontrar o sinal aberto somente na quinta vez?

- Número de vezes para a obtenção do primeiro sucesso (sinal aberto) $\rightarrow$ *5* (precedem o primeiro sucesso $X=4$)

- $p = 0,25$

$$P(X = 4) = 0,25\ (1 - 0,25)^4 = 0,08$$

Exemplos

2 - Faça um estudo da probabilidade do número de lançamentos de um dado para obter pela primeira vez a face com número 1?

Exemplos

2 - Faça um estudo da probabilidade do número de lançamentos de um dado para obter pela primeira vez a face com número 1?

Variando **X**, temos por exemplo:

- Número de vezes para a obtenção do primeiro sucesso **X** = 1
- *p* = 1/6

$$P(\mathbf{X}=1)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{1}=0,1389$$

Exemplos

2 - Faça um estudo da probabilidade do número de lança-mentos de um dado para obter pela primeira vez a face com número 1?

Variando **X**, temos por exemplo:

- Número de vezes para a obtenção do primeiro sucesso **X** = 1

- $p = 1/6$

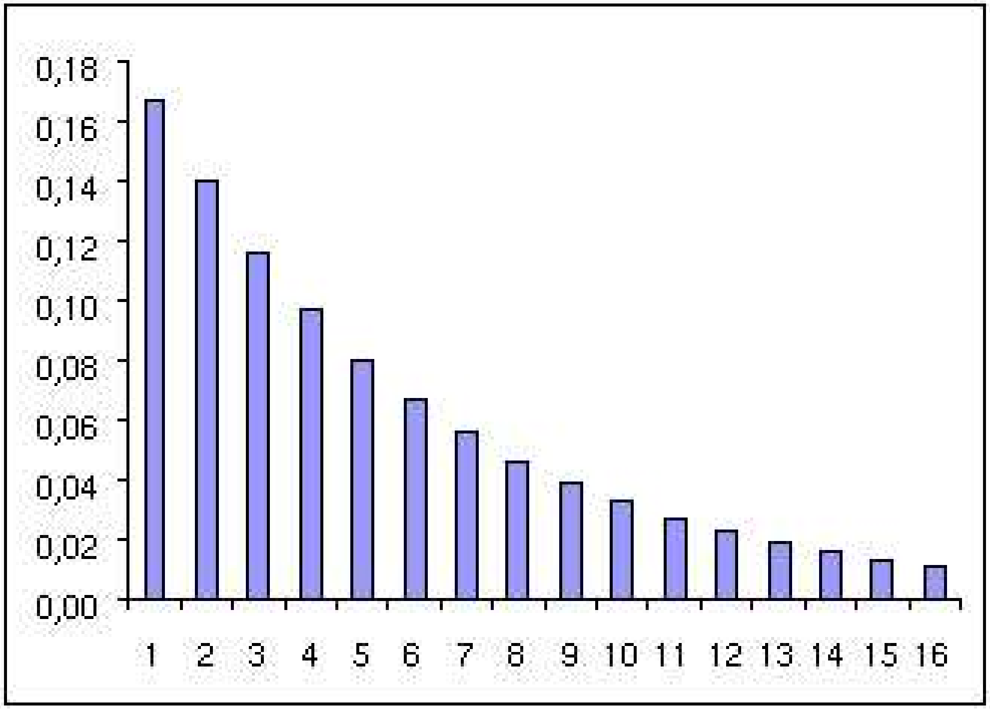
$$P(\mathbf{X}=1)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{1}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{1}=0,1389$$

- Número de vezes que precedem para a obtenção do primeiro sucesso **X** = *5* (face com número 1 da sexta vez)

- $p = 1/6$

$$P(\mathbf{X}=5)=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{6}\right)^{5}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{5}=0,0670$$

sucesso (x+1)	p_i
1	0,1667
2	0,1389
3	0,1157
4	0,0965
5	0,0804
6	0,0670
7	0,0558
8	0,0465
9	0,0388
10	0,0323
11	0,0269
12	0,0224
13	0,0187
14	0,0156
15	0,0130
16	0,0108



5.3.4 Modelo de Poisson

Dizemos que uma variável aleatória $\mathbf{X}$ tem distribuição de Poisson com parâmetro λ, normalmente chamado de taxa de ocorrência, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

Notação utilizada: $\mathbf{X} \sim P_0(\lambda)$, sendo k o número de ocorrências, e λ número médio de ocorrências em um determinado intervalo.

5.3.4 Modelo de Poisson

Dizemos que uma variável aleatória $\mathbf{X}$ tem distribuição de Poisson com parâmetro λ, normalmente chamado de taxa de ocorrência, se sua função de probabilidade é dada por:

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

Notação utilizada: $\mathbf{X} \sim P_0(\lambda)$, sendo k o número de ocorrências, e λ número médio de ocorrências em um determinado intervalo.

No modelo de Poisson a unidade de medida é contínua (tempo, área, ...) e variável aleatória é discreta.

Exemplos:

número de defeitos por cm^2, número de chamadas telefônicas por minuto, clientes por hora, etc.

Exemplos

1- Suponhamos que em um determinado posto de saúde cheguem 4 pessoas por hora e que essa taxa é bem aproximada pela distribuição de Poisson. Determinar a probabilidade de:

i) não chegar ninguém em meia hora;

ii) chegarem 5 pessoas também em meia hora

Exemplos

1- Suponhamos que em um determinado posto de saúde cheguem 4 pessoas por hora e que essa taxa é bem aproximada pela distribuição de Poisson. Determinar a probabilidade de:

i) não chegar ninguém em meia hora;

ii) chegarem 5 pessoas também em meia hora

taxa de ocorrências em meia hora = 2

i) número de ocorrências = 0

ii) número de ocorrências = 5

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

taxa de ocorrências em meia hora => λ = 2

i) número de ocorrências k = 0

$$P(\mathbf{X}=0)=\frac{e^{-2}(2)^0}{0!}=0,14$$

$$P(\mathbf{X} = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

taxa de ocorrências em meia hora => λ = 2

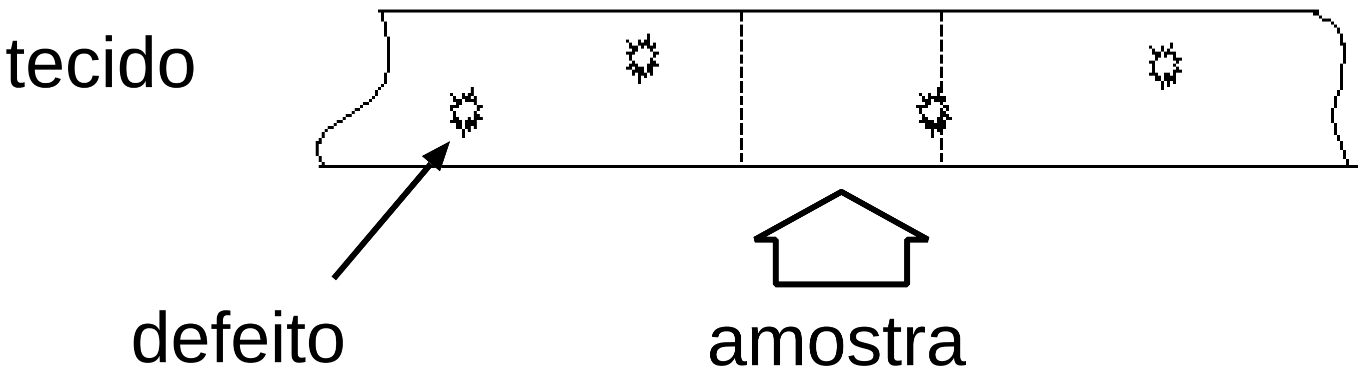
i) número de ocorrências k = 0

$$P(\mathbf{X} = 0) = \frac{e^{-2}(2)^0}{0!} = 0,14$$

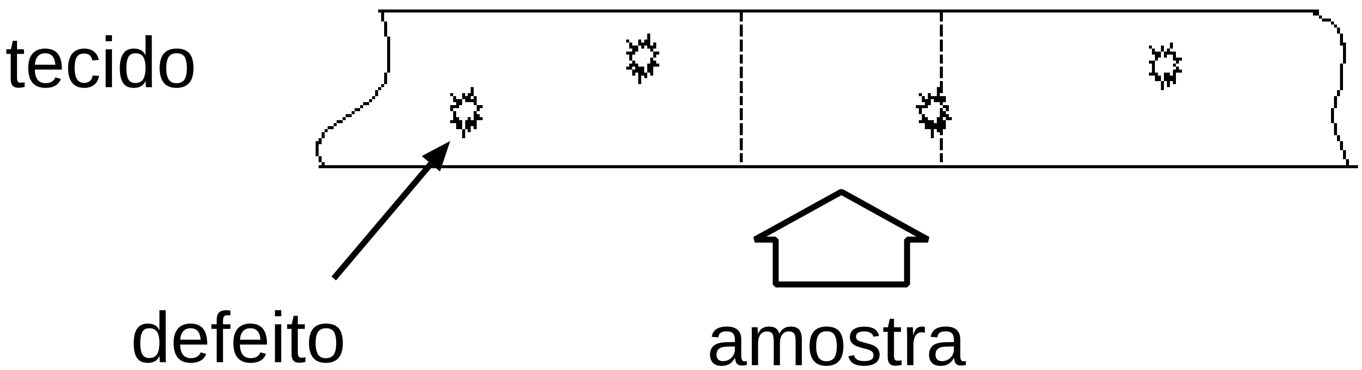
ii) número de ocorrências k = 5

$$P(\mathbf{X} = 5) = \frac{e^{-2}(2)^5}{5!} = 0,04$$

2 - Suponhamos que um tecido fabricado em um determinado tipo de tear apresenta defeitos que podem ser aproximados pela distribuição de Poisson com uma média de 0,2 defeitos por metro quadrado. Determine a probabilidade de que em 6 m^2 existam menos que 2 defeitos.



2 - Suponhamos que um tecido fabricado em um determinado tipo de tear apresenta defeitos que podem ser aproximados pela distribuição de Poisson com uma média de 0,2 defeitos por metro quadrado. Determine a probabilidade de que em 6 m^2 existam menos que 2 defeitos.



Para $k < 2$ e $\lambda = 0{,}2 \times 6 = 1{,}2$

$$P(\mathbf{X} = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Para $k < 2$ e $\lambda = 0{,}2 \times 6 = 1{,}2$

$$P(\mathbf{X} = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \ldots$$

Para k < 2 e λ = 0,2 X 6 = 1,2

$$P(\mathbf{X} < 2) = P(\mathbf{X} = 0) + P(\mathbf{X} = 1)$$

$$P(\mathbf{X} \leq 1) = \frac{e^{1,2}(1,2)^0}{0!} + \frac{e^{1,2}(1,2)^1}{1!}$$

$$P(\mathbf{X} \leq 1) = \frac{0,301 \times 1}{1} + \frac{0,301 \times 1,2}{1} = 0,6622$$

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots$$

Para k < 2 e λ = 0,2 X 6 = 1,2

$$P(\mathbf{X}<2)=P(\mathbf{X}=0)+P(\mathbf{X}=1)$$

$$P(\mathbf{X}\leq 1)=\frac{e^{1,2}(1,2)^0}{0!}+\frac{e^{1,2}(1,2)^1}{1!}$$

$$P(\mathbf{X}\leq 1)=\frac{0,301\times 1}{1}+\frac{0,301\times 1,2}{1}=\boxed{0,6622}$$

3 - Suponhamos que a emissão de partículas radiotivas alfa seja uma variável aleatória seguindo o modelo de Poisson a uma taxa média de ocorrência de 5 partículas por minuto. Calcule a probabilidade de haver mais de 2 emissões por minuto.

Nesse caso, $\lambda = 5$ e $k > 2$

$$P(\mathbf{X} > 2) = \sum_{k=3}^{\infty} P(\mathbf{X} = k)$$

3 - Suponhamos que a emissão de partículas radiotivas alfa seja uma variável aleatória seguindo o modelo de Poisson a uma taxa média de ocorrência de 5 partículas por minuto. Calcule a probabilidade de haver mais de 2 emissões por minuto.

Nesse caso, $\lambda = 5$ e $k > 2$

$$P(\mathbf{X} > 2) = \sum_{k=3}^{\infty} P(\mathbf{X} = k) = \boxed{1 - P(\mathbf{X} \leq 2)}$$

3 - Suponhamos que a emissão de partículas radiotivas alfa seja uma variável aleatória seguindo o modelo de Poisson a uma taxa média de ocorrência de 5 partículas por minuto. Calcule a probabilidade de haver mais de 2 emissões por minuto.

Nesse caso, $\lambda = 5$ e $k > 2$

$$P(\mathbf{X} > 2) = \sum_{k=3}^{\infty} P(\mathbf{X} = k) = \boxed{1 - P(\mathbf{X} \leq 2)}$$

$$P(\mathbf{X} > 2) = 1 - P(\mathbf{X} \leq 2) = 1 - \sum_{\alpha=0}^{2} \frac{e^{-5}5^{\alpha}}{\alpha!}$$

$$P(\mathbf{X} > 2) = 1 - \left(\frac{e^{-5}5^{0}}{0!} + \frac{e^{-5}5^{1}}{1!} + \frac{e^{-5}5^{2}}{2!} \right) = \boxed{0,875}$$

5.3.5 Modelo Hipergeométrico

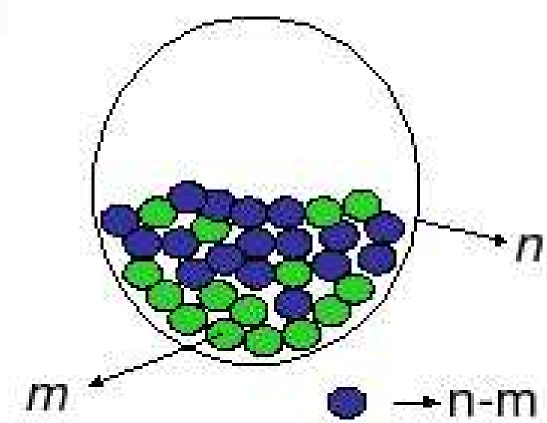
Seja um conjunto de *n* objetos sendo *m* do *tipo I* e *n-m* do *tipo II*. Seja **X** o número de objetos do *tipo I* selecionados por um sorteio de *r* objetos, com $r < n$ feito ao acaso e sem reposição. Dizemos que a variável **X** segue o modelo Hipergeométrico se sua função de probabilidade é dada pela expressão:

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k = max(0, r-(n-m)), \ldots, min(r, m)$$

5.3.5 Modelo Hipergeométrico

Seja um conjunto de *n* objetos sendo *m* do *tipo I* e *n-m* do *tipo II*. Seja **X** o número de objetos do *tipo I* selecionados por um sorteio de *r* objetos, com *r* < *n* feito ao acaso e sem reposição. Dizemos que a variável **X** segue o modelo Hipergeométrico se sua função de probabilidade é dada pela expressão:

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

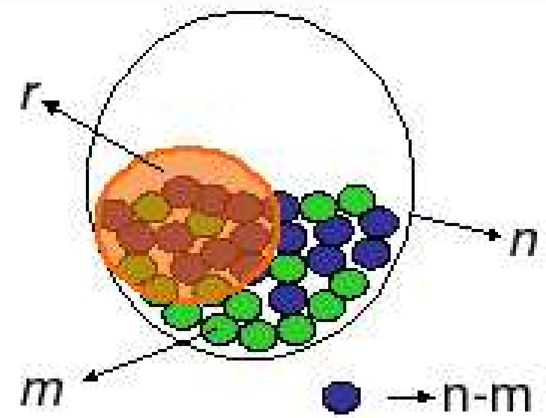


5.3.5 Modelo Hipergeométrico

Seja um conjunto de *n* objetos sendo *m* do *tipo I* e *n-m* do *tipo II*. Seja **X** o número de objetos do *tipo I* selecionados por um sorteio de *r* objetos, com *r* < *n* feito ao acaso e sem reposição. Dizemos que a variável **X** segue o modelo Hipergeométrico se sua função de probabilidade é dada pela expressão:

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k = max(0, r-(n-m)), \ldots, min(r,m)$$

n - população
r - tamanho da amostra
m - sucessos na população
k - sucessos na amostra



Exemplo:

Numa caixa com 10 lâmpadas, 2 são defeituosas. Extraída uma amostra de 4 lâmpadas determine a probabilidade de:

iii) não ter nenhum defeituosa

iv) ter menos de 2 defeituosas

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

Exemplo:

Numa caixa com 10 lâmpadas, 2 são defeituosas. Extraída uma amostra de 4 lâmpadas determine a probabilidade de:

iii) não ter nenhum defeituosa

iv) ter menos de 2 defeituosas

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

$$\boxed{n = 10 \quad r = 4 \qquad m = 2}$$

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-m \\ r-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}}, k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

$n = 10 \quad r = 4 \quad m = 2$

i) k = 0

$$P(\mathbf{X}=0)=\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10-2 \\ 4-0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}=0,333$$

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k = max(0, r-(n-m)), \ldots, min(r,m)$$

$n = 10 \quad r = 4 \quad m = 2$

i) k = 0

$$P(\mathbf{X}=0)=\frac{\binom{2}{0}\binom{10-2}{4-0}}{\binom{10}{4}}=\frac{\binom{2}{0}\binom{8}{4}}{\binom{10}{4}}=0,333$$

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

$\boxed{n = 10 \quad r = 4 \quad m = 2}$

$\boxed{\text{i) } k < 2}$

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}},k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

$n = 10 \quad r = 4 \quad m = 2$

i) k < 2

$$P(\mathbf{X}<2)=P(\mathbf{X}=0)+P(\mathbf{X}=1)$$

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-m \\ r-k \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}}, k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

$\boxed{n = 10 \quad r = 4 \quad m = 2}$

i) k < 2

$$P(\mathbf{X}<2)=P(\mathbf{X}=0)+P(\mathbf{X}=1)$$

$$P(\mathbf{X}<2)=0,333+\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10-2 \\ 4-1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}=0,333+\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}}$$

$$P(\mathbf{X}<2)=0,333+0,533=0,866$$

$$P(\mathbf{X}=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k=max(0,r-(n-m)),\ldots,min(r,m)$$

$n = 10$ $r = 4$ $m = 2$

i) k < 2

$$P(\mathbf{X}<2)=P(\mathbf{X}=0)+P(\mathbf{X}=1)$$

$$P(\mathbf{X}<2)=0,333+\frac{\binom{2}{1}\binom{10-2}{4-1}}{\binom{10}{4}}=0,333+\frac{\binom{2}{1}\binom{8}{3}}{\binom{10}{4}}$$

$$P(\mathbf{X}<2)=0,333+0,533=0,866$$

Aula 5

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho
Regina Célia Paula Leal Toledo

Variáveis aleatórias discretas

Conteúdo:

5.1 Função discreta de probabilidade

5.2 Função de distribuição de probabilidade

5.3 Alguns modelos discretos

- 5.3.1 Modelo uniforme discreto
- 5.3.2 Modelo Binomial
- 5.3.3 Modelo geométrico
- 5.3.4 Modelo de Poisson
- 5.3.5 Modelos Hipergeométrico