Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 2° semestre de 2011
GABARITO

Nome :

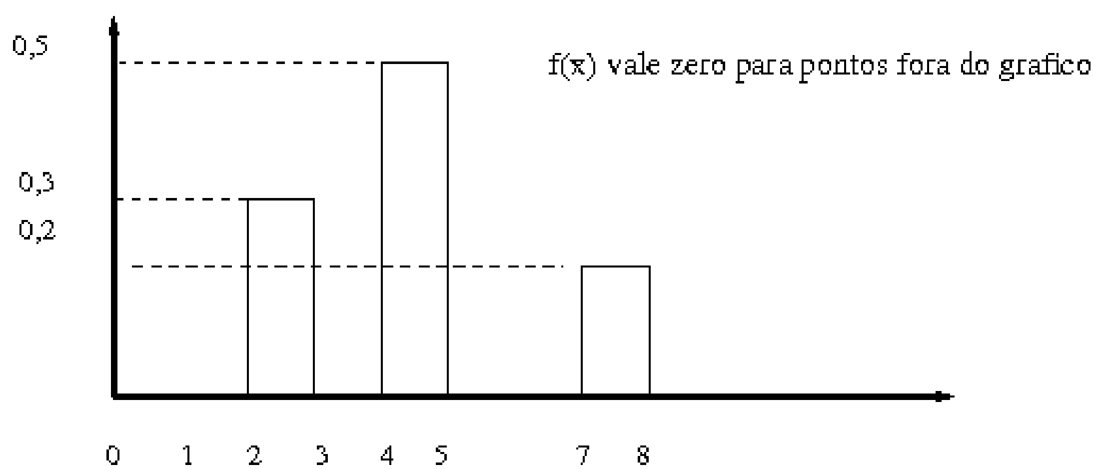
Assinatura :

Observações:

(i) A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal.
(ii) É permitido o uso de máquina de calcular.
(iii) Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
(iv) Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
(v) Você pode usar lápis para responder as questões.
(vi) Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível;
(vii) Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
(viii) Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 - Primeira questão (2,0 pontos)
A figura abaixo expressa uma função.



a) Demonstre que esta função é uma distribuição de probabilidade; (0,5)

Resolução:
Verificamos diretamente que a função é não negativa. Falta, então, verificarmos se a integral da função é igual a 1. A área total é a soma da área de três retângulos, todos de base 1 e alturas 0,2; 0,3 e 0,5. Assim a área total será a soma das alturas multiplicadas pelo tamanho da base que dá 1.

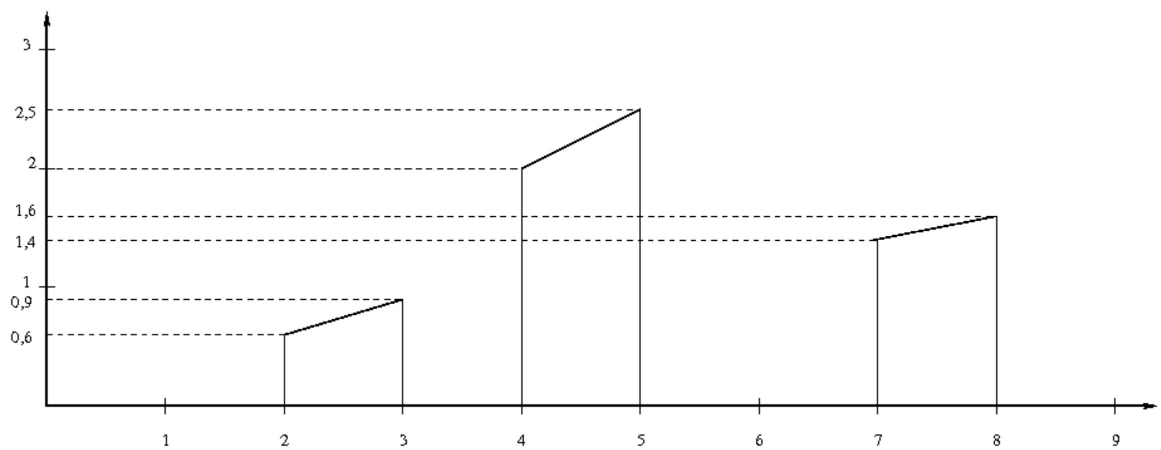
b) Calcule a média da distribuição; (1,0)
Resolução:
A definição da média é dada por

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

onde a função f(x) aqui apresentada é a distribuição de probabilidade. No nosso caso teremos

$$\mu=\int_{2}^{3} 0{,}3\, x\, dx+\int_{4}^{5} 0{,}5\, x\, dx \int_{7}^{8} 0{,}2\, x\, dx$$

que em termos gráficos corresponde à área sob os trapézios da figura abaixo



onde os valores foram obtidos diretamente das retas dadas dentro dos integrando acima.

Pela integral teremos

$$\mu=\frac{0{,}3}{2}\left(x^2\right)\Big|_2^3+\frac{0{,}5}{2}\left(x^2\right)\Big|_4^5+\frac{0{,}2}{2}\left(x^2\right)\Big|_7^8=0{,}15\times(9-4)+0{,}25\times(25-16)+0{,}1\times(64-49)$$

ou seja,

$$\mu=0{,}75+2{,}25+1{,}5=4{,}5 \quad .$$

Pelas áreas dos trapézios teremos a soma das seguintes áreas

$$1\times\frac{0,9+0,6}{2}+1\times\frac{2,5+2}{2}+1\times\frac{1,6+1,4}{2}=0,75+2,25+1,5=4,5 \quad .$$

c) Calcule a moda da distribuição. (0,5)

Resolução:

A moda é onde a probabilidade é máxima, ou seja, a distribuição é multimodal pois todos os pontos entre 4 e 5 tem esta probabilidade máxima.

2 – Segunda questão (1,5 pontos)

Um fabricante está preocupado com os custos do serviço de garantia de suas linhas de estantes metálicas que são garantidas contra ferrugem por 3 anos. O modelo típico nestes casos é o Exponencial. Em uma linha foi avaliado que o parâmetro α seria igual a 1/80, em outra $\alpha=1/120$ e numa terceira linha $\alpha=1/210$. Calcule as probabilidades que apareça ferrugem ao fim de 1 ano, para cada uma das linhas de montagem.

Resolução:

A probabilidade da distribuição Exponencial é dada por

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{\alpha a}-e^{\alpha b}. \quad .$$

Assim, para cada um dos casos teremos

$\alpha=1/80$ **)** $P(X<1)=e^{-0/80}-e^{-1/80}=1-0,9875=0,0125$ **ou 1,25%**

$\alpha=1/120$ **)** $P(X<1)=e^{-0/120}-e^{-1/120}=1-0,9917=0,0083$ **ou 0,83%**

$\alpha=1/210$ **)** $P(X<1)=e^{-0/210}-e^{-1/210}=1-0,9952=0,0048$ **ou 0,48%**

3 – Terceira questão (2,5 pontos)

Calcule das seguintes probabilidades dado que a distribuição é distribuição Normal, a média tem o valor 18,4 e a variância 9,61.

Resolução:

Usaremos diretamente as fórmulas

$$P(a\le X\le b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ou ainda

$$P(X>a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \quad .$$

No nosso caso $\sigma^2=9,61\Rightarrow\sigma=\sqrt{9,61}=3,1$

a) $P(X>18)$; (0,5)

Resolução:

$$P(X>18)=P\left(Z>\frac{18-18{,}4}{3{,}1}\right)\approx P(Z>-0{,}13)=0{,}5+P(Z<0{,}13)=0{,}5+0{,}0515=0{,}5517$$

b) $P(X<18)$; (0,5)

Resolução:

Por complementaridade temos que

$$P(X<18)=1-P(X>18)=1-0{,}5517=0{,}4483$$

c) $P(17{,}2<X<19{,}3)$; (0,5)

Resolução:

$$P(17{,}2<X<19{,}3)=P\left(\frac{17{,}2-18{,}4}{3{,}1}<Z<\frac{19{,}3-18{,}4}{3{,}1}\right)\approx P(-0{,}39<Z<0{,}29)$$

ou

$$P(17{,}2<X<19{,}3)=P(Z<0{,}39)+P(Z<0{,}29)=0{,}1517+0{,}1141=0{,}2658$$

d) $1-P(X<17)$; (0,5)

Resolução:

$$1-P(X<17)=1-P\left(Z<\frac{17-18{,}4}{3{,}1}\right)\approx 1-P(Z>-0{,}45)=1-0{,}5+P(Z<0{,}45)$$

ou

$$1-P(X<17)=0{,}5+0{,}1736=0{,}6736$$

e) $P(19<X<25)$ (0,5).

Resolução:

$$P(19<X<25)=P\left(\frac{19-18{,}4}{3{,}1}<Z<\frac{25-18{,}4}{3{,}1}\right)\approx P(0{,}19<Z<2{,}13)$$

ou

$$P(19<X<25)=-0{,}0753+0{,}4834=0{,}4081 \quad \textbf{.}$$

4 - Quarta questão (2,0 pontos)

Numa indústria verificou-se que a distribuição de probabilidade de um parâmetro de uma peça em produção era aproximadamente linear e dada por

$$f(x)=\frac{1}{9}x-\frac{1}{6}$$

no intervalo [3, 6], supondo que a probabilidade é nula fora deste intervalo. Calcule a probabilidade de encontrarmos as peças com o parâmetro:

Resolução:

Calculamos a probabilidade de uma situação ocorrer de acordo com uma distribuição da seguinte forma

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)\,dx \quad .$$

No caso particular desta questão será

$$P(a<X<b)=\int_a^b \left(\frac{1}{9}x-\frac{1}{6}\right)dx$$

dentro do intervalo [3,6]. Desenvolvendo a integral teremos

$$P(a<X<b)=\int_a^b \left(\frac{1}{9}x-\frac{1}{6}\right)dx=\frac{1}{18}x^2|_a^b\frac{1}{6}x|_a^b=\frac{b^2-a^2}{18}-\frac{b-a}{6}=\frac{b-a}{6}\left(\frac{b+a}{3}-1\right) \quad .$$

a)menor que 5; (0,5)

Resolução:

$$P(3<X<5)=\frac{5-3}{6}\left(\frac{3+5}{3}-1\right)=\frac{2}{6}\left(\frac{8}{3}-1\right)=\frac{1}{3}\frac{5}{3}=\frac{5}{9} \quad .$$

b)maior que 4 e menor que 6; (0,5)

Resolução:

$$P(4<X<6)=\frac{6-4}{6}\left(\frac{6+4}{3}-1\right)=\frac{2}{6}\left(\frac{10}{3}-1\right)=\frac{1}{3}\frac{7}{3}=\frac{7}{9} \quad .$$

c)a soma das probabilidades que o parâmetro esteja nos intervalos [3,5; 4] e [5,3; 6]. (1,0)

Resolução:

$$P(3{,}5<X<4)+P(5{,}3<X<6)=\frac{4-3{,}5}{6}\left(\frac{4+3{,}5}{3}-1\right)+\frac{6-5{,}3}{6}\left(\frac{6+5{,}3}{3}-1\right)$$

ou

$$P(3{,}5<X<4)+P(5{,}3<X<6)=\frac{1}{12}(2{,}5-1)+\frac{7}{70}(3{,}76666-1)=0{,}27666 \quad .$$

Esta questão poderia ser feita observando que a distribuição de probabilidade forma um trapézio. Assim, usando a fórmula da área do trapézio, as probabilidades poderiam ser calculadas.

5 - Quinta questão (2,0 pontos)

Numa região, num determinado ano, foi medida a precipitação pluviométrica e se achou o valor 1300 milímetros de chuva. São desconhecidas a média e variância para esta região mas, por analogia à regiões semelhantes, sabemos que a variância é de 97969 mm^2. Por uma série de problemas técnicos, só foram feitas 30 medidas. Calcule o intervalo de confiança para a média verdadeira com coeficiente de confiança de 90%.

Resolução:

A fórmula para o intervalo de confiança é

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] .$$

Para esta questão os parâmetros são

$$\bar{X}=1300 \qquad z_{\gamma/2}=z_{0,45}=1,64 \;\; ; \;\; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{97969}}{\sqrt{30}}\approx\frac{313}{5,477}\approx 57,148 .$$

Assim teremos o seguinte resultado

$$IC(1300;0,9)=[1300-1,64\times 57,148;1300+1,64\times 57,148]=[1206,2;1393,7] .$$