Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística
AP3 1° semestre de 2015
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Primeira questão (2,5 pontos)
Em uma prova de múltipla escolha, cada questão tem 5 alternativas, sendo que apenas uma delas é correta. José é um aluno mediano que estudou e se sente seguro, em 60% do conteúdo definido para essa prova. Ao não saber a resposta de uma questão, José "chuta" aleatoriamente uma resposta qualquer, entre as possíveis escolhas. Em uma prova com 5 questões, qual será a chance de José acertar uma dessas 5 questões, escolhida aleatoriamente? E qual a chance dele acertar exatamente 3 questões?
Resolução:
Sem saber se ele domina o assunto precisamos encontrar a chance que ele tem de acertar umas das 5 questões. Consideremos os eventos:

A – acertar;
S – saber conteúdo;
NS – não saber o conteúdo e chutar uma das alternativas.

Assumimos que se ele souber o assunto, terá 100% de chance de acertar a questão e se ele chutar a resposta, terá 20% de chance de estar correto.

Teorema da Probabilidade Total:

P(A) = P(S) . P(A|S) + P(NS) . P(A|NS)
P(A) = 0,6 . 1,0 + 0,4 . 0,2 = 0,68
→ *P(A) = 0,68.*

- Para saber a chance do aluno acertar exatamente 3 questões sabemos a probabilidade do aluno acertar um questão, logo:

$$P(A=3)=\binom{5}{3}(0{,}68)^3(1-0{,}68)^3 = 10\times 0{,}314432\times 0{,}1024 = 0{,}321978$$
$$\rightarrow P(A=3)=0{,}321978$$

Segunda questão (1,5 pontos)
No lançamento simultâneo de dois dados, se as faces mostrarem números diferentes, qual é a probabilidade de que uma das faces seja a de número 6?
Resolução:
Consideremos os eventos:
S = sair pelo menos uma face 6
D = saírem duas faces diferentes

Podemos utilizar o teorema de Bayes, e determinar:
$$P(S|D)=\frac{P(S).P(D|S)}{P(D)}$$

- Das 36 possibilidades de combinação de faces dos 2 dados, temos que em 11 delas pode aparecer o 6, então, P(S) = 11/36 = 0,305556.
- P(D|S) é a probabilidade de saírem duas faces diferentes, dado que saiu pelo menos uma face 6. Então, das 11 possibilidades descritas anteriormente, apenas uma deve ser excluída, que é a que apresenta as duas faces 6. Logo: P(D|S) = 10/11 = 0,909091.
- Da mesma forma, dessas 36 combinações das faces dos 2 dados, existem 6 possibilidades das faces serem iguais, ou 30 de serem diferentes. Então, P(D) = 30/36 = 0,83333.

Logo,

$$P(S|D) = \frac{P(S).P(D|S)}{P(D)} = \frac{0{,}305556 \times 0{,}909091}{0{,}83333} = 0{,}33333$$

Terceira questão (1,0 pontos)
No fichário de um hospital, estão arquivados os prontuários de 20 pacientes que deram entrada no Pronto Socorro apresentando algum problema cardíaco. Destes 5 sofreram infarto. Se retirarmos uma amostra ao acaso de 3 destes prontuários, qual a probabilidade de que dois deles sejam de pacientes que sofreram infarto?
Resolução:
Neste caso devemos utilizar o modelo hipergeométrico com n = 20; m = 5; r = 3; k = 2.

$$P(X=2) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{5}{2}\binom{20-5}{3-2}}{\binom{20}{3}} = \frac{10 \times 15}{1140} \approx 0{,}1315 \quad .$$

Quarta questão (2,5 pontos)
Uma indústria buscava avaliar os custos de tempo de trabalho no setor de manutenção de uma de suas novas filiais. Como a fábrica era nova, eram desconhecidas a média e a variância do tempo de manutenção. Depois de algumas semanas foi constatado uma média de tempo de manutenção de 8,4 horas em 52 equipamentos. O mesmo setor nas outras filiais sugeria um desvio padrão de 1,44 horas. Faça as hipóteses cabíveis e calcule qual é o intervalo de confiança da média com coeficiente de confiança igual a 85%.
Resolução:
Suporemos que possamos usar a distribuição Normal. Feito isto, apliquemos

$$IC(\mu,\gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

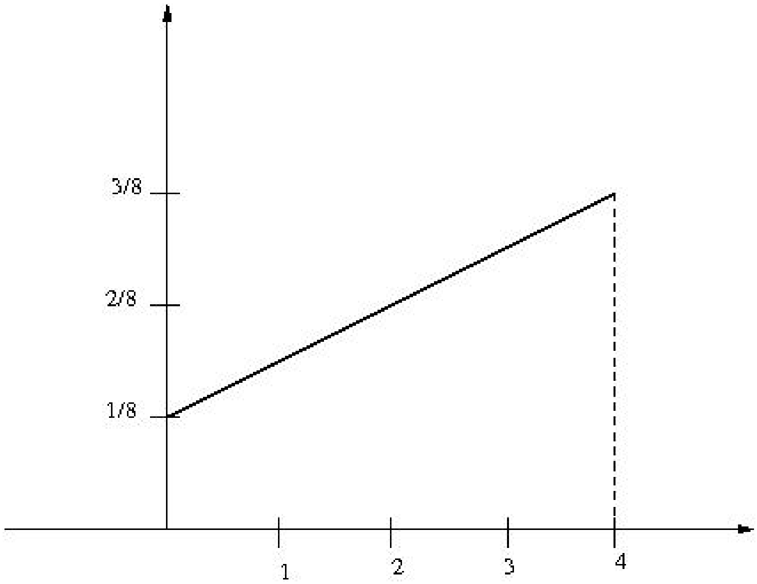
sabendo que

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}44}{\sqrt{52}} \approx \frac{1{,}44}{7{,}2111} \approx 0{,}1997 \quad \text{e} \quad z_{0,85/2} = z_{0,425} = 1{,}44 \quad .$$

Teremos

$$IC(8{,}4;0{,}85) = [8{,}4 - 1{,}44 \times 0{,}1997 ; 8{,}4 + 1{,}44 \times 0{,}1997] \approx [8{,}11 ; 8{,}69] \quad .$$

Quinta questão (2,5 pontos)
A figura abaixo apresenta uma distribuição de probabilidades (as escalas não são proporcionais) com a distribuição valendo zero para x < 0 e x > 4. Calcule quais são os valores, relativos à esta distribuição, solicitados nos itens a, b, c, d, e.



Resolução:
A probabilidade (dada uma distribuição de probabilidade $f(x)$) é **calculada como**

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \;.$$

Vamos obter a equação da distribuição, que sabemos ser uma reta que toma os valores 1/8 em x = 0 e 3/8 em x = 4. Como a equação de uma reta pode ser escrita como

$$y = a + b\,x \;,$$

do valor da função em x = 0 tiramos que a = 1/8. Usemos o segundo valor

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{8} + b\,4 \Rightarrow b = \frac{1}{16} \;,$$

ou seja,

$$y = \frac{x+2}{16} \;.$$

a) P(X > 2);
Resolução:

$$P(X>2) = \int_2^4 \frac{x+2}{16}dx = \frac{1}{16}\left(\int_2^4 xdx + 2\int_2^4 dx\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_2^4 + 2x\Big|_2^4\right) = \frac{1}{16}\left[\frac{1}{2}\left(4^2 - 2^2\right) + 2(4-2)\right]$$

$$P(X>2) = \frac{10}{16} = 0{,}625 \;.$$

Repare que esta questão também pode ser feita usando a fórmula da área de um trapézio.

b) P(X < 3);
Resolução:

$$P(X<3)=\int_0^3 \frac{x+2}{16}dx=\frac{1}{16}\left(\int_0^3 xdx+2\int_0^3 dx\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^3+2x\Big|_0^3\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\times 3^2+2\times 3\right)=\frac{21}{32}=0,65625$$

Novamente poderíamos usar a fórmula da área do trapézio.

c) Valor médio;
Resolução:
Por definição

$$\mu=\int_a^b x f(x)dx$$

,

portanto,

$$\mu=\int_0^4 x\frac{x+2}{16}dx=\frac{1}{16}\left(\int_0^4 x^2dx+2\int_0^4 xdx\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^4+2\frac{x^2}{2}\Big|_0^4\right)=\frac{1}{16}\left[\frac{4^3}{3}+4^2\right]=\frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}=2,3333 \ .$$

d) Variância;
Da definição de variância temos

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2$$

.

Calculemos a integral

$$\int_0^4 x^2\frac{x+2}{16}dx=\frac{1}{16}\left(\int_0^4 x^3dx+2\int_0^4 x^2dx\right)=\frac{1}{16}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^4+2\frac{x^3}{3}\Big|_0^4\right)=\frac{1}{16}\left[\frac{4^4}{4}+\frac{2}{3}4^3\right]=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}=6,6666$$

Feito isto, calculemos a variância

$$\sigma^2=\int_a^b x^2 f(x)dx-\mu^2=\frac{20}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{20}{3}-\frac{49}{9}=\frac{11}{9}\approx 1,2222 \ .$$

e) Moda.
Resolução:
A moda é onde a probabilidade é máxima. Basta observar a figura para verificarmos que o ponto onde a probabilidade é máxima é 4.

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.

Algumas fórmulas

$$\mu_X = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i$$

$$\bar{x}_{obs} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} n_i x_i$$

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 p_i}$$

$$P(A \mid B) \equiv \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(X=xj)= 1/k, \quad j=1,2,\ldots,k$

$$P(X = x_k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}, k = 0,1,..,n$$

$P(X = k) = p\,(1-p)^k$ com $0 \le p \le 1$ e $k = 1,2, \ldots.$

$$P(X = x) = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1$$

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j).P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B \mid A_i)}$$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,\ldots$$

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}, k = \max(0, r-(n-m)), \ldots, \min(r,m)$$