Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística
Gabarito da AD1/2° semestre de 2009

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Questão 1:
A tabela abaixo apresenta os números de vendas de geladeira, lavadoras de roupas, fogões, TVs LCD e aparelhos de DVDs, entre 2005 a 2008.

Vendas de Eletrodomésticos					
Mês/ano	**geladeiras**	**lavadoras**	**fogões**	**TVs LCD**	**DVDs**
jan/05	150.798	15.075	141.005	206.378	61.362
fev/05	162.679	33.565	162.577	268.109	60.014
mar/05	199.875	45.474	221.470	408.078	83.627
abr/05	187.905	48.309	205.879	489.100	100.425
mai/05	160.233	43.202	225.083	492.904	118.988
jun/05	168.706	42.225	209.042	485.481	100.226
jul/05	171.730	58.589	250.754	431.078	106.890
ago/05	233.654	66.708	363.014	512.497	130.829
set/05	251.172	74.765	316.472	464.617	123.063
out/05	255.832	72.499	331.435	448.606	117.854
nov/05	244.333	60.532	312.130	428.610	141.791
dez/05	204.374	63.339	351.772	347.545	88.191
jan/06	231.318	50.646	349.070	341.649	05.014
fev/06	200.623	57..307	309.084	371.106	121.393
mar/06	255.939	60.747	330.372	428.629	150.662
abr/06	228.047	68.054	315.706	476.007	160.551
mai/06	270.613	51.482	323.254	423.731	115.801
jun/06	236.374	65.247	290.155	480.058	146.067
jul/06	243.939	62.219	277.012	523.281	156.076
ago/06	275.131	54.793	332.217	597.674	190.917
set/06	236.307	46.687	310.523	522.455	160.839
out/06	268.823	71.862	352.471	678.611	221.914
nov/06	326.552	71.306	361.066	728.480	247.511
dez/06	257.492	48.091	355.907	405.202	156.050
jan/07	286.190	50.563	205.542	405.763	158.978
fev/07	303.044	69.332	316.906	556.772	163.600
mar/07	308.245	71.037	358.610	687.416	200.493
abr/07	334.305	87.509	329.992	676.111	243.869
mai/07	330.866	89.138	393.820	786.729	221.230
jun/07	305.867	99.074	310.565	761.699	237.365
jul/07	292.781	106.692	383.068	837.226	263.312
ago/07	320.816	117.439	305.500	793.999	265.646
set/07	397.509	112.488	392.551	838.246	206.628
out/07	424.273	117.465	424.572	798.103	252.976
nov/07	417.500	103.879	411.044	828.243	267.426
dez/07	320.669	65.939	380.551	482.331	133.046
jan/08	341.368	63..320	307.021	503.004	141.070
fev/08	353.932	80.753	299.073	669.153	160.426
mar/08	356.112	93.728	356.103	788.617	256.268
abr/08	337.977	119.239	399.151	723.754	245.752

mai/08	276.085	110.308	369.737	707.380	231.058
jun/08	187.069	122.237	335.706	644.413	223.469
jul/08	261.024	107.679	366.600	706.259	230.482
ago/08	284.075	76.772	318.086	692.656	241.537
set/08	311.676	78.064	316.061	703.582	222.230
out/08	351.607	83..409	350.532	679.785	230.007
nov/08	320.719	63.368	238.837	445.511	104.085
dez/08	336.651	60.720	263.609	571.810	162.211

a) Calcule a média, mediana, o desvio padrão e a variância de cada conjunto de dados nestes 4 anos. Verifique qual teve maior variação de desvio padrão neste período.

<u>Solução</u>:

Ver planilha gabarito

b) Considere as vendas anuais e calcule a freqüência relativa de cada mês. Faça gráficos e verifique se, neste 4 anos, em algum mês há uma tendência regular de maior saída de cada um dos produtos.

<u>Solução</u>:

Ver planilha gabarito

<u>OBS</u>.: esta tabela estará disponível na plataforma para facilitar que você faça os cálculos.

Questão 2:
Você está em uma festa onde há uma promoção onde uma operadora de telefones celular, está fornecendo 6 meses de ligações gratuitas para quem optar por mudar para esta operadora. Existem 80 pessoas nesta festa e delas, 50 já utilizam esta operadora e portanto não estão interessadas nesta promoção. A operadora seleciona aleatoriamente 5 participantes. Qual a probabilidade de 3 ou mais participantes se interessarem por esta promoção (isto é, 3 ou mais não utilizarem esta operadora)?

<u>Solução</u>:

Nossa população tem tamanho N = 80 pessoas

Temos que o número de pessoas que não possuem o celular da operadora é dado por: r= 80-50 = 30 pessoas.

É retirada uma amostra de 5 pessoas, sem reposição.

Definamos X = número de pessoas na amostra que se interessam pela promoção.

Vamos calcular:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\}$$

Neste caso temos uma amostragem sem reposição, que segue o modelo hipergeométrico abaixo:

$$P(X = x) = \frac{\binom{30}{x}\binom{50}{5-x}}{\binom{80}{5}}$$

Substituindo X *= 0, 1 e 2* temos:

$$P(X = 0) = \frac{(1)(2118760)}{24040016} = 0{,}0881 = 8{,}81\%$$

$$P(X = 1) = \frac{(30)(230300)}{24040016} = 0{,}2874 = 28{,}74\%$$

$$P(X = 2) = \frac{(435)(19600)}{24040016} = 0{,}3547 = 35{,}47\%$$

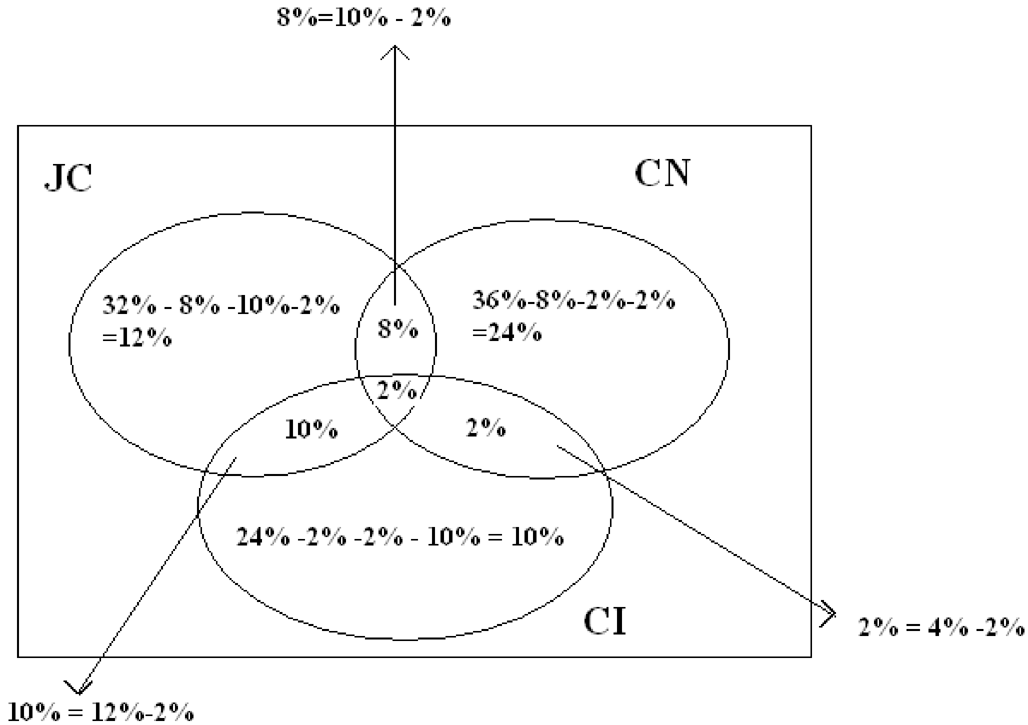
Portanto

$$P(X \geq 3) = 1 - \{0{,}0881 + 0{,}2874 + 0{,}3547\} = 1 - 0{,}7302 = 0{,}2698 = 26{,}98\%$$

Questão 3:
A cidade de Cajuzinho tem 3 jornais locais: Jornal da Cidade (JC), Cajuzinho Noticias (CN) e Caju Informa (CI). Uma pesquisa feita com leitores adultos revelou que:
32% dos adultos lêem JC;
36% dos adultos lêem CN;
24% dos adultos lêem CI;
12% lêem JC e CI;
10% lêem JC e CN;
4% lêem CI e CN;
2% lêem os 3 jornais.

SOLUÇÃO:

Observemos o diagrama de Venn:



Para um leitor adulto escolhido aleatoriamente, calcule as seguintes probabilidades:
a) De que ele não leia qualquer jornal;

SOLUÇÃO (cont.):
Observe que, para esse caso, basta subtrairmos da população total (1) os indivíduos que lêem, pelo menos, algum jornal (soma de todos os valores no diagrama de Venn). Assim,

$$P(x=0) = 1 - (0,12 + 0,24 + 0,10 + 0,08 + 0,10 + 0,02 + 0,02) = 0,32$$

b) De que ele leia exatamente 1 jornal;

SOLUÇÃO (cont.):
Nesse caso, somemos os valores que estão exclusivamente nos conjuntos CI, CN e JC:

$P(x=1) = 0,12 + 0,24 + 0,10 = 0,46$

Questão 4:
Nesta última semana você usou os cartões que você tem de 3 diferentes bancos (A, B e C) para retirar dinheiro em caixas eletrônicos. Descobriu que uma das notas sacadas neste período era falsa. A polícia afirma que a probabilidade de encontrar uma nota falsa é 1%. O banco A diz que a probabilidade de uma nota falsa dado que o dinheiro foi retirado de um dos seus caixas eletrônicos é 0.2%. Os bancos B e C afirmam que estas probabilidades para os seus caixas eletrônicos são, respectivamente, 0.1% e 0.05%. Você recebeu uma nota falsa. Qual a probabilidade dela ter vindo do caixa eletrônico do banco A? E do banco B? E do banco C?

SOLUÇÃO:

Definamos o evento de encontrar uma nota falsa pelo conjunto F.
F = {evento encontrar nota falsa}.

Sabemos que:
P(F) = 1%
P(F|A) =0,2%
P(F|B) = 0,1%
P(F|C) = 0,05%

Queremos calcular P(A|F), P(B|F) e P(C|F).

$$P(A|F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)}$$

Observe que não conhecemos P(A), P(B) e P(C). Assim, deixaremos os cálculos em função de P(A), P(B) e P(C).

$$P(A|F) = \frac{P(F|A)P(A)}{P(F)} = \frac{\left(\frac{0,2}{100}\right)(P_A)}{\frac{1}{100}} = \frac{2P_A}{10}$$

Analogamente,

$$P(B|F) = \frac{P(F|B)P(B)}{P(F)} = \frac{\left(\frac{0,1}{100}\right)(P_A)}{\frac{1}{100}} = \frac{P_B}{10}$$

e, sabendo que P(C) = 1 - P(A) - P(B) temos:

$$P(C|F) = \frac{P(F|C)P(C)}{P(F)} = \frac{\left(\frac{0,05}{100}\right)(P_C)}{\frac{1}{100}} = \frac{1 - P_A - P_B}{20}$$

A soma dessas probabilidades deve ser 1, portanto:

$$\frac{2P_A}{10} + \frac{P_B}{10} + \frac{1 - P_A - P_B}{20} = 1$$

Isto é:

$$3P_A + P_B = 19$$

Observando que P_A e P_B são probabilidades e por definição estão no intervalo [0,1] segue que não existem valores para P_A e P_B de forma que $3P_A + P_B = 19$.

Questão 5:
Um concurso para um emprego público consiste de 100 questões de múltipla escolha, cada uma com 5 respostas possíveis. Em cada questão, apenas uma resposta é correta. Para uma pessoa passar ela tem que acertar 35 ou mais questões. Pergunta-se:

a) Qual a probabilidade de que uma pessoa que "chute" todas as questões passe?

SOLUÇÃO:

Observe que é um problema modelado pela distribuição binomial com probabilidade de acerto p=1/5 =0,2 e repetida um número fixo de vezes (100 vezes).

$$P(X=x)=\binom{100}{x}(0.2)^x(0.8)^{100-x}$$

Assim,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 35)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=35)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=36)+\cdots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=100)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 35)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}<35)=\ 1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\leq 34)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 35)=1-\{\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\cdots+\mathrm{P}(\mathrm{X}=34)\}$$

Pelo modelo de distribuição binomial dado temos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=\binom{100}{0}(0{,}2)^0(0{,}8)^{100-0}=2{,}037035976\mathrm{X}10^{-10}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=\binom{100}{1}(0{,}2)^1(0{,}8)^{100-1}=0{,}5\mathrm{X}10^{-8}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=\binom{100}{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^{100-2}=0{,}63\mathrm{X}10^{-7}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=\binom{100}{3}(0{,}2)^3(0{,}8)^{100-3}=0{,}514\mathrm{X}10^{-6}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=\binom{100}{4}(0{,}2)^4(0{,}8)^{100-4}=0{,}312\mathrm{X}10^{-5}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=\binom{100}{5}(0{,}2)^5(0{,}8)^{100-5}=0{,}14976\mathrm{X}10^{-4}$$

....

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=17)=\binom{100}{17}(0{,}2)^{17}(0{,}8)^{100-17}=0{,}0789$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=18)=\binom{100}{18}(0{,}2)^{18}(0{,}8)^{100-18}=0{,}0909$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=19)=\binom{100}{19}(0{,}2)^{19}(0{,}8)^{100-19}=0{,}0981$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=20)=\binom{100}{20}(0{,}2)^{20}(0{,}8)^{100-20}=0{,}0993$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=21)=\binom{100}{21}(0{,}2)^{21}(0{,}8)^{100-21}=0{,}0946$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=22)=\binom{100}{22}(0{,}2)^{22}(0{,}8)^{100-22}=0{,}0849$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=23)=\binom{100}{23}(0{,}2)^{23}(0{,}8)^{100-23}=0{,}072$$

$$\mathrm{P(X = 24)} = \binom{100}{24}(0{,}2)^{24}(0{,}8)^{100-24} = 0{,}0577$$

$$\mathrm{P(X = 25)} = \binom{100}{25}(0{,}2)^{25}(0{,}8)^{100-25} = 0{,}0439$$

....

$$\mathrm{P(X = 30)} = \binom{100}{30}(0{,}2)^{30}(0{,}8)^{100-30} = 0{,}005189643$$

$$\mathrm{P(X = 31)} = \binom{100}{31}(0{,}2)^{31}(0{,}8)^{100-31} = 0{,}002929637$$

$$\mathrm{P(X = 32)} = \binom{100}{32}(0{,}2)^{32}(0{,}8)^{100-32} = 0{,}001579257$$

$$\mathrm{P(X = 33)} = \binom{100}{33}(0{,}2)^{33}(0{,}8)^{100-33} = 0{,}000813556$$

$$\mathrm{P(X = 34)} = \binom{100}{34}(0{,}2)^{34}(0{,}8)^{100-34} = 0{,}000400796$$

Fazendo o calculo de todas essas probabilidades e depois somando os resultados obtemos ~0,9997= 99,97%

Portanto,

$$P(X \geq 35) = 1 - \{P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = 34)\}$$

$$\mathrm{P(X \geq 35)} = 1 - 0{,}9997 = 0{,}0003 = 0{,}03\%$$

b) Qual a probabilidade desta pessoa acertar entre 17 e 25 (incluindo 17 e 25) questões?

<u>SOLUÇÃO:</u>

$$P(17 \leq\ X \leq\ 25) = P(X = 17) + P(X = 18) + \cdots + P(X = 25) = 0{,}7203 = 72.03\%$$

c) Qual o número esperado de questões certas para uma pessoa que “chute” todas as questões?

<u>SOLUÇÃO:</u>

Para o caso de modelo binomial, temos que a esperança (valor esperado) é dado pela seguinte expressão:

$$E(X) = np = (100)\left(\frac{1}{5}\right) = 20.$$

Assim podemos concluir que o número esperado de questões certas para uma pessoa que chutou todas as respostas é igual a 20 questões.

Questão 6:
Um conjunto de 40 lâmpadas é produzido e depois inspecionado usando-se o seguinte procedimento: toma-se uma amostra aleatória de 5 lâmpadas. Se pelo menos 4 destas lâmpadas acendem, o lote de 40 lâmpadas é aceito. Do contrário o lote é rejeitado. Suponha que existem 8 lâmpadas defeituosas dentre as 40 produzidas. Qual a probabilidade do lote ser aceito:

SOLUÇÃO:

Para que o lote seja aceito, no máximo uma lâmpada do lote pode ser defeituosa, ou seja, podem existir zero ou uma lâmpada defeituosa no lote. Seja X o número de lâmpadas defeituosas no lote. Precisamos calcular

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

a) Usando-se amostragem sem reposição;

SOLUÇÃO (cont.):

Nesse caso temos o modelo hipergeométrico na forma:

$$P(X = x) = \frac{\binom{8}{x}\binom{32}{5-x}}{\binom{40}{5}}$$

Assim, para *X=0 e X=1* temos:

$$P(X = 0) = \frac{(1)(201376)}{(658008)} = 0{,}3076 = 30{,}76\%$$

$$P(X = 1) = \frac{(8)(35960)}{(658008)} = 0{,}4372 = 43{,}72\%$$

Portanto,

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$P(X \leq 1) = 0{,}3076 + 0{,}4372 = 0{,}7432 = 74{,}32\%$$

b) Usando-se amostragem com reposição.

SOLUÇÃO (cont.):

Nesse caso temos o modelo binomial:

$$P(X = x) = \binom{5}{x}(0.2)^x(0.8)^{5-x}$$

$$P(X = 0) = \binom{5}{0}(0{,}2)^0(0{,}8)^{5-0} = (1)(1)(0{,}8)^5$$

$$P(X = 1) = \binom{5}{1}(0{,}2)^1(0{,}8)^{5-1} = (5)(0{,}2)(0{,}8)^4 = (0{,}8)^4$$

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = (0{,}8)^5 + (0{,}8)^4 =$$
$$= 0{,}32768 + 0{,}4096 = 0{,}7373 = 73{,}73\%$$

Questão 7:
Sabendo que a probabilidade de uma pessoa ainda ser fumante em uma população é 7% imagine que, em uma enorme fila em busca de emprego, uma pessoa fumante quer acender o cigarro mas não tem fósforo ou isqueiro. Ela sai perguntando a cada uma dessas pessoas da fila se elas têm fósforo ou isqueiro. Qual a probabilidade de ela ter que perguntar pelo menos a 5 pessoas para conseguir acender o cigarro?

SOLUÇÃO:

Vamos supor inicialmente que os eventos ter isqueiro (ou fósforo) e ser fumante são equivalentes. Sendo assim, seja Y o número de pessoas a quem a pessoa fumante tem pergunta se tem isqueiro ou fósforo. Então Y é uma variável geométrica com probabilidade de sucesso p = 7% e a sua função de probabilidade é dada por:

$P(Y = k) = p(1-p)^{k-1} = 0{,}07\ (0{,}93)^{k-1}$ com k=1,2,....

$$P(Y \geq 5) = P(Y = 5) + P(Y = 6) + \cdots = 1 - P(Y \leq 4)$$

$$P(Y \geq 5) = 1 - \{P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) + P(Y = 4)\}$$

Onde

$$P(Y = 1) = 0{,}07\ (0{,}93)^{1-1} = 0{,}07$$

$$P(Y = 2) = 0{,}07\ (0{,}93)^{2-1} = 0{,}0651$$

$$P(Y = 3) = 0{,}07\ (0{,}93)^{3-1} = 0.060543$$

$$P(Y = 4) = 0{,}07\ (0{,}93)^{4-1} = 0.056305$$

Portanto,

$$P(Y \geq 5) = 1 - \{0{,}07 + 0{,}0651 + 0.060543 + 0.056305\} = 0{,}7480 = 74{,}8\%$$

Questão 8:
Você trabalha em um *call center* que vende um determinado produto. Apenas 20% das ligações resultam numa venda. Calcule a probabilidade:

a) de que a primeira venda ocorra na 8ª. Ligação;

SOLUÇÃO:

Definimos X como a variável que representa a ligação que ocorra a 1ª venda. X é uma variável geométrica com probabilidade p=0,2 e logo:

$$P(X = 8) = (0{,}8)^7(0{,}2) = 0{,}0419$$

b) de que sejam necessárias 13 ligações para que você consiga fazer a quarta venda;

SOLUÇÃO: **(ANULADA)**

Neste caso, estamos interessados na quantidade de ligações que são necessárias para que seja atingida a meta de 4 vendas. Assim, trata-se de uma variável Binomial negativa com parâmetros r=4 e p=0,2

$$P(X=13)=\binom{12}{3}(0{,}8)^9(0{,}2)^4=0{,}0472$$

c) se você fizer exatamente 20 ligações, qual a probabilidade de conseguir entre 2 e 4 vendas (incluindo 2 e 4!)?

SOLUÇÃO:

Agora o número de chamadas é fixado em 20 e queremos saber a probabilidade de completar 2, 3 ou 4 vendas. X é o número de chamadas que resultam em vendas dentre as 20 realizadas, e assim X~Bin(20;0,2)

$P(X=x)=\binom{20}{x}(0{,}2)^x(0{,}8)^{20-x}$ para x=0,1,2,...,20

Agora calculamos esses valores para x = 2, 3 e 4:

$$P(X=2)=\binom{20}{2}(0{,}2)^2(0{,}8)^{18}=0{,}1369$$

$$P(X=3)=\binom{20}{3}(0{,}2)^3(0{,}8)^{17}=0{,}2054$$

$$P(X=4)=\binom{20}{4}(0{,}2)^4(0{,}8)^{16}=0{,}5605$$

Portanto,

$$P(2\leq\ X\leq 4)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=0{,}5605$$

Questão 9:
Um determinado investimento de risco tem um retorno mensal (r) e pode ser modelado pela variável aleatória val, com função de probabilidade descrita na tabela a seguir:

r	-5%	0%	5%	10%	15%
P(val)	0,40	0,15	0,20	0,20	0,05

a) calcule a esperança deste investimento, seu desvio padrão e sua variância.

SOLUÇÃO:

$$E(val)=\mu=(-0{,}05)(0{,}4)+(0{,}0)(0{,}15)+(0{,}05)(0{,}2)+(0{,}1)(0{,}2)+(0{,}15)(0{,}05)$$
$$E(val)=\ 0{,}0175$$

$$Var(val)=E(val^2)-\mu^2=0{,}00463-(0{,}0175)^2=0{,}00432$$

$$Dp(val)=\sqrt{Var(val)}=0{,}0657=6{,}57\%$$

b) Considere agora a variável aleatória X, sendo X=0 ("fracasso") se o retorno for negativo e X=1 ("sucesso") se houve retorno positivo. Se você aplica seu dinheiro neste investimento por 12 meses consecutivos e que as aplicações em meses subseqüentes têm a mesma probabilidade de "sucesso" e são independentes, qual a probabilidade de seu investimento ter retorno positivo em 6 ou mais meses?

<u>SOLUÇÃO:</u>

A variável X é Bernoulli com probabilidade de sucesso (VER TABELA) $p = 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}05$. Seja $Y = \sum_{i=1}^{12} X_i$ onde os X_i representam o resultado de sucesso ou fracasso em cada um dos 12 meses. Então Y~Bin(12;0,45).

Desejamos calcular

$$P(Y \geq 6) = P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + \cdots + P(Y = 12)$$

$$P(X = 6) = \binom{12}{6}(0{,}45)^6(0{,}55)^6 = 0{,}2124$$

$$P(X = 7) = \binom{12}{7}(0{,}45)^7(0{,}55)^5 = 0{,}1489$$

$$P(X = 8) = \binom{12}{8}(0{,}45)^8(0{,}55)^4 = 0{,}0762$$

$$P(X = 9) = \binom{12}{9}(0{,}45)^9(0{,}55)^3 = 0{,}0277$$
$$P(X = 10) = \binom{12}{10}(0{,}45)^{10}(0{,}55)^2 = 0{,}0068$$
$$P(X = 11) = \binom{12}{11}(0{,}45)^{11}(0{,}55)^1 = 0{,}001$$
$$P(X = 12) = \binom{12}{12}(0{,}45)^{12}(0{,}55)^0 = 0{,}0001$$

Portanto,

$$P(Y \geq 6) = P(Y = 6) + P(Y = 7) + P(Y = 8) + P(Y = 9) + \cdots + P(Y = 12)$$
$$= 0{,}473 = 47{,}3\%$$

Questão 10:
Em uma fábrica, 4 diferentes máquinas (M1, M2 , M3 e M4) são usadas para fabricar o mesmo tipo de produto. Suponha que :
20 % dos produtos são fabricados por M1
25 % dos produtos são fabricados por M2
25 % dos produtos são fabricados por M3
30 % dos produtos são fabricados por M4

Suponha também que:
2 % dos produtos feitos por M1 têm defeito,
2 % dos produtos feitos por M2 têm defeito,
3 % dos produtos feitos por M3 têm defeito,
5% dos produtos feitos por M4 têm defeito.

Um produto é selecionado aleatoriamente e é defeituoso. Qual a probabilidade dele ter sido produzido por M1? E por M2? E por M3? E por M4?

<u>SOLUÇÃO</u>:

Esse problema é uma típica aplicação do Teorema de Bayes, pois as máquinas formam uma partição do espaço amostral:
- todos os produtos são feitos por alguma das máquinas;
- se um produto é feito por uma máquina, não pode ter sido feito por qualquer uma das outras.

Definamos:

. D = {evento o produto é defeituoso}

. M1, M2, M3, M4 representam as probabilidades de o produto ter sido fabricado pela máquina 1, 2, 3 ou 4 (respectivamente).

As seguintes probabilidades são fornecidas:

P(M1) = 20%
P(M2) = 25%
P(M3) = 25%
P(M4) = 30%

As probabilidades condicionais também são conhecidas:

P(D|Mi), lê se, probabilidade de ser defeituoso dado que foi produzido pela máquina i, onde i = 1, 2, 3 ou 4.

P(D|M1)=2%
P(D|M2)=2%
P(D|M3)=3%
P(D|M4)=5%

Sabendo que o produto é defeituoso, desejamos encontrar a probabilidade dele ter sido produzido por cada uma das máquinas, ou seja, buscamos as probabilidades condicionais P(Mi|D).

Pelo Teorema de Bayes:

$$P(M_i|D) = \frac{P(D|M_i)P(M_i)}{P(D)} = \frac{P(D|M_i)P(M_i)}{\sum_{j=1}^{4} P(D|M_j)P(M_j)}$$

Substituindo os valores temos:

$$P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1)P(M_1)}{P(D|M_1)P(M_1) + P(D|M_2)P(M_2) + P(D|M_3)P(M_3) + P(D|M_4)P(M_4)}$$

$$= \frac{(2\%)(20\%)}{(2\%)(20\%) + (2\%)(25\%) + (3\%)(25\%) + (4\%)(30\%)} = 12{,}70\%$$

Analogamente para $P(M_2|D), P(M_3|D)$ e $P(M_4|D)$:

$$P(M_2|D) = 15{,}87\%$$

$$P(M_3|D) = 23{,}81\%$$

$$P(M_4|D) = 47{,}62\%$$

Questão 11 (extra):
Uma caixa contém 8 bolas brancas e 6 bolas pretas. Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é jogada fora e substituída por uma bola da cor oposta.
a) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

SOLUÇÃO:

Seja $\boldsymbol{A_i}$ = {evento encontrar bola preta na i-ésima retirada}.
Portanto $\boldsymbol{B_i}$ = {evento encontrar bola branca na i-esima retirada} é o complementar de $\boldsymbol{A_i}$.

Inicialmente temos que $P(A_1) = \frac{6}{14}$ e $P(B_1) = \frac{8}{14}$.

O evento B_2 (bola branca na segunda retirada) pode ser escrito como:

$$B_2 = (B_2 \cap A_1) \cup (B_2 \cap B_1)$$

Onde $(B_2 \cap B_1)$ é o evento {bolas brancas nas 2 primeiras retiradas} e $(B_2 \cap A_1)$ é o evento {bola preta na 1ª retirada e branca na 2ª retirada }. Também é importante notar que $(B_2 \cap A_1)$ e $(B_2 \cap B_1)$ são mutuamente excludentes. As probabilidades desses dois eventos podem ser encontradas a partir das probabilidades condicionais do que aconteceu na 2ª retirada dado que foi observado na 1ª retirada.

Suponha que a 1ª retirada tenha resultado numa bola preta. Então, ANTES da 2ª retirada, a caixa contém 9 bolas brancas e 5 bolas pretas. Se a 1ª retirada consistiu numa bola branca, ANTES da 2ª retirada, a caixa contém 7 bolas brancas e 7 bolas pretas.

Então, as probabilidades condicionais de uma bola branca na 2ª retirada sabendo o que aconteceu na 1ª retirada são especificamente:
$P(B_2|A_1) = 9/14$ e $P(B_2|B_1) = 7/14$.

Pela definição de probabilidade condicional:

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{7}{14}\frac{8}{14} = 0{,}2857 = 28{,}57\%$$

E também:

$$P(B_2 \cap A_1) = P(B_2|A_1)P(B_1) = \frac{9}{14}\frac{6}{14} = 0{,}2755 = 27{,}55\%$$

Finalmente:

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap A_1) = 0{,}5612 = 56{,}12\%$$

c) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja preta?

SOLUÇÃO:

Como só existem bolas de 2 cores, então a probabilidade de uma bola preta na 2ª retirada é apenas 1 menos a probabilidade de uma bola branca na 2ª retirada, ou seja:

$$P(A_2) = 1 - \frac{110}{196} = 0{,}4388 = 43{,}88\%$$

Questão 12 (extra):
0.1% da população de um estado tem HIV. Um teste para detectar a presença do virus, embora preciso, não acerta em 100% dos resultados. Assim, ele tem as seguintes propriedades:
- se a pessoa tem HIV o resultado do teste é positivo com probabilidade 0.999 (o teste "acerta").
- se a pessoa não tem HIV existe uma probabilidade de 0.002 do resultado do teste ser positivo e acusar a doença.

Uma pessoa é selecionada aleatoriamente na população e o resultado do teste é positivo, indicando a presença do virus. Qual a probabilidade de que a pessoa realmente tenha o vírus?

SOLUÇÃO:

Novamente aplicaremos o Teorema de Bayes. Definamos os eventos:

Po = {o resultado do teste é positivo}
T = {a pessoa tem o vírus do HIV}

As seguintes probabilidades são dadas:

$$P(T) = 0{,}1\%$$
$P(Po|T) = 99{,}9\%$ (probabilidade de o exame detectar a doença)

$P(\,Po|\bar{T}\,) = 0{,}2\%$ (probabilidade do alarme falso!)

Desejamos encontrar: $P(T|Po)$. Pelo Teorema de Bayes:

$$P(Po|T) = \frac{P(T \cap Po)}{P(Po)} = \frac{P(Po|T)P(T)}{P(T \cap Po) + P(\bar{T} \cap Po)} = \frac{P(Po|T)P(T)}{P(Po|T)P(T) + P(Po|\bar{T})P(\bar{T})}$$

$$P(Po|T) = \frac{(99{,}9\%)(0{,}1\%)}{(99{,}9\%)(0{,}1\%) + (0{,}2\%)(99{,}9\%)} = \frac{1}{3}$$

Questão 13 (extra):
Uma caixa contém 10 bolas brancas e 8 bolas pretas. Uma bola é selecionada aleatoriamente e então é retirada e substituída por duas bolas da cor oposta.

a) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja branca?

SOLUÇÃO:

Seja $\boldsymbol{A_i}$ = {evento encontrar bola preta na i-ésima retirada}.
Portanto $\boldsymbol{B_i}$ = {evento encontrar bola branca na i-esima retirada} é o complementar de $\boldsymbol{A_i}$.

Inicialmente temos que $P(A_1) = \frac{8}{18}$ e $P(B_1) = \frac{10}{18}$.

O evento B_2 (bola branca na segunda retirada) pode ser escrito como:

$$B_2 = (B_2 \cap A_1) \cup (B_2 \cap B_1)$$

Onde $(B_2 \cap B_1)$ é o evento {bolas brancas nas 2 primeiras retiradas} e $(B_2 \cap A_1)$ é o evento {bola preta na 1ª retirada e branca na 2ª retirada }. Também é importante notar que $(B_2 \cap A_1)$ e $(B_2 \cap B_1)$ são mutuamente excludentes. As probabilidades desses dois eventos podem ser encontradas a partir das probabilidades condicionais do que aconteceu na 2ª retirada dado que foi observado na 1ª retirada.

Suponha que a 1ª retirada tenha resultado numa bola preta. Então, DEPOIS da 1ª retirada e ANTES da 2ª retirada, a caixa contém 19 bolas, das quais 12 são brancas e 7 pretas. Se a 1ª retirada consistiu numa bola branca,DEPOIS da 1ª retirada e ANTES da 2ª retirada, a caixa contém 9 bolas brancas e 10 bolas pretas.

Então, as probabilidades condicionais de uma bola branca na 2ª retirada sabendo o que aconteceu na 1ª retirada são especificamente:
$P(B_2|A_1) = 12/19$ e $P(B_2|B_1) = 9/19$.

Pela definição de probabilidade condicional:

$$P(B_2 \cap B_1) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{9}{19}\frac{10}{18} = 0{,}2632 = 26{,}32\%$$

E também:

$$P(B_2 \cap A_1) = P(B_2|A_1)P(B_1) = \frac{12}{19}\frac{8}{18} = 0{,}2807 = 28{,}07\%$$

Finalmente:

$$P(B_2) = P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap A_1) = 0{,}5439 = 54{,}39\%$$

b) Qual a probabilidade de que a segunda bola selecionada seja preta?

<u>SOLUÇÃO</u>:

O evento A_2 (bola preta na 2ª retirada) é apenas o complemento do evento {bola branca na 2ª retirada} e então sua probabilidade é apenas 1 menos a probabilidade de uma bola branca na 2ª retirada:

$$P(A_2) = 1 - \frac{186}{342} = 0{,}4561 = 45{,}61\%$$