Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 2° semestre de 2010

1 - Primeira questão (2,0 pontos)

Para que a função do item abaixo seja distribuição de probabilidade é necessário determinar o fator numérico normalizante **A** que a acompanha. Depois de determinar este valor calcule a média e a variância das distribuições normalizadas e faça o gráfico da função. Obs.: A função é não negativa no intervalo indicado e nula fora dele.

$$f(x)=A\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right);\, x\in[0;3]$$

Solução:

Integremos a função no intervalo indicado

$$\int_0^3 f(x)\,dx=A\int_0^3\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx=A\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+\frac{9}{4}x\right]\Big|_0^3$$

ou ainda

$$\int_0^3 f(x)\,dx=A\left(\frac{27}{3}-3\frac{9}{2}+3\frac{9}{4}\right)=A\frac{9}{4}$$

Para ser distribuição é necessário que a integral seja 1. Logo $A=\frac{4}{9}$ **.**

A média desta distribuição será dada pela definição

$$\mu=\int_0^3 x\,f(x)\,dx=\frac{4}{9}\int_0^3\left(x^3-3x^2+\frac{9}{4}x\right)dx=\frac{4}{9}\left[\frac{x^4}{4}-3\frac{x^3}{3}+\frac{9}{4}\frac{x^2}{2}\right]\Big|_0^3$$

ou ainda

$$\mu=\frac{4}{9}\left[\frac{81}{4}-3\frac{27}{3}+\frac{9}{4}\frac{9}{2}\right]=\frac{3}{2}$$

A variância também será obtida por meio da definição dada por

$$\sigma^2 = \int_0^3 x^2 f(x) dx - \mu^2$$

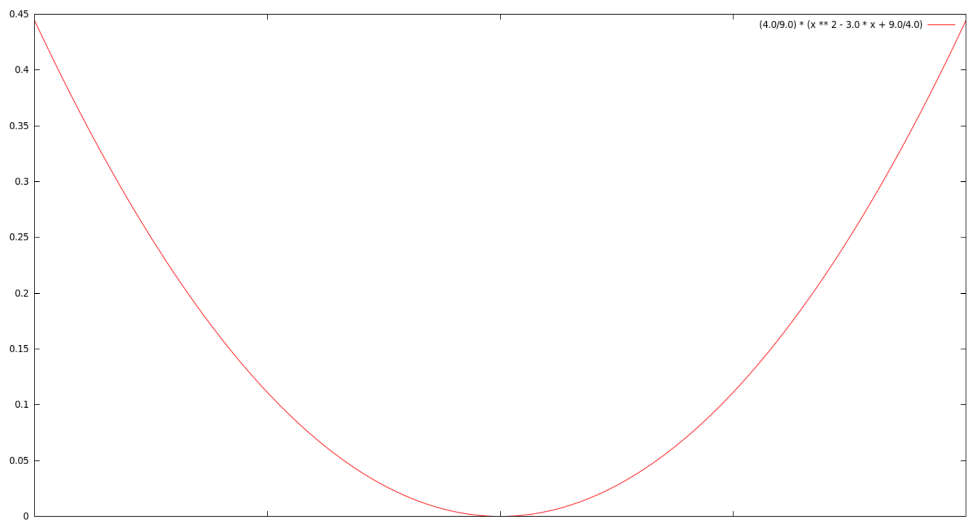
Calculemos a integral

$$\int_0^3 x^2 f(x) dx = \frac{4}{9} \int_0^3 \left(x^4 - 3x^3 + \frac{9}{4} x^2 \right) dx = \frac{4}{9} \left[\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^4}{4} + \frac{9}{4}\frac{x^3}{3} \right] \Big|_0^3$$

$$\int_0^3 x^2 f(x) dx = \frac{4}{9} \left[\frac{243}{5} - 3\frac{81}{4} + \frac{9}{4}\frac{27}{3} \right] = \frac{4}{9}\frac{81}{10} = \frac{18}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{18}{5} - \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{18}{5} - \frac{9}{4} = \frac{27}{20}$$

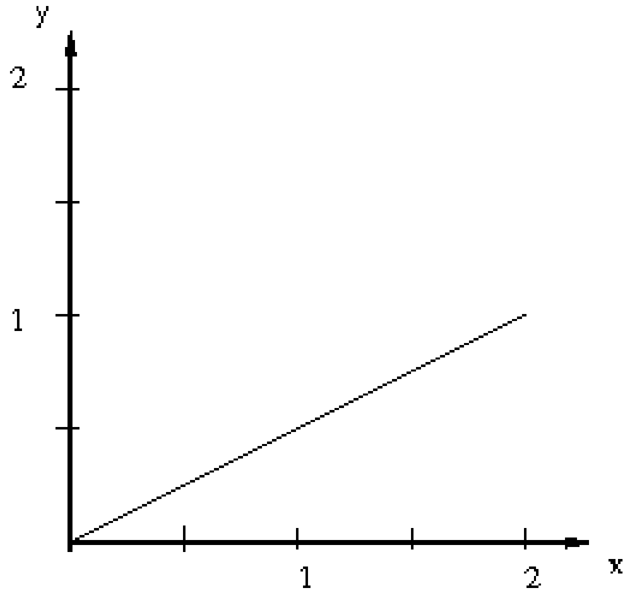
O gráfico da função é dada abaixo



2 – Segunda questão (2,0 pontos)

Uma distribuição de probabilidade está representada na figura abaixo onde a função vale zero na origem e 1,0 no ponto x = 2, sendo nula no restante dos valores de x. Determine a média, a variância, a moda e a mediana da mesma

Solução:



A distribuição de probabilidade pode ser escrita como

$$f(x)=\frac{x}{2} \quad .$$

a) Média

Da definição de média teremos

$$\mu=\int_0^2 x\, f(x) dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x\, x\, dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{1}{2}\frac{8}{3}=\frac{4}{3}$$

b) Variância

Da definição de variância

$$\sigma^2=\int_0^2 x^2 f(x) dx-\mu^2$$

$$\int_0^2 x^2 f(x) dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2=\frac{1}{2}\frac{16}{4}=2$$

$$\sigma^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9}$$

c) Moda

A moda é por definição o ponto no qual a densidade de probabilidade toma seu valor máximo. Observando o gráfico vemos que neste caso a distribuição é unimodal e o valor da moda é 2.

d) Mediana

Pela definição da mediana temos que Md é o valor para o qual

$$P(X \geq Md) \geq \frac{1}{2} \, e \, P(X \leq Md) \geq \frac{1}{2} \quad .$$

Vamos calcular a probabilidade via integral de forma que o valor desta integral seja1/2 no intervalo de Md a 2, ou seja,

$$\int_{Md}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

Assim teremos

$$\mu = \int_{Md}^{2} f(x)dx = \frac{1}{4}\int_{Md}^{2} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_{Md}^{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2} - \frac{Md^2}{2}\right) = 1 - \frac{Md^2}{4} = \frac{1}{2}$$

que resulta na equação de segundo grau dada abaixo

$$Md^2 = 2$$

ou seja, a mediana é igual a $\sqrt{2}$ **.**

3 - Terceira questão (1,0 pontos)

Foi obtido os seguintes números de votos para seções eleitorais em um bairro de uma cidade.

Seção	123	124	125	126	127	128	129	130
Votos	489	380	312	375	310	377	478	415

Calcule os estimadores para a média e para a variância para estas urnas. Use estimadores não viciados e consistentes.

a) **Vamos usar o seguinte estimador para a média**

$$\bar{X}=\frac{\sum_{1}^{n} X_i}{n}$$

que no caso desta questão será

$$\bar{X}=\frac{489+380+312+375+310+377+478+415}{8}=\frac{3136}{8}=392$$

b) Para o estimador da variância usaremos

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}\left(X_i^2-n\,\bar{X}^2\right)$$

$$\sum_{1}^{n} X_i^2=489^2+380^2+312^2+375^2+310^2+377^2+478^2+415^2=1260428$$

Usando o valor da média obtido no item <u>a</u> teremos

$$S^2=\frac{1}{7}\sum_{1}^{n}\left(1260428-8\times 392^2\right)=66{,}671$$

4 - Quarta questão (1,0 pontos)

Num lote de 1000 tijolos foi retirada uma amostra de 10 unidades. Suponha que este lote será aceito se os comprimentos dos tijolos desta amostra variarem entre 17,9 cm e 18,7 cm. O fabricante afirma que a média de comprimento dos tijolos é de 18,3 cm e a variância de 6 cm^2. Calcule a probabilidade dos tijolos se encontrarem dentro da faixa de valores requisitada. Suponha que é possível usar a distribuição Normal.

Solução:

Aqui nada dizemos sobre qual é o valor de corte para a rejeição. Portanto, o problema se resume à calcular a probabilidade dos tijolos estarem dentro da imposição. Para os dados que foram fornecidos sabemos que

$$\mu=18{,}3\,cm$$
$$\sigma^2=6\,cm^2$$
$$n=10$$

Assim temos que a variância será $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

A probabilidade será então

$$P(17{,}9<\bar{X}<18{,}7)=P\left(\frac{17{,}9-18{,}3}{\sqrt{3/5}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{18{,}7-18{,}3}{\sqrt{3/5}}\right)$$

ou ainda

$$P(17{,}9<\bar{X}<18{,}7)=P\left(\frac{-0{,}4}{\sqrt{3/5}}<Z<\frac{0{,}4}{\sqrt{3/5}}\right)=P(-0{,}5164<Z<0{,}5164)=2\times 0{,}1950=0{,}39$$

ou seja, a probabilidade dos tijolos estarem dentro do valor exigido é de 39%.

5 - Quinta questão (2,0 ponto)

Uma indústria metalúrgica afirma que o nível de um determinado sal metálico de suas águas servidas ultrapassou o valor de 28,0 mg/m^3 em 12 dias no último mês (de 30 dias). Um estudo independente, suspeitando dos dados da empresa, fez medidas durante 21 dias e observando que o nível de 28,0 mg/m^3 foi ultrapassado 9 vezes. Qual seria a probabilidade dos dados da metalúrgica estarem errados a um nível de 5%? (2,5 pontos)

Solução: Aqui temos uma referência do nível de aprovação e/ou rejeição (5%) da medida em questão. Assim, faremos um teste de hipótese. Vamos supor ainda que podemos usar a distribuição Normal e façamos alguns cálculos preliminares.

Pelos dados da indústria a proporção amostral de ocorrência de ultrapassagem do nível de referência do sal foi de

$$P=\frac{12}{30}=0{,}4$$

Devemos testar a hipótese deste valor ter sido ultrapassado a partir do relatório independente. Como estamos trabalhando com proporção amostral, usemos o estimador de variância dado por

$$\sigma^2=p\frac{(1-p)}{n}$$

Da suposição que podemos usar a distribuição Normal teremos

$$\hat{P}\sim N(p,\, p(1-p)/n)\quad .$$

A Região Critica é dada por

$$RC=\{x\in\mathbb{R}: x<p_{c1}\, ou\, x>p_{c2}\}$$

Para o valor do nível exigido temos que

$$P(\hat{p} < p_{c1} : H_o) = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025 \quad \textbf{e} \quad P(\hat{p} > p_{c2} : H_o) = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$$

Pela hipótese p = 0,4 e a distribuição será

$$\hat{P} \sim N(0{,}4,\, 0{,}24/21) = N(0{,}4\,,\, 0{,}0114)$$

Logo

$$P(\hat{p} < p_{c1} : H_0) = P\left(\frac{\hat{p} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}} < \frac{p_{c1} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}}\right) = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$$

Pela tabela da distribuição Normal temos que

$$\frac{p_{c1} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}} = -1{,}96$$

o que nos dá

$$p_{c1} = 0{,}1907$$

$$\frac{p_{c2} - 0{,}4}{\sqrt{(0{,}0114)}} = 1{,}96 \quad .$$

Daí

$$p_{c2} = 0{,}609$$

e finalmente temos

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < 0{,}1907 \; ou \; x > 0{,}609\}$$

ou seja, não existe base para discordar do relatório da indústria metalúrgica.

6 – Sexta questão (2,0 pontos)

Uma distribuição Normal tem média 5,3 e desvio padrão igual 1,1. Calcule as probabilidades abaixo:

Solução: Primeiramente faremos a transformação para a distribuição Normal padrão, ou seja,

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma})$$

no nosso caso

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-5{,}3}{1{,}1} \leq Z \leq \frac{b-5{,}3}{1{,}1})$$

a) P(5,0 < X < 5,4) (0,5 pontos)

$$P(\frac{5{,}0-5{,}3}{1{,}1} < Z < \frac{5{,}4-5{,}3}{1{,}1}) = P(\frac{-0{,}3}{1{,}1} < Z < \frac{0{,}1}{1{,}1}) = P(-0{,}2727 < Z < 0{,}0909)$$

P(5,0 < X < 5,4) = P(-0,2727<Z<0,0909) = 0,1064 + 0,0359 = 0,1423

b) P(X > 5,4) (0,5 pontos)

$$P(X > 5{,}4) = P(Z > \frac{5{,}4-5{,}3}{1{,}1}) = P(Z > 0{,}0909) = 0{,}5 - 0{,}0359 = 0{,}4641$$

c) P(X < 5,2) (0,5 pontos)

É o mesmo valor do item b pois o valor da probabilidade procurada é simétrico em relação ao valor da média.

d) P(X < 5,4) (0,5 pontos)

É o complementar do item b, ou seja,

$$P(X < 5{,}4) = 1 - P(X > 5{,}4) = 0{,}5359$$

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.