

Gabarito da AD1 da disciplina Probabilidade e Estatística
 Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo
01/2012

1ª questão (1,0 ponto)- Quinze pacientes de uma clínica de ortopedia foram entrevistados quanto ao número de meses previstos de fisioterapia; se haverá (S) ou não (N) sequelas após tratamento; e o grau de complexidade da cirurgia realizada: alto (A), médio (M) ou baixo (B). Os dados são apresentados na Tabela 1:

<i>Pacientes</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
<i>Fisioterapia</i>	7	8	5	6	4	5	7	7	6	8	6	5	5	4	5
<i>Sequelas</i>	S	S	N	N	N	S	S	N	N	S	S	N	S	N	N
<i>Cirurgia</i>	A	M	A	M	M	B	A	M	B	M	B	B	M	M	A

Tabela 1

(i) Classifique cada uma das variáveis.

Resposta:

- *Fisioterapia: quantitativa discreta*
- *Sequelas: qualitativa nominal*
- *Cirurgia: qualitativa ordinal*

(ii) Para cada variável, construa a tabela de frequência e frequência relativa.

Resposta:

<i>Sequelas</i>	S	N	total
<i>Freq.</i>	7	8	15
<i>Freq. relat.</i>	0,47	0,53	1

<i>Fisioterapia</i>	4	5	6	7	8	<i>Total</i>
<i>Freq.</i>	2	5	3	3	2	15
<i>Freq. Relat.</i>	0,13	0,33	0,20	0,20	0,13	1,00

<i>Cirurgia</i>	A	B	M	<i>Total</i>
<i>Freq.</i>	4	4	7	15
<i>Freq. relat.</i>	0,27	0,27	0,47	1

2ª questão (0,5 pontos) - Três moedas são lançadas ao mesmo tempo. Qual é a probabilidade de as três moedas caírem com a mesma face para cima?

Resposta:

Como cada moeda pode produzir dois resultados distintos, três moedas irão produzir $2 \cdot 2 \cdot 2$ resultados distintos, ou seja, poderão produzir 8 resultados distintos. Este é o tamanho do nosso espaço amostral, ou seja, $n(\Omega) = 8$.

Assim, seja E o evento “as três moedas com faces iguais”.

Dentre as 8 possibilidades do espaço amostral, o evento que representa todas as moedas com a mesma face para cima possui apenas 2 possibilidades, ou tudo cara ou tudo coroa. Então $n(E)=2$.

A probabilidade é dada por:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{2}{8} = 0,25$$

Ou seja, a probabilidade das três moedas caírem com a mesma face para cima é igual a 0,25 ou 25%.

3ª questão (0,5 pontos) - Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a probabilidade dele também estar cursando o curso de espanhol?

Resposta:

O experimento consiste em selecionar um aluno que curse Inglês, e observar se esse mesmo aluno também cursa Espanhol. Assim, seja E o evento “o aluno cursa Espanhol, dado que ele também cursa Inglês”, $n(E)=200$.

O espaço amostral Ω é dado pelos alunos que cursam Inglês, logo $n(\Omega) = 500$.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{200}{500} = 0,4$$

Ou seja, a probabilidade de um estudante do curso de inglês também estar cursando espanhol é 0,4 ou 40%.

4ª questão (1,0 ponto) - Uma pesquisa realizada entre 1.000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira A, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira B e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira B, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira A?

Resposta:

O experimento consiste em escolher um consumidor do grupo que utiliza a bandeira B, e verificar se esse consumidor também utiliza a bandeira A. Seja E esse experimento. Então $n(E) = 200$.

O tamanho do espaço amostral Ω é 550.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{200}{550} = 0,36$$

A probabilidade deste cliente que utiliza a bandeira B, também utilizar a bandeira A é 0,36 ou 36%.

5ª questão (1,0 ponto) – Em uma cidade onde carros têm que ser avaliados para controle de emissão de poluentes, 25% de todos os carros testados emitem quantidades excessivas de poluentes. No entanto, o teste não é perfeito e pode indicar resultados errados. Desta forma, carros que emitem excesso de poluentes podem não ser detectados pelo teste e carros que não emitem excesso de poluentes podem ser considerados erroneamente fora do padrão de emissão. Quando efetivamente testados, 99% dos carros fora do padrão são detectados e 17% dos carros em bom estado são considerados fora do padrão por erro do teste. Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste emita realmente excesso de poluentes?

Resposta:

Seja T o evento “carros emitem quantidades excessivas de poluentes” e

B o evento “carro dentro das normas de emissão de poluentes”

$$P(T) = 0,25 \text{ e } P(B) = 0,75$$

Seja E o evento “carro reprovado no teste”.

$$P(E/T) = 0,99 \text{ e } P(E/B) = 0,17$$

$$P(T/E) = ?$$

Segundo o Teorema de Bayes, temos :

$$P(T/E) = \frac{P(E \cap T)}{P(E)} = \frac{P(E/T)P(T)}{P(E)}$$

$$P(E) = P(E/T)P(T) + P(E/B)P(B) = 0,99 \times 0,25 + 0,17 \times 0,75 = 0,2475 + 0,1275 = 0,375$$

$$P(T/E) = \frac{P(E/T)P(T)}{P(E)} = \frac{0,99 \times 0,25}{0,375} = \frac{0,2475}{0,375} = 0,66$$

6ª questão (1,0 ponto)– Durante o primeiro dia de carnaval a chegada de ônibus na Rodoviária Novo Rio se dá segundo o modelo de Poisson com taxa de 1 ônibus por minuto.

(i) determine a probabilidade da chegada de 2 ônibus em um minuto qualquer desse primeiro dia de carnaval:

Resposta:

Modelo de Poisson:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$$

$\lambda = 1$ ônibus por minuto

$$P(2) = \frac{e^{-1} 1^2}{2!} = 0,184$$

(ii) se for possível desembarcar somente 2 ônibus por minuto, qual a probabilidade de haver ônibus sem desembarque imediato?

Resposta:

$\lambda = 2$ ônibus por minuto. Para não haver desembarque imediato é necessário que cheguem mais de 2 ônibus em um minuto, portanto $k \geq 3$.

$$P(k \geq 3) = 1 - P(k < 3) = 1 - [P(k = 0) + P(k = 1) + P(k = 2)]$$

$$P(k \geq 3) = 1 - \left[\frac{e^{-2} 2^0}{0!} + \frac{e^{-2} 2^1}{1!} + \frac{e^{-2} 2^2}{2!} \right]$$

Utilizando a aproximação para $e = 2,71828$, temos então:

$$P(k = 0) = \frac{e^{-2} 2^0}{0!} = \frac{1}{e^2} = \frac{1}{7,3891} = 0,1353$$

$$P(k = 1) = \frac{e^{-2} 2^1}{1!} = \frac{2}{e^2} = \frac{2}{7,3891} = 0,2706$$

$$P(k = 2) = \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = \frac{4}{2 e^2} = \frac{2}{e^2} = 0,1353$$

$$P(k \geq 3) = 1 - [0,1353 + 0,2706 + 0,1353] = 1 - 0,5412 = 0,4588$$

7ª questão (1,5 ponto) - Sabe-se que os pacientes diagnosticados com câncer de próstata precocemente têm 85% de probabilidade de serem completamente curados. Para um grupo de 16 pacientes nessas condições, use o modelo binomial e calcule qual a probabilidade de:

(i) treze (13) ficarem completamente curados: ($k=13$)

Resposta:

$$p=0,85 \text{ e } n=16$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

$$P(X = 13) = \left(\frac{16!}{13!(16-13)!} \right) 0,85^{13} (1-0,85)^{16-13} = 0,2285$$

(ii) de 5 a 7 pacientes (inclusive, ou seja: $5 \leq 7$) não ficarem curados.

Resposta:

Nesse caso, utilizamos $p=0,15$, que é a probabilidade dos pacientes não ficarem curados.

$$P(5 \leq X \leq 7) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

$$P(X = 5) = \frac{16!}{5!(16-5)!} 0,15^5 0,85^{11} = 4368 (0,0000759) (0,16734324) = 0,0555069$$

$$P(X = 6) = \frac{16!}{6!(16-6)!} 0,15^6 0,85^{10} = 8008 (0,00001139) (0,19687) = 0,0179581$$

$$P(X = 7) = \frac{16!}{7!(16-7)!} 0,15^7 0,85^9 = 11440 (0,000001708) (0,2316) = 0,004525$$

$$P(5 \leq X \leq 7) = 0,07799$$

8ª questão (2,0 pontos) - Um fabricante de um determinado produto eletrônico suspeita que 2% de seus produtos apresentam algum defeito. Se sua suspeita for correta:

(i) Utilize o modelo binomial, e determine qual a probabilidade de que, numa amostra com 9 de seus produtos,

- a - não tenha nenhum defeituoso
- b - tenha no máximo um defeituoso

Resposta:

(i) Modelo binomial:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$$

a - não tenha nenhum defeituoso

$$P(X = x_k) = \binom{9}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^{9-0} = 1 \times 1 \times 0,1342 = 0,1342$$

b- tenha no máximo um defeituoso

$$\begin{aligned} P(X = x_k) &= \binom{9}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^{9-0} + \binom{9}{1} \times 0,2^1 \times 0,8^{9-1} \\ &= 1 \times 1 \times 0,1342 + \frac{9!}{1!(9-1)!} \times 0,2^1 \times 0,8^8 \\ &= 0,1342 + 0,3020 = 0,4362 \end{aligned}$$

(ii) Utilize o modelo geométrico para saber se esse fabricante for escolher aleatoriamente 4 desses produtos para mostrar a um vendedor, qual a probabilidade de somente o quinto estar defeituoso?

Resposta:

Modelo geométrico

$$P(X = k) = p (1-p)^k$$

$$P = 0,2(1 - 0,2)^4 = 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,0819$$

9ª questão (1,5 ponto) – Num lago-laboratório pesquisadores acompanham o crescimento de 10 botos: 6 da espécie A e 4 da espécie B, avaliando periodicamente seus pesos e tamanhos. Se em determinado dia de avaliação três botos forem capturados de uma vez, utilize um modelo de probabilidade para determinar a probabilidade de:

(i) a maioria ser da espécie A:

Resposta:

Modelo Hipergeométrico:

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}; k = \max(0, r - (n - m)), \dots, \min(r, m)$$

10 botos ($n=10$): 6 da espécie A ($m=6$) \rightarrow amostra 3 botos ($r=3$)

Numa amostra com 3 botos a maioria, nesse caso, seria $k=2$

$$P(k=2) = \frac{\left(\frac{6!}{2!(6-2)!} \right) \left(\frac{(10-6)!}{(3-2)!((10-6)-(3-2))!} \right)}{\left(\frac{10!}{3!(10-3)!} \right)}$$

$$P(k=2) = \frac{\left(\frac{6!}{2!4!} \right) \left(\frac{4!}{1!3!} \right)}{\left(\frac{10!}{3!7!} \right)}$$

$$P(k=2) = 0,50$$

(ii) pelo menos 1 ser da espécie A.

Resposta:

Nesse caso deve-se calcular $P(k \geq 1) = P(k=1) + P(k=2) + P(k=3)$

$$P(k=1) = \frac{\binom{6}{1} \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{6 \times \frac{4!}{2!2!}}{120} = \frac{36}{120} = 0,3$$

$$P(k=3) = \frac{\binom{6}{3} \binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} = 0,17$$

$$P(k \geq 1) = P(k=1) + P(k=2) + P(k=3) = 0,3 + 0,5 + 0,17 = 0,97.$$