Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação

Gabarito da AD1 de Probabilidade e Estatística

Professores:

Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Primeiro Semestre de 2014

1) (1,0 ponto) Os tempos (min) de cinco atletas em duas modalidades de provas de corrida foram:

Modalidade A: 18.2 18.0 17.4 17.6 18.1

Modalidade B: 20.0 20.2 19.9 20.5 20.1

(a) Calcule o tempo médio e o desvio padrão para cada modalidade de prova de corrida.

<u>Solução</u>

$\bar{A} = 17.875 \qquad S_A = 0.3072$

$\bar{B} = 20.150 \qquad S_B = 0.2059$

onde $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são as médias das modalidades A e B respectivamente e S_A e S_B seus desvios.

(b) Caso o cronômetro adicione 2min ao tempo de cada atleta ou caso cada atleta gaste o triplo do tempo (cada tempo multiplicado por 3), o que você pode afirmar que acontecerá com essas estatísticas (média e desvio padrão) para cada um desses casos.

(Obs: refaça os cálculos, em cada um dos casos, para concluir o que acontecerá).

<u>Solução</u>

Somando 2 (min) aos eventos de A e de B, e recalculando as respectivas médias e desvios padrão, temos:

$\overline{A_2} = 19.875 \qquad S_{A2} = 0.3072$

$\overline{B_2} = 22.15 \qquad S_{B2} = 0.2059$

Note que:

$\overline{A_2} = 19.875 = \bar{A} + 2 \quad e \quad S_A = S_{A2}$

$\overline{B_2} = 22.15 = \bar{B} + 2 \quad e \quad S_B = S_{B2}$

Multiplicando por 3 (min) os eventos de A e de B e, mais uma vez calculando médias e desvios, encontramos:

$\overline{A_3} = 53.58 \quad S_{A3} = 0.9217$

$\overline{B_3} = 22.15 \quad S_{B3} = 0.6177$

Podemos notar que quando somamos uma constante a um conjunto de dados, a média dos dados iniciais fica somada dessa constante e o desvio padrão permanece o mesmo. Por outro lado, se multiplicarmos uma constante aos dados iniciais, tanto a média quanto o desvio padrão ficam multiplicados por essa constante.

2) (0,5 pontos) Lançamos 2 dados honestos, e seja A = {a soma dos resultados é 8} e B = {o produto dos resultados é impar}. Verifique se os eventos A e B são independentes.

<u>Solução</u>

Enumerando os conjuntos de pares A e B descritos anteriormente, temos:

$A = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$

$B = \{(1,1),(1,3),(3,1),(1,5),(5,1),(3,3),(3,5),(5,3),(3,3)\}$

A e B são independentes se:

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Sabemos que $P(A) = \dfrac{5}{36}$, $P(B) = \dfrac{9}{36}$ e podemos observar que $P(A \cap B) = \dfrac{2}{36}$.

Logo, podemos concluir que os eventos A e B não são independentes, uma vez que:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} \neq \frac{5}{36} \times \frac{9}{36}$$

3) (0,5 pontos) Suponha que P (A) = ½ e P (B^C) = 1/3. Verifique se os eventos A e B podem ser disjuntos (ou mutuamente exclusivos).

<u>Solução</u>

Para que os eventos A e B sejam disjuntos $P(A \cap B) = 0$. Além disso, se $P(B^c) = \frac{1}{3}$, então $P(B) = \frac{2}{3}$, pois $P(B^c) + P(B) = 1$.

Portanto:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A \cap B) = \frac{7}{6} - P(A \cap B)$$

Se igualarmos $P(A \cap B)$ a zero na expressão anterior, temos que $P(A \cup B) = \frac{7}{6}$. Como $P(A \cup B)$ é uma probabilidade, deve estar entre 0 e 1, o que é um absurdo porque $\frac{7}{6} \geq 1$. Assim, a probabilidade $P(A \cap B)$ não pode ser zero e, portanto, A e B não são disjuntos.

4) (1,0 ponto) O jogo de dominó é composto de peças retangulares formadas pela junção de dois quadrados. Em cada quadrado há a indicação de um número, representado por uma certa quantidade de bolinhas, que variam de nenhuma bolinha (0 bolinhas), a seis (6) bolinhas. Nesse jogo não existem peças repetidas. Assim, o número total de combinações possíveis é de 28 peças. Se pegarmos uma peça qualquer, qual a probabilidade dela possuir ao menos uma face com 3 ou 4 bolinhas?

<u>Solução</u>

Chamemos de A o evento da ocorrência de um 3:

A = { (0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3), (6, 3) }

Chamemos de B o evento da ocorrência de um 4:

B = { (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) }

Observe que o elemento (4, 3) integra os dois eventos. Calculando as probabilidades de A, B e da intersecção dos dois eventos temos:

$P(A) = \frac{7}{28}$, $P(B) = \frac{7}{28}$ e, como vimos, $P(A \cap B) = \frac{1}{28}$.

Assim, para o cálculo da probabilidade desejada vamos utilizar a fórmula da probabilidade da união de dois eventos, ou seja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{28} + \frac{7}{28} - \frac{1}{28} = \frac{13}{28}$$

Logo, a probabilidade de ela possuir ao menos um 3 ou 4 na sua face é $\frac{13}{28}$.

5) (1,0 ponto) Três estudantes A, B e C estão em uma competição de natação. Os estudantes A e B têm as mesmas chances de vencer e, cada um, tem duas vezes mais chances de vencer do que o estudante C. Pede-se calcular a probabilidades de A ou C vencer.

<u>Solução</u>

Sejam P(A), P(B) e P(C), as probabilidades individuais de A, B, C, vencerem. Pelos dados do enunciado, temos: P(A) = P(B) = 2P(C).

Seja $P(A) = k$, $P(B) = k$ e $P(C) = \frac{k}{2}$.

Temos: P(A) + P(B) + P(C) = 1. Assim, substituindo, temos que:

$k + k + \frac{k}{2} = 1$, $\frac{5k}{2} = 1, k = \frac{2}{5}$.

Portanto, $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{2}{5}$ e $P(C) = \frac{2}{10}$.

A probabilidade de A ou C vencer será a soma dessas probabilidades, ou seja $\frac{3}{5}$.

6) (1,0 ponto) Um determinada peça é manufaturada por três fábricas, 1, 2 e 3. Sabe-se que a fábrica 1 produz o dobro de peças que a fábrica 2, e que a fábrica 2 e 3 produziram o mesmo número de peças. Sabe-se que 2% das peças produzidas pela fábrica1 e por 2 são defeituosas, enquanto que 4% daquelas produzidas pela 3 são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas em um depósito e depois uma delas é extraída ao acaso.

Extraindo os dados do problema temos:

P(F1) = 0,50 (50% da fabrica 1)

P(F2) = 0,25 (25% da fabrica 2)

P(F3) = 0,25 (25% da fabrica 3)

Temos ainda que

P(D/F1) = 0,02 (2% da produção da fabrica 1 é defeituosa)

P(D/F2) = 0,02 (2% da produção da fabrica 2 é defeituosa)

P(D/F3) = 0,04 (4% da produção da fabrica 3 é defeituosa)

(a) Qual a probabilidade de que ela seja defeituosa?

<u>Solução</u>

A probabilidade de ser defeituosa é dada por:

$$P(D) = P(D/F1) \times P(F1) + P(D/F2) \times P(F2) + P(D/F3) \times P(F3)$$
$$P(D) = 0{,}02 * 0{,}5 + 0{,}02 * 0{,}25 + 0{,}04 * 0{,}25$$
$$P(D) = 0{,}025$$

(b) Suponha que uma peça retirada do depósito seja identificada como defeituosa. Qual a probabilidade de que tenha sido produzida pela fábrica 1?

Solução

Queremos determinar a probabilidade de uma peça ser da fabrica 1 dado que ela é defeituosa, logo pelo teorema de Bayes temos

$$P(\mathrm{F1}/D) = \frac{P(D \cap F1)}{P(D)} = \frac{P(D/F1) * F1}{P(D)} = \frac{0{,}02 * 0{,}5}{0{,}025} = 0{,}4$$

7) (1,0 ponto) Um grande lote de 10.000 de calças jeans foi comprado de uma determinada fábrica e sabe-se que, normalmente, 10% das peças são defeituosas. Duas peças são extraídas. Qual a probabilidade de ambas estarem perfeitas, nos seguintes casos:

(a) as peças foram retiradas simultaneamente;

Solução

Se são tiradas simultanemanente, são eventos sem reposição. Neste caso temos:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathbf{B}|A) \times P(A) = \frac{8999}{9999} \times \frac{9000}{10000} \cong 0.81$$

(b) as peças foram retiradas em sequencia, e repostas a cada retirada.

Solução

$$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathbf{B}) \times P(A) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$$

8) (1,0 ponto) Um atirador acerta na mosca do alvo, 20% dos tiros.

(a) Se ele der 10 tiros, qual a probabilidade de ele acertar na mosca no máximo 1 vez?

Solução

Neste caso podemos aplicar o modelo binomial, pois trata-se de ensaios de Bernoulli independentes, todos com a mesma probabilidade de sucesso. O evento de interesse (sucesso) é acertar na mosca do alvo e sua probabilidade de ocorrência é 0.20.
O modelo pode ser descrito por:

$X \sim bin(10, 0.2)$, onde $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0,1,\dots,n$.

A probabilidade de acertar na mosca no máximo uma vez é:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) =$

$\binom{10}{0} 0.2^0 (1-0.2)^{10-0} + \binom{10}{1} 0.2^1 (1-0.2)^{10-1} =$

$1 \times 1 \times 0.8^{10} + 10 \times 0.2 \times 0.8^9 = 0.8^{10} + 2 \times 0.8^9 = 0.37581.$

(b) a probabilidade de ele acertar na mosca pela primeira vez no 10º tiro?

<u>Solução</u>

Neste caso, pode-se aplicar o modelo Geométrico, pois podemos pensar em k ensaios de Bernoulli que precedem o 1º sucesso. Representamos por $X \sim Geom(0,2)$, onde $P(X = k) = p(1-p)^k$, $k = 0,1,2,\dots$

A probabilidade de acertar na mosca pela 1ª vez no 10º tiro é:

$0.2(1-0.2)^9 = 0.2 \times 0.8^9 = 0.02684.$

9) (1,0 ponto) Dois adversários A e B disputam uma série de 8 partidas de um determinado jogo. A probabilidade do jogador A ganhar uma partida é 0,6 e não há empate. Qual é a probabilidade dele (jogador A) ganhar a série (ganhar a maioria dos jogos)?

<u>Solução</u>

Como não é permitido o empate, só podemos ter vitórias ou derrotas. Como a probabilidade de A ganhar uma partida é 0.6 e serão 8 partidas, esse experimento pode ser caracterizado por uma distribuição Binomial, onde

X= número de vitórias de A. Ou seja, X~Bin (8, 0.6). Assim, a probabilidade de A ganhar a série é obtida pelo cálculo P(X $\geq$ 5), isto é A ganha mais partidas que B.

$P(X \geq 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) =$

$= \binom{8}{5}(0.6)^5 (0.4)^3 + \binom{8}{6}(0.6)^6 (0.4)^2 + \binom{8}{7}(0.6)^7 (0.4)^1 + \binom{8}{8}(0.6)^8 (0.4)^0 =$

$= 56 \times 0.0778 \times 0.064 + 28 \times 0.04666 \times 0.16 + 8 \times 0.02799 \times$ 0.4 + $1 \times 0.01679 \times 1$

$= 0.2788 + 0.2090 + 0.0896 + 0.01679 = 0.59$

10) (1,0 ponto) Entre os 16 programadores de uma empresa, 12 são d sexo masculino. A empresa decide sortear 5 programadores para fazer um curso avançado de programação. Qual é a probabilidade dos 5 sorteados serem do sexo masculino?

<u>Solução</u>

Sucesso = sexo masculino. Então, se X= número de homens sorteados, então

X ~*hiper* (16 ; 12; 5).

Logo,

$$P(X = 5) = \frac{\binom{12}{5}}{\binom{16}{5}} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{16 \times 15 \times 14 \times 13 \times 12} = \frac{95040}{524160} = 0.1813$$

11) (1,0 ponto) Em um certo tipo de fabricação de fita magnética, ocorrem cortes a uma taxa de um corte por 2000 pés. Qual é a probabilidade de que um rolo com comprimento de 4000 pés apresente no máximo dois cortes? Pelo menos dois cortes?

Seja Y= número de cortes num rolo de 4000 pés.

Então a taxa de ocorrência é 2 , significando o número médio de cortes num rolo de 4000 pés. Assim, Y~Po(2).

$$P(\text{no máximo } 2 \text{ cortes}) = P(Y \leq 2) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$$
$$= \exp(-2)\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) = 5\exp(-2) = 5 \times 0.1353 = 0.6765$$

$$P(\text{pelo menos } 2 \text{ cortes}) = P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)]$$
$$= 1 - \exp(-2)\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!}\right) = 1 - 3\exp(-2) = 1 - 3 \times 0.1353$$
$$= 1 - 0.4059 = 0.5941$$