PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
2ª. AVALIAÇÃO PRESENCIAL
2º. Semestre de 2013
Profa. Keila Mara Cassiano (UFF)

GABARITO

1. **(3,0 pontos)** Considere a tabela de distribuição de probabilidades abaixo:

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	K	$2K$	$(K^2 + 0{,}16)$	$0{,}1$	$K/2$

a) **(1,0 pt)** Determine o valor de K para que $f_X(x)$ seja uma fdp;
b) **(1,0 pt)** Calcule Pr $(2 < X \leq 4{,}5)$**;**
c) **(1,0 pt)** Calcule $E(X)$.

2. **(2,0 pontos)** Uma montagem eletrônica é formada por dois subsistemas *A* e *B*. De procedimentos de ensaio anteriores, as seguintes probabilidades se admitem conhecidas:

$$\Pr(A\ falhe) = 0{,}20, \qquad \Pr(A\ e\ B\ falhem) = 0{,}15,$$
$$\Pr(B\ falhe\ sozinho) = 0{,}15.$$

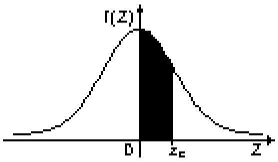
Calcule as seguintes probabilidades:
a) **(1,0 pt)** $\Pr(A\ falhe \mid B\ tenha\ falhado)$;
b) **(1,0 pt)** $\Pr(A\ falhe\ sozinho)$.

3. **(1,0 pontos)** Apenas 10% da população de um país possui pós-graduação. Em uma amostra de 5 cidadãos deste país, determine a probabilidade de:
a) **(0,5 pt)** Todos terem pós-graduação;
b) **(0,5 pt)** No máximo 1 ter pós-graduação.

4. **(2,0 pontos)** 3% das peças produzidas pela fábrica A são defeituosas e 4% das peças da fábrica B são defeituosas. Das peças vendidas na Loja L, 60% são provenientes da fábrica A e as demais são provenientes da fábrica B. Ao selecionar uma peça aleatoriamente nesta loja:
a) **(1,0 pt)** Determine a probabilidade de ela ser defeituosa;
b) **(1,0 pt)** Qual a fábrica mais provável de tê-la produzida, se ela é defeituosa?

5. **(2,0 pontos)** Uma empresa de fabricação de óleos de soja garante que todas as embalagens de seu produto contêm 900 ml. No entanto, uma pesquisa recente verificou que as embalagens de óleo de soja desta empresa têm peso normalmente distribuído com média de 890 ml e desvio-padrão de 20 ml. Qual a probabilidade de um cidadão, ao comprar este produto em um supermercado, pegar uma embalagem com peso:
a) **(1,0 pt)** Acima de 900 ml?
b) **(1,0 pt)** Entre 880 ml e 895 ml?

Anexo:

Parte da tabela de distribuição normal padrão. 

$Pr(0 \le Z \le Z_c)$

Z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767

Solução:

1)

a)
Para que $f_X(x)$ seja uma fdp é necessário que a soma das probabilidades seja igual a 1. Assim:

$$K + 2K + (K^2 + 0{,}16) + 0{,}1 + \frac{K}{2} = 1 \Rightarrow 3K + K^2 + 0{,}26 + \frac{K}{2} = 1$$

(multiplicando ambos os lados por 2, obtemos)

$$\Rightarrow 6K + 2K^2 + 0{,}52 + K = 2 \Rightarrow 7K + 2K^2 + 0{,}52 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2K^2 + 7K - 1{,}48 = 0.$$

Resolvendo a equação do 2º grau...

$$K = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - \left(4 \times 2 \times (-1{,}48)\right)}}{2 \times 2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 11{,}84}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{60{,}84}}{4}$$

$$K = \frac{-7 \pm 7{,}8}{4} \Rightarrow \begin{cases} K_1 = \dfrac{-7 + 7{,}8}{4} = \dfrac{0{,}8}{4} = 0{,}2 \\ K_2 = \dfrac{-7 - 7{,}8}{4} = \dfrac{-14{,}8}{4} = -3{,}7 \end{cases}$$

Como *K* é uma probabilidade, então:

$$\boldsymbol{K = 0,2.}$$

b)
Com este valor de *K*, podemos reescrever a distribuição de probabilidades assim:

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0,2	0,4	$(0{,}2^2 + 0{,}16)$	0,1	0,2/2

Asssim:

x	1	2	3	4	5
$f_X(x)$	0,2	0,4	0,2	0,1	0,1

Logo:

$$\Pr(2 < X \leq 4{,}5) = \Pr(3) + \Pr(4) = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3.$$

Assim:

$$\Pr(2 < X \leq 4{,}5) = \boldsymbol{0,3.}$$

c)

$$E(X) = (1 \times 0{,}2) + (2 \times 0{,}4) + (3 \times 0{,}2) + (4 \times 0{,}1) + (5 \times 0{,}1)$$
$$= 0{,}2 + 0{,}8 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}5 = 2{,}5.$$

Logo:

$$\boldsymbol{E(X) = 2,5.}$$

2)

a) Observe que

$$\Pr(A\ falhe \mid B\ tenha\ falhado) = \frac{\Pr(A\ e\ B\ falhem)}{\Pr(\ B\ falhe)}$$

E mais:

$\Pr(\ B\ falhe) = \Pr(B\ falhe\ sozinho) + \Pr(A\ e\ B\ falhem) = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}30.$

Assim:

$$\Pr(A\ falhe \mid B\ tenha\ falhado) = \frac{\Pr(A\ e\ B\ falhem)}{\Pr(\ B\ falhe)} = \frac{0{,}15}{0{,}30} = \mathbf{0{,}5}.$$

Logo:

$$\Pr(A\ falhe \mid B\ tenha\ falhado) = \mathbf{0{,}5}.$$

b) $\Pr(A\ falhe\ sozinho) = \Pr(A\ falhe) - \Pr(A\ e\ B\ falhem) = 0{,}20 - 0{,}15 = \mathbf{0{,}05.}$

Logo:

$$\Pr(A\ falhe\ sozinho) = \mathbf{0{,}05}.$$

****

3)

Problema de Distribuição Binomial de Probabilidade. Na ocasião, a probabilidade de sucesso em um experimento Bernoulli é $p = 0{,}1$ e o número de experimentos é $n = 5$. Logo, considerando X a variável aleatória que conta o número de pessoas com pós-graduação, então: $X \sim Binomial(5; 0{,}1)$.

a)

$$\Pr(X = 5) = \binom{5}{5}(0{,}1)^5(0{,}9)^0 = 1 \times 0{,}00001 \times 1 = \mathbf{0{,}00001}.$$

b)

$$\Pr(X \leq 1) = \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) = \binom{5}{0}(0{,}1)^0(0{,}9)^5 + \binom{5}{1}(0{,}1)^1(0{,}9)^4$$
$$= (1 \times 1 \times 0{,}59049) + (5 \times 0{,}1 \times 0{,}6561)$$
$$= 0{,}59049 + 0{,}32805 = \mathbf{0{,}91854}.$$

****

4)

Considere o evento:

D: a peça é defeituosa.

Do enunciado, temos:

$\Pr(A) = 0{,}6, \qquad \Pr(B) = 0{,}4, \quad \Pr(D|A) = 0{,}03, \qquad \Pr(D|B) = 0{,}04$

a) Usemos o Teorema da Probabilidade Total.

$$Pr(D) = Pr(A)\Pr(D|A) + \Pr(B)\Pr\ (D|B)$$
$$= (0{,}6 \times 0{,}03) + (0{,}4 \times 0{,}04) = 0{,}018 + 0{,}016 = \mathbf{0{,}034}.$$

Logo:

$$\Pr(D) = 0{,}034 = \mathbf{3{,}4}\%$$

b) Usemos o Teorema de Bayes:

Inicialmente, a probabilidade de a peça ter sido produzida por A, dado que é defeituosa:

$$\Pr(A|D) = \frac{\Pr(A)\Pr(D|A)}{\Pr(D)} = \frac{0{,}018}{0{,}034} = \mathbf{0{,}5294}.$$

Agora a probabilidade de a peça ter sido produzida pela fábrica B, dado que é defeituosa:

$$\Pr(B|D) = \frac{\Pr(B)\Pr(D|B)}{\Pr(D)} = \frac{0{,}016}{0{,}034} = \mathbf{0{,}4706}.$$

Como $\Pr(A|D) > \Pr(B|D)$, então a fábrica mais provável de ter produzido a peça defeituosa é a fábrica **A.**

****
5)

Seja X a variável peso da embalagem de óleo, então $X \sim N(890; 20^2)$.

a)

$$\Pr(X > 900) = \Pr\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{900-890}{20}\right) = \Pr\left(Z > \frac{10}{20}\right) = \Pr(Z > 0{,}5)$$
$$= 0{,}5 - tab(0{,}5) = 0{,}5 - 0{,}1915 = \mathbf{0{,}3085}.$$

Apenas 30,85% de probabilidade.

b)

$$\Pr(880 \leq X \leq 895) = \Pr\left(\frac{880-890}{20} \leq Z \leq \frac{895-890}{20}\right) = \Pr\left(-\frac{10}{20} \leq Z \leq \frac{5}{20}\right)$$
$$= \Pr(-0{,}5 \leq Z \leq 0{,}25) = tab(0{,}5) + tab(0{,}25) = 0{,}1915 + 0{,}0987 = \mathbf{0{,}2902}.$$

Apenas 29,02% de probabilidade.