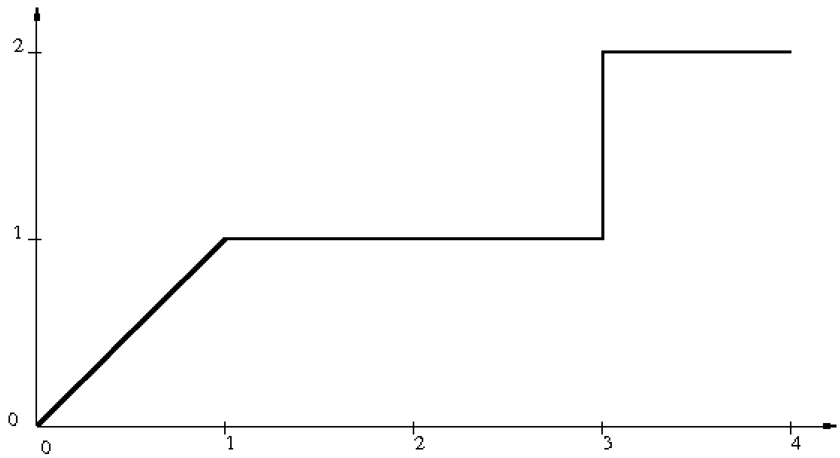
Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 1° semestre de 2011
GABARITO

1 - Primeira questão (1,5 pontos)

Abaixo é apresentado o gráfico de uma distribuição que deve ser normalizada, ou seja, multiplicada por uma constante C de forma que a sua integral seja igual a 1. Feito isto teremos uma distribuição de probabilidade válida pois a função apresentada é não negativa em todo o domínio [0, 4].



a) Calcule a constante de normalização; (0,5)

RESOLUÇÃO:
Para este item existem pelo menos duas maneiras de resolver.

A primeira é perceber que a área total é a soma da área de um triângulo e dois retângulos. O triângulo vai de x = 0 até x = 1 com altura 1 com área A_t. Um retângulo vai de 1 até 3 com altura 1 e área A_{r1}. O outro retângulo começa em 3 e termina em 4 com altura 2 com área A_{r2}. Assim, a área total, baseando no valores do gráfico será

$$A = A_t + A_{r1} + A_{r2} = \frac{1\times 1}{2} + 2\times 1 + 1\times 2 = \frac{9}{2}$$

Na segunda maneira se determina as equações de cada segmento contínuo da distribuição, o que nos será útil no item b. Assim teremos

$$y=x\,;\,x\in[0,1)\qquad y=1\,;\,x\in[1,3)\qquad y=2\,;\,x\in[3,4)$$

Integrando teremos

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx=\int_0^4 f(x)dx=\int_0^1 x\,dx+\int_1^3 1\,dx+\int_3^4 2\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_1^3+2x\Big|_3^4=\frac{1}{2}+2+2=\frac{9}{2}\quad .$$

Assim a constante de normalização é $\frac{2}{9}$ **.**

b) Feito isto calcule a média da distribuição obtida; (0,5)

RESOLUÇÃO:
Partindo da definição de média de distribuições contínuas teremos a resolução do problema, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,F(x)\,dx=\frac{2}{9}\int_0^4 x\,f(x)\,dx=\frac{2}{9}\left(\int_0^1 x^2\,dx+\int_1^3 x\,dx+\int_3^4 2\,x\,dx\right)$$

ou ainda

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,F(x)\,dx=\frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_1^3+2\,\frac{x^2}{2}\Big|_3^4\right)=\frac{2}{9}\left[\frac{1}{3}+\frac{9-1}{2}+(16-9)\right]=\frac{68}{27}\approx 2{,}5185$$

c) Calcule a variância da distribuição obtida. (0,5).

RESOLUÇÃO:
Aqui partiremos da definição de variância para distribuições contínuas

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,F(x)dx=\frac{2}{9}\int_0^4 f(x)\,dx=\frac{2}{9}\left(\int_0^1 x^3\,dx+\int_1^3 x^2\,dx+\int_3^4 2\,x^2\,dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2\,F(x)dx=\frac{2}{9}\left(\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\frac{x^3}{3}\Big|_1^3+2\,\frac{x^2}{3}\Big|_3^4\right)=\frac{2}{9}\left[\frac{1}{4}+\frac{27-1}{3}+\frac{2}{3}(64-27)\right]=\frac{133}{18}=7{,}3888...$$

2 – Segunda questão (2,0 pontos)
II) Verifique quais dentre estas funções abaixo são distribuição de probabilidade.

a) $f(x)=\frac{3}{7}x^2;x\in[1,2]$

RESOLUÇÃO:
Observemos que esta função é não negativa em todo o domínio especificado. Resta testar se a integral é igual a 1:

$$\int_1^2 \frac{3}{7}x^2\,dx=\frac{3}{7}\int_1^2 x^2\,dx=\frac{3}{7}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{3}{7}\,\frac{8-1}{3}=1$$

Portanto é distribuição de probabilidade.

b) $f(x) = sen(x); x \in [0, \pi/2]$

RESOLUÇÃO:
Esta função também é não negativa dentro do domínio de especificação. Da mesma forma integremos a função

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(x)dx = -\cos(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0-(-1) = 1$$

Também é distribuição de probabilidade.

c) $f(x) = sen(x); x \in [\pi/4, \quad 3\pi/4]$

RESOLUÇÃO:

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} sen(x)\,dx = -\cos(x)|_{\pi/4}^{3\pi/4} = -\cos(3\pi/4) + \cos(\pi/4) = -0{,}71 + 0{,}71 = 0$$

Apesar da função f(x) seja não negativa no intervalo dado a integral nesse intervalo não é igual a 1 e portanto a função não é uma distribuição de probabilidade.

d) $f(x) = \frac{e^x}{e}; x \in [0,1]$

RESOLUÇÃO:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e} dx = \frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx = \frac{1}{e} e^1 - e^0 = \frac{e-1}{e} \approx \frac{2{,}718281-1}{2{,}718281} \approx 0{,}63212$$

ou seja, não é uma distribuição de probabilidade, embora seja não negativa no domínio.

3 – Terceira questão (2,0 pontos)

Um conjunto de dados tem média 5,3 e variância igual a 1,44. Supondo que a amostra permita o uso do modelo Normal calcule a probabilidade de a média amostral ser (2 pontos):

RESOLUÇÃO:
É dado que a distribuição é Normal com média 5,3 e desvio padrão 1,2 pois a variância é 1,44. Aplicando diretamente a fórmula

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \le Z \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

ou de outro modo

$$P(X>a)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)=P\left(Z>\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

a) Maior que 5; (0,5)

RESOLUÇÃO:

$$P(X>5)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{5-5,3}{1,2}\right)=P(Z>-0,25)=0,5+0,0987=0,5987$$

b) Menor que 7; (0,5)

RESOLUÇÃO:

$$P(X<7)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{7-5,3}{1,2}\right)=P\left(Z<\frac{1,7}{1,2}\right)=P(Z<1,4166)=0,5+0,4207=0,9207$$

c) Estar entre 5 e 7. (0,5)

RESOLUÇÃO:

$$P(5<X<7)=P(X<7)-P(X>5)=0,322$$

d) Estar entre 5 e 9 (0,5)

RESOLUÇÃO:

$$P(5\leq X\leq 9)=P\left(\frac{5-5,3}{1,2}\leq Z\leq\frac{9-5,3}{1,2}\right)=P(-0,25\leq Z\leq 3,0833)$$

ou

$$P(5\leq X\leq 9)=P(Z>-0,25)+P(Z<3,083)=0,4207+0,4990=0,9197$$

4- Quarta questão (1,5 pontos)

Foram colhidas amostras de sangue de pessoas que viviam numa zona rural para uma investigação sobre contaminação por um determinado defensivo agrícola. Numa avaliação preliminar foram colhidas amostras de 15 pessoas e os valores medidos estão apresentados abaixo em unidades arbitrárias (UA):

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
UA	4,33	6,31	7,22	8,01	5,12	6,11	4,92	5,61	6,77	8,31	9,02	6,15	5,08	6,72	7,56

O valor máximo aceitável é de 5,9 UA.

Faça as hipóteses cabíveis à situação e calcule com fator de certeza de 5% **(nível de significância)** se podemos considerar que o índice de contaminação foi ultrapassado.

RESOLUÇÃO:

A média amostral é $\bar{X}=\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}=\frac{97,24}{15}\approx 6,4826$ **enquanto a estimativa para a variância amostral é dada por**

$$\sigma^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{1}^{n} X_i^2-n\bar{X}^2\right)=\frac{1}{14}(656,2688-630,3745)\approx 1,8495$$

Assim,

$$\alpha=P(\bar{X}<x_c|\mu=5,9)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{x_c-5,9}{0,4775}\right)=P(Z<z_c)$$

$$z_c=\frac{x_c-5,9}{0,4775}\Rightarrow x_c=5,9+z_c 0.4775$$

Com o fator igual a 5%, temos pela tabela da distribuição Normal o valor -1,64 que nos dá para x_c = 5,1169, ou seja, a média de colesterol está abaixo do limite aceitável.

5 – Quinta questão (1,5 pontos)

Uma pesquisa médica analisa o índice de obesidade se uma população. Numa amostra de 30 pessoas, todas de mesma altura, verificou-se o valor de 72,6 Kg com variância amostral de 8,6 Kg^2. Deseja-se testar, ao nível de significância de 10%, se a média é igual ou é menor que 67 Kg.

RESOLUÇÃO:

Aqui vamos supor que a distribuição seja Normal. Como foram 30 pessoas teremos a distribuição $N(67; 8,6/30)=N(67; 0,2866)$ **.**

$$\alpha=P(\bar{X}<x_c|\mu=67)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{x_c-67}{0,5353}\right)=P(Z<z_c)$$

No caso

$$z_c=\frac{x_c-67}{0,65353}\Rightarrow x_c=67+z_c 0,5353$$

Como aqui $\alpha=0{,}1$, determinamos z_c procurando na tabela normal o complemento de 0,1 o que nos dá -1,28. Assim temos x_c = 66,3148, logo a a média estimada se encontra abaixo de 67 Kg com 10% de significância.

6 - Sexta questão (1,5 pontos)

Numa linha de produção de uma granja temos que a variância do peso dos frangos igual à 59 g^2. Foram retirados uma duzia de frangos da linha de produção e o peso médio desta amostra foi de 1720g. Estime, baseado nestas informações e supondo que este problema segue um modelo Normal, a probabilidade de encontrarmos um frango escolhido aleatoriamente com mais de 1860g.

RESOLUÇÃO:

O que queremos aqui é a probabilidade de encontrarmos um único elemento retirado aleatoriamente baseados nos dados de uma amostra. Esta probabilidade será

$$P(X>1860)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{1860-1720}{7{,}6811}\right)=P(Z>18{,}2265)=0$$

ou seja, baseado nesta amostra é altamente improvável encontrar um frango com 1860g ou maior.

Atenção: Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.