Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 2° semestre de 2017
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia de Paula Toledo

1 - Primeira questão (2,0 pontos)

Num determinado experimento foi associada à função, $f(x)=x^4-8x^3$, a probabilidade de determinar certos eventos para valores no intervalo [-1, 0], supondo que não possam ocorrer estes eventos fora deste intervalo. Determine a constante de normalização e, de posse da distribuição de probabilidade, calcule

Resolução:

Observe que a função é não negativa no intervalo apresentado, portanto, integremos

$$\int_{-1}^{0}\left(x^4-8x^3\right)dx=\int_{-1}^{0}x^4\,dx-8\int_{-1}^{0}x^3\,dx=\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{0}-\frac{8}{4}x^4\Big|_{-1}^{0}=\frac{-(-1)^5}{5}+2\times(-1)^4=\frac{1}{5}+2=\frac{11}{5}$$

portanto a distribuição de probabilidade é dada por

$$f(x)=\frac{5}{11}\left(x^4-8x^3\right) .$$

a) Calcule o valor médio da distribuição (0,5 ponto);

Resolução:

Pela definição da média teremos

$$\mu=\int_{a}^{b}x\,f(x)\,dx$$

ou

$$\mu=\int_{-1}^{0}x\,f(x)dx=\frac{5}{11}\left[\int_{-1}^{0}x\times x^4\,dx-8\int_{-1}^{0}x\times x^3\,dx\right]=\frac{5}{11}\left[\int_{-1}^{0}x^5\,dx-8\int_{-1}^{0}x^4\,dx\right]=\frac{5}{11}\left[\frac{x^6}{6}\Big|_{-1}^{0}-8\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{0}\right]=\frac{5}{11}\left[\frac{-(-1)^6}{6}+\frac{8}{5}(-1)^5\right]$$

ou seja

$$\mu=-\frac{5}{66}-\frac{8}{11}=-\frac{53}{66}\approx-0{,}8030$$

b) Calcule a variância da distribuição (1,0 ponto);

Resolução:

Partindo da definição de variância

$$\sigma^2=\int_{a}^{b}x^2 f(x)\,dx-\mu^2$$

e já conhecendo a média, calculemos a integral

$$\sigma^2=\int_{-1}^{0} x^2 f(x)dx=\frac{5}{11}\left[\int_{-1}^{0} x^2\times x^4\,dx-8\int_{-1}^{0} x^2\times x^3\,dx\right]=\frac{5}{11}\left[\int_{-1}^{0} x^6\,dx-8\int_{-1}^{0} x^5 dx\right]=\frac{5}{11}\left[\frac{x^7}{7}\Big|_{-1}^{0}-8\frac{x^6}{6}\Big|_{-1}^{0}\right]$$

$$\sigma^2=\frac{5}{11}\left[\frac{-(-1)^7}{7}+\frac{8}{6}(-1)^6\right]=\frac{5}{77}+\frac{20}{33}\approx 0{,}6709 \quad .$$

c) Calcule a moda desta distribuição (0,5 ponto).
Resolução:
Por inspeção verificamos que a função tem seu ponto de máximo em -1, decrescendo até zero a medida que o argumento vai a zero. Pela definição de moda, ponto no qual a probabilidade é máxima, vemos que a distribuição é monomodal e o valor da moda é -1.

2 – Segunda questão (1,5 pontos)
Verifique se as expressões abaixo são funções de probabilidade. Caso alguma não seja devido à constante de normalização, apresente a função normalizada (ou seja, a distribuição de probabilidade) e a média da(s) mesma(s).

a) $f(x)=3x-e^x;\, x\in[-1,1]$
Resolução:
Por inspeção, verificamos que a função toma valores negativos (veja, por exemplo, a função no ponto x = 0). Portanto, não pode ser candidata a uma distribuição de probabilidade.

b) $f(x)=\frac{1}{x+2};\, x\in[-1,1]$
Resolução:
É bem fácil de perceber que esta função não toma valores negativos no intervalo dado. Integremos

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x+2}=\ln(x+2)\Big|_{-1}^{1}=\ln(3)-\ln(1)=\ln(3)\approx 1{,}0986$$

e podemos escrever a distribuição de probabilidade como

$$f(x)=\frac{1}{\ln(3)}\frac{1}{x+2};\, x\in[-1,1] \quad .$$

Calculemos a média

$$\mu=\int_{-1}^{1} x f(x)dx=\frac{1}{\ln(3)}\int_{-1}^{1}\frac{x}{x+2}\,dx=\frac{1}{\ln(3)}\left[x-2\ln(x+2)\right]\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{\ln(3)}[x]\Big|_{-1}^{1}-\frac{2}{\ln(3)}\left[\ln(x+2)\right]\Big|_{-1}^{1}$$

ou

$$\mu=\frac{2}{\ln(3)}-\frac{2}{\ln(3)}\left[\ln(3)-\ln(1)\right]=\frac{2}{\ln(3)}-\frac{2}{\ln(3)}\ln(3)\approx -0{,}1795 \quad .$$

c) $f(x)=sen(x/2);x\in[0,\pi]$
Resolução:
Sabemos que esta função no intervalo dado é não negativa. Integremos

$$\int_o^{\pi} sen(x/2)\,dx=-2\cos(x/2)|_0^{\pi}=0-(-2)=2 \quad ,$$

logo a distribuição de probabilidade será

$$f(x)=\frac{1}{2}sen(x/2);x\in[0,\pi] \quad .$$

Determinemos a média

$$\mu=\int_0^{\pi} x f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,sen(x/2)\,dx=\frac{1}{2}[4sen(x/2)-2x\cos(x/2)]|_0^{\pi}=2sen(x/2)|_0^{\pi}-x\cos(x/2)|_0^{\pi}$$

e então

$$\mu=\int_0^{\pi} x f(x)\,dx=2 \quad .$$

3 – Terceira questão (1,0 ponto)
Uma empresa utiliza material de demolição de um antigo edifício para baratear os custos na construção de um novo e, para isto, faz uso de uma máquina que tritura a estrutura de concreto da demolição. Nos testes de regulagem da máquina foram recolhidas 50 amostras das quais se esperavam que o tamanho médio dos fragmentos estivessem entre 22 e 28 cm^3. A média das amostras foi 26 cm^3. De outra construção já se tinha avaliado uma variância de 61 cm^6. Calcule qual a probabilidade da máquina estar trabalhando dentro das especificações.

Resolução:
Usaremos novamente a fórmula de probabilidade para a distribuição Normal

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad .$$

Com os valores dados na questão teremos

$$P(22<X<28)=P\left(\frac{22-26}{\sqrt{61}/\sqrt{50}}<Z<\frac{28-26}{\sqrt{61}/\sqrt{50}}\right)\approx P\left(-\frac{4}{1,1045}<Z<\frac{2}{1,1045}\right)\approx P(-3,62<Z<1,81)$$

ou

$$P(22<X<28)\approx P(-3,62<Z<1,81)=0,5+0,4649=0,9649 \quad ,$$

ou seja, há uma probabilidade maior que 96% da máquina estar regulada.

4 – Quarta questão (1,0 ponto)
Calcule o intervalo de confiança para a dimensão dos fragmentos obtidos na máquina trituradora da questão 3 com um coeficiente de confiança de 70%.
Resolução:
Usaremos a fórmula

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Como as informações que temos, escreveremos

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{61}{50}}=1,1045$$

e temos a solicitação de que $\gamma=0,7$ **, assim ficamos com**

$$IC(\mu,\gamma)=[26-z_{0,35}1,1045\,;26+z_{0,35}1,1045].$$

Usando a tabela de distribuição Normal, tiramos

$$z_{0,4}=1,04 \quad ,$$

o que nos leva a

$$IC(\mu,\gamma)=[26-1,04\times1,1045\,;26+1,04\times1,1045]\approx[24,85\,;27,15].$$

5 – Quinta questão (1,0 ponto)
Numa cidade se deseja fazer um levantamento do peso de seus habitantes adultos. Uma amostra considerada significativa (100 habitantes) deu como resultado 64,8 kg. No entanto, a média real não podia ser levantada no tempo da pesquisa pois a cidade tinha 34 100 habitantes adultos segundo o último recenseamento. Se estima que a variância seja de 72,16 kg^2. Estime o intervalo de confiança para a média com coeficiente de confiança de 95%.
Resolução:
A expressão para o intervalo de confiança é dada por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Pelos dados do problema sabemos que

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{72,16}}{\sqrt{100}}=0,8494$ **e consultando a tabela de distribuição normal** $z_{\gamma/2}=z_{0,475}=1,96$.
Assim teremos

$$IC(\mu,\gamma)=[64,8-1,96\times0,8494\,;\,64,8+1,96\times0,8494]=[63,1351\,;66,4648].$$

6 – Sexta questão (2,5 pontos)
Calcule as seguintes probabilidades.
a) P(-0,32<X<-0,22) para a distribuição de probabilidade da primeira questão;
Resolução:
Neste caso a probabilidade será dada por

$$P(-0{,}32<X<-0{,}22)=\frac{5}{11}\int_{-0{,}32}^{-0{,}22}(x^4-8x^3)=\frac{5}{11}\left[\int_{-0{,}32}^{-0{,}22}x^4-8\int_{-0{,}32}^{-0{,}22}x^3\right]=\frac{5}{11}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_{-0{,}32}^{-0{,}22}-8\frac{x^4}{4}\Big|_{-0{,}32}^{-0{,}22}\right]$$

e então

$$P(-0{,}32<X<-0{,}22)=\frac{5}{11}\left[\frac{x^5}{5}\Big|_{-0{,}32}^{-0{,}22}-8\frac{x^4}{4}\Big|_{-0{,}32}^{-0{,}22}\right]=\frac{(-0{,}22)^5-(-0{,}32)^5}{11}-\frac{10}{11}[(-0{,}22)^4-(-0{,}32)^4]$$

$$P(-0{,}32<X<-0{,}22)\approx 0{,}00766-0{,}000258\approx 0{,}007 \quad .$$

b) P(13,22<X<15,34) para a distribuição Normal de média 14,4 e variância 8,7;
Resolução:
Usemos a definição da probabilidade neste caso, ou seja,

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right) .$$

Para os dados do problema teremos

$$P(13{,}22<X<15{,}34)=P\left(\frac{13{,}22-14{,}4}{\sqrt{8{,}7}}<Z<\frac{15{,}34-14{,}4}{\sqrt{8{,}7}}\right)\approx P\left(\frac{-1{,}18}{2{,}9496}<Z<\frac{0{,}94}{2{,}9496}\right)=P(-0{,}4<Z<0{,}3187)$$

logo

$$P(13{,}22<X<15{,}34)\approx P(0{,}4<Z)+P(0{,}32<Z)=0{,}1554+0{,}1255=0{,}2809 .$$

c) P(23,12<X<26,34) para a distribuição Normal de média 22,3 e desvio padrão 19,6;

$$P(23{,}4<X<26{,}34)=P\left(\frac{23{,}12-22{,}3}{19{,}6}<Z<\frac{26{,}34-22{,}3}{19{,}6}\right)=P\left(\frac{0{,}82}{19{,}6}<Z<\frac{4{,}04}{19{,}6}\right)\approx P(0{,}04<Z<0{,}2)$$

e então,

$$P(23{,}4<X<26{,}34)=P(Z<0{,}2)-P(0{,}04<Z)=0{,}0793-0{,}0160=0{,}0633 .$$

d) P(23,4<X<45,4) para uma distribuição de Exponencial com $\alpha=21{,}2$;
Resolução:
Sendo a distribuição Exponencial dada por

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b}$$

aplicando os dados do problema teremos

$$P(23{,}4<X<45{,}4)=e^{-21{,}2\times 23{,}4}-e^{-21{,}2\times 45{,}4}=0 \quad .$$

e) P(23,2<X<41,1) para uma distribuição Uniforme no intervalo [22, 42].

Resolução:

Aqui aplicamos diretamente os valores na expressão para a distribuição Uniforme, ou seja,

$$P(23{,}2<X<41{,}1)\frac{1}{42-22}\int_{23{,}2}^{41{,}1} dx=\frac{1}{20}[41{,}1-23{,}2]=\frac{17{,}9}{20}=0{,}895$$

7 – Sétima questão (1,0 ponto)

Um pequeno hotel avaliava o desgaste das torneiras de seus apartamentos. Foi elaborado uma tabela com o tempo entre trocas das carrapetas das torneiras e se obteve os seguintes valores em anos: 1,1; 1,2; 0,9; 1,4; 1,2; 0,5; 1,3; 0,8; 0,9; 1,4; 1,0; 0,6; 0,8; 0,7; 1,1; 1,0.

a) Calcule estimativas para a média usando os estimadores abaixo:

Resolução:

Para o primeiro estimador teremos

$$\hat{\mu}_1=(valor\ máximo+valor\ mínimo)/2=\frac{1{,}4+0{,}5}{2}=0{,}95$$

Para o segundo teremos

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i=\frac{1}{16}(1{,}1+1{,}2+0{,}9+1{,}4+1{,}2+0{,}5+1{,}3+0{,}8+0{,}9+1{,}4+1{,}0+0{,}6+0{,}8+0{,}7+1{,}1+1{,}0)=\frac{15{,}9}{16}=0{,}99375$$

b) Calcule também as estimativas para a variância baseado nos estimadores abaixo:

Resolução:

Para o estimador $\hat{\sigma}_2^{\,2}=\left(\frac{valor\ máximo-valor\ mínimo}{2}\right)^2$

teremos

$$\hat{\sigma}_2^{\,2}=\left(\frac{valor\ máximo-valor\ mínimo}{2}\right)^2=\left(\frac{1{,}4-0{,}5}{2}\right)^2=0{,}2025$$

Para o outro estimador $\hat{\sigma}_1^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i-\bar{X})^2$ **usaremos o** $\bar{X}=0{,}99375$ **.**

Assim teremos

$$\hat{\sigma}_1^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i-\bar{X})^2=\frac{1{,}019375}{16}=0{,}069336 \quad .$$

Observe que os estimadores $\hat{\mu}_2=\frac{1}{n}\sum_1^n x_i$ **e** $\hat{\sigma}_1^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_1^n (x_i-\bar{X})^2$ **são consistentes e não viciados e, portanto, são mais confiáveis.**

Atenção:

I) Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

II) Todos os cálculos deverão ser feitos com pelo menos quatro casas decimais e arrendondados para duas APENAS ao final, seja na lista ou na prova.

III) Tenha cuidado quanto a notação. Caso não a siga, você terá pontos descontados, seja na lista ou na prova.

IV) Como já foi divulgado por vários meios, só será aceita a entrega da AD que for digitada em algum editor de texto e depois convertida para o formato pdf. A AD que for entregue em outro formato, inclusive digitalizada, será descartada e a nota será 0 (zero).

V) Na avaliação presencial não será aceito o uso de celulares como calculadoras.

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.