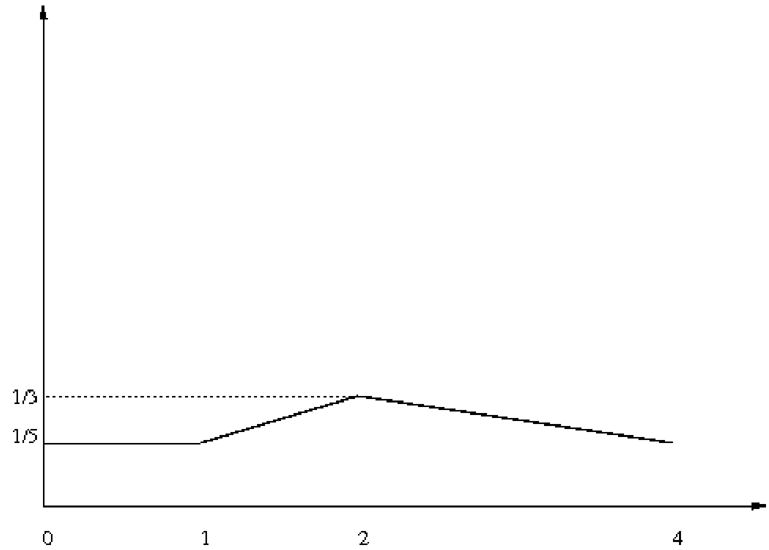
Fundação CECIERJ - Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 1° semestre de 2009

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia de Paula Toledo

1 - Primeira questão (2,0 pontos)

Dado o gráfico abaixo:



a) Demonstre que f(x) é uma densidade;

Da figura tiramos que os valores da função apresentada é positiva para todos os valores, o que cumpre uma das condições de ser densidade de probabilidade. Podemos dividir a figura abaixo em três regiões: A primeira um retângulo de medidas 1 por 1/5, depois um trapézio de bases 1/5 e 1/3 e a outra dimensão também igual a 1 e finalmente um trapézio de bases 1/3 e 1/5 e outra dimensão 2. O total dá a área 1, assim f(x) é densidade de probabilidade.

b) Calcule o valor médio;

Para este item e o próximo, será necessário o cálculo de integrais. Para isto, teremos que determinar a forma da função como função de x. O primeiro trecho é uma função constante. O segundo determinamos pela equação da reta que liga os pontos (1, 1/5) com (2, 1/3). O terceiro segmento é dado também pelo cálculo da equação da reta que une os pontos (2, 1/3) com (4, 1/5). Assim, teremos

$$f(x)=1/5\,;\, x\in(0,1)$$
$$f(x)=1/15(1+2\mathrm{x})\,;\, x\in(1,2)$$
$$f(x)=1/15(7-x)\,;\, x\in(2,4)$$

Vamos usar a definição de valor médio dada por

$$\mu=\int_0^4 xf(x)\,dx=\int_0^1 \frac{x}{5}\,dx+\int_1^2 \frac{x}{15}(1+2\mathrm{x})\,dx+\int_2^4 \frac{x}{15}(7-x)\,dx$$

ou

$$\mu=\frac{x^2}{10}\Big|_0^1+\frac{1}{15}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2\mathrm{x}^3}{3}\right)\Big|_1^2+\frac{1}{15}\left(7\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_2^4=\frac{31}{15}=2{,}0666...$$

c)Calcule a variância;

Partimos da definição de variância

$$\sigma^2=\int_0^4 x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 \frac{x^2}{5}\,dx+\int_1^2 \frac{x^2}{15}(1+2\mathrm{x})\,dx+\int_2^4 \frac{x^2}{15}(7-x)\,dx$$

ou

$$\sigma^2=\frac{x^3}{15}\Big|_0^1+\frac{1}{15}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{2\mathrm{x}^4}{4}\right)\Big|_1^2+\frac{1}{15}\left(\frac{7\mathrm{x}^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_2^4=\frac{143}{30}=5{,}4333...$$

De posse do segundo momento de probabilidade, podemos calcular o segundo momento centrado de probabilidade, ou seja, a variância, que é dada por

$$\sigma^2-\mu^2=5{,}4333...-(2{,}0666...)^2=1{,}16224$$

OBS: Devido à erros em situações anteriores esta questão será dada como correta se o aluno chegar ao cálculo do segundo momento de probabilidade.

d) Calcule a moda.

A moda vem direto da definição, ou seja, é o valor onde a função atinge seu máximo, ou seja, 2.

2 – Segunda questão (1,5 pontos)

Verifique se as expressões abaixo são funções de probabilidade:

Observe que a função b toma valores negativos para x > 1. Assim, ela é descartada. As funções a e c são não negativas no domínio especificado. Assim, resta testar se a integral de cada função é igual a 1.

a) $f(x)=2(1-x);0\leq x\leq 1$

$$\int_0^1 2(1-x)\,dx=2\left(\int_0^1 dx-\int_0^1 x\,dx\right)=2\left(x\Big|_0^1-\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right)=2(1-\frac{1}{2})=1$$ **É função de probabilidade**

b) $f(x)=2(1-x);1\leq x\leq 2$ **Não é função de probabilidade**

c) $f(x)=sen(x); 0 \leq x \leq \pi/2$

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)\,dx = -\cos(x)|_0^{\pi/2} = 1$$ **É função de probabilidade**

3 – Terceira questão (1,0 ponto)

Uma empresa fazia um levantamento do setor de atendimento ao consumidor. O tempo de atendimento de cada cliente, T, foi modelado por uma densidade Exponencial (2). Calcule:

Pela definição do modelo Exponencial $X \sim \exp(\alpha)$ **, onde aqui α=2, a probabilidade é calculada como**

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx = e^{-\alpha a} - e^{-\alpha b}$$

a) $P(T<2)$

$P(X<2)=\int_0^2 2e^{-2x}\,dx = 1-e^{-4}=0.98168$ **pois a distribuição é nula para valores menores que zero.**

b) $P(T<2|T\leq 4)$

$$P(T<2|T\leq 4)=\frac{P(T<2)}{P(T<4)}=\frac{1-e^{-4}}{1-e^{-8}}=\frac{0.98168}{0{,}99966}=0{,}98201$$

Observe que o mesmo resultado pode ser obtido pelo complemento de $P(2<T<4)$ **pois**

$P(2<T<4)=\int_2^4 2e^{-2x}\,dx = e^{-4}-e^{-8}=0{,}01798$ **e o complemento** $1-0{,}01798=0{,}98201$

4 – Quarta questão (1,5 pontos)

Um fabricante de pastilhas de freios modelou a duração de seu produto por um modelo Normal. Assim, a durabilidade média foi estimada em 30 000 km e o desvio padrão encontrado foi de 600 km. Se uma amostra de cem pastilhas for sorteada, qual será o número esperado de partilhas com durabilidade inferior a 25 000 km? Qual seria a probabilidade com a mesma amostra se o desvio padrão fosse de 1000 km?

Para simplificar, trabalharemos numa escala de milhares de quilômetros, ou seja, μ = 30, σ = 0,6. Assim, a probabilidade de encontrarmos partilhas com durabilidade menor que 25 000 km será

$$P(X<25)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{25-30}{0{,}6/10}\right)=P(Z<-83{,}33...)\approx 0$$

Para o caso de σ = 1 teremos

$$P(X<25)=P(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<\frac{25-30}{1/10})=P(Z<-50)\approx 0$$

5 – Quinta questão (2,0 pontos)

Uma nova cola rápida foi testada colando barras de madeira sempre com a mesma área de recobrimento. Foram feitos 10 testes e se verificou que, em média, a resistência era de 200 kg/cm2. O desvio padrão foi de 50 kg/cm2. Estime o intervalo de confiança para a média para o coeficiente de confiança igual a 95%.

A fórmula para o cálculo do intervalo de confiança é

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Aqui temos que γ = 0,95 o que corresponde na tabela da distribuição Normal para $z_{\gamma/2}$=1,96. Além disto σ = 50 e n = 10. Assim teremos

$$IC(\mu,\gamma)=\left[200-1{,}96\frac{50}{\sqrt{10}}\,;200+1{,}96\frac{50}{\sqrt{10}}\right]=[169{,}009\,;230{,}990]$$

6 – Sexta questão (2,0 pontos)

Um novo aditivo de combustível estava sendo testado. O objetivo desta adição era diminuir a quantidade de um poluente específico X. O fabricante, na sua publicidade, afirma que há uma redução média de 22%. O novo combustível foi usado em oitenta veículos e foi observado uma redução de, em média, 20% no nível do poluente com variância 5%. Suponha que a variável aleatória R, redução do poluente, tenha distribuição Normal. Teste, ao nível de significância de 10%, a afirmação do fabricante de combustível. Qual a probabilidade do erro ser do tipo II?

Houve um problema de redação desta questão que pode ter gerado confusão. Examinaremos o potencial despoluidor do aditivo e os valores testados serão as porcentagens.

Pela definição, a probabilidade de um erro de tipo II é dada por

$$\beta=P(erro\ tipo\ II)=P(não\ rejeitar\ H_0|H_0\ falsa)$$

Faremos o teste: H_0: μ = 22 *versus* H_a: μ ≠22. Assim,

$$\beta=P(\bar{X}<x_c|\mu=22)=P(\frac{x_c-22}{\sqrt{5/80}})=P(Z<z_c)$$

ou seja,

$$z_c=\frac{x_c-22}{\sqrt{5/80}}=\frac{x_c-22}{4}\Rightarrow x_c=22+4z_c$$

para β = 0,1 temos pela tabela de distribuição Normal z_c = - 1,29. Assim, x_c = 16,84
A região crítica será

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < 16{,}84\}$$

e a probabilidade de um erro tipo II para média 20% será

$$\beta(20) = P(\bar{X} \notin RC \mid \mu = 20) = P(\bar{X} < 20)$$

ou

$$\beta(20) = P\left(\frac{\bar{X} - 20}{4} < \frac{16{,}84 - 20}{4}\right) = P(Z < -0{,}79) = 0{,}2852$$