Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística

GABARITO da AP3
1° semestre de 2006

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

<u>1- Primeira questão (3,5 pontos):</u>

Um fabricante de um determinado produto eletrônico suspeita que 2% de seus produtos apresentam algum defeito. Se sua suspeita for correta, utilize um modelo de variável aleatória discreta adequado (uniforme, Bernoulli, binomial, geométrico, Poisson, hipergeométrico) e determine:

(i) qual a probabilidade de que, numa amostra com 9 de seus produtos,
- *i- não tenha nenhum defeituoso*
- *ii- tenha menos de dois (2) produtos defeituosos*

(ii) se o fabricante for escolher aleatoriamente 5 desses produtos para mostrar a um vendedor, qual a probabilidade de somente o quinto estar defeituoso?

<u>Importante</u>*: Justifique a escolha dos modelos.*

<u>Resposta:</u>

<u>(i)</u> ***Modelo binomial: somente 2 possibilidades: defeito (sucesso) e não defeito (fracasso)*** *(Escolha do modelo e justificativa 1,0 ponto)*

$$P(X = x_k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}, k = 0,1,.., n$$

$$P(X = x_k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times p^k \times (1-p)^{n-k}, k = 0,1,2,3,...., n$$

i - Nenhuma produto defeituoso, então temos P(X=0) *(0,5 pontos)*

$$P(X = 0) = \frac{9!}{0!(9-0)!} \times 0,02^{\,0} \times (1-0,02)^{9-0}$$
$$P(X = 0) = 1 \times 1 \times 0,83375 = 0,83375$$

ii - Menos de dois produtos defeituosos, então temos P(X<2) *(0,5 pontos)*

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

Sabemos do item i P(X=0)=0,83375 necessitamos calcular P(X=1)

$$P(X = 1) = \frac{9!}{1!(9-1)!} \times 0{,}02^{1} \times (1-0{,}02)^{9-1}$$
$$P(X = 1) = 9 \times 0{,}02 \times 0{,}8508 = 0{,}153134$$

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}83375 + 0{,}15314 = 0{,}98689$$

_(ii)_ ***Aplicando o modelo geométrico para resolver o item 3: queremos saber o número de tentativas que precedem o primeiro "sucesso".*** *(Escolha do modelo e justificativa 1,0 ponto)*

Probabilidade do primeiro sucesso *(0,5 pontos)*

$$P(X = k) = p \times (1 - p)^{k}$$
$$P(X = 5) = 0{,}02 \times (1 - 0{,}02)^{4} = 0{,}0184$$

2- Segunda questão (1,5 pontos):

O tempo de duração em horas de uma lâmpada foi modelado por uma variável aleatória x com a seguinte distribuição de probabilidade:

Tipo 1

x	5	6	7	8	9	10
p	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2

com média μ = 7,9 e desvio padrão s = 1,58. Um outro tipo de lâmpada tem a seguinte distribuição de probabilidade:

Tipo 2

x	5	6	7	8	9	10
p	0,1	0,1	0,1	0,4	0,1	0,2

Sabendo-se que, por contrato com esse comprador, para cada lâmpada que apresenta defeito em tempo abaixo da média, o produtor paga uma multa ao comprador, qual dos dois tipos de lâmpadas que o vendedor terá mais empenho em vender? Porque?

Tipo 1

Média = 7,9
Desvio padrão = 1,58

Tipo 2

Média = a calcular
Desvio Padrão = a calcular

Calcular a média do Tipo 2 *(0,5 pontos)*

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$$
$$m = (5 \times 0{,}1) + (6 \times 0{,}1) + (7 \times 0{,}1) + (8 \times 0{,}4) + (9 \times 0{,}1) + (10 \times 0{,}2) = 7{,}9$$

Calcular desvio padrão do tipo 2 *(0,5 pontos)*

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[x_i - \mu]^2 p_i}$$

$$s^2 = ((5-7,9)^2 \times 0,1) + ((6-7,9)^2 \times 0,1) + ((7-7,9)^2 \times 0,1) + ((8-7,9)^2 \times 0,4) + ((9-7,9)^2 \times 0,1) +$$
$$+((10-7,9)^2 \times 0,2)$$

$$s^2 = 0,841 + 0,361 + 0,081 + 0,004 + 0,121 + 0,882 = 2,290$$

$$s = \sqrt{2,29} = 1,513275$$

Portanto:
***a média do tipo 1 é 7,9 e o desvio padrão é* 1,58**
a media do tipo 2 é 7,9 e o desvio padrão é 1,513275

*(0,5 pontos)**O desvio padrão das lâmpadas do Tipo 2 é menor que as do Tipo1. O tempo de duração das lâmpadas do Tipo 2 está mais próximo da média que as lâmpadas do Tipo I.***

<u>3 - Terceira questão (1 ponto):</u>

Quais as hipóteses que estão sendo testadas nas seguintes situações:

a) Um orgão de fiscalização desconfia que uma fábrica de cigarros está usando tabaco transgênico, com taxas de nicotina superiores à de plantações similares de outros fabricantes. Determinar se os valores medidos numa amostra indicam o uso do transgênico.

São colhidas amostras das plantações e sua média é comparada as médias das demais plantações. Verificamos se os valores estão acima de um valor predeterminado.

b) Um produto emagrecedor foi lançado prometendo perdas de peso na faixa de 2 até 8 quilos. Um grupo de defesa dos consumidores quer avaliar a veracidade desta afirmação.

É feito um teste clínico com vários usuários, em número suficiente para ser válido o teorema central do limite, já que não temos um modelo dado. Verifica-se se a dispersão dos dados é compatível com o afirmado.

<u>4 - Quarta questão (2,5 pontos):</u>

Vão ser coletados 40 valores de uma variável aleatória. Em situações similares, no levantamento com outras amostras, a variância tinha o valor 1,1.
a) Leia até o fim da questão e formule as hipóteses adequadas para tratar este problema; (0,5 ponto)
b) Calcule a região crítica para um nível se significância igual a 5%; (1,0 ponto)
c) A média da amostra foi de 4,8. Qual a conclusão que você chega? (1,0 ponto)

Supomos que o tamanho da amostra seja grande o suficiente para que possamos usar a distribuição normal. Assim a distribuição será dada por N(m; 1,1/40), onde m é a média. Vamos chamar de m_c do valor da média dos valores coletados. Assim temos que

$$0,05 = P(\bar{X} < x_c \mid m = m_c) = P\left(\frac{\bar{X} - m}{s \;/\sqrt{n}} < \frac{x_c - m_c}{1,1/\sqrt{40}}\right) = P(Z < z_c)$$

e relacionamos z_c com x_c por

$$x_c = z_c 1,1/\sqrt{40} + m_c$$

Obtemos o valor de z_c da tabela de N(0, 1) tendo que, como vimos acima, $P(Z < z_c) = 0,05$. O valor é, então, -1,64 que leva ao valor $x_c = m_c – 0,285$. A região crítica fica então como

$$RC = \{x \in \mathbb{R} : x < m_c - 0,285\}$$

Com a média dada por 4,8 temos que a região crítica fica na região x < 4,515.

5 – Quinta questão (1,5 pontos):

Será feita uma avaliação de um novo sistema automático para verificação de impostos não pagos. O tempo de consulta foi modelado por uma distribuição Uniforme contínua no intervalo [0, 5] em minutos. Diariamente ocorrem, em média, 120 consultas. Para este valor, calcule:

a) Qual a probabilidade da média ser inferior a 2 minutos? (0,5 ponto)
b) Qual a probabilidade da média estar entre 2 e 4 minutos? (1,0 ponto)

Como o modelo é uniforme, com extremos entre 0 e 5, temos que para ser uma distribuição de probabilidade ela valerá 1/5 dentro de todo o intervalo.

a) A probabilidade da média ser inferior à 2 minutos é a área do retângulo dada pela largura 2 – 0 e a altura 1/5, ou seja, 2/5 = 0,4.

b) Para o caso de termos conexões entre 2 e 4 minutos, teremos como probabilidade a área do retângulo de largura 4 – 2 e altura 1/5, ou seja, novamente 0,4.