Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina - Probabilidade e Estatística
AP3 do 1° semestre de 2012

Nome :

Assinatura :

Observações:

1. A prova é acompanhada de uma tabela da distribuição Normal.
2. É permitido o uso de máquina de calcular.
3. Todos os cálculos devem ser mostrados passo a passo para a questão ser considerada
4. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
5. Você pode usar lápis para responder as questões.
6. **Os desenvolvimentos e respostas devem ser escritas de forma legível;**
7. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
8. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Questão 1 – (3,0 pontos) Um fabricante de um determinado produto eletrônico suspeita que 2% de seus produtos apresentam algum defeito. Se sua suspeita for correta:

(i) Utilize o modelo binomial, e determine qual a probabilidade de que, numa amostra com 9 de seus produtos,
a) não tenha nenhum defeituoso
Resolução:
Pelo Modelo binomial temos

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,3,\cdots,n$$

e para n = 9 e k = 0 resulta em

$$P(X=x_k)=\binom{9}{0}\times 0{,}02^0\times 0{,}98^9=1\times 1\times 0{,}8337=0{,}8337$$

b) tenha no máximo um defeituoso
Resolução:
Neste caso não haverá nenhum produto defeituoso, ou seja,

$$P(X=x_k)=\binom{9}{0}\times 0{,}02^0\times 0{,}98^9+\binom{9}{1}\times 0{,}02^1\times 0{,}98^9=1\times 1\times 0{,}8337+9\times 0{,}02\times 0{,}8508=0{,}9868$$

(ii) Utilize o modelo geométrico para saber se esse fabricante for escolher aleatoriamente 4 desses produtos para mostrar a um vendedor, qual a probabilidade de somente o quinto estar defeituoso?

Resolução:

Pelo Modelo geométrico temos

$$P(X=k)=p(1-p)^k \quad .$$

Com os parâmetros dados teremos

$$p=0{,}02(1-0{,}02)^4=0{,}02\times 0{,}98^4=0{,}0184 \quad .$$

Questão 2 – (1,0 ponto) Em uma cidade onde carros têm que ser avaliados para controle de emissão de poluentes, 25% de todos os carros testados emitem quantidades excessivas de poluentes. No entanto, o teste não é perfeito e pode indicar resultados errados. Desta forma, carros que emitem excesso de poluentes podem não ser detectados pelo teste e carros que não emitem excesso de poluentes podem ser considerados erroneamente fora do padrão de emissão. Quando efetivamente testados, 99% dos carros fora do padrão são detectados e 17% dos carros em bom estado são considerados fora do padrão por erro do teste. Qual é a probabilidade de que um carro reprovado pelo teste emita realmente excesso de poluentes?

Resolução:

Seja T o evento "carros emitem quantidades excessivas de poluentes" e B o evento "carro dentro das normas de emissão de poluentes". Assim podemos escrever

$$P(T)=0{,}25 \quad e \quad P(B)=0{,}75 \quad .$$

Seja E o evento "carro reprovado no teste". Neste caso

$$P(E/T)=0{,}99 \quad e \quad P(E/R)=0{,}17$$

tendo como objetivo determinar $P(T/E)$ **. Pelo Teorema de Bayes**

$$P(T/E)=\frac{P(E\cap T)}{P(E)}=\frac{P(T/E)P(T)}{P(E)}$$

com $P(E)=P(E/T)p(T)+P(E/T^c)p(T^c)=0{,}99\times 0{,}25+0{,}75\times 0{,}17=0{,}375$

logo

$$P(T/E)=\frac{P(T/E)P(T)}{P(E)}=\frac{0{,}99\times 0{,}25}{0{,}375}=0{,}66 \quad .$$

Questão 3 – (2,0 pontos)

Numa fábrica de papel se avalia se uma picadeira de madeira. Se os pedaços são muito pequenos perde-se tempo nesta fase do processamento, se os pedaços são muito grandes o processamento posterior se torna oneroso. Se sabe que o tamanho ideal está entre 20 e 35 milímetros. Da máquina sabemos que a média de tamanho dos pedaços é 21milímetros com variância 22 mm^2. Colheu-se, então, 20 pedaços de madeira. Qual será a probabilidade da máquina estar funcionando devidamente supondo que podemos usar a distribuição Normal para modelar o processo e tendo como referência esta amostra?

Resolução:

Usaremos a fórmula

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)$$

Para os valores dados temos que $\sigma/\sqrt{n} = \frac{\sqrt{22}}{\sqrt{20}} = \sqrt{1{,}1} \approx 1{,}049$ **e com isto podemos calcular a probabilidade**

$$P(20 \leq X \leq 35) = P\left(\frac{20-21}{1{,}049} \leq Z \leq \frac{35-21}{1{,}049}\right) = P\left(\frac{1}{1{,}049} \leq Z \leq \frac{14}{1{,}049}\right) = P(0{,}9532 \leq Z \leq 13{,}3460)$$

ou

$$P(20 \leq X \leq 35) \approx P(0{,}95 \leq Z \leq 13{,}34) = 0{,}3289 + 0{,}5 = 0{,}8289 \quad ,$$

ou seja, a probabilidade da máquina estar funcionando bem é maior que 82%.

Questão 4 – (2,5 pontos)

Uma firma de implosões suspeita de que as espoletas das cargas explosivas estão com problemas de fabricação. São detonadas 20 espoletas de uma caixa de 100 escolhida aleatoriamente do estoque e verificou-se que três espoletas falharam. Supondo que a estatística do experimento é compatível com o modelo Normal, calcule a estimativa para a média de espoletas que falhariam com coeficiente de confiança de 80%. Um padrão estabelece que a variância deste tipo de produto vale 2,3 falhas^2.

Resolução:

Temos tanto o tamanho da amostra (n=20) quanto a variância ($\sigma^2 = 2{,}3 \Rightarrow \sigma \approx 1{,}516$ **) o que implica em**

$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}516}{4{,}472} \approx 0{,}339$ **. Daí**

$$IC(\mu,\gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} - z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [3 - z_{\gamma/2} 0{,}339; 3 - z_{\gamma/2} 0{,}339] \quad .$$

Para o nível de confiança de 80% temos que $z_{\gamma/2} = z_{0,4} = 1{,}29$ **pelo uso da tabela de distribuição Normal. Finalmente teremos**

$$IC(\mu,\gamma)=[3-1,29\times 0,339\,;3+1,29\times 0,339]\approx[2,56\,;3,44] \quad .$$

Claro que não existe pedaço de espoleta, portanto esta informação, embora correta numericamente, não é compatível com o problema como proposto. Se você chegou a este resultado pode considerar que receberá a pontuação máxima. No entanto, temos que levar este resultado para a realidade. Sob o ponto de vista eminentemente prático pegamos o pior caso possível levando ao número inteiro imediatamente superior ao extremo do intervalo. Assim diremos que a média de falhas seria de quatro espoletas por caixa.

Questão 5 – (1,5 pontos)

Uma siderúrgica está sob suspeita de contaminar águas subterrâneas. Ela apresenta um relatório que afirma que o índice de contaminação por sais de ferro na área onde atua só atingiu índices acima do tolerável em 2% das sondagens. Foram feitos exames em 80 pontos de sondagem escolhidos aleatoriamente e se verificou que 6 deles tinham contaminação acima dos índices aceitos.

a) Calcule a região crítica (1,0 ponto)
b) Podemos confiar no relatório da siderúrgica com nível de 5%? (0,5 ponto)
Resolução:

a) Aqui temos um problema de teste de média populacional, ou seja, um teste de hipótese. Para este problema trabalharemos com o foco está na proporção entre os poços contaminados e os que não estão contaminados. Esta proporção será chamada de p. Assim, hipótese nula será H_0 : p = 0,02 e a hipótese alternativa H_a : p ≠ 0,02. Para estimarmos p o que melhor temos é a proporção amostral que supondo seguir uma distribuição Normal nos dará a distribuição

$$\hat{p} \sim N(p,p(1-p)/n)=N(0,02\,;0,02(1-0,02)/80)=N(0,02\,;0,000245)$$

ou seja, uma distribuição Normal de média p e variância estimada por p(1-p)/n, variância amostral. A região crítica é dada por

$$RC=\{x\in\Re\,|\,x<p_{c1}\ ou\ x>p_{c2}\}$$

onde trabalhamos com o nível de 5%, ou seja, $\alpha=0,05$ **. Assim teremos as probabilidades**

$$P(\hat{p}<p_{c1}|H_0)=\frac{0,05}{2}=0,025 \quad \textbf{e} \quad P(\hat{p}>p_{c2}|H_0)=\frac{0,05}{2}=0,025 \quad .$$

Calculemos

$$P(\hat{p}<p_{c1}|H_0)=P\left(\frac{\hat{p}-0,02}{0,000245}<\frac{p_{c1}-0,02}{0,000245}\right)=0,025 \quad .$$

Mas este valor está na região de rejeição esquerda e, portanto, o valor que obteremos será negativo e complementar ao valor da probabilidade. Como isto procuraremos o valor na tabela de distribuição Normal o valor correspondente a 0,5 – 0,025 = 0,475 que é 1,96 mas trocando de sinal por este valor ser da região de rejeição à esquerda. Assim teremos

$$\frac{p_{c1}-0{,}02}{0{,}000245}=-1{,}96 \Rightarrow p_{c1} \approx 0{,}0195 \quad .$$

Para a região de rejeição à direita teremos

$$P\left(\hat{p}>p_{c2}|H_0\right)=P\left(\frac{\hat{p}-0{,}02}{0{,}000245}>\frac{p_{c2}-0{,}02}{0{,}000245}\right)=0{,}025 \quad .$$

Este valor está na região de rejeição direita e é simétrico ao valor achado anteriormente. Assim teremos

$$\frac{p_{c2}-0{,}02}{0{,}000245}=1{,}96 \Rightarrow p_{c2} \approx 0{,}02048 \quad .$$

Logo a região de rejeição será

$$RC=\left\{x\in\Re \,|\, x<0{,}0195 \; ou x>0{,}02048\right\} \quad .$$

b) A média amostral é dada por $6/80=0{,}075$ **, ou seja, 7,5% é a proporção amostral encontrada de poços contaminados. Pela região crítica dada anteriormente vemos que o relatório da siderúrgica deve ser considerado suspeito no nível de 5%.**