Gabarito da AD1 de Probabilidade e Estatística
Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
1° semestre de 2017

1ª Questão (2,0 pontos): Foi feita a medição do tempo gasto em um corrida entre dois grupos de atletas, com 5 corredores em cada grupo, obtendo os seguintes tempos (em minutos):

Grupo A: 18.2 18.0 17.4 17.6 18.1
Grupo B: 20.0 20.2 19.9 20.5 20.1

a) Calcule a média e o desvio padrão dos tempos para cada grupo de atletas.

Solução:

$$\overline{X_A} = \frac{18,2+18,0+17,4+17,6+18,1}{5} = 17,86$$

$$\overline{X_B} = \frac{20,0+20,2+19,9+20,5+20,1}{5} = 20,14$$

$$VAR_A = \frac{1}{5}\left[\sum_{i=1}^{5}\left(X_{Ai} - \overline{X_A}\right)^2\right]$$

$$VAR_A = \frac{(18,2-17,86)^2 + (18,0-17,86)^2 + (17,4-17,86)^2 + (17,6-17,86)^2 + (18,1-17,86)^2}{5}$$

$$VAR_A = \frac{0,472}{5} = 0,0944$$

$$VAR_B = \frac{1}{5}\left[\sum_{i=1}^{5}\left(X_{Bi} - \overline{X_B}\right)^2\right]$$

$$VAR_B = \frac{(20,0-20,14)^2 + (20,2-20,14)^2 + (19,9-20,14)^2 + (20,5-20,14)^2 + (20,1-20,14)^2}{5}$$

$$VAR_B = \frac{0,212}{5} = 0,0424$$

$$DP_A = \sqrt{VAR_A} = \sqrt{0,0944} \cong 0,307246$$

$$DP_B = \sqrt{VAR_B} = \sqrt{0,0424} \cong 0,205913$$

b) Mostre o que acontecerá com a média, a variância e o desvio padrão da modalidade A se cada atleta aumentar seu tempo em "c" minutos.

Solução:

$$\overline{X_A} = \frac{(18,2+c)+(18,0+c)+(17,4+c)+(17,6+c)+(18,1+c)}{5} = \frac{89,3+5c}{5} = 17,86+c$$

$$VAR_A = \frac{1}{5}\left[\sum_{i=1}^{5}\left(X_{Ai} - \overline{X_A}\right)^2\right]$$
$$VAR_A = \frac{(18{,}2 + c - (17{,}86 + c))^2 + (18{,}0 + c - (17{,}86 + c))^2 + (17{,}4 + c - (17{,}86 + c))^2 + (17{,}6 + c - (17{,}86 + c))^2 + (18{,}1 + c - (17{,}86 + c))^2}{5}$$
$$VAR_A = \frac{(18{,}2 - 17{,}86)^2 + (18{,}0 - 17{,}86)^2 + (17{,}4 - 17{,}86)^2 + (17{,}6 - 17{,}86)^2 + (18{,}1 - 17{,}86)^2}{5} = \frac{0{,}472}{5} = 0{,}0944$$

$$DP_A = \sqrt{VAR_A} = \sqrt{0{,}0944} \cong 0{,}307246$$

Logo, podemos concluir que quando somamos uma constante a um conjunto de dados, que a média será acrescida do valor dessa constante e a variância e o desvio padrão não serão alterados.

2ª Questão (1,0 pontos): Considere que dois dados não viciados foram lançados, um após o outro, e deseja-se saber qual a probabilidade de que:

a) as faces voltadas para cima sejam iguais, supondo-se que sua soma é menor ou igual a 5.
b) a soma dos valores das faces voltadas para cima seja menor ou igual a 5, supondo-se que as faces são iguais.

Solução:

Sejam os eventos:

A - faces voltadas para cima sejam iguais

B - soma dos valores das faces voltadas para cima seja menor ou igual a 5.

Assim, o espaço amostral para o experimento "lançamento de dois dados" tem 36 elementos.

A={(1,1); (2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)}

B={(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,2);(2,3);(3,1);(3,2);(4,1)}

Assim:

a) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{2/36}{10/36} = \dfrac{2}{10} = 0{,}2$

b) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{2/36}{6/36} = \dfrac{2}{6} = 0{,}3333$

3ª Questão (2,0 pontos): Uma caixa contém 2 bolas azuis e 3 verdes. Suponha que 2 bolas sejam retiradas ao acaso, uma após a outra, determine:

a) Caso a retirada seja feita sem reposição:

i - Qual é a probabilidade de que as 2 bolas retiradas tenham a mesma cor?

Solução:

Sejam os eventos G: as 2 bolas retiradas tenham a mesma cor e V: as 2 bolas retiradas sejam verdes. A possibilidade de retirarmos, sem reposição, bolas da mesma cor são duas bolas brancas ou 2 bolas verde.

P(G) = $\dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{20} + \dfrac{6}{20} = \dfrac{8}{20} = 0{,}4$

ii - Supondo que as duas bolas são da mesma cor, qual é a probabilidade de que as 2 bolas retiradas sejam verdes?

Solução:

$$P(V \mid G) = \frac{P(V \cap G)}{P(G)} = \frac{6/20}{8/20} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

b) Caso a retirada seja feita com reposição.

i - Qual é a probabilidade de que as 2 bolas retiradas tenham a mesma cor?

Solução:

Sejam os eventos G: as 2 bolas retiradas tenham a mesma cor e V: as 2 bolas retiradas sejam verdes.

$$P(G) = \frac{1}{C(2,5)} + \frac{C(2,3)}{C(2,5)} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$$

ii - Supondo que as duas bolas são da mesma cor, qual é a probabilidade de que as 2 bolas retiradas sejam verdes?

Solução:

$$P(V \mid G) = \frac{P(V \cap G)}{P(G)} = \frac{3/10}{4/10} = \frac{0,3}{0,4} = 0,75$$

4ª Questão (1,0 pontos): Dada a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória discreta, apresentada na tabela 1, calcule o valor esperado e a variância

x	P(x)
0	0,245
1	0,305
2	0,270
3	0,180
Total	1

Tabela 1

Solução:

Média:

$$E(X) = 0 \times 0,245 + 1 \times 0,305 + 2 \times 0,270 + 3 \times 0,180 = 0 + 0,305 + 0,540 + 0,540 = 1,385$$

Variância = $E(X^2) - (E(X))^2$

$$E(X^2) = 0^2 \times 0,245 + 1^2 \times 0,305 + 2^2 \times 0,270 + 3^2 \times 0,180 = 0 + 0,305 + 1,80 + 1,62 = 3,725$$

$$E(X^2) - (E(X))^2 = 3,725 - 1,385^2 = 1,8068$$

5ª Questão (1,0 pontos): Foi feito um estudo com homens e mulheres para saber se reagiriam de forma diferente a propagandas com a presença de carros. Esses estudos mostraram que 73% dos homens apresentaram reações positivas a esses anúncios publicitários enquanto apenas

32% das mulheres reagiram positivamente. Determine a probabilidade de que em 5 homens pelo menos 3 reajam positivamente a um novo anúncio com uma nova marca de carro.

Solução:

Como estamos interessados em observar a possibilidade de, em 5 homens pelo menos 3 reagirem positivamente a um anúncio e a probabilidade de cada homem reagir positivamente é 0,73, podemos realizar esta contagem através do modelo de probabilidade binomial.

Assim,

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$P(X = 3) = \binom{5}{3} \times (0{,}73)^3 \times (0{,}27)^2 = 10 \times 0{,}3890 \times 0{,}0729 = 0{,}2836$$

$$P(X = 4) = \binom{5}{4} \times (0{,}73)^4 \times (0{,}27)^1 = 5 \times 0{,}284 \times 0{,}27 = 0{,}3834$$

$$P(X = 5) = \binom{5}{5} \times (0{,}73)^5 \times (0{,}27)^0 = 1 \times 0{,}2073 \times 1 = 0{,}2073$$

$$P(X \geq 3) = 0{,}2836 + 0{,}3834 + 0{,}2073 = 0{,}8743$$

6ª Questão (1,0 pontos): Uma telefonista de um *call center* recebe cerca de 0,30 chamadas por minuto.

a) Qual é a probabilidade de receber exatamente 4 chamadas nos primeiros 10 minutos?

Solução:

Observe que esse problema pode ser expresso pela distribuição de Poisson, onde:

λ = 0,30 (média de 0,30 chamadas por minuto)

X : Quantidade de chamadas por minuto numa central telefônica

X ~ Poi (0,30)

Y: Quantidade de chamadas a cada 10 minutos numa central telefônica

Y ~ Poi (0,30 x 10)

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(Y = 4) = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = \frac{81 \times 0{,}0498}{24} = 0{,}168$$

b) Qual é a probabilidade de receber até 3 chamadas nos primeiros 10 minutos?

Solução:

$$P(Y \leq 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3)$$

$$P(Y \leq 3) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} + \frac{3^1 e^{-3}}{1!} + \frac{3^2 e^{-3}}{2!} + \frac{3^3 e^{-3}}{3!} =$$

$$P(Y \leq 3) = 0{,}0498 + 0{,}1494 + 0{,}2240 + 0{,}2241 = 0{,}6473$$

7ª Questão (2,0 pontos): Num aquário de um instituto de pesquisa, pesquisadores acompanham o crescimento de 20 peixes de água doce: 12 da espécie A e 8 da espécie B, avaliando periodicamente seus pesos e tamanhos. Se em determinado dia de avaliação três peixes forem capturados de uma única vez, utilize um modelo de probabilidade para determinar a probabilidade de:

a) A maioria ser da espécie A

Solução:

Temos 20 peixes: 12 da espécie A e 8 da espécie B.

Dados do problema:

Modelo Hipergeométrico

Tamanho da população n= 20

Tamanho da amostra r = 3

Sucesso (espécie A) m = 12

Sucesso amostra k = ?

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{12}{2}\binom{20-12}{3-2}}{\binom{20}{3}}=\frac{66\times 8}{1140}=0{,}4632$$

b) Todos serem da espécie A

Solução:

$$P(X=3)=\frac{\binom{12}{3}\binom{20-12}{3-3}}{\binom{20}{3}}=\frac{220\times 1}{1140}=0{,}193$$

Obs: Esta questão foi resolvida com o entendimento de que “a maioria” significa que o grupo contenha elementos de cada uma das espécies. No entanto, devido a dúvidas surgidas, será considerado o raciocínio onde considerou-se que a maioria incluía também a possibilidade de ter exclusivamente um tipo de peixe.