Gabarito da AD1 de Probabilidade e Estatística

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

Segundo Semestre de 2012

1-(1,0 ponto) Um laboratório clínico precisa se decidir por um entre três instrumentos (A, B e C) que será utilizado para fazer dosagens químicas no sangue. Foram preparadas soluções contendo uma concentração conhecida (10mg=ml) da substância a ser dosada. Os resultados obtidos com cada instrumento são:

Instrumento A: 5 10 7 15 16 12 4 8 10 13
Instrumento B: 11 10 11 10 12 9 10 8 9 10
Instrumento C: 9 10 8 9 9 8 10 11 7 9

Observe que: $Média = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$, $Variância = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - média)^2}{n}$ e $Desvio\ padrão = \sqrt{variância}$

(a) (0,4 pontos) Determine a média o desvio padrão para cada um dos três instrumentos.

Resposta:

	Média	Variância	Desvio Padrão
Instrumento A	$\bar{A} = \frac{100}{10} = 10$	$S_A^2 = 14.8$	$S_A = \sqrt{14.8} = 3.85$
Instrumento B	$\bar{B} = \frac{100}{10} = 10$	$S_B^2 = 1.2$	$S_B = \sqrt{1.2} = 1.09$
Instrumento C	$\bar{C} = \frac{90}{10} = 9$	$S_C^2 = 1.2$	$S_C = \sqrt{1.2} = 1.09$

(b) (0,3 pontos) Em medidas clínicas, três termos são utilizados frequentemente: precisão, não-viciado e exatidão.

- Precisão: refere-se à dispersão de um conjunto de observações. Quanto menor a variabilidade maior a precisão;
- Não-viciado: refere-se à tendência de um conjunto de medidas ser igual a um verdadeiro valor;
- Exatidão: suas leituras precisam ser tanto precisas quanto não-viciadas.

Descreva os instrumentos em termos destas definições.

Resposta:
Os instrumentos B e C foram mais precisos. Os instrumentos A e B são não – viciados, pois mediram a média de forma correta. O instrumento B pode ser considerado exato, pois foi mais preciso e não – viciado.

(c) (0,3 pontos)Qual instrumento você recomendaria ao laboratório? Justifique.

Resposta:
Recomendaria o instrumento B, pois é não-viciado e apresenta pouca variabilidade.

2-(1,0 ponto) Os tempos (em minutos) de cinco atletas em duas modalidades de provas de corrida foram:
Modalidade A: 18.2 18.0 17.4 17.6 18.1
Modalidade B: 20.0 20.2 19.9 20.5 20.1

(i) (0,3 pontos) Calcule a média e desvio padrão dos tempos para cada modalidade.

Resposta:

	Média	Variância	Desvio Padrão
Modalidade A	$\bar{A} = \frac{89.3}{5} = 17.86$	$S_A^2 = 0.0944$	$S_A = \sqrt{0.0944} = 0.3072$
Modalidade B	$\bar{B} = \frac{100.7}{5} = 20.14$	$S_B^2 = 0.0424$	$S_B = \sqrt{0.0424} = 0.2059$

(ii) (0,2 pontos) Adicione 2min a cada tempo e refaça os cálculos.

Resposta:

Somando 2 minutos	Média	Variância	Desvio Padrão
Modalidade A	$\bar{A}_2 = \frac{99.3}{5} = 19.86$	$S_{A2}^2 = 0.0944$	$S_{A2} = \sqrt{0.0944} = 0.3072$
Modalidade B	$\bar{B}_2 = \frac{110.7}{5} = 22.14$	$S_{B2}^2 = 0.0424$	$S_{B2} = \sqrt{0.0424} = 0.2059$

(iii) (0,2 pontos)Multiplique os tempos originais por 3min e refaça os cálculos.

Resposta:

Multiplicando por 3	Média	Variância	Desvio Padrão
Modalidade A	$\bar{A}_3 = \frac{267.9}{5} = 53.58$	$S_{A3}^2 = 0.8496$	$S_{A3} = \sqrt{0.8496} = 0.9217$
Modalidade B	$\bar{B}_3 = \frac{302.1}{5} = 60.42$	$S_{B3}^2 = 0.3816$	$S_{B3} = \sqrt{0.3816} = 0.6177$

(iv) (0,3 pontos) Que propriedades você verificou para os resultados dos itens (ii) e (iii) em relação às estatísticas do item (i)?

Resposta:

$$\bar{A}_2 = \bar{A} + 2 \;\; e \;\; \bar{B}_2 = \bar{B} + 2$$
$$S_{A2} = S_A \;\; e \;\; S_{B2} = S_B$$

$$\bar{A}_3 = \bar{A} \times 3 \;\; e \;\; \bar{B}_3 = \bar{B} \times 3$$
$$S_{A3} = 3 \times S_A \;\; e \;\; S_{B3} = 3 \times S_B$$

Podemos observar que a média se altera de acordo com a operação aplicada aos eventos. Mas o desvio padrão só se altera se multiplicarmos os eventos por uma constante, e assim o desvio padrão ficará multiplicado por esta constante.

3- (1,0 ponto) Lançamos 2 dados honestos, e seja A = {a soma dos resultados é 8} e B = {o produto dos resultados é impar}. Os eventos A e B são independentes?

Resposta:
Sabemos que o espaço amostral Ω é tal que $n(\Omega)$=36.
Descrevendo os eventos:
$A = \{(2,6), (6,2), (3,5), (5,3), (4,4)\}$

$B = \{(1,1), (1,3), (3,1), (1,5), (5,1), (5,5), (3,3), (3,5), (5,3)\}$

Temos que:
$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{36}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{9}{36}$, $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{36}$

Os eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$.

$P(A)\,P(B) = \frac{5}{36} \times \frac{9}{36} = \frac{45}{1296} = 0.03472$ e $P(A \cap B) = \frac{2}{36} = 0.055$

$P(A \cap B) \neq P(A)\,P(B)$ os eventos A e B são dependentes.

4-(1,0 ponto) Suponha que P(A) = 1/2, P(B^C) = 1/3. Os eventos A e B podem ser disjuntos (ou mutuamente exclusivos)?

Resposta:
Como $P(B^c) = \frac{1}{3}$, temos que $P(B) = \frac{2}{3}$. Se os eventos A e B são disjuntos, $P(A \cap B) = 0$. Contudo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 0 = \frac{3+4}{6} = \frac{7}{6} > 1$
O que é um absurdo, logo A e B não podem ser disjuntos.

5-(1,0 ponto) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 bolas amarelas. Qual a probabilidade desta bola ser verde?

Resposta:
Seja o espaço amostral Ω, onde $n(\Omega)$=12 que é o número total de bolas na sacola. Seja E o evento retirar uma bola verde da sacola, n(E)=5.
Assim, $P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12} = 0.4166$

6- (1,0 ponto) Em uma caixa há 4 bolas verdes, 4 azuis, 4 vermelhas e 4 brancas. Se tirarmos sem reposição 4 bolas desta caixa, uma a uma, qual a probabilidade de tirarmos nesta ordem bolas nas cores verde, azul, vermelha e branca?

Resposta:
Seja E_1 o evento tirar uma bola verde. $P(E_1) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
Como não há reposição, a cada retirada o número de elementos do espaço amostral diminui em uma unidade.
Seja o evento E_2 tirar uma bola azul. $P(E_2) = \frac{4}{15}$.
Seja o evento E_3 tirar uma bola vermelha. $P(E_3) = \frac{4}{14}$.
Seja o evento E_4 tirar uma bola branca. $P(E_4) = \frac{4}{13}$.
Assim, a probabilidade de tirarmos as bolas conforme as restrições do enunciado é :
$P(E) = P(E_1).P(E_2).P(E_3).P(E_4) = \frac{1}{4}.\frac{4}{15}.\frac{4}{14}.\frac{4}{13} = \frac{64}{10920} = \frac{8}{1365} = 0.0059$

7-(1,0 ponto) Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira A, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira B e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras. Qual a probabilidade de ao escolhermos deste grupo uma pessoa que utiliza a bandeira B, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira A?

Resposta:
n(A)=650 , n(B)=550 , n(A∩B)=200 , n(S)=1000 onde S é o conjunto de todos os consumidores.
$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{200}{550} = \frac{4}{11} = 0.36$$

8- (1,5 pontos)Para condenar um acusado de um crime são necessários pelo menos 9 votos de um júri composto por 12 jurados. Suponha que a probabilidade de que um jurado vote que um culpado seja inocente é 0,2 e a probabilidade de que um jurado vote que um inocente seja culpado é 0,1. Se cada jurado age de forma independente e se 65% dos acusados são culpados, encontre a probabilidade de que o júri tome a decisão correta. Que porcentagem de culpados são efetivamente condenados?

Resposta:
Defina os eventos:
C: o acusado é condenado
A: o acusado é inocentado

I: o acusado é inocente
P: o acusado é culpado
K: o júri toma da decisão correta

Utilizamos a regra da probabilidade total: $P(K) = P(K/I).P(I) + P(K/P).P(P)$. Pelo enunciado, temos que $P(I) = 0.35$ e $P(P) = 0.65$.

Precisamos calcular as duas probabilidades condicionais. Sejam os eventos:

X: jurados que votam que o acusado é culpado quando ele é culpado.
Y: jurados que votam que o acusado é inocente quando ele é inocente.

Segue do enunciado que $X \sim Bin(12, 0.8)$ e $Y \sim Bin(12, 0.9)$. Para condenar um acusado, pelo menos 9 votos do júri são necessários.

$P(X = k) = \binom{12}{k} 0.8^k \times 0.2^{12-k}, k = 0,1,2,\ldots,12$ e $P(Y = k) = \binom{12}{k} 0.9^k \times 0.1^{12-k}, k = 0,1,2,\ldots,12$

Então temos que:

$$P(K/P) = P(X \geq 9) = \sum_{i=9}^{12} P(X = i) = 0.7945$$

Continuando, temos que se ao menos 9 votos são necessários para condenar um acusado, então ao menos 4 votos são necessários para inocentar um acusado. Temos então que:

$$P(K/I) = P(Y \geq 4) = \sum_{i=4}^{12} P(Y = i) = 0.99$$

Voltando na equação inicial, temos:

$$P(K) = 0.99 \times 0.35 + 0.79 \times 0.65 = 0.3465 + 0.5135 = 0.86$$

Temos então que a probabilidade do júri tomar a decisão correta é de 0.86.
Para a segunda pergunta, utilizaremos novamente a regra da probabilidade total.

$$P(C) = P(C/I)\,P(I) + P(C/P)\,P(P)$$

Temos do enunciado $P(I)$ e $P(P)$. Do item anterior temos $P(C/P) = P(K/P) = 0.79$. Falta calcular $P(C/I)$. Seja W a variável aleatória tal que:

W: número de jurados que condenam um inocente

onde $W \sim Bin(12, 0.1)$ também retirado do enunciado. Sabemos que par ser condenado precisamos de pelo menos 9 votos. Segue então que :

$$P(C/I) = P(W \geq 9) = \sum_{i=1}^{12} P(W = i) = 1.6583 \times 10^{-7}$$

Temos então: $P(C) = 1.6583 \times 10^{-7} \times 0.35 + 0.79 \times 0.65 = 0.5135$
Então 51% do culpados são condenados.

9- (1,5 pontos) O número de vezes que um indivíduo tem gripe em determinado ano é uma variável aleatória de Poisson com $\lambda = 5$. Suponha que um novo medicamento reduz o parâmetro $\lambda = 3$ para 75% da população. Para os 25% restantes a droga não tem um efeito apreciável. Se um indivíduo toma o medicamento durante um ano e tem duas gripes, qual a probabilidade de que o medicamento tenha sido benéfico para ele?

Resposta:

Lembrando que se $X \sim Po(\lambda)$, $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, k = 0,1,2,\ldots$

Sejam os eventos:

G_2 : o indivíduo tem duas gripes no ano.

M : o medicamento é benéfico para o indivíduo

M^c: o medicamento não é benéfico para o indivíduo

E sejam as variáveis aleatórias: $N \sim Poi(5)$ e $T \sim Poi(3)$.

Precisamos obter $P(M/G_2)$.

$$P(M/G_2) = \frac{P(M \cap G_2)}{P(G_2)} = \frac{P(G_2/M)P(M)}{P(G_2)}$$

Pelo enunciado, sabemos que $P(M) = 0.75$ e $P(G_2/M) = P(T = 2)$. Está faltando encontrar $P(G_2)$, usaremos a regra de probabilidade total. Assim,

$$P(G_2) = P(G_2/M)P(M) + P(G_2/M^c)P(M^c)$$

$$P(G_2) = P(T = 2) \times 0.75 + P(N = 2) \times 0.25 = \frac{e^{-3}3^2}{2!} \times 0.75 + \frac{e^{-5}5^2}{2!} 0.25 =$$
$$= 0.2240 \times 0.75 + 0.0842 \times 0.25 = 0.1680 + 0.02105 = 0.1891 .$$

Colocando esse valor na equação anterior, temos

:

$$P(M/G_2) = \frac{P(G_2/M)P(M)}{P(G_2)} = \frac{0.1680}{0.1891} = 0.8884$$

Então a probabilidade do medicamento ter sido benéfico para ele é 0.8884.