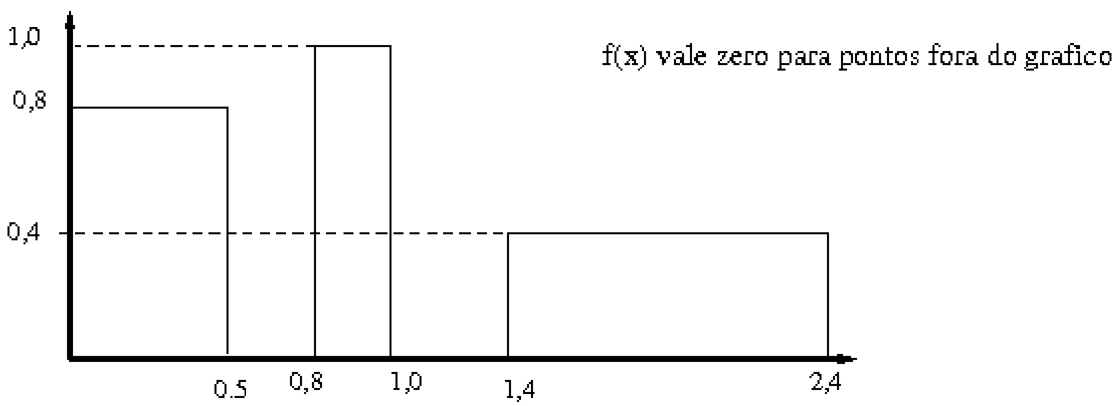
Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AP2 1° semestre de 2007
GABARITO

Professores: Otton Teixeira da Silveira Filho e Regina Célia P. Leal Toledo

1 - Primeira questão (2,5 pontos)

Dado o gráfico abaixo:



a) Prove que f(x) é uma densidade; (0,5 ponto)

Solução: Para ser densidade a função deve ser sempre positiva ou nula e a área definida por ela ser igual a 1. O primeiro critério é valido pelo exame da figura.
Calculando a área de cada retângulo e somando temos

A = 0,5 x 0,8 + 0,2 x 1 + 1,0 x 0,4 = 0,4 + 0,2 + 0,4 = 1,0. Portanto é uma distribuição.

b) Calcule o valor médio; (0,5 ponto)

Solução: Por definição, o valor médio de uma densidade f(x) é dado por

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$\mu=\int_{0}^{0,5} x\,0,8\,dx+\int_{0,8}^{1,0} x\,1,0\,dx+\int_{1,4}^{2,4} x\,0,4\,dx=0,8\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{0,5}+1,0\frac{x^2}{2}\Big|_{0,8}^{1,0}+0,4\frac{x^2}{2}\Big|_{1,4}^{2,4}$$

$$\mu=0,1+0,18+0,76=1,04$$

c) Calcule a variância; (1,0 ponto)

Solução: Partindo da definição de variância, ou seja,

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx-\mu^2$$

faremos o cálculo de forma similar a anterior

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_{0}^{0,5} x^2\,0,8\,dx+\int_{0,8}^{1,0} x^2\,1,0\,dx+\int_{1,4}^{2,4} x^2\,0,4\,dx=0,8\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{0,5}+1,0\frac{x^3}{3}\Big|_{0,8}^{1,0}+0,4\frac{x^3}{3}\Big|_{1,4}^{2,4}$$

$$\sigma^2=0,0333...+0,162666...+1,47733...-(1,04)^2=1,6733-1,0816=0,5917$$

d) Calcule a moda. (0,5 ponto)

Solução: Como a moda é o valor no qual a densidade é máxima, inspecionando a figura achamos o valor 1,0.

2 - Segunda questão (2,5 pontos)

Foi feito um conjunto de medidas de tempo de falha de um tipo de sensor de fumaça. A média e a variância amostrais (em unidades arbitrárias) foram

$\mu=35, \sigma^2=2,4$

Supondo aplicável o teorema central do limite, calcule...

Solução: Para o cálculo de probabilidade da distribuição Normal usando a tabela dada temos que fazer uma transformação de variáveis que resulta em

$$P(a\le X\le b)=P(\frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma})$$

no nosso caso

$$P(a \le X \le b) = P(\frac{a-35}{\sqrt{2,4}} \le Z \le \frac{b-35}{\sqrt{2,4}})$$

particularizando teremos

a)P(X > 45) (1,0 pontos)

Usando as propriedades de complementaridade teremos

$$P(X > 45) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{45-35}{1,5492}) = P(Z > 6,455) = 0,5 - P(0 \le Z \le 6,455)$$

$$P(X > 45) = 0,5 - P(0 \le Z \le 6,455) = 0,5 - 0,5 = 0$$

b)P(X < 35) (0,5 pontos)

Aqui neste caso

$$P(X < 35) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{35-35}{1,5492}) = P(Z < 0) = 0,5$$

Observe que devido a simetria da distribuição em torno da média, este item dispensava os cálculos.

c)P(35 < X < 45) (1,0 pontos)

$$P(35 \le X \le 45) = P(\frac{35-35}{\sqrt{2,4}} \le Z \le \frac{45-35}{\sqrt{2,4}}) = P(0 \le Z \le 6,4549) = 0,5$$

Novamente nesta questão este cálculo é dispensável pelo desenvolvido anteriormente.

3 - Terceira questão (0,0 pontos)

Uma amostra de 30 pinos de madeira forneceu uma média de 6,2 cm de comprimento e variância amostral de 3,2 cm^2. Deseja-se testar com um nível de significância de 10% se a média de comprimento da produção de pinos é igual ou menor que 6,5. Qual é a sua conclusão?

Solução: ESTA QUESTÃO ESTÁ ANULADA POR UMA AMBIGUIDADE NO ENUNCIADO. A PONTUAÇÃO DA MESMA FOI DISTRIBUIDA IGUALMENTE ENTRE AS DEMAIS QUESTÕES.

4 - Quarta questão (2,0 pontos)

Uma corda está sendo testada quanto em que ponto da mesma vai se dar o rompimento. Para isto um segmento de um metro é colocado numa máquina onde a corda será tencionada. A corda pode se romper em qualquer ponto do seu comprimento com igual probabilidade. Queremos estimar qual a probabilidade que esta corda irá se romper dentro de uma faixa de 10 cm em torno do centro da corda (10 cm para cada lado!).

Solução: Já que a corda pode se romper com igual probabilidade em qualquer ponto, a distribuição de probabilidade é a Uniforme e esta é definida como

$f(x)=\frac{1}{b-a}$ dentro do intervalo [a, b] valendo zero fora deste intervalo.

Com a corda tendo 1 metro de comprimento, escolheremos a = 0 e b = 1. Assim f(x) = 1 no intervalo [0, 1].

Sendo assim, a probabilidade da corda se romper será

$$P(0{,}4\leq X\,0{,}6)=\int_{0,4}^{0,6} 1\,dx=0{,}6-0{,}4=0{,}2.$$

5- Quinta questão (3,0 pontos)

Num centro de pesquisa pecuária está sendo verificado o crescimento de frangos de uma nova variedade. A média de peso ainda não foi determinada mas dados de uma pesquisa similar resultou que o valor da variância deve ser 210 g ^{2}. Uma amostra de 20 animais foi sorteada e o peso médio da amostra foi de 1750g. Estime o valor da média com 90% de confiança.

Solução: o Intervalo de Confiança é dado por

$$IC(\mu,\gamma)=\left[\bar{X}-z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_{\gamma/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

A variância é dada por 210/20 = 10,5 g^2. Como queremos 90% de confiança, teremos

$$z_{\gamma/2}=z_{0,9/2}=z_{0,45}=1{,}64$$

onde fizemos uso da tabela da Normal. Com estes valores obtemos

$$IC(\mu, 0{,}9) = \left[1750 - 1{,}64\sqrt{10{,}5}\,;\, 1750 + 1{,}64\sqrt{10{,}5}\right]$$

ou ainda

$$IC(\mu, 0{,}9) = [1750 - 5{,}314\,;\, 1750 + 5{,}314] = [1744{,}7\,;\, 1760{,}3]$$

Tabela da distribuição Normal
N(0,1)

z_c	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	*0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	*0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997

Atribua o valor 0,5 para valores maiores ou iguais a 3,4.