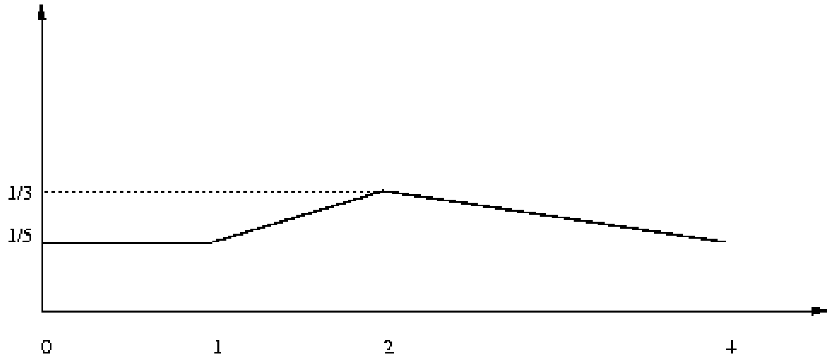
Fundação CECIERJ - **Vice Presidência de Educação Superior a Distância**

Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina Probabilidade e Estatística
AD2 2° semestre de 2015
GABARITO

Primeira questão (2 pontos)
Dada o gráfico abaixo (onde não houver indicação a função vale zero):



a) Demonstre que f(x) é uma densidade; (0,5 pontos)
Resolução:
A função é sempre positiva. A área pode ser obtida por integração direta usando o achado no item b. Mas observe que a figura é a soma da área de um retângulo de base 1 e altura 1/5 mais de um trapézio de bases 1/5 e 1/3 com altura 1 (olhe de lado) e outro trapézio de bases 1/3 e 1/5 e altura 2. Somando teremos

$$A=1\times\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\times 1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\times 2=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\,\frac{8}{15}+\frac{1}{2}\,\frac{8}{15}\times 2=1 \quad .$$

b) Escreva a expressão da função; (0,2 pontos)
Resolução:
Observando a figura vemos que $\frac{1}{5};x\in[0,1)$ **. Continuando o exame vemos que para** $x\in[1,2)$ **temos uma reta que passa pelos pontos (1, 1/5) e (2, 1/3). Assim teremos**

$$y=a+bx\Rightarrow\frac{1}{5}=a+b\,;\,\frac{1}{3}=a+2b$$

e do sistema resultante temos $a=\frac{1}{15};b=\frac{2}{15}$ **. Assim temos** $y=\frac{1}{15}(2x+1);x\in[1,2)$ **.**
No outro segmento da função temos uma reta definida pelos pontos (2,1/3) e (4, 1/3). Da mesma forma que anteriormente teremos

$$y=a+bx\Rightarrow\frac{1}{3}=a+2b\,;\,\frac{1}{5}=a+4b$$

e obtemos $a=\frac{7}{15};b=-\frac{1}{15}$ **que nos dá** $y=\frac{1}{15}(-x+7);x\in[1,2)$ **.**

c) Calcule o valor médio; (0,5 pontos)
Resolução:
Pela definição de valor médio para funções contínuas

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx$$

teremos:

$$\mu=\int_0^1 \frac{x}{5}dx+\int_1^2 \frac{x}{15}(2x+1)dx+\int_2^4 \frac{x}{15}(-x+7)dx=\frac{1}{5}\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{15}\left[2\int_1^2 x^2dx+\int_1^2 x\,dx-\int_2^4 x^2dx+7\int_2^4 x\,dx\right]$$

portanto

$$\mu=\frac{1}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+\frac{1}{15}\left[2\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{x^3}{3}\Big|_2^4+7\frac{x^2}{2}\Big|_2^4\right]=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\left[\frac{2}{3}(2^3-1^3)+\frac{2^2-1^2}{2}-\frac{4^3-2^3}{3}+\frac{7}{2}(4^2-2^2)\right]$$

logo

$$\mu=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\left(\frac{14}{3}+\frac{3}{2}-\frac{56}{3}+7\times 6\right)=\frac{1}{10}+\frac{59}{30}=\frac{31}{15}\approx 2{,}0666$$

d) Calcule a variância; (0,5 pontos)
Resolução:
Partindo da definição de variância, ou seja,

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-\mu^2$$

calculemos a integral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{5}dx+\int_1^2 \frac{x^2}{15}(2x+1)dx+\int_2^4 \frac{x^2}{15}(-x+7)dx=\frac{1}{5}\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{15}\left[2\int_1^2 x^3dx+\int_1^2 x^2dx-\int_2^4 x^3dx+7\int_2^4 x^2dx\right]$$

que resulta em

$$\frac{1}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{1}{15}\left[2\frac{x^4}{4}\Big|_1^2+\frac{x^3}{3}\Big|_1^2-\frac{x^4}{4}\Big|_2^4+7\frac{x^3}{3}\Big|_2^4\right]=\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\left[\frac{1}{2}(2^4-1^4)+\frac{2^3-1^3}{3}-\frac{4^4-2^4}{4}+\frac{7}{3}(4^3-2^3)\right]$$

ou ainda

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{15}\left[\frac{15}{2}+\frac{7}{3}-60+\frac{392}{3}\right]=\frac{163}{30} \quad ,$$

portanto

$$\sigma^2=\frac{163}{30}-\left(\frac{31}{15}\right)^2=\frac{523}{450}=1{,}1622 \quad .$$

e) Calcule a moda. (0,3 pontos)
Ressolução:
Pela definição de moda e examinando a figura temos que a função e monomodal e a moda é 2.

Segunda questão (2 pontos)
Verifique se as expressões abaixo são funções de probabilidade. Se não o for por casa de normalização, normalize a função e a apresente.

a) $f(x)=2(1-x);0\leq x\leq 1$
Resolução:
Integremos a função dada

$$\int_0^1 2(1-x)\,dx=2\left[\int_0^1 x\,dx-\int_0^1 x\,dx\right]=2\left[x|_0^1-\frac{x^2}{2}|_0^1\right]=2\left(1-\frac{1}{2}\right)=1 \quad .$$

portanto é distribuição de probabilidade no intervalo proposto.

b) $f(x)=2(1-x);1\leq x\leq 2$
Resolução:
Observe que esta função toma valores negativos dentro deste intervalo proposto. Logo não temos aqui uma distribuição de probabilidades.

c) $f(x)=x(x-3);0\leq x\leq 1$
Resolução:
Novamente temos que esta função toma valores negativos dentro do intervalo proposto, logo não é uma distribuição de probabilidade.

d) $f(x)=sen(x);0\leq x\leq \pi/2$
Resolução:
Esta função toma somente valores positivos no intervalo proposto. Integremos

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)\,dx=-\cos(x)|_0^{\pi/2}=-(0-1)=1 \quad ,$$

portanto esta função é distribuição de probabilidade no intervalo proposto.

Terceira questão (1,0 pontos)
Numa fábrica de móveis modulados se usava pinos de madeira para fixação. A questão era que havia reclamações dos montadores quanto o diâmetro do pino num lote da produção. Uma amostra de 10 pinos de madeira forneceu uma média de 0,96 cm de diâmetro e uma variância amostral de 0,09 cm^2. Calcule a probabilidade de se encontrar um pino como menos de 0,9 cm de diâmetro.
Resolução:
Suporemos que a distribuição Normal é válida para esta amostra. Assim teremos

$$P(X<0{,}9)=P\left(Z<\frac{0{,}9-0{,}96}{\sqrt{0{,}09}/\sqrt{10}}\right)\approx P\left(Z<-\frac{0{,}06}{0{,}0948}\right)\approx P(Z<-0{,}6324)\approx 0{,}5-P(Z<0{,}63) \text{ .}$$

portanto

$$P(X<0{,}9)=0{,}5-0{,}2357=0{,}2643 \text{ .}$$

Quarta questão (1,0 pontos)
Uma nova cola rápida está sendo testada colando barras de madeira sempre com a mesma área de recobrimento. Foram feitos 50 testes e verificou que, em média, a resistência era de 200 kg/cm². O desvio padrão foi de 50 kg/cm². Supondo que esta amostra é significativa, qual a probabilidade de que a colagem resista a mais de 300kg/cm² ? Qual a probabilidade de que a colagem não resista a menos de 100kg/cm² ? Faça uma suposição sobre a distribuição de probabilidade e o porque desta
Resolução:
Suporemos que o número de testes nos permitam usar a distribuição Normal. Assim trabalharemos com a fórmula

$$P(a>X>b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}>Z>\frac{b-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \quad .$$

Dos dados do problema temos $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{50}{\sqrt{50}}=\sqrt{50}\approx 7{,}071$ **e** $\mu=200$ **. Verifiquemos a probabilidade de resistir a mais de 300kg/ cm²**

$$P(X>300)=P\left(Z>\frac{300-200}{7{,}071}\right)\approx P(Z>14{,}1422)=0 \quad .$$

No outro caso teremos

$$P(100>X)=P\left(\frac{100-200}{7{,}071}>Z\right)=P(-14{,}1422>Z)=0{,}5+P(14{,}1422<Z)=1 \quad .$$

Quinta questão (1,5 pontos)
Um novo aditivo de combustível estava sendo testado. O objetivo desta adição era diminuir a quantidade de um poluente específico X. O fabricante, na sua publicidade, afirma que há uma redução média de 22%. O novo combustível foi usado em oitenta veículos e foi observado uma redução de, em média, 20% no nível do poluente com variância 5 %. Suponha que a variável aleatória R, redução do poluente, tenha distribuição Normal. Teste, ao nível de significância de 10 %, a afirmação do fabricante de combustível. Qual a probabilidade do erro ser do tipo II?
Resolução:
Serão estas as hipóteses:
Hipótese Ho = Redução maior que 20% de poluente; (Hipótese rejeitada e fato verdadeiro)
Hipótese Há = Redução menor que 22% de poluente; (Hipótese aceita e fato falso)

Variância: 5%

$$\mu = 20$$
$$n = 80$$
$$\alpha = P(Error\_Tipo\_I)$$
$$0.10 = \left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{X_c-20}{2.2361/\sqrt{80}}\right)$$
$$Z_{c=}1.28$$
$$1.28 = \frac{X_c-20}{0.25}$$

Probabilidade de ser do tipo II:

$$\beta = P(Error\_Tipo\_II)$$
$$\beta(22) = \left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{20.32 - 22}{2.2361 / \sqrt{80}} \right)$$
$$P(X = 20.32) = \frac{20.32 - 22}{2.2361 / \sqrt{80}} = -6.72 = 0.50$$

Sexta questão (1,5 pontos)

Num centro de pesquisa pecuária está sendo verificado o crescimento de frangos de uma nova espécie. A média de peso ainda não foi determinada mas dados de uma pesquisa similar resultou que o valor da variância deve ser 210 g^2. Uma amostra de 20 animais foi sorteada e o peso médio da amostra foi de 1750g.

a) Estime o valor da média com 90% de confiança;

Resolução:

O Intervalo de Confiança é dado por

$$IC(\mu, \gamma) = \left[\bar{X} - z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{\gamma/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

A variância é dada por 210/20 = 10,5 g^2. Como queremos 90% de confiança, teremos

$$z_{\gamma/2} = z_{0,9/2} = z_{0,45} = 1,64$$

onde fizemos uso da tabela da Normal. Com estes valores obtemos

$$IC(\mu, 0,9) = \left[1750 - 1,64\sqrt{10,5} ; 1750 + 1,64\sqrt{10,5} \right]$$

ou ainda

$$IC(\mu, 0,9) = [1750 - 5,314 ; 1750 + 5,314] = [1744,7 ; 1760,3] .$$

b) Estime o valor da média com 75% de confiança;

Resolução:

Aqui todos os dados são os mesmo do item anterior menos a confiança que aqui é de 75%, o que nos indica

$$z_{\gamma/2} = z_{0,75/2} = z_{0,375} = 1,15$$

onde fizemos uso da tabela da Normal, o que nos dá

$$IC(\mu, 0,9) = \left[1750 - 1,15\sqrt{10,5} ; 1750 + 1,15\sqrt{10,5} \right]$$

ou ainda

$$IC(\mu,0{,}9)=[1750-3{,}726;1750+3{,}726]\approx[1746{,}2;1753{,}7]\ .$$

c) Dê a amplitude do intervalo de confiança pra os itens a e b.
Resolução:
A amplitude do intervalo de confiança é, por definição, o tamanho do intervalo. Assim para o item a o intervalo é 10,628 e no item b 7,452.

Sétima questão (1 ponto)
Calcule as probabilidades abaixo:
a) P(X < 3) para a distribuição da primeira questão;
Resolução:
Para esta distribuição teremos a probabilidade dada por

$$\mu=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}\left(\frac{14}{3}+\frac{3}{2}-\frac{56}{3}+7\times 6\right)=\frac{1}{10}+\frac{59}{30}=\frac{31}{15}=2{,}0666$$

$$P(X<3)=\frac{1}{5}\int_0^1 dx+\frac{1}{15}\left[\int_1^2(2x+1)\,dx+\int_2^3(-x+7)\,dx\right]\ .$$

Teremos

$$P(X<3)=\frac{1}{5}\int_0^1 dx+\frac{1}{15}\left[2\int_1^2 x\,dx+\int_1^2 dx-\int_2^3 x\,dx+7\int_2^3 dx\right]=\frac{1}{5}x|_0^1+\frac{1}{15}\left[2\frac{x^2}{2}|_1^2+x|_1^2-\frac{x^2}{2}|_2^3+7x|_2^3\right]$$

ou ainda

$$P(X<3)=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\left[(2^2-1^2)+(2-1)-\frac{3^2-2^2}{2}+7(3-2)\right]=\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\left(3+1-\frac{5}{2}+7\right)=\frac{23}{30}\approx 0{,}7666$$

b) P(2<X<3) para a distribuição Normal de desvio padrão 1,25 e média 1,9;
Resolução:
Usaremos nesta e na próximo item

$$P(a<X<b)=P\left(\frac{a-\mu}{\sigma}<Z<\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\ .$$

Neste caso teremos

$$P(2<X<3)=P\left(\frac{2-1{,}9}{1{,}25}<Z<\frac{3-1{,}9}{1{,}25}\right)=P(0{,}08<Z<0{,}88)=P(Z<0{,}88)-P(0{,}08)$$

ou

$$P(2<X<3)=0{,}3106-0{,}0319=0{,}2787\ .$$

c) P(2<X3) para a distribuição Normal de variância 1,5625 e média 2,1;
Resolução:

$$P(2<X<3)=P\left(\frac{2-2{,}1}{\sqrt{1{,}5625}}<Z<\frac{3-2{,}1}{\sqrt{1{,}5625}}\right)=P\left(\frac{-0{,}1}{1{,}25}<Z<\frac{0{,}9}{1{,}25}\right)=P(-0{,}08<Z<0{,}72)$$

e então

$$P(2<X<3)=0{,}0319+0{,}2642=0{,}2961\ .$$

d) P(2<X<3) para distribuição Exponencial para $\alpha=1{,}32$.

Resolução:

Usaremos aqui

$$P(a<X<b)=\int_a^b \alpha e^{-\alpha x}\,dx=e^{-\alpha a}-e^{-\alpha b}$$

que toma aqui a forma

$$P(2<X<3)=e^{-1{,}32\times 2}-e^{-1{,}32\times 3}=e^{-2{,}64}-e^{-3{,}96}\approx 0{,}07136-0{,}01906\approx 0{,}0523\ .$$

Atenção:

I) Não haverá formulário na segunda avaliação presencial.

II) Todos os cálculos deverão ser feitos com pelo menos quatro casas decimais e arrendondados para duas APENAS ao final, seja na lista ou na prova.

III) Tenha cuidado quanto a notação. Caso não a siga, você terá pontos descontados, seja na lista ou na prova.