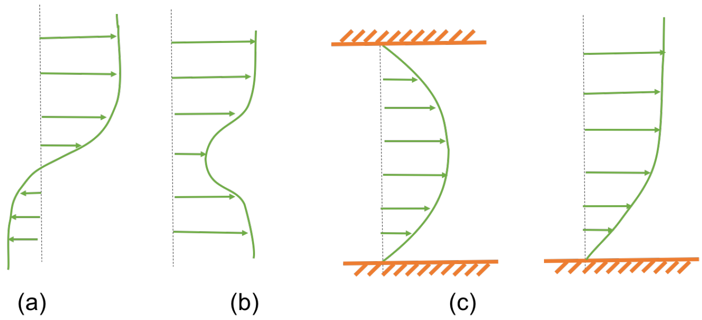
Examen de seconde session du cours d'instabilité, M2R DET, 5 septembre 2018

Durée 2 heures. La qualité de la présentation de la copie sera prise en compte.

Documents autorisés : tous documents manuscrits.

1 Question de cours



On considère 4 exemples d'écoulement parallèle d'un fluide incompressible représentés par les profils (a), (b), (c), (d) ci-dessus. Pour chacun des cas, expliquez la signification physique de l'écoulement (dans quels contextes ou applications ce type d'écoulement est-il rencontré) puis discutez ses propriétés de stabilité. A quel type d'instabilités peut-on s'attendre ? Argumentez en vous basant sur les notions vues en cours (notamment les critères classiques de stabilité).

2 Système dynamique

On étudie dans cet exercice le mouvement d'un objet de position $x(t)$ gouverné par l'équation dynamique suivante :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} = rx - x^3 \tag{1}$$

1. On suppose tout d'abord $m = 0; \mu = 1$. Montrez que ce problème se ramène à celui de la minimisation d'une fonction $V(x)$ que vous préciserez. Tracez la forme de cette fonction selon le signe de r. En déduire le diagramme des bifurcations. De quel type de bifurcation s'agit-il ?
2. Réécrire l'équation dynamique sous forme d'un système dynamique à deux degrés de liberté pour le vecteur $X = (x; \dot{x})$. Cherchez les solutions d'équilibre de ce système, et comparez au résultat trouvé à la question précédente.
3. On suppose $m = 1, \mu = 2$. Etudiez la stabilité de la solution d'équilibre $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ et préciser la nature de ce point selon la valeur de r (on distinguera les 2 cas $r < -1$, $-1 < r < 0$ et $r > 0$).
   Tracez l'allure du portrait de phase au voisinage du point d'équilibre $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ dans chacun des 3 cas précédents.
4. En considérant toujours le cas $m = 1, \mu = 2$, étudiez la stabilité de la solution d'équilibre $(x, \dot{x}) = (\sqrt{r}, 0)$ existant pour $r > 0$, et préciser la nature de ce point selon la valeur de r (on distinguera les 2 cas $0 < r < 1/2$ et $r > 1/2$).
   Tracez l'allure du portrait de phase, incluant tous les points d'équilibre du système, dans chacun des 2 cas précédents.

3 Convection de Rayleigh-Bénard dans une cellule verticale

On étudie l'instabilité de convection se produisant dans une cellule rectangulaire définie par $x \in [0, L]$ et $y \in [0, H]$ avec $H \gg L$ (contrairement au cas traité en cours qui correspond à une cellule horizontale avec $H \ll L$). On note $T_0 = T(x, y = 0)$ et $T_1 = T(x, y = H)$ avec $T_0 > T_1$ les températures des parois inférieures et supérieures. Le fluide considéré est supposé incompressible mais dilatable, caractérisé par sa viscosité cinématique ν, sa diffusivité thermique κ, et son coefficient de dilatation thermique α.

1. Décrire l'état de base (solution sans convection) du système, donnez la loi $T = \overline{T}(y)$ correspondante.
2. Montrez (en précisant éventuellement les hypothèses physiques correspondantes) que les champs de masse volumique de de pression associés à l'état de base sont donnés par :
$$\overline{\rho}(y) = \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha(T_1 - T_0)}{H} y\right),$$
$$\overline{p}(y) = p_0 - \rho_0 g y + \frac{\rho_0 \alpha (T_1 - T_0) g}{2H} y^2,$$
3. On étudie la stabilité en cherchant une solution "monodimensionnelle" de la forme $T = \overline{T}(y) + \hat{T}\sin(kx)e^{\lambda t}$; $\vec{u} = \hat{v}\sin(kx)e^{\lambda t}\vec{e_y}$ et $p \approx \overline{p}(y) + 0$ où $\hat{T}$ et $\hat{v}$ sont des constantes (réelles) indépendantes de y.
Pour quelles valeurs de k le champ de vitesse ainsi défini vérifie-t-il les conditions limite en $x = 0$ et $x = L$? Que peut-on dire des conditions limite en $y = 0$ et $y = H$?
4. Représentez l'allure du champ de vitesse dans la cellule rectangulaire pour les deux premières valeurs de k trouvées précédemment. Justifiez que seule la seconde valeur de k conduit à un champ de vitesse correspondant à une cellule de recirculation. Cette solution est-elle valable dans toute la cellule ? A quel(s) endroits conviendrait-il de corriger cette solution ?
5. A quoi correspond l'hypothèse de Boussinesq ? Montrez que sous cette hypothèse les termes de gradient de pression et de gravité dans l'équation de Navier-Stokes se simplifient en un terme de "flottabilité" proportionnel à $\alpha g \hat{T}$.
6. Ecrire les équations du mouvement dans le régime linéaire ($\hat{T} \ll 1$ et $\hat{v} \ll 1$) en précisant les hypothèses de modélisation, et montrez que celles-ci conduisent au système suivant :
$$\begin{aligned} \lambda \hat{v} &= -\nu k^2 \hat{v} + \alpha g \hat{T}, \\ \lambda \hat{T} &= -\kappa k^2 \hat{T} + \frac{T_0 - T_1}{H}\hat{v}. \end{aligned}$$
7. En déduire que l'instabilité se produit lorsque la condition suivante est réalisée :
$$(T_0 - T_1) > \frac{16 \nu \kappa \pi^4 H}{\alpha g L^4} \qquad (2)$$
(Indication : A partir du résultat de la question précédente et de la valeur de k déterminée à la question 3, on écrira tout d'abord le polynôme caractéristique (d'ordre 2) dont les solutions sont les valeurs possibles de λ. On pourra ensuite remarquer que ce polynôme a deux solutions réelles λ_1 et λ_2 dont l'une est toujours négative, et donc se contenter d'étudier le signe du produit des deux racines).