

Examen du cours d'instabilités, M2 DET

4 février 2021

Durée 2 heures. La qualité de la présentation de la copie sera prise en compte.

Documents autorisés : tous documents manuscrits ou imprimés.

ELEMENTS DE CORRECTION

1 Effet de la compressibilité sur les propriétés de stabilité d'un écoulement de Poiseuille plan

On a vu en cours les propriétés de stabilité de l'écoulement de Couette plan, considéré comme prototype des écoulements de "classe B", stables vis-à-vis des critères classiques non-visqueux mais affectés par l'instabilité de Tollmien-Schlichting.

Dans ce problème on souhaite étudier l'effet de la compressibilité sur ces instabilités.

On partira des équations de Navier-Stokes *compressibles* pour un fluide Newtonien, écrites sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div}(\vec{u}) = 0.$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{u}$$

On négligera les transferts thermiques au sein du fluide, ce qui permet de faire l'hypothèse d'un comportement adiabatique, c.a.d. que la pression et la masse volumique sont reliés par une équation de Laplace :

$$p \rho^{-\gamma} = \text{Cte.} \quad (\gamma = 1.4)$$

La solution de base correspond à une masse volumique ρ_0 et une pression P_0 constantes, ainsi qu'un champ de vitesse $\bar{U}(y) = U_m \left(1 - \frac{y^2}{2H^2}\right)$ où U_m est la vitesse maximale, H la demi-largeur du canal.

Dans la suite on adimensionalisera les équations en posant $H \equiv 1, U_m \equiv 1, \rho_0 \equiv 1$. On pourra donc identifier $\bar{U}(y)$ avec sa version adimensionnelle (c.a.d. $\bar{U}(y) \equiv (1 - y^2)$), et remplacer la viscosité par $\mu \equiv Re^{-1}$ où $Re = \rho_0 U_m H / \mu$ est le nombre de Reynolds.

1.1 Etablissement des équations linéarisées

On considère des petites perturbations par rapport à l'état de référence défini précédemment, sous la forme suivante :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \bar{U}(y) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}; \quad p = P_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho'.$$

1. Justifiez que sous l'hypothèse adiabatique p' et ρ' sont liés par :

$$p' = c_0^2 \rho', \quad \text{avec } c_0^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$$

Réponse : On écrit

$$(P_0 + p')(\rho_0 + \rho')^{-\gamma} = \text{cte} = P_0 \rho_0^{-\gamma}$$

ou encore

$$\left(1 + \frac{p'}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\rho'}{\rho_0}\right)^{-\gamma} = 1$$

En linéarisant ceci conduit à $\frac{p'}{P_0} - \gamma \frac{\rho'}{\rho_0} = 0$ d'où le résultat.

Dans la suite, compte tenu du choix d'adimensionalisation, on pourra remplacer partout la vitesse du son par $c_0 \equiv Ma^{-1}$ où $Ma = U_M/c_0$ est le nombre de Mach basé sur la vitesse maximale.

2. En linéarisant les équations de Navier-Stokes compressibles, donnez le système d'équations aux dérivées partielles linéaires gouvernant l'évolution des petites perturbations $[u', v', \rho']$.

Réponse :

Réécrivons les eqs de Navier-Stokes en détaillant les composantes :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \partial_x \rho + v \partial_y \rho + \rho (\partial_x u + \partial_y v) = 0.$$

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \partial_x u + v \partial_y u \right] = -\partial_x p + \mu (\partial_{xx} u + \partial_{yy} u)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \partial_x v + v \partial_y v \right] = -\partial_y p + \mu (\partial_{xx} v + \partial_{yy} v)$$

On injecte le développement, et on néglige tous les termes non linéaires (de la forme $u' \times u', u' \times \rho'$, etc...) On arrive à :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{U} \partial_x \rho' + \rho_0 (\partial_x u' + \partial_y v') = 0.$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{U} \partial_x u' + v' \partial_y \bar{U} \right] = -\partial_x p' + \mu (\partial_{xx} u' + \partial_{yy} u')$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{U} \partial_x v' \right] = -\partial_y p' + \mu (\partial_{xx} v' + \partial_{yy} v')$$

3. On recherche des solutions sous la forme de modes propres : $[u', v', \rho', p'] = Re([\hat{u}, \hat{v}, \hat{\rho}, \hat{p}] e^{ikx} e^{\lambda t})$. Justifiez que $\lambda_r = Re(\lambda)$ correspond au taux de croissance de l'instabilité et que $c_r = -Im(\lambda)/k$ correspond à la vitesse de phase des modes correspondants.

Réponse : Les perturbations peuvent se mettre sous la forme $[u', v', \rho', p'] = Re([\hat{u}, \hat{v}, \hat{\rho}, \hat{p}] e^{ik(x-c_r t)} e^{\lambda_r t})$.

On reconnaît une "onde" qui se propage à la vitesse c_r tout en étant amplifiée exponentiellement.

4. Montrez que les équations écrites précédemment conduisent à :

$$(\lambda + ik\bar{U})\hat{u} + (\partial_y \bar{U})\hat{v} = -ik\hat{p} + Re^{-1}(\partial_{yy} - k^2)\hat{u}, \quad (1)$$

$$(\lambda + ik\bar{U})\hat{v} = -\partial_y \hat{p} + Re^{-1}(\partial_{yy} - k^2)\hat{v}, \quad (2)$$

$$Ma^2(\lambda + ik\bar{U})\hat{p} = -(ik\hat{u} + \partial_y \hat{v}) \quad (3)$$

Réponse : On remplace ∂_x par ik , on utilise l'adimensionalisation indiquée, et on exprime \hat{p} en fonction de \hat{u} pour aboutir au résultat.

5. Montrez que le problème peut se mettre sous la forme suivante :

$$\lambda \mathcal{B} \hat{q} = \mathcal{A} \hat{q} \quad (4)$$

où \mathcal{B} et \mathcal{A} sont des opérateurs à structure matricielle dont on donnera l'expression. Réponse :

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & M^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} -ik\bar{U} + Re^{-1}(\partial_y^2 - k^2) & -\partial_y \bar{U} & -ik \\ 0 & -ik\bar{U} + Re^{-1}(\partial_y^2 - k^2) & -\partial_y \\ -ik & -\partial_y & -ikM^2\bar{U} \end{bmatrix}$$

6. Que constate-t-on pour $Ma = 0$?

Réponse : On retombe sur le cas incompressible vu en cours.

1.2 Interprétation des résultats

Un programme permettant de résoudre le problème a été écrit sur la base du projet EasyStab. Celui-ci a produit les résultats présentés dans les figures 1 à 3.

7. La figure 1 représente le spectre (ensemble des valeurs propres λ complexes) pour le choix de paramètres ($Re = 10^4$, $Ma = 0.1$, $k = 1$). Discutez les résultats au vu du cas incompressible vu en cours. Quelles sont les ressemblances et différences ? Comment interpréter l'existence de modes caractérisés par des grandes valeurs de la vitesse de phase ($|c_r| = \mathcal{O}(10)$) ?

Réponse : Dans la région définie par $c_r \in [0, 1]$ on reconnaît des résultats similaires à ceux du cas incompressible vu en cours. En particulier il existe un unique mode instable, c'est l'onde de Tollmien-Schlichting.

Les modes tels que $c_r = \mathcal{O}(10)$ correspondent, dimensionnellement, à $c_r = \mathcal{O}(c_0)$ vu que $c_0 \equiv 1/Ma = 10$. On peut effectivement s'attendre à l'existence d'une famille de modes ayant ces propriétés : il s'agit d'ondes acoustiques se propageant dans le canal et qui sont faiblement amorties par la viscosité. Avec $M = 0.1$ ces ondes acoustiques sont peu affectées par l'écoulement dans le canal.

8. La figure 2(a) représente la structure du mode le plus instable pour les paramètres précédents. Justifiez que ce mode possède une couche critique et donnez la position y_c correspondante (ou les positions correspondantes). Qu'observe-t-on dans la structure du mode à cette position ?

Réponse : On reconnaît l'onde de Tollmien Schlichting. Avec l'adimensionalisation choisie la condition $c_r = U(y_c)$ s'écrit $c_r = (1 - y_c^2)$ et conduit à $y_c \approx \pm 0.87$. On identifie en effet un comportement irrégulier du mode à cette position (indiquée par un pointillé sur la figure).

9. La figure 3 représente le taux de croissance et la vitesse de phase du mode le plus instable en fonction de k pour $Re = 10000$, avec $M = 0.1$, $M = 0.6$ et $M = 2$. Que peut-on en conclure sur l'effet de la compressibilité sur les propriétés de stabilité de l'écoulement ?

Réponse : Les résultats pour $M = 0.1$ sont quasiment identiques aux résultats du cas incompressible. donc pour $M < 0.1$ la compressibilité n'a quasiment aucun effet sur l'instabilité de Tollmien Schlichting (correspondant à la bosse observée pour $k \approx 1$). Lorsque M augmente, on constate que la compressibilité a pour effet de restabiliser le mode de Tollmien Schlichting (le taux d'amplification maximal et la largeur de la bosse diminuent). Le second effet de la compressibilité est de conduire à l'apparition d'un nouveau mode instable qui n'existait pas dans le cas incompressible. Ce mode correspond à la seconde "bosse" pour $k \approx 2.6$.

10. La figure 2(b) représente la structure du mode le plus instable obtenu pour les paramètres $Re = 10^4$, $Ma = 2$, $k = 2.6$. Comment peut-on comprendre physiquement la structure de ce mode ?

Réponse : La structure du champ de vitesse montre des alternances de région de compression et de dilatation, décalées d'un quart de longueur d'onde avec les maximums et minimums de pression. On reconnaît la structure caractéristique d'une onde acoustique. On constate que ce mode possède une couche critique. L'explication est donc que lorsque $M > 1$, la vitesse des ondes acoustiques devient comparable à celle de l'écoulement et que celles-ci peuvent être affectées par le phénomène de couche critique qui conduit à leur déstabilisation.

2 Système dynamique

1. On considère l'équation-modèle monodimensionnelle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = (r + 1 - (x - 1)^2) x \quad (5)$$

Calculez les points d'équilibre du système et déterminez leur stabilité par la méthode de votre choix. Montrez que le diagramme de bifurcation a l'allure donné sur la figure 4(a). Précisez la position et la nature de tous les points de bifurcation observés dans ce diagramme.

Réponse : la condition $f(x) = (r + 1 - (x - 1)^2) x = 0$ conduit à trois solutions : $x = x_0 \equiv 0$, $x = x_1 \equiv 1 + \sqrt{r + 1}$ et $x = x_2 \equiv 1 - \sqrt{r + 1}$.

On peut étudier la stabilité linéaire de chacune de ces 3 solutions en posant $x = x_i + x'$ avec $i = 0, 1, 2$. On arrive en linéarisant à $dx'/dt = [f'(x_i)] \cdot x'$, il suffit donc de connaître le signe de $[f'(x_i)]$. Commençons par exprimer $f'(x) = r + 1 - (x - 1)^2 - 2x(x - 1)$.

$f'(x_0) = r$ donc la branche x_0 est stable pour $r < 0$ puis instable pour $r > 0$.

$f'(x_1) = -2(1 + \sqrt{r+1})\sqrt{r+1}$ est toujours négatif donc la branche x_1 est toujours stable.

$f'(x_2) = 2(1 - \sqrt{r+1})\sqrt{r+1}$ change de signe en $r = 0$ donc la branche x_2 est instable pour $-1 < r < 0$ et stable pour $r > 0$.

On reconnaît une bifurcation transcritique en $r = 0$ et une bifurcation noeud-col en $r = -1$.

2. On considère maintenant le système dynamique bidimensionnel suivant :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (r + 1 - (x - 1)^2)x + Ay \\ \frac{dy}{dt} &= -By\end{aligned}\tag{6}$$

Justifiez que les points d'équilibre sont identiques à ceux de l'équation précédente.

Réponse : La deuxième équation indique que pour un point fixe $y = 0$ et dans ce cas la première équation est celle précédemment étudiée.

3. On considère le cas $r = -0.9, A = 100, B = 1$. Ecrire le système linéarisé autour du point $[0, 0]$. A quoi peut-on s'attendre concernant l'évolution de trajectoires initialement proches de l'origine ? ($x(0) \approx 0; y(0) \approx 0$).

Réponse : si $|x| \ll 1$ et $|y| \ll 1$ le système peut être remplacé par sa version linéarisée qui s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 & 100 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

On reconnaît une matrice dont les deux valeurs propres sont négatives (-1 et -0.9), traduisant un comportement stable du point de vue de la stabilité modale, mais avec des vecteurs propres très non orthogonaux. Par analogie avec le cas étudié dans la lecture 8 on peut s'attendre à des phénomènes de croissances transitoire importants.

4. La figure 4(b) présente un portrait de phase du système dynamique (représentation de quelques trajectoires caractéristiques) pour les paramètres précédents. Commentez au vu des résultats des questions précédentes.

(Notez que les axes ont des échelles très différentes).

Réponse : On reconnaît tout d'abord 3 points fixes de coordonnées $[0, 0]$, $[1 + \sqrt{0.1}, 0]$, $[1 - \sqrt{0.1}, 0]$ en accord avec les résultats de la question 1. On constate que les deux premiers sont des noeuds stables et le troisième un point-selle. On remarque ensuite que toutes les trajectoires partant de points d'amplitude initiale "très petite" convergent vers l'origine, en accord avec le caractère stable de ce point fixe. En revanche des perturbations "petites" mais pas infiniment petites ont un comportement différent. Par exemple une trajectoire partant du point $(0, 0.01)$ aboutit sur le second point fixe stable.

5. A quelle situation de mécanique des fluides la dynamique observée s'apparente-t-elle ?

Réponse : Cette dynamique évoque le problème de la transition à la turbulence pour l'écoulement dans un tube cylindrique. Dans ce problème, il existe une solution simple (l'écoulement de Poiseuille) qui est stable quelque soit le nombre de Reynolds. Toute perturbation "infiniment petite" à cette solution finit donc par disparaître, mais un mécanisme de croissance transitoire fait que certaines perturbations initialement "petites" mais pas "infiniment petites" sont amplifiées jusqu'à ce que les non linéarités les fassent converger vers un autre attracteur (qui est l'état turbulent).

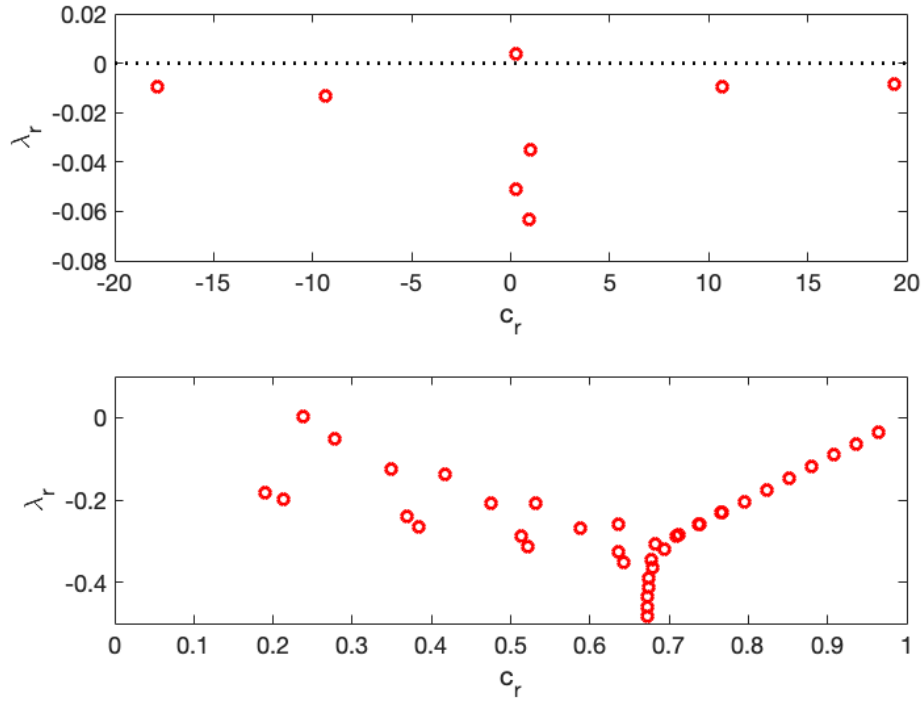


FIGURE 1 – Spectre représenté dans le plan complexe $[\lambda_r; -\lambda_i/k]$, calculé pour les paramètres $Re = 10^4; M = 0.1; k = 1$. La figure du bas est un "zoom" sur la région $0 < c_r < 1$.

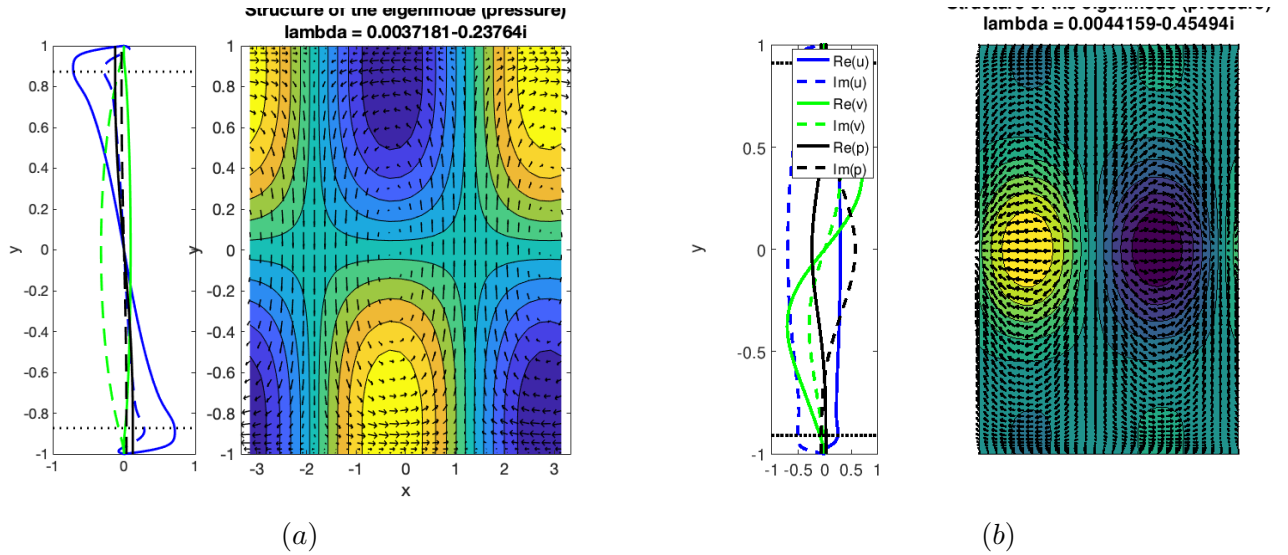


FIGURE 2 – Représentation du mode propre instable pour : (a) $Re = 10^4; M = 0.1; k = 1$; (b) $Re = 10^4; M = 2; k = 2.6$. *A gauche* : représentation de $\hat{u}(y)$ (bleu), $\hat{v}(y)$ (vert), $\hat{p}(y)$ (noir). Les lignes pleines et pointillées correspondent aux parties réelle et imaginaire. *A droite* : reconstruction du champ de vitesse $[u', v'] = [Re(\hat{u}e^{ikz}); (\hat{v}e^{ikz})]$ et représentation par des niveaux de couleur du champ de pression $p' = Re(\hat{p}(y)e^{ikx})$.

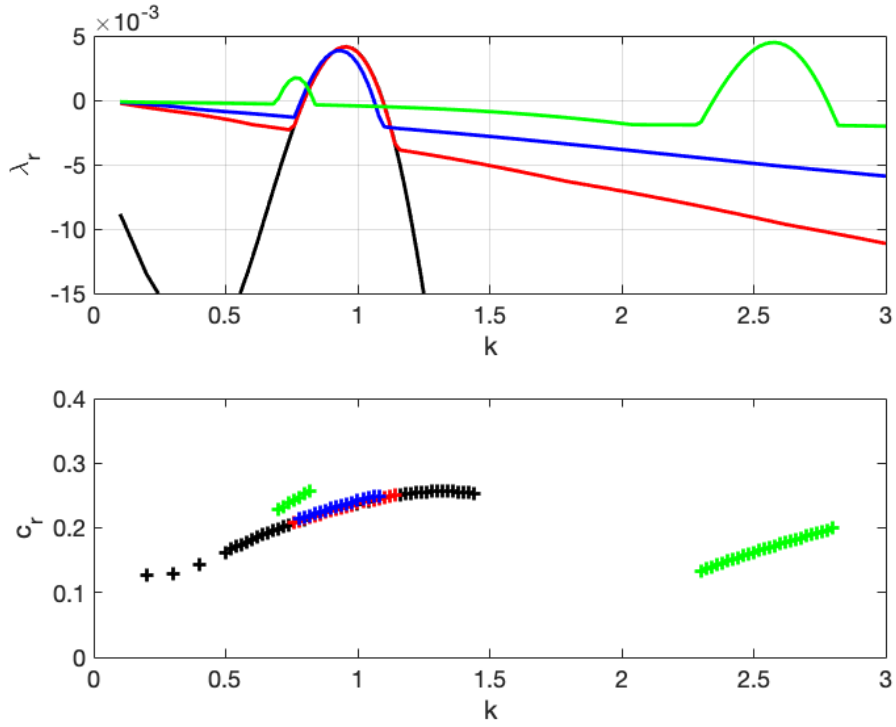
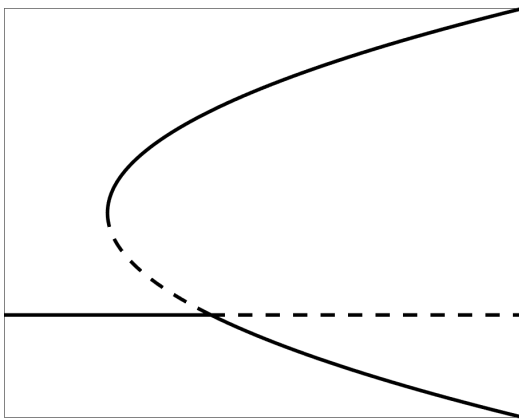
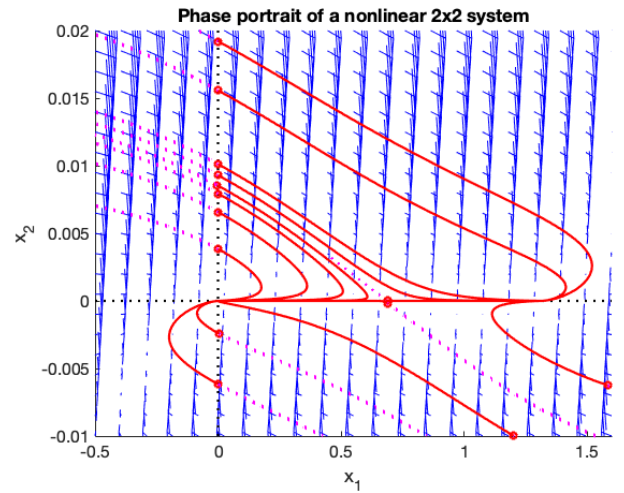


FIGURE 3 – Taux de croissance λ_r et vitesse de phase c_r du mode le plus amplifié en fonction de k pour $Re = 10^4$ et $M = 0$ (noir), $M = 0.1$ (rouge), $M = 0.6$ (bleu), et $M = 2$ (vert).



(a)



(b)

FIGURE 4 – (a) : Allure du diagramme de bifurcations pour l'équation 5. (b) : Portrait de phase du système dynamique 6 avec le choix de paramètres. $r = -.9$; $A = 100$; $B = 1$. Les lignes en rouge décrivent l'évolution vers le futur à partir d'une sélection de conditions initiales (correspondant aux cercles rouges); et les lignes pointillées roses leur évolution vers le passé.