Examen du cours d'instabilités, M2 DET
30 janvier 2020

Durée 2 heures. La qualité de la présentation de la copie sera prise en compte.

Documents autorisés : tous documents manuscrits ou imprimés, livres non autorisés.

1 Instabilité d'un écoulement cisaillé à surface libre

On considère un écoulement parallèle d'un liquide homogène de masse volumique ρ, défini par $\vec{u} = \bar{U}(y)\vec{e}_x$ et associé à un champ de pression $\bar{P}(y)$, occupant l'espace $y \in [0, H]$. La position $y = 0$ est un mur, et la position $y = \eta(x) = H$ une surface libre. La région $y > H$ est occupée par un gaz de masse volumique et viscosité négligeables, à la pression uniforme P_a.

La gravité est (sauf dans la partie D) supposée dirigée selon la verticale descendante : $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ avec $g > 0$.

Le liquide est supposé non non visqueux (sauf dans la partie E).

1. **Question préliminaire :** Montrez que le champ de pression $P(y)$ est un champ hydrostatique et donnez son expression.

   A. Equations des perturbations (théorie non visqueuse)

   On étudie des petites perturbations à cet écoulement sous la forme modale suivante.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ p \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{U}(y) \\ 0 \\ \bar{P}(y) \\ H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{u}(y) \\ \hat{v}(y) \\ \hat{p}(y) \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} e^{i(kx-\omega t)}$$

2. Si k est réel, expliquez la signification physique des parties réelles et imaginaires de ω .
3. A partir des équations d'Euler écrire 3 équations linéaires reliant $\hat{u}(y)$, $\hat{v}(y)$ et $\hat{p}(y)$.
4. Après avoir introduit une fonction de courant $\hat{\psi}$ (et justifié son existence), monter que ces équations peuvent se combiner pour aboutir à l'équation de Rayleigh (avec $c = \omega/k$) :

$$(\bar{U} - c)(\partial_y^2 - k^2)\hat{\psi} + \bar{U}''\hat{\psi} = 0 \tag{1}$$

5. Ecrire deux conditions limites reliant respectivement $\hat{v}(H)$ à $\hat{\eta}$ et $\hat{p}(H)$ à $\hat{\eta}$
6. Montrez que ces deux équations peuvent se combiner pour aboutir à l'expression suivante :

$$(U(H) - c)^2 \left[\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial y}\right]_{y=H} - U'(H)\,(U(H) - c)\,\hat{\psi}(H) - g\hat{\psi}(H) = 0. \tag{2}$$

7. Précisez également la condition limite vérifiée par $\hat{\psi}$ en $y = 0$.

   B. Cas particulier sans écoulement

8. On suppose que $U(y) = 0$. Résolvez le problème et montrer qu'on retrouve la relation de dispersion classique des ondes de gravité en profondeur finie : $\omega^2 = gk\tanh(kH)$.

   Dans ce cas particulier le problème est-il stable ou instable ?

   C. Théorème de Rayleigh

9. A partir de l'équation de Rayleigh, en supposant qu'il existe un mode instable vérifiant $c_i > 0$, démontrez l'identité suivante :

$$c_i \left\{ \int_0^H \frac{\bar{U}''(y)}{|\bar{U}(y) - c|^2}|\hat{\psi}(y)|^2 dy - \frac{U'(H)}{|\bar{U}(H) - c|^2}|\hat{\psi}(H)|^2 + \frac{2g(U(H) - c_r)}{|\bar{U}(H) - c|^4}|\hat{\psi}(H)|^2 \right\} = 0.$$

10. On suppose que $U'(y) > 0$ et $U''(y) < 0$ pour tout $y \in [0, H]$. conclure que si $g = 0$ il ne peux exister de mode instable. Ce résultat est-il en accord avec le théorème de Rayleigh ?

D. Solution dans le cas d'un cisaillement linéaire et d'une stratification inversée

On suppose que le profil de vitesse est linéaire : $\bar{U}(y) = Vy/H$ Et que la gravité est maintenant orientée dans la direction $+y$:

$\vec{g} = +g\vec{e}_y$ avec $g > 0$.

(En retournant les axes il s'agit donc d'un film liquide cisaillé "suspendu" sous une paroi horizontale).

11. Justifiez que l'équation de Rayleigh (1) est toujours valable et que la condition limite (2) doit être remplacée par :

$$(V-c)^2 \left[\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}\right]_{y=H} - \frac{V\,(V-c)}{H}\hat{\psi}(H) + g\hat{\psi}(H) = 0.$$

12. Montrez que les solutions du problème sont données par la relation de dispersion suivante (où $\omega^{(rel)} = \omega - kV$ est la fréquence relative dans le repère se déplaçant à la vitesse V de la surface libre) :

$$\left[\omega^{(rel)}\right]^2 + \left[\frac{V}{H}\omega^{(rel)} + gk\right]\tanh(kH) = 0$$

13. Calculez le discriminant de cette equation et montrez que le problème est instable dans la limite des petites longueurs d'onde ($k \gg 1$).

    Quel(s) effets non pris en compte dans l'analyse peuvent-ils modifier cette conclusion ?

14. Montrez que si $V > 2\sqrt{gH}$ les grandes longueurs d'ondes sont restabilisées par le cisaillement. (Indice : on pourra raisonner graphiquement en comparant le comportement des fonctions $4kg$ et $(V/H)^2\tanh(kH)$.)

E. Problème visqueux : résolution numérique

15. A partir des équations de Navier-Stokes, écrire 3 équations linéaires reliant $\hat{u}(y)$, $\hat{v}(y)$ et $\hat{p}(y)$.
16. Ecrire deux conditions-limites à vérifier en $y = 0$ et trois conditions-limites à vérifier en $y = H$. (Indice : la condition dynamique à la surface libre est à remplacer par la continuité des contraintes normales et tangentielles et fournit donc 2 équations).
17. Montrez que le problème peut se mettre sous la forme matricielle $A\hat{q} = -i\omega B\hat{q}$ où $\hat{q} = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{p}, \hat{\eta}]$. En déduire la structure d'un programme pour résoudre ce problème.

2 Bifurcations d'une équation modèle

On considère l'équation modèle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = rx + Ax^3 - x^5$$

On considère dans les trois premières questions le le cas $A = 0$.

1. Calculez les points d'équilibre de cette équation. Préciser le nombre de solutions en fonction du signe de r.
2. Etudiez (par la méthode de votre choix) la stabilité des points d'équilibre identifiés.
3. Tracez un diagramme des bifurcations. A quel type classique de bifurcation la situation étudiée ici est-elle apparentée ?

   On considère pour les trois questions suivantes le cas $A = 1/2$.

4. Calculez les points d'équilibre, et préciser leur nombre selon les cas $r < -1$, $-1 < r < 0$ et $r > 0$.
5. Etudiez (par la méthode de votre choix) la stabilité des points d'équilibre identifiés.
6. Tracez un diagramme des bifurcations. Préciser la nature des trois points de bifurcation observés sur ce diagramme.