M2R DET
Examen de seconde session du cours d'instabilités
5 septembre 2019

Durée 2 heures. La qualité de la présentation de la copie sera prise en compte.

Documents autorisés : tous documents manuscrits.

1 Question de cours

1. Qu'appelle-t-on une bifurcation supercritique ou sous-critique ? Donnez un exemple de chaque type parmi les situations vues en cours.
2. Enoncez et démontrez le critère d'instabilité inflexionnelle de Rayleigh pour un écoulement plan parallèle de la forme $U(y)$.
3. Représentez schématiquement un exemple d'écoulement instable vis-à-vis de ce critère, puis un exemple d'écoulement stable vis-à-vis de ce critère.
4. Quels types d'instabilités existe-t-il dans une couche limite de type 'Blasius' ?

2 Diagramme de bifurcation d'une équation modèle (Charru, exercice 11.7.12)

On étudie l'équation différentielle suivante pour la fonction $x(t)$:

$$\dot{x} = 4x\left((x^2-1)^2 - \mu - 1\right)$$

1. Déterminez les points d'équilibre de cette équation (c.a.d. les solutions stationnaires de la forme $x(t) = x_s$). On montrera qu'il y a une seule solution pour $\mu < -1$ et trois pour $\mu > -1$.
2. Etudiez la stabilité de ces solutions d'équilibre.
3. Tracez le diagramme de bifurcations. Quelles bifurcations classiques reconnait-on dans ce diagramme ?

3 Instabilité de Rayleigh-Taylor

On étudie les propriétés de stabilité d'un état de base correspondant à un fluide incompressible de masse volumique ρ occupant le demi-espace $y > 0$, le demi-espace $y < 0$ étant occupé un gaz de masse volumique négligeable. La gravité $\vec{g}$ est dirigée dans la direction $-\vec{e}_y$. On néglige la viscosité.

1. Justifiez physiquement pourquoi la situation considérée est instable.
2. On néglige tout d'abord la tension de surface. Démontrez que des perturbations de la surface de la forme
$$y = \eta(x,t) = Ce^{ikx-i\omega t}$$
sont gouvernées par une relation de dispersion de la forme suivante :
$$\omega^2 = -gk$$
Justifiez que cette relation prédit bien une instabilité.
3. On admet que dans le cas de perturbations de faible amplitude la courbure de la surface libre est donnée par $K = \partial^2\eta/\partial x^2$. Comment faut-il modifier la relation de dispersion écrite plus haut pour tenir compte de l'effet de la tension de surface ? Que peut-on en conclure concernant l'effet de la tension de surface sur l'instabilité ?

4 Etude théorique et numérique d'une équation modèle conduisant à des instabilités

On étudie l'équation aux dérivées partielles suivante, gouvernant l'évolution de la fonction scalaire $\phi(x,t)$, définie dans l'intervalle $x \in [0, L]$ et $t \in [0, \infty]$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \sigma_0 \phi + \kappa \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad (\alpha > 0) \tag{1}$$

associée aux conditions limites

$$\phi(0,t) = \phi(+L,t) = 0$$

et à la condition initiale

$$\phi(x,0) = \phi_0(x).$$

Ce modèle peut décrire par exemple l'évolution d'une population de micro-organismes, en présence d'une source de nourriture σ homogène, les bactéries subissant de plus une diffusion due à leurs déplacements aléatoires (modélisée par le terme de dérivée seconde).

On cherche à étudier la stabilité de ce problème à l'aide d'une approche de stabilité linéaire, en considérant des solutions sous forme de modes propres de la forme

$$\phi(x,t) = \hat{\phi}(x) e^{\lambda t}$$

4.1 Etude théorique

1. Montrez que les valeurs propres de ce système sont données par l'expression suivante :

   $$\lambda_n = \sigma - \kappa n^2 \pi^2 / L^2 \qquad (n = 1, 2, ...)$$

   Et donnez l'expression des fonctions propres $\hat{\phi}_n(x)$ correspondantes.
2. A quelle condition sur les paramètres σ, κ et L le système est-il instable ?
3. Dans le cas ou le système est instable, quel comportement non physique est visible dans la solution de type "mode propre" ? Que manque-t-il à l'équation modèle pour corriger ce défaut ?

4.2 Etude numérique

Proposez une méthode de discrétisation du problème ramenant l'étude de stabilité linéaire à la résolution d'un problème aux vecteurs propres de la forme $AX = \lambda BX$, ou A et B sont des matrices carrées dont vous expliquerez la structure.