# M2R DET
# Examen de seconde session du cours d'instabilités
# 15 septembre 2020

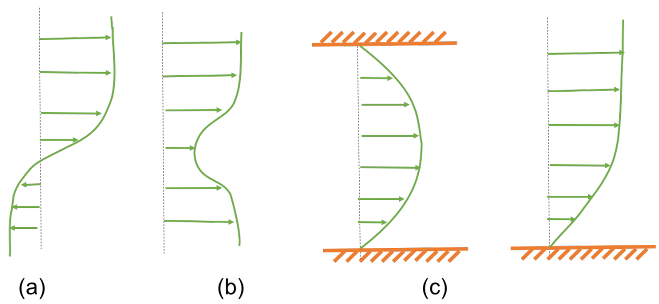
*Durée 2 heures. La qualité de la présentation de la copie sera prise en compte.*

## 1 Question de cours

1. Qu'appelle-t-on une *bifurcation* d'un système dynamique ? quels sont les principaux types de bifurcations ? Illustrez votre réponse en donnant (si possible) un exemple de chaque type parmi les instabilités vues en cours.
2. A partir des equations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement moyen $U(y)$ et en considérant des perturbations proportionnelles à $e^{ik(x-ct)}$, démontrez l'équation de Rayleigh :

$$(U(y) - c)\left(\partial_y^2 - k^2\right)\hat{\psi} + U''(y)\hat{\psi} = 0$$

3. Pour un écoulement moyen $U(y)$ occupant un espace $y \in [a, b]$ où $y = A$ et $y = b$ sont des *murs rigides*, démontrez le critère de Rayleigh. Précisez dans la démonstration où interviennent les conditions aux limites en $a$ et $b$.




4. On considère 4 exemples d'écoulement parallèle d'un fluide incompressible représentés par les profils $(a)$, $(b)$, $(c)$, $(d)$ ci-dessus. Pour chacun des cas, expliquez la signification physique de l'écoulement (dans quels contextes ou applications ce type d'écoulement est-il rencontré) puis discutez ses propriétés de stabilité. A quel type d'instabilités peut-on s'attendre ? Argumentez en vous basant sur le critère de Rayleigh.
5. Un système dynamique *exponentiellement instable* peux-t-il conduire à une croissance d'énergie ? Donnez un exemple de système de ce type. Expliquez dans quels types d'écoulement de telles croissances d'énergies peuvent se produire.
6. Quel est le principe d'une étude de *stabilité spatiale* d'un écoulement parallèle cisaillé ? Sous quelle(s) hypothèse(s) les résultats d'une telle étude sont-ils justifiés ?

## 2 Exercice : le Brusselator

Le "Brusselator" est un système dynamique modélisant certaines réactions chimiques donnant lieu à des comportements complexes. Ce modèle correspond au système suivant :

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2 y - (B+1)x$$

$$\frac{dy}{dt} = Bx - x^2 y$$

1. Montrez que ce système admet un point fixe unique $[x, y] = [x_0, y_0]$, et donnez l'expression de $x_0$ et $\mathrm{y}_0$ en fonction du paramètre $B$.
2. On étudie la stabilité linéaire du système en posant $[x, y] = [x_0, y_0] + [x', y']$ ou $x'$, $y'$ sont supposées de faible amplitude.
   Montrez que $[x', y]$ obéit a un système linéaire de la forme

   $$d/dt \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

   où $\mathcal{A}$ est une matrice dont vous donnerez l'expression en fonction du paramètre $B$.
3. On cherche des solutions sous forme de modes propres. Montrez que les valeurs propres $\lambda$ sont solutions du polynôme caractéristique suivant :

   $$\lambda^2 - (B-2)\lambda + 1 = 0$$

4. Justifiez que le système subit une bifurcation lorsque le paramètre $B$ dépasse la valeur seuil $B_c = 2$. De quel type de bifurcation s'agit-il ? à quel type de comportement peut-on s'attendre pour $B > 2$ ?