目次

第 1 章

運動制御

1.1　終点誤差分散最小モデル

Harris および Wolpert は制御信号の大きさに従い，ノイズが生じるモデルを提案した．さらにこのモデルにおいて，状態の分散が可能な限り小さくなるような制御信号を求めた．これを終点誤差分散最小モデル (minimum-variance model) と呼ぶ (Harris and Wolpert, 1998).

終点誤差分散最小モデルは状態 $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$, 制御信号 $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^p$ とし，$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ とすると，

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t(1+\boldsymbol{\xi}_t) \tag{1.1}$$

と表せる．ただし，$\boldsymbol{\xi}_t \sim \mathcal{N}(0, k\mathbf{I})$ $(k>0)$ である．このため，$\mathbf{u}_t(1+\xi_t)$ の平均は $\mathbf{u}_t$, 分散共分散行列は $k\mathbf{u}_t\mathbf{u}_t^\top$ となる．$\mathbf{x}_t$ を過去の状態 $\mathbf{x}_{t'}$ $(t'=0,\ldots,t-1)$ で表すと，

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_t &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{t-1}(1+\boldsymbol{\xi}_{t-1}) && (1.2)\\
&= \mathbf{A}^2\mathbf{x}_{t-2} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}_{t-2}(1+\boldsymbol{\xi}_{t-2}) + \mathbf{B}\mathbf{u}_{t-1}(1+\boldsymbol{\xi}_{t-1}) && (1.3)\\
&= \cdots && (1.4)\\
&= \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0 + \sum_{t'=0}^{t-1}\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_{t'}(1+\boldsymbol{\xi}_{t'}) && (1.5)
\end{aligned}$$

となるので，$\mathbf{x}_t$ の平均と分散共分散行列はそれぞれ,

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}_t\right] = \mathbf{A}^t\mathbf{x}_0 + \sum_{t'=0}^{t-1}\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_{t'} \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}_t\right] = k\sum_{t'=0}^{t-1}\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)\mathbf{u}_{t'}\mathbf{u}_{t'}^\top\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)^\top \tag{1.7}$$

となる．制御信号の時系列 $\{\mathbf{u}_t\}$ が与えられている場合，状態 $\mathbf{x}_t$ の平均と分散共分散行列は，$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}_0\right] =$

$\mathbf{x}_0, \mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}_0\right] = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ として，

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}_t\right] = \mathbf{A}\mathbb{E}\left[\mathbf{x}_{t-1}\right] + \mathbf{B}\mathbf{u}_{t-1} \tag{1.8}$$

$$\mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}_t\right] = \mathbf{A}\,\mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}_{t-1}\right]\mathbf{A}^\top + k\mathbf{B}\mathbf{u}_{t-1}\mathbf{u}_{t-1}^\top\mathbf{B}^\top \tag{1.9}$$

と逐次的に計算が可能である．

このようなモデルにおいて，次の条件を満たす制御信号を求めることを考える．まず，初期状態を $\mathbf{x}_0$，目標状態を $\mathbf{x}_f$ とする．また，運動時間を T_m，運動後時間 (post-movement time) を T_p とする．よって 1 試行にかかる時間は $T := T_m + T_p$ となる．以下では時間は離散化されており，T_m, T_p, T は自然数を取るとする．運動後の停留期間である時刻 $T_m \leq t \leq T$ において，状態の平均が目標状態と一致する，すなわち

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}_t\right] = \mathbf{x}_f \quad (T_m \leq t \leq T) \tag{1.10}$$

を満たし，位置の分散

$$\mathcal{F} = \sum_{i\in\mathrm{Pos.}}\left[\sum_{t=T_m}^{T}\mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}_t\right]\right]_{i,i} \tag{1.11}$$

を最小にするような制御信号 $\mathbf{u}_t$ を求める．ただし，Pos. は状態 $\mathbf{x}_t$ の中で位置を表す次元の番号 (インデックス) の集合を意味し，$[\cdot]_{i,i}$ は行列の (i,i) 成分を取り出す操作を意味する．この最適化問題を（躍度最小モデルの際にも用いた）等式制約下の二次計画問題で解くことを考える．二次計画問題で解くには，最小化する目的関数と等式制約をそれぞれ

$$\text{目的関数}\quad \frac{1}{2}\mathbf{u}^\top\mathbf{P}\mathbf{u} + \mathbf{q}^\top\mathbf{u} \tag{1.12}$$

$$\text{等式制約}\quad \mathbf{C}\mathbf{u} = \mathbf{d} \tag{1.13}$$

の形にする必要がある．ただし，$\mathbf{P}, \mathbf{C}$ は行列，$\mathbf{q}, \mathbf{d}$ はベクトルである．簡単のため，$p=1$ の場合を考慮すると，$\mathbf{u}_t \to u_t \in \mathbb{R}$ となる．状態信号の時系列をベクトル化し，$\mathbf{u} = [u_t]_{t=0,\ldots,T-1} \in \mathbf{R}^T$ とする．また，後の結果に影響しないため，$k=1$ とする．さらに位置のインデックスを Pos. $= \{1\}$ のみとする．この条件の下，式変形を行うと，目的関数 $\mathcal{F}$ は

$$\mathcal{F} = \left[\sum_{t=T_m}^{T}\mathrm{Cov}\left[\mathbf{x}_t\right]\right]_{1,1} = \left[\sum_{t=T_m}^{T}\sum_{t'=0}^{t-1}u_{t'}^2\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)^\top\right]_{1,1} \tag{1.14}$$

$$= \sum_{t'=0}^{T-1}u_{t'}^2\sum_{t=\max(t'+1,T_m)}^{T}\left[\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)^\top\right]_{1,1} \tag{1.15}$$

と書ける．最後の式変形は $u_{t'}^2$ を二重総和の外に出すために行った．この操作は図 1.1 における横方向と縦方向の和の順番を交換することに該当する．

ここで

$$V_{t'} := \sum_{t=\max(t'+1,T_m)}^{T}\left[\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)^\top\right]_{1,1} \tag{1.16}$$

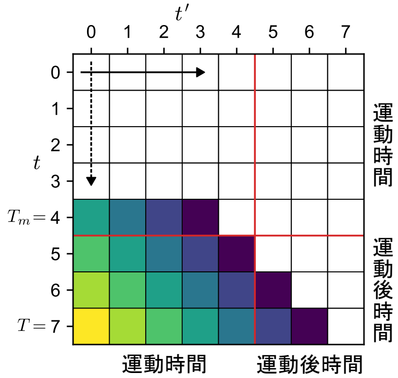

図 1.1 式 1.15 における和の順序交換の概念図 ($T = 7$ とした場合)．色付きのマスは時刻 $t, t' \quad (T_m \leq t \leq T, 0 \leq t' \leq t-1)$ における $\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)\left(\mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}\right)^\top$ の値を意味する．

とすると，$\mathbf{P} = \mathrm{diag}(V_0, \ldots, V_{T-1}) \in \mathbf{R}^{T\times T}$ および $\mathbf{q} = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^T$ と置くことで，$\mathcal{F} = \mathbf{u}^\top \mathbf{P}\mathbf{u} + \mathbf{q}^\top \mathbf{u}$ と書ける．この場合，第 2 項は 0 であるので，第 1 項の係数は結果に影響しない．

次に等式制約を求める．$\mathbb{E}\left[\mathbf{x}_t\right] = \mathbf{x}_f \quad (T_m \leq t \leq T)$ を変形すると，

$$\sum_{t'=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B}u_{t'} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 \tag{1.17}$$

となる．左辺について

$$\mathbf{C}_{(t-T_m)n+1:(t-T_m+1)n+1,\ t'} = \begin{cases} \mathbf{A}^{t-t'-1}\mathbf{B} & (0 \leq t' \leq t-1) \\ \mathbf{0} & (t \leq t' \leq T-1) \end{cases} \in \mathbb{R}^n \tag{1.18}$$

および，右辺について

$$\mathbf{d}_{(t-T_m)n+1:(t-T_m+1)n+1} = \mathbf{x}_f - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \tag{1.19}$$

とすることで，等式制約が書き下せる．ただし，$[\cdot]_{i:j}$ はベクトルあるいは行列の i 番目から j 番目までを取り出す操作を意味する．このように，$\mathbf{P}, \mathbf{q}, \mathbf{C}, \mathbf{d}$ を設定すると，等式制約下の二次計画問題を用いて $\mathbf{u}$ を求めることができる．

参考文献

Harris, C. M. and Wolpert, D. M. (1998). “Signal-dependent noise determines motor planning”. *Nature* 394.6695, pp. 780–784.