Lógica de Boole

Osmar de Oliveira Braz Junior
Márcia Cargnin Martins Giraldi

Objetivos

- Aplicar as leis e regras básicas da álgebra Booleana
- Aplicar os teoremas de DeMorgan em expressões Booleanas
- Descrever circuitos de portas lógicas com expressões Booleanas
- Calcular expressões Booleanas
- Simplificar expressões usando as leis e regras da álgebra Booleana
- Converter qualquer expressão Booleana numa soma-de-produtos
- Converter qualquer expressão Booleana num produto-de-somas

Motivação

- Como visto, os **circuitos lógicos** correspondem (executam) expressões booleanas, as quais representam problemas no mundo real
- Porém, os circuitos gerados por **tabelas verdade** muitas vezes admitem simplificações, o que reduz o número de portas lógicas; essa redução diminui o grau de dificuldade na montagem e custo do sistema digital

Motivação

- O estudo da simplificação de **circuitos lógicos** requer o conhecimento da **álgebra de Boole**, por meio de seus **postulados**, **propriedades**, **equivalências**, **teoremas,** etc
- Na **Álgebra de Boole** encontram-se os fundamentos da eletrônica **digital de circuitos**;

Lógica de Boole

- **Lógica de Boole** ou **Álgebra Booleana** é uma área da matemática que trata de regras e elementos da ***Lógica***.
- O nome **booleana** é uma retribuição da comunidade científica ao matemático inglês **George Boole** (1815-1864), que desenvolveu uma análise matemática sobre a Lógica.
- Em 1854, ele publicou um livro no qual propôs os princípios básicos dessa álgebra.

Lógica de Boole

- Em 1938, Claude Shannon, no MIT, utilizou os conceitos desta álgebra para o projetos de circuitos de chaveamento que usavam relés.
  - *Análise* – é um método prático e econômico de descrever as funções de um circuito digital e, consequentemente, seu funcionamento.
  - *Projeto* – ao identificar a função a ser realizada por um circuito, a álgebra booleana pode ser aplicada para simplificar sua descrição e, assim, também sua implementação.

Lógica de Boole

- Em 1938, Claude Shannon, no MIT, utilizou os conceitos desta álgebra para o projetos de circuitos de chaveamento que usavam relés.
  - *Análise* – é um método prático e econômico de descrever as funções de um circuito digital e, consequentemente, seu funcionamento.
  - *Projeto* – ao identificar a função a ser realizada por um circuito, a álgebra booleana pode ser aplicada para simplificar sua descrição e, assim, também sua implementação.

Constantes, Variáveis e Expressões

- Existem apenas duas **constantes booleanas**
  - 0 (zero)
  - 1 (um)
- Uma **variável booleana** é representada por letra e pode assumir apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos: A, B, C
- Uma **expressão booleana** é uma expressão matemática envolvendo constantes e/ou variáveis booleanas e seu resultado assume apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos:
    - $S = A.B$
    - $S = A+B.C$

Postulados & Propriedades

- Na álgebra booleana há postulados (axiomas) a partir dos quais são estabelecidas várias propriedades
- Existem várias propriedades da negação (complemento, inversor), adição (porta E) e soma (porta OU)
- Estas propriedades podem ser verificadas como equivalências lógicas
- Para demonstrar cada uma, basta utilizar as tabelas-verdade, constatando a equivalência.

Notações

- Complemento
  - Se $A=0$ então $\bar{A}=1$
  - Se $A=1$ então $\bar{A}=0$

- Notações alternativas
  - $\bar{A} = A'$
  - $\bar{A} = \neg A$
  - $\overline{B.C} = (B.C)'$

Postulados da Álgebra Booleana

1) $X = 1$ ou $X = 0$
2) $1.1 = 1$
3) $1.0 = 0.1 = 0$
4) $0.0 = 0$
5) $0+0 = 0$
6) $0+1 = 1+0 = 1$
7) $1+1 = 1$
8) $1' = 0$
9) $0' = 1$
10) $X'' = X$

Expressões Booleanas

- EXPRESSÕES EQUIVALENTES
  - Duas expressões são equivalentes se para toda e qualquer combinação de valores atribuídos às suas variáveis, estas duas expressões apresentam valores iguais.

A’.B’ = (A+B)’

a	b	A’	B’	A’.b’	(A+b)’
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Expressões Booleanas

- EXPRESSÕES COMPLEMENTARES
  - Duas expressões são complementares se para toda e qualquer combinação de valores atribuídos às suas variáveis, uma delas terá valor **1** enquanto a outra terá valor **0**.
  - O complemento de uma expressão booleana, muitas vezes necessário para manipulações algébricas, pode ser obtido da expressão original realizando as seguintes operações:
  - Troca-se todos os “." por "+"; A+B → A’.B’
  - Troca-se todos os "+" por “.";
  - Troca-se todos os "1" por "0"; a’.b → a’’+b’ = a+b’
  - Troca-se todos os "0" por "1"; B’ → B’’ - B
  - Complementa-se cada literal; A.B’ + C → (a’+b) . C’
  - Deve-se observar a ordem das operações da expressão original.

Expressões Booleanas

- *EXPRESSÕES DUAIS*
- Não existe relação geral entre os valores das expressões duais, isto é, ambas podem ser iguais a **0,** ou ambas iguais a **1** ou uma com valor **1** enquanto a outra terá valor **0**.
- O dual de uma expressão booleana, pode ser obtido da expressão original realizando as seguintes operações:
  - Troca-se todos os “." por "+";
  - Troca-se todos os "+" por “.";   C+A’.B → C.(A’+B)
  - Troca-se todos os "1" por "0";
  - Troca-se todos os "0" por "1";
- Deve-se observar a ordem das operações da expressão original.

TEOREMAS

- São utilizados para **simplificar** expressões lógicas e para obter outras **expressões equivalentes**.
- A **demonstração** destes teoremas será feita pelo chamado "**método da Tabela Verdade**", que consiste em demonstrar um teorema mostrando sua validade para todos os possíveis valores das variáveis.
- No caso da Álgebra de Boole isto é possível já que o número total de valores distintos de cada variável é apenas dois e o número de possíveis combinações de valores das diversas variáveis envolvidas é limitado e igual a 2^n , onde <u>n</u> é o número de variáveis.
- Os **teoremas** são apresentados na forma de **pares duais**.

Teorema 1

a) $0 . X = 0$

b) $1+X = 1$

Demonstração:

a)

X	0.X
0	0
1	0

- Para qualquer valor de X a expressão 0.X é igual a 0 e a expressão 1 + X é igual a 1, o que demonstra o teorema.
- O X das expressões 0.X e 1+X não é necessariamente uma variável simples; pode ser uma expressão qualquer. Isto também é válido para os demais teoremas.

EXEMPLO:

a)$0.(A\,G\,F\,H + A'\,G' + S') = 0$

b)$0 . XY' = 0$

c)$1 + A\,F\,G + G'\,H' = 1$

d)$1 + (B + C + D') . R\,S = 1$

Teorema 2

a) 1 . X = X

b) 0 + X = X

Demonstração:

a)

X	1.X
0	0
1	1

A=1, B=0, C=1

EXEMPLO:

1. 1.(A B + C) = AB+C
2. 1.(C D F)’ = (CDF)’
3. 0 + G H + P Q = GH + PQ
4. 0 + Y C = YC
5. 1 + 0.(A B D + G H) = 1

6. 1 + 0 + A’ B G = 1

7. 1 + (V C)’ + 1 . (Y C)’ + 0 + C D F + 0 . V D = 1

Teorema 3 - Idempotência

a) X X = X

b) X + X = X

Demonstração:

a)

X	X X
0	0
1	1

- Na Álgebra de Boole não existem expoentes nem coeficientes diferentes da unidade.

EXEMPLO:

a)A’ B C . A’ B C = A’BC

b)((A T)’ + S O B) . ((A T)’ + S O B) = (AT)’+SOB

c)(B B C + H’ + H’) (B B C + H’ H’) (B B C C + H’) = BC+H’

Teorema 4

a) X X’ = 0

b) X + X’ = 1

Demonstração:

a)

X	X’	X X’
0	1	0
1	0	0

EXEMPLO:

a)A B (A’ + B’) =   ______________

b)(V C + C D F) . (V’ + C’) . (C’ + D’ + F’) = ___________________

c)(O T’ + N I P + U C) + (O’ + T) . (N’ + I’ + P’) . (U’ + C’) = ___________________

d)(AAB+CD)+(A+A+ B).(C + D) = ____

Teorema 5 - Operação comutativa

a) X Y = Y X

b) X + Y = Y + X

Demonstração:

a)

X	Y	X Y	Y X
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

EXEMPLO:

a)U P’ + T = T + P’ U = T + U P’ = P’ U + T

b)A (B + C’) = (B + C’) A = (C’ + B) A = A (C’ + B)

Teorema 6 - Operação associativa

a)X Y Z = X (Y Z) = (X Y) Z b)X + Y + Z = X + (Y + Z) = (X + Y) + Z

Demonstração:

a)

X	Y	Z	XY	YZ	X(YX)	(XY)Z	XYZ
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

As três últimas colunas são idênticas.

EXEMPLO:

a)A’ B C = (A’ B) C = A’ (B C)

Teorema 7 – De Morgan

a)(X Y .... Z)’ = X’ + Y’ + ... + Z’   b) (X + Y + ...+ Z)’ = X’ Y’ .... Z’

Demonstração:

a)

X	Y	Z	XYZ	(XYZ)’	X’ + Y’ + Z’
0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

EXEMPLO:

1) (A D’ R E M’)’ = A’+D+R’+E’+M

1) (A + D’ + R + E’ + M’)’ = A’.D.R’.E.M

1) A D’ R E M’ e A’ + D + R’ + E’ + M - são complementares

1) A D’ R E M’ e A’ + D + R’ + E’ + M - são complementares

Teorema 8

a)F'(X,Y,....,Z, . , +) = F (X',Y',....,Z', + , .)

Engloba os teoremas 7a e 7b em uma só expressão;

O complemento de uma expressão contendo literais ligados pelos operadores "." e "+", representado po f', é determinado complementando cada variável e permutando "vezes" por "+" e "+" por "vezes", devendo-se observar a sequência das operações da expressão original.

EXEMPLO:

a)((O + T' N) . (P' + I S))' = O'.(T+N')+P.(I'+S')

- os parênteses serviram para manter a sequência das operações da expressão original.

Teorema 9 - Fatoração

a) X Y + X Z = X (Y + Z)

b)(X + Y) (X + Z) = X + Y Z

Demonstração:

a)

X	Y	Z	XY	XZ	Y + Z	XY+XZ	X(Y+Z)
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

EXEMPLO:

a)W’ C D F’ + W’ C D (G’ + S’) = W’CD.(F’+G’+S’)

Teorema 10 – complementaridade

a) $XY + XY' = X$ b) $(X+Y)(X+Y') = X$

Demonstração:

a)

X	Y	Y'	XY	XY'	XY+XY'
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1

- Este teorema é a base do "Método dos Mapas";
- Em uma soma de 2^m termos, cada termo contendo <u>n</u> variáveis (ou em um produto 2^m fatores cada fator contendo <u>n</u> variáveis),
- se <u>m</u> variáveis ocorrem em todas as variações possíveis enquanto que n – m variáveis permanecem constantes, em todos os termos (ou fatores), as <u>m</u> variáveis são redundantes e a expressão ficará definida com as n-m constantes.
- O número de termos (ou fatores) envolvidos deve ser uma potência inteira de 2, já que existem 2^m combinações e <u>m</u> variáveis.

Teorema 11 - Absorção

a) X + XY = X

b) X(X+Y) = X

Demonstração:

X	Y	XY	X+XY
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

- Este teorema é muito útil para simplificação de expressões e pode ser usado do seguinte modo: se um termo pequeno (ou fator) aparece em um termo grande (ou fator) o termo grande é redundante podendo ser retirado da expressão.

Como termo pequeno(ou fator) entende-se aquele que possui menor número de literais enquanto como termo grande(ou fator) entende-se aquele que contém mais literais.

Exercícios

- 1) Mostre, usando simplificação pelos teoremas, ou seja, por transformações algébricas que:
- A+A.B = A
- A.(A+B) = A

Solução Exercício 1

- $A+A.B = A$

- $A.(A+B) = A$

Exercícios

- 2) Mostre, usando simplificação pelos teoremas, ou seja, por transformações algébricas que:
- $A + \bar{A}.B = A + B$

Solução Exercício 2

- $A + \bar{A}.B = A + B$

- $A + \bar{A}.B = A + B$

Exercícios

- 3) Mostre, usando simplificação pelos teoremas, ou seja, por transformações algébricas que:
- $(A+B).(A+C) = A + B.C$

Solução Exercício 3

- $(A+B).(A+C) = A + B.C$

Simplificação de Expressões Booleanas

- Usando a álgebra booleana é possível simplificar expressões
- Como cada circuito corresponde a uma expressão, simplificações de expressões significam em simplificações de circuitos
- Há três formas para simplificar expressões
  - Teoremas
  - Mapas de Veitch-Karnaugh
  - Processo tabular de Quine McCluskey
- Veremos, a seguir, o processo com os teoremas

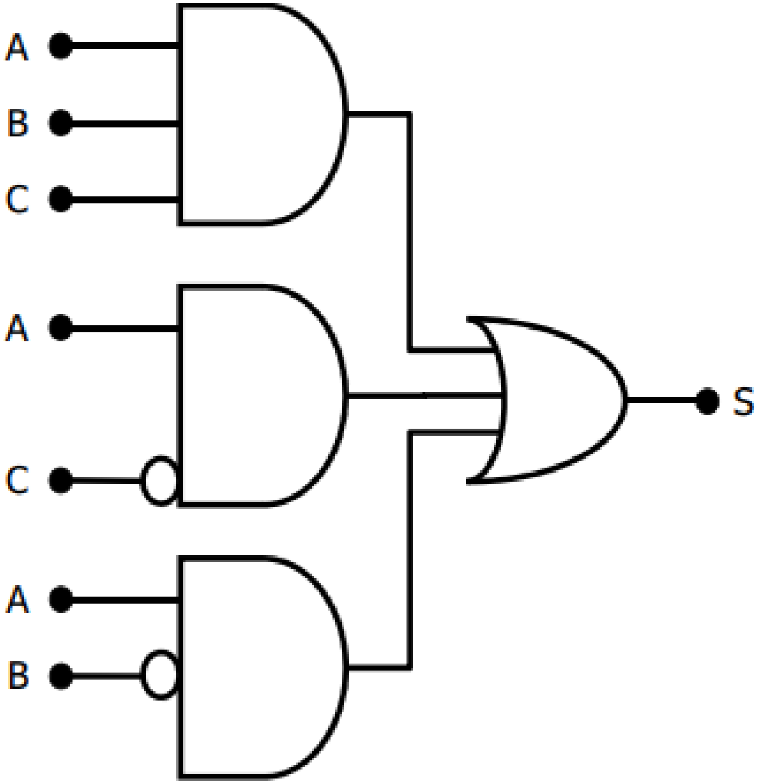
Utilizando os teoremas

- Consiste na aplicação dos teoremas da álgebra booleana, com o objetivo de simplificar a expressão
- Por exemplo
  - $S = A.B.C + A.C' + A.B'$

Simplificação pelos teoremas

- Portanto,
  - A.B.C + A.C’ + A.B’ = A
- Essa expressão mostra a importância da simplificação de expressões e a consequente minimização do circuito, sendo o resultado final igual ao da variável A

- Circuito antes da simplificação



- Circuito após simplificação

Exercícios

- 4) Simplifique a expressão
  - $S = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C$

Solução Exercício 4

- Simplifique a expressão
  - S = A’.B’.C’ + A’.B.C’ + A.B’.C

Exercícios

- 5) Simplifique a expressão
  - $S = \bar{A}. + \bar{A}.\bar{B}$

Solução Exercício 5

- Simplifique a expressão
  - $S = \bar{A} + \bar{A}.\bar{B}$

Conclusão

- Que qualquer operação aritmética pode ser realizada em computadores apenas através de somas (diretas ou em complemento)!
- Reduz o tamanho dos algoritmos ou circuitos.

Referências

WEBER, Raul Fernando. Fundamentos de arquitetura de computadores. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. E-book. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788540701434

STALLINGS, William. Arquitetura e organização de computadores. 8.ed. São Paulo: Pearson, 2010. E-book. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/459/epub/0

HOGLUND, Greg. Como quebrar códigos: a arte de explorar (e proteger) software. São Paulo: Pearson, 2006. E-book. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/179934/epub/0

Fim