Lógica de Boole

Osmar de Oliveira Braz Junior
Márcia Cargnin Martins Giraldi

Objetivos

- Aplicar as leis e regras básicas da álgebra Booleana
- Aplicar os teoremas de DeMorgan em expressões Booleanas
- Descrever circuitos de portas lógicas com expressões Booleanas
- Calcular expressões Booleanas
- Simplificar expressões usando as leis e regras da álgebra Booleana
- Converter qualquer expressão Booleana numa soma-de-produtos
- Converter qualquer expressão Booleana num produto-de-somas

Motivação

- Como visto, os **circuitos lógicos** correspondem (executam) expressões booleanas, as quais representam problemas no mundo real
- Porém, os circuitos gerados por **tabelas verdade** muitas vezes admitem simplificações, o que reduz o número de portas lógicas; essa redução diminui o grau de dificuldade na montagem e custo do sistema digital

Motivação

- O estudo da simplificação de **circuitos lógicos** requer o conhecimento da **álgebra de Boole**, por meio de seus **postulados**, **propriedades**, **equivalências**, etc
- Na **Álgebra de Boole** encontram-se os fundamentos da eletrônica **digital de circuitos**;

Lógica de Boole

- **Lógica de Boole** ou **Álgebra Booleana** é uma área da matemática que trata de regras e elementos da ***Lógica***.
- O nome **booleana** é uma retribuição da comunidade científica ao matemático inglês **George Boole** (1815-1864), que desenvolveu uma análise matemática sobre a Lógica.
- Em 1854, ele publicou um livro no qual propôs os princípios básicos dessa álgebra.

Lógica de Boole

- Em 1938, Claude Shannon, no MIT, utilizou os conceitos desta álgebra para o projetos de circuitos de chaveamento que usavam relés.
  - *Análise* – é um método prático e econômico de descrever as funções de um circuito digital e, consequentemente, seu funcionamento.
  - *Projeto* – ao identificar a função a ser realizada por um circuito, a álgebra booleana pode ser aplicada para simplificar sua descrição e, assim, também sua implementação.

Constantes, Variáveis e Expressões

- Existem apenas duas **constantes booleanas**
  - 0 (zero)
  - 1 (um)
- Uma **variável booleana** é representada por letra e pode assumir apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos: A, B, C
- Uma **expressão booleana** é uma expressão matemática envolvendo constantes e/ou variáveis booleanas e seu resultado assume apenas dois valores (0 ou 1)
  - Exemplos:
    - S = A.B
    - S = A+B.C

Postulados & Propriedades

- Na álgebra booleana há postulados (axiomas) a partir dos quais são estabelecidas várias propriedades
- Existem várias propriedades da negação (complemento, inversor), adição (porta E) e soma (porta OU)
- Estas propriedades podem ser verificadas como equivalências lógicas
- Para demonstrar cada uma, basta utilizar as tabelas-verdade, constatando a equivalência.

Postulados

- Complemento
  - Se A=0 então $\bar{A}$=1
  - Se A=1 então $\bar{A}$=0

- Notações alternativas
  - $\bar{A} = A'$
  - $\bar{A} = \neg A$
  - $\overline{B.C} = (B.C)'$

Postulados
1) $\bar{A} = 1$
   $\bar{A} = 0$

Postulado 1

- Valores de A podem ser 1 ou 0

- A = 1 ou A = 0

A
1
0

Postulados
1) $\bar{A} = 1$
   $A = 0$
2) $1.1 = 1$

Postulado 2

- O produto de 1.1 é 1
- $1.1 = 1$

Postulados

1) A = 1
   A = 0

2) 1.1 = 1

3) 1.0 = 0
   0.1 = 0

Postulado 3

- O produto 1 por 0 é 0
- O produto 0 por 1 é 0

- 1.0 = 0
- 0.1 = 0

Postulado 4

- O produto por 0 é 0

- 0.0 = 0

Postulados

1) A = 1
   A = 0
2) 1.1 = 1
3) 1.0 = 0
   0.1 = 0
4) 0.0 = 0

Postulado 5

- A soma de 0 e 0 é 0

- 0 + 0 = 0

Postulados

1) A = 1
   A = 0
2) 1.1 = 1
3) 1.0 = 0
   0.1 = 0
4) 0.0 = 0
5) 0+0 = 0

Postulado 6

- A soma de 0 e 1 é 1
- A soma de 1 e 0 é 1

- $0 + 1 = 1$
- $1 + 0 = 1$

Postulados

```
1) A = 1
   A = 0
2) 1.1 = 1
3) 1.0 = 0
   0.1 = 0
4) 0.0 = 0
5) 0+0 = 0
6) 0+1 = 1
   1+0 = 1
```

Postulado 7

- A soma de 1 e 1 é 1

- $1 + 1 = 1$

Postulados

```
1)  A = 1
    A = 0
2)  1.1 = 1
3)  1.0 = 0
    0.1 = 0
4)  0.0 = 0
5)  0+0 = 0
6)  0+1 = 1
    1+0 = 1
7)  1+1 = 1
```

Postulado 8

- Do complemento, a negação de 1 e 0

- 1´ = 0

Postulados

1) A = 1
   A = 0
2) 1.1 = 1
3) 1.0 = 0
   0.1 = 0
4) 0.0 = 0
5) 0+0 = 0
6) 0+1 = 1
   1+0 = 1
7) 1+1 = 1
8) ´1 = 0

Postulado 9

- Do complemento, a negação de 0 e 1
- $0' = 1$

Postulados

1) $A = 1$
   $\bar{A} = 0$
2) $1.1 = 1$
3) $1.0 = 0$
   $0.1 = 0$
4) $0.0 = 0$
5) $0+0 = 0$
6) $0+1 = 1$
   $1+0 = 1$
7) $1+1 = 1$
8) $1' = 0$
9) $0' = 1$

Postulado 10

- Lei da involução
- Se uma variável binária é negada duas vezes esta não varia, ou,

- $\overline{\overline{A}} = A$ ou $A'' = A$

- Este postulado é válido para qualquer número par de negações

Postulados

```
1)  A = 1
    A = 0
2)  1.1 = 1
3)  1.0 = 0
    0.1 = 0
4)  0.0 = 0
5)  0+0 = 0
6)  0+1 = 1
    1+0 = 1
7)  1+1 = 1
8)  1'  = 0
9)  0'  = 1
10)A''= A
```

Expressões Equivalentes

- Duas expressões são **equivalentes** se para toda e qualquer combinação de valores atribuídos às suas variáveis, estas duas expressões apresentam valores iguais.
  - 1 = 1
  - A = A
  - A + B = A + B

Expressões Equivalentes

A’.B’ = (A+B)’

A	B	A’	B’	A’.B’	(A+B)’
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0

Expressões Complementares

- Duas expressões são **complementares** se para toda e qualquer combinação de valores atribuídos às suas variáveis, uma delas terá valor **1** enquanto a outra terá valor **0**.
- O complemento de uma expressão booleana, muitas vezes necessário para manipulações algébricas, pode ser obtido da expressão original realizando as seguintes operações:
  - Troca-se todos os "vezes" por "+"; **A.B → A+B**
  - Troca-se todos os "+" por "vezes"; **A+B → A.B**
  - Troca-se todos os "1" por "0"; **1 → 0**
  - Troca-se todos os "0" por "1"; **0 → 1**
  - Complementa-se cada literal; **A.B´+C → A´+B.C´**
- Deve-se observar a ordem das operações da expressão original
  - A = A´

Expressões Complementares

- $A + B = (A + B)'$

A	B	A’	B’	A+B	(A+B)’
0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	0

O resultado são complementares.

Expressões Duais

- Não existe relação geral entre os valores das expressões duais, isto é, ambas podem ser iguais a **0,** ou ambas iguais a **1** ou uma com valor **1** enquanto a outra terá valor **0**.
- O dual de uma expressão booleana, pode ser ~~obtido~~ da expressão original realizando as seguintes operações:
  - Troca-se todos os "vezes" por "+"; A.B → A+B
  - Troca-se todos os "+" por "vezes"; A+B → A.B
  - Troca-se todos os "1" por "0"; 1 → 0
  - Troca-se todos os "0" por "1"; 0 → 1
- Deve-se observar a ordem das operações da expressão original.

Teorema

- São utilizados para **simplificar** expressões lógicas e para obter outras expressões equivalentes.
- A **demonstração** destes teoremas será feita pelo chamado “**método da Tabela Verdade**”, que consiste em demonstrar um teorema mostrando sua validade para todos os possíveis valores das variáveis.
- No caso da Álgebra de Boole isto é possível já que o número total de valores distintos de cada variável é apenas dois e o número de possíveis combinações de valores das diversas variáveis envolvidas é limitado e igual a 2^n , onde n é o número de variáveis.
- Os **teoremas** são apresentados na forma de **pares duais**.

Teorema 1

- Lei do elemento absorvente para a multiplicação lógica
  - Identidade da multiplicação
- O produto lógico de uma variável binária pôr um 0 lógico é igual a um 0 lógico, ou,
- $A \cdot 0 = 0$

A	**A.0**	**A.0**
1	1 . 0	0
0	0 . 0	0

Teorema 1

- Lei do elemento absorvente para a soma lógica,
  - identidade da adição
- A soma lógica de uma variável binária mais um 1 lógico equivale a 1 lógico, ou,

- $A + 1 = 1$

A	**A+1**	**A+1**
1	1 + 1	1
0	0 + 1	1

Teorema 1

- Para qualquer valor de **A** a expressão **A + 1** é igual a **1** e a expressão **A .0** é igual a **0**, o que demonstra o teorema.

- O **A** das expressões **A.0** e **A.A + 1** não é necessariamente uma variável simples; pode ser uma expressão qualquer.
- Isto também é válido para os demais teoremas.

Teoremas
1) $A \cdot 0 = 0$
$A + 1 = 1$

Teorema 1

Exemplos

a) $0.(A.B.C.D + A' E' + F') =$

b) $0.A.B' =$

c) $1 + A.B.C + C'.D' =$

d) $1 + (A + B + C') . (D.E) =$

Teorema 2

- Lei do elemento neutro para a soma lógica
- A soma lógica de uma variável binária mais um 0 lógico equivale ao valor da variável binária, ou,

- $A + 0 = A$

A	**A+0**	**A+0**
1	1 + 0	1
0	0 + 0	0

Teorema 2

- Lei do elemento neutro para a multiplicação lógica
- O produto lógico de uma variável binária pôr um 1 lógico é igual ao valor da variável binária, ou,

- $A \cdot 1 = A$

A	A.1	A.1
1	1 . 1	1
0	0 . 1	0

Teorema 2

- Para qualquer valor de A a expressão **A + 0** é igual a **A** e a expressão **A . 1** é igual a **A**, o que demonstra o teorema.

Teoremas

1) $A \cdot 0 = 0$

$A + 1 = 1$

2) $A + 0 = A$

$A \cdot 1 = A$

Teorema 2

Exemplos:

a) $0 + A.B + C.D =$

b) $0 + A.B =$

c) $1.(A.B + C) =$

d) $1.(A.B.C)' =$

Teoremas 1 e 2

Teoremas
1) $A \cdot 0 = 0$
$A + 1 = 1$
2) $A + 0 = A$
$A \cdot 1 = A$

Exemplos:

a) $1 + (0+(A.B.C + D.E)) =$

b) $1 + (0 + A'.B.C) =$

c) $1 + (A.C)' + 1.(B.C)' + (0 + C.D.F) + (0.A.D) =$

Teorema 3 – Lei da Idempotência

- A soma e o produto lógico de duas variáveis binárias iguais equivale ao valor lógico dessa variável binária, ou,

- $A + A = A$
- $A \, . \, A = A$

A	A+A	A+A
1	1 . 1	1
0	0 . 0	0

A	A.A	A.A
1	1 . 1	1
0	0 . 0	0

Teorema 3

Teoremas

1) $A . 0 = 0$
   $A + 1 = 1$
2) $A + 0 = A$
   $A \cdot 1 = A$
3) $A + A = A$
   $A . A = A$

Exemplos:

a) $(A'.B.C) . (A'.B.C) =$

b) $(A.E)' + C.D.B) . (A.E)' + C.D.B) =$

c) $(B.B.C + A' + A') (B.B.C + A'.A') (B.B.C.C + A') =$

Teorema 4 - Complemento

- Lei do elemento complementaridade para a soma e multiplicação lógica
- A soma lógica de uma variável binária mais a negação da mesma variável binária equivale a 1,
- A multiplicação lógica de uma variável binária mais a negação da mesma variável binária equivale a 0,
- $A + \overline{A} = 1$ $\qquad$ $A \cdot \overline{A} = 0$

A	**$A + \overline{A}$**	**$A + \overline{A}$**
1	1 + 0	1
0	0 +1	1

A	**$A.\overline{A}$**	**$A.\overline{A}$**
1	1 . 0	0
0	0 . 1	0

Teorema 4

Teoremas

1) $A \cdot 0 = 0$
   $A + 1 = 1$
2) $A + 0 = A$
   $A \cdot 1 = A$
3) $A + A = A$
   $A \cdot A = A$
4) $A + A' = 1$
   $A \cdot A' = 0$

Exemplos:

a) A.B.(A’.B’) =

b) (V.C + C.D.F).((V’.C’).(C’.D’.F’)) =

c)((O.T’+N.I.P+U.C))+((O’.T).(N’.I’.P’).(U’.C’)) =

d)(A.A.B+C.D)+(A’.A’.B’).(C’.D’)=

Teorema 5 – Comutativa

- A ordem dos fatores em uma multiplicação ou soma não altera o resultado.
  - A + B = B + A //Adição
  - A . B = B . A //Produto

A	B	A+B	B+A
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

A	B	A.B	B.A
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

Teorema 5
Comutativa

Exemplos:

a) $A.B' + C$
$= C + B'.A$
$= C + A.B'$
$= B'.A + C$

b) $A.(B + C')$
$= (B + C').A$
$= (C' + B).A$
$= A.(C' + B)$

Teoremas
1) $A . 0 = 0$
$A + 1 = 1$
2) $A + 0 = A$
$A \cdot 1 = A$
3) $A + A = A$
$A . A = A$
4) $A + A' = 1$
$A . A' = 0$
5) $A+B=B+A$
$A.B=B.A$

Teorema 6 - Associativa

- A ordem em que os fatores estão agrupados em uma multiplicação ou soma não muda o resultado
  - (A + B) + C = A + (B + C) //Adição
  - (A . B) . C = A . (B . C) //Produto

A	B	C	A+(B+C)	(A+B)+C	A+B+C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

A	B	C	A.(B.C)	(A.B).C	A.B.C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Teorema 6
Associativa

Exemplos:

a) $A.B.C$

$= A.(B.C)$

$= (A.B).C$

b) $A + B + C$

$= A + (B + C)$

$= (A + B) + C$

Teoremas

1) $A . 0 = 0$
   $A + 1 = 1$
2) $A + 0 = A$
   $A \cdot 1 = A$
3) $A + A = A$
   $A . A = A$
4) $A + A' = 1$
   $A . A' = 0$
5) $A+B=B+A$
   $A.B=B.A$
6) $(A+B)+C=A+(B+C)$
   $(A.B).C=A.(B.C)$

Teorema 7 – Lei De Morgan

- Também chamado princípio da dualidade
  - O complemento do produto é igual a soma dos complementos

a) $\overline{A + B} = \overline{A} \, . \, \overline{B}$

b) $\overline{A \, . \, B} = \overline{A} + \overline{B}$

ou

- (A+B)´ = A´.B´
- (A.B)´ = A´+B´

A	B	A+B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}.\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0

Teorema 7
De Morgan

Exemplos:

a) $(A.B'.C.D.E')'$
$= A'+B+C'+D'+E$

b) $(A+B'+C+D'+E')'$
$= A'.B.C'.D.E$

c) $A.B'.C.D.E'$ e $A'+B+C'+D'+E$
são complementares

d) $A.B'.C.D.E'$ e $A'+B+C'+D'+ E$
são complementares

Teoremas

1) $A . 0 = 0$
$A + 1 = 1$
2) $A + 0 = A$
$A \cdot 1 = A$
3) $A + A = A$
$A . A = A$
4) $A + A' = 1$
$A . A' = 0$
5) $A+B=B+A$
$A.B=B.A$
6) $(A+B)+C=A+(B+C)$
$(A.B).C=A.(B.C)$
7) $(A+B)' = A'.B'$
$(A.B)' = A'+B'$

Teorema 8

- Engloba os teoremas 7a e 7b em uma só expressão;
- O complemento de uma expressão contendo literais ligados pelos operadores "." e "+", representado por f', é determinado complementando cada variável e permutando "vezes" por "+" e "+" por "vezes", devendo-se observar a sequência das operações da expressão original.

- a)F'(X,Y,....,Z, . , +) = F (X',Y',....,Z', + , .)

- Ex.:
- ((A + B'.C).(D'+ E.F))' = A'.(B+C')+D.(E'+F')

Teorema 8

Exemplos:

os parênteses serviram para manter a sequência das operações da expressão original.

a) (A + B'.C) = A'.(B+C')

A	B	C	B'	B'.C	A+B'.C	C'	B+C'	A'	A'.(B+C')
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

São complementares!

Teoremas

```
1) A . 0 = 0
   A + 1 = 1
2) A + 0 = A
   A · 1 = A
3) A + A = A
   A . A = A
4) A + A' = 1
   A . A' = 0
5) A+B=B+A
   A.B=B.A
6) (A+B)+C=A+(B+C)
   (A.B).C=A.(B.C)
7) (A+B)' = A'.B'
   (A.B)' = A'+B'
8) F'(A,B,...,D,.,+)
   =F(A',B',...,D',+,.)
```

Teorema 9 – Fatoração/Distributiva

- Dois ou mais termos presentes numa expressão de soma que é multiplicada por outra variável ou expressão, é igual à soma da multiplicação de cada um dos termos da soma pela variável.
  - A propriedade distributiva da multiplicação sobre a soma
  - $A \,.\, (B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$
  - $(A \,.B) + C) = (A + C) \,.\, (B + C)$

Teorema 9
Fatoração/Distributiva

Exemplos:

a) (A .B) + C) = (A+C).(B+C)

A	B	C	A.(B+C)	A.B + A.C
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Teoremas

1) A . 0 = 0
   A + 1 = 1
2) A + 0 = A
   A · 1 = A
3) A + A = A
   A . A = A
4) A + A′ = 1
   A . A′ = 0
5) A+B=B+A
   A.B=B.A
6) (A+B)+C=A+(B+C)
   (A.B).C=A.(B.C)
7) (A+B)′ = A′.B′
   (A.B)′ = A′+B′
8) F′(A,B,...,D,.,+)
   =F(A′,B′,...,D′,+,.)
9) A.(B+C)=A.B+A.C
   A+(B.C)=(A+B).(A+C)

Teorema 10

- Este teorema é a base do “Método dos Mapas”;
- Em uma soma de 2^m termos, cada termo contendo n variáveis (ou em um produto 2^m fatores cada fator contendo n variáveis),
- se m variáveis ocorrem em todas as variações possíveis enquanto que n – m variáveis permanecem constantes, em todos os termos (ou fatores), as m variáveis são redundantes e a expressão ficará definida com as n-m constantes.
- O número de termos (ou fatores) envolvidos deve ser uma potência inteira de 2, já que existem 2^m combinações e m variáveis.

Teorema 10

a) A.B + A.B’ = A

A.(B+B’) //Teorema 6 B+B’=1

A.1 //Teorema 4 A.1 = A

A

A	B	B’	A.B	A.B’	A.B+A.B´
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1

Teoremas

1) A . 0 = 0
   A + 1 = 1
2) A + 0 = A
   A · 1 = A
3) A + A = A
   A . A = A
4) A + A’ = 1
   A . A’ = 0
5) A+B=B+A
   A.B=B.A
6) (A+B)+C=A+(B+C)
   (A.B).C=A.(B.C)
7) (A+B)’ = A’.B’
   (A.B)’ = A’+B’
8) F’(A,B,...,D,.,+)
   =F(A’,B’,...,D’,+,.)
9) A.(B+C)=A.B+A.C
   A+(B.C)=(A+B).(A+C)
10) A.B + A.B’ = A

Teorema 10

Exemplos:

a) $ABC + AB'C + ABC' + AB'C' =$

$A(BC+B'C+BC'+B'C') =$

$A(B(C+C') + B'(C + C')) =$

$A(B.1 + B'.1)$

$A(B+B')$

$A.1$

A

Teorema 11 – Lei da Absorção ou Identidade

- É muito útil para simplificação de expressões e pode ser usado do seguinte modo: se um termo pequeno (ou fator) aparece em um termo grande (ou fator) o termo grande é redundante podendo ser retirado da expressão.
  - Como termo pequeno(ou fator) entende-se aquele que possui menor número de literais enquanto como termo grande(ou fator) entende-se aquele que contém mais literais.

- $A + A . B = A$ $A . (A + B) = A$

A	B	A.B	A+A.B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

A	B	A+B	A.(A+B)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Teorema 11
Absorção

Exemplos:

a) $A + A.B = A$

$A.(1+B)$ //Colocando A em evidência no 1º termo

$A.1=A$ // Como $1 + B = 1$

b) $(A+B).(A+C) = A + B.C$

$A.A+A.C+B.A+B.C$ //Aplicando a distributiva no 1º termo(A+B)

$A+A.C+A.B+B.C$ //$A.A = A$ e $B.A = A.B$

$A.(1+ C+B)+ B.C$ //Distributiva

$A.1 + B.C$ //$(1 + A + B) = 1$

$A + B.C$ //$A.1 = A$

Teoremas

1) $A . 0 = 0$
   $A + 1 = 1$
2) $A + 0 = A$
   $A \cdot 1 = A$
3) $A + A = A$
   $A . A = A$
4) $A + A' = 1$
   $A . A' = 0$
5) $A+B=B+A$
   $A.B=B.A$
6) $(A+B)+C=A+(B+C)$
   $(A.B).C=A.(B.C)$
7) $(A+B)' = A'.B'$
   $(A.B)' = A'+B'$
8) $F'(A,B,...,D,.,+)$
   $=F(A',B',...,D',+,.)$
9) $A.(B+C)=A.B+A.C$
   $A+(B.C)=(A+B).(A+C)$
10) $A.B + A.B' = A$
11) $A+A.B = A$
    $A.(A+B) = A$

Resumo Postulados

Complementação	Adição	Multiplicação
(1) A = 0 -> A’= 1(9) (1) A = 1 -> A’= 0(8) A’’ = A (10)	0+0 = 0 (5) 0+1 = 1 (6) 1+0 = 1 (6) 1+1 = 1 (7)	0.0 = 0 (4) 0.1 = 0 (3) 0.1 = 0 (3) 1.1 = 0 (2)

Resumo Teoremas

Teorema	Complemento	Adição	Multiplicação
Identidade	A' = A	A+0 = A (2) A+1 = 1 (1) A+A = A (3) A+A' = 1 (4)	A.0 = A (1) A.1 = A(2) A.A = A (3) A.A' = 0 (4)
Comutativa (5)		A+B = B + A	A.B = B.A
Associativa (6)		A+(B+C) = (A+B)+C = A+B+C	A.(B.C) = (A.B).C = A.B.C
De Morgan(7)		(A+B)'=A'.B'	(A.B)'=A'+B'
7a e 7b (8)	F'(A,B,...,Z, .,+) = F(A',B',...,Z',+,.)		
Distributiva (9)		A+(B.C)= (A+B).(A+C)	A.(B+C)= A.B+A.C
Absorção (11)		A+A.B = A	A.(A+B)=A

Exercícios

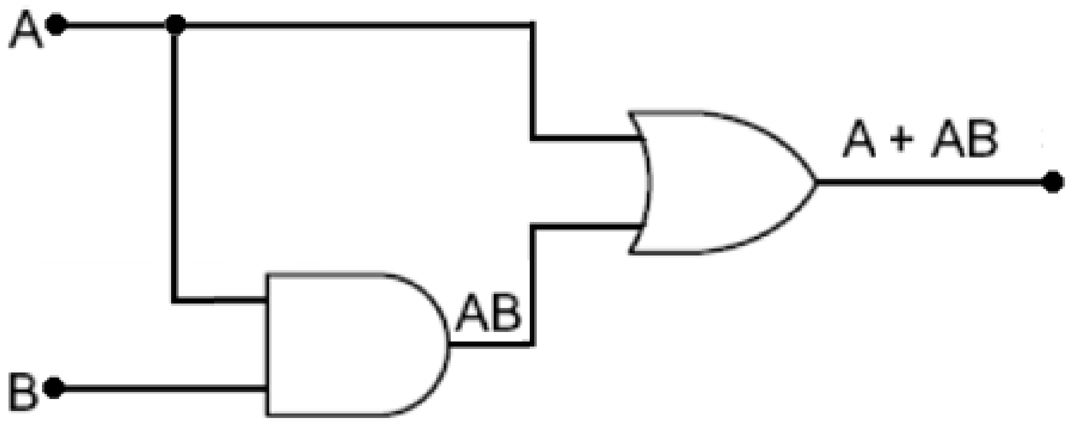
- 1) Mostre, usando simplificação por postulados e teoremas, ou seja, por transformações algébricas que:
  a) A+A.B = A
  b) A.(A+B) = A
  c) A.B+A.C = A.(B+C)

Solução Exercício 1 a)

- a)A+A.B = A
  - **A + A.B**
  - = A.(1+B) Distributiva, Teorema 9
  - = A.(1) Identidade da adição, Teorema 1
  - = A Identidade da multiplicação, Teorema 2

A	B	A.B	A+A.B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Solução Exercício 1 a)



A	B	A.B	A+A.B
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

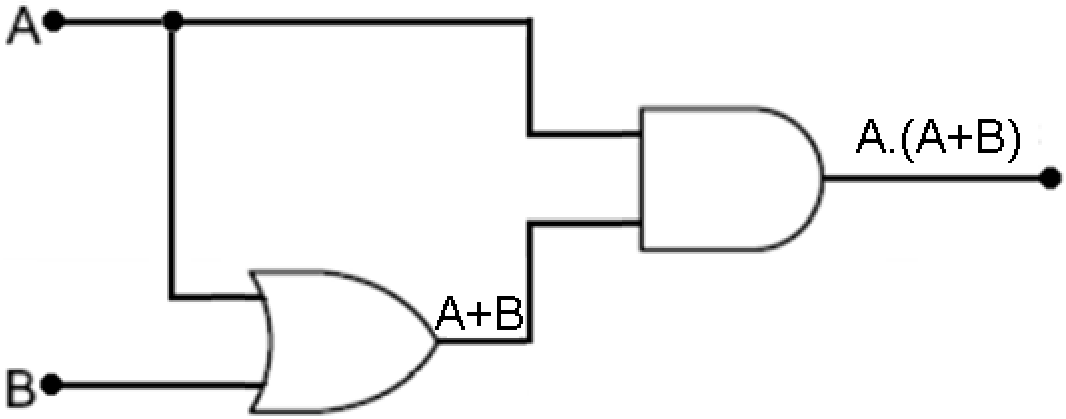
A
0
1

Solução Exercício 1 b)

- b)A.(A+B) = A
  - **A.(A+B)**
  - = (A.A) + (A.B) Distributiva Teorema 9
  - = A + (A.B)   Lei da absorção, Teorema 11
  - = A

A	B	A+B	A.(A+B)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Solução Exercício 1 b)



A	B	A+B	A.(A+B)
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	1
1	1	1	1

A
0
1

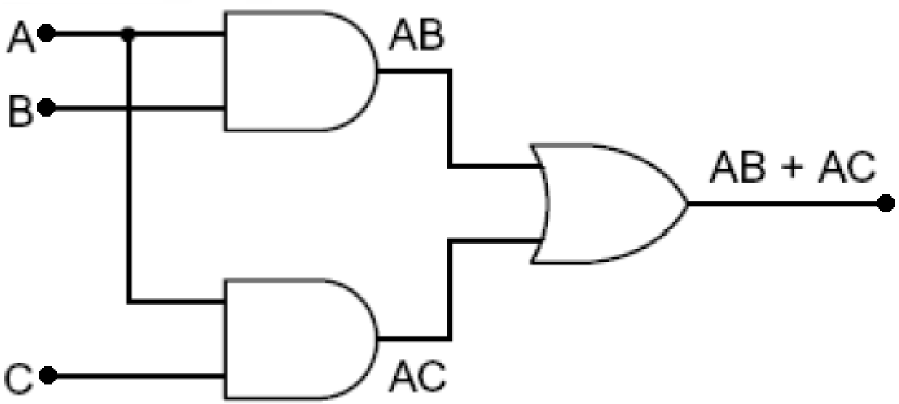
Solução Exercício 1 c)

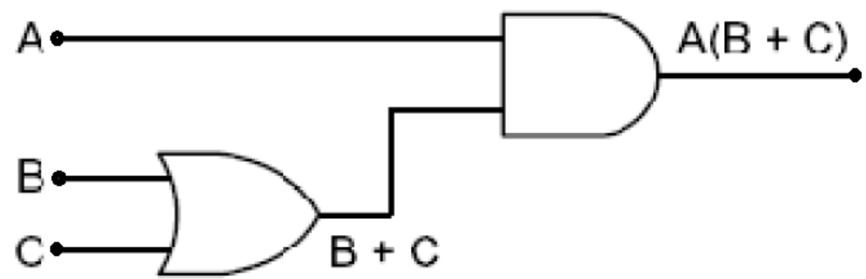
- c)A.B+A.C = A.(B+C)
  - **A.B + A.C**
  - = A.(B+C) Distributiva, Teorema 9

A	B	C	A.B	A.C	A.B+A.C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

A	B	C	B+C	A.(B+C)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Solução Exercício 1 c)





A	B	C	A.B	A.C	A.B+A.C
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

A	B	C	B+C	A.(B+C)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Exercícios

- 2) Mostre, usando simplificação por postulados e teoremas, ou seja, por transformações algébricas que:
- $A + \bar{A}.B = A + B$

Solução Exercício 2

Dois caminhos de prova!

- **$A + \bar{A}.B = A + B$**
  - A + A’.B
  - = (A + A’.B)’’ Postulado 10
  - = (A’. (A’.B)’)’ Teorema 4 Complemento
  - = (A’ . (A’’ +B’))’ Teorema 7 De Morgan e A´´ = A
  - = (A’.A + A’.B’)’ Teorema 9 Distributiva
  - = (0 + A’.B’)’ Identidade da multiplicação, Teorma 6
  - = (A’.B’)’ Identidade da adição, Teorema 2
  - = A’’ + B’’ Teorema 7 De Morgan
  - = A + B Postulado 10

Solução Exercício 2

Dois caminhos de prova!

- **$A + \bar{A}.B = A + B$**
  - $A + A'.B$
  - $= (A + A').(A+B)$ Distributiva ,Teorema 9
  - $= 1.(A+B)$ Identidade da adição, Teorema 4
  - $= A + B$ Identidade da multiplicação, Teorema 2

Exercícios

- 3) Mostre, usando simplificação por postulados e propriedades, ou seja, por transformações algébricas que:
- $(A+B).(A+C) = A + B.C$

Solução Exercício 3

- (A+B).(A+C) = A + B.C
  - (A+B).(A+C)
  - = A.A + A.C + B.A + B.C — Distributiva, Teorema 9
  - = A.A + A.C + A.B + B.C — Comutativa, Teorema 5
  - = A + A.C + A.B + B.C — Identidade da multiplicação, Teorema 3
  - = A + A.(C+B) + B.C — Distributiva, Teorema 9
  - = A.(1 + (C+B)) + B.C — Distributiva, Teorema 9
  - = A.(1) + B.C — Identidade da adição, Teorema 1
  - = A + B.C — Identidade da multiplicação, Teorema 2

Simplificação de Expressões Booleanas

- Usando a álgebra booleana é possível simplificar expressões
- Como cada circuito corresponde a uma expressão, simplificações de expressões significam em simplificações de circuitos
- Há duas formas para simplificar expressões
  - Fatoração
  - Mapas de Veitch-Karnaugh
- Veremos, a seguir, o processo de fatoração

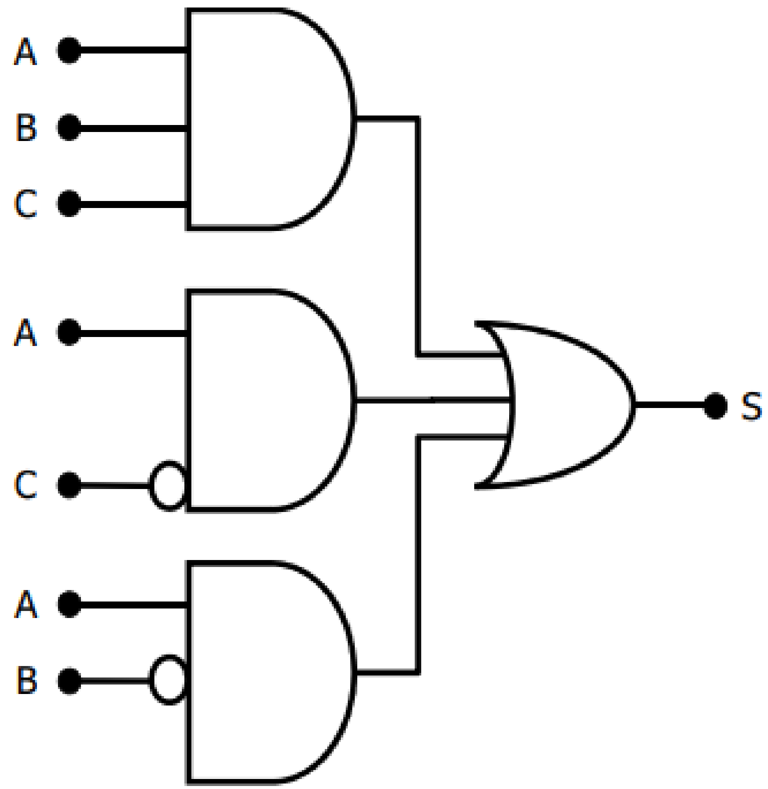
Fatoração

- Consiste na aplicação dos postulados e propriedades da álgebra booleana, com o objetivo de simplificar a expressão
- Por exemplo
  - S = A.B.C + A.C’ + A.B’
  - = A.(B.C + C’ + B’) Distributiva, Teorema 9
  - = A.(B.C + (C’ + B’)) Associativa, Teorema 6
  - = A.(B.C + ((C’ + B’)’)’) Identidade do complemento Postulado 10
  - = A.(B.C + (C.B)’) De Morgan, Teorema 7
  - = A.(B.C + (B.C)’) Comutativa, Teorema 5
  - = A.(1) Identidade da adição (A+A’=1), Teorema 4
  - = A Identidade da multiplicação, Teorema 2

Fatoração

- Portanto,
  - A.B.C + A.C’ + A.B’ = A
- Essa expressão mostra a importância da simplificação de expressões e a consequente minimização do circuito, sendo o resultado final igual ao da variável A

- Circuito antes da simplificação



- Circuito após simplificação

Exercícios

- 4) **Simplifique** a expressão

  $S = A'.B'.C' + A'.B.C' + A.B'.C$

Solução Exercício 4

- **Simplifique a expressão**

  S = A’.B’.C’ + A’.B.C’ + A.B’.C Comutativa 5

  = A’.C’.B’ + A’.C’.B + A.B’.C Distributiva 9

  = A’.C’.(B’ + B) + A.B’.C Teorema 4

  = A’.C’.(1) + A.B’.C Teorema 2

  = A’.C’ + A.B’.C

Exercícios

- 5) **Simplifique** a expressão

  $S = A' + A'.B'$

Solução Exercício 5

- **Simplifique** a expressão

S = A'+A'.B'	Distributiva 9
= A'.(1+B')	Teorema 1
= A'.(1)	Teorema 2
= A'	

Exercícios

- 6) **Simplifique** a expressão

  $S = (ABC').(A'+B'+C')$

Solução Exercício 6

- **Simplifique** a expressão

$S = (A.B.C').(A'+B'+C')$ Distributiva, Teorema 9

$= A.B.C'.A' + A.B.C'.B' + A.B.C'.C'$ Teorema 3

$= A.B.C'.A' + A.B.C'.B' + A.B.C'$ Associativa, Teorema 6

$= A.A'.B.C' + A.B.C'.B' + A.B.C'$ Teorema 4

$= 0.B.C' + A.B.C'.B' + A.B.C'$ Teorema 1

$= 0 + A.B.C'.B' + A.B.C'$ Teorema 2

$= A.B.C'.B' + A.B.C'$ Associativa, Teorema 6

$= A.C'.B.B' + A.B.C'$ Teorema 4

$= A.C'.0 + A.B.C'$ Teorema 1

$= 0 + A.B.C'$ Teorema 2

$= A.B.C'$

Exercícios

- 7) **Simplifique** a expressão

  $S = ((AC)' + B + D)' + C(ACD)'$

Solução Exercício 7

- **Simplifique** a expressão

S = ((A.C)’+B+D)’+C.(A.C.D)’	De Morgan, Teorema 7
= (A.C)’’.B’.D’+C.(A.C.D)’	Lei da involução, Postulado 10
= A.C.B’.D’+C.(A.C.D)’	De Morgan, Teorema 7
= A.C.B’.D’+C.(A’+C’+D’)	Distributiva, Teorema 9
= A.C.B’.D’+C.A’+C.C’+C.D’	Lei do complemento, Teorema 4
= A.C.B’.D’+C.A’+0+C.D’	Lei da identidade, Teorema 2
= A.C.B’.D’+C.A’+C.D’	Lei da identidade, Teorema 2
= A.C.B’.D’+C.A’+C.D’	Associativa, Teorema 6
= A.B’.C.D’+C.D’ +C.A’	Absorção Teorema 11
= C.D’+ C.A’	Distributiva, Teorema 9
= C(D’+A’)	

Exercícios

- 8) **Simplifique** a expressão

$S = (A+B+C).(A'.B'.C)$

Exercícios

- 8) **Simplifique** a expressão

$S = (A+B+C).(A'+B'+C)$

Exercícios

- 9) **Simplifique** a expressão

S = A.B.C + (A.C)’ + (A.B)’

Exercícios

- 10) **Simplifique** a expressão

$S = A'.B'.C' + A'.B.C + A'.B.C' + A.B'.C' + A.B.C'$

Conclusão

- Que qualquer operação aritmética pode ser realizada em computadores apenas através de somas (diretas ou em complemento)!
- ReduzIR o tamanho dos algoritmos ou circuitos é a função básica da Algebra de Boole.

Referências

WEBER, Raul Fernando. Fundamentos de arquitetura de computadores. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. E-book. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/books/9788540701434

STALLINGS, William. Arquitetura e organização de computadores. 8.ed. São Paulo: Pearson, 2010. E-book. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/459/epub/0

HOGLUND, Greg. Como quebrar códigos: a arte de explorar (e proteger) software. São Paulo: Pearson, 2006. E-book. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br/Leitor/Publicacao/179934/epub/0

Fim