Proyecto final

Entrega: Viernes 14 de diciembre de 2012 por correo electrónico a Iker. NO habrá prórroga.

Utilizar Octave para resolver los siguientes ejercicios. Antes de realizar preguntas: leer con cuidado estas hojas, las hojas de ayuda que están en la página del curso y discutir en el equipo.

1. Movimiento de una partícula sobre una esfera giratoria

- Una partícula de masa m se mueve sobre una esfera que gira con rapidez angular constante ω alrededor de su eje de simetría hacia la derecha (como la Tierra). Sobre la partícula actúa una fuerza efectiva $\boldsymbol{F}$. La ecuación diferencial que describe el movimiento de la partícula desde el punto de vista de un insecto parado sobre la esfera está dada por

  $$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}$$

  donde $\boldsymbol{\omega}$ es un vector cuya dirección indica el eje de rotación de la esfera y su magnitud es la rapidez angular con la que gira. Supondremos que el eje de rotación de la Tierra no está inclinado. En unidades terrestres, $|\boldsymbol{\omega}| = 1$.

  Resolver las ecuaciones diferenciales en coordenadas cartesianas y después, utilizando la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, obtener $\theta(t)$ y $\phi(t)$, es decir, la latitud y la longitud que permiten encontrar a la partícula sobre la esfera. Usar como guía [1]. Para obtener las ecuaciones es recomendable usar Maxima.
- Si la partícula es lanzada con velocidad $\boldsymbol{v_0}$ hacia el oriente desde la ubicación (θ_0, ϕ_0), dibujar su trayectoria en el plano θ vs. ϕ en ausencia de fuerzas externas. ¿El resultado es esperado? Explicar.
- Si ahora actúa la fuerza gravitacional $\boldsymbol{F} = mg\hat{\mathbf{r}}$, dibujar la trayectoria como antes. Repetir para una partícula lanzada hacia el poniente. ¿Cuáles son las diferencias con el caso anterior? ¿El resultado es esperado? Explicar.
- Determinar qué puntos iniciales sobre la esfera producen trayectorias interesantes. Guiarse con la intuición física.

Referencias

[1] Timberlake, Todd y Hasbun, Javier E., Computation in classical mechanics, Am. J. Phys. **76**, p. 334.

[2] Thornton, Stephen T. y Marion, Jerry B., Classical Dynamics of Particles and Systems, Thomson Learning, 2004.

2. Caos en el péndulo físico

1. La ecuación de movimiento de un péndulo simple de longitud l en coordenadas polares es $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin\theta$. Comparar las oscilaciones del péndulo simple con las del oscilador armónico simple para distintos desplazamientos iniciales. ¿Por qué el péndulo es un oscilador no lineal?
2. Aplicar una fuerza armónica al péndulo simple ($F_0 \sin \Omega t$) y estudiar el comportamiento para distintos valores de la frecuencia y la amplitud. ¿Qué sucede?

3. El efecto del amortiguamiento ya fue estudiado en una tarea. Juntando todos los "ingredientes" se obtiene la ecuación 3.8 de [1]. Resolver esta ecuación usando `ode45` y reproducir la figura 3.4a. ¿Cómo se hace para que θ varíe en $[0,\ 2\pi]$?

4. Para $F_0 = 0.5$ y $F_0 = 1.2$, comparar $\theta(t)$ para tres valores de $\theta(0)$ cercanos ($\dot{\theta}(0)$ fijo). ¿El resultado es esperado? Explicar.

5. Dibujar el espacio fase, como se muestra en la figura 3.6, considerando algunos valores para $\theta(0)$ cercanos ($\dot{\theta}(0)$ fijo). Interpretar ambos casos en términos del significado físico de θ y $\dot{\theta}$.

6. Para $F_0 = 1.2$ dibujar las secciones de Poincaré correspondientes con n condiciones iniciales, $n \in [4, 10]$. Considerar $\theta(0) \in [-\pi, \pi]$ y $\dot{\theta}(0) \in [-2, 2]$ uniformemente distribuidos. Integrar en el intervalo de tiempo $[0, 100 \cdot 2\pi/\Omega]$ usando `lsode`. ¿Por qué se dice que el conjunto de puntos obtenido es un atractor? Puede ser de utilidad revisar las páginas 166-169 de [2].

   Nota: Es conveniente utilizar dos matrices para guardar los valores de θ y $\dot{\theta}$ obtenidos para las n condiciones iniciales. Crear las matrices usando `ones(t,n)`, con t, el número de pasos de tiempo. Después se puede aprovechar `plot(A,B)`, donde A y B son matrices. Recuerda utilizar el "truco" del punto 3 y ajustar los valores de θ para que varíen en $[-\pi, \pi]$.

7. A partir de lo anterior y de lo que explica Giordano, ¿cuáles son algunas características del caos determinista?

Referencias

[1] Giordano, Nicholas J. y Nakanishi, Hisao, Computational Physics, Prentice Hall, 2006.

[2] Thornton, Stephen T. y Marion, Jerry B., Classical Dynamics of Particles and Systems, Thomson Learning, 2004.

Presentación del trabajo

- Escribir un documento de no más de seis cuartillas con LaTeX, en el cual se describa el procedimiento utilizado y se analicen los resultados obtenidos en cada ejercicio. Incluir las gráficas necesarias. Comentar sobre lo aprendido durante la realización del proyecto.

- Entregar un archivo `.pdf` y dos archivos `.m`. El nombre de los archivos debe contener el nombre de pila de los dos autores: `nombre1+nombre2.ext`