

# Proyecto final

Entrega: Viernes 14 de diciembre de 2012 por correo electrónico a Iker. NO habrá prórroga.

Utilizar Octave para resolver los siguientes ejercicios. Antes de realizar preguntas: leer con cuidado estas hojas, las hojas de ayuda que están en la página del curso y discutir en el equipo.

## 1. Tiro parabólico en una esfera giratoria

- Una partícula de masa  $m$  es lanzada con velocidad  $\mathbf{v}_0$  desde un punto en la Tierra. Sobre la partícula actúa la fuerza gravitacional  $\mathbf{F} = mg\hat{\mathbf{r}}$  ( $\hat{\mathbf{r}}$  es el vector unitario en la dirección  $\mathbf{r}$ ). La ecuación diferencial que describe el movimiento de la partícula desde el punto de vista de una persona parada en el lugar del lanzamiento está dada por

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2m\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}$$

donde  $\boldsymbol{\omega}$  es un vector cuya dirección indica el eje de rotación de la Tierra y su magnitud es la rapidez angular con la que gira. Supondremos que el eje de rotación no está inclinado. En unidades terrestres,  $|\boldsymbol{\omega}| = 1$ .

Resolver las ecuaciones diferenciales en coordenadas cartesianas y después, utilizando la transformación de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, obtener  $\theta(t)$  y  $\phi(t)$ , es decir, la latitud y la longitud que permiten encontrar a la partícula sobre la Tierra. Usar como guía [1]. Para obtener las ecuaciones es recomendable usar Maxima.

- Si la partícula es lanzada con velocidad  $\mathbf{v}_0$  hacia el oriente desde la ubicación  $(\theta_0, \phi_0)$ , dibujar su trayectoria en el plano  $\theta$  vs.  $\phi$  suponiendo que la Tierra no gira. ¿El resultado es esperado? Explicar.
- Si ahora la Tierra gira dibujar la trayectoria como antes. Repetir para una partícula lanzada hacia el poniente. ¿Cuáles son las diferencias con el caso anterior? ¿El resultado es esperado? Explicar.
- Determinar qué sucede con la partícula si es lanzada desde el Ecuador hacia el oriente y hacia el poniente.
- Si la partícula es lanzada con una rapidez de 11,300 m/s desde uno de los polos ¿qué sucede?

## Referencias

- [1] Timberlake, Todd y Hasbun, Javier E., [Computation in classical mechanics](#), Am. J. Phys. **76**, p. 334.
- [2] Thornton, Stephen T. y Marion, Jerry B., Classical Dynamics of Particles and Systems, Thomson Learning, 2004.

## 2. Caos en el péndulo físico

1. La ecuación de movimiento de un péndulo simple de longitud  $l$  en coordenadas polares es  $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$ . Comparar las oscilaciones del péndulo simple con las del oscilador armónico simple para distintos desplazamientos iniciales. ¿Por qué el péndulo es un oscilador no lineal?
2. Aplicar una fuerza armónica al péndulo simple ( $F_0 \sin \Omega t$ ) y estudiar el comportamiento para distintos valores de la frecuencia y la amplitud. ¿Qué sucede?

3. El efecto del amortiguamiento ya fue estudiado en una tarea. Juntando todos los “ingredientes” se obtiene la ecuación 3.8 de [1]. Resolver esta ecuación usando `ode45` y reproducir la figura 3.4a. ¿Cómo se hace para que  $\theta$  varíe en  $[0, 2\pi]$ ?
4. Para  $F_0 = 0.5$  y  $F_0 = 1.2$ , comparar  $\theta(t)$  para tres valores de  $\theta(0)$  cercanos ( $\dot{\theta}(0)$  fijo). ¿El resultado es esperado? Explicar.
5. Dibujar el espacio fase, como se muestra en la figura 3.6, considerando algunos valores para  $\theta(0)$  cercanos ( $\dot{\theta}(0)$  fijo). Interpretar ambos casos en términos del significado físico de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .
6. Para  $F_0 = 1.2$  dibujar las secciones de Poincaré correspondientes con  $n$  condiciones iniciales,  $n \in [4, 10]$ . Considerar  $\theta(0) \in [-\pi, \pi]$  y  $\dot{\theta}(0) \in [-2, 2]$  uniformemente distribuidos. Integrar en el intervalo de tiempo  $[0, 100 \cdot 2\pi/\Omega]$  usando `lsode`. ¿Por qué se dice que el conjunto de puntos obtenido es un atractor? Puede ser de utilidad revisar las páginas 166-169 de [2].

*Nota:* Es conveniente utilizar dos matrices para guardar los valores de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$  obtenidos para las  $n$  condiciones iniciales. Crear las matrices usando `ones(t,n)`, con  $t$ , el número de pasos de tiempo. Después se puede aprovechar `plot(A,B)`, donde  $A$  y  $B$  son matrices. Recuerda utilizar el “truco” del punto 3 y ajustar los valores de  $\theta$  para que varíen en  $[-\pi, \pi]$ .

7. A partir de lo anterior y de lo que explica Giordano, ¿cuáles son algunas características del caos determinista?

## Referencias

- [1] Giordano, Nicholas J. y Nakanishi, Hisao, *Computational Physics*, Prentice Hall, 2006.
- [2] Thornton, Stephen T. y Marion, Jerry B., *Classical Dynamics of Particles and Systems*, Thomson Learning, 2004.

## Presentación del trabajo

- Escribir un documento de no más de seis cuartillas con  $\text{\LaTeX}$ , en el cual se describa el procedimiento utilizado y se analicen los resultados obtenidos en cada ejercicio. Incluir las gráficas necesarias. Comentar sobre lo aprendido durante la realización del proyecto.
- Entregar un archivo `.pdf` y dos archivos `.m`. El nombre de los archivos debe contener el nombre de pila de los dos autores: `nombre1+nombre2.ext`