Diseño y Análisis de Algoritmos

Proyecto # 1: La Pelota

Laura Victoria Riera Pérez
Marié del Valle Reyes

Cuarto año. Ciencias de la Computación.
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

1 de abril de 2023

I. Repositorio del proyecto

https://github.com/computer-science-crows/algorithms-design-and-analysis

II. Definición inicial del problema

III. Preliminares

I. Grafo bipartito

II. Grafo bipartito completo

III. Emparejamiento

Para un grafo no dirigido $G = (V, E)$, un emparejamiento es un subconjunto de aristas $M \in E$ tal que cada vértice en V tiene al menos una a arista incidente en M.

IV. Otras definiciones

V. Camino M-alternativo

VI. Camino M-aumentativo

IV. Definición en términos matemático - computacionales

V. Solución emparejamiento de costo máximo en el grafo bipartito

Dado un grafo bipartito completo ponderado $G = (V, E)$, donde $V = L \cup R$. Se asume que los vértices de los conjuntos L y R contienen n vértice cada uno, por tanto el grafo contiene n^2 aristas. Para $l \in L$ y $r \in R$, se denota el peso de la arista (l, r) como $w(l, r)$, lo cual representa ganancia de emparejar el vértice l con el vértice r.

El objetivo es encontrar el emparejamiento perfecto $M*$ cuyas aristas tengan el peso máximo total de todos los emparejamientos perfectos posibles.

Sea $w(M) = \sum_{(l,r) \in M} w(l, r)$ el peso total de las aristas en el emparejamiento M, se quiere encontrar el emparejamiento perfecto M^* tal que,

$$w(M*) = \max\{w(M) : M \text{ es un emparejamiento perfecto}\}$$

.

A encontrar un emparejamiento perfecto de peso máximo se le llama **problema de asignación**. Una solución del problema de asignación es un emparejamiento perfecto que máximice el costo total.

Aunque se pueden enumerar los $n!$ emparejamientos perfectos pra resolver este problema, existe un algoritmo llamado **algoritmo Húngaro** que lo resuelve más rápido. En vez de trabajar con un grafo bipartito completo G, el algoritmo Húngaro trabaja con un subgrafo de G llamado **subgrafo de igualdad**. El subgrafo de igualdad cambia en el tiempo y tiene la propiedad que cualquier emparejamiento perfecto en el subgrafo de igualdad es también una solución óptima del problema de asignación.

El subgrafo de igualdad depende de asignar un atributo h a cada vértice. El atributo h se llama **etiqueta** del vértice.

Se dice que h es un **etiquetado de vértice factible** de G si $l.h + r.h \geq w(l,r)$ para todo $l \in L$ y $r \in R$.

Un etiquetado de vértice factible siempre existe, como el **etiquetado de vértice por defecto** dado por

$$l.h = \max\{w(l,r) : r \in R\} \qquad \text{para todo } l \in R, \tag{1}$$

$$r.h = 0 \qquad \text{para todo } r \in R \tag{2}$$

Dado un eqiquetado de vértice factible h, el **subgrafo de igualdad** $G_h = (V, E_h)$ de G consiste de los mismos vértice de G y el subconjunto de aristas $E_h = \{(l,r) \in E : l.h + r.h = w(l,r)\}$.

Teorema 1. *Sea $G = (V, E)$, donde $V = L \cup R$, un grafo bipartito completo donde cada arista $(l,r) \in E$ tiene peso $w(l,r)$. Sea h un etiquetado de vértice factible de G y G_h el subgrafo de igualdad de G. Si G_h contiene un emparejamiento perfecto M^*, entonce M^* es una solución óptima del problema de asignación G.*

Demostración. Si G_h tiene un emparejamiento perfecto M^*, entonces debido a que G_h y G tienen el mismo conjunto de vértices, M^* es también un emparejamiento perfecto en G. Debido a que cada arista de M^* pertenece a G_h y cada vértice tiene exactamente una arista incidente del emparejamiento perfecto, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
w(M*) &= \sum_{(l,r)\in M*} w(l,r) && && (3)\\
&= \sum_{(l,r)\in M^*} (l.h + r.h) && \text{(porque todas las aristas de } M^* \text{ pertenecen a } G_h) && (4)\\
&= \sum_{l\in L} l.h + \sum_{r\in R} r.h && \text{(porque } M^* \text{ es un emparejamiento perfecto)} && (5)\\
& && && (6)
\end{aligned}$$

Sea M un emparejamiento perfecto cualquiera de G, se tiene

$$\begin{aligned}
w(M) &= \sum_{(l,r)\in M} w(l,r) && && (7)\\
&\leq \sum_{(l,r)\in M} (l.h + r.h) && \text{(porque } h \text{ es un etiquetado de vértice factible)} && (8)\\
&= \sum_{l\in L} l.h + \sum_{r\in R} r.h && \text{(porque } M \text{ es un emparejamiento perfecto)} && (9)
\end{aligned}$$

Entonces se tiene

$$w(M) \leq \sum_{l \in L} l.h + \sum_{r \in R} r.h = w(M^*), \tag{10}$$

por tanto M^* es un emparejamiento perfecto de máximo costo en G. ■

I. Correctitud

II. Complejidad Temporal

III. Complejidad Espacial

VI. Otras soluciones y demostraciones

VII. Generador de casos de prueba

VIII. Tester

IX. Comparación de soluciones implementadas