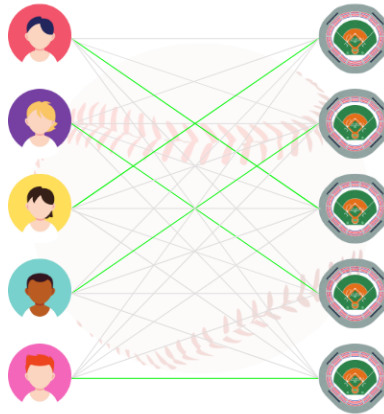


# Proyecto # 1: La Pelota



Laura Victoria Riera Pérez  
Marié del Valle Reyes

Cuarto año. Ciencias de la Computación.  
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

4 de abril de 2023

## I. REPOSITORIO DEL PROYECTO

<https://github.com/computer-science-crows/algorithms-design-and-analysis>

## II. DEFINICIÓN INICIAL DEL PROBLEMA

Para un campeonato de pelota, el manager debe elegir de un conjunto de  $n$  personas, a su equipo de  $p$  jugadores, y a  $k$  espectadores especiales para que suban la moral del equipo. De cada persona  $i$ , el manager conoce el valor que aporta a la moral del equipo  $a_i$  y el valor que aporta siendo situado en la posición  $j$ ,  $s_{i,j}$ . Determine una alineación entre jugadores en el campo y espectadores de forma que el equipo tenga la mayor cantidad de valor acumulado posible.

## III. DEFINICIÓN EN TÉRMINOS MATEMÁTICO - COMPUTACIONALES

### I. Preliminares

**Definición 1.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Se dice que  $G$  es bipartito si  $V(G)$  es la unión de dos conjuntos independientes disjuntos. Si entre todo par de nodos de diferentes particiones existe una arista, se dice que es un grafo bipartito completo.

**Definición 2.** Un emparejamiento  $M$  es un conjunto de aristas en un grafo que son independientes, o sea, que no comparten vértices.

**Definición 3.** Dado un emparejamiento  $M$  se dice que:

- Si la arista  $e = (v, w) \in M$ , se dice que  $v$  y  $w$  son saturados por  $M$ .
- Un conjunto de vértices es saturado por  $M$  cuando  $M$  satura a todos los vértices del conjunto.
- Se dice que  $M$  es perfecto si satura a  $V(G)$ .
- $M$  es máximo cuando no existe  $M_1$  tal que  $|M_1| > |M|$ .

**Definición 4.** Sea  $G$  un grafo y  $M$  un emparejamiento del mismo. Un camino simple en  $G$  es  $M$ -alternativo si sus aristas alternan entre pertenecer y no pertenecer a  $M$ .

**Definición 5.** Sea  $G$  un grafo y  $M$  un emparejamiento del mismo. Un camino simple en  $G$  es  $M$ -aumentativo si es  $M$ -alternativo y sus extremos no son saturados por  $M$ .

**Teorema 1.** Sea  $G$  un grafo y  $M$  un emparejamiento del mismo.  $M$  es maximal si y solo si no existen caminos  $M$ -aumentativos.

## II. Problema de asignación

La entrada de nuestro problema es el número de personas  $n$ , el número de posiciones a ser asignadas  $m = p + k$ , donde  $p$  es la cantidad de posiciones dentro del equipo y  $k$  el número de asientos en el estadio a ser ocupados. Además, se recibe una lista  $a$  de valor aportado de cada persona por ser parte de la asignación, y una matriz  $s$  del valor aportado por cada persona en cada una de las posiciones. La salida del algoritmo debe ser la asignación de personas a posiciones que maximice el valor del equipo.

Dado un grafo bipartito completo ponderado  $G = (V, E)$ , donde  $V = L \cup R$ . Se asume que los vértices de los conjuntos  $L$  y  $R$  contienen  $n$  vértices cada uno, por tanto el grafo contiene  $n^2$  aristas. Para todo  $l \in L$  y  $r \in R$ , se denota el peso de la arista  $(l, r)$  como  $w(l, r)$ , lo cual representa ganancia de emparejar el vértice  $l$  con el vértice  $r$ . A encontrar un emparejamiento perfecto  $M^*$  cuyas aristas tengan el peso máximo total de todos los emparejamientos perfectos posibles se le llama *problema de asignación*. Sea  $w(M) = \sum_{(l,r) \in M} w(l, r)$  el peso total de las aristas en el emparejamiento  $M$ , se quiere encontrar el emparejamiento perfecto  $M^*$  tal que,

$$w(M^*) = \max\{w(M) : M \text{ es un emparejamiento perfecto}\}.$$

Así, nuestro problema puede ser modelado como un grafo bipartito completo ponderado  $G = (L \cup R, E)$  donde  $L$  representan las personas y  $R$  las posiciones en el estadio a ser asignadas; y donde el peso de cada arista  $e = (u, v)$  es  $w(e) = a[u] + s[u][v]$ .

## IV. LÍNEA DE PENSAMIENTO

Como primera solución al problema de asignación fue implementado un *backtrack*. Esta es una solución correcta, ya que prueba todas las combinaciones y se queda con la que más valor aporte, pero muy ineficiente,  $O(n!)$ . En una computadora de 32GB de RAM, intel core i7-11na generación, se puede resolver para una cantidad máxima de personas y/o posiciones de 11. Dicha solución puede ser encontrada en *solutions/backtrack\_solutions.py*.

Se intentó resolver mediante un algoritmo *greedy*, tomando por cada persona el máximo del valor que puede aportar al equipo, y luego ir asignando de forma descendente a las posiciones. El

problema de este enfoque está en que cuando dos o más personas aportan el mismo valor en una misma posición se debe escoger aquel cuyo siguiente máximo sea menor (pues de lo contrario en una próxima iteración se perdería en valor en otra posición). Nótese que para el peor de los casos, cuando todos las personas aporten el mismo valor en todas las posiciones, esta solución es tan mala como backtrack.

El próximo pensamiento fue resolverlo con *programación dinámica*. Para poder aplicar esta solución el problema debe cumplir con dos características fundamentales: subproblemas solapados, es decir, que subproblemas iguales se repitan una y otra vez, por lo que se necesitaría volver a calcular sus soluciones; y subestructura óptima, lo cual significa que una solución óptima para un subproblema forma parte de la solución óptima del problema. Luego de graficar el backtrack y aplicar memorización para varios casos se observó que ninguno presentaba subproblemas solapados, por lo que la intuición dice que probablemente no tenga. Además se cree que este problema no tiene subestructura óptima (al menos para las formas de pensar y picar el mismo analizadas) dado que asignar las personas que más valor den a un subconjunto de las posiciones no garantiza un óptimo, puede ocurrir que esas personas aportaran más en otras posiciones fuera del subconjunto.

Este problema puede ser modelado también como un problema de optimización lineal. Sea  $x_{i,j}$  una variable binaria que indica que se asignó la persona  $i$  a la posición  $j$ . Se quiere maximizar la suma de  $w(i, j) = a[i] + s[i, j] \forall i \in n, \forall j \in m$ . Las restricciones añadidas garantizan que todos los vértices tengan exactamente un vecino, y por tanto la solución hallada sea un emparejamiento perfecto.

$$\begin{cases} \text{máx} & z = \sum_i \sum_j x_{i,j} \cdot (s_{i,j} + a_i) \\ \text{s.a.} & \sum_{j=1}^m x_{i,j} = 1 & \forall i \in n \\ & \sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 & \forall j \in m \end{cases} \quad (1)$$

Esta solución fue probada utilizando el algoritmo *Simplex* implementado en la librería *scipy* y puede ser encontrada en *solutions/simplex\_solution.py*. La complejidad temporal del simplex para el caso peor es  $O(2^n)$ , pero en general es bastante rápido.

Investigando el estado del arte y siguiendo la idea de modelar el problems mediante grafos se decidió implementar para su solución el algoritmo Húngaro descrito en [1], el cual es una especie de greedy y se ejecuta en tiempo polinomial, y es explicado en la próxima sección. Dicha implementación está en *solutions/hungarian\_solution.py*.

## V. ALGORITMO HÚNGARO

El método Húngaro es un algoritmo de optimización-combinatoria que resuelve el problema de asignación en tiempo polinomial.

En vez de trabajar con un grafo bipartito completo  $G$ , el algoritmo Húngaro trabaja con un subgrafo de  $G$  llamado **subgrafo de igualdad**. El subgrafo de igualdad depende de asignar un atributo  $h$  a cada vértice. El atributo  $h$  se llama **etiqueta** del vértice. Se dice que  $h$  es un **etiquetado de vértice factible** de  $G$  si  $l.h + r.h \geq w(l, r)$  para todo  $l \in L$  y  $r \in R$ . Un etiquetado de vértice factible siempre existe, como el **etiquetado de vértice por defecto** dado por

$$l.h = \max\{w(l, r) : r \in R\} \quad \text{para todo } l \in R, \quad (2)$$

$$r.h = 0 \quad \text{para todo } r \in R \quad (3)$$

Dado un etiquetado de vértice factible  $h$ , el **subgrafo de igualdad**  $G_h = (V, E_h)$  de  $G$  consiste de los mismos vértice de  $G$  y el subconjunto de aristas  $E_h = \{(l, r) \in E : l.h + r.h = w(l, r)\}$ .

El subgrafo de igualdad puede cambiar en el tiempo y tiene la propiedad que cualquier emparejamiento perfecto en el subgrafo de igualdad es también una solución óptima del problema de asignación como se demuestra en el siguiente teorema.

**Teorema 2.** [1] Sea  $G = (V, E)$ , donde  $V = L \cup R$ , un grafo bipartito completo donde cada arista  $(l, r) \in E$  tiene peso  $w(l, r)$ . Sea  $h$  un etiquetado de vértice factible de  $G$  y  $G_h$  el subgrafo de igualdad de  $G$ . Si  $G_h$  contiene un emparejamiento perfecto  $M^*$ , entonces  $M^*$  es una solución óptima del problema de asignación  $G$ .

*Demostración.* Si  $G_h$  tiene un emparejamiento perfecto  $M^*$ , entonces debido a que  $G_h$  y  $G$  tienen el mismo conjunto de vértices,  $M^*$  es también un emparejamiento perfecto en  $G$ . Debido a que cada arista de  $M^*$  pertenece a  $G_h$  y cada vértice tiene exactamente una arista incidente del emparejamiento perfecto, entonces se tiene

$$w(M^*) = \sum_{(l,r) \in M^*} w(l, r) \quad (4)$$

$$= \sum_{(l,r) \in M^*} (l.h + r.h) \quad (\text{porque todas las aristas de } M^* \text{ pertenecen a } G_h) \quad (5)$$

$$= \sum_{l \in L} l.h + \sum_{r \in R} r.h \quad (\text{porque } M^* \text{ es un emparejamiento perfecto}) \quad (6)$$

$$(7)$$

Sea  $M$  un emparejamiento perfecto cualquiera de  $G$ , se tiene

$$w(M) = \sum_{(l,r) \in M} w(l, r) \quad (8)$$

$$\leq \sum_{(l,r) \in M} (l.h + r.h) \quad (\text{porque } h \text{ es un etiquetado de vértice factible}) \quad (9)$$

$$= \sum_{l \in L} l.h + \sum_{r \in R} r.h \quad (\text{porque } M \text{ es un emparejamiento perfecto}) \quad (10)$$

Entonces se tiene

$$w(M) \leq \sum_{l \in L} l.h + \sum_{r \in R} r.h = w(M^*), \quad (11)$$

por tanto  $M^*$  es un emparejamiento perfecto de máximo costo en  $G$ . ■

Entonces, el objetivo del algoritmo es encontrar un emparejamiento perfecto en un subgrafo de igualdad.

## I. Explicación del algoritmo

El algoritmo Húngaro empieza con un etiquetado de vértice factible  $h$  que es el de defecto 2 y cualquier emparejamiento  $M$  en el subgrafo de igualdad  $G_h$ . En la resolución de este problema se utilizó un algoritmo de emparejamiento maximal greedy. Luego, el algoritmo repetidamente encuentra un **camino M-aumentativo**  $P$  en  $G_h$  utilizando una variante de Búsqueda Primero a lo Ancho (*en inglés*, **BFS**).

El algoritmo BFS empieza la búsqueda desde todos los vértices no saturados de  $L$ , los cuales al inicio se insertan en la cola  $Q$ . La condición de parada es que se descubra algún vértice no saturado de  $R$ , ya que un camino  $M$ -aumentativo es aquel que empieza en un vértice no saturado

de  $L$  y termina en un vértice no saturado de  $R$ , tomando aristas no saturadas de  $L$  a  $R$  y aristas saturadas de  $R$  a  $L$ . El resultado del algoritmo es un bosque primero a lo ancho  $F = (V_f, E_f)$ , donde cada vértice no saturado de  $L$  es raíz de algún árbol de  $F$ .

Si la búsqueda de un camino  $M$ -aumentativo falla, se debe actualizar el etiquetado de vértice factible para adicionar a  $G_h$  al menos una arista nueva.

Una vez encontrado un camino  $M$ -aumentativo, actualiza el emparejamiento para que este sea la diferencia simétrica de  $M$  y  $P$ , incrementando así el tamaño del emparejamiento. Mientras haya algún subgrafo de igualdad que contenga un camino  $M$ -aumentativo, el tamaño del emparejamiento puede incrementar, hasta que un emparejamiento perfecto se logre.

Existen casos en los que la cola  $Q$  se vacía sin que se halla llegado a encontrar un vértice no saturado de  $R$  que conforme un camino  $M$ -aumentativo. Cuando esto ocurre, el algoritmo Húngaro actualiza el etiquetado de vértices factible  $h$  de acuerdo al siguiente lemma.

**Lema 1.** [1] Sea  $h$  un etiquetado de vértice factible en el grafo bipartito completo  $G$  con el grafo de igualdad  $G_h$ , y se  $M$  un emparejamiento para  $G_h$  y  $F$  el bosque construido a partir de una Búsqueda Primero a lo Ancho (en inglés, BFS) sobre el subgrafo de igualdad  $G_h$ . Entonces, la etiqueta  $h'$ ,

$$v.h' = \begin{cases} v.h - \delta & \text{si } v \in F_l, \\ v.h + \delta & \text{si } v \in F_r, \\ v.h & \text{e.o.c} \end{cases} \quad (12)$$

donde

$$\delta = \min\{l.h + r.l - w(l, r) : l \in F_l, r \in F_r\} \quad (13)$$

con  $F_l = L \cap V_f$  y  $F_r = R \cap V_f$  son vértices del bosque  $F$  que pertenecen a  $L$  y a  $R$ , respectivamente, es una etiqueta de vértice factible para  $G$  con las siguientes propiedades:

1. Si  $(u, v)$  es una arista de bosque  $F$  para  $G_h$ , entonces  $(u, v) \in E_{h'}$ .
2. Si  $(l, r)$  pertenece al emparejamiento  $M$  para  $G_h$ , entonces  $(l, r) \in E_{h'}$ .
3. Existen vértices  $l \in F_l$  y  $r \in R - F_r$  tales que  $(l, r) \notin E_h$ , pero  $(l, r) \in E_{h'}$ .

*Demostración.* Primero se demuestra que  $h'$  es un etiquetado de vértice factible para  $G$ . Debido a que  $h$  es un etiquetado de vértice factible, se tiene  $l.h + r.h \geq w(l, r)$  para todo  $l \in L$  y  $r \in R$ . Para que  $h'$  no sea un etiquetado de vértice factible, entonces se necesitaría que  $l.h' + r.h' < l.h + r.h$  para algún  $l \in L$  y  $r \in R$ . La única forma en que esto pudiera ocurrir sería para algún  $l \in F_l$  y  $r \in R - F_r$ . En esta instancia, la cantidad de decrecimiento es igual a  $\delta$ , entonces  $l.h' + r.h' = l.h - \delta + r.h$ . Por ecuación 13, se tiene que  $l.h - \delta + r.h \geq w(l, r)$  para cualquier  $l \in F_l$  y  $r \in R - F_r$ , por tanto  $l.h' + r.h' \geq w(l, r)$ . Para cualquier otra arista, se tiene  $l.h' + r.h' \geq l.h + r.h \geq w(l, r)$ . Por tanto,  $h'$  es un etiquetado de vértice factible.

Ahora se mostrará la veracidad de las propiedades:

1. Si  $l \in F_l$  y  $r \in F_r$ , entonces se tiene  $l.h' + r.h' = l.h + r.h$  debido a que  $\delta$  se adiciona a la etiqueta de  $l$  y se subtrae de la etiqueta de  $r$ . entonces, si una arista pertenece a  $F$  para el grafo  $G_h$ , también pertenece a  $G_{h'}$ .
2. Se afirma que para el momento en que el algoritmo Húngaro computa el nuevo etiquetado de vértice factible  $h'$ , para toda arista  $(l, r) \in M$ , se tiene que  $l \in F_l$  si y solo si  $r \in F_r$ .

Para demostrar por qué, se considera el vértice saturado  $r$  y la arista  $(l, r) \in M$ .

Primero se supone que  $r \in F_r$ , entonces la búsqueda encuentra  $r$  y lo pone en la cola. Cuando  $r$  se remueve de la cola,  $l$  es descubierto, entonces  $l \in F_l$ .

Luego se supone que  $r \notin F_r$ , por tanto  $r$  no se ha descubierto. Se demostrará que  $l \notin F_l$ . La única arista en  $G_h$  que entra  $l$  es  $(r, l)$ , y dado que  $r$  no se ha descubierto, la búsqueda no ha tomado esta arista; si  $l \in F_l$ , no es por la arista  $(r, l)$ . La única otra forma que un vértice en  $L$  puede estar en  $F_l$  es si es raíz de la búsqueda, pero solo vértices no saturados de  $L$  son raíces y  $l$  está saturado. Por tanto,  $l \notin F_l$  y la afirmación se cumple.

Se conoce que para  $l \in F_l$  y  $r \in F_r$  se cumple  $l.h' + r.h' = l.h + r.h$ . En caso contrario, cuando  $l \in L - F_l$  y  $r \in R - F_r$ , se tiene que  $l.h' = l.h$  y  $r.h' = r.h$ , entonces  $l.h' + r.h' = l.h + r.h$ . Por tanto, si la arista  $(l, r)$  está en el emparejamiento  $M$  para el grafo  $G_h$ , entonces  $(l, r) \in E_{h'}$ .

3. Sea  $(l, r)$  una arista que no pertenece a  $E_h$ , tal que  $l \in F_l$ ,  $r \in R - F_r$  y  $\delta = l.h + r.h - w(l, r)$ . Entonces, por definición de  $\delta$ , existe al menos una de esas arista. Luego, se tiene

$$\begin{aligned} l.h' + r.h' &= l.h - \delta + r.h \\ &= l.h - (l.h + r.h - w(l, r)) + r.h \\ &= w(l, r) \end{aligned}$$

y por tanto  $(l, r) \in E_{h'}$ .

■

## II. Complejidad Temporal

La complejidad temporal del algoritmo Húngaro implementado es  $O(n^4)$ , donde  $|V| = 2n$  y  $|E| = n^2$  en el grafo original  $G$ .

## VI. GENERADOR DE CASOS DE PRUEBA

Se generaron 3000 casos de prueba utilizando backtrack los cuales pueden ser encontrados en `json/test_cases.json`.

## VII. TESTER

Las soluciones implementadas fueron testeadas para todos los casos de prueba generados y pueden encontrarse en `json/tests/simplex_solution.json` y `json/tests/hungarian_solution.json`

## REFERENCIAS

- [1] Cormen, Thomas H. y otros. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press. 4ta Edición. Cambridge, Massachusetts. 2022.