

# Proyecto # 2: Tito el corrupto



Laura Victoria Riera Pérez  
Marié del Valle Reyes

Cuarto año. Ciencias de la Computación.  
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

27 de mayo de 2023

## I. REPOSITORIO DEL PROYECTO

<https://github.com/computer-science-crows/algorithms-design-and-analysis>

## II. DEFINICIÓN INICIAL DEL PROBLEMA

Tito se dió cuenta de que la carrera de computación estaba acabando con él y un día decidió darle un cambio radical a su vida. Comenzó a estudiar Ingeniería Industrial. Luego de unos años de fiesta, logró finalmente conseguir su título de ingeniero. Luego de otros tantos años ejerciendo sus estudios, consiguió ponerse a la cabeza de un gran proyecto de construcción de carreteras.

La zona en la que debe trabajar tiene  $n$  ciudades con  $m$  posibles carreteras a construir entre ellas. Cada ciudad que sea incluida en el proyecto aportará  $a_i$  dólares al proyecto, mientras que cada carretera tiene un costo de  $w_i$  dólares. Si una carretera se incluye en el proyecto, las ciudades unidas por esta también deben incluirse.

El problema está en que Tito quiere utilizar una de las habilidades que aprendió en sus años de estudio, la de la malversación de fondos. Todo el dinero necesario para el proyecto que no sea un aporte de alguna ciudad, lo proveerá el país y pasará por manos de Tito. El dinero aportado por las ciudades no pasará por sus manos. Tito quiere maximizar la cantidad de dinero que pasa por él, para poder hacer su magia. Ayude a Tito a seleccionar el conjunto de carreteras a incluir en el proyecto para lograr su objetivo.

### III. DEFINICIÓN EN TÉRMINOS MATEMÁTICO - COMPUTACIONALES

La entrada de nuestro problema es la cantidad de ciudades  $n$ , la cantidad de carreteras  $m$ , una lista  $a$  con el dinero aportado por cada ciudad y una lista  $w$  con cada carretera y su costo. El objetivo es maximizar la diferencia de la suma de los costos de construir las carreteras seleccionadas y la suma del aporte de cada una de las ciudades que intervienen en esas carreteras. La salida del problema es la distribución del proyecto como dos listas, una que contiene las ciudades y otra las carreteras a construir tal que se obtenga la ganancia máxima.

#### I. Problema "Proyectos e Instrumentos"

Uno de los problemas de flujo más conocidos es el de "Proyectos e Instrumentos". En este, se tienen un conjunto de proyectos que podemos hacer, cada uno con su costo, y un conjunto de instrumentos, cada uno con algún costo también. Cada proyecto depende de algunos instrumentos, y cada instrumento se puede utilizar cualquier número de veces. Se debe elegir un subconjunto de proyectos y un subconjunto de instrumentos tal que, si se elige un proyecto, también se elijan todos los instrumentos de los que depende este proyecto, y maximizar la diferencia entre la suma de los costos de los proyectos elegidos y la suma de los costes de los instrumentos elegidos.

Como puede observarse, este es precisamente el problema que nos ocupa, siendo los proyectos, las carreteras y los instrumentos, las ciudades. Este se puede modelar mediante una red de flujo contruyendo un grafo dirigido  $G = (V, E)$  como el que se describe a continuación:

- El conjunto  $V$  está formado por  $n + m + 2$  vértices que representan cada ciudad y cada carretera, además de un vértice  $s$  que representa la fuente y un vértice  $t$  que representa el receptor.
- El conjunto  $E$  está formado por  $n + 3 \cdot m$  arcos, distribuidos de la siguiente forma:
  - Arcos desde  $s$  hasta cada vértice que representa una carretera con capacidad igual al valor  $w_i$  dado de entrada, que representa el costo de construir la carretera  $i$ .
  - Arcos desde cada vértice que representa una ciudad hacia el vértice  $t$  con capacidad igual al valor  $a_i$  que representa el aporte de la ciudad  $i$  al ser incluida en el proyecto.
  - Arcos desde cada vértice que representa una carretera hacia cada vértice ciudad que la conforma (extremos) con capacidad igual a  $\infty$ .

### IV. SOLUCIONES IMPLEMENTADAS

#### I. Backtrack

Como primera solución al problema fue implementado un *backtrack*. Esta es una solución correcta, ya que prueba todas las combinaciones de posibles carreteras y se queda con la que más ganancia aporte, pero muy ineficiente  $O(2^m)$ . En una computadora de 32GB de RAM, intel core i7-11na generación, se puede resolver para una cantidad máxima 5 ciudades con 5 aristas. Dicha solución puede ser encontrada en `src/solutions/backtrack_solution.py`.

#### II. Solución utilizando flujo

##### ii.1. Preliminares

**Definición 1.** Una *red de flujo*  $G = (V, E)$  es un grafo dirigido en el que a cada par ordenado  $(u, v)$ ,  $u, v \in V$ , se le asocia una función de capacidad no negativa  $c(u, v) \geq 0$  y en el que se distinguen dos

vértices: la fuente  $s$  y el receptor  $t$ .

**Definición 2.** Sea  $G=\langle V,E \rangle$  una red de flujo con función de **capacidad**  $c$  y vértices fuente y receptor  $s$  y  $t$  respectivamente. Un **flujo** en  $G$  es una función real  $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  que satisface las siguientes propiedades:

1. Restricción de capacidad: Para todo  $u,v \in V$  se cumple que

$$0 \leq f(u,v) \leq c(u,v) \quad (1)$$

2. Conservación de flujo: Para todo  $u \in V - \{s,t\}$ , se cumple que

$$\sum_{v \in V} f(v,u) = \sum_{v \in V} f(u,v) \quad (2)$$

**Definición 3.** A la cantidad no negativa  $f(u,v)$  se le denomina **flujo neto** de  $u$  a  $v$ .

**Definición 4.** Sea  $G=\langle V,E \rangle$  una red de flujo con origen  $s$  y receptor  $t$ . Sea  $f$  un flujo en  $G$ , y sean  $u,v \in V$ . Se define la **capacidad residual** mediante la siguiente función:

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v) & , \text{si } (u,v) \in E \\ f(v,u) & , \text{si } (v,u) \in E \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

La **red residual** de  $G$  inducida por  $f$  es una red  $G_f = (V, E_f)$ , donde  $E_f = \{(u,v) \in V \times V \mid c_f(u,v) > 0\}$ .

**Definición 5.** Si  $f$  es un flujo en la red original  $G$  y  $f'$  es un flujo en la red residual correspondiente  $G_f$ , entonces, se define el aumento del flujo  $f$  (en la red original) por  $f'$ , y denotado por  $f \uparrow f'$ , a la función  $f \uparrow f' : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dada por la expresión:

$$f \uparrow f'(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f'(u,v) - f'(v,u) & \text{si } (u,v) \in E \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

**Definición 6.** Dada una red de flujo  $G=\langle V,E \rangle$  y un flujo  $f$ , un **camino aumentativo**  $p$  es un camino simple de  $s$  a  $t$  en la red residual  $G_f$ .

**Definición 7.** La capacidad residual de un camino aumentativo  $p$ , denotada por  $c_f(p)$ , es el valor máximo en el cual es posible aumentar el flujo en cada arista del camino sin violar la restricción de capacidad

$$c_f(p) = \min \{c_f(u,v) \mid (u,v) \in p\} \quad (5)$$

**Lema 1.** Sea  $G=\langle V,E \rangle$  una red de flujo, sea  $f$  un flujo en  $G$  y sea  $p$  un camino aumentativo en la red residual  $G_f$ . Si se define el flujo  $f_p$ , sobre la red residual, como

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{si } (u,v) \in p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6)$$

entonces el valor de  $f_p$  es  $|f_p| = c_f(p) > 0$

**Definición 8.** Un **corte**  $(S,T)$  de una red de flujo  $G = (V,E)$  es una partición de  $V$  en dos conjuntos  $S$  y  $T = V-S$  de modo que  $s \in S$  y  $t \in T$ .

**Teorema 1.** Si  $f$  es un flujo en una red de flujo  $G=\langle V,E \rangle$  con un origen  $s$  y un receptor  $t$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1.  $f$  es un flujo máximo en  $G$ .
2. En la red residual  $G_f$  no se pueden encontrar más caminos aumentativos.
3.  $|f| = c(S,T)$  para algún corte  $(S,T)$  de  $G$ .

## ii.2. Algoritmo Ford-Fulkerson

El algoritmo Ford-Fulkerson es utilizado para encontrar el flujo máximo en una red de flujo [2]. Esta red se representa como un grafo dirigido donde cada arista tiene una capacidad que indica la cantidad máxima de flujo que puede pasar por ella.

El flujo máximo se obtiene buscando en cada iteración del algoritmo un camino aumentativo [6]. Una vez encontrado el camino aumentativo, se aumenta el flujo en esa ruta tanto como sea posible. Este proceso se repite hasta que ya no hayan caminos aumentativos en el grafo residual [4], ya que por teorema [1], en ese momento se debe haber alcanzado el flujo máximo.

## ii.3. Propuesta de solución

Se aplica un algoritmo de flujo sobre  $G$  y se toma el corte mínimo  $(S, T)$ , la respuesta estará conformada por todas las carreteras y ciudades que pertenezcan al conjunto  $S$ .

### ¿Por qué?

Solo puede ocurrir que una carretera pertenezca a  $S$  si la ciudad correspondiente también pertenece a  $S$ . No puede pasar que pertenezca a  $S$  y cruce el corte al mismo tiempo dado que en el grafo dirigido se va desde carreteras a ciudades con capacidad infinita, por tanto esta nunca se agota, y todas las aristas que pertenecen al corte mínimo están agotadas.

Si el arco  $(s, \text{carretera})$  perteneciera al corte dicha carretera estuviese en el conjunto  $T$ .

Entonces, si la carretera pertenece a  $S$ , es porque no está agotada y es mayor que las que cruzan el corte, y como nos interesa maximizar lo que gastamos en carreteras, la tomamos.

Luego, si una ciudad pertenece a  $S$ , de manera análoga al primer caso explicado, la carretera correspondiente también debe pertenecer a  $S$ . Además tiene que suceder que el arco correspondiente a dicha ciudad esté agotado, de lo contrario tendríamos un camino de  $s$  a  $t$ , lo cual contradice que estamos partiendo del flujo máximo, por lo cual al escoger esta ciudad estamos tomando lo mínimo posible para agotar el presupuesto aportado por las ciudades.

Por tanto, de esta forma, se están tomando combinaciones válidas de ciudades y carreteras, minimizando el aporte de las ciudades y maximizando el costo de las carreteras.

## ii.4. Complejidad Temporal

La función principal es `CORRUPTION_STRATEGY( $n, m, a, w$ )`. La función tiene como parámetros:  $n$ , el número de ciudades,  $m$ , el número de carreteras,  $a$ , lista con el aporte de cada ciudad,  $w$ , lista con el costo de cada carretera. El pseudocódigo siguiente permite un acercamiento a la implementación realizada.

```
1: function CORRUPTION_STRATEGY( $n, m, a, w$ )
2:    $G = \text{BUILD\_GRAPH}(n, m, a, w)$ 
3:    $G_r = \text{GET\_MIN\_CUT\_RESIDUAL\_GRAPH}(G)$ 
4:    $\text{cities, roads, profit} = \text{GET\_PROJECT\_DISTRO}(G_r, G)$ 
   return  $\text{cities, roads, profit}$ 
5: end function
```

Para el trabajo con grafos por razones de comodidad se utilizó la librería `networkx` de Python. En el cálculo de la complejidad temporal no se tiene en cuenta el costo de las operaciones sobre grafos creados con la librería anterior.

En la línea 2 del método anterior, se llama a la función `BUILD_GRAPH( $n, m, a, w$ )`, la cual se encarga de construir el grafo  $G$  explicado en la sección III. La complejidad temporal de dicha función es  $O(|V| + |E|)$ , ya que por cada carretera se contruye una arista entre el nodo fuente y el

nodo que representa a dicha carretera, por cada par de ciudades que conforman una carretera, se crean dos arcos, cada una desde la carretera hasta las respectivas ciudades y también, por cada nodo que representa a una ciudad, se contruye una arista con el nodo receptor.

Una vez creado el grafo, se llama a la función `GET_MIN_CUT_RESIDUAL_GRAPH(G)`, que tiene como parámetro el grafo  $G$ . El pseudocódigo del método se muestra a continuación.

---

```

1: function GET_MIN_CUT_RESIDUAL_GRAPH( $G$ )
2:    $G_r = \text{GET\_RESIDUAL\_GRAPH}(G)$ 
3:    $s = \text{'source'}$ 
4:    $t = \text{'sink'}$ 
5:    $p = \text{FIND\_AUGMENTING\_PATH}(G_r, s, t)$ 
6:   while  $p \neq \text{None}$  do
7:      $\text{capacity\_p} = \text{RESIDUAL\_CAPACITY\_PATH}(G_r, p)$ 
8:     for  $(u, v)$  in  $p$  do
9:       try
10:         $G[u][v][\text{'flow'}] = G[u][v][\text{'flow'}] + \text{capacity\_p}$ 
11:      catch
12:         $G[v][u][\text{'flow'}] = G[v][u][\text{'flow'}] - \text{capacity\_p}$ 
13:      end try
14:       $G_r = \text{GET\_RESIDUAL\_GRAPH}(G)$ 
15:       $p = \text{FIND\_AUGMENTING\_PATH}(G_r, s, t)$ 
16:    end for
17:  end while
18:  return  $G_r$ 
19: end function
    
```

---

La función consiste en aplicar el algoritmo Ford-Fulkerson al grafo  $G$ , por tanto tiene complejidad temporal  $O(|E||f^*|)$ , donde  $f^*$  es el flujo máximo calculado por el algoritmo. Primero, se construye el grafo residual de  $G$ ,  $G_r$  (línea 2), el cual se explica en la subsección II.2, y se encuentra un camino aumentativo  $p$  en dicho grafo (línea 5). El método `GET_RESIDUAL_GRAPH(G)`, tiene una complejidad temporal  $O(|E|)$ , ya que recorre todas los arcos de  $G$  y construye  $G_r$  con los mismos nodos de  $V$ , pero con los arcos de  $E$  cuya capacidad es mayor que su flujo. La función `FIND_AUGMENTING_PATH( $G_r, s, t$ )` realiza un DFS por tanto tiene complejidad temporal  $O(|V| + |E_r|)$ , donde  $E_r$  son el conjunto de arcos del grafo residual  $G_r$ . Luego, se continua actualizando el grafo residual cada vez que se encuentra un camino aumentativo. El ciclo termina cuando no exista camino aumentativo en la red residual. Este método retorna el grafo residual resultante al hallar el flujo máximo.

Después de aplicar el algoritmo de flujo a  $G$ , se obtiene el último  $G_r$  y a este grafo se le aplica el método `GET_PROJECT_DISTRO( $G_r, G$ )` que halla el corte mínimo  $(S, T)$  y determina las ciudades, carreteras y el valor de la ganancia que es la solución del problema, a partir de los nodos que conforman la partición  $S$ . Este método tiene complejidad temporal  $O(|S|)$ .

En conclusión, la función `CORRUPTION_STRATEGY( $n, m, a, w$ )` tiene complejidad temporal,

$$\begin{aligned}
 O(|V| + |E| + |E||f^*| + |S|) &= \max\{|V|, |E|, |E||f^*|, |S|\} \\
 &= O(|E||f^*|)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

ya que  $|V| < |E|$ , por la forma en que está construido  $G$  y  $|S| < |V|$ , debido a que al menos el nodo receptor  $t$  no pertenece a  $S$ .

## ii.5. Complejidad Espacial

La complejidad espacial de nuestra implementación es  $O(2n + 4m)$ . El algoritmo utiliza como entrada una lista de tamaño  $n$  y otra de tamaño  $m$  como se explicó en la definición del problema. Además, se crea un grafo dirigido con la librería `networkx` de Python que tiene  $2 + m + n$  vértices y  $n + 3m$  aristas, cuyo costo asumimos no es mayor que  $O(2n + 4m)$ .

## V. GENERADOR DE CASOS DE PRUEBA

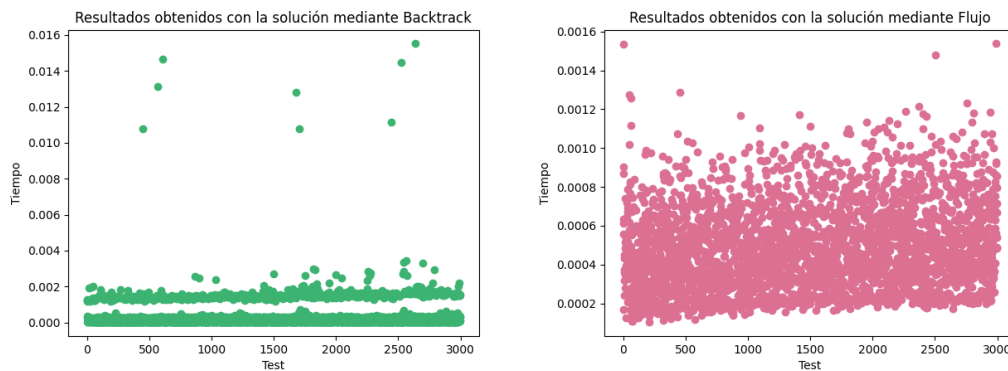
En `src/app/generator.py` fue implementado un generador, el cual recibe una cantidad  $s$  de muestras a producir, genera valores random con el formato de entrada de los algoritmos implementados, halla la solución óptima con `backtrack` y las guarda en `json/test_cases.json`. Se generaron 3000 casos de prueba.

## VI. TESTER

En `src/app/tester.py` fue implementado un tester, que recibe una función y prueba el desempeño de la misma en cuanto a si obtuvo la solución óptima o no, y el tiempo que demoró en hacerlo, comparando con los casos de prueba obtenidos con el generador. Además, estos resultados se guardan en un `.json` con el nombre de la función en la carpeta `tests`. La solución implementada fue testeada para todos los casos de prueba generados y puede encontrarse en `json/tests/corruption_strategy_solution.json`.

## VII. COMPARACIÓN DE SOLUCIONES IMPLEMENTADAS

A continuación se muestra una gráfica por cada algoritmo con el tiempo que demoró en cada uno de los 3000 tests. Como podemos observar, en los casos analizados, el `backtrack` puede demorar desde 0.000 hasta 0.016 segundos en ejecutarse, pero la mayoría de los casos oscilan entre 0.000 y 0.002. La *solución con flujo* para todos los casos se demora menos de 0.0016 segundos, lo cual lo convierte en una solución significativamente mejor que el `backtrack`.



## REFERENCIAS

- [1] Cormen, Thomas H. y otros. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press. 4ta Edición. Cambridge, Massachusetts. 2022.