Diseño y Análisis de Algoritmos

Proyecto # 2: Tito el corrupto

Laura Victoria Riera Pérez
Marié del Valle Reyes

Cuarto año. Ciencias de la Computación.
Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana, Cuba

23 de mayo de 2023

I. Repositorio del proyecto

https://github.com/computer-science-crows/algorithms-design-and-analysis

II. Definición inicial del problema

Tito se dió cuenta de que la carrera de computación estaba acabando con él y un día decidió darle un cambio radical a su vida. Comenzó a estudiar Ingeniería Industrial. Luego de unos años de fiesta, logró finalmente conseguir su título de ingeniero. Luego de otros tantos años ejerciendo sus estudios, consiguió ponerse a la cabeza de un gran proyecto de construcción de carreteras.

La zona en la que debe trabajar tiene n ciudades con m posibles carreteras a construir entre ellas. Cada ciudad que sea incluida en el proyecto aportará a_i dólares al proyecto, mientras que cada carretera tiene un costo de w_i dólares. Si una carretera se incluye en el proyecto, las ciudades unidas por esta también deben incluirse.

El problema está en que Tito quiere utilizar una de las habilidades que aprendió en sus años de estudio, la de la malversación de fondos. Todo el dinero necesario para el proyecto que no sea un aporte de alguna ciudad, lo proveerá el país y pasará por manos de Tito. El dinero aportado por las ciudades no pasará por sus manos. Tito quiere maximizar la cantidad de dinero que pasa por él, para poder hacer su magia. Ayude a Tito a seleccionar el conjunto de carreteras a incluir en el proyecto para lograr su objetivo.

III. Definición en términos matemático - computacionales

La entrada de nuestro problema es la cantidad de ciudades n, la cantidad de carreteras m, una lista a con el dinero aportado por cada ciudad y una lista w con cada carretera y su costo. El objetivo es maximizar la diferencia de la suma de los costos de construir las carreteras seleccionadas y la suma del aporte de cada una de las ciudades que intervienen en esas carreteras. La salida del problema es la distribución del proyecto como dos listas, una que contiene las ciudades y otra las carreteras a construir tal que se obtenga la ganancia máxima.

I. Problema "Proyectos e Intrumentos"

Uno de los problemas de flujo más conocidos es el de "Proyectos e Instrumentos". En este, se tienen un conjunto de proyectos que podemos hacer, cada uno con su costo, y un conjunto de instrumentos, cada uno con algún costo también. Cada proyecto depende de algunos instrumentos, y cada instrumento se puede utilizar cualquier número de veces. Se debe elegir un subconjunto de proyectos y un subconjunto de instrumentos tal que, si se elige un proyecto, también se elijan todos los instrumentos de los que depende este proyecto, y maximizar la diferencia entre la suma de los costos de los proyectos elegidos y la suma de los costes de los instrumentos elegidos.

Como puede observarse, este es precisamente el problema que nos ocupa, siendo los proyectos, las carreteras y los intrumentos, las ciudades. Este se puede modelar mediante una red de flujo contruyendo un grafo dirigido $G = (V, E)$ como el que se describe a continuación:

- El conjunto V está formado por $n + m + 2$ vértices que representan cada ciudad y cada carretera, además de un vértice s que representa la fuente y un vértice t que representa el receptor.
- El conjunto E está formado por $n + 3 \cdot m$ arcos, distribuidos de la siguiente forma:
  - Arcos desde s hasta cada vértice que representa una carretera con capacidad igual al valor w_i dado de entrada, que representa el costo de construir la carretera i.
  - Arcos desde cada vértice que representa una ciudad hacia el vértice t con capacidad igual al valor a_i que representa el aporte de la ciudad i al ser incluida en el proyecto.
  - Arcos desde cada vértice que representa una carretera hacia cada vértice ciudad que la conforma (extremos) con capacidad igual a ∞.

IV. Soluciones implementadas

I. Backtrack

Como primera solución al problema fue implementado un *backtrack*. Esta es una solución correcta, ya que prueba todas las combinaciones de posibles carreteras y se queda con la que más ganancia aporte, pero muy ineficiente $O(2^m)$. En una computadora de 32GB de RAM, intel core i7-11na generación, se puede resolver para una cantidad máxima 5 ciudades con 5 aristas. Dicha solución puede ser encontrada en src/solutions/backtrack_solution.py.

II. Solución utilizando flujo

ii.1. Propuesta de solución

Se aplica un algoritmo de flujo sobre G y se toma el corte mínimo (S, T), la respuesta estará conformada por todas las carreteras y ciudades que pertenezcan al conjunto S.

¿Por qué?

Solo puede ocurrir que una carretera pertenezca a S si la ciudad correspondiente tambien pertenece a S. No puede pasar que pertenezaca a S y cruce el corte al mismo tiempo dado que en el grafo dirigido se va desde carreteras a ciudades con capacidad infinita, por tanto esta nunca se agota, y todas las aristas que pertenecen al corte mínimo están agotadas.

Si la arista (s, carretera) estuviese pertenciera al corte dicha carretera estuviese en el conjunto T.

Entonces, si la carretera pertenece a S, es porque no está agotada y es mayor que las que cruzan el corte, y como nos interesa maximizar lo que gastamos en carreteras, la tomamos.

Luego, si una ciudad pertence a S, de manera análoga al primer caso explicado, la carretera correspondiente también debe pertenecer a S. Además tiene que suceder que el arco correspondiente a dicha ciudad esté agotado, de lo contrario tendríamos un camino de s a t, lo cual contradice que estamos partiendo del flujo máximo, por tanto al escoger esta ciudad estamos tomando lo mínimo posible para agotar el presupuesto aportado por las ciudades.

Por tanto, de esta forma, se están tomando combinaciones válidas de ciudades y carreteras, minimizando el aporte de las ciudades y maximizando el costo de las carreteras.

ii.2. Complejidad Temporal

La función principal es CORRUPTION_STRATEGY(n, m, a, w). La función tiene como parámetros: n, el número de ciudades, m, el número de carreteras, a, lista con el aporte de cada ciudad, w, lista con el costo de cada carretera. El pseudocódigo siguiente permite un acercamiento a la implementación realizada.

1: **function** CORRUPTION_STRATEGY((n, m, a, w))
2: G = BUILD_GRAPH(n, m, a, w)
3: G_r = GET_MIN_CUT_RESIDUAL_GRAPH(G)
4: *cities*, *roads*, *profit* = GET_PROJECT_DISTRO(G_r, G)
return *cities*, *roads*, *profit*
5: **end function**

Para el trabajo con grafos por razones de comodidad se utilizó la librería networkx de Python. En el cálculo de la complejidad temporal no se tiene en cuenta el costo de las operaciones sobre grafos creados con la librería anterior.

En la línea 2 del método anterior, se llama a la función BUILD_GRAPH(n, m, a, w), la cual se encarga de construir el grafo G explicado en la sección III. La complejidad temporal de dicha función es $O(|V| + |E|)$, ya que por cada carretera se contruye una arista entre el nodo fuente y el nodo que representa a dicha carretera, por cada par de ciudades que conforman una carretera, se crean dos arcos, cada una desde la carretera hasta las respectivas ciudades y también, por cada nodo que representa a una ciudad, se contruye una arista con el nodo receptor.

Una vez creado el grafo, se llama a la función GET_MIN_CUT_RESIDUAL_GRAPH(G), que tiene como parámetro el grafo G. El pseudocódigo del método se muestra a continuación.

La función consiste en aplicar el algortimo Ford-Fulkerson al grafo G, por tanto tiene complejidad temporal $O(|E||f*|)$, donde $f*$ es el flujo máximo calculado por el algoritmo. Primero, se construye el grafo residual de G, G_r (línea 2), el cual se explica en la subsección **??**, y se encuentra un camino aumentativo p en dicho grafo (línea 5). El método GET_RESIDUAL_GRAPH(G), tiene una complejidad temporal $O(|\mathrm{E}|)$, ya que recorre todas los arcos de G y construye G_r con los mismos nodos de V, pero con los arcos de E cuya capacidad es mayor que su flujo. La función FIND_AUGMENTING_PATH(G_r, s, t) realiza un DFS por tanto tiene complejida temporal $O(|V| + |E_r|)$, donde E_r son el conjunto de arcos del grafo residual G_r. Luego, se continua actualizando el grafo residual cada vez que se encuentra un camino aumentativo. El ciclo termina cuando no exista

```
1: function GET_MIN_CUT_RESIDUAL_GRAPH(G)
2:     G_r = GET_RESIDUAL_GRAPH(G)
3:     s = 'source'
4:     t = 'sink'
5:     p = FIND_AUGMENTING_PATH(G_r, s, t)
6:     while p != None do
7:         capacity_p = RESIDUAL_CAPACITY_PATH(G_r, p)
8:         for (u, v) in p do
9:             try
10:                G[u][v]['flow'] = G[u][v]['flow'] + capacity_p
11:            catch
12:                G[v][u]['flow'] = G[v][u]['flow'] - capacity_p
13:            end try
14:            G_r = GET_RESIDUAL_GRAPH(G)
15:            p = FIND_AUGMENTING_PATH(G_r, s, t)
16:        end for
17:    end while
       return G_r
18: end function
```

camino aumentativo en la red residual. Este método retorna el grafo residual resultante al hallar el flujo máximo.

Después de aplicar el algoritmo de flujo a G, se obtiene el último G_r y a este grafo se le aplica el método GET_PROJECT_DISTRO(G_r, G) que halla el corte mínimo (S, T) y determina las ciudades, carreteras y el valor de la ganancia que es la solución del problema, a partir de los nodos que conforman la partición S. Este método tiene complejidad temporal $O(|S|)$.

En conclusión, la función CORRUPTION_STRATEGY(n, m, a, w) tiene complejidad temporal,

$$\begin{aligned} O(|V| + |E| + |E||f*| + |S|) &= \text{máx}\{|V|, |E|, |E||f*|, |S|\} \\ &= O(|E||f*|) \end{aligned} \tag{1}$$

ya que $|V| < |E|$, por la forma en que está construído G y $|S| < |V|$, debido a que al menos el nodo receptor t no pertenece a S.

ii.3. Complejidad Espacial

La complejidad espacial de nuestra implementación es $O(2n + 4m)$. El algoritmo utiliza como entrada una lista de tamaño n y otra de tamaño m como se explicó en la definición del problema. Además, se crea un grafo dirigido con la librería networkx de Python que tiene $2 + m + n$ vértices y $n + 3m$ aristas, cuyo costo asumimos no es mayor que $O(2n + 4m)$.

V. Generador de casos de prueba

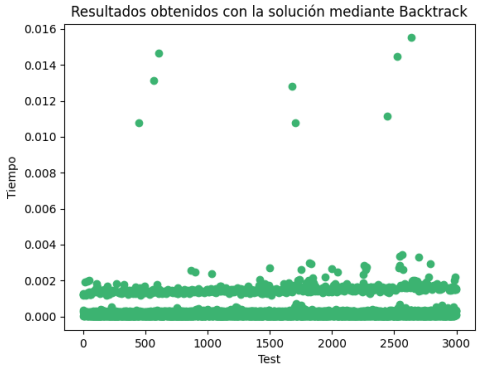
En *src/app/generator.py* fue implementado un generador, el cual recibe una cantidad s de muestras a producir, genera valores random con el formato de entrada de los algoritmos implementados, halla la solución óptima con *backtrack* y las guarda en *json/test_cases.json*. Se generaron 3000 casos de prueba.

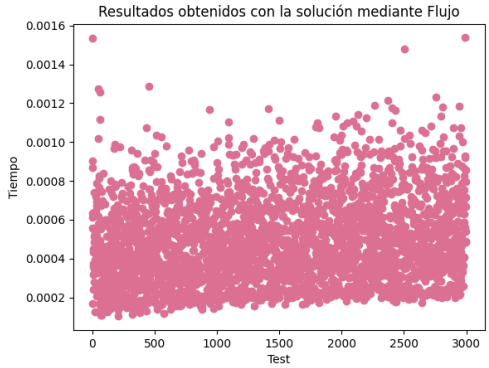
VI. Tester

En *src/app/tester.py* fue implementado un tester, que recibe una función y prueba el desempeño de la misma en cuanto a si obtuvo la solución óptima o no, y el tiempo que demoró en hacerlo, comparando con los casos de prueba obtenidos con el generador. Además, estos resultados se guardan en un *.json* con el nombre de la función en la carpeta tests. La solución implementada fue testeada para todos los casos de prueba generados y puede encontrarse en *json/tests/corruption_strategy_solution.json* .

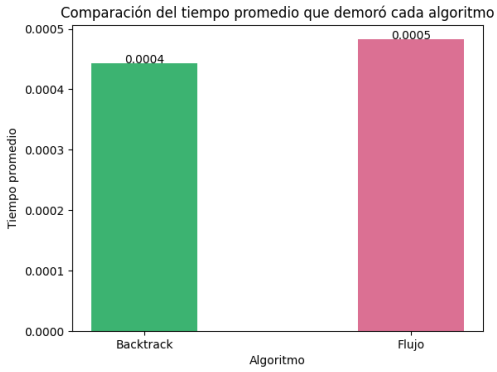
VII. Comparación de soluciones implementadas

A continuación se muestra una gráfica por cada algoritmo con el tiempo que demoró en cada uno de los 3000 tests. Como podemos observar, en los casos analizados, el *backtrack* puede demorar desde 0.000 hasta 0.016 segundos en ejecutarse, pero la mayoría de los casos oscilan entre 0.000 y 0.002. La *solución con flujo* para todos los casos se demora menos de 0.0016 segundos, lo cual lo convierte en una solución significativamente mejor que el backtrack.

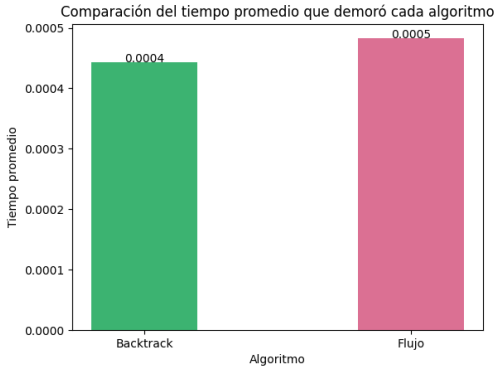




Además, en la siguiente gráfica se ofrece una comparación del tiempo promedio que le toma a cada algoritmo ejecutar los casos de prueba.



chequear gráficas



Referencias

[1] Cormen, Thomas H. y otros. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press. 4ta Edición. Cambridge, Massachusetts. 2022.