$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E_0$$ → Cualquier sistema en una dimensión donde $F=F(x)$

Resolvamos:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + V(x) = E_0$$

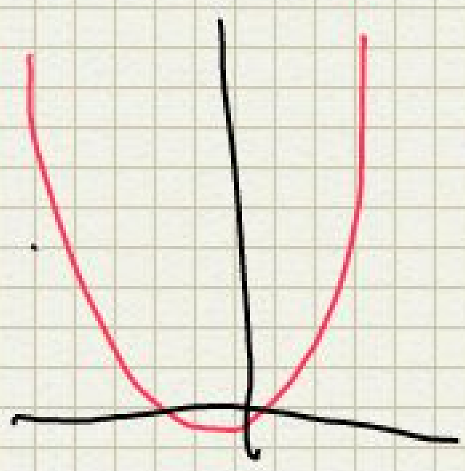
Separar x, t:

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\left[E_0 - V(x)\right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - V(x)\right]}$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - V(x)\right]}} = \int_{t_0}^{t} dt$$

Depende de V si se puede hacer la integral

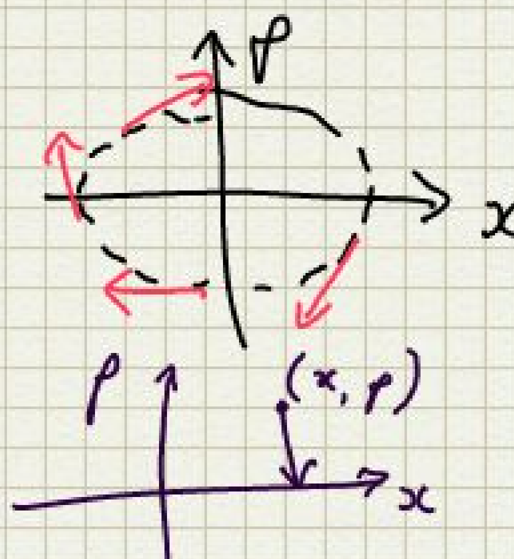


eg. osc. arm.: $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Da algo de la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{k - x^2}} \overset{x=k\sin\theta}{=} \ ? \quad \text{Ej.}$$

Otra manera de sacar las elipses para osc. arm.



Campo vectorial:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x\end{pmatrix} =$$

$p = mv$

$$\therefore \begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ -m\omega^2 x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dp/dt\end{pmatrix}$$

Ec. dif. para curvas en esp. fase (ya no hay tiempo):

$$\therefore \frac{dp/dt}{dx/dt} = \boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{-m^2\omega^2 x}{p}}$$

3.2 – Más dimensiones:

centro de fuerza

$$m\ddot{x} = -k_1 x$$
$$m\ddot{y} = -k_2 y$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Si M arbitraria: no desacoplan,
Ej.: Cómo desacoplar

En 2D: $m\ddot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}) = -\underline{\underline{M}} \cdot \underline{x}$

$$(= -k\underline{x})$$

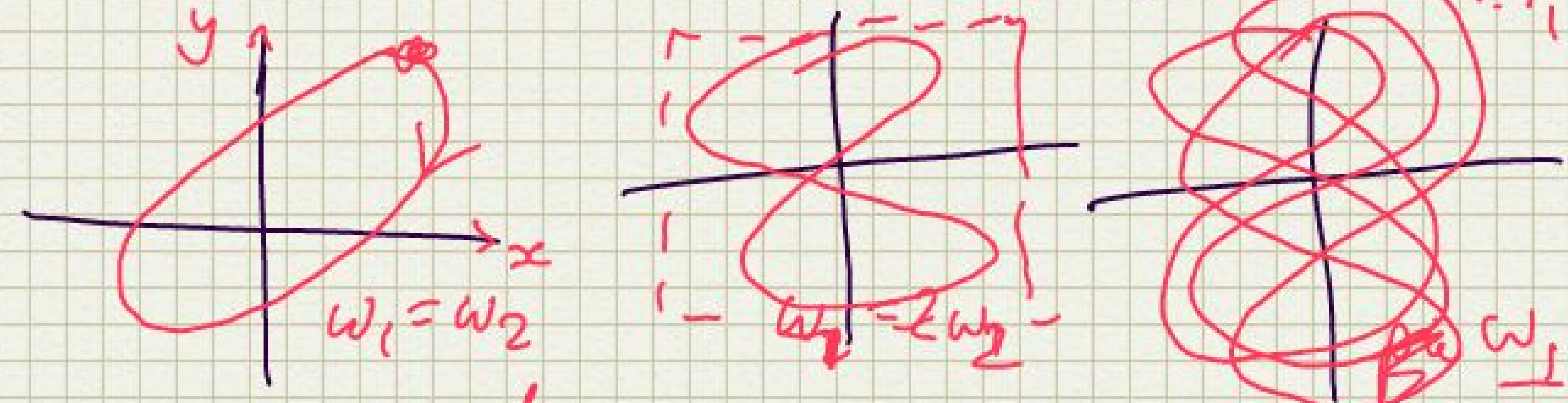
periodo (tiempo para que se repita):

2 ec^n's desacopladas ⇒ resolvemos por separado

$$x(t) = A\cos(\omega_1 t - \alpha) \qquad \omega_1^2 = k_1/m$$
$$y(t) = B\cos(\omega_2 t - \beta) \qquad \omega_2^2 = k_2/m$$

$\omega_1 T_1 = 2\pi$

$\therefore T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$



$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$

Curvas de Lissajous ← nunca se cierra

Mov. armónico no simple
(más de una frec.)

3.3 - Para qué sirve Hooke: $F(x) = -kx$ (ley de Hooke) → experimental

$\downarrow$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

osc. arm.

- masa-resorte
- circuitos
- péndulo sin fricción y con ángulos pequeños

En todos, fuerzas restitutivas ;

Un sistema general con fuerza restitutiva:

fuerza se opone: $F(x)$ t.q.

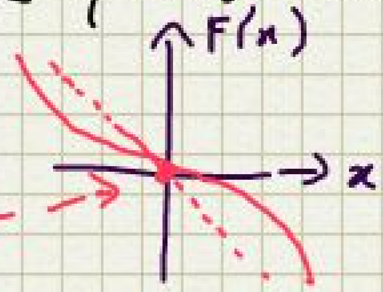
$$\mathrm{sgn}[F(x)] = -\mathrm{sgn}[x]$$

$$x > 0 \Rightarrow F(x) < 0$$

$$x < 0 \Rightarrow F(x) > 0$$

$x = 0 \Rightarrow F(x) = 0$ — $x = 0$: punto de equilibrio (si está ahí, se queda ahí)

Si tenemos una fuerza restitutiva F_r en 1D:



$$m\ddot{x} = F_r(x)$$

pendiente

Si desplazamiento x (desde equil.) es pequeño:

Taylor alrededor de $x = 0$: → F suf. suave (diferenciable)

$$F_r(x) = \underbrace{F(0)}_{\substack{0 \\ \text{pt de equil}}} + x \cdot \underbrace{F'(0)}_{<0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2 F''(0) + O(x^3)}_{?}$$

$F'(0) < 0 \to -\alpha, \ \alpha > 0$

$\therefore \ m\ddot{x} = F_r(x) \simeq -\alpha x$ — ¡ley de Hooke!

$\therefore$ para cualquier sistema, cerca de su punto de equil., (si F es suave), tenemos algo Hookeano (aprox.)

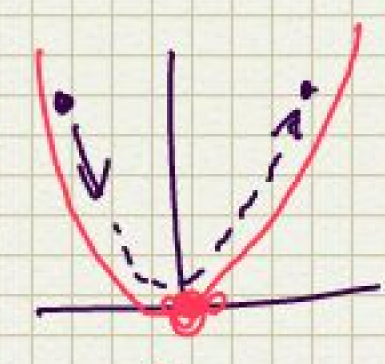
o sea para oscilaciones pequeñas

Otro punto de vista (sistemas en 1D):

En 1D, siempre existe un potencial:

$$V(x) = -\int_0^x F(x')\,dx'$$

Ej.: $F(x) = -kx$: $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ →

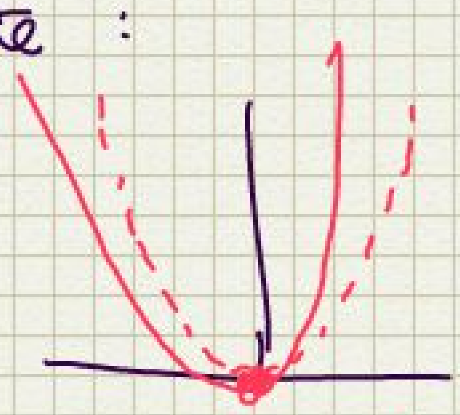


$p^{\top}$ de equil

Si F es más general pero restitutiva:

Físicamente:

$V(x)$:



↑ pt. de equil. → x_0: $F(x_0) = 0$ (si está ahí, se queda ahí) → con $v = 0$

x_0 es equil. si $F(x_0) = 0$, o, equivalentemente, V tiene mínimo en x_0

Expandamos V alrededor de x_0:

$$\underset{\uparrow\ \text{cerca de } x_0}{V(x)} = \underbrace{V(x_0)}_{V_0} + \underbrace{(x-x_0)}_{\delta x_0}\cdot\underbrace{V'(x_0)}_{\substack{0\\ \text{mín}}} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\cdot\underbrace{V''(x_0)}_{>0\ \to\ +\alpha} + O\left((x-x_0)^3\right)$$

$$\therefore V(x) = V_0 + \frac{1}{2}\delta x^2\cdot\alpha + \underbrace{\frac{1}{6}\delta x^3\cdot V'''(x_0)}_{\text{corrección}}$$

Si potencial simétrico: $V(x) = V(-x)$ ∴ no hay términos con potencia impar en la expansión ∴ $F(x) = -\alpha x + O(x^3)$

Puedo olvidarme de $O(\delta x^3)$ si

$$\left|\frac{1}{6}(\delta x)^3 V'''(x_0)\right| \ll \left|\frac{1}{2}(\delta x)^2\cdot\alpha\right|$$

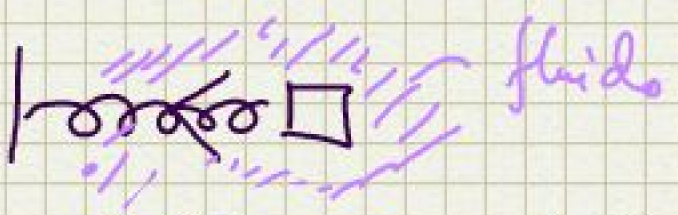
o sea $|\delta x| \ll \dfrac{3\alpha}{V'''(x_0)}$

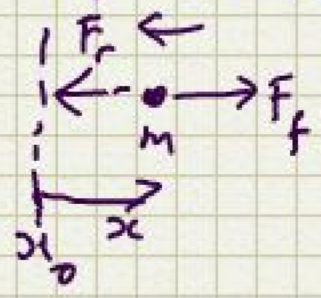
$$\therefore F(x) = -\frac{dV}{dx} = -\alpha\cdot\delta x$$ (cerca del $p^{\top}$ de equil.)

3.4 - Osciladores amortiguados (con fricción):

Sist. físico: péndulo con fricción (aire / pivote)

- masa-resorte en un fluido:





Ec^n de Newton:

$$m\ddot{x} = F_{total}(x) = F_r(x) + F_f$$

Modelos:

$F_r(x) = -kx$ (Hooke)

$F_f(x) = -\beta\dot{x}$ (fricción lineal)

$k, \beta > 0$

$$\therefore m\ddot{x} = -kx - \beta\dot{x}$$

$$\therefore \ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$ EDO, 2°, lin., hom.

$$b := \frac{\beta}{2m} \; ; \; \omega_0^2 := \frac{k}{m}$$

$$\therefore \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$ — osc. arm. amortiguado

Resolver

Intentar $x(t) = Ae^{\lambda t} \therefore \dot{x} = \lambda x \; ; \; \ddot{x} = \lambda^2 x$

$$\therefore \lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2 = 0$$ — ec^n característica

$$\therefore \lambda_\pm = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

$b, \omega_0 > 0$

Comportamiento depende del discriminante $b^2 - \omega_0^2$:

(i) $b^2 - \omega_0^2 < 0$: $\omega_1^2 := \omega_0^2 - b^2 > 0$

$\lambda_\pm = -b \pm i\omega_1 \qquad (\sqrt{-\omega_1^2} = i\omega_1)$

Soluciones $e^{\lambda t} = e^{(-b \pm i\omega_1)t} = A e^{-bt} \cdot \cos\omega_1 t + B e^{-bt} \cdot \sin\omega_1 t$

$\cos(-\omega_1 t)$

$b > 0 \therefore e^{-bt}$ amortigua

Oscilaciones con frec. const. $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ y amplitud que decrece exp.

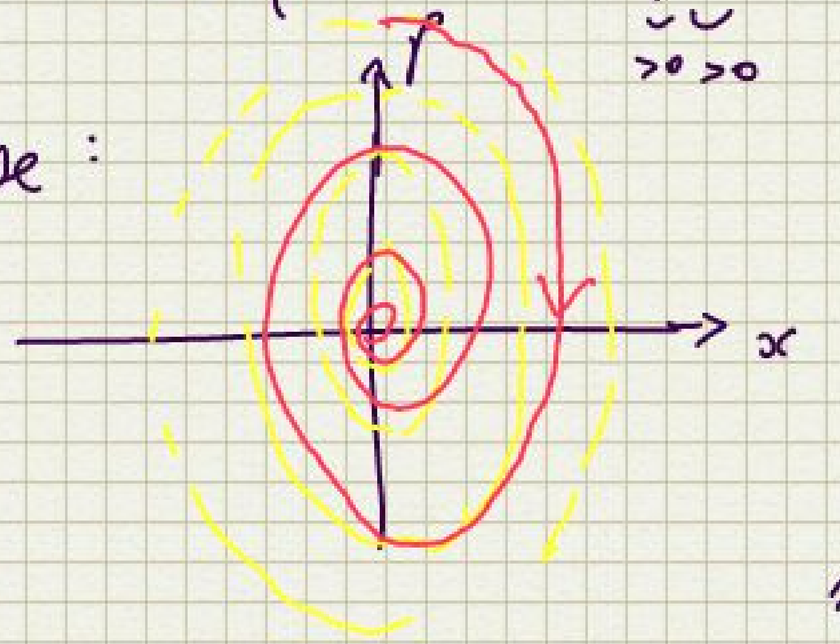
Disipa:

Energía $E = K + V$

$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ — la misma fórmula

$$\frac{d}{dt} E = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x}$$
$$= \dot{x} (m \ddot{x} + k x)$$
$$= \dot{x}(-\beta \dot{x}) = -\underbrace{\beta}_{>0} \underbrace{\dot{x}^2}_{>0} < 0, \text{ ya que } \beta > 0$$

Esp. fase:



— sin amort

— con amort: espiral para adentro, llega al origen (punto de equil.)

"sub-amortiguado"

(ii) $b^2 - \omega_0^2 > 0$:

$$\lambda_\pm = -b \pm \sqrt{\underbrace{b^2 - \omega_0^2}_{>0,\ < b^2}}$$

$\therefore \lambda_+ < 0$

$\lambda_- \ll 0$

"sobre ~~super~~-amortiguado"

$\therefore$ sol^n general

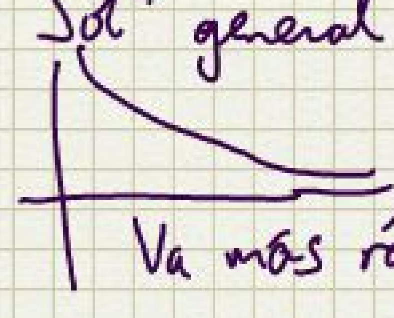
$$x(t) = A e^{\lambda_+ \cdot t} + B e^{\lambda_- \cdot t}$$

$\xrightarrow{t \to \infty} 0$, $\sim A e^{\lambda_+ t}$ (término dominante cuando $t \to \infty$)

(iii) $b^2 - \omega_0^2 = 0$ — amortiguamiento crítico:

$$\lambda_\pm = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2} = -b \quad (2 \text{ raíces iguales})$$

Sol^n general: $x(t) = (A + Bt) e^{-bt}$, $\exp(\underline{\underline{M}} t)$, $\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Va más rápido a 0

e-vals: $\det(\underline{\underline{M}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \therefore (1-\lambda)^2 = 0$

$\therefore \lambda = 1, 1$

Reconocer la física en una ec^n: 4/Sep/2013

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

$\ddot{x}$ → ac^n de NII

$\omega^2 x$ → $F(x)$ restitutiva porque >0 (de este lado)

→ oscilador

$2b\dot{x}$ → fricción (porque coef. $b > 0$)

— - - — —

Caso sub-amortiguado: 2 frecuencias

ω_0 = frec. natural de oscilaciones libres (sólo con fuerza restitutiva)

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} < \omega_0 \qquad (b < \omega_0)$$

∴ frec. de osc. amortiguadas es menor   ↑ fricción chica

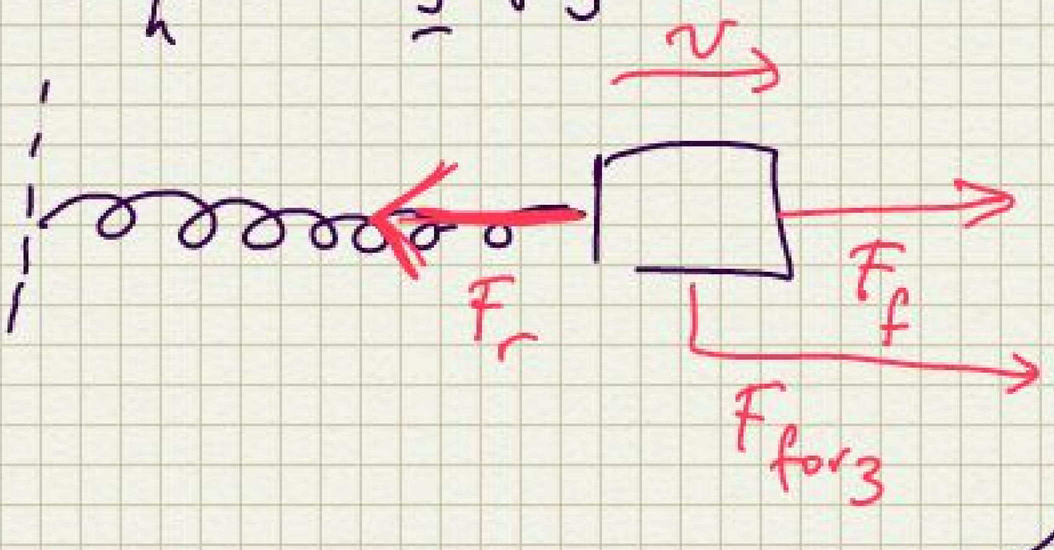
— - —

3.4 — Oscilaciones forzadas   Jean Perrin 1908

Amortiguar ≡ quitar energía

forzar ≡ poner energía

Osc. lineal amort. y forzado:



NII: $m\ddot{x} = F_{total} = F_r + F_f + F_{forz}$

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{\tilde{F}_{forz}(t)}{m}$$

$$F_{forz}(t) := \frac{\tilde{F}_{forz}(t)}{m}$$

EDO, lin., 2° orden, no-hom.

$$\text{Sol}^n \text{ general}: \quad x(t) = \overset{\text{hom.}}{x_h(t)} + \overset{\text{particular}}{x_p(t)}$$

Ya conocemos $x_h(t) = Ae^{-bt}\cos\omega_1 t + Be^{-bt}\sin\omega_1 t$

(caso sub-amort)

la solⁿ de la parte homogénea $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Homogénea: Si tengo solución $x_h(t)$

entonces $\alpha x_h(t)$ también es solⁿ, $\alpha \in \mathbb{R}$

$y(t) := \alpha x_h(t)$:

$\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$ si ecⁿ es hom.

Si $\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$

Si $y(t) := \alpha x(t)$

entonces $\ddot{y} + 2b\dot{y} + \omega_0^2 y = \alpha F(t)$ (no satisface la misma ecⁿ)

no-hom

Manera de solución:

$x_h(t) + x_p(t)$ ← alguna solución particular de la ecⁿ no-hom

cualquier

↑ solⁿ general de la parte hom.

¿Cómo encontrar $x_p(t)$? Una solⁿ de la ecⁿ non-hom?

Para cualquier $F(t)$, hay solⁿ – fⁿs de Green

Veamos $F(t)$ sencillos para empezar.

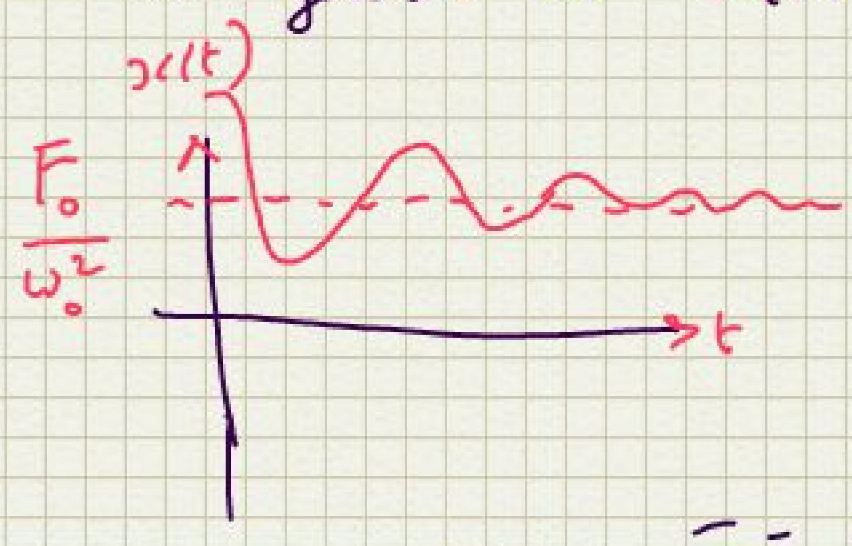
(i) $F(t)$ = const.

$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0$, const.

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Probemos $x_p(t) = C$ $\therefore$ $\underbrace{0}_{\ddot{x}_p} + \underbrace{0}_{\dot{x}_p} + \omega_0^2 C = F_0$ $\therefore C = \dfrac{F_0}{\omega_0^2}$

$\therefore$ Sol^n general es $x(t) = x_h(t) + \frac{F_0}{\omega_0^2}$



Ejemplo físico:
Resorte bajo gravedad

(ii). $F(t) = F_0 \cos \omega t$

(0.5) Oscila con frec. ¿quién sabe

$\ast$ Encontrar $x_p(t)$ que satisface $\ddot{x}_p + 2b\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = F_0 \cos \omega t$

Adivinar $x_p(t) = Ae^{\lambda t} \xrightarrow{\text{sust.}}$

$$(\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2) \cdot Ae^{\lambda t} = \underset{\uparrow \text{real}}{F_0} e^{i\omega t} \quad \forall t$$

$$\therefore \lambda = i\omega$$

$$A = \frac{F_0}{\lambda^2 + 2b\lambda + \omega_0^2} = \frac{F_0}{-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2}$$

$A \in \mathbb{C} \therefore A = a \cdot e^{i\delta}, \quad a, \delta \in \mathbb{R}$

$$\therefore ae^{i\delta}(-\omega^2 + 2bi\omega + \omega_0^2) = F_0$$

$$\therefore (a\cos\delta + ia\sin\delta)(\omega_0^2 - \omega^2 + 2bi\omega) = F_0 \cdot (\ast)$$

parte real $\longrightarrow$ $\therefore (a\cos\delta)(\omega_0^2 - \omega^2) - 2ab\sin\delta \cdot \omega = F_0 \quad \cdots (1)$

parte imag de $(\ast)$ $\longrightarrow$ $(a\sin\delta)(\omega_0^2 - \omega^2) + 2ab\cos\delta \cdot \omega = 0 \quad \cdots (2)$

Dividir (2) entre $\cos\delta$:

$$\cancel{\tan\delta} = \delta = \tan^{-1}\left(\frac{2\omega b}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

y $a = \frac{F_0}{\sqrt{}}$

Sale $a = \dfrac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}}$ [cf. soprano con copa de vino]

$\therefore x_p(t) = \dfrac{F_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4b^2\omega^2}} \cdot \cos(\omega t-\delta)$

— la respuesta a forz. armónico asintótica (ya que $x_h(t)\to 0$)

esta respuesta depende del ω_0 de oscilaciones libres y de la fricción b

¿Cuándo oscila más? Cuando denom. es más chiquito es decir cuando $\omega=\omega_0$ y entonces $a = \dfrac{F_0}{2b\omega_0}$. Si b muy chiquita $b\omega_0 \ll F_0$ entonces a es enorme

resonancia

Para encontrar ω_{forz} para la cual respuesta es máxima:

$\left.\dfrac{da}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_R} = 0$. Resulta (ej.): $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2b^2}$

amplitud de respuesta (osc. con frec $\omega=\omega_{forz}$)