3.5 – Respuesta a forzamiento periódico arbitrario

$F_{forz}(t) = F_{forz}(t+T)$ $\quad T :=$ periodo

Serie de Fourier: $F_{forz}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right]$

iguales

cualquier función periódica

con $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (así escogimos ω)

Por "principio de superposición":

Supong. que tenemos $\mathcal{L}x_1 = F_1(t)$, $\mathcal{L}x_2 = F_2(t)$ donde $\cancel{\mathcal{L}[x(t)]} = \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega_0^2 x$

mala notación

$\mathcal{L}x =$

$(\mathcal{L}x)(t) = \ddot{x}(t) + 2b\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)$

operador lineal

Entonces

$$\mathcal{L}x_1 + \mathcal{L}x_2 \overset{\mathcal{L}\text{ es lineal}}{=} \mathcal{L}[x_1 + x_2]$$

$$\| \quad F_1 + F_2$$

$\therefore x_1 + x_2$ es la respuesta a $F_1 + F_2$ (porque la ecⁿ es lineal)

$\mathcal{L}[\alpha x] = \alpha\mathcal{L}(x) = \alpha F$

$\therefore$ la respuesta a la serie de Fourier (cualquier forzamiento periódico)

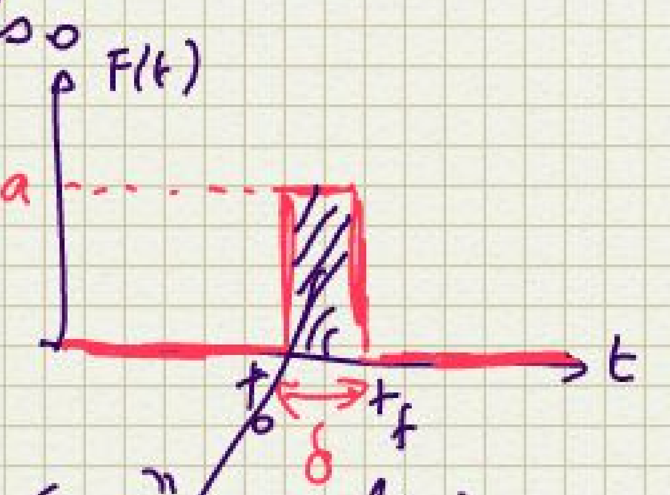
es $\frac{a_0}{\omega_0^2} + \sum a_n \cdot$ (la respuesta a $\cos n\omega t$)

$+$ lo mismo con b_n

"La respuesta a una suma de cosas es la suma de las respuestas de cada cosa por su lado"

3.6 – Respuesta a un impulso

Un impulso: Una f^n



duración ↓

Impulso: ~~Una~~ Fuerza "instantánea" : límite cuando $\delta \to 0$

y $a \to \infty$
$\uparrow$ altura

$$\text{NII}: \frac{dp}{dt} = F(t) \quad \therefore \quad \Delta p = \int_{t_0}^{t_f} F(t)\, dt$$ = Cambio de momento lineal debido a la fuerza

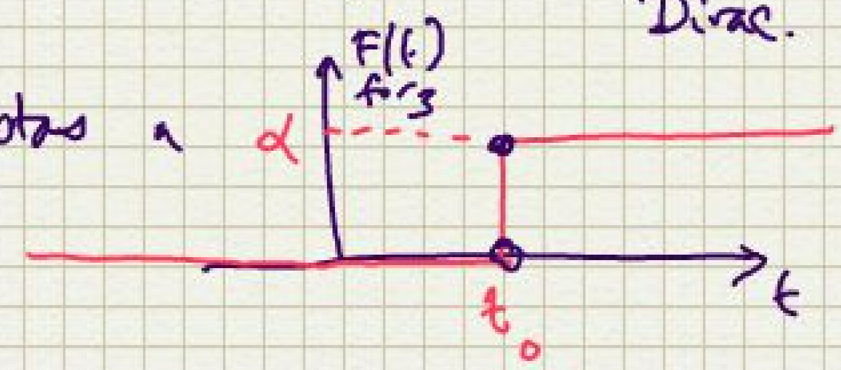
= área debajo de la curva

Para tener un efecto cuando tomamos $\delta \to 0$, necesitamos área $= a.\delta$ constante $= \alpha$

$$\therefore \; a.\delta = \alpha \quad \therefore \; a(\delta) = \frac{\alpha}{\delta} \to \infty$$

El objeto límite (¡que no existe!) es la delta de Dirac.

Dividamos el problema en 2 respuestas a



$$F_{forz}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < t_0 \\ \alpha, & \text{si } t \geq t_0 \end{cases}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ f^n \text{ de Heaviside / escalón}}}{\alpha . H(t-t_0)} \quad \left(:= \alpha H_{t_0}(t) \right)$$

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Respuesta a fuerza $\alpha H(t-t_0)$:

Cuando $t < t_0$, $x(t) = 0$ ("oscilador murió hace ∞ tiempo")

$t > t_0$: Fuerza const. α $\therefore$ $x_p(t) = \dfrac{\alpha}{\omega_0^2}$

Sol^n para $t > t_0$:

Cond. inic. para $t > t_0$:

Osc. está en reposo en $t = t_0^-$

$\therefore \; x(t_0) = 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0$

En t_0, $x(t)$ es continua

$\dot{x}(t)$ es continua

Para $t > t_0$: sol^n

$$x(t) = e^{-b(t-t_0)}\left\{A\cos[\omega_1(t-t_0)] + B\sin\omega_1(t-t_0)]\right\} + \frac{\alpha}{\omega_0^2}$$

$$x(t_0) = 0 \Rightarrow 0 = 1\{A \cdot 1 + B \cdot 0\} + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \quad \therefore A = -\frac{\alpha}{\omega_0^2}$$

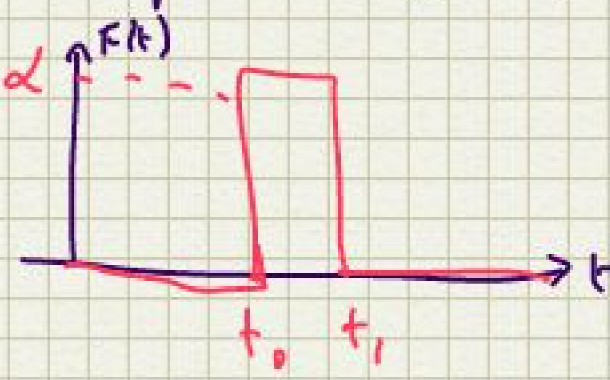
$$\dot{x}(t_0) = 0 \Rightarrow 0 = -b[A \cdot 1 + B \cdot 0] + 1\,\omega_1[A \cdot 0 + B]$$

$$\therefore \omega_1 B = bA \quad \therefore B = \frac{b}{\omega_1}A = -\frac{b\alpha}{\omega_1\omega_0^2}$$

$$\therefore x(t) = \frac{\alpha}{\omega_0^2} \cdot H(t-t_0)\left[1 - e^{-b(t-t_0)}\cos\omega_1(t-t_0) - \frac{b}{\omega_1}e^{-b(t-t_0)}\sin\omega_1(t-t_0)\right]$$

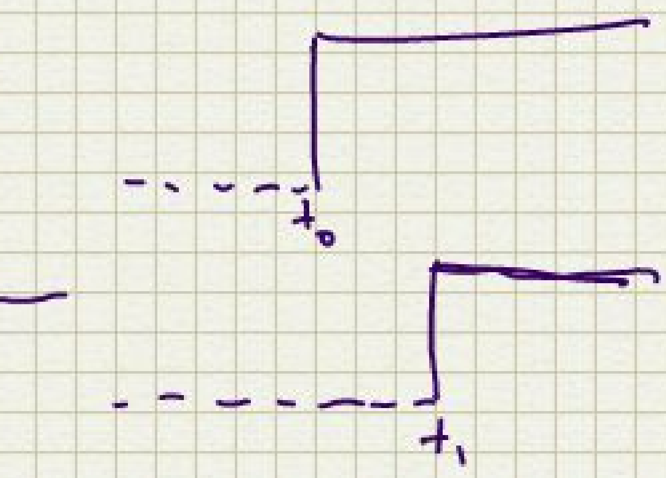
— la respuesta a $\alpha H(t-t_0)$

La respuesta a

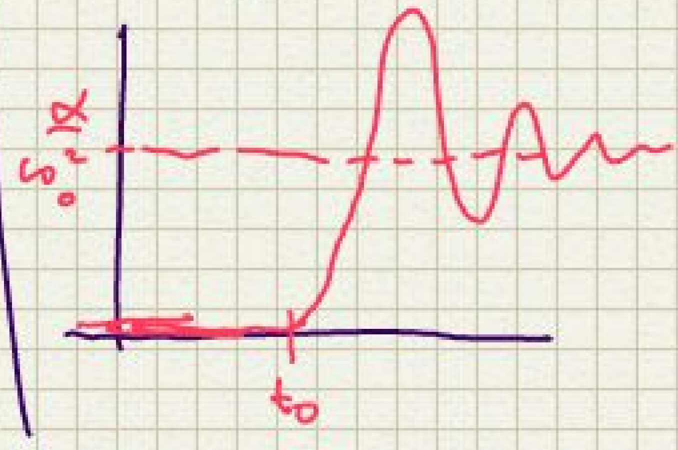


$F(t) = \alpha H(t-t_0) - \alpha H(t-t_1)$

=

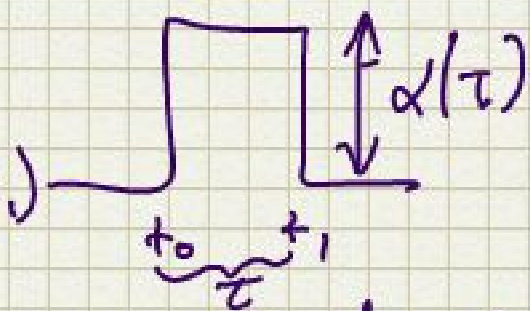


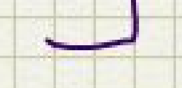
Respuesta:



∴ respuesta al impulso

$I(t;t_0,t_1) = H(t-t_0) - H(t-t_1)$



es la resta de las respuestas a las dos  :

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ \text{lo que acabamos de calcular}, & t_0 < t < t_1 \\ \dfrac{\alpha e^{-b(t-t_0)}}{\omega_0^2}\left[e^{b\tau} \cos \omega_1 (\overbrace{t-t_0-\tau}^{t-t_1}) - \cos \omega_1 (t-t_0) + \dfrac{b e^{b\tau}}{\omega_1} \sin \omega_1 (t-t_0-\tau) - \dfrac{b}{\omega_1} \sin \omega_1 (t-t_0) \right] \end{cases}$$

$\tau := t_1 - t_0$

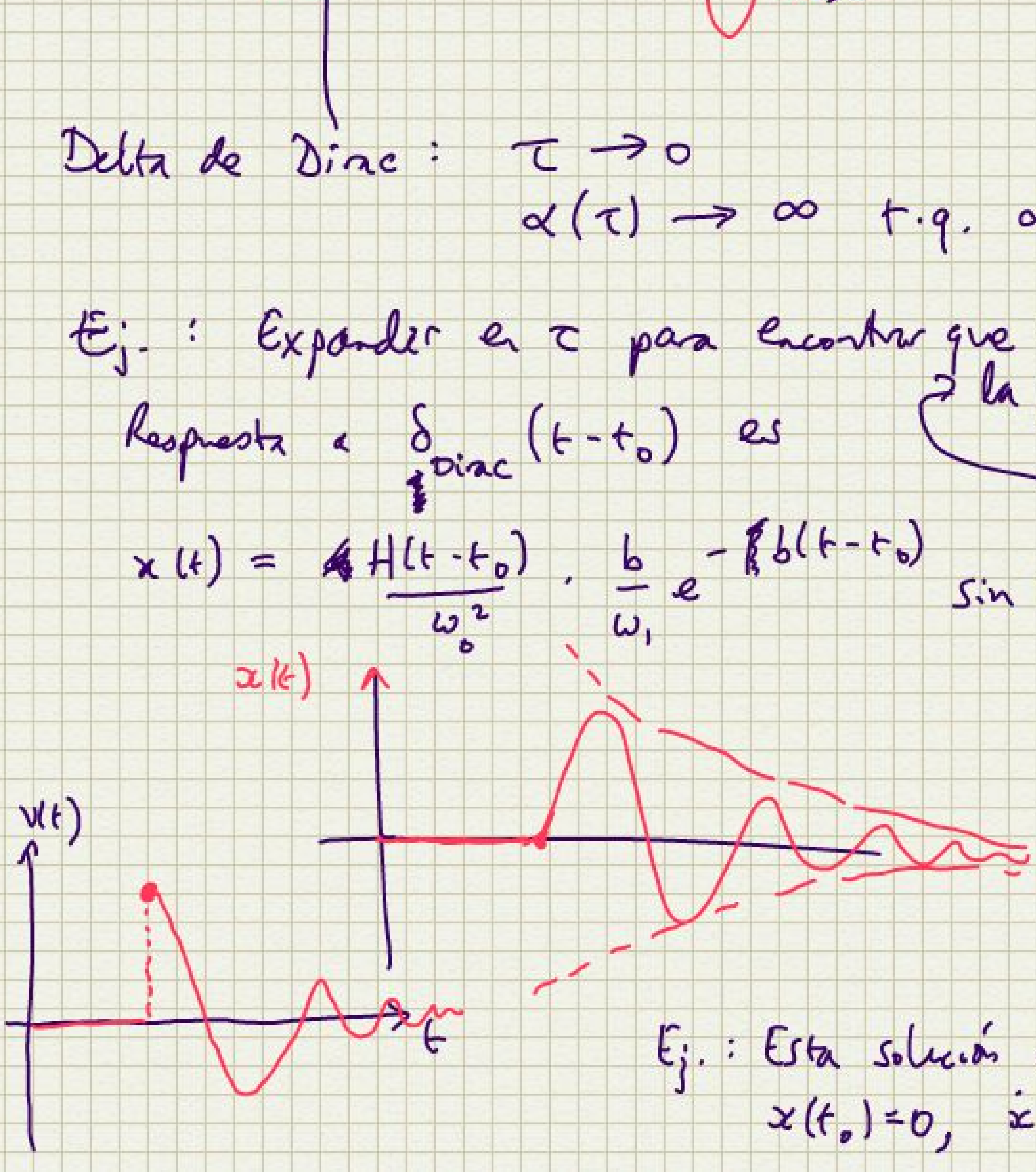
Delta de Dirac: $\tau \to 0$

$\alpha(\tau) \to \infty$ t.q. $\alpha\tau = 1$

Ej.: Expandir en τ para encontrar que:

Respuesta a $\delta_{Dirac}(t-t_0)$ es ← la f^n de Green (respuesta a una delta)

$$x(t) = \frac{H(t-t_0)}{\omega_0^2} \cdot \frac{b}{\omega_1} e^{-b(t-t_0)} \sin \omega_1 (t-t_0)$$



En t_0 (recibe el impulso), su momento brinca instantaneamente en $\Delta p = 1$

Ej.: Esta solución es con $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = 1$

3.7- Fuerza arbitraria

$$F(t) = \text{"Suma de impulsos"}$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \cdot \delta(t-t') \, dt' \quad \forall t$$

superposición (suma) de un montón de deltas en distintos momentos con distintos pesos

∴ La respuesta es la suma de las respuestas correspondientes:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t') \cdot G(t;t') \, dt'$$

Con $G(t;t') := \frac{b}{\omega_1} e^{-b(t-t')} \sin \omega_1 (t-t')$

Convolución

def.

$$x(t) = (F * G)(t)$$

$$\overset{\cdot\cdot}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F(t') G(t-t') \cdot dt'$$