Capítulo 2

Descrições espaciais e transformações

Descrições espaciais e transformações

Neste capítulo, abordaremos:

- 2.2 Descrições: posições, orientações e sistemas de referência.
- 2.3 Mapeamentos: alterando descrições entre sistemas de referência.
- 2.4 Operadores: translações, rotações e transformações.
- 2.5 Resumo das interpretações.
- 2.6 A Aritmética da transformação.
- 2.7 Equações de transformação.
- 2.8 Mais sobre a representação de orientação.
- 2.9 Transformação de vetores livres.
- 2.10 Considerações computacionais

Manipulação robótica

- Partes mecânicas e ferramentas são posicionadas no espaço.
- Representação de posição e orientação é necessária.

Notação

Variável/ operação	Expresso como	Exemplos
Escalares.	Letra minúscula.	*x, y, z, a, b, …*
Vetores, matrizes.	Letra maiúscula.	*P, V, A, B, …*
Referência da grandeza.	Superscrito prévio.	Vetor *P* em referência ao *frame* {*A*}: ^{A}P
Relação entre *frames.*	Subscrito e superscrito prévios.	Matriz de rotação do *frame B* em relação ao *frame A:* ${}^{A}_{B}R$

Notação

Variável/ operação	Expresso como	Exemplos
Transposição, inversão.	Pós-superscritos.	R^{-1}, R^{T}
Componente de vetor ou descrição.	Pós-subscritos.	p_x, p_y, P_{garra}…
Funções trigonométricas.	Contração.	$\cos\theta_1 = c\theta_1 = c_1$.

Descrições espaciais e transformações

Descrição de uma posição

- Vetor de posição.

$$ {}^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} $$

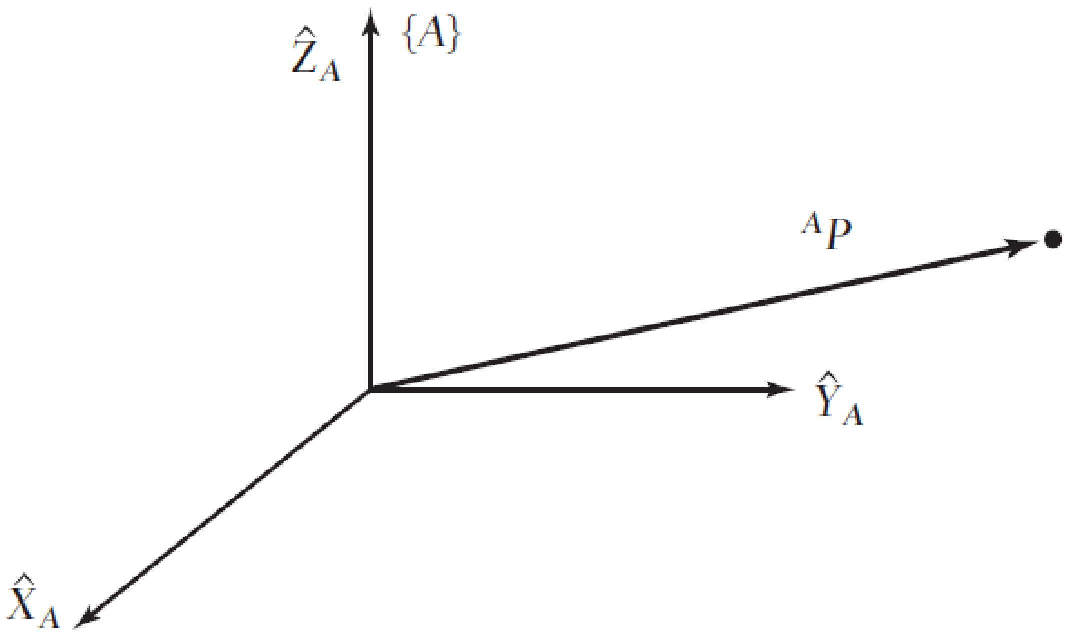


Figura 2.1: Vetor em relação ao sistema de referência (exemplo).

Descrições espaciais e transformações

Descrição de uma orientação

- Fixa um sistema (*frame*) no corpo.
- Cossenos direcionais.
- Escrever os três vetores unitários em termos de {*A*}.
- Matriz rotacional de {*B*} em relação a {*A*}:

$$ {}^{A}_{B}R = \left[\, {}^{A}\hat{X}_B \;\; {}^{A}\hat{Y}_B \;\; {}^{A}\hat{Z}_B \,\right] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} $$

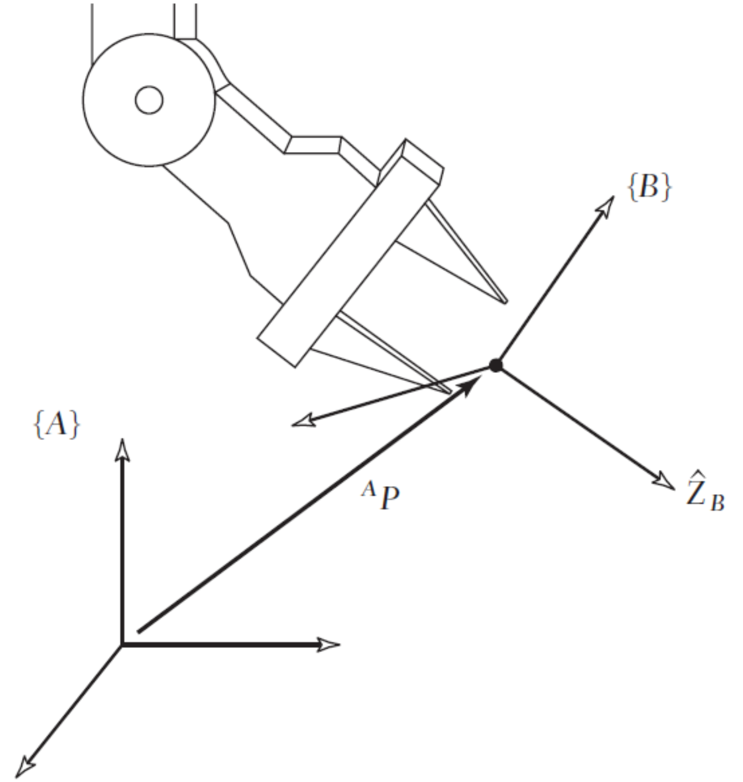


Figura 2.2: Localizando a posição e a orientação de um objeto.

Descrições espaciais e transformações

Descrição de uma orientação

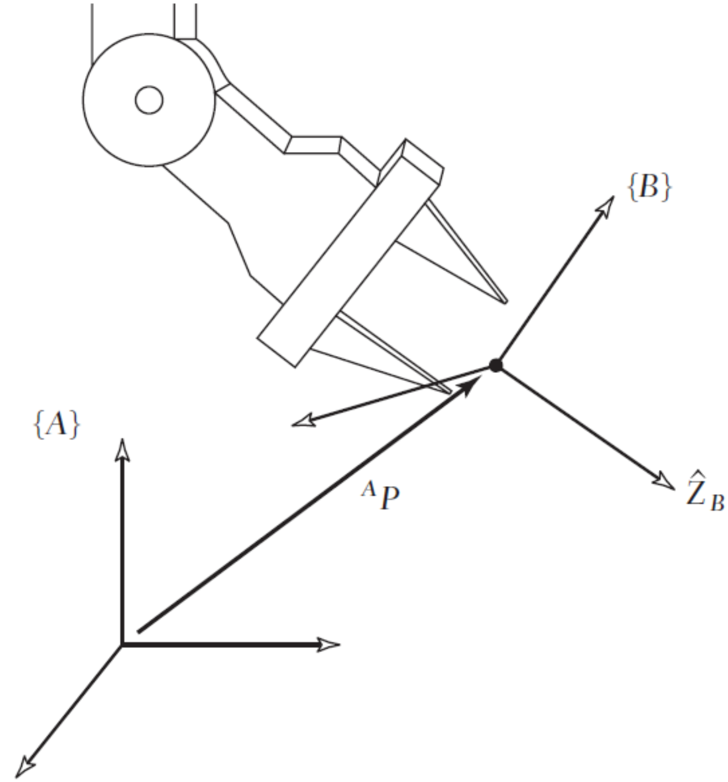


Figura 2.2: Localizando a posição e a orientação de um objeto.

- Orientação.
- Cossenos direcionais, pois

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta_{AB}$$

$$^{A}_{B}R = \left[\, ^{A}\hat{X}_B \;\; ^{A}\hat{Y}_B \;\; ^{A}\hat{Z}_B \, \right] = \begin{bmatrix} \hat{X}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{X}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{X}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Y}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Y}_A \\ \hat{X}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Y}_B \cdot \hat{Z}_A & \hat{Z}_B \cdot \hat{Z}_A \end{bmatrix}$$

$$^{A}_{B}R = \left[\, ^{A}\hat{X}_B \;\; ^{A}\hat{Y}_B \;\; ^{A}\hat{Z}_B \, \right] = \begin{bmatrix} ^{B}\hat{X}_A^T \\ ^{B}\hat{Y}_A^T \\ ^{B}\hat{Z}_A^T \end{bmatrix}$$

$$^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^T$$

Descrições espaciais e transformações

Descrição de uma orientação

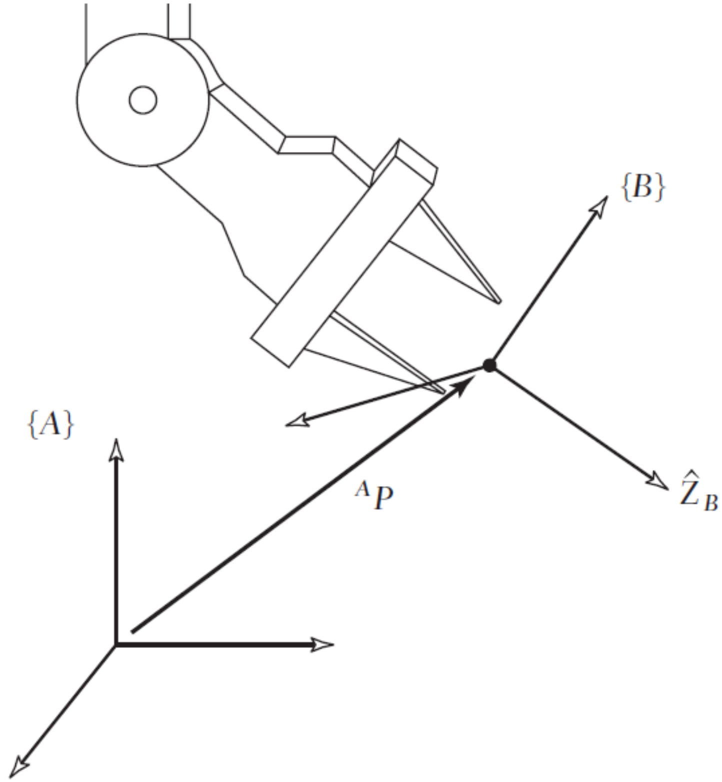


Figura 2.2: Localizando a posição e a orientação de um objeto.

- O inverso de uma matriz de rotação é igual a sua transposta:

$$ {}^{A}_{B}R^{T}\,{}^{A}_{B}R = \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Y}_{B}^{T} \\ {}^{A}\hat{Z}_{B}^{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{A}\hat{X}_{B} & {}^{A}\hat{Y}_{B} & {}^{A}\hat{Z}_{B} \end{bmatrix} = I_3 $$

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

Descrições espaciais e transformações

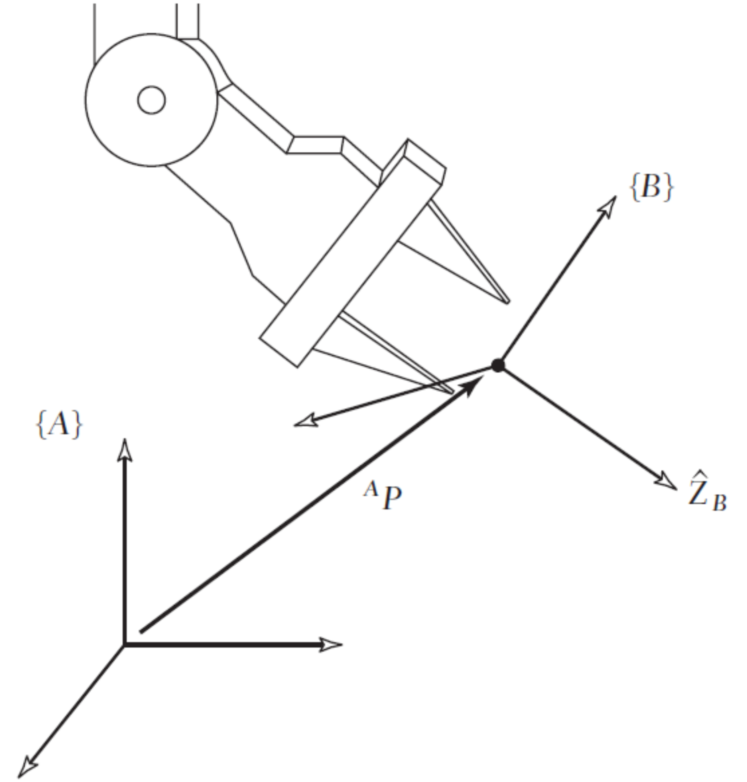


Figura 2.2: Localizando a posição e a orientação de um objeto.

Descrição de um frame

- Para descrever a garra:
  - 1 vetor de posição.
  - 3 vetores de orientação.

$$\{B\} = \{^{A}P_{BORG}, {}^{A}_{B}R\}$$

Descrições espaciais e transformações

Descrição de um frame

- Representação gráfica.
- Três frames, {*A*}, {*B*}, {*C*} mais o frame universal {*U*}.

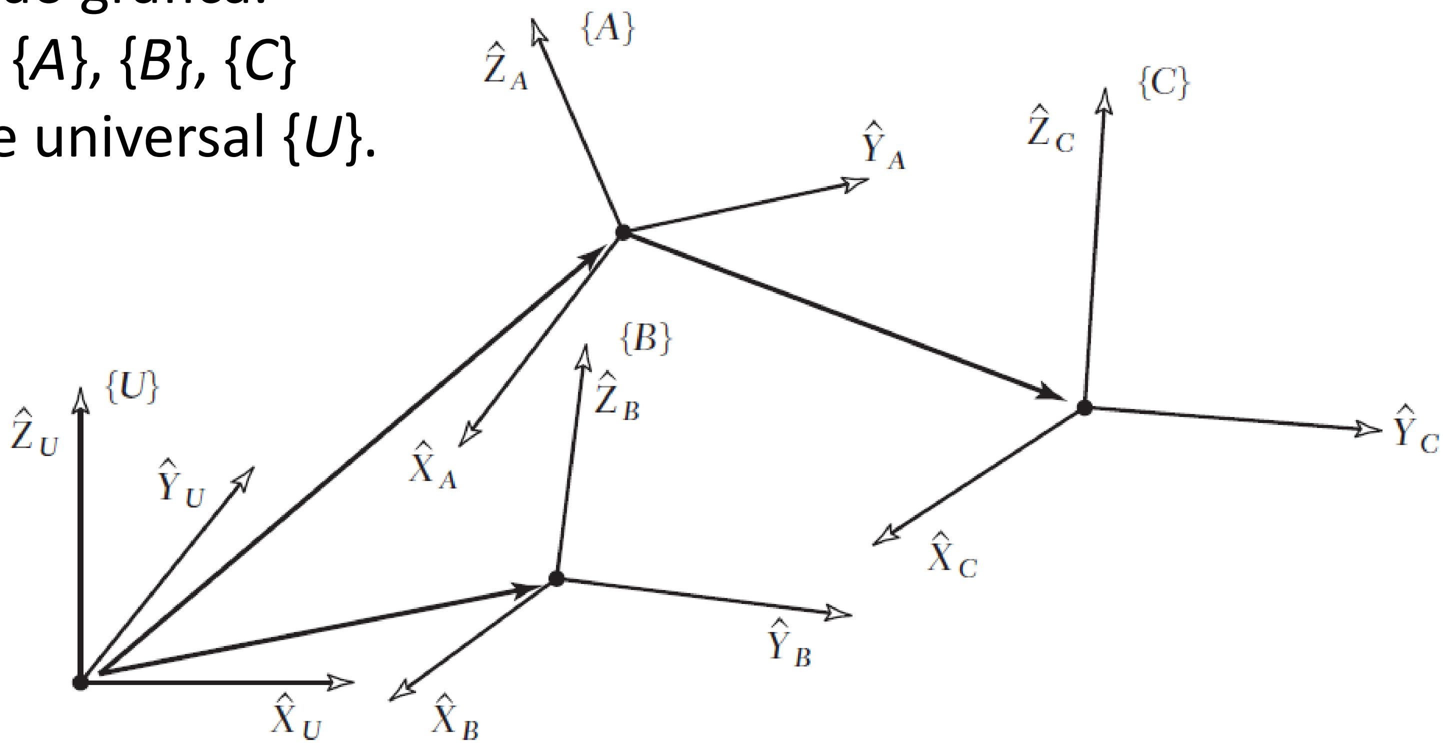


Figura 2.3: Vários exemplos de sistemas de referência.

Mapeamentos: alterando descrições de sistemas de referência para sistemas de referência

Mapeamentos que envolvem sistemas de referência transladados

- Mapeamento.

$$^{A}P = {}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}.$$

- O ponto permanece no mesmo lugar. A referência é que muda.

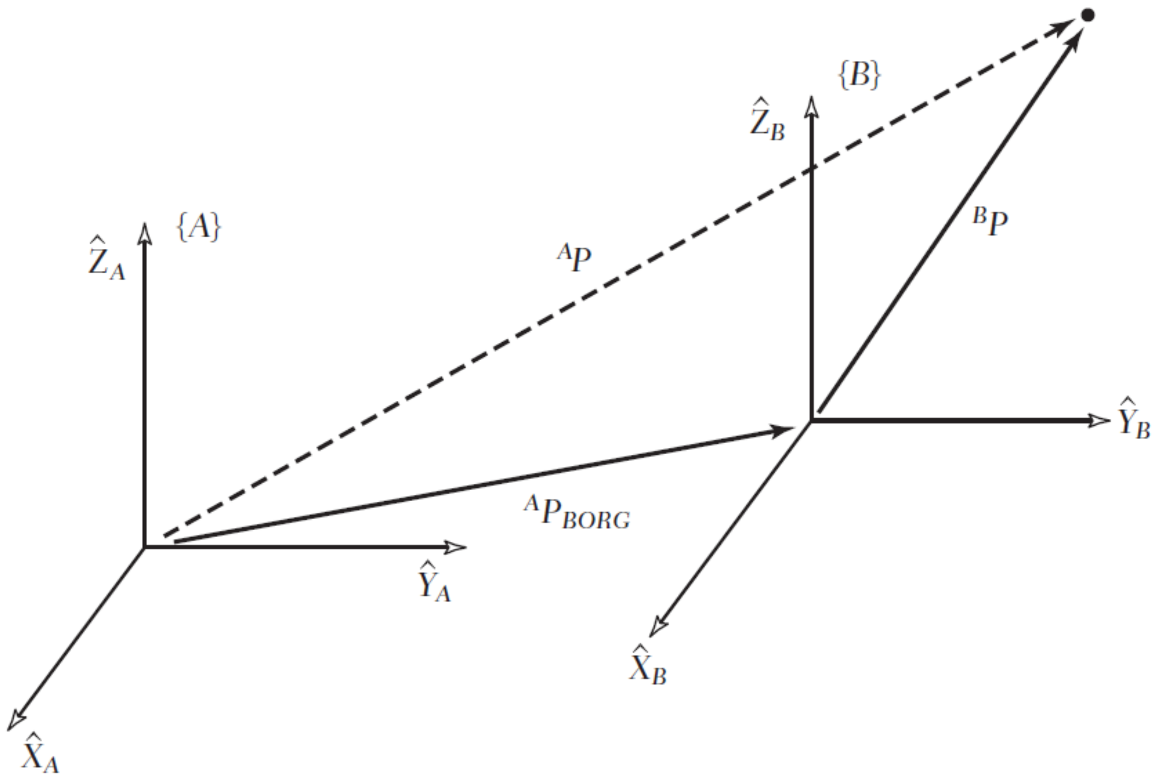


Figura 2.4: Mapeamento translacional.

Mapeamentos: alterando descrições de sistemas de referência para sistemas de referência

Mapeamentos envolvendo sistemas de referência rotacionados

$$ {}^{A}_{B}R = {}^{B}_{A}R^{-1} = {}^{B}_{A}R^{T} $$

$$ {}^{A}_{B}R = \left[\, {}^{A}\hat{X}_{B} \quad {}^{A}\hat{Y}_{B} \quad {}^{A}\hat{Z}_{B} \,\right] = \begin{bmatrix} {}^{B}\hat{X}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Y}_{A}^{T} \\ {}^{B}\hat{Z}_{A}^{T} \end{bmatrix} $$

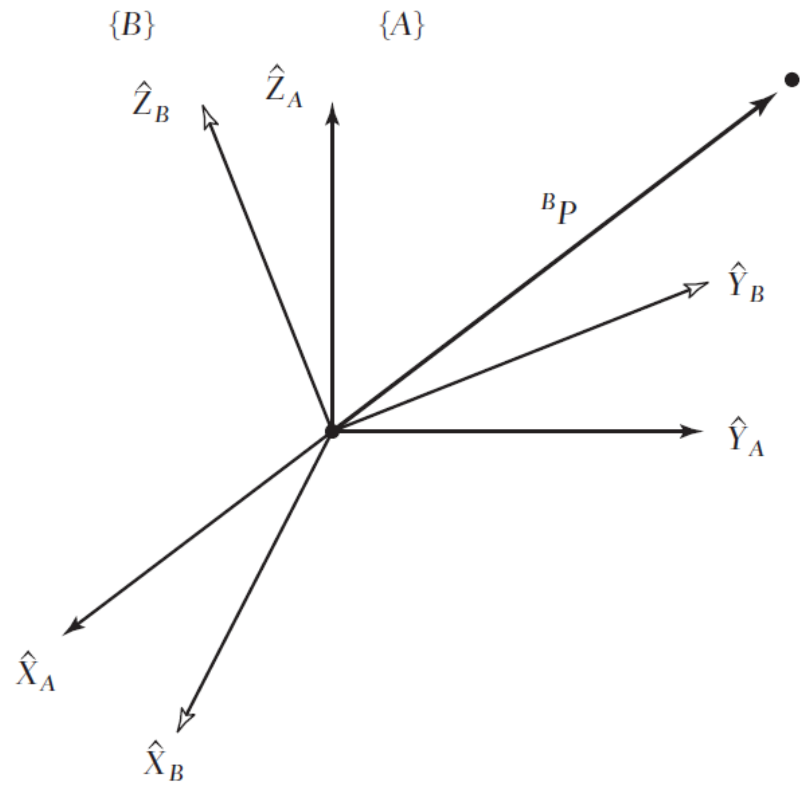


Figura 2.5: Rotação da descrição de um vetor.

Mapeamentos: alterando descrições de sistemas de referência para sistemas de referência

Mapeamentos envolvendo sistemas de referência rotacionados

$$
\begin{aligned}
{}^{A}p_x &= {}^{B}\hat{X}_A \cdot {}^{B}P, \\
{}^{A}p_y &= {}^{B}\hat{Y}_A \cdot {}^{B}P, \\
{}^{A}p_z &= {}^{B}\hat{Z}_A \cdot {}^{B}P.
\end{aligned}
$$

$$\boxed{{}^{A}P = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}P.}$$

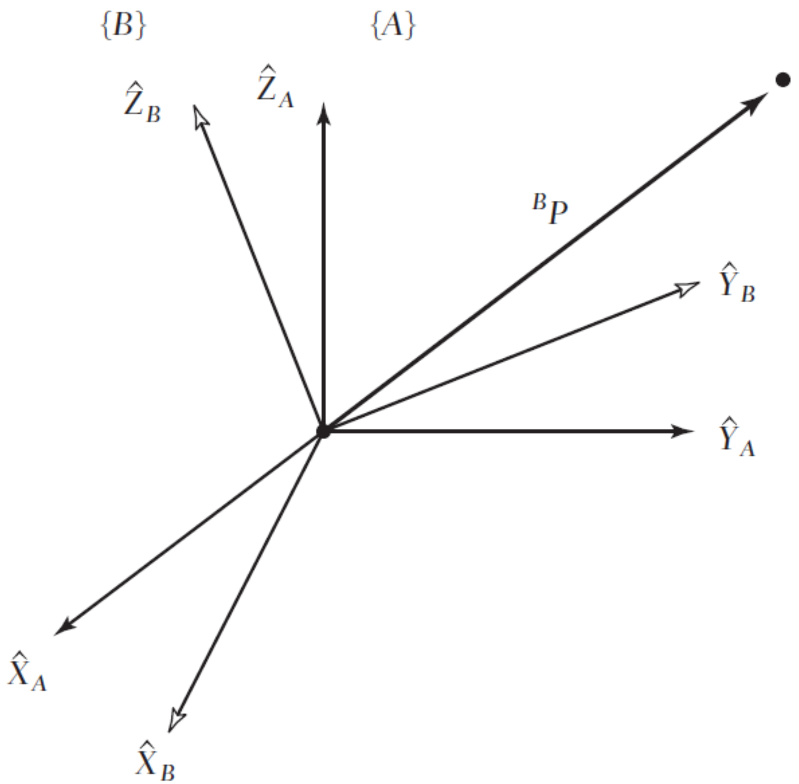
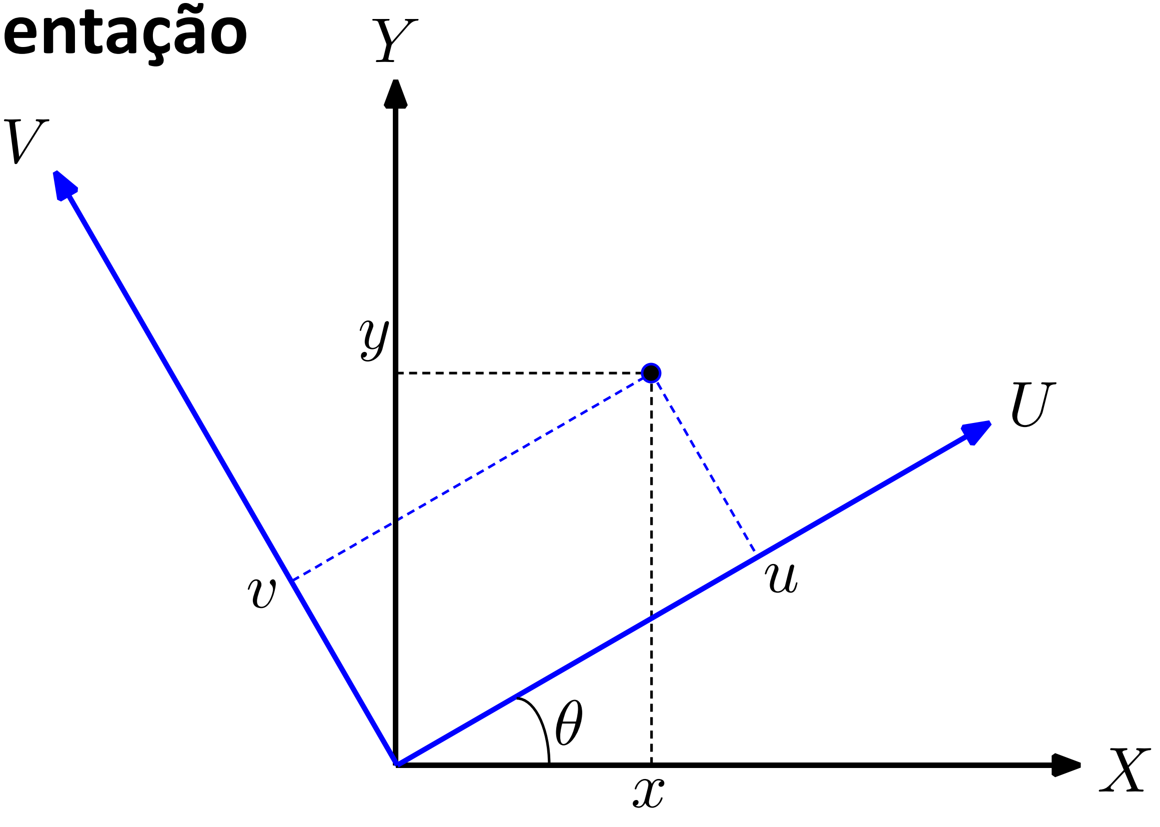


Figura 2.5: Rotação da descrição de um vetor.

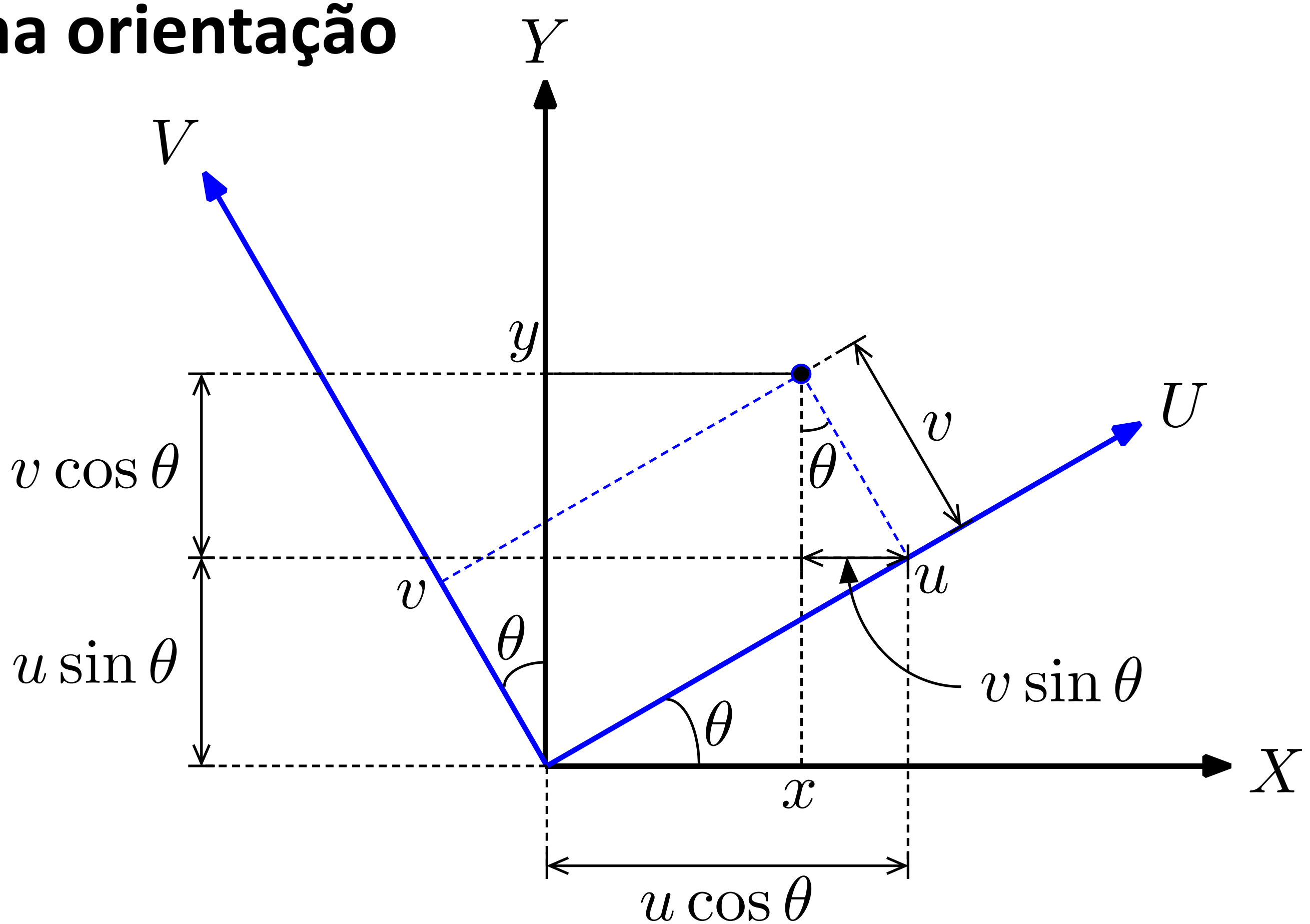
Descrições espaciais e transformações

Descrição de uma orientação



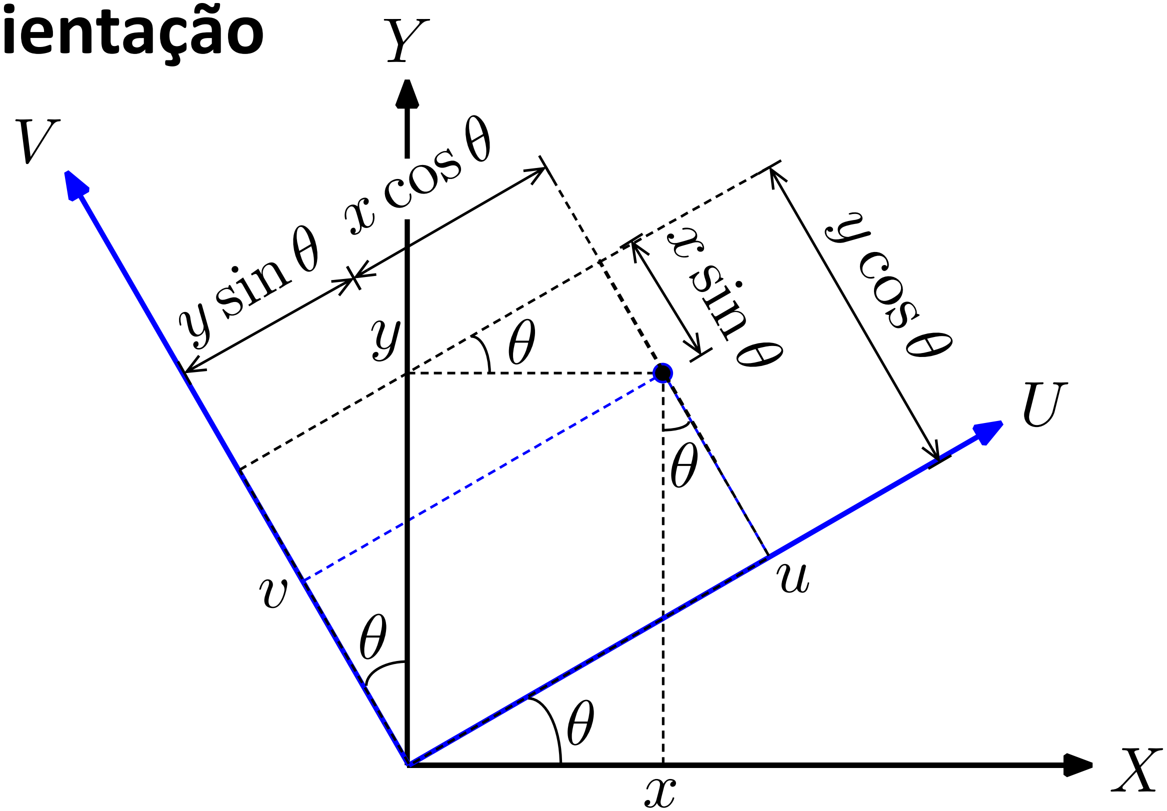
Descrições espaciais e transformações

Descrição de uma orientação



Descrições espaciais e transformações

Descrição de uma orientação



Descrições espaciais e transformações

Exercício:

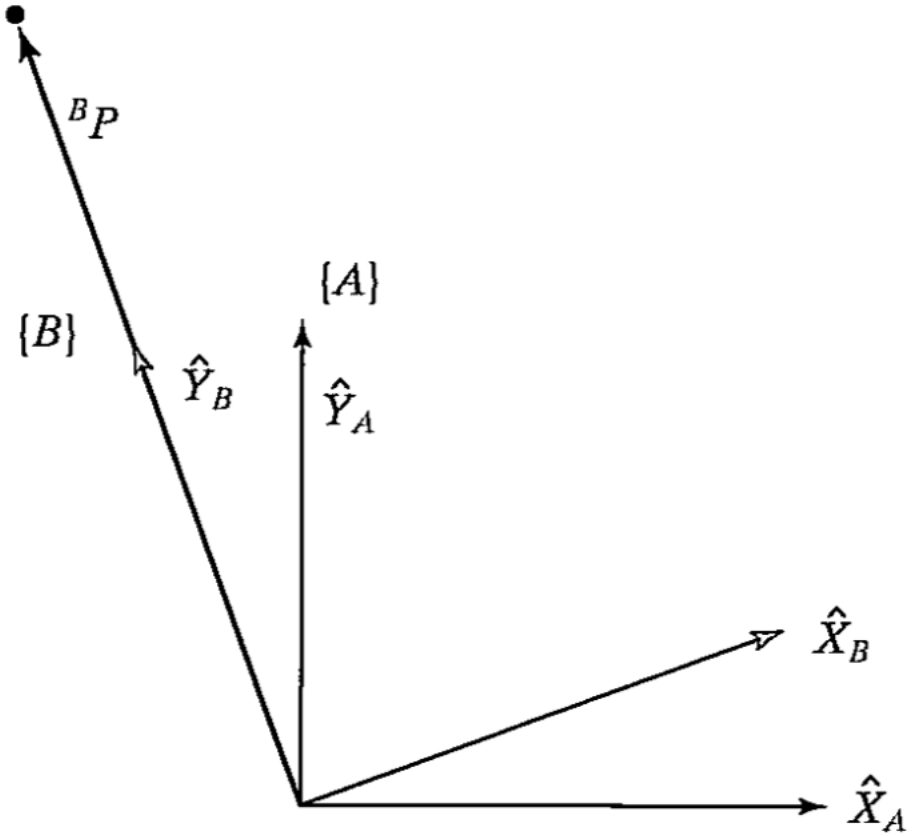
Encontrar as matrizes de rotação em torno dos eixos x, y e z.

Mapeamentos: alterando descrições de sistemas de referência para sistemas de referência

Mapeamentos envolvendo sistemas de referência rotacionados

- Exemplo 2.1:

Qual a matriz de rotação para um giro de 30º ao redor do eixo *Z*?



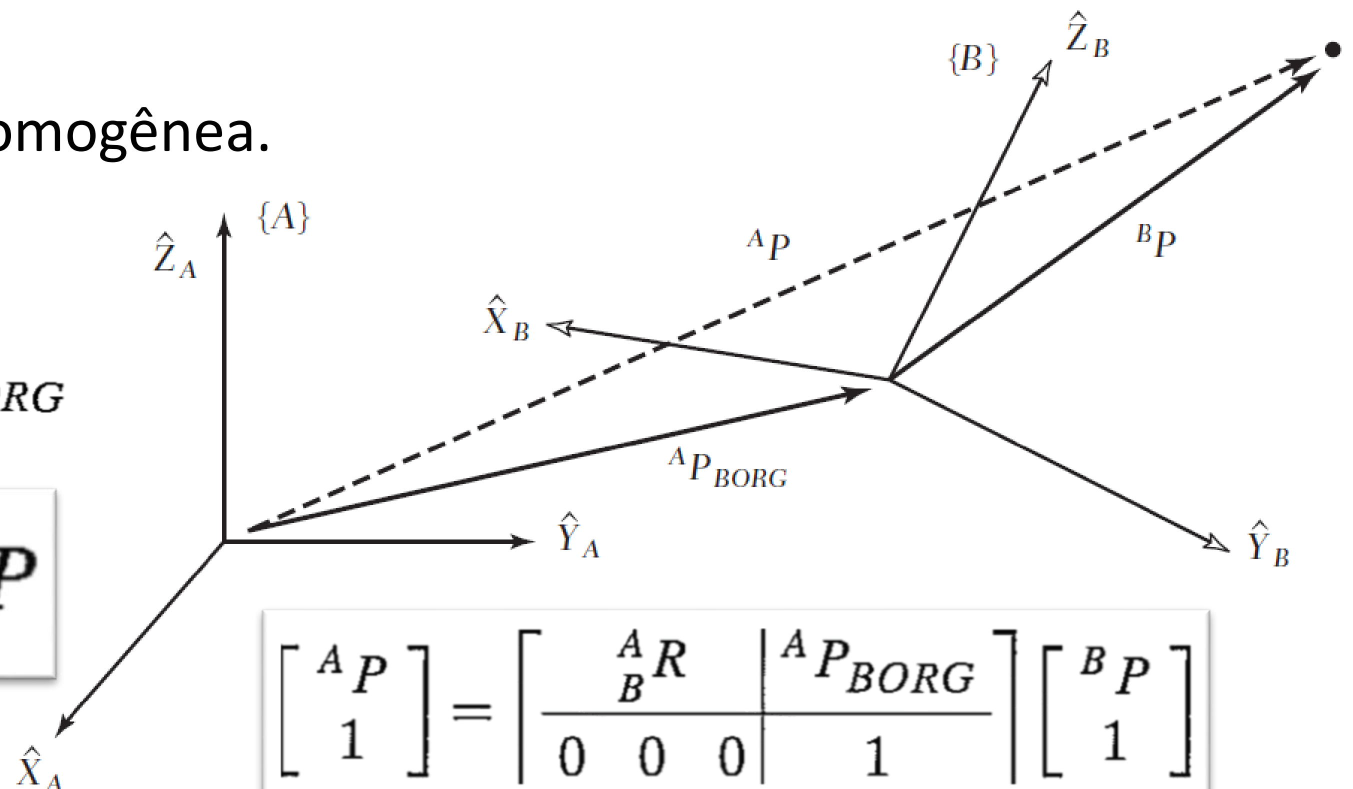
Mapeamentos: alterando descrições de sistemas de referência para sistemas de referência

Mapeamentos que envolvem sistemas de referência genéricos

- Transformação homogênea.

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG} $$

$$ \boxed{{}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P} $$



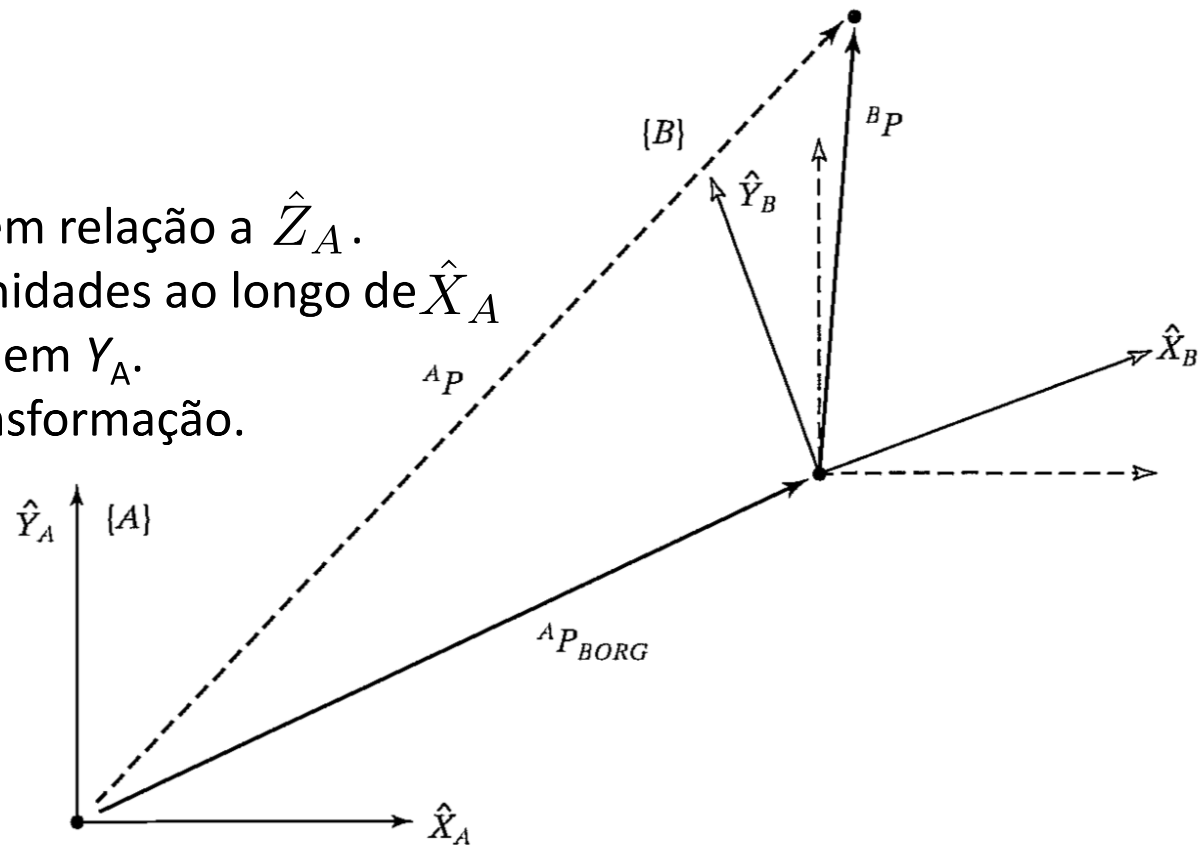
$$ \begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} $$

Figura 2.7: Transformação genérica de um vetor.

Mapeamentos: alterando descrições de sistemas de referência para sistemas de referência

Mapeamentos que envolvem sistemas de referência genéricos

- Ex. 2.2:
  - $\{B\}$ é rotacionado de 30º em relação a $\hat{Z}_A$.
  - $\{B\}$ é transladado de 10 unidades ao longo de $\hat{X}_A$
  - $\{B\}$ é trans. de 5 unidades em Y_A.
  - Encontrar a matriz de transformação.



Operadores: translações, rotações e transformações

Operadores translacionais

- Translação.

$$^{A}P_2 = {}^{A}P_1 + {}^{A}Q$$

$$^{A}P_2 = D_Q(q)\, {}^{A}P_1$$

$$D_Q(q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & q_x \\ 0 & 1 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 1 & q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$$

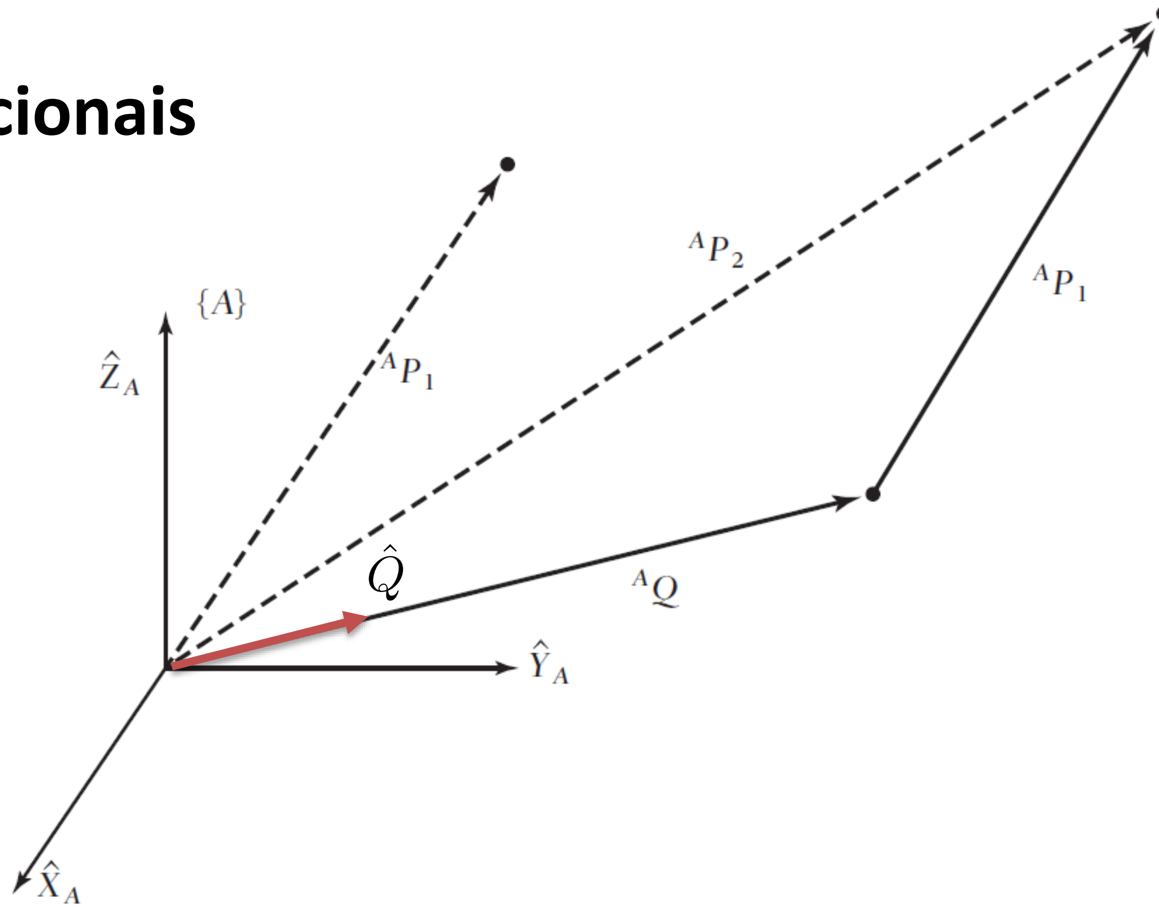


Figura 2.9: Operador translacional.

Operadores: translações, rotações e transformações

Operadores rotacionais

$$ {}^{A}P_2 = R\, {}^{A}P_1 $$

$$ {}^{A}P_2 = R_K(\theta)\, {}^{A}P_1 $$

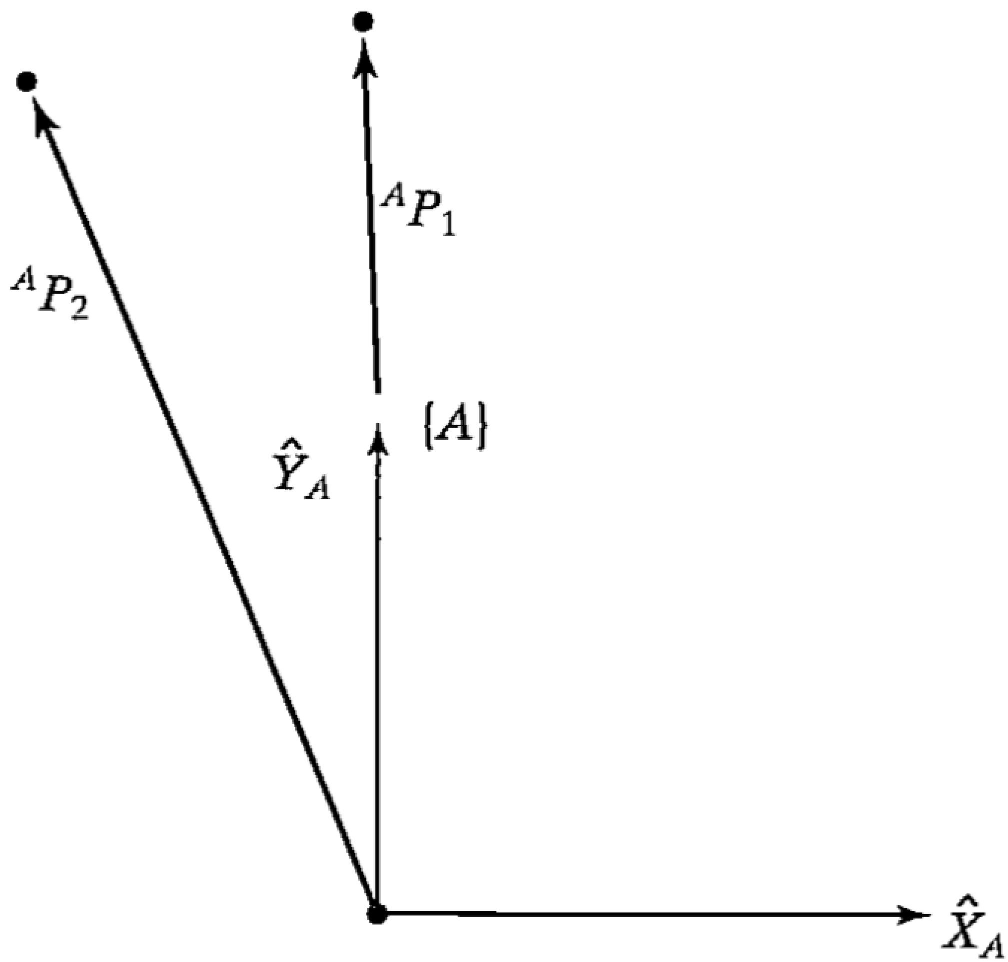
Exercício:

Obter as matrizes que implementam rotações de α, β e γ em torno dos eixos $\hat{X}$, $\hat{Y}$ e $\hat{Z}$, respectivamente.

Operadores: translações, rotações e transformações

Operadores rotacionais

Ex. 2.3. Rotação de 30º.



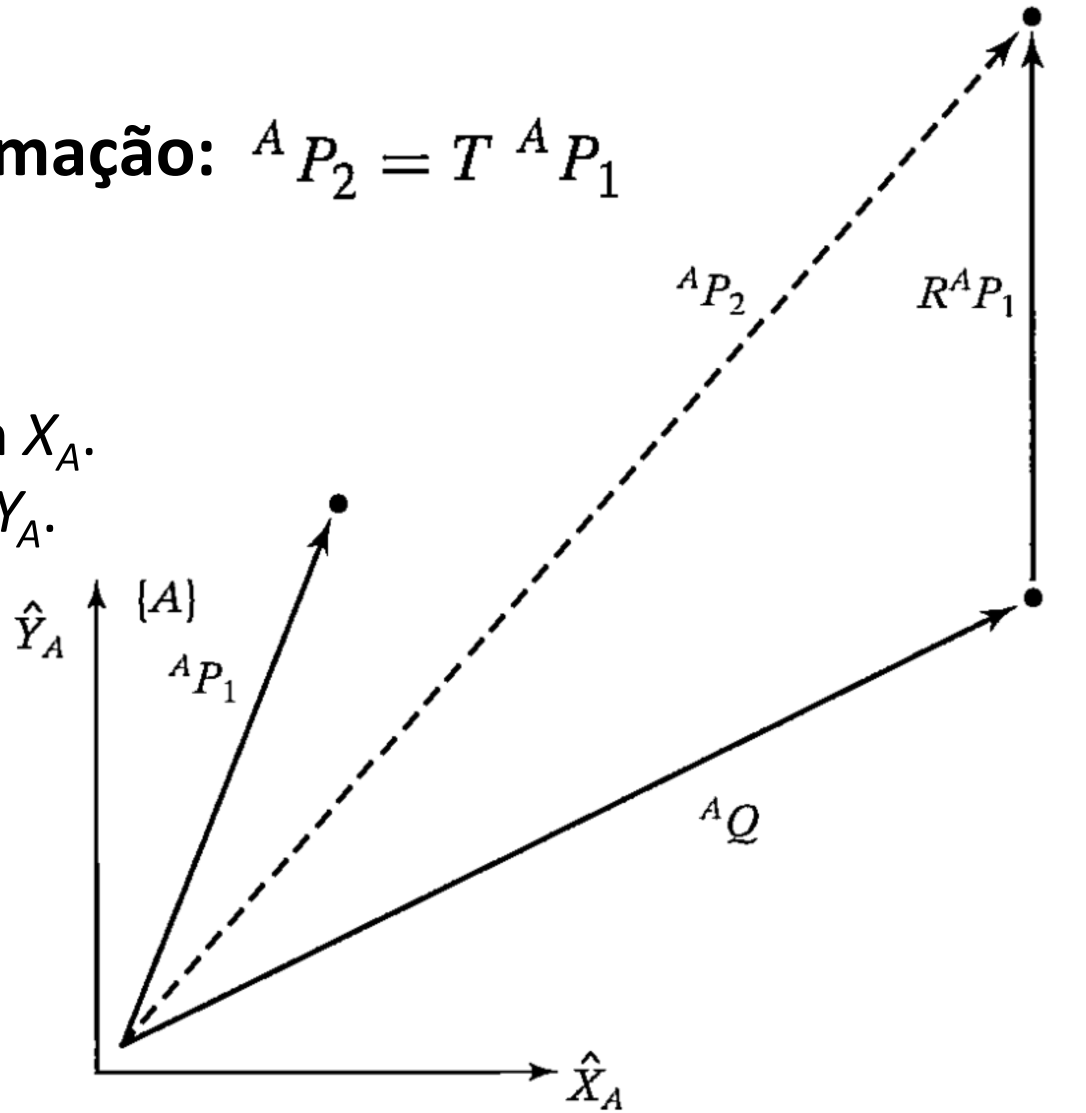
Operadores: translações, rotações e transformações

Operadores de transformação: ${}^{A}P_2 = T\ {}^{A}P_1$

Ex. 2.4:

1. Rotação de 30º.
2. Deslocamento de 10 em X_A.
3. Deslocamento de 5 em Y_A.

Determinar ${}^{A}P_2$ dado que ${}^{A}P_1 = (3\ 7\ 0)^T$.



Resumo das interpretações

- Transformação homogênea.

  - Descrição de um *frame*, isto é ${}^{A}_{B}T$ descreve o sistema de referência $\{B\}$ em relação ao sistema de referência $\{A\}$, onde:
    - as colunas de ${}^{A}_{B}R$ são vetores unitários que definem as direções dos principais eixos de $\{B\}$.
    - ${}^{A}P_{BORG}$ localiza a posição da origem de $\{B\}$ em relação a $\{A\}$.

  - Mapeamento de transformação. ${}^{A}_{B}T$ mapeia ${}^{B}P \rightarrow {}^{A}P$.

  - Operador de transformação. T opera em ${}^{A}P_1$ para criar ${}^{A}P_2$.

Aritmética das transformações

Transformações compostas

$${}^{B}P = {}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$$

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}P$$

$${}^{A}P = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T\,{}^{C}P$$

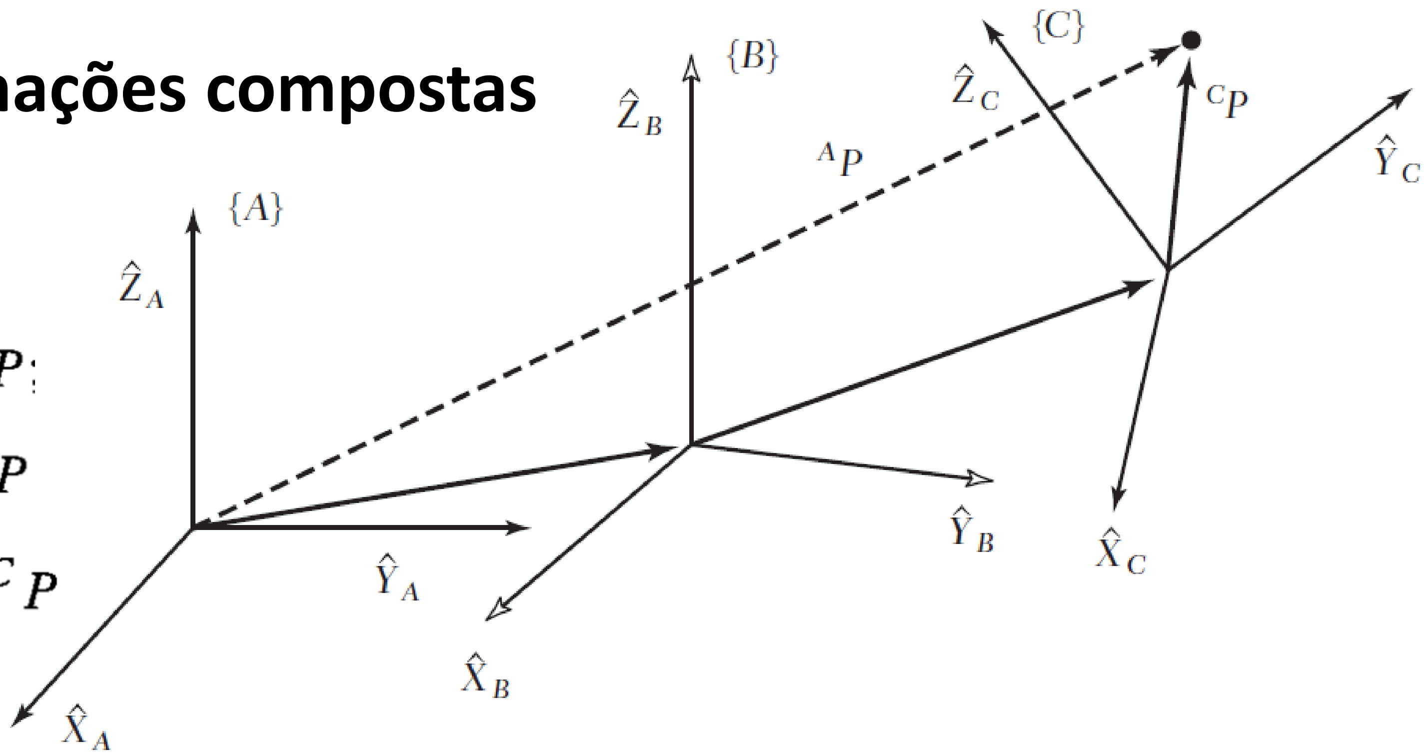


Figura 2.12: Sistemas de referência compostos: cada um é conhecido em relação ao anterior.

Aritmética das transformações

Transformações compostas

$$ {}^{B}P = {}^{B}_{C}T\, {}^{C}P $$

$$ {}^{A}P = {}^{A}_{B}T\, {}^{B}P $$

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\, {}^{B}_{C}T $$

$$ \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} {}^{B}_{C}R & {}^{B}P_{CORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ \left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} j & k & l & u \\ m & n & o & v \\ p & q & r & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

Aritmética das transformações

Transformações compostas

$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T $$

$$\left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} {}^{B}_{C}R & {}^{B}P_{CORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & c & x \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} j & k & l & u \\ m & n & o & v \\ p & q & r & w \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} aj+bm+cp & ak+bm+cq & al+bo+cr & au+bv+cw+x \\ dj+em+fp & dk+dn+eq & dl+eo+fr & du+ev+fw+y \\ gj+hm+ip & gk+hn+iq & gl+ho+ir & gu+hv+iw+z \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Aritmética das transformações

Transformações compostas

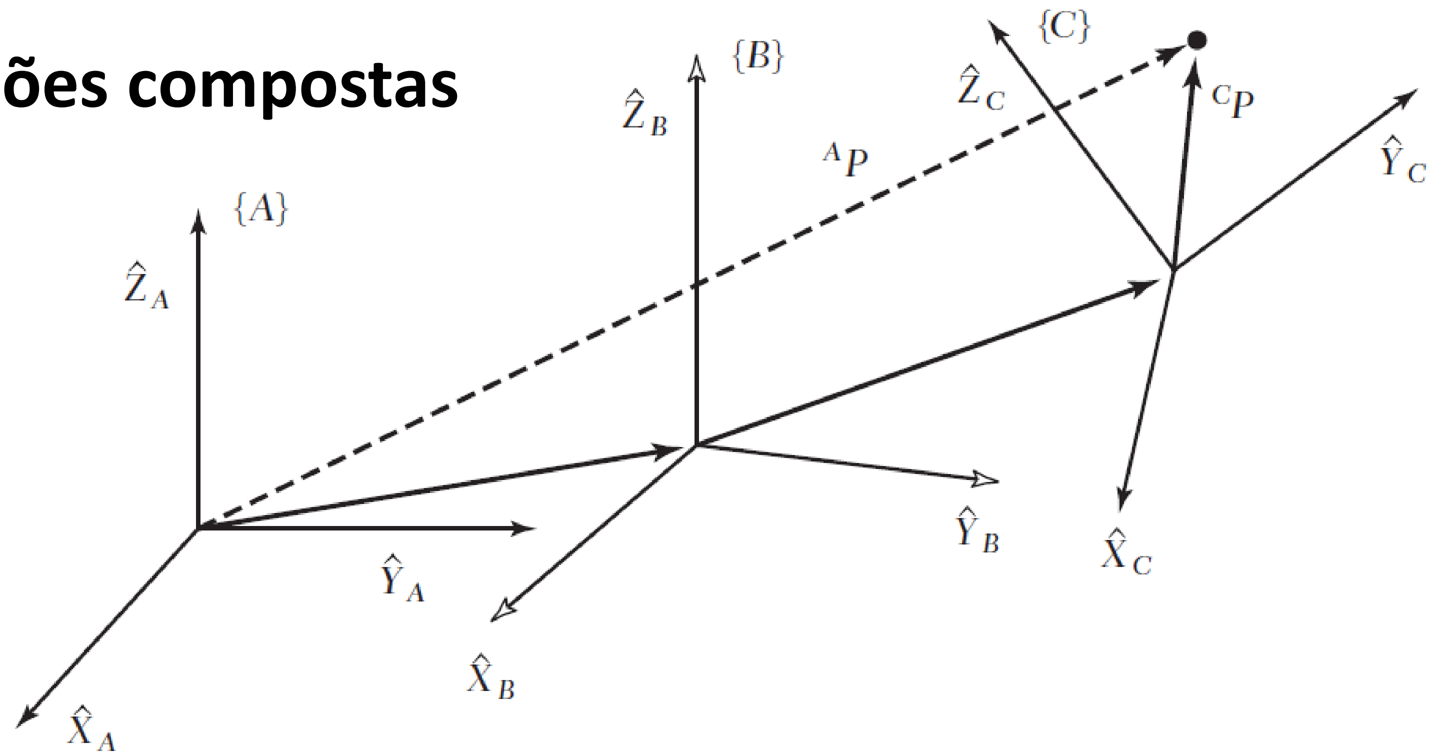
$$ {}^{A}_{C}T = {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{C}T $$

$$ \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} {}^{B}_{C}R & {}^{B}P_{CORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ \left[\begin{array}{c|c} {}^{A}_{B}R\;{}^{B}_{C}R & {}^{A}_{B}R\;{}^{B}P_{CORG} + {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] $$

Aritmética das transformações

Transformações compostas



$$^BP = {}^B_CT\, {}^CP$$

$$^AP = {}^A_BT\, {}^BP$$

$$^A_CT = {}^A_BT\, {}^B_CT$$

$$^A_CT = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR\, {}^B_CR & & {}^A_BR\, {}^BP_{CORG} + {}^AP_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Aritmética das transformações

Invertendo uma transformação

- Equações de transformação.
- Rotação:

$$ {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{T} $$

- Translação:

$$ {}^{B}({}^{A}P_{BORG}) = {}^{B}_{A}R\, {}^{A}P_{BORG} + {}^{B}P_{AORG} $$

$$ {}^{B}P_{AORG} = -{}^{B}_{A}R\, {}^{A}P_{BORG} = -{}^{A}_{B}R^{T}\, {}^{A}P_{BORG} $$

$$ {}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R^{T} & & -{}^{A}_{B}R^{T}\, {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] $$

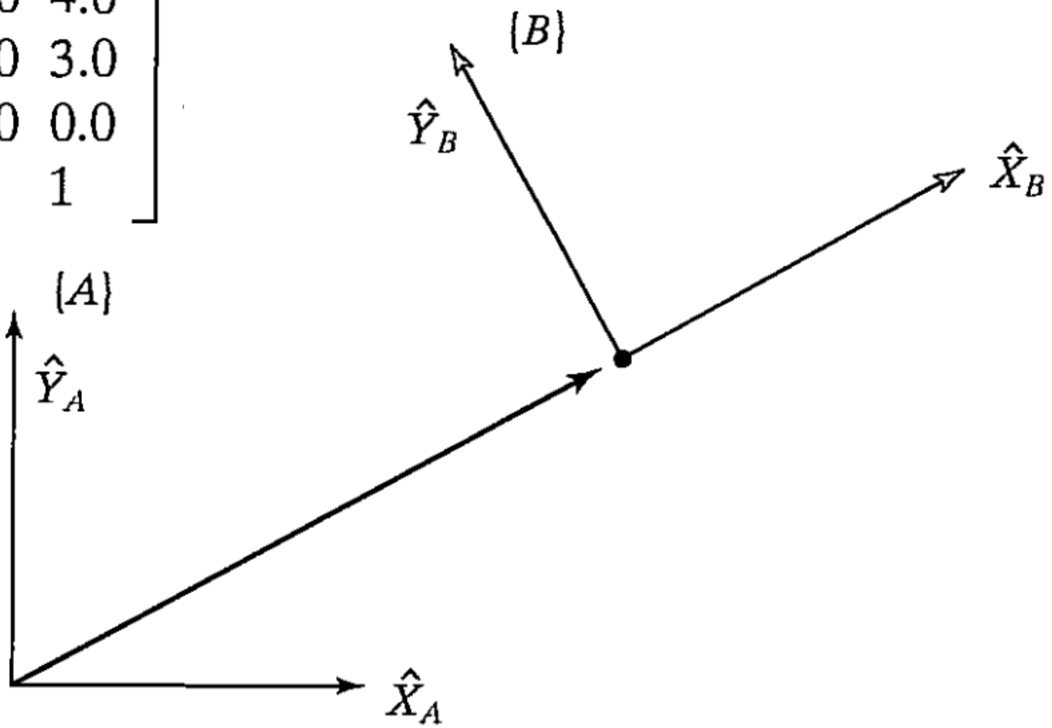
$$ {}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1} $$

Aritmética das transformações

Ex 2.5: Dada a transformação:

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 4.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 3.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

obter ${}^{B}_{A}T$



Equações formadas por transformações

Observe que:

$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{A}T \; {}^{A}_{D}T $$

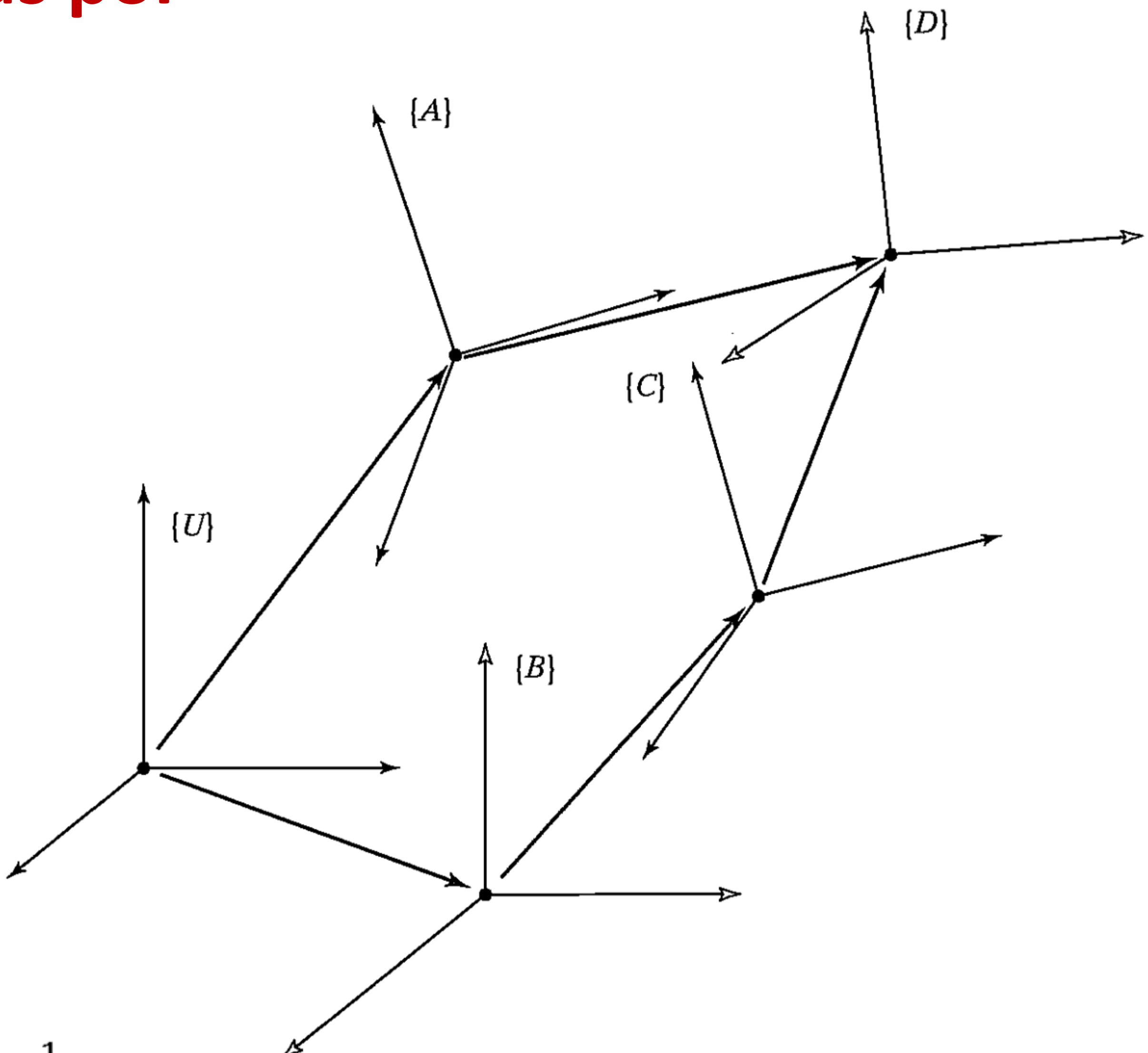
$$ {}^{U}_{D}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T \; {}^{C}_{D}T $$

A equação de transfomação:

$$ {}^{U}_{A}T \; {}^{A}_{D}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T \; {}^{C}_{D}T. $$

pode fornecer uma transf. desconhecida:

$$ {}^{B}_{C}T = {}^{U}_{B}T^{-1} \; {}^{U}_{A}T \; {}^{A}_{D}T \; {}^{C}_{D}T^{-1} $$



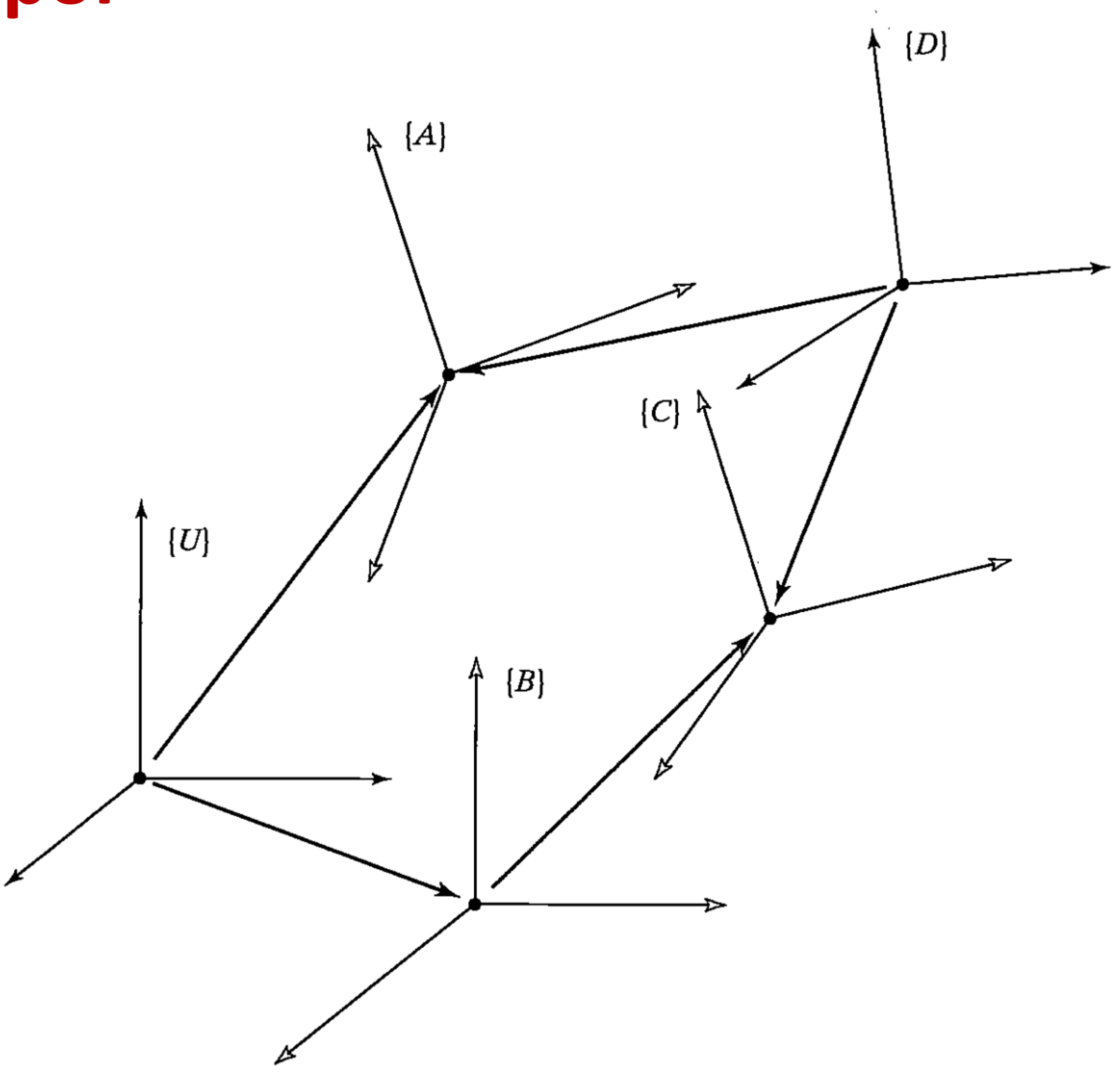
Equações formadas por transformações

Atenção para a notação!!

$$ {}^{U}_{C}T = {}^{U}_{A}T \; {}^{D}_{A}T^{-1} \; {}^{D}_{C}T $$

$$ {}^{U}_{C}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T. $$

$$ {}^{U}_{A}T = {}^{U}_{B}T \; {}^{B}_{C}T \; {}^{D}_{C}T^{-1} \; {}^{D}_{A}T. $$



Equações formadas por transformações

Ex 2.6:

Suponha que temos:

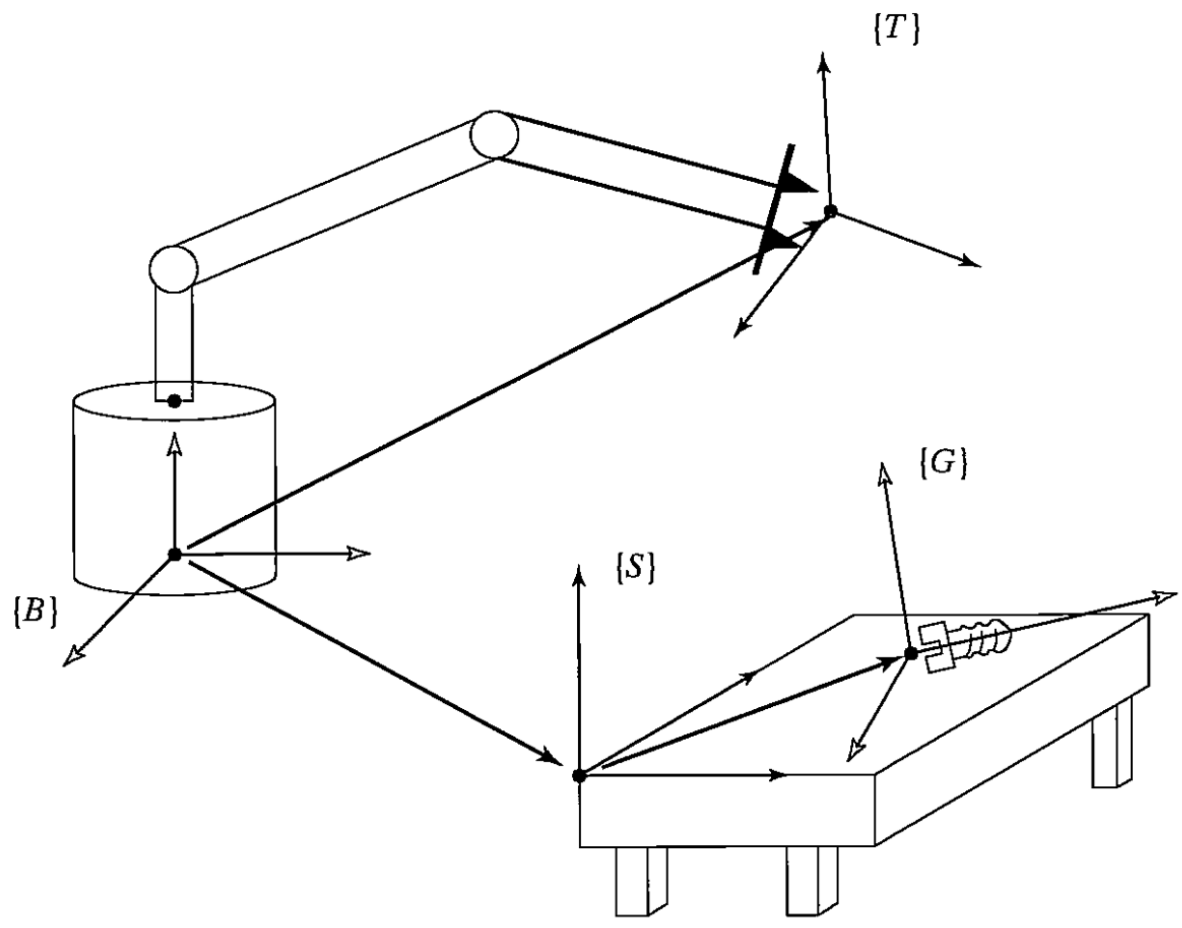
$$ {}^{B}_{T}T $$

$$ {}^{B}_{S}T $$

$$ {}^{S}_{G}T $$

Encontrar:

$$ {}^{T}_{G}T $$



Mais sobre a representação da orientação

- Matrizes rotacionais são ortonormais próprias (det. = +1).

- Matrizes ortonomais impróprias (det. = -1).

- Fórmula de Cayley para matrizes ortonormais.
  - Para qualquer matriz ortonormal própria *R* existe uma matriz antissimétrica *S* (i. e., $S = -S^{T}$), tal que

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & -s_x & s_y \\ s_x & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Qualquer matriz rotacional pode ser especificada por 3 parâmetros!

Mais sobre a representação da orientação

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & -s_x & s_y \\ s_x & 0 & -s_x \\ -s_y & s_x & 0 \end{bmatrix}$$

- Ademais, os elementos da matriz *S* não são independentes. Há 6 restrições:

$$\begin{aligned} |\hat{X}| &= 1, \\ |\hat{Y}| &= 1, \\ |\hat{Z}| &= 1, \\ \hat{X} \cdot \hat{Y} &= 0, \\ \hat{X} \cdot \hat{Z} &= 0, \\ \hat{Y} \cdot \hat{Z} &= 0. \end{aligned}$$

Rotações não são comutativas!!!

Mais sobre a representação da orientação

Ex 2.7: Rotações não são comutativas:

Dadas as matrizes de rotação a seguir, verifique que $R_x(30)\ R_z(30) \neq R_z(30)\ R_x(30)$.

$$R_z(30) = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 \end{bmatrix}$$

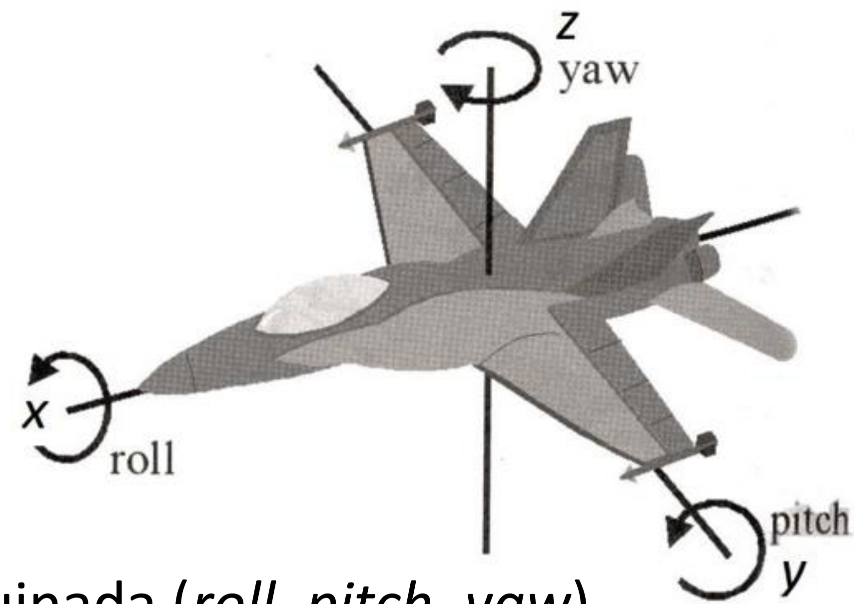
$$R_x(30) = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 \end{bmatrix}$$

Mais sobre a representação da orientação

- Um humano controlando um braço robótico prefere inserir ângulos de rotação do que uma matriz de 9 elementos!

- Entretanto, matrizes de rotação são operadores naturais.

Ângulos fixos X-Y-Z



- Ângulos fixos X-Y-Z
- Rotações em torno de {*A*}.
- Ângulos de rolagem, inclinação e guinada (*roll*, *pitch*, *yaw*).

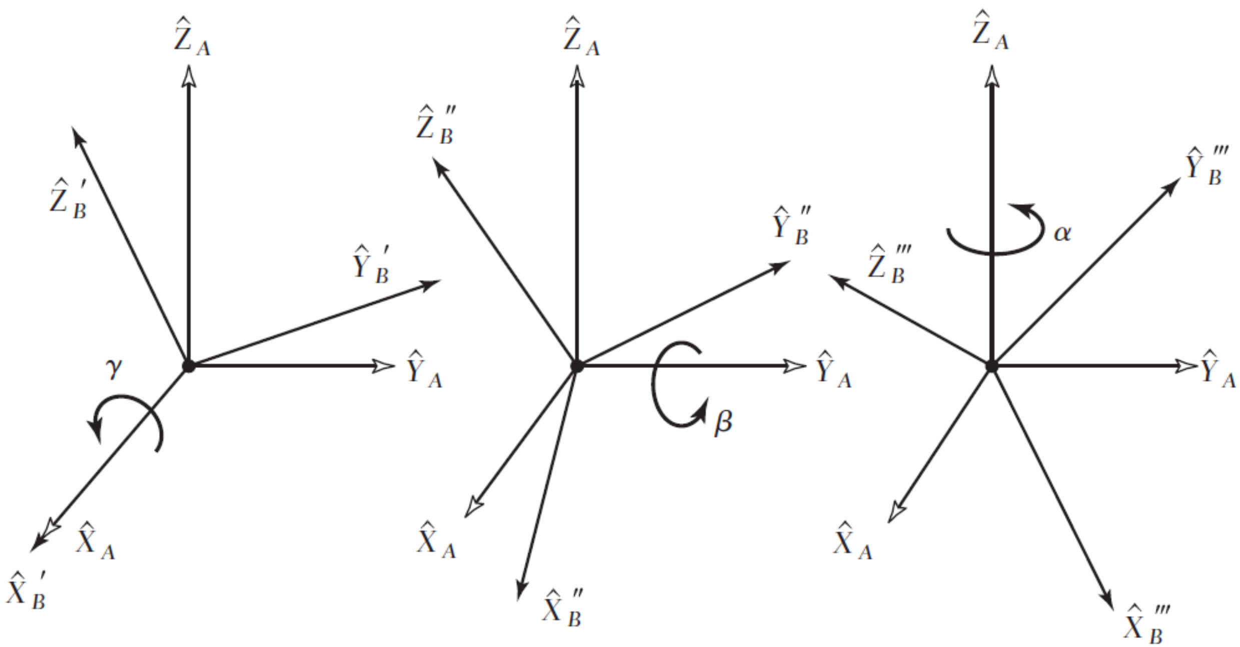


Figura 2.17: Ângulos fixos X-Y-Z. As rotações são realizadas na ordem $R_X(\gamma)$, $R_Y(\beta)$, $R_Z(\alpha)$.

Ângulos fixos X-Y-Z

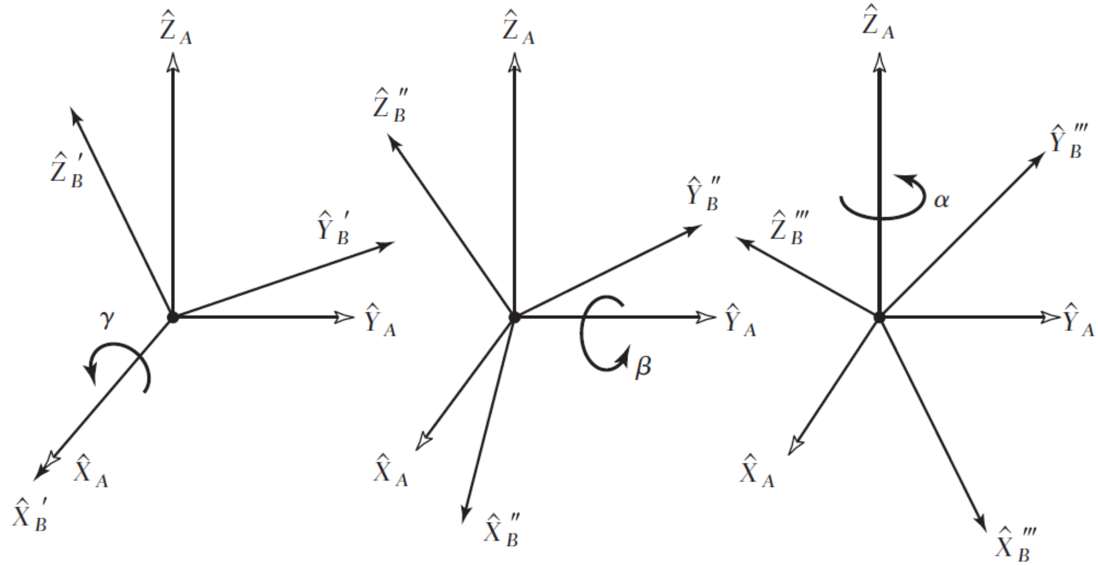


Figura 2.17: Ângulos fixos X-Y-Z. As rotações são realizadas na ordem $R_X(\gamma)$, $R_Y(\beta)$, $R_Z(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) &= R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

Atenção para a ordem de aplicação das rotações!!!

Ângulos fixos X-Y-Z

- Como extrair os ângulos a partir da matriz de rotação?

$$ {}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} $$

  - 9 equações.
  - 3 incógnitas.

- Possíveis soluções:

$$ \beta = \text{Atan2}(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}), $$

$$ \alpha = \text{Atan2}(r_{21}/c\beta, r_{11}/c\beta), $$

$$ \gamma = \text{Atan2}(r_{32}/c\beta, r_{33}/c\beta), $$

- A função Atan2(a,b) leva os sinais dos argumentos em consideração:

$$ Atan2(-1,-1) = -135° $$

enquanto que

$$ Atan2(1,1) = 45° $$

- “Arco tangent de quarto quadrantes”.
- Indefinida para argumentos nulos.

Ângulos Z-Y-X de Euler

Rotações em torno do frame $\{B\}$!

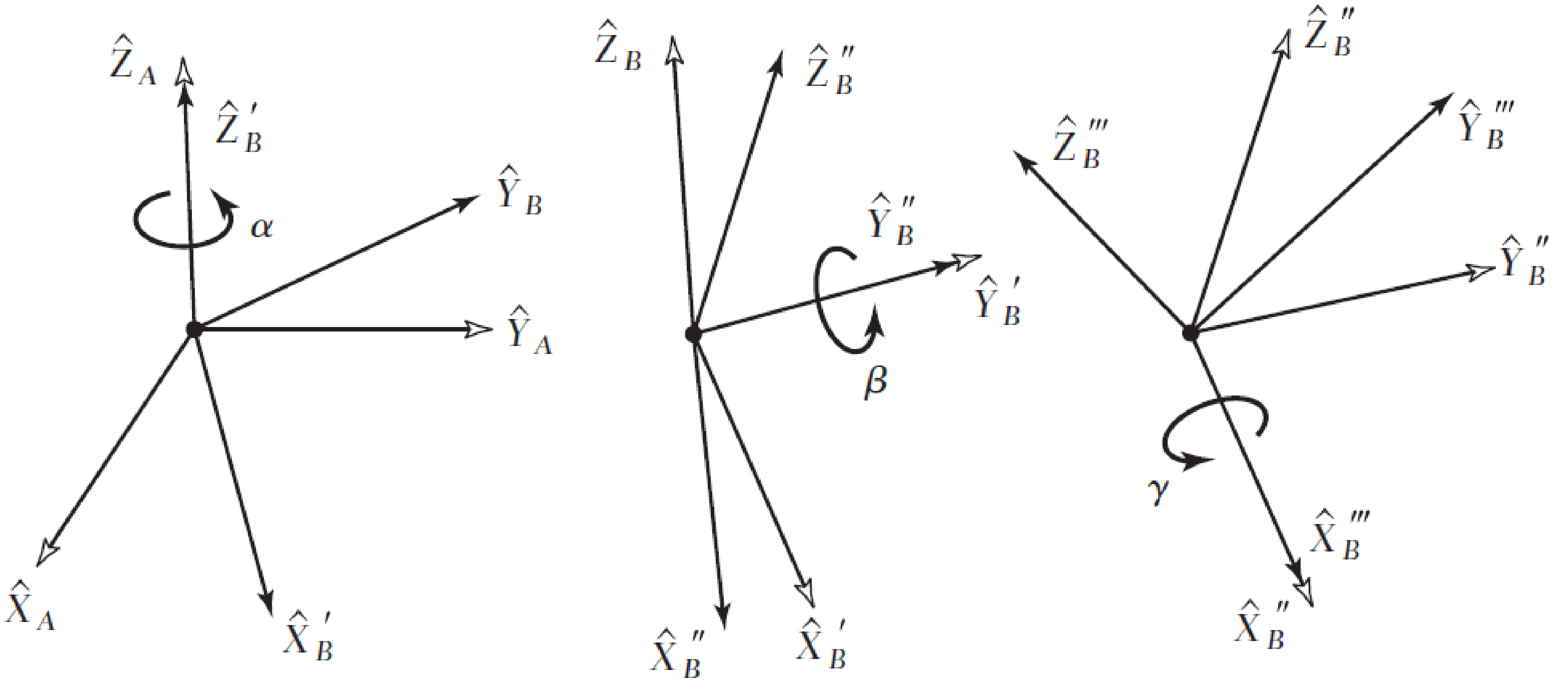


Figura 2.18: Ângulos Z-Y-X de Euler.

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'} = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}
$$

Comparação

Ângulos X-Y-Z fixos de Euler:

$$
{}^{A}_{B}R_{XYZ}(\gamma, \beta, \alpha) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)
$$

$$
= \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

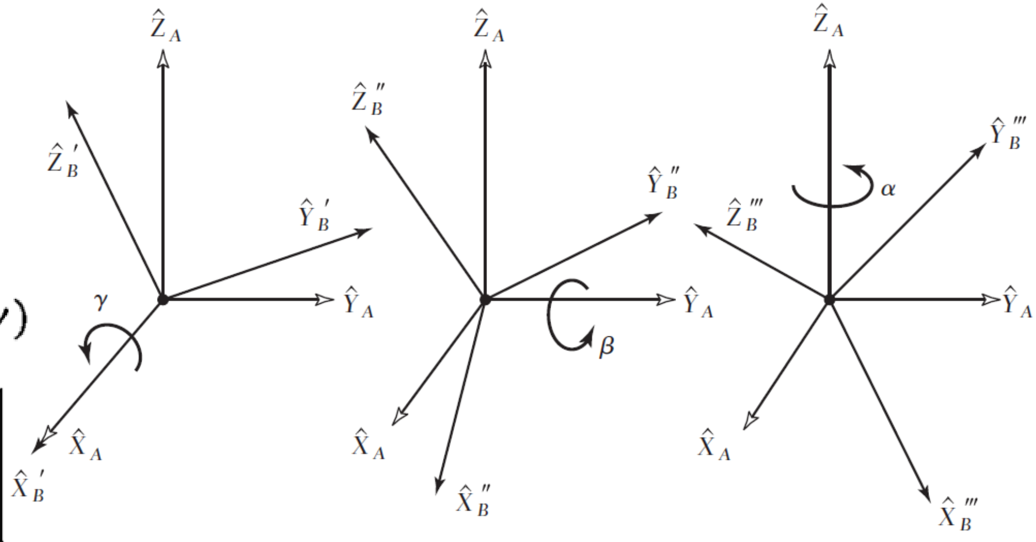


Figura 2.17: Ângulos fixos X-Y-Z. As rotações são realizadas na ordem $R_X(\gamma)$, $R_Y(\beta)$, $R_Z(\alpha)$.

Ângulos Z-Y-X de Euler:

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma) = R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)
$$

$$
\begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}
$$

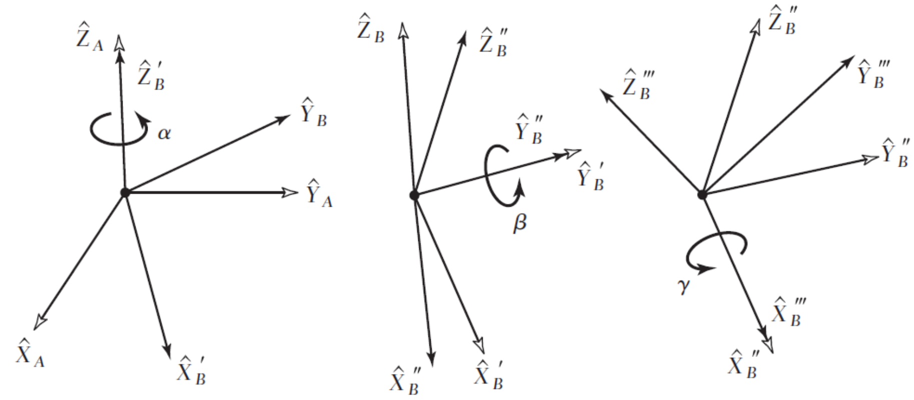


Figura 2.18: Ângulos Z-Y-X de Euler.

Três rotações tomadas em torno de eixos fixos resultam na mesma orientação final que as mesmas três rotações tomadas na ordem oposta em torno do eixo do sistema de referência em movimento.

Ângulos Z-Y-Z de Euler

Start with the frame coincident with a known frame $\{A\}$. Rotate $\{B\}$ first about $\hat{Z}_B$ by an angle α, then about $\hat{Y}_B$ by an angle β, and, finally, about Z_b by an angle γ.

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta c\gamma - s\alpha s\gamma & -c\alpha c\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta \\ s\alpha c\beta c\gamma + c\alpha s\gamma & -s\alpha c\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta \\ -s\beta c\gamma & s\beta s\gamma & c\beta \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}_{B}R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= \mathrm{Atan2}\left(\sqrt{r_{31}^2 + r_{32}^2}, r_{33}\right), \\
\alpha &= \mathrm{Atan2}(r_{23}/s\beta, r_{13}/s\beta), \\
\gamma &= \mathrm{Atan2}(r_{32}/s\beta, -r_{31}/s\beta).
\end{aligned}
$$

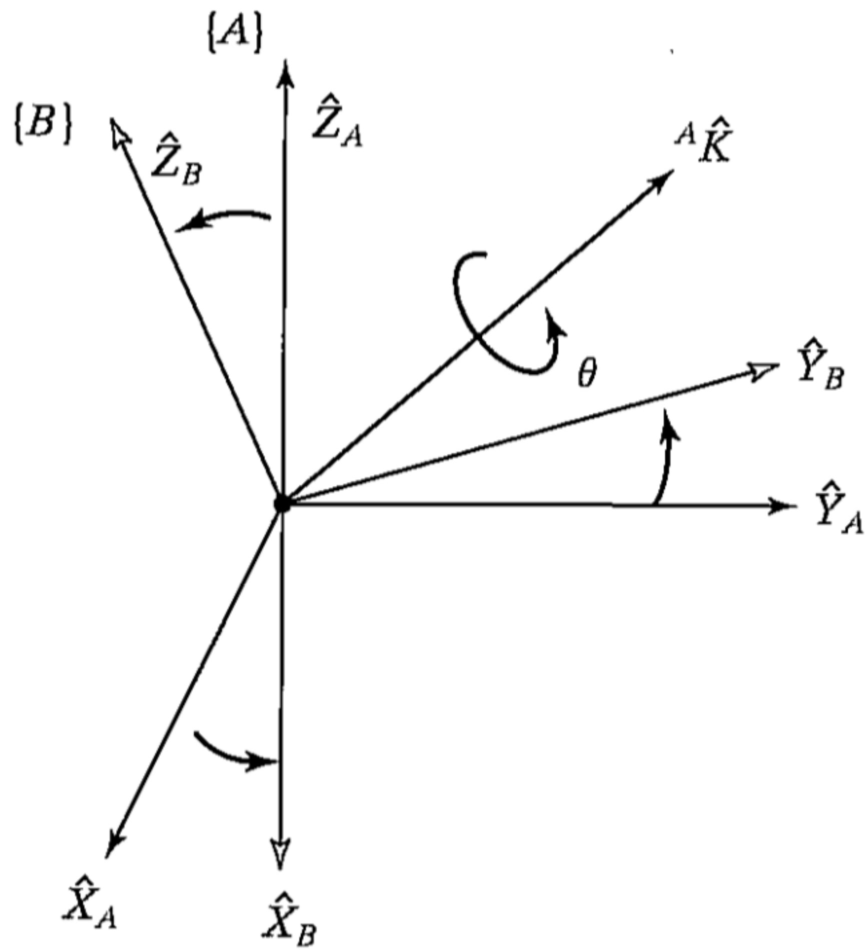
Outras convenções

- Vimos três convenções. Cada uma requer três rotações ao redor dos eixos principais numa ordem específica:
    - XYZ fixos.
    - ZYX de Euler.
    - ZYZ de Euler.

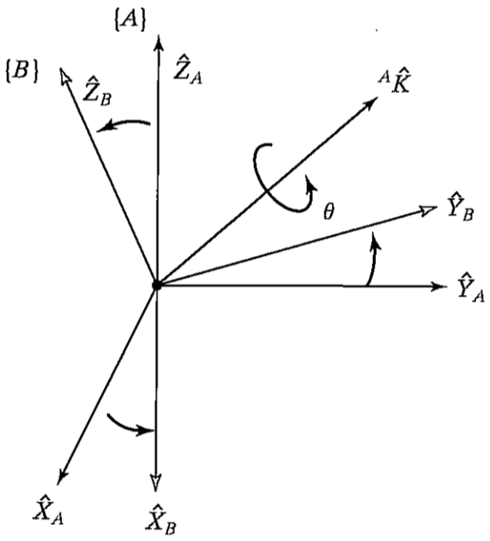
- Essas três são exemplos de 24 convenções de ângulo:
    - 12 de ângulos fixos.
    - 12 de ângulos de Euler.
    - Devido à dualidade, na verdade existem 12 convenções de uma matriz de rotação.

Representação equivalente eixo-ângulo

- Rotação em torno de um eixo arbitrário $\widehat{K}$.
- Exemplo: $R_{\widehat{K}}(30°)$.
- Considere {*B*}:
  - Iniciar com {*B*} coincidente com {*A*}.
  - Rodar {*B*} ao redor do vetor ${}^{A}\widehat{K}$ de um ângulo θ. de acordo com a **regra da mão direita**.



Representação equivalente eixo-ângulo



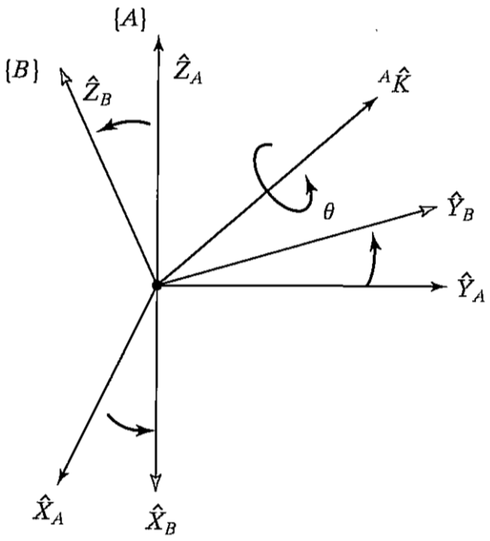
$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$v\theta = 1 - \cos\theta$$

$$^A\hat{K} = [k_x k_y k_z]^T$$

Representação equivalente eixo-ângulo

Dada a matriz de rotação



$$R_K(\theta) = \begin{bmatrix} k_x k_x v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y k_y v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z k_z v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$v\theta = 1 - \cos\theta$$

$${}^A\hat{K} = [k_x k_y k_z]^T$$

Podemos obter $\widehat{K}$ e θ fazendo

$$\theta = \mathrm{Acos}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right)$$

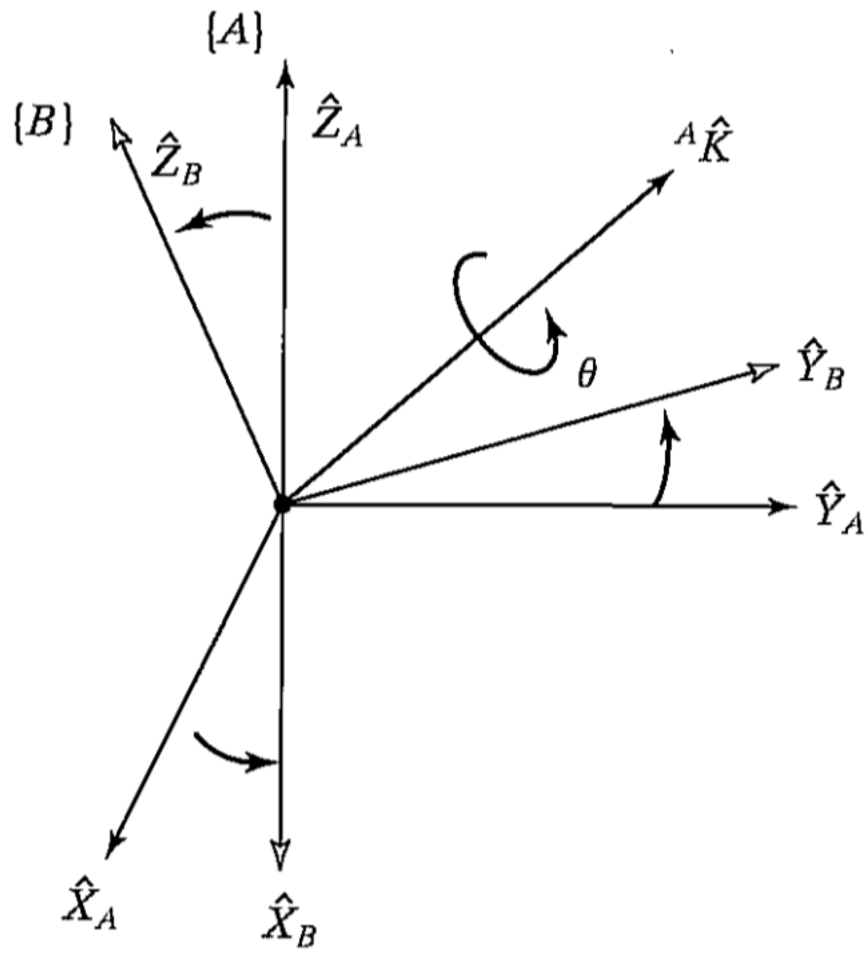
$$\hat{K} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

Representação equivalente eixo-ângulo

- Exemplo 2.8:

Determinar a descrição do frame $\{B\}$ dado que o mesmo é rotacionado de 30º ao redor da direção dada por

$$^{A}K = (0.7070\ 7070\ 0)^{T}.$$



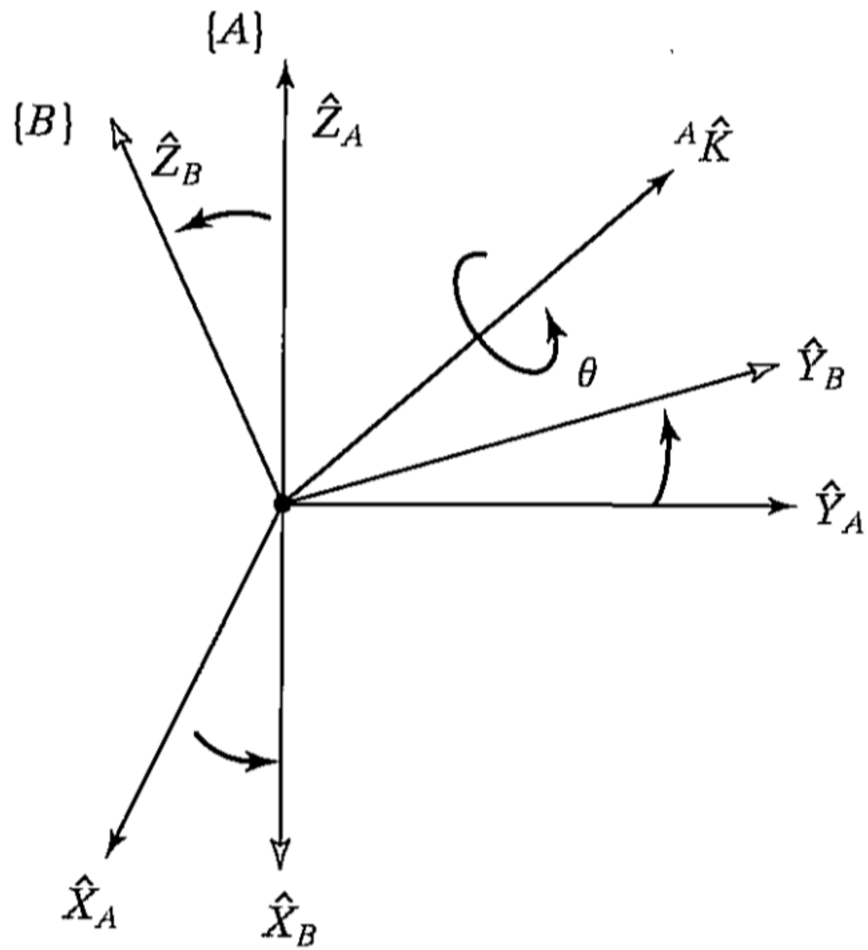
Representação equivalente eixo-ângulo

- Exemplo 2.8:

Determinar a descrição do frame $\{B\}$ dado que o mesmo é rotacionado de 30º ao redor da direção dada por

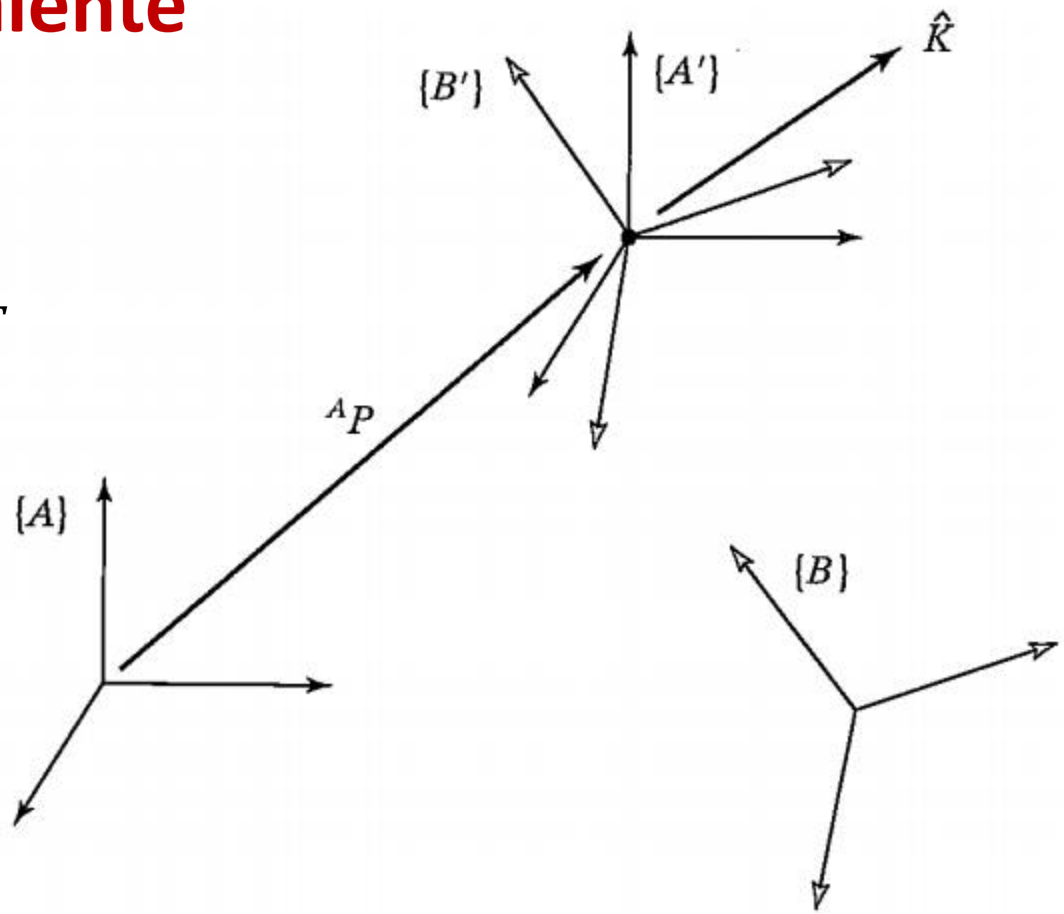
$$^{A}K = (0.7070\ 7070\ 0)^{T}.$$

$$^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$



Representação equivalente eixo-ângulo

- Exemplo 2.9:
- Direção ${}^{A}\widehat{K} = [.7 \quad .7 \quad 0]^{T}$
- Ponto ${}^{A}P = [1 \quad 2 \quad 3]$



$${}^{A}_{B}T = {}^{A}_{A'}T \, {}^{A'}_{B'}T \, {}^{B'}_{B}T$$

$${}^{A}_{A'}T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

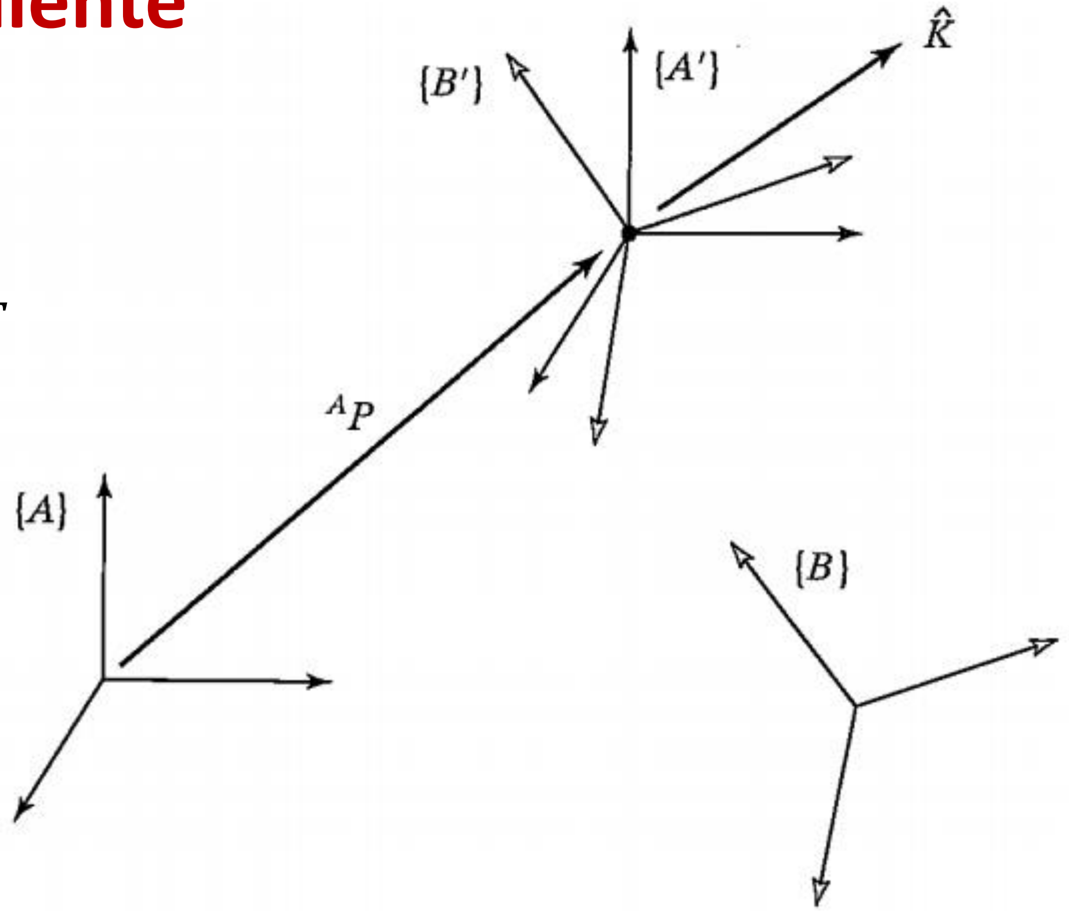
$${}^{A'}_{B'}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & 0.0 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 0.0 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \quad {}^{B'}_{B}T = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & -2.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -3.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Representação equivalente eixo-ângulo

- Exemplo 2.9:
- Direção $^{A}\widehat{K} = [.7 \quad .7 \quad 0]^T$
- Ponto $^{A}P = [1 \quad 2 \quad 3]$

$$^{A}_{B}T = {}^{A}_{A'}T \; {}^{A'}_{B'}T \; {}^{B'}_{B}T$$

$$^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.354 & -1.13 \\ 0.067 & 0.933 & -0.354 & 1.13 \\ -0.354 & 0.354 & 0.866 & 0.05 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.00 \end{bmatrix}$$



Uma rotação em torno de um eixo que não passa pela origem provoca uma mudança de posição além da mesma orientação final, como se o eixo passasse pela origem.

Parâmetros de Euler

• Parâmetros de Euler. Para um eixo $\hat{K} = [k_x \quad k_y \quad k_z]$ e o ângulo equivalente θ, os parâmetros de Euler são dados por:

$$\epsilon_1 = k_x \sin\frac{\theta}{2},$$

$$\epsilon_2 = k_y \sin\frac{\theta}{2},$$

$$\epsilon_3 = k_z \sin\frac{\theta}{2},$$

$$\epsilon_4 = \cos\frac{\theta}{2}.$$

Observa-se que: $\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2 + \epsilon_4^2 = 1$

A matriz rotacional R_ϵ:

$$R_\epsilon = \begin{bmatrix} 1-2\epsilon_2^2-2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3\epsilon_4) & 2(\epsilon_1\epsilon_3+\epsilon_2\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_2+\epsilon_3\epsilon_4) & 1-2\epsilon_1^2-2\epsilon_3^2 & 2(\epsilon_2\epsilon_3-\epsilon_1\epsilon_4) \\ 2(\epsilon_1\epsilon_3-\epsilon_2\epsilon_4) & 2(\epsilon_2\epsilon_3+\epsilon_1\epsilon_4) & 1-2\epsilon_1^2-2\epsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

Dada R_ϵ, os parâmetros de Euler são:

$$\epsilon_1 = \frac{r_{32}-r_{23}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_2 = \frac{r_{13}-r_{31}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_3 = \frac{r_{21}-r_{12}}{4\epsilon_4},$$

$$\epsilon_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{33}}$$

Transformação de vetores livres

•Trataremos com vetores velocidade e força no futuro.

•Vetores são iguais se têm mesmas *dimensões*, *magnitude* e *direção*.

•Vetores iguais podem ter diferentes linhas de ação.

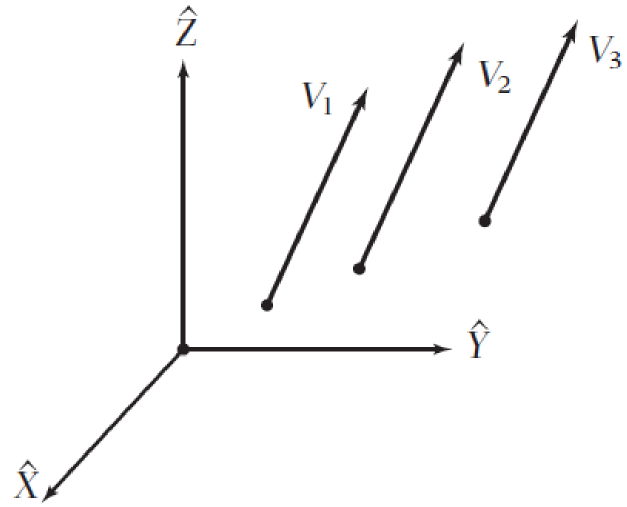


Figura 2.21: Vetores de velocidade igual.

Transformação de vetores livres

•Dois vetores são equivalentes em uma determinada capacidade se ambos produzem exatamente o mesmo efeito nessa capacidade.

•A igualdade depende do caso:

 •Distância percorrida? Iguais.

 •Altura acima do plano *xy*? Diferentes.

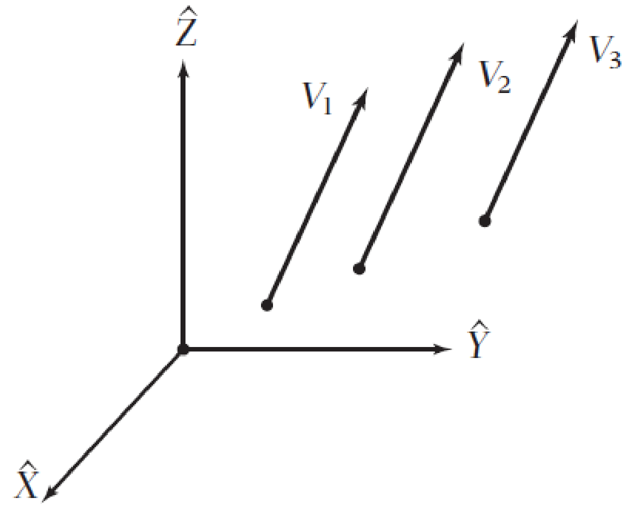


Figura 2.21: Vetores de velocidade igual.

Transformação de vetores livres

- Vetor linha. Depende da linha de ação, junto com direção e magnitude. Ex.: Vetor força.

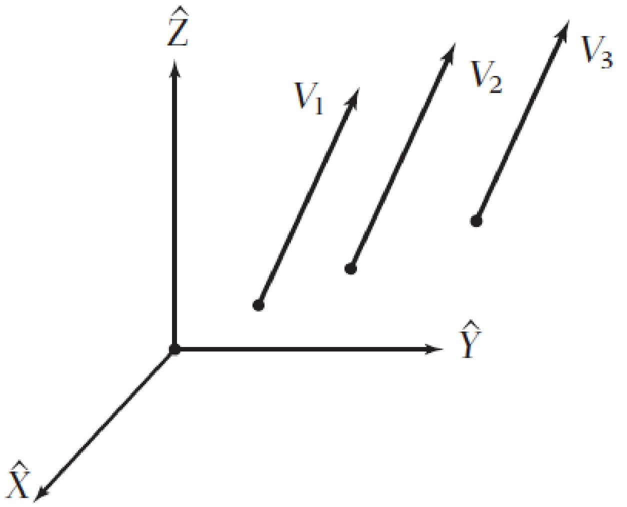


Figura 2.21: Vetores de velocidade igual.

Transformação de vetores livres

- Vetor livre. Pode ser aplicado em qualquer lugar do espaço se a magnitude e direção sejam preservados. Ex.: Velocidade.

$$^{A}V = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V$$

Se $^{B}V = 5\hat{X}$

então $^{A}V = 5\hat{Y}$