

Capítulo 3

Cinemática dos manipuladores

Cinemática dos manipuladores

Neste capítulo, abordaremos:

- 3.2 Descrição de um elo.
- 3.3 Descrição da conexão dos elos.
- 3.4 Convenção para fixar sistemas de referência aos elos.
- 3.5 Cinemática dos manipuladores.
- 3.6 Espaço do atuador, espaço da junta e espaço cartesiano.
- 3.7 Exemplos: cinemática de dois robôs industriais.
- 3.8 Sistemas de referência com nomes padrão.
- 3.9 Onde está a ferramenta?

Introdução

- *Cinemática* é a ciência que estuda o movimento sem considerar as forças que o causam.
- Na cinemática estudamos:
 - Posição $x(t)$;
 - Velocidade $\dot{x}(t)$;
 - Aceleração $\ddot{x}(t)$;
- O estudo da *cinemática dos manipuladores* envolve as propriedades geométricas e do movimento em função do tempo.
- A *dinâmica* trata das relações entre forças, torques e movimento.

Introdução

- Para que possamos estudar a cinemática de um manipulador, vamos fixar *frames* nas partes do braço e descrever as relações entre eles.
- Vamos analisar como a *localização* desses frames varia de acordo com o *movimento*.
- Especificamente, estamos interessado em estudar:
 - A **posição do efetuador** em função:
 - Da base, e;
 - Das variáveis de juntas.

Descrição de um elo

- Elos são numerados a partir da base (l_0).
- O primeiro corpo móvel é o l_1 .
- Final do braço é l_n .
- Para posicionar um efetuador no espaço tri-dimensional, 6 graus de liberdade são necessários (3 de posição + 3 de orientação).
- Manipuladores típicos têm 5 ou 6 juntas.
- Várias características:
 - Material, resistência, rigidez, localização, articulação, forma externa, peso, inércia, etc.

Descrição de um elo

- Para os nossos propósitos:
 - Um elo é considerado um corpo rígido que define a relação entre os eixos de duas juntas vizinhas do manipulador.
 - O eixo da junta i é definido como a linha (ou vetor direção) em torno do qual o elo i roda em torno do elo $i - 1$.
 - Um elo pode ser definido por dois números.

Descrição de um elo

A distância entre dois eixos é dada pela linha perpendicular a ambos (única a menos que os eixos sejam paralelos)..

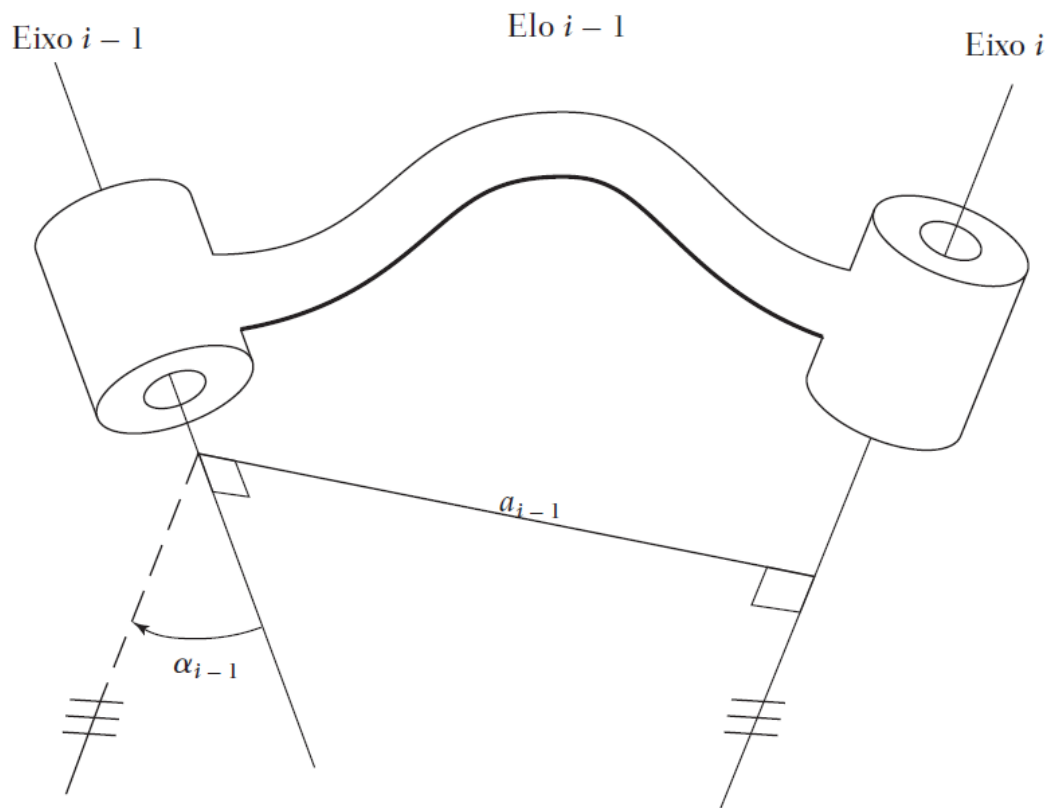


Figura 3.2: A função cinemática de um elo é manter uma relação fixa entre os dois eixos de juntas que ele sustenta. Essa relação pode ser descrita com dois parâmetros: o comprimento do elo, a , e a torção do elo, α .

Descrição de um elo

a_{i-1} = **comprimento** do elo $i - 1$ (*link length*).

α_{i-1} = **ângulo** de torção de elo (*link twist*).

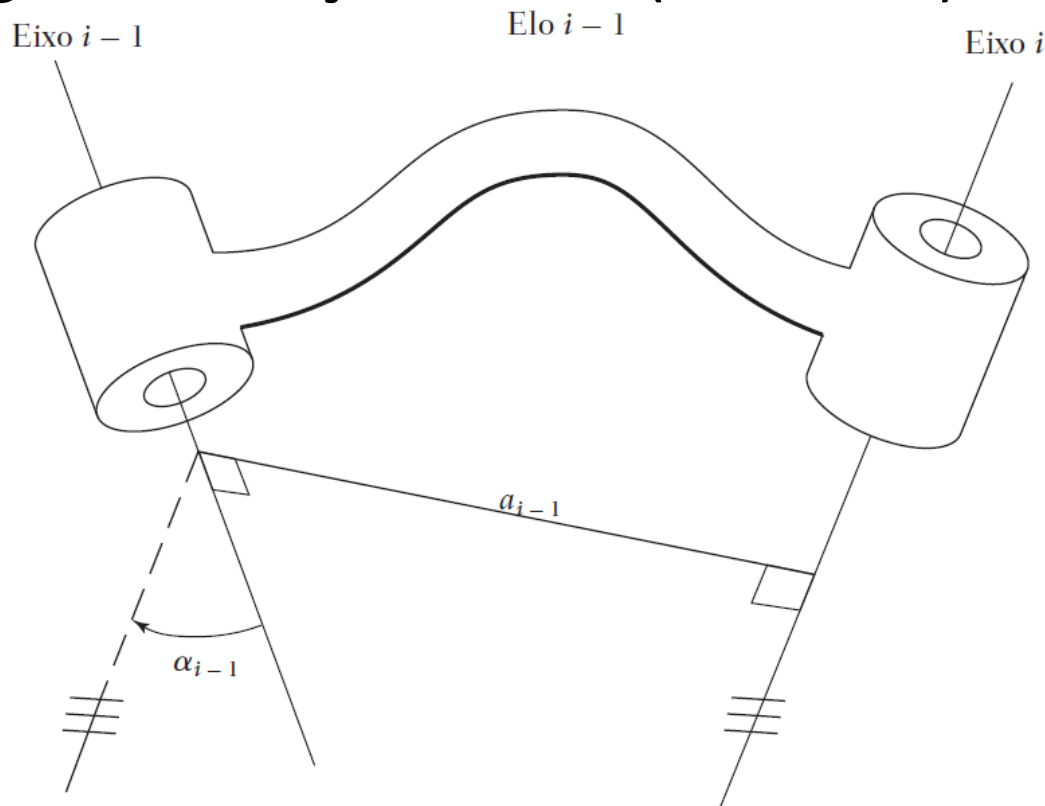


Figura 3.2: A função cinemática de um elo é manter uma relação fixa entre os dois eixos de juntas que ele sustenta. Essa relação pode ser descrita com dois parâmetros: o comprimento do elo, a , e a torção do elo, α .

Descrição de um elo

- Exemplo 3.1:
- “A” é a junta inicial.
- Encontrar o comprimento e o ângulo de torção do elo.

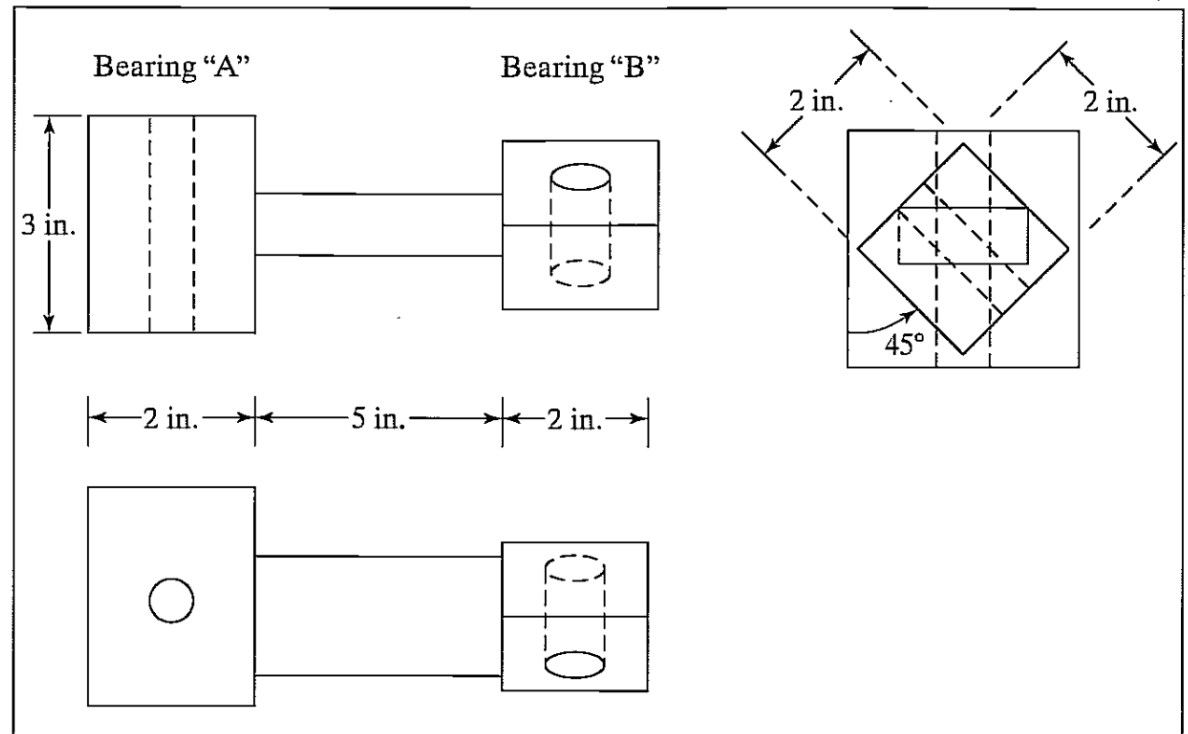


FIGURE 3.3: A simple link that supports two revolute axes.

Descrição de um elo

- Exemplo 3.1:
- Resposta:
- Length = 7 in.
- Angle = $+45^\circ$.

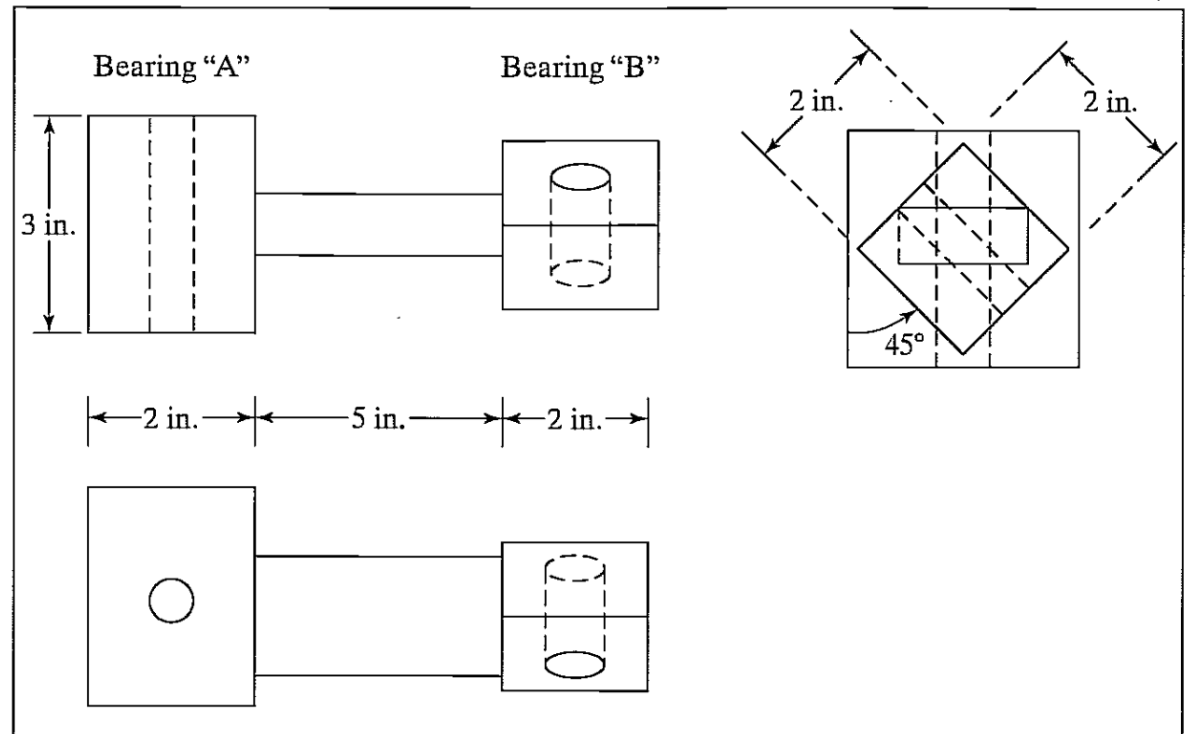


FIGURE 3.3: A simple link that supports two revolute axes.

Descrição da conexão dos elos

Conexão entre os elos:

- Força da junta, lubrificação, rolamento, engrenagem.
- Vamos nos preocupar com apenas duas quantidades:

Descrição da conexão dos elos

- Elos vizinhos compartilham um mesmo eixo de junta.
- Deslocamento de elo, d (*link offset*) variável para junta prismática.
- Ângulo de junta, θ (*joint angle*) variável para junta rotacional.

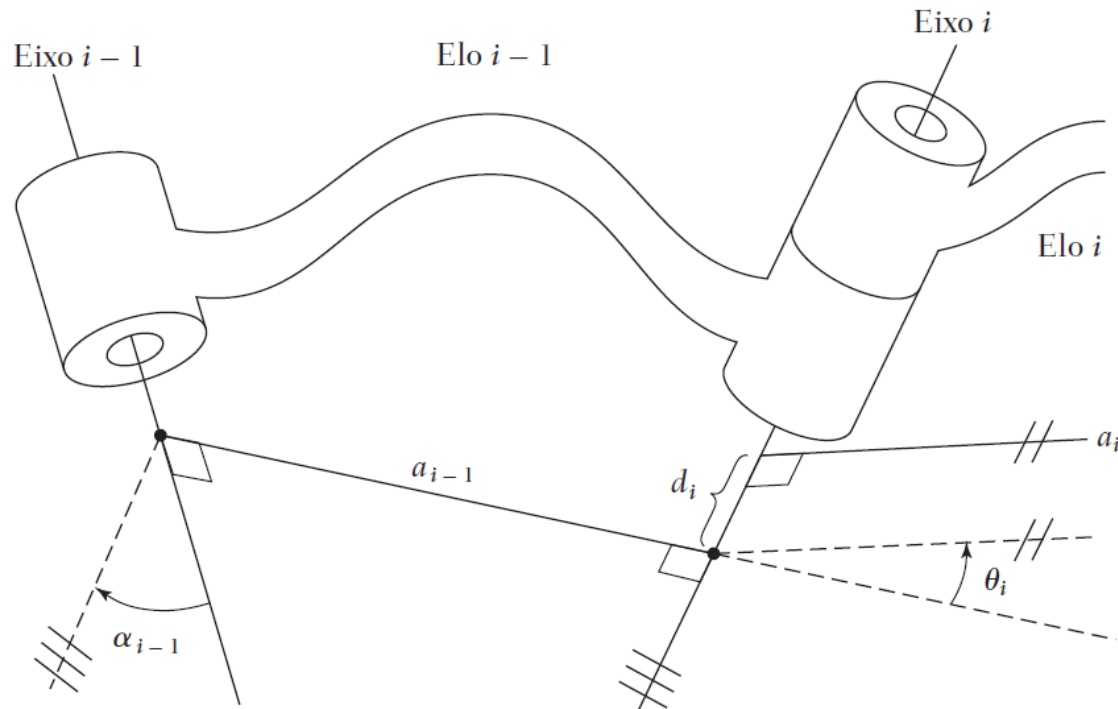


Figura 3.4: O deslocamento de elo, d , e o ângulo de junta, θ , são dois parâmetros que podem ser usados para descrever a natureza da conexão entre elos vizinhos.

Descrição da conexão dos elos

• Convenção para o primeiro e último elos da cadeia:

- $a_0 = a_n = 0$.
- $\alpha_0 = \alpha_n = 0$.

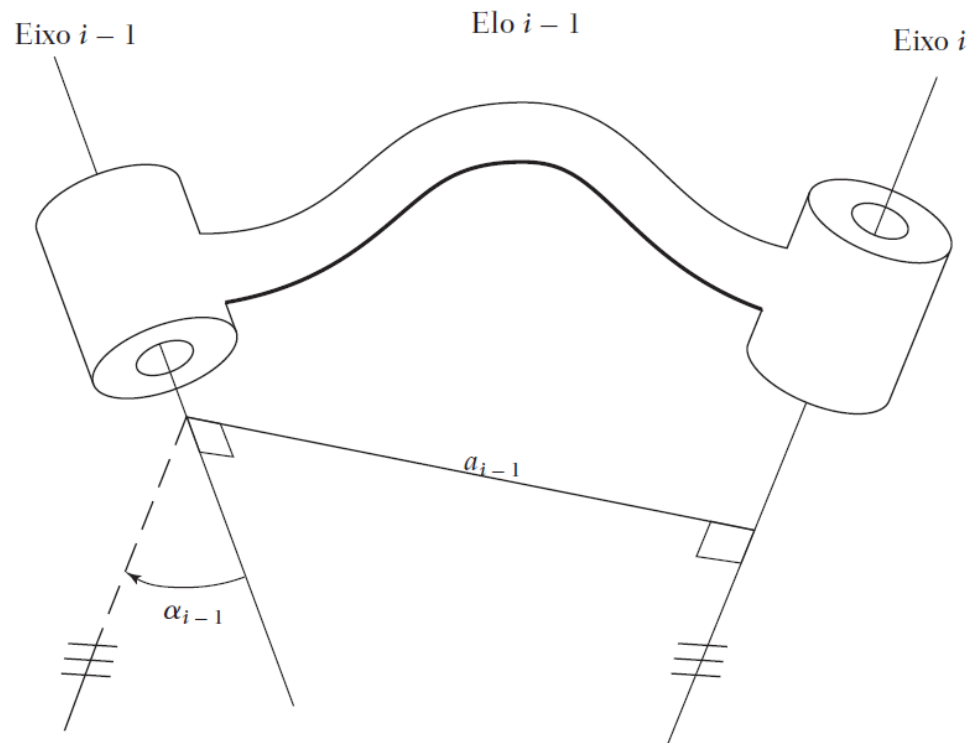


Figura 3.2: A função cinemática de um elo é manter uma relação fixa entre os dois eixos de juntas que ele sustenta. Essa relação pode ser descrita com dois parâmetros: o comprimento do elo, a , e a torção do elo, α .

Descrição da conexão dos elos

- Em resumo: Convenção de Denavit-Hartenberg; 4 parâmetros para cada elo.
- Dois descrevem o elo:
 - Comprimento a .
 - Torção α .
- Dois descrevem a conexão com o elo seguinte:
 - Deslocamento de elo d .
 - Ângulo de rotação θ .
- Para juntas prismáticas, d é a variável de junta.
- Para juntas de revolução, θ é a variável de junta.

Descrição da conexão dos elos

- Qualquer mecanismo pode ser determinado usando os parâmetros de Denavit-Hartenberg.
- Para um robô 6-DOF (*Degrees of Freedom*), 18 parâmetros são necessários.

Descrição de um elo

Two links, as described in Fig. 3.3, are connected as links 1 and 2 of a robot. Joint 2 is composed of a “B” bearing of link 1 and an “A” bearing of link 2, arranged so that the flat surfaces of the “A” and “B” bearings lie flush against each other. What is d_2 ?

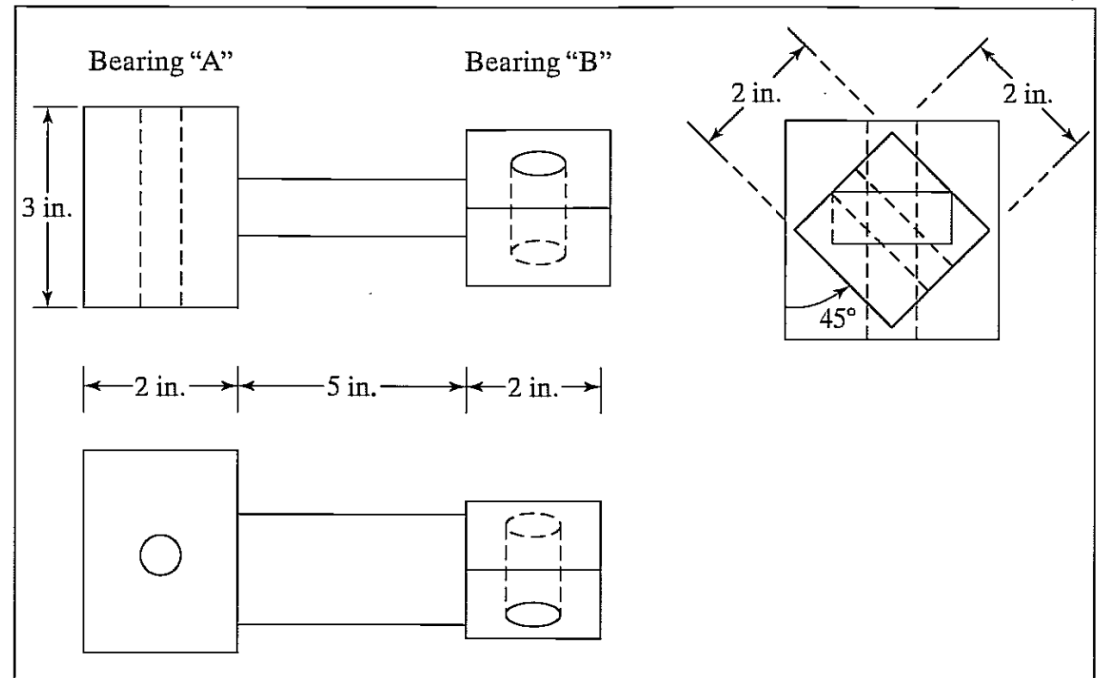


FIGURE 3.3: A simple link that supports two revolute axes.

Descrição de um elo

Two links, as described in Fig. 3.3, are connected as links 1 and 2 of a robot. Joint 2 is composed of a “B” bearing of link 1 and an “A” bearing of link 2, arranged so that the flat surfaces of the “A” and “B” bearings lie flush against each other. What is d_2 ?

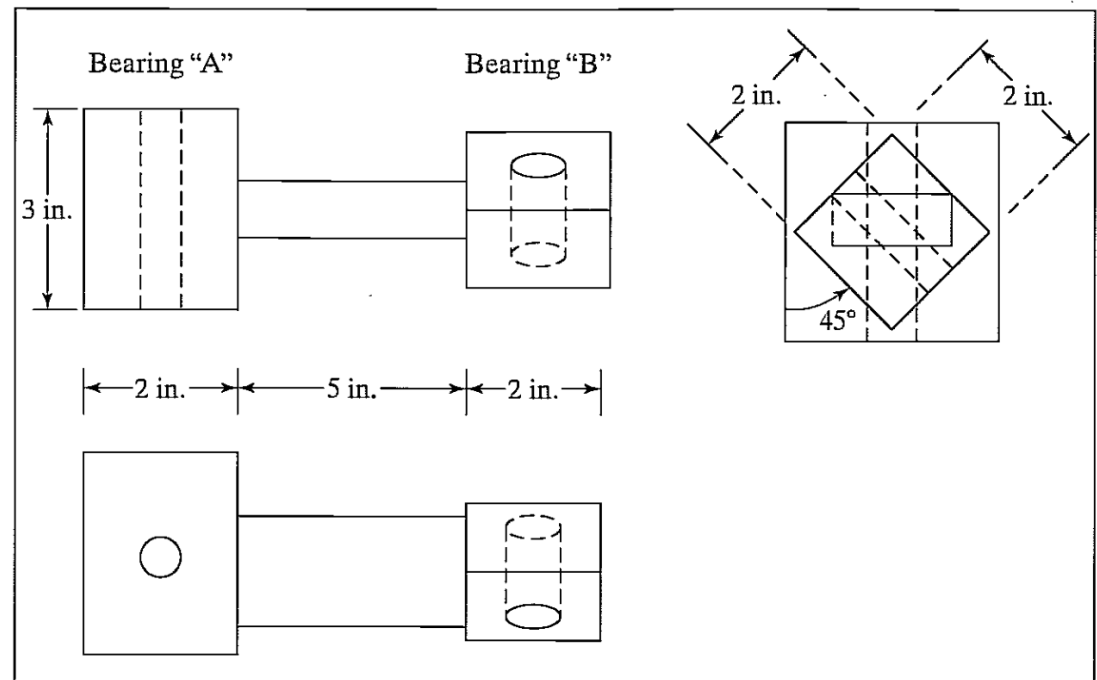
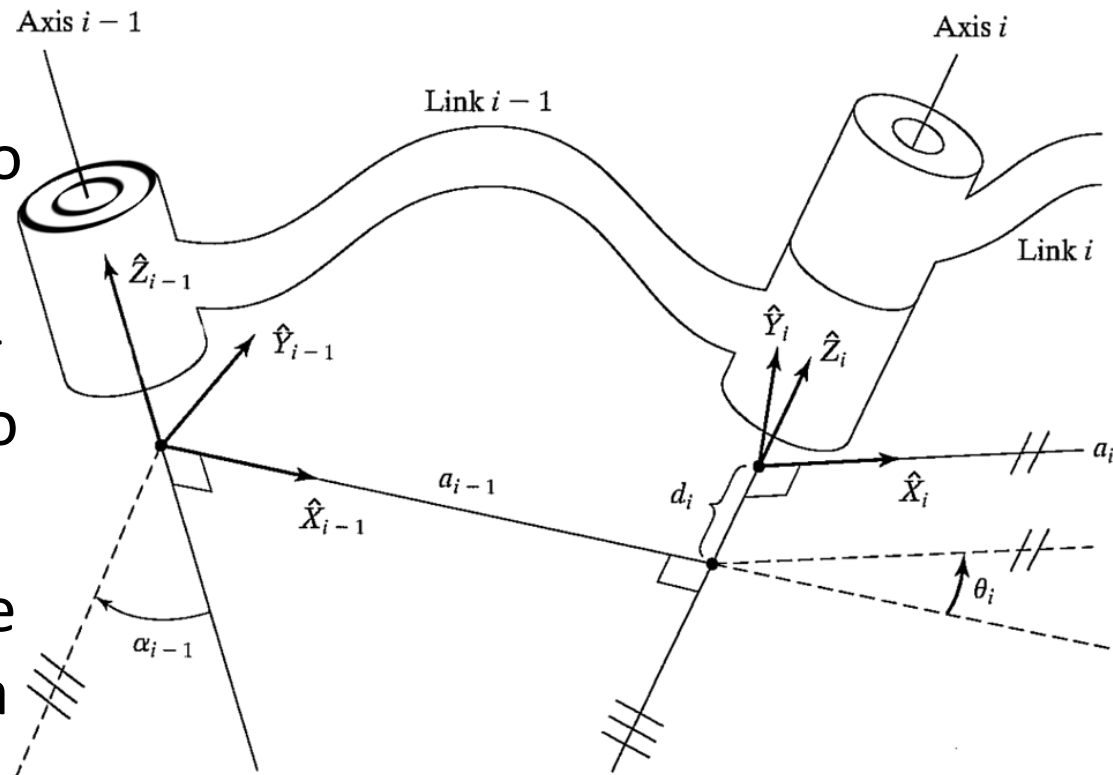


FIGURE 3.3: A simple link that supports two revolute axes.

The link offset d_2 is the offset at joint 2, which is the distance, measured along the joint 2 axis, between the mutual perpendicular of link 1 and that of link 2. From the drawings in Fig. 3.3, this is 2.5 inches.

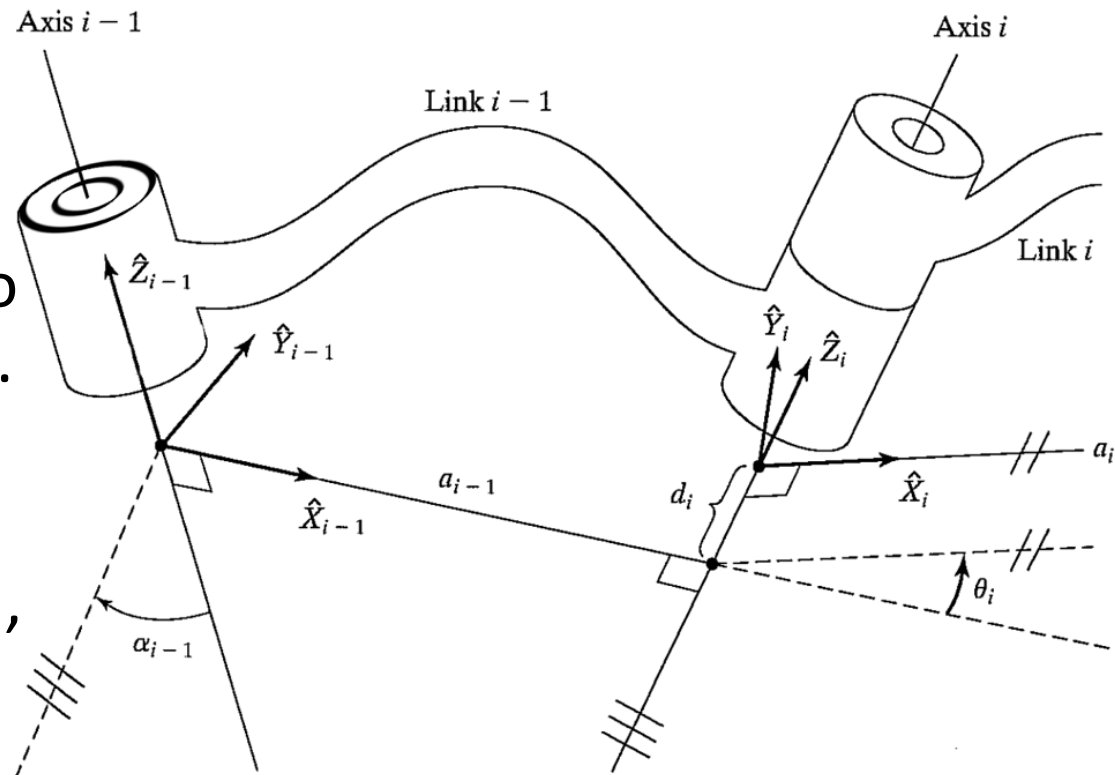
Convenção para fixar sistemas de referência aos elos

- Um *frame* $\{i\}$ fixado a cada *link* $\{i\}$.
- Eixo \hat{Z}_i coincide com o eixo da junta i .
- A origem do frame $\{i\}$ é onde a_i intercepta o eixo da junta i .
- \hat{X}_i aponta ao longo de a_i na direção da junta i à junta $i + 1$.



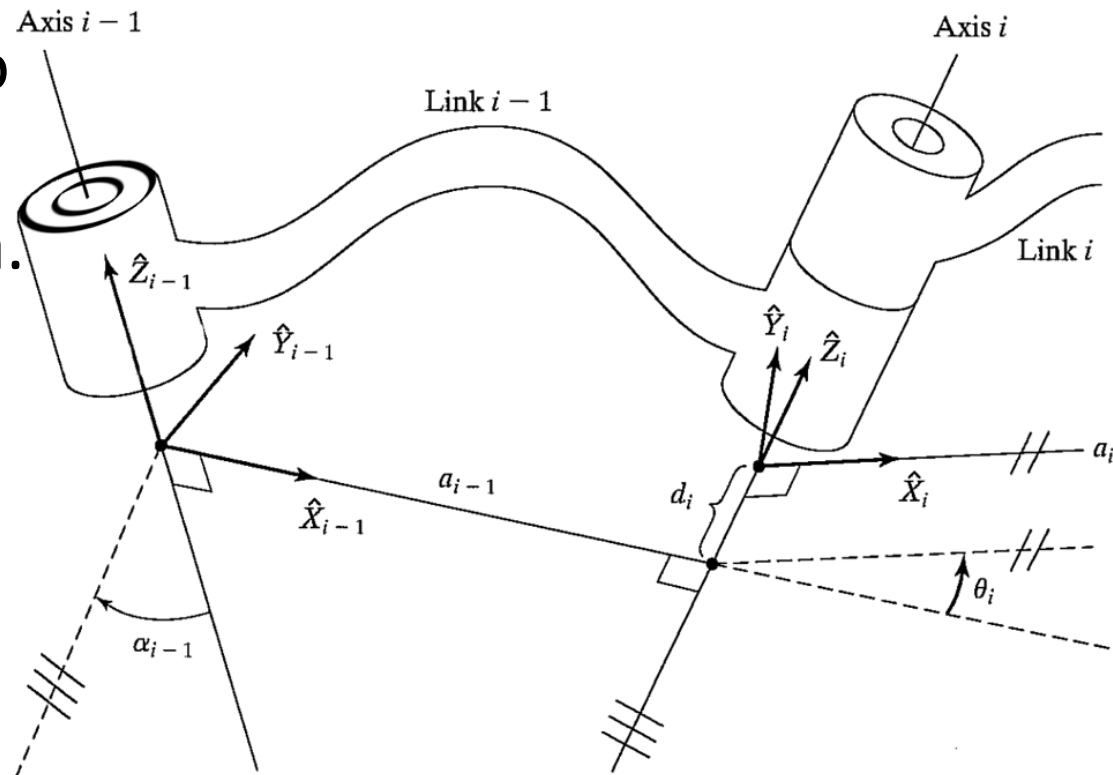
Convenção para fixar sistemas de referência aos elos

- Caso $a_i = 0$, \hat{X}_i é normal ao plano formado por \hat{Z}_i e \hat{Z}_{i+1} .
- Usa-se a regra da mão direita para definir α_i .
- Nesse caso, há liberdade para a escolha do sinal de α_i , dependendo da direção de \hat{X}_i .



Convenção para fixar sistemas de referência aos elos

- \hat{Y}_i é escolhido de forma a completar o frame segundo a regra da mão direita.



Convenção para fixar sistemas de referência aos elos

Primeiro elo da cadeia

- À base do robô é acoplado o frame $\{0\}$.
 - Esse frame é fixo.
 - É considerado o frame de referência.
 - As posições de todos os outros frames são consideradas em função deste.
 - É arbitrário.

Convenção para fixar sistemas de referência aos elos

Primeiro elo da cadeia

- Como é arbitrário, podemos simplificar:
 - Escolhe-se \hat{Z}_0 coincidente com \hat{Z}_1 .
 - Posiciona o frame $\{0\}$ coincidente com o frame $\{1\}$ quando a variável de junta 1 seja nula.
- Dessa forma:
 - $a_0 = \alpha_0 = 0$.
 - $d_1 = 0$ se a junta 1 for rotacional.
 - $\theta_1 = 0$ se a junta 1 for prismática.

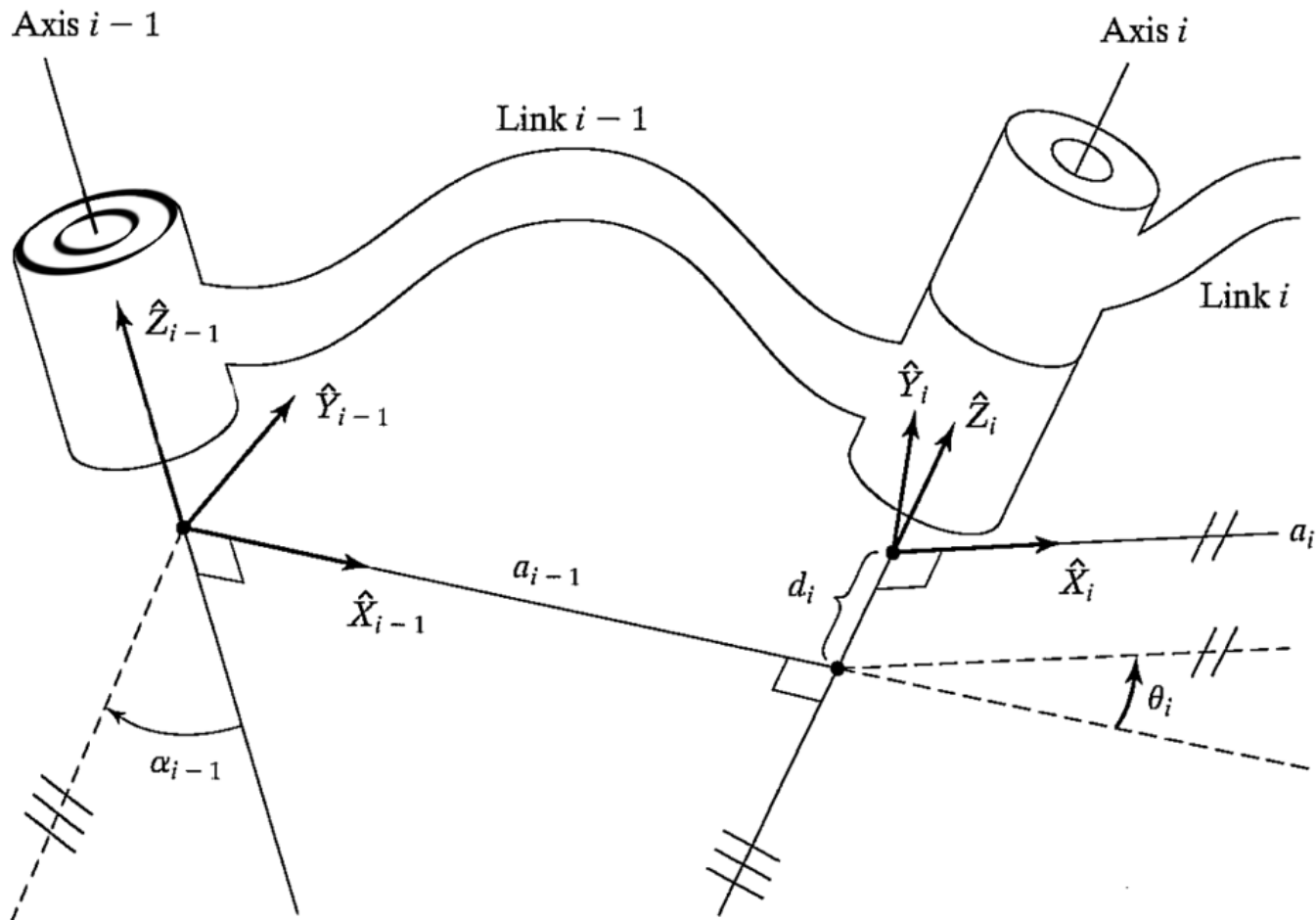
Convenção para fixar sistemas de referência aos elos

Último elo da cadeia

- Quando a junta n é rotacional:
 - Alinha-se \hat{X}_N com \hat{X}_{N-1} quando $\theta_n = 0$.
 - A origem do frame $\{N\}$ é tal que $d_n = 0$.
- Quando a junta n é prismática:
 - Alinha-se \hat{X}_N com \hat{X}_{N-1} quando $\theta_n = 0$.
 - A origem do frame $\{N\}$ é tal que $d_n = 0$.

Resumo:

- a_{i-1} = Distância de \hat{Z}_{i-1} a \hat{Z}_i ao longo de \hat{X}_{i-1} (LINK LENGTH).
- α_{i-1} = Ângulo de \hat{Z}_{i-1} a \hat{Z}_i ao redor de \hat{X}_{i-1} (LINK TWIST).
- d_i = Distância de \hat{X}_{i-1} a \hat{X}_i ao longo de \hat{Z}_i (LINK OFFSET).
- θ_i = Ângulo de \hat{X}_{i-1} a \hat{X}_i ao redor de \hat{Z}_i (JOINT ANGLE).



Resumo do procedimento para fixar sistemas de referência a elos:

1. Identificar e desenhar linhas infinitas nos eixos de juntas. Dos passos 2 a 5 abaixo, considere duas linhas vizinhas i e $i + 1$.
2. Identificar a perpendicular comum entre elas, ou ponto de interseção. Atribuir a origem do frame i como sendo o ponto em que a perpendicular intercepta o eixo i .
3. Atribuir \hat{Z}_i apontando ao longo do eixo de junta i .
4. Atribuir \hat{X}_i apontando ao longo da perpendicular comum, ou se os eixos (\hat{Z}_i e \hat{Z}_{i-1}) se interceptam, atribuir \hat{X}_i como apontando para a normal contendo os eixos.
5. Atribuir o eixo \hat{Y}_i de forma a completar o frame segundo a regra da mão direita.
6. Atribuir $\{0\}$ casando com $\{1\}$ quando a variável de junta 1 for 0. Para $\{N\}$, escolher uma origem e direção de \hat{X}_N de forma a zerar o máximo número de parâmetros possível.

Figure 3.6(a) shows a three-link planar arm. Because all three joints are revolute, this manipulator is sometimes called an ***RRR*** (or ***3R***) **mechanism**. Fig. 3.6(b) is a schematic representation of the same manipulator. Note the double hash marks indicated on each of the three axes, which indicate that these axes are parallel. Assign link frames to the mechanism and give the Denavit–Hartenberg parameters.

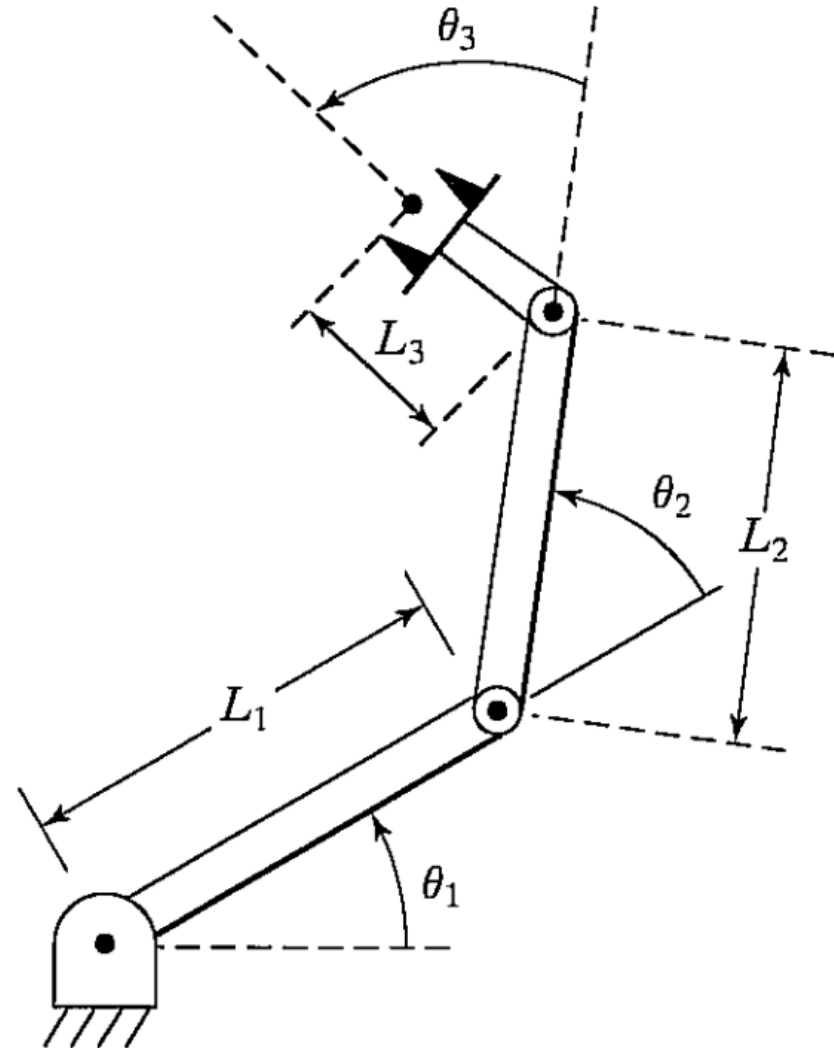


Figure 3.6(a) shows a three-link planar arm. Because all three joints are revolute, this manipulator is sometimes called an **RRR** (or **3R**) **mechanism**. Fig. 3.6(b) is a schematic representation of the same manipulator. Note the double hash marks indicated on each of the three axes, which indicate that these axes are parallel. Assign link frames to the mechanism and give the Denavit–Hartenberg parameters.

- Apenas juntas rotacionais. As variáveis são os θ_i .
- Todos os \hat{Z} são paralelos, saindo do papel.
- Portanto, todos os α_i são nulos.
- Quando $\theta_{i-1} = 0$, os eixos \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i devem se alinhar.

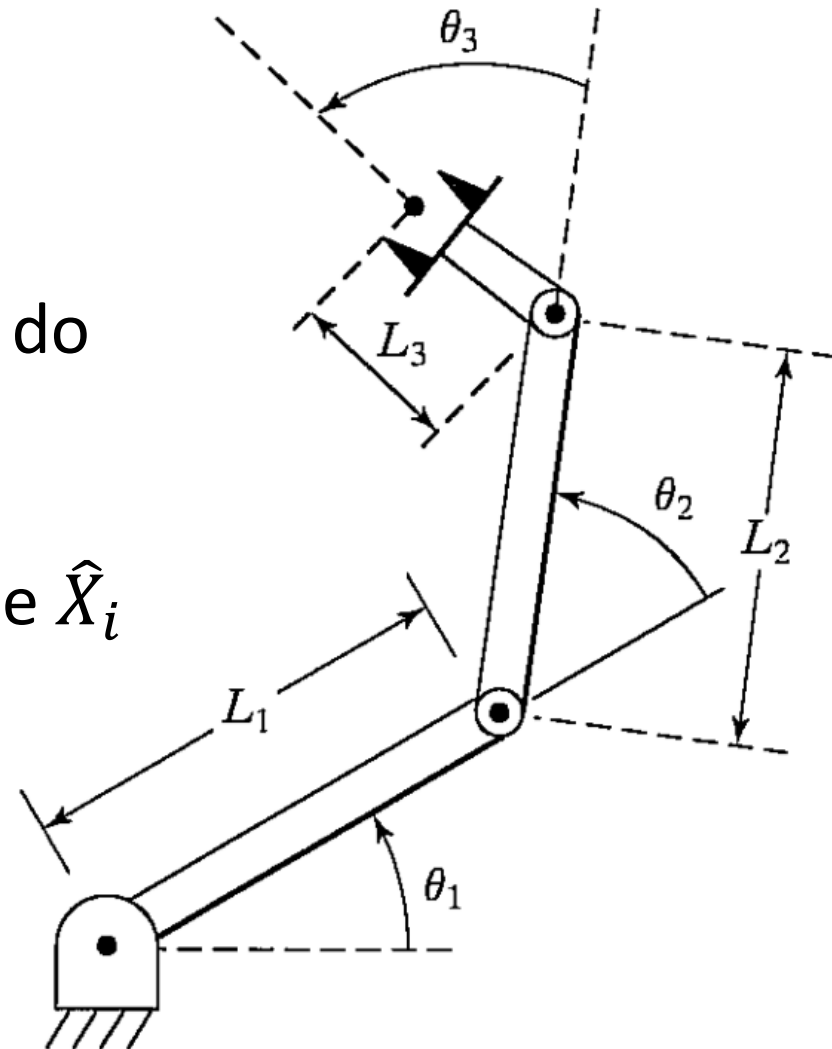


Figure 3.6(a) shows a three-link planar arm. Because all three joints are revolute, this manipulator is sometimes called an **RRR** (or **3R**) **mechanism**. Fig. 3.6(b) is a schematic representation of the same manipulator. Note the double hash marks indicated on each of the three axes, which indicate that these axes are parallel. Assign link frames to the mechanism and give the Denavit–Hartenberg parameters.

- Apenas juntas rotacionais.
As variáveis são os θ_i .
- Todos os \hat{Z} são paralelos, saindo do papel.
- Portanto, todos os α_i são nulos.
- Quando $\theta_{i-1} = 0$, os eixos \hat{X}_{i-1} e \hat{X}_i devem se alinhar.

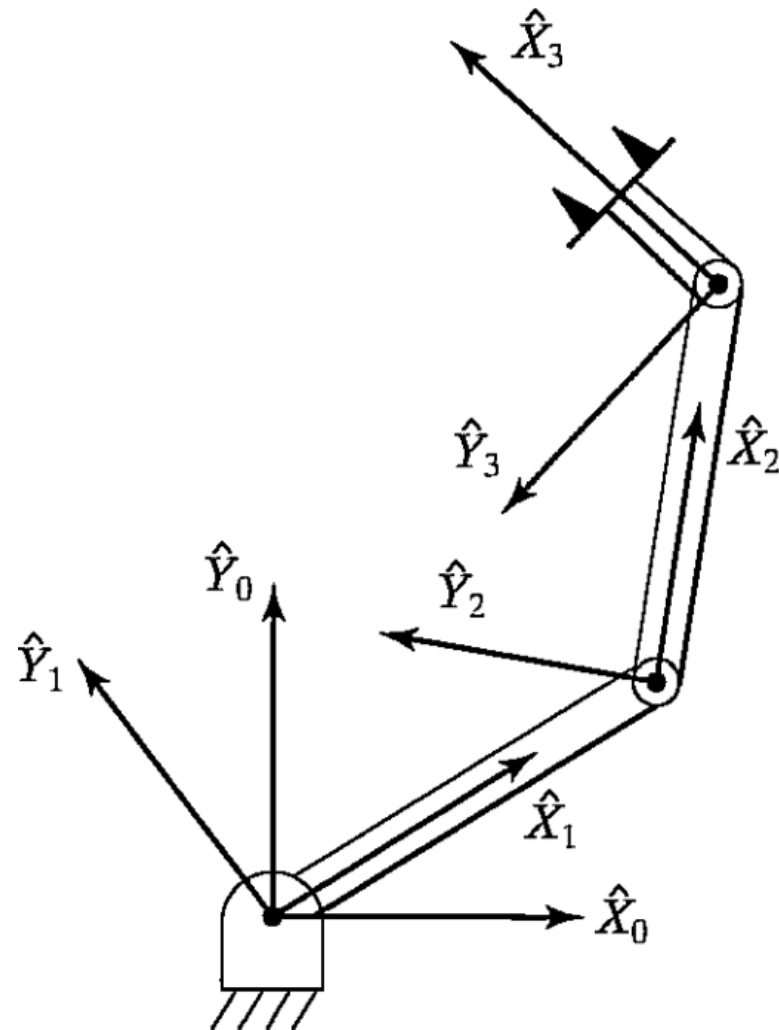


Figure 3.6(a) shows a three-link planar arm. Because all three joints are revolute, this manipulator is sometimes called an **RRR** (or **3R**) **mechanism**. Fig. 3.6(b) is a schematic representation of the same manipulator. Note the double hash marks indicated on each of the three axes, which indicate that these axes are parallel. Assign link frames to the mechanism and give the Denavit–Hartenberg parameters.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	α_0	a_0	d_1	θ_1
2	α_1	a_1	d_2	θ_2
3	α_2	a_2	d_3	θ_3

- α_{i-1} = Ângulo de \hat{Z}_{i-1} a \hat{Z}_i ao redor de \hat{X}_{i-1} .
- a_{i-1} = Distância de \hat{Z}_{i-1} a \hat{Z}_i ao longo de \hat{X}_{i-1} .
- d_i = Distância de \hat{X}_{i-1} a \hat{X}_i ao longo de \hat{Z}_i .
- θ_i = Ângulo de \hat{X}_{i-1} a \hat{X}_i ao redor de \hat{Z}_i .

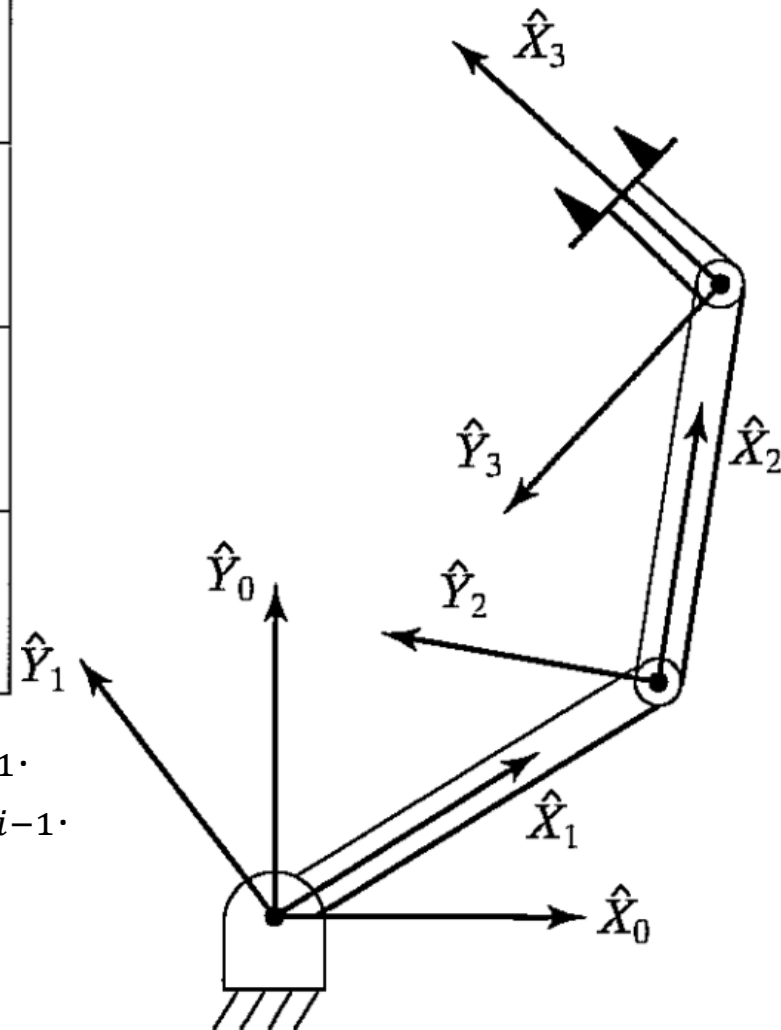
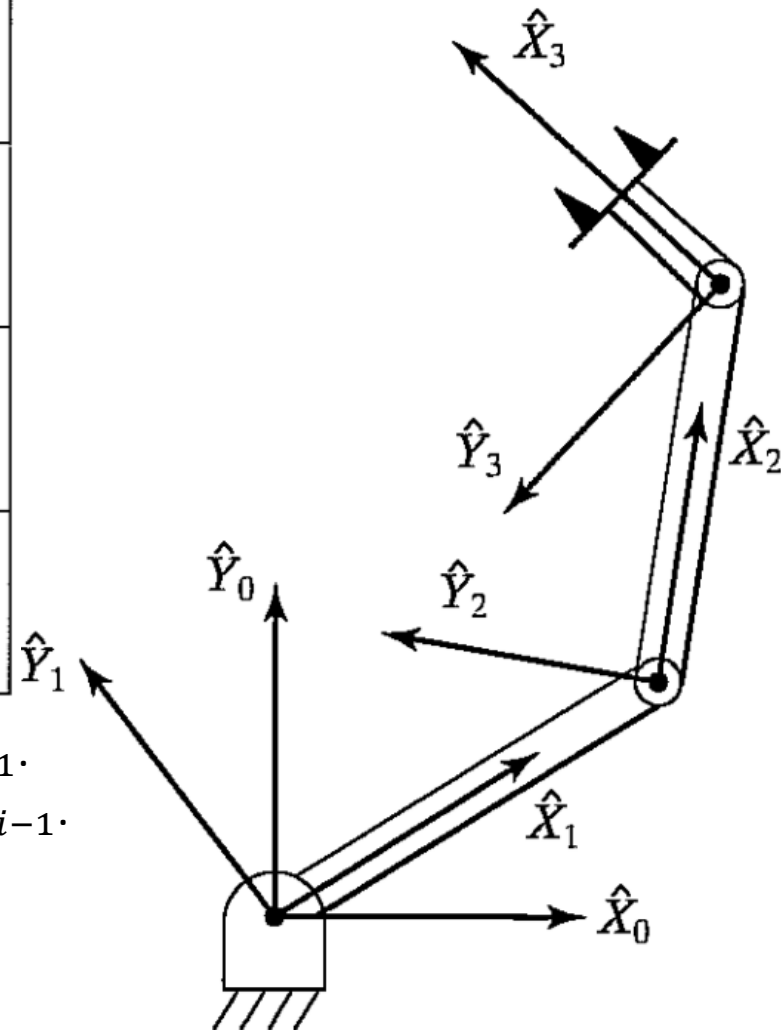


Figure 3.6(a) shows a three-link planar arm. Because all three joints are revolute, this manipulator is sometimes called an **RRR** (or **3R**) **mechanism**. Fig. 3.6(b) is a schematic representation of the same manipulator. Note the double hash marks indicated on each of the three axes, which indicate that these axes are parallel. Assign link frames to the mechanism and give the Denavit–Hartenberg parameters.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	α_0 0	a_0 0	d_1 0	θ_1 θ_1
2	α_1 0	a_1 L_1	d_2 0	θ_2 θ_2
3	α_2 0	a_2 L_2	d_3 0	θ_3 θ_3



- α_{i-1} = Ângulo de \hat{Z}_{i-1} a \hat{Z}_i ao redor de \hat{X}_{i-1} .
- a_{i-1} = Distância de \hat{Z}_{i-1} a \hat{Z}_i ao longo de \hat{X}_{i-1} .
- d_i = Distância de \hat{X}_{i-1} a \hat{X}_i ao longo de \hat{Z}_i .
- θ_i = Ângulo de \hat{X}_{i-1} a \hat{X}_i ao redor de \hat{Z}_i .

Figure 3.9(a) shows a robot having three degrees of freedom and one prismatic joint. This manipulator can be called an “*RPR* mechanism,” in a notation that specifies the type and order of the joints. It is a “cylindrical” robot whose first two joints are analogous to polar coordinates when viewed from above. The last joint (joint 3) provides “roll” for the hand. Figure 3.9(b) shows the same manipulator in schematic form.

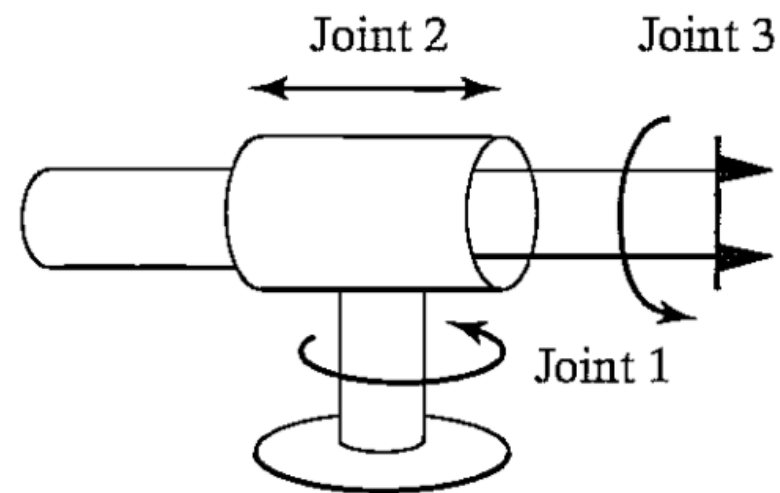


Figure 3.9(a) shows a robot having three degrees of freedom and one prismatic joint. This manipulator can be called an “*RPR* mechanism,” in a notation that specifies the type and order of the joints. It is a “cylindrical” robot whose first two joints are analogous to polar coordinates when viewed from above. The last joint (joint 3) provides “roll” for the hand. Figure 3.9(b) shows the same manipulator in schematic form.

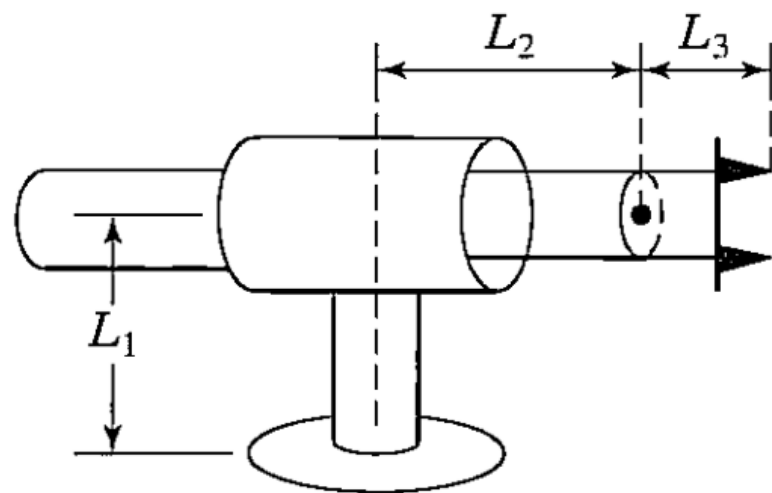


Figure 3.9(a) shows a robot having three degrees of freedom and one prismatic joint. This manipulator can be called an “*RPR* mechanism,” in a notation that specifies the type and order of the joints. It is a “cylindrical” robot whose first two joints are analogous to polar coordinates when viewed from above. The last joint (joint 3) provides “roll” for the hand. Figure 3.9(b) shows the same manipulator in schematic form.

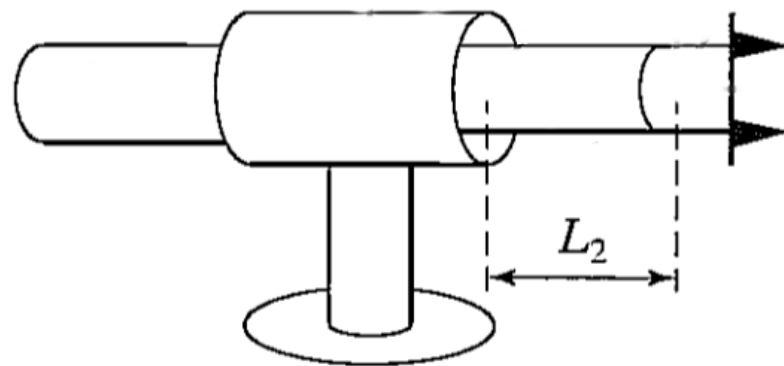
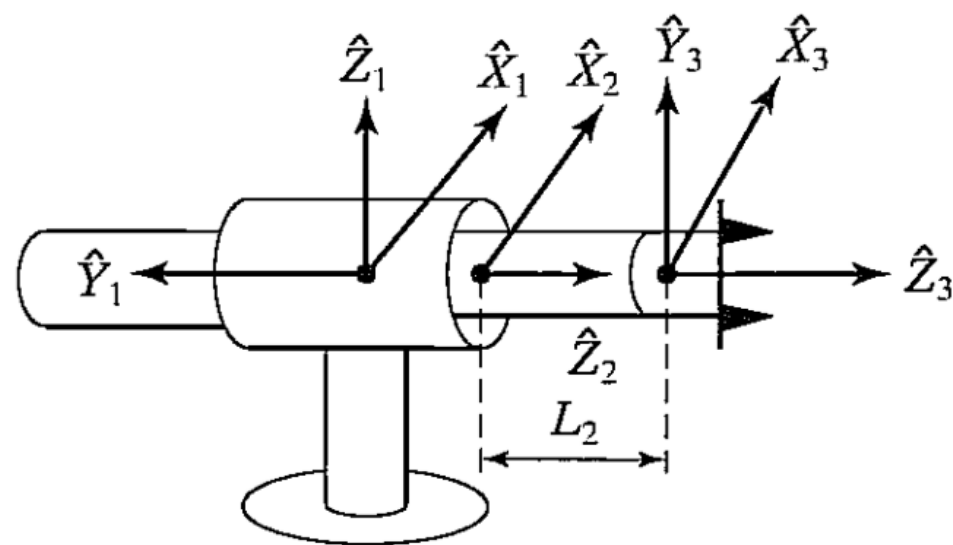


Figure 3.9(a) shows a robot having three degrees of freedom and one prismatic joint. This manipulator can be called an “*RPR* mechanism,” in a notation that specifies the type and order of the joints. It is a “cylindrical” robot whose first two joints are analogous to polar coordinates when viewed from above. The last joint (joint 3) provides “roll” for the hand. Figure 3.9(b) shows the same manipulator in schematic form.

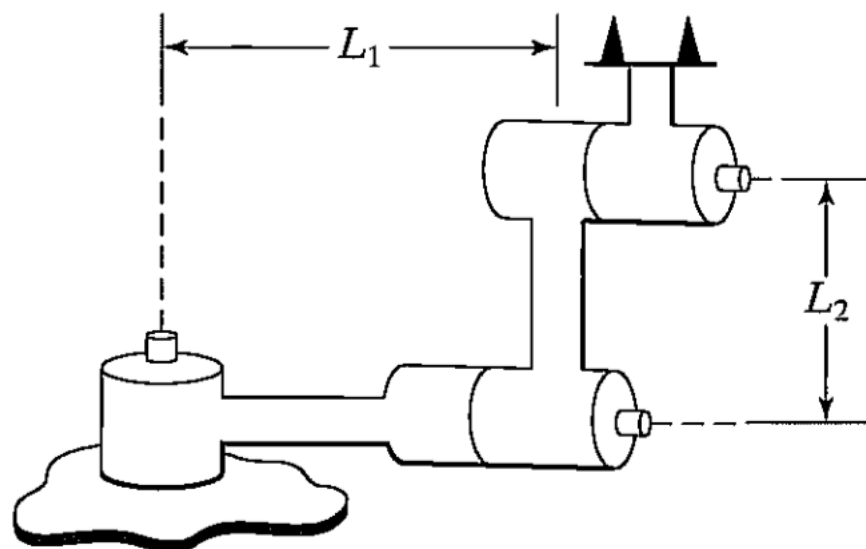
i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3



EXAMPLE 3.5

Figure 3.12(a) shows a three-link, 3R manipulator for which joint axes 1 and 2 intersect and axes 2 and 3 are parallel. Figure 3.12(b) shows the kinematic schematic of the manipulator. Note that the schematic includes annotations indicating that the first two axes are orthogonal and that the last two are parallel.

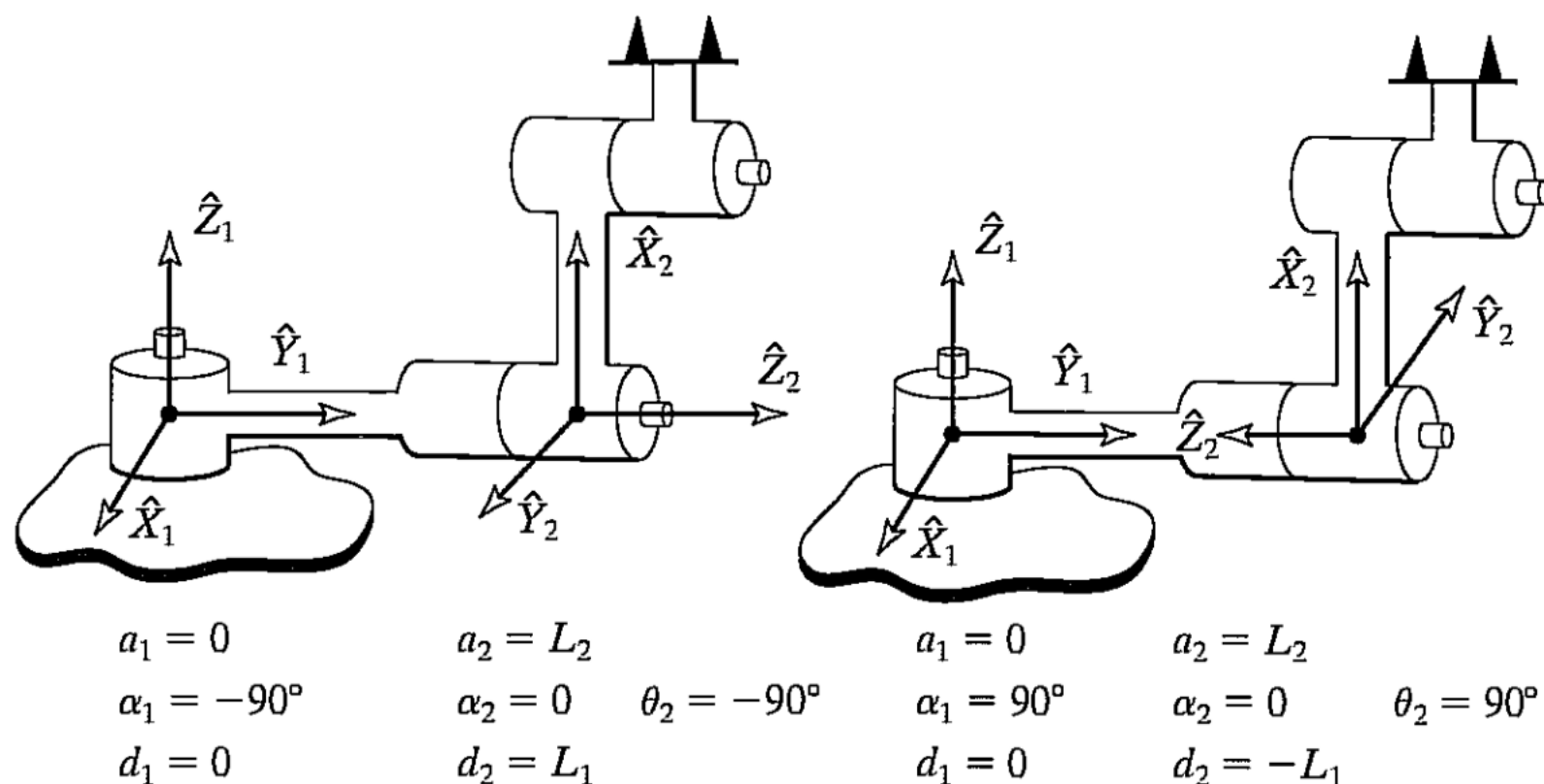
Demonstrate the nonuniqueness of frame assignments and of the Denavit–Hartenberg parameters by showing several possible correct assignments of frames {1} and {2}.



EXAMPLE 3.5

Figure 3.12(a) shows a three-link, 3R manipulator for which joint axes 1 and 2 intersect and axes 2 and 3 are parallel. Figure 3.12(b) shows the kinematic schematic of the manipulator. Note that the schematic includes annotations indicating that the first two axes are orthogonal and that the last two are parallel.

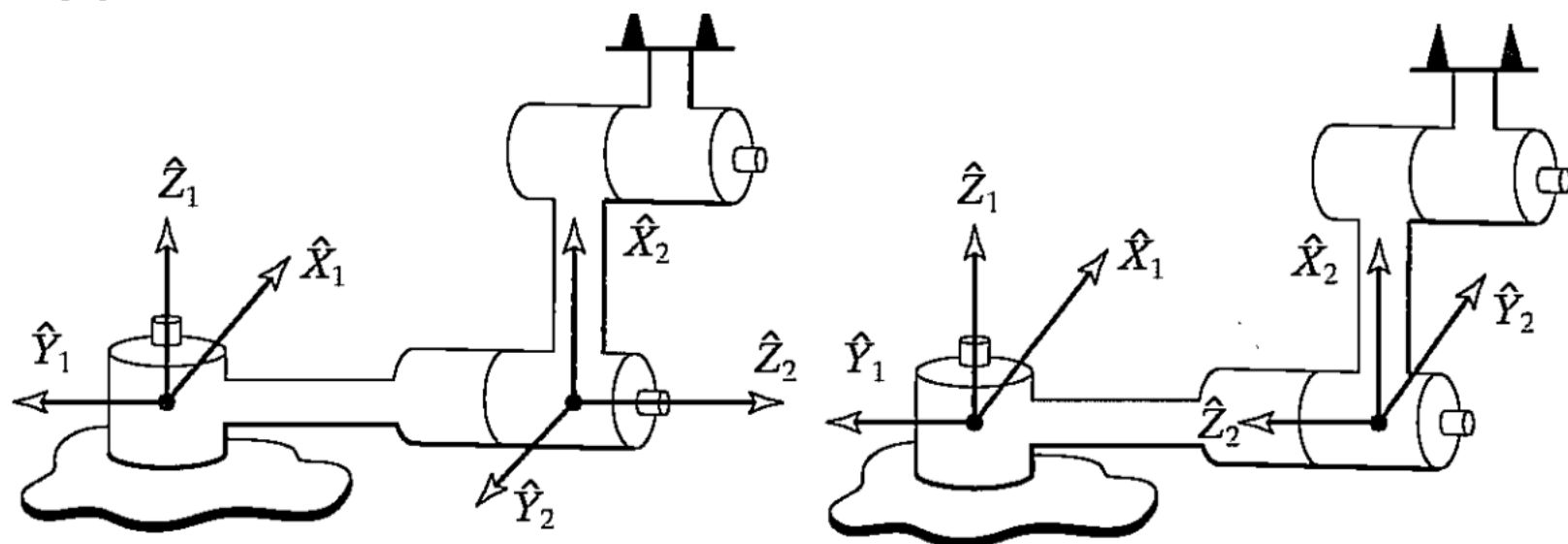
Demonstrate the nonuniqueness of frame assignments and of the Denavit–Hartenberg parameters by showing several possible correct assignments of frames {1} and {2}.



EXAMPLE 3.5

Figure 3.12(a) shows a three-link, 3R manipulator for which joint axes 1 and 2 intersect and axes 2 and 3 are parallel. Figure 3.12(b) shows the kinematic schematic of the manipulator. Note that the schematic includes annotations indicating that the first two axes are orthogonal and that the last two are parallel.

Demonstrate the nonuniqueness of frame assignments and of the Denavit–Hartenberg parameters by showing several possible correct assignments of frames {1} and {2}.

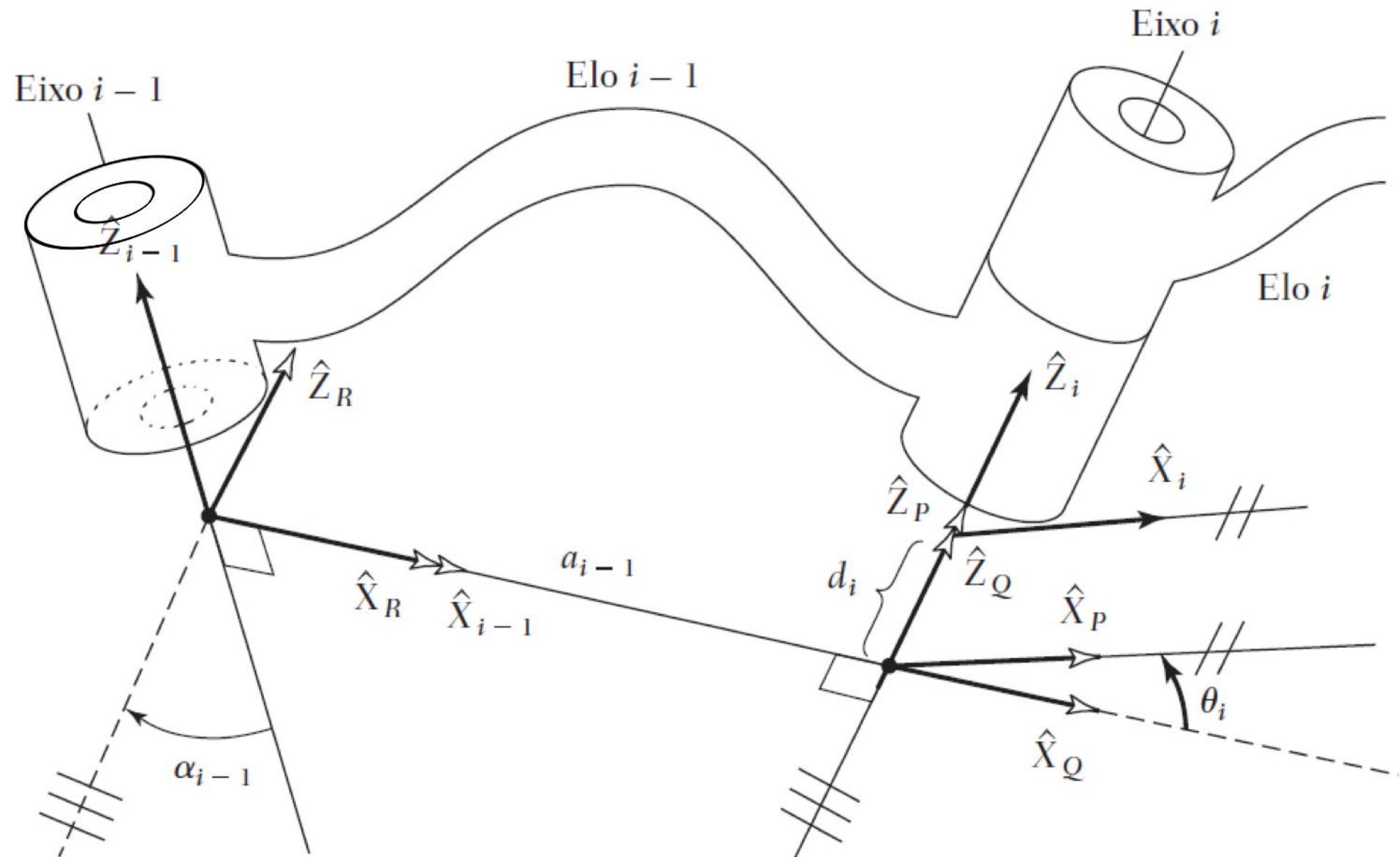


$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & a_2 = L_2 & \\ \alpha_1 = 90^\circ & \alpha_2 = 0 & \theta_2 = 90^\circ \\ d_1 = 0 & d_2 = L_1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0 & a_2 = L_2 & \\ \alpha_1 = -90^\circ & \alpha_2 = 0 & \theta_2 = -90^\circ \\ d_1 = 0 & d_2 = -L_1 & \end{array}$$

Derivação das transformações dos elos

- A transformada ${}^{i-1}_iT$ que relaciona o *frame* $\{i\}$ ao *frame* $\{i - 1\}$ é uma função dos quatro parâmetros de *link*, $(a_i, \alpha_i, d_i, \theta_i)$.
- Para um **dado robô**, a transformação depende apenas da variável de junta (os outros três parâmetros são fixos de acordo com a construção do elo).
- O problema do robô inteiro é reduzido a n sub-problemas.
- Cada transformada ${}^{i-1}_iT$ é obtida como a concatenação de quatro operações:
 - Rotação R .
 - Translação Q .
 - Rotação P .
 - Translação.



$${}^{i-1}_i T = R_X(\alpha_{i-1}) D_X(a_{i-1}) R_Z(\theta_i) D_Z(d_i)$$

$${}^{i-1}_i T = \text{Screw}_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Screw}_Z(d_i, \theta_i)$$

$${}^{i-1}_iT = R_X(\alpha_{i-1})D_X(a_{i-1})R_Z(\theta_i)D_Z(d_i)$$

$${}^{i-1}_iT = \text{Screw}_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Screw}_Z(d_i, \theta_i).$$

$${}^{i-1}_iT = R_X(\alpha_{i-1})D_X(a_{i-1})R_Z(\theta_i)D_Z(d_i)$$

$${}^{i-1}_iT = \text{Screw}_X(a_{i-1}, \alpha_{i-1}) \text{Screw}_Z(d_i, \theta_i).$$

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Using the link parameters shown in Fig. 3.11 for the robot of Fig. 3.9, compute the individual transformations for each link.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Using the link parameters shown in Fig. 3.11 for the robot of Fig. 3.9, compute the individual transformations for each link.

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	90°	0	d_2	0
3	0	0	L_2	θ_3

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & 0 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Once having derived these link transformations, we will find it a good idea to check them against common sense. For example, the elements of the fourth column of each transform should give the coordinates of the origin of the next higher frame.

Concatenando as transformações entre elos

- Uma vez que todas as transformadas ${}^{i-1}_iT$ são definidas, fazemos

$${}^0_N T = {}^0_1 T {}^1_2 T {}^2_3 T \dots {}^{N-1}_N T$$

Espaço do atuador, espaço da junta e espaço cartesiano

- As posições de todos os elos de um manipulador com n graus de liberdade são determinadas pelo **Vetor de Junta**, $(\theta_1 \quad \dots \quad \theta_n)^T$.
- **Espaço de junta** = espaço de vetores de junta.
- **Espaço cartesiano** = posição medida ao longo de eixos ortogonais.
- Espaço orientado para a **tarefa**.

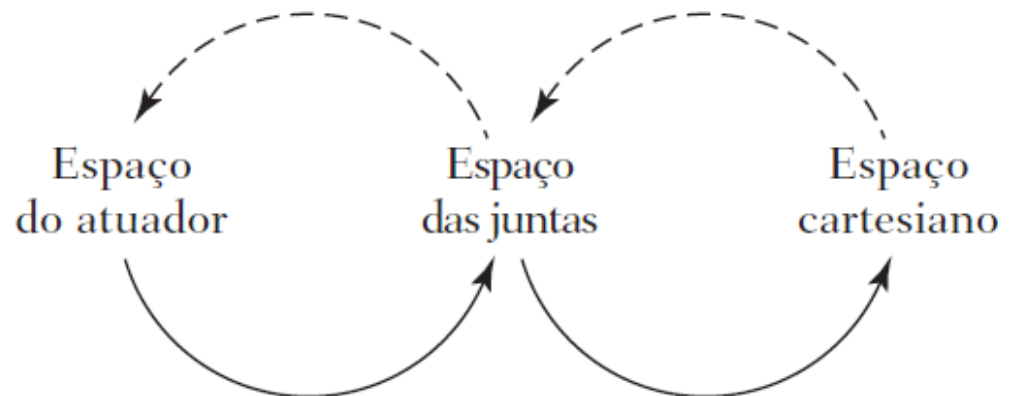


Figura 3.16: Mapeamentos entre descrições cinemáticas.

Espaço do atuador, espaço da junta e espaço cartesiano

- **Vetor atuador.** Às vezes, atuadores diferenciais são usados para mover uma única junta.
- **Espaço do atuador.**

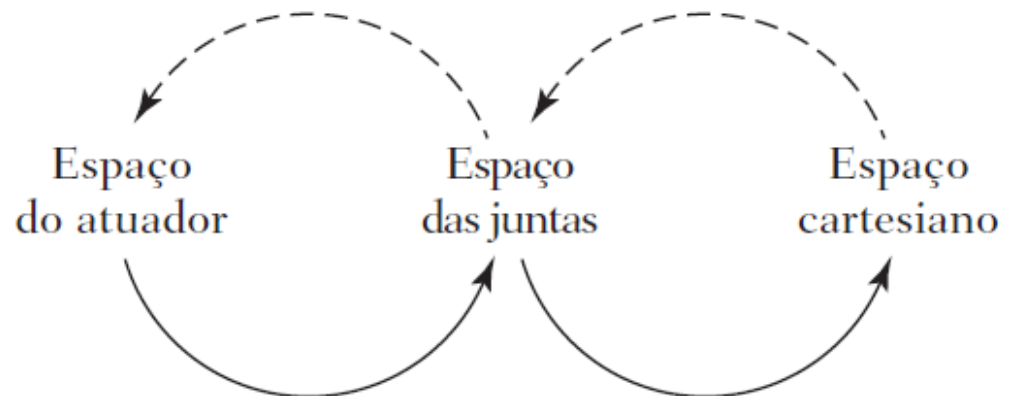


Figura 3.16: Mapeamentos entre descrições cinemáticas.

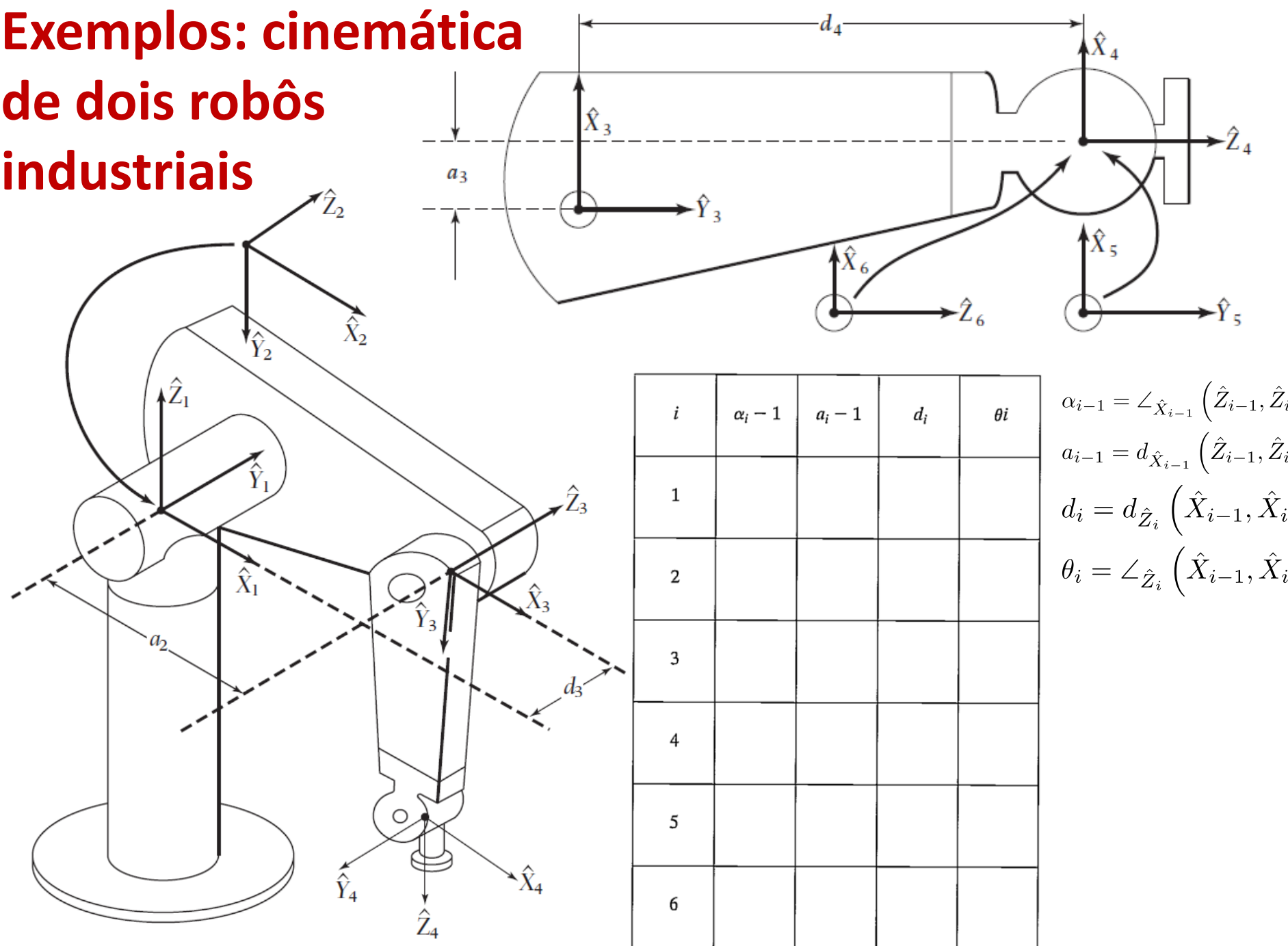
Exemplos: cinemática de dois robôs industriais

- O PUMA 560 (6R).



Figura 3.17: O Unimation PUMA 560. Cortesia da Unimation Incorporated, Shelter Rock Lane, Danbury, Connecticut.

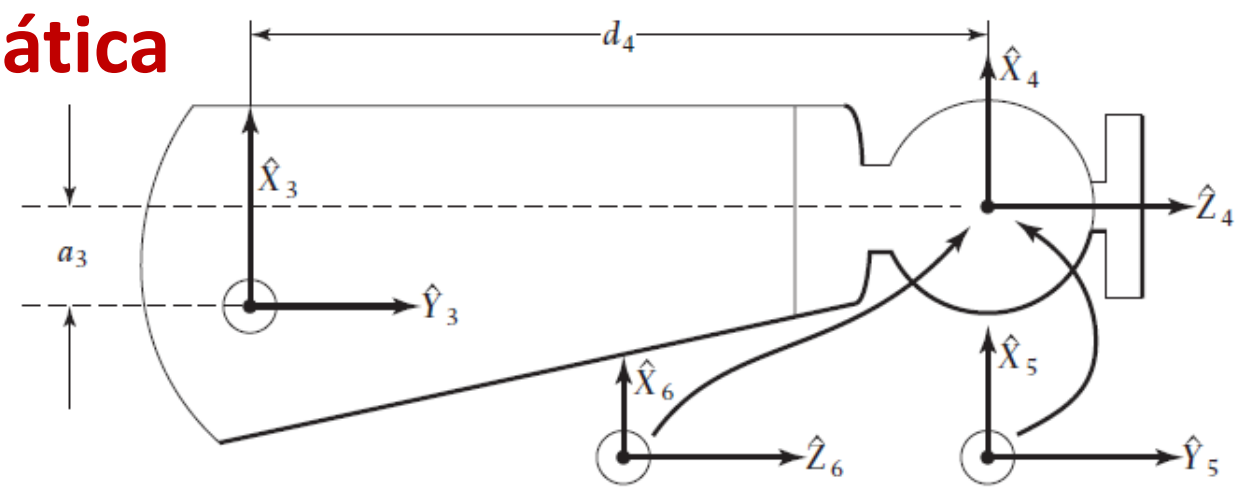
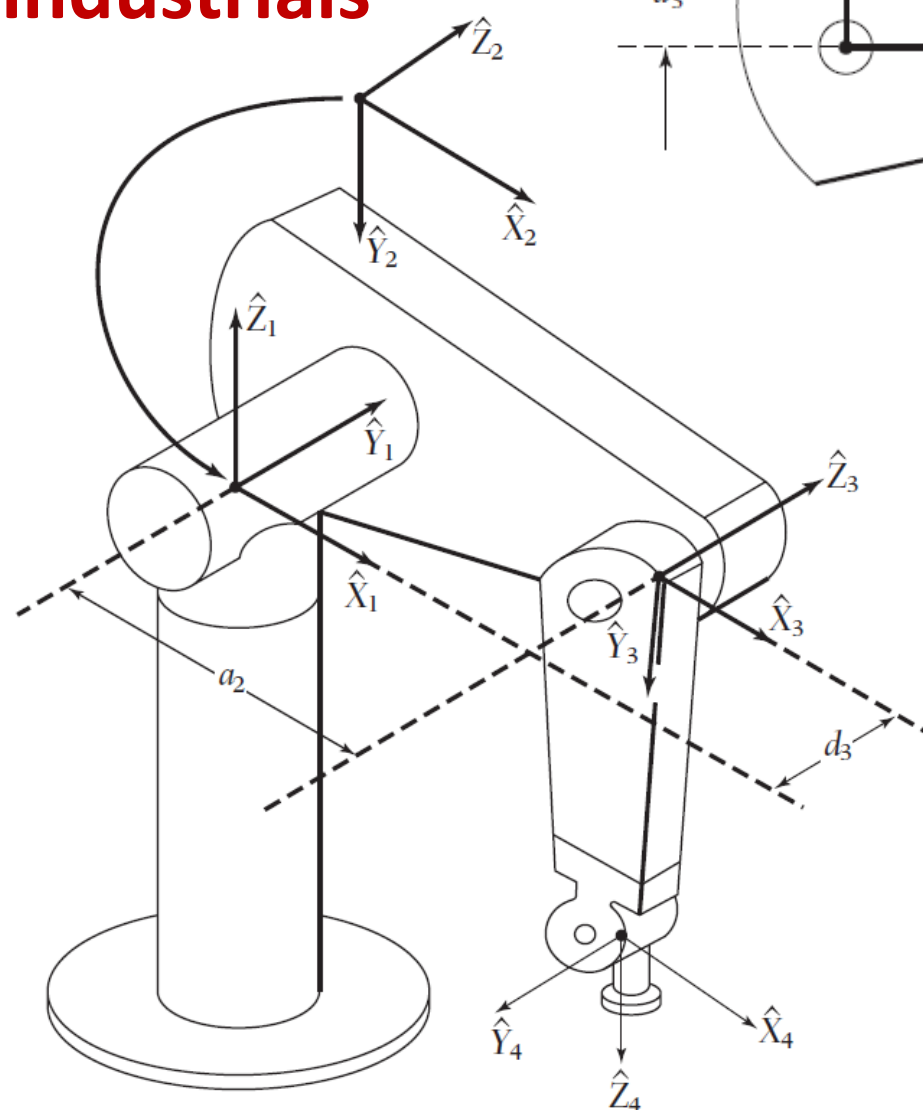
Exemplos: cinemática de dois robôs industriais



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1				
2				
3				
4				
5				
6				

$$\alpha_{i-1} = \angle_{\hat{X}_{i-1}}(\hat{Z}_{i-1}, \hat{Z}_i)$$
$$a_{i-1} = d_{\hat{X}_{i-1}}(\hat{Z}_{i-1}, \hat{Z}_i)$$
$$d_i = d_{\hat{Z}_i}(\hat{X}_{i-1}, \hat{X}_i)$$
$$\theta_i = \angle_{\hat{Z}_i}(\hat{X}_{i-1}, \hat{X}_i)$$

Exemplos: cinemática de dois robôs industriais



i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

$$\alpha_{i-1} = \angle_{\hat{X}_{i-1}}(\hat{Z}_{i-1}, \hat{Z}_i)$$

$$a_{i-1} = d_{\hat{X}_{i-1}}(\hat{Z}_{i-1}, \hat{Z}_i)$$

$$d_i = d_{\hat{Z}_i}(\hat{X}_{i-1}, \hat{X}_i)$$

$$\theta_i = \angle_{\hat{Z}_i}(\hat{X}_{i-1}, \hat{X}_i)$$

Exemplos: cinemática de dois robôs industriais

Usando

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtemos

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad {}^5_6T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	-90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	-90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	-90°	0	0	θ_6

Exemplos: cinemática de dois robôs industriais

$${}^1_3T = {}^1_2T {}^2_3T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{23} = c_2c_3 - s_2s_3,$$

$$s_{23} = c_2s_3 + s_2c_3.$$

$${}^0_1T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$${}^3_4T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1_2T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_5T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2_3T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^5_6T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4_6T = {}^4_5T {}^5_6T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3_6T = {}^3_4T {}^4_6T = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos: cinemática de dois robôs industriais

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} {}^1r_{11} &= c_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - s_{23}s_5s_6, \\ {}^1r_{21} &= -s_4c_5c_6 - c_4s_6, \\ {}^1r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6, \\ {}^1r_{12} &= -c_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + s_{23}s_5s_6, \\ {}^1r_{22} &= s_4c_5s_6 - c_4c_6, \\ {}^1r_{32} &= s_{23}[c_4c_5s_6 + s_4c_6] + c_{23}s_5s_6, \\ {}^1r_{13} &= -c_{23}c_4s_5 - s_{23}c_5, \\ {}^1r_{23} &= s_4s_5, \\ {}^1r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5, \\ {}^1p_x &= a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}, \\ {}^1p_y &= d_3, \\ {}^1p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}. \end{aligned}$$

Exemplos: cinemática de dois robôs industriais

$${}^0_6T = {}^0_1T {}^1_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As equações cinemáticas do PUMA 560 (6DOF) especificam como obter a posição e a orientação do *frame* {6} em relação ao *frame* {0}.

$$\begin{aligned} r_{11} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_5) - s_{23}s_5c_5] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6), \\ r_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6 - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6)], \\ r_{31} &= -s_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - c_{23}s_5c_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{12} &= c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6), \\ r_{22} &= s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6), \\ r_{32} &= -s_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + c_{23}s_5s_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{13} &= -c_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) - s_1s_4s_5, \\ r_{23} &= -s_1(c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5) + c_1s_4s_5, \\ r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_x &= c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1, \\ p_y &= s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_3c_1, \\ p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}. \end{aligned}$$

Sistemas de referência com nomes padrão

- O sistema de referência da base (*base frame*) $\{B\}$.
- O sistema de referência da estação (*station frame*) $\{S\}$.

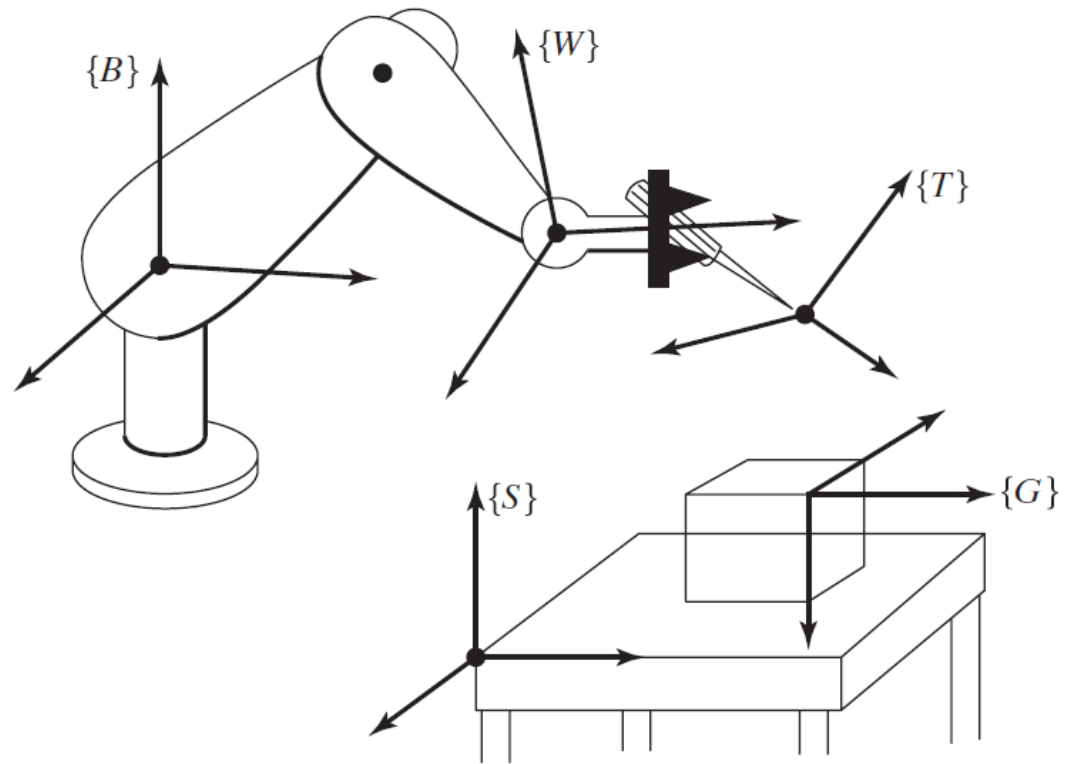


Figura 3.27: Os sistemas de referência padrão.

Sistemas de referência com nomes padrão

- O sistema de referência do punho (*wrist frame*) $\{W\}$.
- O sistema de referência da ferramenta (*tool frame*) $\{T\}$.
- O sistema de referência meta (*goal frame*) $\{G\}$.

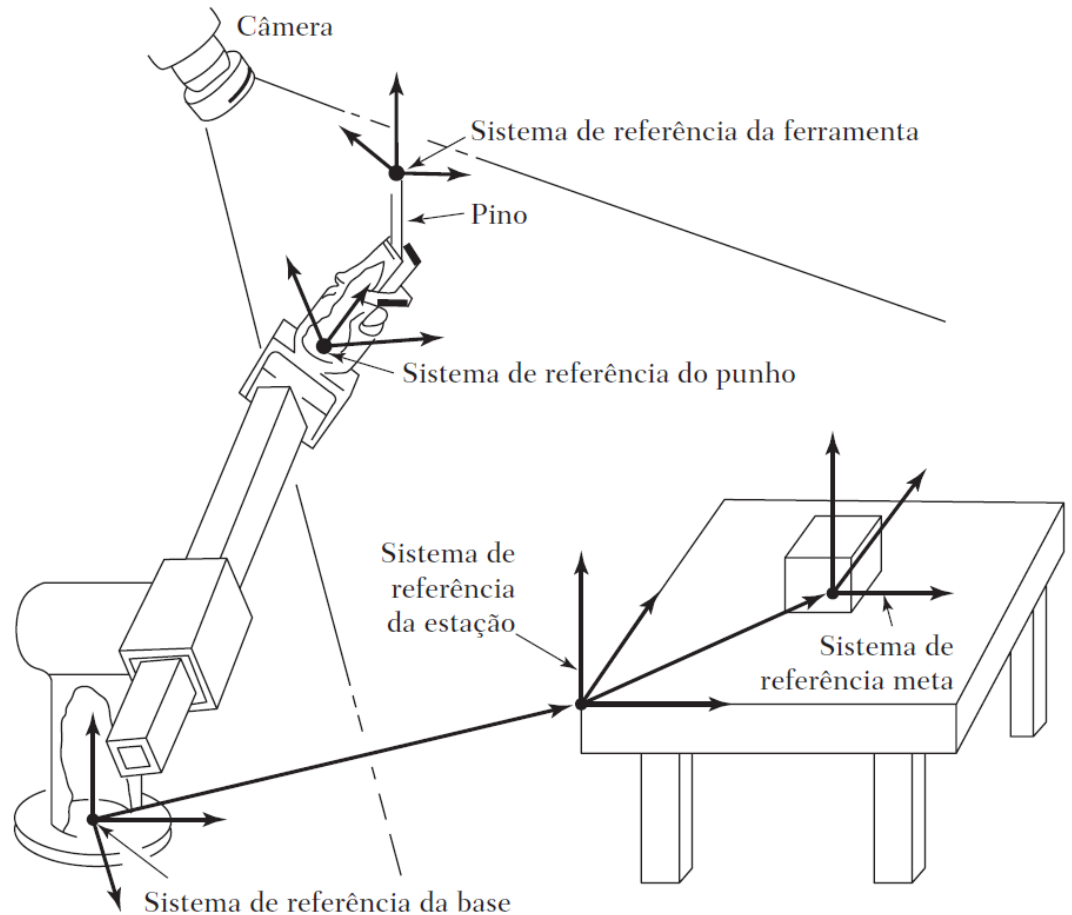


Figura 3.28: Exemplo de atribuição de sistemas de referência padrão.