

## Е3. Тензоры в гидродинамике. Задачи

### 1. ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРИМЕНЕНИЕ ГОТОВОЙ ПРОГРАММЫ

Определим тензор (парный коррелятор в однородной изотропной среде)

$$Q_{ij}(r) = 2Q\delta_{ij} + rQ'(\delta_{ij} - n_i n_j).$$

где функция  $Q = Q(r)$ , а  $n_i = r_i/r$ .

1. Посчитать

$$\partial_k Q_{ij}$$

2. Посчитать

$$\partial_k \partial_p Q_{ij}$$

3. Допустим что  $Q_{ij}(t, r)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_k} Q_{ij}$$

Получите уравнение на функцию  $Q(t, r)$ .

4. Проверить все выкладки параграфа 34 тома 6 "Гидродинамика" Ландау-Лифшица. В частности, получить соотношения (34.16), (34.20).

5. Некий тензор известен в вязком интервале турбулентности  $r < r_\nu$

$$(1) \quad X_{ijkm}(r)_{\text{viscous}} = a \cdot r^2 (\delta_{ij} \delta_{km} + 15 \delta_{ik} \delta_{jm} - 20 \delta_{im} \delta_{jk} + \\ + 2n_k n_m \delta_{ij} - 26n_j n_m \delta_{ik} + 16n_j n_k \delta_{im} + 16n_i n_m \delta_{jk} - 12n_i n_k \delta_{jm} + 2n_i n_j \delta_{km}).$$

и в инерционном интервале  $r > r_\nu$

$$(2) \quad X_{ijkm}(r)_{\text{inertial}} = \\ r(-8\delta_{jk} \delta_{im} + 5\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{ij} \delta_{km} + 4n_j n_k \delta_{im} - 4n_i n_k \delta_{jm} - 8n_j n_m \delta_{ik} + 8n_i n_m \delta_{jk}).$$

Свертки этих тензоров по некоторым парам индексов равны нулю. Найти, по каким парам индексов свертка ненулевая. Посчитать эти свертки, приравнять их в точке  $r = r_\nu$  и найти связь между коэффициентами  $a$  и  $b$ .

### 2. СЛОЖНЫЕ ЗАДАЧИ

6. Реализовать свертки индексов у тензоров, состоящих из мономов  $\delta_{ij}$ ,  $n_i$  и символа Леви-Чивиты  $e_{ijk}$