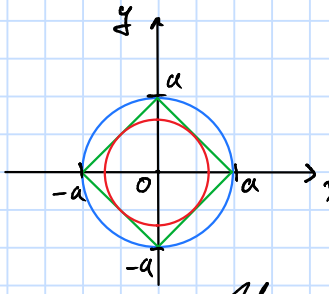
Задача 2.

$C_1 \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le C_2 \|x\|_2$, $C_1, C_2 - ?$



$\|x\|_1 = a$

$\|x\|_2 = \frac{a}{C_1}$

$\|x\| = \frac{a}{C_2}$

Из графика видно: $C_2 = \sqrt{2}$, $C_1 = 1$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{2}\|x\|_2$

Задача 3

д-тб $\|x\|_2 \le \sqrt{m}\|x\|_\infty$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} \le \sqrt{m \cdot \max_i (x_i)^2} = \sqrt{m}\sqrt{(\max_i |x_i|)^2} = \sqrt{m} \cdot \max_i |x_i|$

$\|x\|_\infty = \max_i x_i$

$\Rightarrow \|x\|_2 \le \sqrt{m}\|x\|_\infty$ ■

Если $x = (1, 1, \dots, 1)$ $\|x\|_2 = \sqrt{m}$, $\|x\|_\infty = 1 \Rightarrow \|x\|_2 = \sqrt{m}\|x\|_\infty$

д-тб: $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_2$ $A(m \times n)$

$\|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x_\infty\|$, $\|x\|_2 \ge \|x\|_\infty$

$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \ge \frac{\|Ax\|_2}{\sqrt{n}\|x\|_\infty} \ge \frac{\|Ax\|_\infty}{\sqrt{n}\|x\|_\infty}$

$\Rightarrow \|A\|_2 = \sup_{|x| \ne 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \ge \sup_{|x| \ne 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\sqrt{n}\|x\|_\infty} = \frac{\|A\|_\infty}{\sqrt{n}}$

$\Rightarrow \|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_2$ ■

Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|A\|_\infty = 2$, $\|A\|_2 = \sqrt{2} \Rightarrow \|A\|_\infty = \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$

Задача 4

$\|A\|_F = \sqrt{tr(A^*A)}$

$\|UA\|_F^2 = tr((UA)^*(UA)) = tr(A^*\underbrace{U^*U}_{E}A) = tr(A^*A) = \|A\|_F^2$

$\|AU\|_F^2 = tr(U^*A^*AU) = tr(A^*A\underbrace{UU^*}_{E}) = tr(A^*A) = \|A_F\|^2$ ■