- **多元函数Taylor展开**：

  https://zhuanlan.zhihu.com/p/32274749*多元函数转化为一元函数（常用技巧）*

  一阶与二阶展开：

$$
\begin{aligned}
f(y)-f(x) &= (y-x)^T \int_0^1 \nabla f(x+\theta(y-x))\,\mathrm{d}\theta \\
&= (y-x)^T \nabla f(x+\theta_0(y-x)) \\
\nabla f(y)-\nabla f(x) &= (y-x)^T \int_0^1 \nabla^2 f(x+\theta(y-x))\,\mathrm{d}\theta \\
&= (y-x)^T \nabla^2 f(x+\theta_0(y-x)) \\
f(y)-f(x)-(y-x)^T\nabla f(x) &= (y-x)^T \left[\int_0^1 \nabla^2 f(x+\theta(y-x))(1-\theta)\,\mathrm{d}\theta\right](y-x)^T \\
&= (y-x)^T \left[\frac{\nabla^2 f(x+\theta_0(y-x))}{2}\right](y-x)^T
\end{aligned}
$$

注意：积分型余项比拉格朗日余项更精细，特别是当有多个余项存在时，可以通过对积分式的变形进行化简。而拉格朗日余项由于θ_0 未知，只能分别地放缩为上界。

e.g. https://arxiv.org/abs/1905.02637 eq(32)

- **Young不等式**：

  https://zhuanlan.zhihu.com/p/41654910 Young不等式各种形式的推广

  假设 $a, b, \varepsilon > 0, \quad p, q > 1, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

  - 基础版

$$
ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \tag{1}
$$

    等号成立当且仅当 $a^p = b^q$

    证明：

$$
ab = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = e^{\frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q)} \le \frac{1}{p}e^{\ln(a^p)} + \frac{1}{q}e^{\ln(b^q)} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}
$$

  - 进阶版

$$
a\cdot b \le \varepsilon\frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-\frac{q}{p}}\frac{b^q}{q} \tag{2}
$$

  - $p=q=2$ 时

$$
2ab \le \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2 \tag{3}
$$

    证明：

$$
a\cdot b = \left(\varepsilon^{\frac{1}{p}}a\right)\left(\varepsilon^{-\frac{1}{p}}b\right) \le \varepsilon\frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-\frac{q}{p}}\frac{b^q}{q}
$$

注意：Young不等式是均值不等式的推广。其中进阶版可以通过对ε 的调节控制两项的大小

e.g. https://arxiv.org/abs/1905.02637 eq(34)

- **均值与两两差**：

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_i)^2=\sum_{j=1}^{m}(x_j-\bar{x})^2+m(x_i-\bar{x})^2$$

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j-x_i)^2\le 2(\sum_{j=1}^{m}(x_j-y)^2+m(x_i-y)^2)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(x_i-x_j)^2=2m\sum_{i=1}^{m}(x_i-\bar{x})^2$$

- **Kronecker product**：

如果*A*是一个 $m \times n$ 的矩阵，而*B*是一个 $p \times q$ 的矩阵，**克罗内克积**$A\otimes B$则是一个 $mp \times nq$ 的分块矩阵

$$A\otimes B=\begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{bmatrix}\otimes B=\begin{bmatrix} A_1\otimes B & \cdots & A_n\otimes B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_1^T \\ \vdots \\ A_n^T \end{bmatrix}\otimes B=\begin{bmatrix} A_1^T\otimes B \\ \vdots \\ A_n^T\otimes B \end{bmatrix}$$

注意：可以用于向量拼接后描述原本运算，特别是 $A\otimes I$

e.g. https://arxiv.org/abs/1905.02637 eq(26)