番外：矩阵的广义逆与单侧逆

写在前面：“单侧逆作为矩阵逆的推广，某种程度上也该称为一种“广义”逆。所以它究竟与真正的广义逆之间有什么关系呢？不可能没有关系的吧……”某天的我这么想到。于是我就着这个点想了想，还真发现了一些有意思的小结论。虽然貌似没什么直接应用，但也算是对二者概念和性质的理解更加“深刻”了一丢丢吧~（结尾甚至有主题升华！）

本文结构：

1. 介绍矩阵的广义逆
2. 介绍矩阵的单侧逆
3. 说明二者的关系

矩阵的广义逆

Def. 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，若矩阵 $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ 满足4个Moore-Penrose方程：

> (1) $AXA = A$
>
> (2) $XAX = X$
>
> (3) $(AX)^H = AX$
>
> (4) $(XA)^H = XA$

的全部或一部分，则称 X 为 A 的**广义逆**矩阵。

具体而言，若 X 满足方程(i)，则记 $X = A^{(i)}$，全体 $A^{(i)}$ 的集合记作 $A\{i\}$。同理，定义 $A^{(i,j)}, A^{(i,j,k)}, A^{(1,2,3,4)}, A\{i,j\}, A\{i,j,k\}, A\{1,2,3,4\}$。其中 $A^{(1)}$ 也记作 A^-， $A^{(1,2,3,4)}$ 也记作 A^+。

更详细的对各类广义逆的介绍可以看我的这篇文章，我在说明二者关系时也用到了里面提到的一些结论。link

矩阵的单侧逆

Def. 若 $BA = I$，则称 B 为 A 的一个**左逆**（ A 为 B 的一个**右逆**）。

左逆和右逆具有很相似的性质，我们统称为**单侧逆**。首先，不同于广义逆，单侧逆作为矩阵逆的推广，它并不是一定存在的。事实上我们有如下刻画：

Thm 1. 以下命题等价：

1. A 有左逆；
2. Ker(A) = {0};
3. A 列满秩

> *proof:* "1. $\Longrightarrow$ 2." $\forall x \in$ Ker(A)，有 $Ax = 0$。设 B 为 A 的一个左逆，则有 $x = Ix = BAx = B0 = 0$。所以Ker(A) = {0}。
>
> "2. $\Longrightarrow$ 3." 设 A 的各列为$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$， A 列满秩即 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 线性无关。
>
> 那么我们假设 $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ 使得 $\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = 0$，而
>
> $$0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = (a_1, \cdots, a_n)\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

> 即 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)^T\in$ Ker(A)，故 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=0$，即 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 线性无关。
>
> "3. $\Longrightarrow$ 1." 如果 A 列满秩，则 A^HA 可逆。那么 $B=(A^HA)^{-1}A^H$ 就是 A 的一个左逆。$\square$.

同理，对称地，我们也有

Thm 2. 以下命题等价：

1. A 有右逆；
2. Im(A) = $\mathbb{R}^n$；
3. A 行满秩

除了存在性没有保证外，单侧逆也是未必唯一的。**事实上，除非矩阵 A 可逆，不然 A 要么没有单侧逆，要么有无穷多个单侧逆。**这一点是不是和线性方程组的解的结构很像？其实道理也是类似的。以右逆为例，如果 $AB=I$，那么对于任意矩阵 C 满足 $AC=0_{n\times n}$，不难看出 $B+C$ 都是 A 的右逆。而在A行满秩却又不可逆时，$AC=0_{n\times n}$ 有无穷多解。

广义逆与单侧逆的关系

基本介绍结束了。关于二者的关系，接下来就让我还原一下我的思(xia)考(xiang)过程。为了方便我们分别记矩阵全体左逆的集合和全体右逆的集合为 A_L^{-1},A_R^{-1}。

Step1. 首先，我验证了一下单侧逆满足哪些M-P方程。容易验证的是，如果左/右逆存在，那么左逆满足方程(1)(2)(4)，右逆满足方程(1)(2)(3)，即：

$$A_L^{-1}\subseteq A\{1,2,4\}$$
$$A_R^{-1}\subseteq A\{1,2,3\}$$

Step2. 这是一个很好的开始！有了"上界"，那么紧接着我就考虑了一下"下界"。没有上面那么明显，不过我仍然成功地发现加号逆 A^+ 一定是矩阵的一个左逆/右逆，如果左/右逆存在的话。即：

$$A_L^{-1}\supseteq A\{1,2,3,4\}$$
$$A_R^{-1}\supseteq A\{1,2,3,4\}$$

> 这是因为 AA^+ 和 A^+A 都是秩与 A 相等的幂等Hermite矩阵。因为幂等矩阵的特征值只有0和1，Hermite矩阵一定可以对角化，故二者都可写作
>
> $$P\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & O_{n-r}\end{pmatrix}P^{-1}$$
>
> 的形式。这时如果矩阵有左逆/右逆，那么 A^+A 或 AA^+ 就一定是满秩的（类似 A^HA 与 AA^H 的情况）。故 A^+A 或 AA^+ 可写作
>
> $$PI_nP^{-1}=I$$
>
> 说明此时 A^+ 一定是矩阵的一个左逆/右逆。

综上，

$$A\{1,2,3,4\}\subseteq A_L^{-1}\subseteq A\{1,2,4\}$$
$$A\{1,2,3,4\}\subseteq A_R^{-1}\subseteq A\{1,2,3\}$$

Step3. 进展很不错嘛！有了上面这个看起来很赏心悦目的范围作为感性认识后，接下来我就想动真格的了，准备用我的大杀器——之前推导的精准表达式，去看看一个广义逆 $A^{(1,2,4)}$ 如果是左逆，需要满足什么条件（右逆同理）。这时我惊讶地发现：如果一个矩阵 K 有右逆，那么它是行满秩的，那么它的SVM

$$K=U\begin{pmatrix}S_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}V^{-1}$$

中下面两块不存在，即

$$K = U \begin{pmatrix} S_r & 0 \end{pmatrix} V^{-1}$$

此时 K 的广义逆的SVM就会形如

$$V \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} U^{-1}$$

即一般情况下的 B, D 两块子矩阵不存在。这时候我对比各类广义逆的等价条件，竟然发现 $K\{1,2,4\} = K\{1\}$！同理，当 K 有左逆时 $K\{1,2,3\} = K\{1\}$。也就是说结论现在变成了：

$$A\{1,2,3,4\} \subseteq A_L^{-1} \subseteq A\{1,2,4\} = A\{1\}$$
$$A\{1,2,3,4\} \subseteq A_R^{-1} \subseteq A\{1,2,3\} = A\{1\}$$

此时的我已经隐隐感受到了真相：莫非 $A_L^{-1} = A\{1\}$？难道我们竟然只需要一个方程 $AXA = A$ 便足以表达单侧逆了吗？这个猜想一旦进入了我的脑海，那剩下验证的过程就已经十分简单了……

> $$X \in A\{1\} \iff AXA = A \iff AXA - A = 0$$
>
> 如果 A 有左逆，那么
>
> $$AXA - A = A(XA - I) = 0$$
>
> 两边左乘 A 的一个左逆即得
>
> $$XA = I$$
>
> X就是A的一个左逆。
>
> 同理，如果 A 有右逆，那么
>
> $$AXA - A = (AX - I)A = 0$$
>
> 两边左乘 A 的一个右逆即得
>
> $$AX = I$$
>
> X就是A的一个右逆。□.

上面这个证明，简单短小优美，除了定义之外完全不需要使用其他一丁点多余的性质和推论。它同时说明了两件事：

1. **广义逆完全包含了单侧逆。**在单侧逆存在时，我们有最终结论：
$$A_L^{-1} = A\{1,2,4\} = A\{1\}$$
$$A_R^{-1} = A\{1,2,3\} = A\{1\}$$
2. 单侧逆的存在性可以暗示广义逆集合间的特殊关系：

   在左（右）逆存在时，$A\{1,2,4\}$（$A\{1,2,3\}$），$A\{1\}$ 以及介于二者之间的集合们的包含关系全部变为相等关系。也就是说，**满足方程 $AXA = A$ 的广义逆只有 $A\{1\}$ 和 $A\{1,2,3,4\}$ 两种**（普通的减号逆兼单侧逆 A^- 和特殊的加号逆 A^+）。

完爆我之前兜的一堆圈子。

现在想来，原来方程 $AXA = A$ 就已经同时集成了两种单侧逆的含义。这是我一开始没有想到的。某种程度上，我这一个兜大圈子的思考过程也说明了一个老生常谈的道理：发现好的命题时常比给出证明更有意义……

完结撒花。