Fundamentos Matemáticos e Computacionais de Machine Learning

Especialização em Machine Learning e Big Data

UEL

Profa. Dra. Juliana Felix

jufelix16@uel.br

Básico de Geometria Analítica

Fundamentos de Geometria Analítica

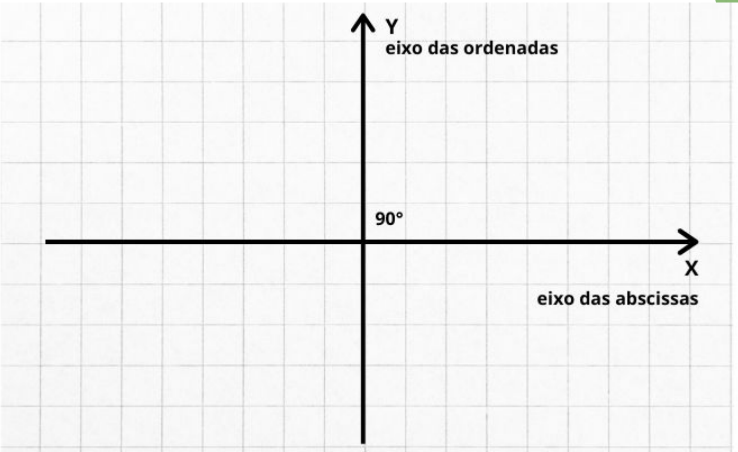
- O primeiro fundamento de toda a geometria analítica é a noção de espaço.
- Na geometria temos os espaço R (números Reais).
  - Este espaço é unidimensional e é representado como uma linha, ou eixo, geralmente na horizontal, em que os números estão representados sobre ele.
- Sobre esse eixo podemos representar valores, e identificá-los como "ponto".

Fundamentos de Geometria Analítica

- Desta forma, o segundo fundamento da geometria analítica é o conceito de ponto.
- O ponto é um valor que pode ser representado em um espaço.
- Na figura abaixo, o ponto C = 2, está representado no eixo.

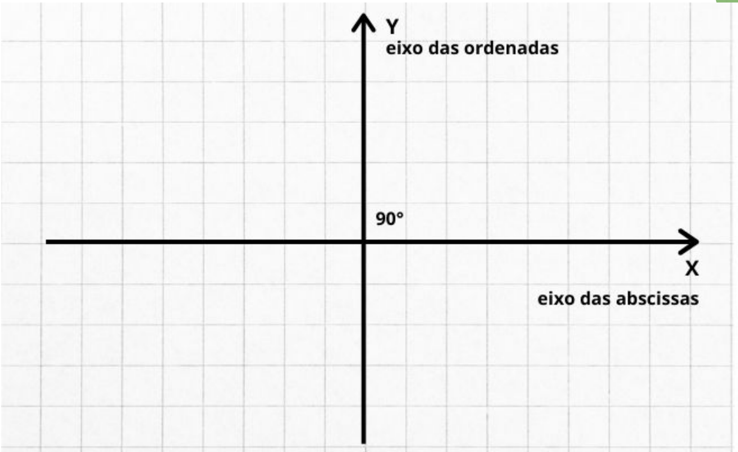
Fundamentos de Geometria Analítica

- O espaço pode ter mais dimensões.
- Daí, temos o conceito de R2
  - O R2 é um espaço representado por dois eixos, geralmente representados na vertical e horizontal.
- O R2 forma o que chamamos de Plano ou Plano Cartesiano.



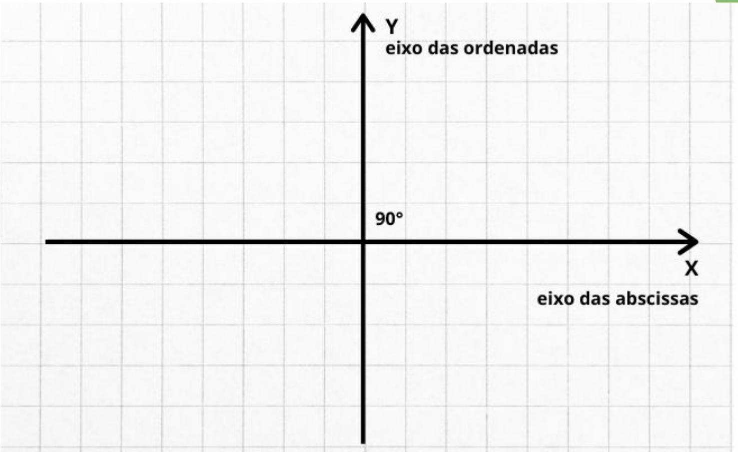
Fundamentos de Geometria Analítica

- O Plano ou Plano Cartesiano tem seus eixos geralmente representados pelas letras X e Y, na horizontal e na vertical, respectivamente.
- Todavia isso não é uma regra. O importante é que cada eixo tenha seu próprio nome.



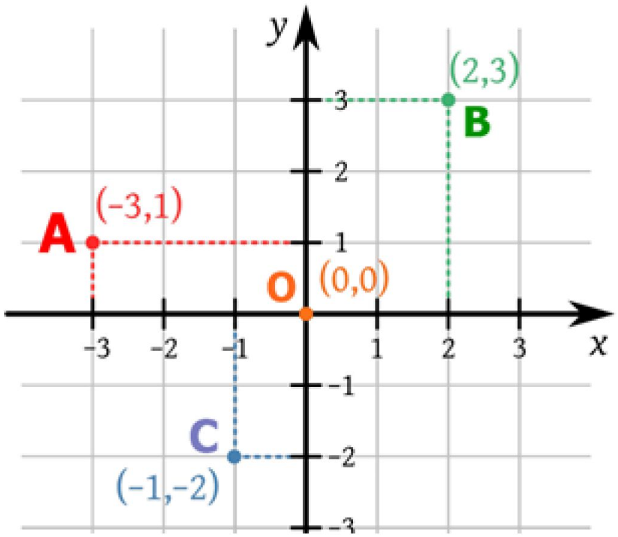
Fundamentos de Geometria Analítica

- Além disso, o eixo horizontal costuma ser chamado de eixo das abcissas, e o eixo vertical como eixo das ordenadas.
- Eixo das abcissas significa que é onde se encontram os valores livres.
- Eixo das ordenadas significa que é onde se encontram os valores dependentes
    - Ou seja, dependem dos valores livres.
- Todavia, isso é também uma mera convenção.



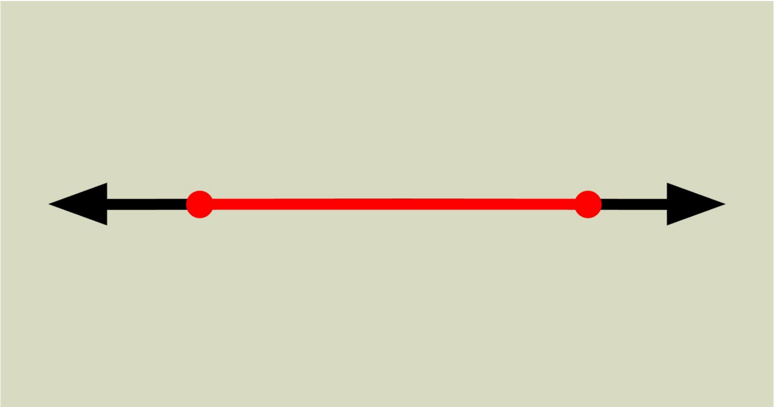
Fundamentos de Geometria Analítica

- No plano representamos o ponto pelo par de valores (X, Y).
- Por exemplo:
    - O ponto O (0,0) está nas coordenadas x=0 e y=0.
        - Este ponto é conhecido como origem.
    - O ponto A (-3,1) está nas coordenadas x=-3 e y=1
    - E assim por diante.



Fundamentos de Geometria Analítica

- Outro conceito muito importante é a reta.
- A reta pode ser representada no R ou R1, por dois ou mais pontos alinhados.
- É importante ressaltar que uma reta é composta por infinitos pontos colineares (alinhados na mesma direção)

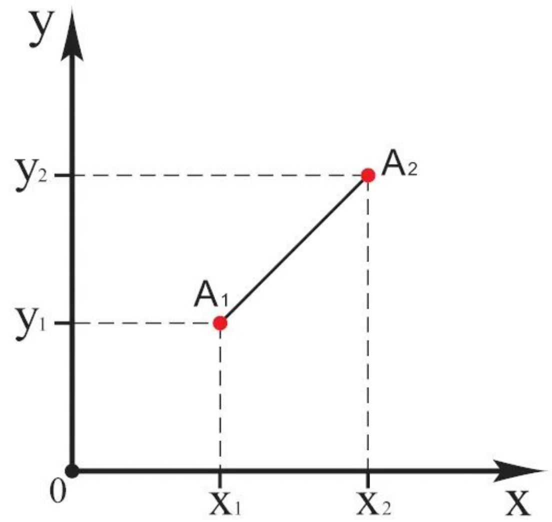


Fundamentos de Geometria Analítica

- Todavia, precisamos apenas de dois pontos para definirmos uma reta.
- Os pontos A e B definem a reta e todos os pontos sobre essa reta são colineares, logo, estão sobre a mesma reta.

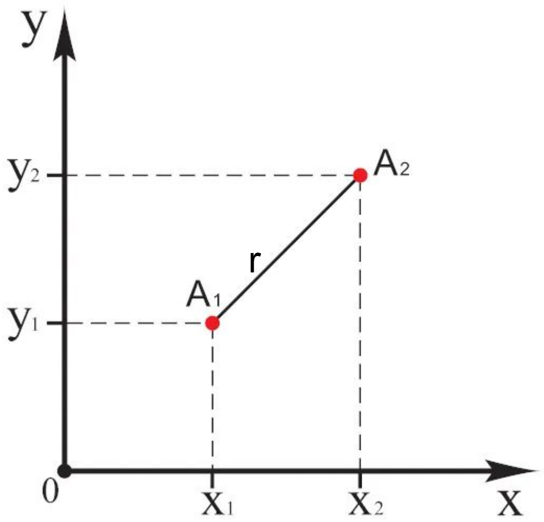
Fundamentos de Geometria Analítica

- No R2, uma reta representa valores colineares no plano R2, e portanto, com dois pontos, podemos definir a reta neste plano.
- Na figura, a reta está representada pelos pontos A1 e A2
  - Não necessariamente a reta inicia ou termina em um desses dois pontos.



Fundamentos de Geometria Analítica

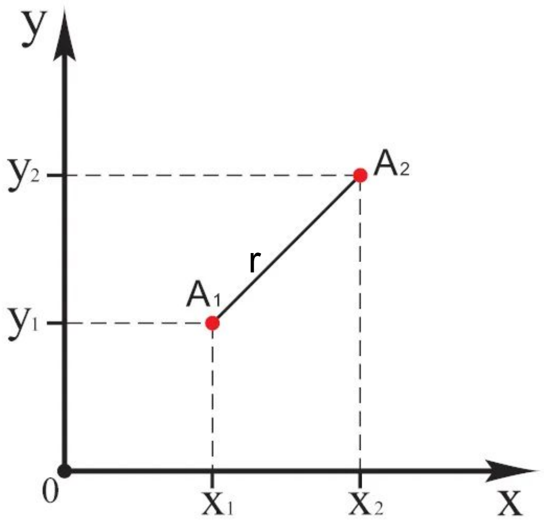
- A reta **r** pode ser representada pelos pontos **A1**, e **A2**, logo as coordenadas da reta **r** são **(x1, y1)** e **(x2, y2)**.



Fundamentos de Geometria Analítica

- Conhecendo-se dois pontos, podemos calcular a **distância** entre eles, que pode também ser interpretada como o **comprimento** da reta r.
- Para calcular a distância desses pontos podemos utilizar a equação da **distância "euclidiana"**:

$$dA_1A_2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$$



Fundamentos de Geometria Analítica

- Essa distância nada mais é que o comprimento do segmento que liga os dois pontos.
- Exemplo:
  - Dados A(2,3) e B(5,1), qual é a distância entre esses dois pontos?

$$dAB = \sqrt{|5 - 2|^2 + |1 - 3|^2}$$

$$dAB = \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$dAB = \sqrt{9 + 4}$$

$$dAB = \sqrt{13}$$

Fundamentos de Geometria Analítica

- Com base na ideia de distância e do segmento que une dois pontos, outra fórmula importante é a de **ponto médio** de um segmento.
- Para calcular o ponto $M(x_m,y_m)$, que é ponto médio do segmento $A1(x_1,y_1)$ e $A2(x_2,y_2)$, utilizamos a equação:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

- Essa fórmula nada mais é que a média aritmética entre as abcissas dos dois pontos e as ordenadas também dos dois pontos.

Fundamentos de Geometria Analítica

- Encontre o ponto médio entre os pontos A(-2,5) e B(6,3).

$$x_m = \frac{-2+6}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_m = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Fundamentos de Geometria Analítica

- A condição de alinhamento de três pontos serve para realizar a verificação de que três pontos A1 (x1,y1), A2(x2,y2) e A3(x3,y3) estão alinhados ou não.
- Calculamos o determinante da seguinte matriz:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Fundamentos de Geometria Analítica

- Existem dois casos possíveis
  - se o determinante for igual a 0, significa que os três pontos estão alinhados,
  - Caso contrário, dizemos que os pontos não estão alinhados ou então que são vértices de um triângulo.

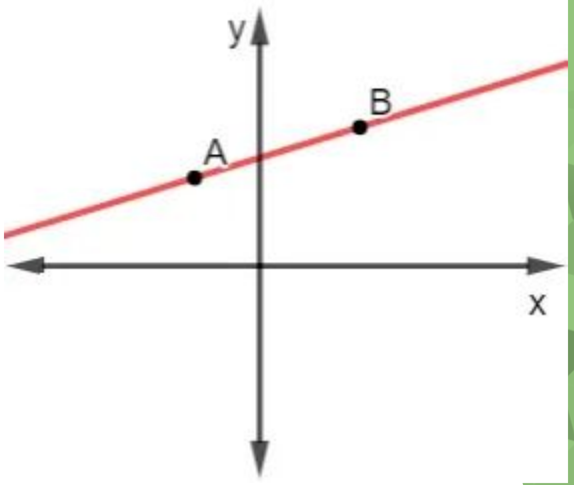
Equação da reta

- A reta pode também ser representada pela sua equação.
- Existem diversas equações, mas as mais comuns são:
  - Equação geral da reta:

    $$ax + by + c = 0$$

  - Equação reduzida da reta:

    $$y = mx + n$$



Equação da reta

- Observe que os termos m e n da equação

$$y = mx + n$$

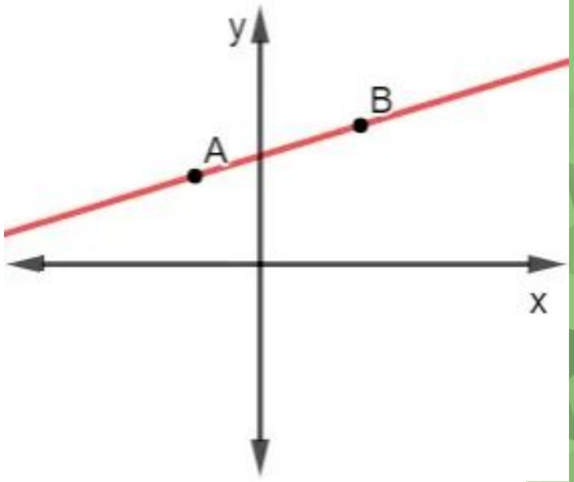
Podem ser entendidos como manipulação algébrica

dos termos a, b e c, a equação

$$ax + by + c = 0$$

Formando então (ignorando-se os sinais)

$$y = a/b\ x + c/b$$



Equação da reta

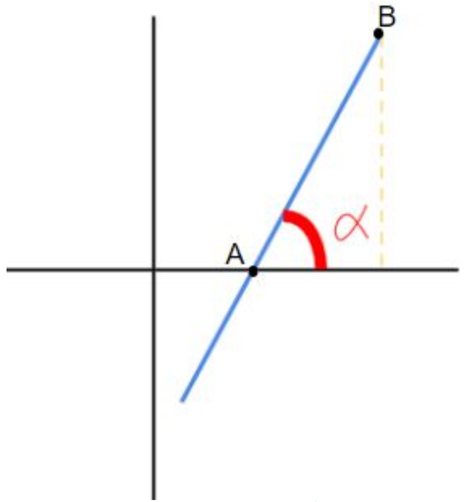
- É importante destacar que os termos m e n da equação

$$y = mx + n$$

podem ser interpretados como parâmetros da reta também.

Em que m é o coeficiente de inclinação da reta, ou seja, tg(α)

E n é o coeficiente de deslocamento (onde a reta toca no eixo y)



Equação da reta

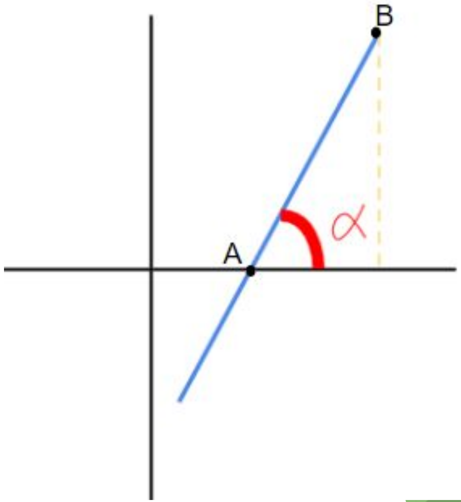
Na geometria, sabe-se que a tangente de um ângulo é dada por:

$$tg \propto = \text{cateto oposto}/\text{cateto adjacente}$$

Com as manipulações corretas, chegamos a:

$$tg \propto = yB - yA/xB - xA$$

$$m = (yB - yA) / (xB - xA)$$



- Por padrão, quando $m > 0$, a reta é ascendente no plano cartesiano.
- Se, $m < 0$, admite-se que a reta r é descendente.

Equação da reta

Assim, de posse de dois pontos, podemos então calcular o coeficiente m, (e o ângulo alfa se necessário):

$$m = (yB - yA) / (xB - xA)$$

- Para obter o termo n da equação, basta usar a equação

$$y = mx + n$$

- Com o valor de m, e escolher um par (x,y) para calcular o coeficiente n.

Equação da reta

- Exemplo: dado A(2,3) e B(5,1), qual é a equação da reta?
- Se: $m = (yB - yA) / (xB - xA)$

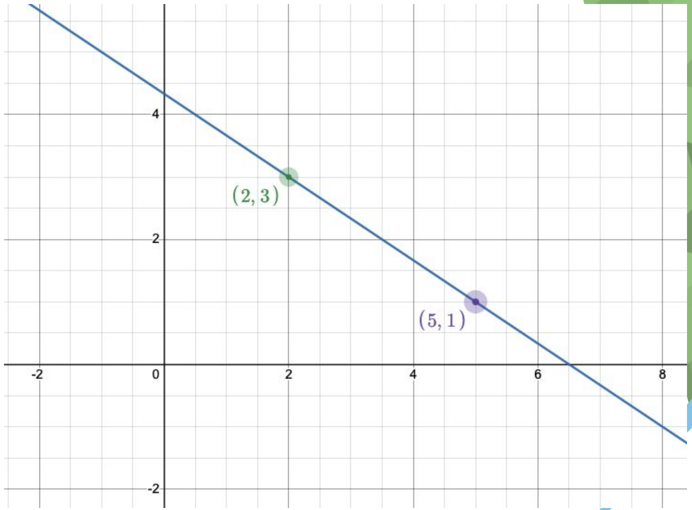
  $m =(1 -3) / (5 - 2)$

  $m = - 2/3$
- Então: $y = mx + n$

  $3 = -2/3 * 2 + n$

  $n = 3 + 4/3$

  $n = 13/3$
- Logo: $y = \mathbf{-2/3}\ x + \mathbf{13/3}$



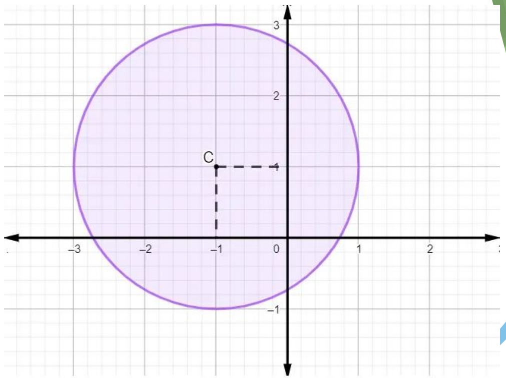
A circunferência

- Outras equações estudadas na geometria analática são as equações geral e reduzida da circunferência, tendo o centro definido pelo ponto O(xc, yc):

- Equação reduzida da circunferência:

$$(x - xc)^2 + (y - yc)^2 = r^2$$

- Equação geral da circunferência
  - $x^2 + y^2 - 2xc*x - 2yc*y + xc^2 + yc^2 - r^2 = 0$

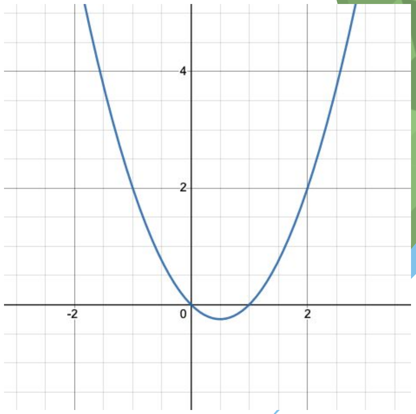


A parábola

- De forma simplificada:
  - A parábola está ligada às funções do segundo grau.
  - Assim, a parábola pode ser representada pela equação:

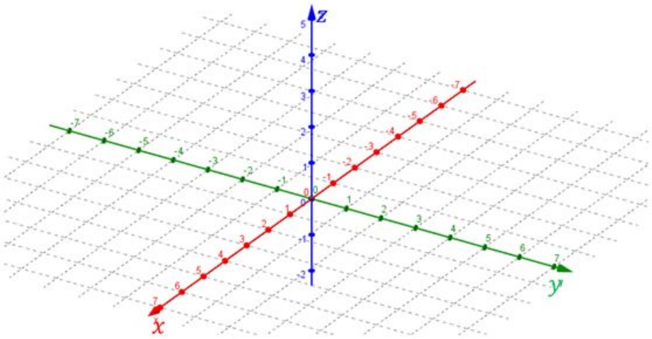
$$y = ax^2 + bx + c$$

- Em que a define a abertura da parábola, enquanto b e c deslocam a parábola da origem do plano.



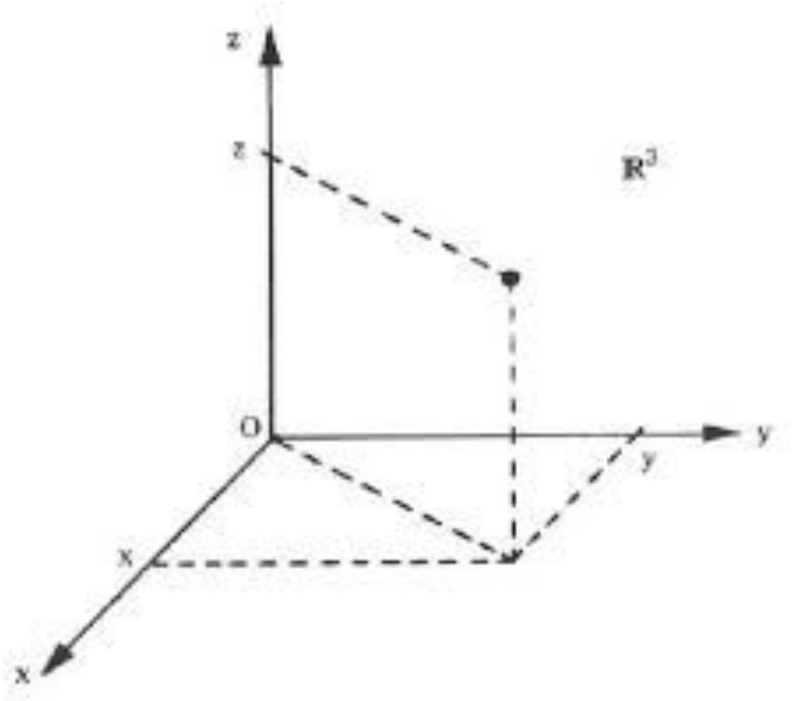
Plano R3

- O Plano R3 é definido por três eixos, comumente chamados de eixos X, Y e Z, embora isso não seja uma regra.



Ponto no R3

- O ponto no R3 é representado por três coordenadas

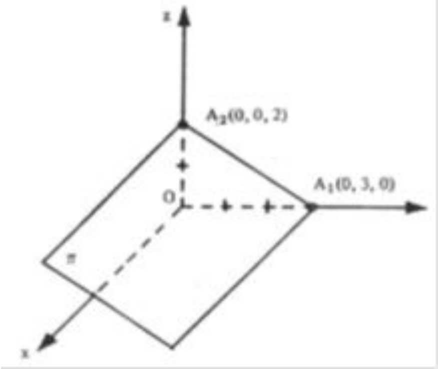


Reta/Plano no R3

- Com três coordenadas no R3, a reta, na verdade representa um plano, e portanto possui uma equação mais complexa:

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

- Exemplos
  - A(x1, y1, z) e B(x2, y2, z), onde z em A e B são iguais
  - A(x1, y, z1) e B(x2, y, z2), onde y em A e B são iguais
  - A(x, y1, z1) e B(x, y2, z2), onde x em A e B são iguais

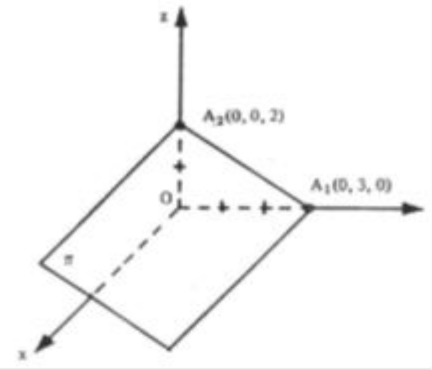


Reta/Plano no R3

- A equação do plano

$$aX + bY + cZ + d = 0$$

Permite inferir que a, b, e c são os coeficientes que definem a inclinação do plano no espaço R3, e d permite deslocar o plano da origem.



Reta/Plano no R3

- Conhecendo-se dois pontos, podemos calcular a **distância** entre eles, que pode também ser interpretada como o **comprimento** da reta r entre os pontos no plano.
- Para calcular a distância desses pontos podemos utilizar a equação da **distância "euclidiana"**:

$$dA_1A_2 = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2}$$

Considerações Finais

- É importante destacar que
  - Quem ocupa o eixo horizontal, vertical, etc, é uma mera convenção
  - Quem é a variável independente e dependente está relacionado ao valor de interesse
  - Os nomes X, Y, e Z para eixos é uma mera convenção, e podem ser chamados de eixos Y, K, T, ou X1, X2, e X3, etc
  - A mesma regra vale para a representação de pontos e suas coordenadas. Pontos podem ser representados como:
    - P1(x1, y2, z2), ou
    - P1(x1_1, x2_1, x3_1), etc

Links úteis

Calculadoras gráficas:

[Desmos | Calculadora Gráfica]()

[Calculadora 3D - GeoGebra]()