Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 19

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.26

Задача 535(c).
Преобразовать квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием: $3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 39\lambda + 28 = -(\lambda - 4)(\lambda - 7)(\lambda - 1) =>$$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 1$

$$\lambda = 4 : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{S_2+2S_1, S_1*(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{S_2-2S_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}_{S_2-S_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, |h_1| = 3$$

$$\lambda = 7 : \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}_{S_2+S_3, S_3*(-1)} \sim \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}_{S_1-2S_2} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =>$$

$$h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, |h_2| = 3$$

$$\lambda = 1 : \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}_{S_2-S_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}_{S_2+S_3} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} =>$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, |h_3| = 3$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$4y_1^2 + 7y_2^2 + y_3^2$

Задача 535(d).
Преобразовать квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием: $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(\lambda-10) = 0 =>$$

$\lambda_1 = 1(kr2), \lambda_2 = 10$

$$\lambda_1 = 1(kr2): \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} => h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Данные вектора не ортоганальны, преобразуем их в ортогональные:

Пусть $b_1 = h_1, b_2 = h_2 + ah_1, (b_1, b_2) = 0 => (h_2, h_1) + a(h_1, h_1) = 0 => a = 0,8 => b_2 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_2 = 10: \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}_{S_3+S_2} \sim \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & -4 \\ 0 & -9 & -9 \end{pmatrix}_{S_1+2S_2} \sim \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{S_2+4S_3} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$|b_1| = \sqrt{5}, |b_2| = \frac{3}{\sqrt{5}}, |h_3| = 3 =>$

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$y_1^2 + y_2^2 + 10y_3^2$

Задача 535(е).
Преобразовать квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием: $x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & -2-\lambda & 4 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(\lambda+7) = 0 =>$$

$\lambda_1 = 2(kr2), \lambda_2 = -7$

$$\lambda_1 = 2(kr2): \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} => h_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Данные вектора не ортоганальны, преобразуем их в ортогональные:

Пусть $b_1 = h_1, b_2 = h_2 + ah_1, (b_1, b_2) = 0 => (h_2, h_1) + a(h_1, h_1) = 0 => a = 0,8 => b_2 = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,8 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -7 : \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{S_2+S_3} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}_{S_1-2S_3, S_3-5/9S_2} \sim \begin{pmatrix} 0 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =>$

$h_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$|b_1| = \sqrt{5}, |b_2| = \frac{3}{\sqrt{5}}, |h_3| = 3 =>$

$H = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2$
