$14(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y)^2+12(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y)(\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}x)+5(\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}x)^2+4(\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y)-8(\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}x)-7=0$

Фокусы: $F_1(3,-4); F_2(-1,4) \rightarrow$ Центр $O: \frac{\{3,-4\}+\{-1,4\}}{2}=\{1,0\}$
$\vec{F_{12}}=(F_2-F_1)=\{-4,8\} \rightarrow$ Угол поворота: $-\arctan(2)$
$|F_{12}|=4\sqrt{5} \rightarrow$ scale-factor $=4\sqrt{5}/4=\sqrt{5}$
Итого :

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} = (\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} =$$

$(\frac{x-1}{5}-\frac{2y}{5}, \frac{y}{5}+\frac{2(x-1)}{5}) \rightarrow$
Уравнение гиперболы :
$(\frac{x-1}{5}-\frac{2y}{5})^2-(\frac{y}{5}+\frac{2(x-1)}{5})^2=1$

Найти базис суммы и пересечения пространств

$$L_1: \begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=0 \end{cases}$$

$L_2: b_1=\{-1,4,2,-1,-1\}, b_2=\{4,1,2,2,4\}, b_3=\{-6,2,-1,-4,-6\}$.

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -3 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 \rightarrow$$

$a_1=\{1,0,0,0,1\}; a_2=\{0,-1,0,1,0\}; a_3=\{0,1,1,0,0\};$

$x^2+2y^2+4z^2=1$
$x^2+\frac{y^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}^2}+\frac{z^2}{\frac{1}{2}^2}=1$

$$\begin{cases} x=\cos u \sin v \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \sin v \\ z=\frac{1}{2}\cos v \end{cases}$$

$\vec{r'}_u$:

$\begin{cases} x = -\sin u \sin v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos u \sin v \\ z = 0 \end{cases}$

$\vec{r'}_v :$

$\begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \cos v \\ z = -\frac{1}{2}\sin v \end{cases}$

$\vec{n}(u,v) = \vec{r'}_u \times \vec{r'}_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u \sin v & \frac{\sqrt{2}}{2}\cos u \sin v & 0 \\ \cos u \cos v & \frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \cos v & -\frac{1}{2}\sin v \end{vmatrix} =$

$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v \\ y = \frac{1}{2}\sin u \sin^2 v \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin v \cos v \end{cases}$

$\vec{r'}_{uu} :$

$\begin{cases} x = -\cos u \sin v \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \sin v \\ z = 0 \end{cases}$

$\vec{r'}_{uv} :$

$\begin{cases} x = -\sin u \cos v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos u \cos v \\ z = 0 \end{cases}$

$\vec{r'}_{vv} :$

$\begin{cases} x = -\cos u \sin v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \sin v \\ z = -\frac{1}{2}\cos v \end{cases}$

$L = \frac{-\cos u \sin v \frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v + -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \sin v \frac{1}{2}\sin u \sin^2 v}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v)^2 + (\frac{1}{2}\sin u \sin^2 v)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin v \cos v)^2}}$

$M = \frac{-\sin u \cos v \frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos u \cos v \frac{1}{2}\sin u \sin^2 v}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v)^2 + (\frac{1}{2}\sin u \sin^2 v)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin v \cos v)^2}}$

$N = \frac{-\cos u \sin v \frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \sin v \frac{1}{2}\sin u \sin^2 v + -\frac{1}{2}\cos v \frac{\sqrt{2}}{2}\sin v \cos v}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v)^2 + (\frac{1}{2}\sin u \sin^2 v)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin v \cos v)^2}}$

Значит вторая квадратичная форма:

$\frac{-\cos u \sin v \frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v + -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin u \sin v \frac{1}{2}\sin u \sin^2 v}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v)^2 + (\frac{1}{2}\sin u \sin^2 v)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin v \cos v)^2}} du^2 + 2\frac{-\sin u \cos v \frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos u \cos v \frac{1}{2}\sin u \sin^2 v}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos u \sin^2 v)^2 + (\frac{1}{2}\sin u \sin^2 v)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2}\sin v \cos v)^2}} dudv + \frac{-\cos u \sin v \frac{\sqrt{2}}{4}\cos u}{\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4}\cos}}$

Определить тип поверхности второго порядка и написать её каноническое уравнение

$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz + 2yz + 2x - 4y - 2z + 1 = 0$

Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Инварианты:

$I_1 = 1 + 1 + 1 = 3$
$I_2 = 0 + 0 + 0 = 0$
$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
$I_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$
$I(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 7)(\lambda - 4)^2$
$\lambda \in \{0, 0, 3\}$
$\widetilde{I}_3 = -1 + 0 + 0 = -1$
$I_3 = 0 \wedge I_2 = 0 \wedge I_4 = 0 \wedge \widetilde{I}_3 \neq 0 \rightarrow$
$3x'^2 + 2\sqrt{-\frac{-1}{3}}y' = 0$
$3x'^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y' = 0$
$x'' = -y'; y'' = x'$
$3y''^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x'' = 0$
$3y''^2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}x''$
$y''^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}x''$
Это каноническое уравнение параболического цилиндра

$3x^2 - 5y^2 + 3z^2 + 6xy - 2xz + 6yz - 14x + 10y + 2z + 31 = 0$
Матрица квадратичной формы:
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & -7 \\ 3 & -5 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -7 & 5 & 1 & 31 \end{pmatrix}$
Инварианты:
$I_1 = 3 + -5 + 3 = 1$
$I_2 = 8 + -24 + -24 = -40$
$I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -112$
$I_4 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 & -7 \\ 3 & -5 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 & 1 \\ -7 & 5 & 1 & 31 \end{vmatrix} = -3136$
$I(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ -1 & 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 7)(\lambda - 4)^2$
$\lambda \in \{-7, 4, 4\}$

$I_3 \neq 0 \rightarrow$
$-7x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 + \frac{-3136}{-112} = 0$
$-7x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 + 28 = 0$
Это уравнение двуполостного гиперболоида
$-7x'^2 + 4y'^2 + 4z'^2 = -28$
$-\frac{1}{4}x'^2 + \frac{1}{7}y'^2 + \frac{1}{7}z'^2 = -1$
$-\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{\sqrt{7}^2} + \frac{z'^2}{\sqrt{7}^2} = -1$
$x'' = z'; y'' = y''; z'' = x';$
$-\frac{z''^2}{2^2} + \frac{y''^2}{\sqrt{7}^2} + \frac{x''^2}{\sqrt{7}^2} = -1$
$\frac{x''^2}{\sqrt{7}^2} + \frac{y''^2}{\sqrt{7}^2} - \frac{z''^2}{2^2} = -1$
Его каноническое уравнение

Определить тип поверхности второго порядка и написать её каноническое уравнение:
$2x + 5z - 4xy - 4yz = 0$
Матрица квадратичной формы:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2.5 \\ 1 & 0 & 2.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Инварианты:
$I_1 = 0 + 0 + 0 = 0$
$I_2 = 0 + -4 + -4 = -8$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$I_4 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2.5 \\ 1 & 0 & 2.5 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

$$I(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 0-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 8)$$

$\lambda \in \{0, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$
$I_3 = 0 \wedge I_2 \neq 0 \wedge I_3 \neq 0 \rightarrow$
$-2\sqrt{2}x'^2 + 2\sqrt{2}y'^2 + 2\sqrt{-\frac{9}{-8}}z' = 0$
$-2\sqrt{2}x'^2 + 2\sqrt{2}y'^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}z' = 0$
Это уравнение гиперболического параболоида
$-2x'^2 + 2y'^2 + \frac{3}{2}z' = 0$
$4x'^2 - 4y'^2 = 3z'$
$\frac{4}{3}x'^2 - \frac{4}{3}y'^2 = z'$
$\frac{x'^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{y'^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = z'$
Это его каноническое уравнение

$3x^2 - 3y^2 + 4xz + 4yz - 9x + 9y - 11z = k$
Матрица квадратичной формы:
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -4.5 \\ 0 & -3 & 2 & 4.5 \\ 2 & 2 & 0 & -5.5 \\ -4.5 & 4.5 & -5.5 & -k \end{pmatrix}$$
Инварианты:
$I_1 = 3 - 3 + 0 = 0$
$I_2 = -4 + -4 + -9 = -17$
$$I_3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$I_4 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & -4.5 \\ 0 & -3 & 2 & 4.5 \\ 2 & 2 & 0 & -5.5 \\ -4.5 & 4.5 & -5.5 & -k \end{vmatrix} = \frac{9}{4}$$
$$I(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda^2 - 17) \to$$
$\lambda \in \{0, -\sqrt{17}, \sqrt{17}\}$
$I_3 = 0 \wedge I_2 \neq 0 \wedge I_3 \neq 0 \to$
$-\sqrt{17}x'^2 + \sqrt{17}y'^2 + 2\sqrt{-\frac{\frac{9}{4}}{-17}}z' = 0$
$-\sqrt{17}x'^2 + \sqrt{17}y'^2 + 3\sqrt{\frac{1}{17}}z' = 0$
Это уравнение гиперболического параболоида, не зависящее от k
Значит поверхность всегда гиперболический параболоид

$8x^2 + 5y^2 + z^2 - 12xy + 4xz - 4yz - x + 4y - 6z = k$
Матрица квадратичной формы:
$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -6 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -3 & -k \end{pmatrix}$$
Инварианты:
$I_1 = 8 + 5 + 0 = 13$
$I_2 = 4 + 1 + 4 = 9$
$$I_3 = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$I_4 = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -6 & 5 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -3 & -k \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}$$

$$I(\lambda) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 & 2 \\ -6 & 5-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 7 - 2\sqrt{10})(\lambda - 7 + 2\sqrt{10}) \to$$
$\lambda \in \{0, 7 - 2\sqrt{10}, 7 + 2\sqrt{10}\}$
$I_3 = 0 \wedge I_2 \neq 0 \wedge I_3 \neq 0 \to$
$(7 - 2\sqrt{10})x'^2 + (7 + 2\sqrt{10})y'^2 + 2\sqrt{-\frac{-\frac{25}{4}}{9}}z' = 0$
$(7 - 2\sqrt{10})x'^2 + (7 + 2\sqrt{10})y'^2 + \frac{5}{3}z' = 0$
Это уравнение гиперболического параболоида, не зависящее от k
Значит поверхность всегда гиперболический параболоид

Матрица квадратичной формы:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -\frac{17}{2} & -4 & -3 & -k \end{pmatrix}$$
Инварианты:
$I_1 = 0 + 0 + 1 = 1$
$I_2 = 0 + -1 + -4 = -5$
$$I_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$I_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -\frac{17}{2} & -4 & -3 & -k \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$
$$I(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2\lambda - 1 - \sqrt{21})(2\lambda - 1 + \sqrt{21}) \to$$
$\lambda \in \{0, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{21})\}$
$I_3 = 0 \wedge I_2 \neq 0 \wedge I_4 \neq 0 \to$
$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{21})x'^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21})y'^2 + 2\sqrt{-\frac{\frac{1}{4}}{-5}}z' = 0$
$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{21})x'^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21})y'^2 + 2\sqrt{\frac{1}{20}}z' = 0$
– уравнение гиперболического параболоида, не зависит от k
Значит поверхность всегда гиперболический параболоид

Порядок графов в картинках: DFS, мета, инвертированный, данный
Компоненты связности : $\{\{C\}, \{H\}, \{A, J, F\}, \{G, I, B\}, \{E\}, \{D\}\} \leftrightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$ (мета-граф на карт
При добавлении ребра важно, существовал ли путь обратно и его максимальная длина (в ребрах)

Если такой путь существовал, то от изначального кол-ва компонент связности вычтется длина этого
Имеет смысл перебрать всевозможные длины таких путей и вычесть из кол-ва компонент связности.
Это и будут всевозможные кол-ва компонент связности при добавлении одного ребра.
Для данного графа возможные длины: от 1 до 5
Значит кол-ва: от 1 до 5

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
0	∞	∞	∞	7	∞	∞	∞	∞	∞	$\{E\}$
0	∞	∞	∞	7	∞	20	8	∞	∞	$\{G; H\}$
0	∞	∞	∞	7	∞	20	8	∞	23	$\{H; J\}$
0	∞	∞	∞	7	∞	20	8	∞	14	$\{J\}$
0	25	18	∞	7	21	20	8	∞	14	$\{B; C; F\}$
0	25	18	∞	7	21	20	8	34	14	$\{C; F; J\}$
0	25	18	∞	7	21	20	8	34	14	$\{F; I\}$
0	25	18	20	7	21	20	8	29	14	$\{I; D\}$
0	25	18	20	7	21	20	8	29	14	$\{D\}$
0	25	18	20	7	21	20	8	29	14	$\{\}$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & C & \\ B & | & B \\ & | & A \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H & I & J \end{array} \\
\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ I \\ J \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
7 & -4 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & -3 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 5 & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Отрицательный путь на главной диагонали, значит есть отрицательный цикл
Ответ: нет решений

$|a \to a|$
$|b \to b|$
$|c \to c|$
$a| \to \&a$
$b| \to \&b$
$c| \to \&c$
$a\& \to \&$
$b\& \to \&$
$c\& \to \&$
$\& \rightarrowtail$
$a \to a|$
$b \to b|$
$c \to c|$

$4x^2 - 4xy + y^2 - 16x - 2y + 17 = 0$
$\tan\theta = \frac{-A}{B} = \frac{-4}{-2} = 2 \to$
$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \sin\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$
$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5}x' - \frac{2\sqrt{5}}{5}y' \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x' + \frac{\sqrt{5}}{5}y' \end{cases}$
$(-\sqrt{5}y')^2 - \frac{16\sqrt{5}}{5}x' + \frac{32\sqrt{5}}{5}y' - \frac{4\sqrt{5}}{5}x' - \frac{2\sqrt{5}}{5}y' + 17 = 0$
$5y'^2 - 4\sqrt{5}x' + 6\sqrt{5}y' + 17 = 0$
$(\sqrt{5}y' + 3)^2 = 4(\sqrt{5}x' - 2)$
$\begin{cases} x'' = \sqrt{5}x' - 2 \\ y'' = \sqrt{5}y' + 3 \end{cases}$
$y''^2 = 4x''^2$

$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2.5 \\ 1 & 0 & 2.5 & 0 \end{pmatrix}$
$J_1 = 0$
$J_2 = -8$
$J_3 = 0$
$J_4 = 9$
$-\lambda^3 + J_1\lambda^2 - J_2\lambda + J_3 = 0$
$-\lambda^3 + 8\lambda = 0$
$-\lambda(\lambda^2 - 8) = 0$

$\lambda : \{0, -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$
$-2\sqrt{2}x'^2 + 2\sqrt{2}y'^2 + 2\sqrt{\frac{J_4}{J_2}}z^2 = 0$
$-2\sqrt{2}x'^2 + 2\sqrt{2}y'^2 + 2\sqrt{\frac{9}{-8}}z^2 = 0$

$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -4 \\ -6 & 0 & 12 \\ -4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$
$S = A + C = A' + C' = 5$
$\gamma = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = A'C' = -36$
$\sigma = \begin{vmatrix} 5 & -6 & -4 \\ -6 & 0 & 12 \\ -4 & 12 & 5 \end{vmatrix} = A'C'F' = -324 \to$
$A' = -4$
$C' = 9$
$F' = 9$
$-4x^2 + 9y^2 = -9$
$\frac{4}{9}x^2 - y^2 = 1$
$\frac{x^2}{\frac{3}{2}^2} - y^2 = 1 -$ каноническое уравнение гиперболы

$\begin{pmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -12 & 11 & 13 \\ 4 & 13 & -41 \end{pmatrix}$
$S = A + C = A' + C' = 15$
$\gamma = \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 11 \end{vmatrix} = A'C' = -100$
$\sigma = \begin{vmatrix} 4 & -12 & 4 \\ -12 & 11 & 13 \\ 4 & 13 & -41 \end{vmatrix} = A'C'F' = 2000 \to$
$A' = 20$
$C' = -5$
$F' = -20$
$20x^2 - 5y^2 = 20$
$x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 -$ каноническое уравнение гиперболы

Асимптоты перпендикулярны $\to a = b$
$\vec{a}(3, -4); \vec{b}(-1, 4);$

Нужно, чтобы расстояние между фокусами было равно расстоянию между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
Для этого разобьем transform матрицу системы координат на 3 части: scale, rotate, translate:
$- scale:$
$|\vec{a}-\vec{b}| = c = \sqrt{\frac{1}{a}^2 + \frac{1}{a}^2}$ a без стрелочки - коэффициент
$\frac{\sqrt{2}}{a} = |\vec{a}-\vec{b}|$
$\frac{1}{a} = \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sqrt{2}}$
$\{x', y'\} = \{x, y\} * \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \{x, y\} * \begin{pmatrix} \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
$- rotate:$
$\cos\theta = \frac{(\vec{a}-\vec{b})\cdot\{1,0,0\}}{|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}; \sin\theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$
$\{x', y'\} = \{x, y\} * \begin{pmatrix} \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
$- translate: \vec{O} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} = \{1, 0, 0\}$
$\{x', y'\} = \{x, y\} * \begin{pmatrix} \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \vec{O}$
$x'^2 - y'^2 = 1$
$(2\sqrt{10}x)^2 - (2\sqrt{10}y)^2 = 1$
$(2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y)^2 - (2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y)^2 = 1$
$(2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y - 1)^2 - (2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y)^2 = 1$

Найти вторую квадратичную форму эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$
$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$
$$\vec{r}(u, v) = \begin{cases} x = \sin u \cos v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin u \sin v \\ z = \frac{1}{2} \cos u \end{cases}$$
$$\vec{r_u}' : \begin{cases} x = \cos u \cos v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos u \sin v \\ z = -\frac{1}{2} \sin u \end{cases}$$
$$\vec{r_v}' : \begin{cases} x = -\sin u \sin v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin u \cos v \\ z = 0 \end{cases}$$
$$\vec{n}(u, v) = \vec{r_u}(u, v) \times \vec{r_v}(u, v) : \begin{cases} \frac{1}{2} \sin u \frac{\sqrt{2}}{2} \sin u \cos v \\ \frac{1}{2} \sin u \sin u \sin v \\ \cos u \cos v \frac{\sqrt{2}}{2} \sin u \cos v - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos u \sin v - \sin u \sin v \end{cases}$$

Найти угол между линиями $v = 2u + 1, v = -2u + 1$
на поверхности с первой квадратичной формой $J_1 = 2du^2 - dudv + 4dv^2$
$E = 2$
$F = -\frac{1}{2}$
$G = 4$
$dv = 2du$
$\delta v = -2\delta u$
$\cos\theta = \frac{2du\delta u - \frac{1}{2}(du\delta v + dv\delta u) + 4dv\delta v}{\sqrt{2du^2 - dudv + 4dv^2} \cdot \sqrt{2\delta u^2 - \delta u\delta v + 4\delta v^2}} = \frac{2du\delta u - \frac{1}{2}(-2du\delta u + 2du\delta u) - 16du\delta u}{\sqrt{2du^2 - 2du^2 + 16du^2} \cdot \sqrt{2\delta u^2 + 2\delta u^2 + 16\delta u^2}} = \frac{-14du\delta u}{8\sqrt{5}du\delta u} = -\frac{7}{4\sqrt{5}} = -\frac{7\sqrt{5}}{20}$

Найти угол между координатными линиями поверхности $\begin{cases} x = u(3v^2 - u^2 - \frac{1}{3}) \\ y = v(3u^2 - v^2 - \frac{1}{3}) \\ z = 2uv \end{cases}$
$E = (3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} - 2u^2)^2 + (6vu)^2 + (2v)^2 = 9u^4 + 18u^2v^2 + 2u^2 + 9v^4 + 2v^2 + \frac{1}{9}$
$F = (3v^2 - u^2 - \frac{1}{3} - 2u^2)(6vu) + (3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} - 2v^2)(6vu) + (2v)(2u) = 0$
$G = (6vu)^2 + (3u^2 - v^2 - \frac{1}{3} - 2v^2)^2 + (2u)^2 = 9u^4 + 18u^2v^2 + 2u^2 + 9v^4 + 2v^2 + \frac{1}{9}$
$\cos\theta = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{36u^3v + 36uv^3}{\sqrt{((9u^4 + 54u^2v^2 - 2u^2 + 9v^4 + 2v^2 + \frac{1}{9})(9u^4 + 54u^2v^2 + 2u^2 + 9v^4 - 2v^2 + \frac{1}{9}))}}$
$= \frac{4u^3v + 4uv^3}{\sqrt{81u^8 + 972u^6v^2 + u^4(3078v^4 - 2) + 4u^2v^2(243v^4 + 5) + v^4(81v^4 - 2) + 1}} \rightarrow$
$\theta = \arccos(\frac{4u^3v + 4uv^3}{\sqrt{81u^8 + 972u^6v^2 + u^4(3078v^4 - 2) + 4u^2v^2(243v^4 + 5) + v^4(81v^4 - 2) + 1}})$

Найти уравнения касательной плоскости тора $\vec{r} : \begin{cases} x = (7 + 5\cos u)\cos v \\ y = (7 + 5\cos u)\sin v \\ z = 5\sin u \end{cases}$ в точке$M_0(u_0, v_0)$
$\vec{n}(u, v) = \vec{r}'_u(u, v) \times \vec{r}'_v(u, v)$
$\vec{r}'_u(u, v) : \begin{cases} x = -5\sin u\cos v \\ y = -5\sin u\sin v \\ z = 5\cos u \end{cases}$
$\vec{r}'_v(u, v) : \begin{cases} x = -(7 + 5\cos u)\sin v \\ y = (7 + 5\cos u)\cos v \\ z = 0 \end{cases}$
$\vec{n}(u, v) :$

$$\begin{cases} x = -5\cos u(7+5\cos u)\cos v \\ y = -5\cos u(7+5\cos u)\sin v \\ z = -5\sin u\cos v(7+5\cos u)\cos v - 5\sin u\sin v(7+5\cos u)\sin v \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5\cos u(7+5\cos u)\cos v \\ y = -5\cos u(7+5\cos u)\sin v \qquad \leftrightarrow \\ z = -5\sin u(7+5\cos u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \cos u(7+5\cos u)\cos v \\ y = \cos u(7+5\cos u)\sin v \\ z = \sin u(7+5\cos u) \end{cases}$$

Тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 :

$\vec{n}(u_0, v_0) \cdot (\vec{r}(u, v) - \vec{r}(u_0, v_0)) = 0$

$\cos u_0(7+5\cos u_0)\cos v_0(x(u,v) - x(u_0,v_0)) +$
$\cos u_0(7+5\cos u_0)\sin v_0(y(u,v) - y(u_0,v_0)) +$
$\sin u_0(7+5\cos u_0)(z(u,v) - z(u_0,v_0)) = 0$

$\cos u_0(7+5\cos u_0)\cos v_0((7+5\cos u)\cos v - (7+5\cos u_0)\cos v_0) +$
$\cos u_0(7+5\cos u_0)\sin v_0((7+5\cos u)\sin v - (7+5\cos u_0)\sin v_0) +$
$\sin u_0(7+5\cos u_0)(5\sin u - 5\sin u_0) = 0$

Найти уравнения касательной плоскости тора $\begin{cases} x = (7+5\cos u)\cos v \\ y = (7+5\cos u)\sin v \\ z = 5\sin u \end{cases}$ в точке$M_0(u_0, v_0)$

$$\begin{cases} x'_{uv}(u,v) = 5\sin u\sin v \\ y'_{uv}(u,v) = -5\sin u\cos v \\ z'_{uv}(u,v) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x''_{uv}(u,v) = 5\cos u\cos v \\ y''_{uv}(u,v) = 5\cos u\sin v \\ z''_{uv}(u,v) = 0 \end{cases}$$

$\vec{n} = \vec{r}' \times \vec{r}''$

{ Тогда уравнение касательной плоскости в точке M_0 :

$x'_{uv}(u_0,v_0)(x - x(u_0,v_0)) + y'_{uv}(u_0,v_0)(y - y(u_0,v_0)) + z'_{uv}(u_0,v_0)(z - z(u_0,v_0)) = 0$

$5\sin u_0\sin v_0(x - (7+5\cos u_0)\cos v_0) - 5\sin u_0\cos v_0(y - (7+5\cos u_0)\sin v_0) + 0(z - 5\sin u_0) = 0$

$5\sin u_0\sin v_0\ x - 5\sin u_0\cos v_0\ y = 5\sin u_0\sin v_0(7+5\cos u_0)\cos v_0 - 5\sin u_0\cos v_0(7+5\cos u_0)\sin v_0$

$5\sin u_0\sin v_0\ x - 5\sin u_0\cos v_0\ y = 0$

$\sin u_0\sin v_0\ x - \sin u_0\cos v_0\ y = 0$

Построить касательную плоскость гиперболоида $x^2+2y^2-4z^2=22$ параллельную плоскости $x+y+z=1$
$F(x,y,z)=x^2+2y^2-4z^2-22$
$F'_x(x,y,z)=2x$
$F'_y(x,y,z)=4y$
$F'_z(x,y,z)=8z$
Касательная плоскость параллельна $x+y+z=1 \leftrightarrow F'(M_0)||\{1,1,1\} \leftrightarrow \begin{cases} x_0=2y_0=4z_0 \\ x_0^2+2y_0^2-4z_0^2-22 \end{cases}$
Выражаем x и y через z, находим корни:
$x_0=2\sqrt{\frac{22}{5}}$
$y_0=\sqrt{\frac{22}{5}}$
$z_0=\sqrt{\frac{11}{10}}$
Тогда уравнение искомой плоскости:
$x+y+z=x_0+y_0+z_0$
$x+y+z=2\sqrt{\frac{22}{5}}+\sqrt{\frac{22}{5}}+\sqrt{\frac{11}{10}}$
$x+y+z=7\sqrt{\frac{11}{10}}$
$x+y+z-7\sqrt{\frac{11}{10}}=0$

Найти касательные плоскости поверхности$z=y^4-2yx^3$, параллельные векторам$(1,0,1)$и$(2,2,1)$.
$F(x,y,z)=y^4-2yx^3-z$
$F'_x(x,y,z)=-6yx^2$
$F'_y(x,y,z)=4y^3-2x^3$
$F'_z(x,y,z)=-1$
Касательная плоскость параллельна $\vec{a}$ и $\vec{b} \leftrightarrow$
$F'(M) \mid\mid \vec{a}\times\vec{b} \leftrightarrow \begin{cases} F'(M)\cdot\vec{a}=0 \\ F'(M)\cdot\vec{b}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6yx^2+1=0 \\ -12yx^2+8y^3-4x^3-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6yx^2+1=0 \\ 8y^3-4x^3+1=0 \end{cases}$
(Несложно заметить, что) Корни:
$$x_0=-\frac{1}{2^{2/3}\left(\frac{3}{-1+\left(\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\right)^{1/3}+(7-4\sqrt{3})^{1/3}}\right)^{1/3}},$$
$$y_0=\frac{\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{7-4\sqrt{3}}^{1/3}-\left(7-4\sqrt{3}\right)^{1/3}\right)-\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{7-4\sqrt{3}}^{1/3}-\left(7-4\sqrt{3}\right)^{1/3}\right)^2}{2^{2/3}\left(\frac{3}{-1+\left(\frac{1}{7-4\sqrt{3}}\right)^{1/3}+(7-4\sqrt{3})^{1/3}}\right)^{1/3}}$$
$z_0=y_0^4-4y_0x_0^3$
Нормаль: $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\{-2,1,2\}$
Тогда уравнение искомой касательной плоскости: $-2(x-x_0)+(y-y_0)+2(z-z_0)=0$

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x^2-y^2-z^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x^2-z^2=1 \end{cases}$$ – это уравнение гиперболы

$\vec{r}(t)=\{\frac{e^t+e^{-t}}{2},0,\frac{e^t-e^{-t}}{2}\}$
$\vec{r}'(t)=\{\frac{e^t-e^{-t}}{2},0,\frac{e^t+e^{-t}}{2}\}$
$\vec{r}''(t)=\{\frac{e^t+e^{-t}}{2},0,\frac{e^t-e^{-t}}{2}\}$

$M(1,0,0) \to t=0$
$\vec{r}'(0)=\{0,0,1\}$ – уже нормализован
$\vec{r}''(0)=\{1,0,0\}$ – уже нормализован

$\vec{\tau}=\vec{r}'=\{0,0,1\}$
$\vec{\beta}=\vec{r}'\times\vec{r}''=\{0,1,0\}$
$\vec{\nu}=\vec{r}'\times(\vec{r}'\times\vec{r}'')=\{1,0,0\}$

Итого репер Френе:
$\vec{\tau}=\{0,0,1\}$
$\vec{\beta}=\{0,1,0\}$
$\vec{\nu}=\{1,0,0\}$

Квадратичная форма:
$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -8 \\ -2 & 1 & -1 \\ -8 & -1 & 17 \end{pmatrix} x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \to \text{Не центральная система}$$
$a_{12}\neq 0 \to$ Есть поворот
$ctg(2\phi)=\frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}} \to \sin\phi=1, \cos\phi=1$