Цуканов Михаил
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 5

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.25

Задача 615.
Сумма двух корней уравнения $2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$ равна 1. Определить λ.

Решение:
$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda = 0$
$x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x + \frac{\lambda}{2} = 0$

По т. Виета:
$x_0 + x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$
$x_2 = -1\frac{1}{2}$

$(x_0 + x_1)x_2 + x_0 * x_1 = -3\frac{1}{2}$
$-1\frac{1}{2} + x_0 * x_1 = -3\frac{1}{2}$
$x_0 * x_1 = -2$

тогда
$\lambda = x_0 * x_1 * x_2 = -2 * -1\frac{1}{2} = 3$

Задача 618.
Решить уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$, зная коэффициенты a_1 и a_2, и зная, что корни его образуют арифметическую прогрессию.

Решение:
По теореме Виета мы знаем, что коэффициент при x^{n-1} равен сумме всех корней, а так как корни образуют арифметическую прогрессию, то этот коэффициент с минусом равен формуле суммы арифметической прогресии, то есть $-a_1 = \dfrac{x_1 + x_n}{2}n$

Разность прогресси по формуле равна $\dfrac{x_1 + x_n}{n+1}$

$$-a_1 = \frac{x_1 + x_n}{2}n \Rightarrow -\frac{2a_1}{n} = x_1 + x_n \Rightarrow -\frac{2a_1}{n(n+1)} = \frac{x_1 + x_n}{n+1}$$

$$d = -\frac{2a_1}{n(n+1)}$$

$$S = \frac{2x_1 + d(n-1)}{2}n = -a_1$$

$$-\frac{2a_1}{n} = 2x_1 + d(n-1) \Rightarrow -\frac{2a_1}{n} - d(n-1) = 2x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{-\frac{2a_1}{n} - d(n-1)}{2}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{2a_1}{n} + \frac{2a_1(n-1)}{n(n+1)}}{2} = \frac{-2a_1(n+1) + 2a_1(n-1)}{2n(n+1)} = \frac{-2a_1}{n(n+1)}$$

$$x_n = x_1 + (n-1)d = \frac{-2a_1}{n(n+1)} + (n-1)\left(-\frac{2a_1}{n(n+1)}\right) = \frac{-2a_1 - 2a_1(n-1)}{n(n+1)} = -\frac{2a_1}{n+1}$$

Ответ: $-\dfrac{2a_1}{n+1}$

Задача 621.
Составить уравнение 6-й степени, имеющее корни α, $\frac{1}{\alpha}$, $1-\alpha$, $\frac{1}{1-\alpha}$, $1-\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}$.

Решение:
$(x-\alpha)(x-\frac{1}{\alpha})(x-1+\alpha)(x-\frac{1}{1-\alpha})(x-1+\frac{1}{\alpha})(x-\frac{1}{1-\frac{1}{\alpha}}) =$
$x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex^1+1 =$
$x^6+3x^5+\frac{-\alpha^6+5\alpha^5-8\alpha^4+10\alpha^3-15\alpha^2+11\alpha-3}{(\alpha^2-\alpha)^2}x^4+\frac{2\alpha^6-6\alpha^5+5\alpha^4+5\alpha^2-6\alpha+2}{(\alpha^2-\alpha)^2}x^3+\frac{-\alpha^6+5\alpha^5-8\alpha^4+10\alpha^3-15\alpha^2+11\alpha-3}{(\alpha^2-\alpha)^2}x^2+3x+1$

Задача 552(a).
Пользуясь схемой Горнера, разложить $\dfrac{x^3-x+1}{(x-2)^5}$ на простейшие дроби.

Решение:

	1	0	−1	1
2	1	2	3	7

	1	2	3
2	1	4	11

	1	4
2	1	6

Получили разложение x^3-x+1 на $x-2$. Поделим его на $(x-2)^5$.
Итого
$$\frac{x^3-x+1}{(x-2)^5}=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}+\frac{11}{(x-2)^4}+\frac{7}{(x-2)^5}$$

Задача 626(b).
Разложить на простейшие дроби над полем R: $\frac{x^2}{x^4-16}$

Решение:
$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{x^2}{(x^2+4)(x-2)(x+2)}=\frac{ax+b}{x^2+4}+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{x+2}=\frac{(a+c+d)x^3+(b+2c-2d)x^2+(-4a+4c+4d)x+(-4b+8c-8d)}{x^4-16}$
$$\begin{cases} a+c+d=0\\ b+2c-2d=1\\ -a+c+d=0\\ -b+2c-2d=0\end{cases}\begin{cases} a=0\\ b=\frac{1}{2}\\ c=\frac{1}{8}\\ d=-\frac{1}{8}\end{cases}$$
$\frac{x^2}{x^4-16}=\frac{\frac{1}{2}}{x^2+4}+\frac{\frac{1}{8}}{x-2}+\frac{-\frac{1}{8}}{x+2}$

Задача 627(b).
Разложить на простейшие дроби над полем R: $\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

Решение:
$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{(x+1)^2}+\frac{dx+e}{x^2+x+1}+\frac{fx+g}{(x^2+x+1)^2}$$
$2x-1=a(x+1)^2(x^2+x+1)^2+bx(x+1)(x^2+x+1)^2+cx(x^2+x+1)^2+(dx+e)x(x+1)^2(x^2+x+1)+(fx+g)x(x+1)^2$

$2x-1=x^6(a+b+d)+x^5(4a+3b+c+3d+e)+x^4(8a+5b+2c+4d+f)+x^3(10a+5b+3c+3d+4e+2f+g)+x^2(8a+3b+2c+d+3e+f+2g)+x(4a+b+c+e+g)+a$

$$\begin{cases} a+b+d=0, \\ 4a+3b+c+3d+e=0, \\ 8a+5b+2c+4d+f=0, \\ 10a+5b+3c+3d+4e+2f+g=0, \\ 8a+3b+2c+d+3e+f+2g=0, \\ 4a+b+c+e+g=2, \\ a=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=-1, \\ b=7, \\ c=3, \\ d=-6, \\ e=-2, \\ f=-3, \\ g=-2 \end{cases}$$

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{7}{x+1}+\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{6x+2}{x^2+x+1}-\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$$

Задача 624(d).
Разложить на простейшие дроби над полем C: $\frac{x^2}{x^4-1}$.

Решение:

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-i}+\frac{d}{x+i}$$

$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$

$x^2=a(x-i)(x+i)(x+1)+b(x-i)(x+i)(x-1)+c(x-1)(x+1)(x+i)+d(x-1)(x+1)(x-i)$

при x = 1: $4a=1\to a=\dfrac{1}{4}$

при x = -1: $-4b=1\to b=-\dfrac{1}{4}$

при x = i: $-4ic=-1\to c=-\dfrac{i}{4}$

при x = -i: $4id=-1\to d=\dfrac{i}{4}$

$$\frac{x^2}{x^4-1}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{i}{4(x-i)}+\frac{i}{4(x+i)}$$

Ответ: $\dfrac{1}{4(x-1)}-\dfrac{1}{4(x+1)}-\dfrac{i}{4(x-i)}+\dfrac{i}{4(x+i)}$

Задача 625(c).
Разложить на простейшие дроби над полем C: $\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$.

Решение:

$$\frac{5x^2+6x-23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-1)^3}+\frac{d}{x+1}+\frac{e}{(x+1)^2}+\frac{f}{x-2}$$

$5x^2+6x-23=a(x-1)^2(x+1)^2(x-2)+b(x-1)(x+1)^2(x-2)+c(x+1)^2(x-2)+d(x-1)^3(x+1)(x-2)+e(x-1)^3(x-2)+f(x-1)^3(x+1)^2$

при x = 1: $-4c=-12\to c=3$

при x = -1: $24e = -24 \to e = -1$
при x = 2: $9f = 9 \to f = 1$

$$\begin{cases} a + d = -1, \\ 2a - b + 4d = -2, \\ 2a + b - 4d = 6, \\ 4a - 3b + 2d = 12, \\ a + b - 5d = 7, \\ 2a - 2b - 2d = 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 2a + 4d + 2, \\ 2a + b - 4d = 6 \end{cases}$$

$2a + 2a + 4d + 2 - 4d = 6 \to 4a = 4 \to a = 1$
$d = -2$
$b = 2 - 8 + 2 = -4$

$$\frac{5x^2 + 6x - 23}{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{3}{(x-1)^3} - \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{x-2}$$