

Задача 120.

Представить в тригонометрической форме: $2 + \sqrt{3} + i$.

Решение:

$$2 + \sqrt{3} + i =$$

$$2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) =$$

Рассмотрим выражение в скобках как вектор.

Это будет сумма векторов $(1, 0)$ и $(1, \frac{\pi}{3})$.

Получившийся треугольник равнобедренный. Найдём его основание и угол при нем.

(Это и будет ответом)

Длина (по т. косинусов):

$$c = \sqrt{1 + 1 - 2 \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}$$

Угол:

$$\alpha = \frac{\pi - \frac{2\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = (2\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

Задача 137(с, d).

Вычислить, пользуясь формулой Муавра

$$\text{с) } \left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24},$$

$$\text{d) } \left(\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}}\right) + \left(\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}\right).$$

Решение:

$$\text{с) } \left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24}$$

Рассмотрим выражение в скобках как сумму векторов $(1, 0)$ и $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

Оба вектора имеют длину 1, и угол между ними известен - $\frac{5\pi}{6}$.

Используя теорема косинусов найдём длину суммы - $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Геометрически найдём угол (аргумент) суммы - $\frac{5\pi}{12}$

Найдём значение выражения:

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3} - i}{2}\right)^{24} = (2 + \sqrt{3})^{12} (\cos \frac{5\pi}{12} * 24 + i \sin \frac{5\pi}{12} * 24) = (2 + \sqrt{3})^{12}$$

$$\text{d) } \left(\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}}\right) + \left(\frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}\right) =$$

$$\left(\frac{2^{15}(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^{15}}{2^{10}(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}})^{20}}\right) + \left(\frac{2^{15}(\frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^{15}}{2^{10}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})^{20}}\right) =$$

$$\left(\frac{2^5(\cos(15 * \frac{2\pi}{3}) + i \sin(15 * \frac{2\pi}{3}))}{(\cos(20 * -\frac{\pi}{4}) - i \sin(20 * -\frac{\pi}{4}))}\right) + \left(\frac{2^5(\cos(15 * -\frac{2\pi}{3}) - i \sin(15 * -\frac{2\pi}{3}))}{(\cos(20 * \frac{\pi}{4}) + i \sin(20 * \frac{\pi}{4}))}\right) =$$

$$2^5 \left(\frac{1}{-1} \right) + 2^5 \left(\frac{1}{-1} \right) = -2^5 - 2^5 = -2^6$$

Задача 143(б, е).

Извлечь корни б) $\sqrt[3]{2+2i}$, е) $\sqrt[6]{-27}$.

Решение:

$$б) \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[3]{8}(\cos(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k) + i \sin(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi k)), k \in \{0, 1, 2\}$$

$$е) \sqrt[6]{-27} = \sqrt[6]{3}(\cos(\frac{-\pi}{12} + \frac{1}{6}\pi k) + i \sin(\frac{-\pi}{12} + \frac{1}{6}\pi k)), k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Задача 145(с).

Вычислить $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

Решение:

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}} = \sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))}{2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}(\cos(-\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}) + i \sin(-\frac{7\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}))$$

$$k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$$

Задача 125.

Доказать, что всякое комплексное число z , отличное от -1 , модуль которого 1 , может быть представлено в форме $z = \frac{1+it}{1-it}$, где t – вещественное число.

Решение:

$$\frac{1+it}{1-it} = \frac{(1+it)^2}{1+t^2} = \frac{1-t^2+2ti}{1+t^2} =$$

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} + i \frac{2t}{1+t^2} =$$

Заметим, что длина упрощенного вектора всегда равна 1 .

Значит $\forall t$ $v(t)$ принадлежит данной окружности и при этом x и y по модулю не больше 1

Докажем, что множество значений $v(t)$ "заполняет" все множество точек окружности.

Исследуем функции $y(t)$ и $x(t)$. Обе функции непрерывны как отношения элементарных непрерывных функций (знаменатель никогда не равен 0).

Найдем минимум и максимум x и y :

$$x'(t) = \frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} = 0 \leftrightarrow t = 0 \leftrightarrow x = 1 \wedge y = 0$$

$$y'(t) = \frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} = 0 \leftrightarrow t = \pm 1 \leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 1) \vee (x = 0 \wedge y = -1)$$

Пока не понятно, достигает ли $x(t)$ -1 . Определим это

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = -1 \text{ нет решений} \rightarrow \text{Не достигает.}$$

При этом функция непрерывна и стремится к -1 при $t \rightarrow +\infty$.

При этом она ограничена сверху и снизу. Значит она принимает все значения из множества $(-1; 1]$.

Аналогично для $y(t)$ получаем, что она принимает все значения из множества $[-1; 1]$

Значит множество пар $(x(t), y(t))$ заполняет множество точек окружности. чтд.

Задача 182.

Найти сумму всех корней n -й степени ($n > 1$) из 1 .

Решение:

Любое множество корней n -й степени - правильный n -угольник. Каждый корень - радиус-вектор к соотв. вершине.

Значит сумма корней - сумма таких радиус-векторов. Если бы она не равнялась 0, то при умножении ее на $(1, \frac{2\pi}{n})$, ее значение должно было бы повернуться на $\frac{2\pi}{n}$.

При этом все вершины переходят в друг друга, а значит и сумма не должна поменяться. Значит сумма равна 0.

Задача 183.

Вычислить $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1}$, где ε - корень n -й степени из 1.

Решение:

$$\begin{aligned} 1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \dots + n\varepsilon^{n-1} &= \\ \frac{(1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+\dots+n\varepsilon^{n-1})(\varepsilon-1)}{(\varepsilon-1)} &= \\ \frac{n-1-\varepsilon-\varepsilon^2-\dots-\varepsilon}{(\varepsilon-1)} &= \\ \frac{n-1}{(\varepsilon-1)} &= \end{aligned}$$

Задача 146.

Выразить $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$

Решение:

$$\begin{aligned} \cos 5x &= \cos(2x + 3x) = \cos 2x * \cos 3x - \sin 2x * \sin 3x = \\ (\cos^2 x - \sin^2 x)(4 \cos^3 x - 3 \cos x) - 2 \sin x \cos x(3 \sin x - 4 \sin^3 x) &= \\ 4 \cos^5 x - 3 \cos^3 x - 4 \sin^2 x \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x + 6 \sin^4 x \cos x & \end{aligned}$$
