Цуканов Михаил
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 3

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.25

Задача 550(b).
Пользуясь схемой Горнера, вычислить $f(x_0)$ $f(x) = x^5+(1+2i)x^4-(1+3i)x^2+7$, $x_0 = -2-i$.

Решение:

$$\begin{array}{c|cccccc} -2-i & 1 & 1+2i & 0 & -1-3i & 0 & 7 \\ -2-i & 1 & -1+i & 3-i & -8-4i & 12+16i & -1-44i \end{array}$$

Ответ: $-1-44i$

Задача 551(b).
Пользуясь схемой Горнера, разложить полином $f(x) = x^5$ по степеням $x-1$.

Решение:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 6 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 3 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 5 \end{array}$$

Значит $x^5 = (x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$

Задача 553(b).
Разложить $f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20$ по степеням x.

Решение:

$y = x - 2 \to x = y + 2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 4 & 6 & 10 & 20 \\ \hline -2 & 1 & 2 & 2 & 6 & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 2 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 2 \\ \hline -2 & 1 & -2 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & -2 \\ \hline -2 & 1 & -4 \end{array}$$

Значит $(x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 2x + 8$

Задача 555(b).
Чему равен показатель кратности корня -2 для полинома $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$?

Решение:

	1	7	16	8	-16	-16
-2	1	5	6	-4	-8	0

	1	5	6	-4	-8
-2	1	3	0	-4	0

	1	3	0	-4
-2	1	1	-2	0

	1	1	-2
-2	1	-1	0

Остался полином $x-1$ значит кратность корня - 4

Задача 559(b).
Доказать, что полином $f(x)=x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$ имеет число 1 тройным корнем.

Решение:

1	1	0...0(n-1 нулей)	$-(2n+1)$	$2n+1$	0...0(n-1 нулей)	-1
1	1..	..1(n единиц)	$-2n$	1..	..1(n единиц)	0
1	$1,2,3..$	$..n$	$-n$	$-n+1..$	$..-3,-2,-1$	0
1	$1,3,6..$	$..\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{(n-2)(n-1)}{2},\frac{(n-2)(n-3)}{2}..$	$..\frac{2*3}{2},\frac{2*1}{2}$	0
1	$1,5,15..$	$..\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$	Дальше получается	пос-ть полиномов с	растущими	коэф-ми

(Формулы были найдены с помощью интерполяционного полинома)
Значит 1 - тройной корень.

Задача 569.
Доказать, что полином делится на свою производную в том и только том случае, когда он равен $a_0(x-x_0)^n$.

Решение:

Задача 570.
Доказать, что полином $f(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$ не имеет кратных корней.

Решение:

Задача 114.
Решить уравнения и левые части их разложить на множители с вещественными коэффициентами:
a) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$,
b) $x^4+2x^2-24x+72=0$.

Решение:

a)

$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) =$

$x^4 + (c + a)x^3 + (b + d + ac)x^2 + (ad + cb)x + bd \leftrightarrow$

$$\begin{cases} c + a = 6 \\ b + d + ac = 9 \\ ad + cb = 0 \\ db = 100 \end{cases} \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \\ c = 8 \\ d = 20 \end{cases}$$

$x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + 8x + 20)$

Проверим, имеют ли эти полиномы вещественные корни

1)$D = 4 - 20 < 0 \rightarrow$ нет

2)$D = 64 - 100 < 0 \rightarrow$ нет

b)

$x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

$$\begin{cases} c + a = 0 \\ b + d + ac = 2 \\ ad + cb = -24 \\ db = 72 \end{cases} \begin{cases} a = -4 \\ b = 6 \\ c = 4 \\ d = 12 \end{cases}$$

$x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = (x^2 - 4x + 6)(x^2 + 4x + 12)$

Провери, имеют ли эти полиномы вещественные корни

1)$D = 16 - 24 < 0 \rightarrow$ нет

2)$D = 16 - 48 < 0 \rightarrow$ нет

Задача 2.

Разложить на неприводимые вещественные множители полиномы:

c) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$,

d) $x^6 + 27$.

Решение:

c)

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$

$$\begin{cases} c + a = 4 \\ b + d + ac = 4 \\ ad + cb = 0 \\ db = 1 \end{cases} \begin{cases} a = 2 \\ b = -i \\ c = 2 \\ d = i \end{cases}$$

$x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1 = (x^2 + 2x - i)(x^2 + 2x + i)$

d)

$x^6 + 27$

Нужно найти корни

$x^6 = -27 \leftrightarrow x^6 = (27, \pi) \leftrightarrow x = (27, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{3}), k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

В получившемся выражении из 6 множителей перемножаем множители с сопряженными корнями

Получается: $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3)(x^2 + 3x + 3)$
