Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 18
Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.26

Задача 527(b).
Преобразовать квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа: $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

Решение:
Для удобства сделаем следующие замены: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$
$a^2 - 4ab + 2ac + 4b^2 + c^2 = (a^2 - 2a(2b - c) + (2b - c)^2) - (2b - c)^2 + 4b^2 + c^2 = (a + (2b - c))^2 - (2b - c)^2 + 4b^2 + c^2 = (a - (2b - c))^2 + 4bc$
Пусть $y_1 = a - 2b + c, b = y_2 + y_3, c = y_2 - y_3 \to$ получим каноническую форму:
$y_1^2 + 4y_2^2 - 4y_3^2$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} * Y$$

Задача 527(d).
Преобразовать квадратичную форму к сумме квадратов методом Лагранжа: $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$

Решение:
Для удобства сделаем следующие замены: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d$
$a^2 - 2ab + 2ac - 2ad + b^2 + 2bc - 4bd + c^2 - 2d^2 = a^2 - 2a(b - c + d) + (b - c + d)^2 - b^2 + 2bc - 2bd - c^2 + 2cd - d^2 + b^2 + 2bc - 4bd + c^2 - 2d^2 = (a - b + c - d)^2 + 4bc - 6bd + 2cd - 3d^2$
Заменим: $y_1 = a - b + c - d, y_2 = b, y_3 = c, y_4 = d (a = y_1 + y_2 - y_3 + y_4) =>$
$y_1^2 + 4y_2y_3 - 6y_2y_4 + 2y_3y_4 - 3y_4^2 = y_1^2 + 2y_2(2y_3 - 3y_4) + y_4(2y_3 - 3y_4)$
Заменим: $y_1 = z_1, y_2 = z_2 + z_3, y_3 = z_2 - z_3, y_4 = z_4 =>$
$z_1^2 + 4z_2^2 - 4z_3^2 - 6z_2z_4 - 6z_3z_4 + 2z_2z_4 - 2z_3z_4 - 3z_4^2 = z_1^2 + (2z_2 - z_4)^2 - 4(z_3 + z_4)^2$
Заменим: $z_1 = k_1, z_2 = 0,5k_2 + 0,5k_4, z_3 = k_3 - k_4, z_4 = k_4$, получим каноническую форму:
$k_1^2 + k_2^2 - 4k_3^2$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * K =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0,5 & 1 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & -1 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * K$$
