2023.12.25

Задача 92.

Даны две смежные вершины параллелограмма ABCD: A(-4, -7) и B(2, 6) и точка пересечения его диагоналей M(3,1). Найти две другие вершины параллелограмма. Система координат аффинная.

Решение:

Переведем параллелограмм в систему координат, в которой начало в точке А.

Значит новые координаты точек: A(0,0), B(6,13), M(7,8)

$$2*\vec{AM} = \vec{AC} = C(14, 16)$$

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BD} \stackrel{\checkmark}{<=>} \vec{AD} = 2*(\vec{AM} - \frac{1}{2}\vec{AB}) => D(14-6,16-13) <=> D(8,3)$$
 Теперь переведем полученные значения в изначальную систему координат.

$$C(10,9), D(4,-4)$$
 Other: $C(10,9), D(4,-4)$

Задача 111.

Даны две точки A(8, -6, 7) и B(-20, 15, 10). Установить, пересекает ли прямая AB какуюнибудь из осей координат.

Решение:

Определим уравнение прямой.

$$l = A + \alpha(B - A)$$

Тогда нужно решить 3 системы уравнений относительно α .

$$\begin{pmatrix} 8-28\alpha & \beta \\ -6+21\alpha & 0 \\ 7+3\alpha & 0 \end{pmatrix} \alpha = -\frac{7}{3} \text{ и } \alpha = \frac{2}{7} \text{ Нет решений}$$

$$\begin{pmatrix} 8-28\alpha & 0 \\ -6+21\alpha & \beta \\ 7+3\alpha & 0 \end{pmatrix} \alpha = -\frac{7}{3} \text{ и } \alpha = \frac{2}{7} \text{ Нет решений}$$

$$\begin{pmatrix} 8-28\alpha & 0 \\ -6+21\alpha & 0 \\ 7+3\alpha & \beta \end{pmatrix} \beta = \frac{55}{7} \text{ и } \alpha = \frac{2}{7}$$

Итого ответ: Прямая пересекает ось z.

Задача 120.

Относительно полярной системы координат даны точки $A(2, \frac{\pi}{3}), B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}), C(5, \frac{\pi}{2}), D(3, \frac{\pi}{6}).$ Найти координаты этих точек в соответствующей прямоугольной системе координат.

Решение:

$$X(l,\phi) = X(l\cos\phi, l\sin\phi)$$

$$A(2,\frac{\pi}{3}) = A(1,\sqrt{3})$$

$$B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}) = B(-1, 1)$$

$$C(5, \frac{\pi}{2}) = C(0, 5)$$

$$C(5,\frac{\pi}{2}) = C(0,5)$$

$$D(3, \frac{\pi}{6}) = D(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$$

Задача 122.

Зная полярные координаты точки $\rho = 10$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Найти её прямоугольные координаты, если полюс находится в точке (2,3), а полярная ось параллельна оси Ox.

Решение:

Данная полярная система координат сдвинута относительно начала декартовой системы координат на вектор $\{2,3\}$. Значит его нужно будет прибавить к полученным значениям.

$$A(10, \frac{\pi}{6} = A(5\sqrt{3}, 5) = A(2 + 5\sqrt{3}, 8)$$

Значение в 3x системах координат. В начальной в промежуточной декартовой с началом в точке (2,3) и конечная - декартова с началом в точке (0,0)

Итого ответ: $A(2+5\sqrt{3},8)$

Задача 128.

Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам A(3, -4, 5), B(1, -1, 1), C(-6, 0, 8).

Решение:

$$M(x, y, z) = M(z, r, \phi) = M(z, \sqrt{x^2 + y^2}, \phi)$$

При этом угол ϕ будет определятся косинусом и синусом угла $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$

$$A(3, -4, 5) = A(5, 5, \arcsin(-\frac{4}{5}))$$

$$B(1, -1, 1) = B(1, \sqrt{2}, \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})) = B(1, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$$

$$C(-6,0,8) = C(8,6,\arccos(-1)) = C(8,6,\pi)$$

Задача 665.

Найти формулы перехода от одной аффинной системы координат Oxy с координатным углом ω к другой аффинной системе координат Ox'y', если одноименные оси этих систем взаимно перпендикулярны, а разноименные образуют острые углы. Длины базисных векторов равны 1.

Решение:

x перпендикулярен x' и y перпендикулярен y', а значит одноименные оси координат не будут оказывать друг на друга влияния.

При этом разноименные оси образуют острый угол, а значит будут влиять друг на друга (при этом проекции положительные).

Этот острый угол будет равен $\frac{\pi}{2}-\omega$

Спроектировав на оси Ox'Oy' вектор $\{1,0\}$, заданный в Oxy системе координат, получим $\{0,\cos(\frac{\pi}{2}-\omega)\}$

Спроектировав на оси Ox'Oy' вектор $\{0,1\}$, заданный в Oxy системе координат, получим $\{\cos(\frac{\pi}{2}-\omega),0\}$

Упростим $\cos(\frac{\pi}{2} - \omega) = -\sin \omega$

Любой вектор в системе координат Oxy будет линейной комбинацией векторов $\{0,1\}$ и $\{1,0\}$. А значит и любой вектор в системе координат Oxy будет равен $\{-y\sin\omega, -x\sin\omega\}$.

Такое преобразование можно представить в виде матрицы.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\omega \\ -\sin\omega & 0 \end{pmatrix}$$

Домножив вектор в системе координат Oxy на эту матрицу получим вектор в системе координат Ox'y'. (На обратную матрицу - обратно)