YOURNAME
YOURSTUDENTID
YOURMAIL

Homework Assignment 9

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.11.27

Задача 410(d).

Обратить матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

Воспользуемся методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) => \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 410(f).

Обратить матрицу: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:

Воспользуемся методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) => \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) => \left(\begin{array}{cccccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cccccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) => \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Задача 416.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Решение:
Воспользуемся методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Будем умножать i строчку на i и прибавлять к ней $i-1$ю

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -3 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & -2 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Осталось обнулить диагональ с отрицательными числами.
Рассмотрим матрицу по блокам 3x3.

$$\begin{pmatrix} i-1 & -i+2 & 0 \\ 0 & i & -i+1 \\ 0 & 0 & i+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i-1 & -i+2 & 0 \\ 0 & i & -i+1 \\ 0 & 0 & \frac{i(i+1)}{i} \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы обнулить элемент в позиции [2][3] нужно домножить его строчку на элемент в позиции [3][3], поделить на него самого и вычесть из нее следующую строчку.
То есть нужно умножить 2 строчку на $\frac{i(i+1)}{i(-i+1)}$ и вычесть $\frac{i(i+1)}{i}$
Тогда получим:

$$\begin{pmatrix} i-1 & -i+2 & 0 \\ 0 & \frac{i(i+1)}{-i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i(i+1)}{i} \end{pmatrix}$$

Повторив аналогичные действия для элемента в позиции [1][2] получим:

$$\begin{pmatrix} \frac{i(i+1)}{i-2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i(i+1)}{-i+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i(i+1)}{i} \end{pmatrix}$$

Тогда по индукции получим следующее: (при этом домножим соответственный строчки на -1)

$$\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & n(n+1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n(n+1)}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & n(n+1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n(n+1)}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 & n(n+1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 \end{pmatrix}$$

Задача 442(b).

Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$

Решение:

Поменяем строчки местами:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Значит ранг матрицы - 2

Задача 442(c).

Найти ранг матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 13 & 28 \\ 0 & 5 & 6 & 28 & 61 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 11 & 20 \\ 0 & 0 & 6 & 23 & 41 \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} => \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Значит ранг матрицы - 4
