Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 4
Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.25

Задача 546(b).
Выполнить деление с остатком $x^3 - 3x^2 - x - 1$ на $3x^2 - 2x + 1$.

Решение:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -3x^2 & -x & -1 & 3x^2-2x+1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +\frac{2}{3}x^2 & -\frac{1}{3}x & & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \\ \cline{1-3}
 & -\frac{7}{3}x^2 & -\frac{4}{3}x & -1 & \\
 & \frac{7}{3}x^2 & -\frac{14}{9}x & +\frac{7}{9} & \\ \cline{2-4}
 & & -\frac{26}{9}x & -\frac{2}{9} &
\end{array}$$

Задача 549(c).
Пользуясь схемой Горнера, разложить полином $f(x) = x^5$ по степеням $x - 1$.

Решение:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline
1 & 1 & 3 & 6 & 10
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 3 & 6 \\ \hline
1 & 1 & 4 & 10
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc}
 & 1 & 4 \\ \hline
1 & 1 & 5
\end{array}$$

Получается: $(x-1)^5 + 5(x-1)^4 + 10(x-1)^3 + 10(x-1)^2 + 5(x-1) + 1$

Задача 549(d).
Выполнить деление с остатком $x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$.

Решение:

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
x^3 & - & x^2 & - & x & & & & & x-1+2i \\ \cline{10-10}
x^3 & - & x^2 & + & 2x^2i & & & & & x^2-2xi-5-2i \\ \cline{1-5}
 & - & 2x^2i & - & x & & & & & \\
 & - & 2x^2i & + & 2xi & + & 4x & & & \\ \cline{3-7}
 & & & - & 5x & - & 2xi & & & \\
 & & & - & 5x & + & 5 & - & 10i & \\ \cline{4-9}
 & & & - & 2xi & - & 5 & + & 10i & \\
 & & & - & 2xi & + & 4 & + & 2i & \\ \cline{5-9}
 & & & & & - & 9 & + & 8i &
\end{array}$$

Задача 557(e).
Определить наибольший общий делитель полиномов: $x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5$ и x^5+x^2-x+1.

Решение:

$$x^6+2x^4-4x^3-3x^2+8x-5=\big(x^5+x^2-x+1\big)\cdot x+\big(2x^4-5x^3-2x^2+7x-5\big)$$
$$x^5+x^2-x+1=\big(2x^4-5x^3-2x^2+7x-5\big)\cdot\big(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{5}{4}\big)+\big(\tfrac{29}{4}x^3-\tfrac{29}{4}x+\tfrac{29}{4}\big)$$
$$2x^4-5x^3-2x^2+7x-5=\big(\tfrac{29}{4}x^3-\tfrac{29}{4}x+\tfrac{29}{4}\big)\cdot\big(\tfrac{8}{29}x-\tfrac{20}{29}\big)+0$$

Итого ответ: $2x-5$

Задача 557(f).
Определить наибольший общий делитель полиномов: $x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12$ и $x^4+3x^3-6x^2-22x-12$.

Решение:

$$x^5+3x^4-12x^3-52x^2-52x-12=\big(x^4+3x^3-6x^2-22x-12\big)\cdot x+\big(-6x^3-30x^2-40x-12\big)$$
$$x^4+3x^3-6x^2-22x-12=\big(-6x^3-30x^2-40x-12\big)\cdot\big(-\tfrac{1}{6}x+\tfrac{1}{3}\big)+\big(-\tfrac{8}{3}x^2-\tfrac{32}{3}x-8\big)$$
$$-6x^3-30x^2-40x-12=\big(-\tfrac{8}{3}x^2-\tfrac{32}{3}x-8\big)\cdot\big(\tfrac{9}{4}x+\tfrac{9}{4}\big)+\big(2x+6\big)$$
$$-\tfrac{8}{3}x^2-\tfrac{32}{3}x-8=\big(2x+6\big)\cdot\big(-\tfrac{4}{3}x-\tfrac{4}{3}\big)+0$$

Итого ответ: $x+1$

Задача 578(c).
Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_1(x)+f_2(x)M_2(x)=\delta(x)$, где $\delta(x)$ – наибольший общий делитель полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$.
$f_1(x)=x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35$,
$f_2(x)=x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25$.

Решение:

$x^6-4x^5+11x^4-27x^3+37x^2-35x+35=(x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25)(x-1)+x^4+7x^2+10$
$x^5-3x^4+7x^3-20x^2+10x-25=(x^4+7x^2+10)(x-3)+x^2+5$
$x^4+7x^2+10=(x^2+5)(x^2+2)$ - НОД
$f_1=f_2q_1+r_1$
$f_2=r_1q_2+r_2$
$r_2=f_2-r_1q_2=-f_1q_2+f_2(1+q_1q_2)$
$M_1=-q_2=3-x$
$M_2=1+q_1q_2=1+(x-1)(x-3)=x^2-4x+4$
$f_1(x)(3-x)+f_2(x)(x^2-4x+4)=x^2+5$
Ответ: $3-x; x^2-4x+4$

Задача 578(d).
Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать полиномы $M_1(x)$ и $M_2(x)$ так, чтобы $f_1(x)M_1(x)+f_2(x)M_2(x)=\delta(x)$, где $\delta(x)$ – наибольший общий делитель полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$.
$f_1(x)=3x^7+6x^6-3x^5+4x^4+14x^3-6x^2-4x+4$,
$f_2(x)=3x^6-3x^4+7x^3-6x+2$.

Решение:

$f_1(x)M_1(x)+f_2(x)M_2(x)=\delta(x)$
$3x^7+6x^6-3x^5+4x^4+14x^3-6x^2-4x+4=(3x^6-3x^4+7x^3-6x+2)(x+2)+3x^4+6x$

$3x^6-3x^4+7x^3-6x+2=(3x^4+6x)(x^2-1)+x^3+2$
$3x^4+6x=(x^3+2)3x$ - НОД
$f_1=f_2q_1+r_1$
$f_2=r_1q_2+r_2$
$r_2=f_2-r_1q_2=-f_1q_2+f_2(1+q_1q_2)$
$M_1=-q_2=1-x^2$
$M_2=1+q_1q_2=1+(x+2)(x^2-1)=x^3+2x^2-x-1$
$f_1(x)(1-x^2)+f_2(x)(x^3+2x^2-x-1)=x^3+2$
Ответ: $1-x^2; x^3+2x^2-x-1$

Задача 583(b).
Определить полином наименьшей степени, дающий в остатке x^2+x+1 при делении на $x^4-2x^3-2x^2+10x-7$ и $2x^2-3$ при делении на $x^4-2x^3-3x^2+13x-10$.

Решение:
$$\begin{cases} f=g_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)+x^2+x+1, \\ f=g_2(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)+2x^2-3 \end{cases};$$
$$\begin{cases} s_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)+s_2(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)=1, \\ g_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)-g_2(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)=x^2-x-4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x^2-x-4)s_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)+(x^2-x-4)s_2(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)=x^2-x-4, \\ g_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)-g_2(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)=x^2-x-4 \end{cases}$$
$(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)g_1-(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)g_2=(x^2-x-4)(s_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)+s_2(x^4-2x^3-3x^2+13x-10))$
$(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)(g_1-(x^2-x-4)s_1)=(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)(g_2+(x^2-x-4)s_2)$
$s_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)+s_2(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)=1$
$x^4-2x^3-2x^2+10x-7=(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)+x^2-3x+3$
$x^4-2x^3-3x^2+13x-10=(x^2-3x+3)(x^2+x-3)+x-1$
$x^2-3x+3=(x-1)(x-2)+1$
$f_1=f_2q_1+r_1 \Rightarrow r_1=f_1-f_2q_1$
$f_2=r_1q_2+r_2 \Rightarrow r_2=f_2-r_1q_2=f_2-f_1q_2+f_2q_1q_1$
$r_1=r_2q_3+r_3 \Rightarrow r_3=r_1-r_2q_3=f_1-f_2q_1-(f_2-f_1q_2+f_2q_1q_2)q_3=f_1-f_2q_1-f_2q_3+f_1q_2q_3-f_2q_1q_2q_3=f_1(1+q_2q_3)+f_2(-q_1-q_3-q_1q_2q_3)$
$q_1=1$
$q_2=x^2+x-3$
$q_3=x-2$
$s_1=1+(x^2+x-3)(x-2)=x^3-x^2-5x+7$
$s_2=-1-x+2-x^3+x^2+5x-6=-x^3+x^2+4x-5$
$(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)(g_1-(x^2-x-4)s_1)=(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)(g_2+(x^2-x-4)s_2)$
$$\begin{cases} g_1-(x^2-x-4)s_1=\alpha(x^4-2x^3-3x^2+13x-10), \\ g_2+(x^2-x-4)s_2=\alpha(x^4-2x^3-2x^2+10x-7) \end{cases}$$
$g_1=\alpha(x^4-2x^3-3x^2+13x-10)+(x^2-x-4)(x^3-x^2-5x+7)=\alpha x^4-2\alpha x^3-3\alpha x^2+13\alpha x-10\alpha+x^5-2x^4-8x^3+16x^2+13x-28=x^5+(\alpha-2)x^4-(2\alpha+8)x^3+(16-3\alpha)x^2+(13\alpha+13)x-(10\alpha+28)$
Пусть $\alpha=$ -x, тогда
$g_1=x^5-x^5-2x^4+2x^4-8x^3+16x^2+3x^2-13x^2+13x+10x-28=-5x^3+3x^2+23x-28$
$f=g_1(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)+x^2+x+1=(-5x^3+3x^2+23x-28)(x^4-2x^3-2x^2+10x-7)+x^2+x+1=-5x^7+13x^6+27x^5-130x^4+75x^3+266x^2-440x+197$
Ответ: $-5x^7+13x^6+27x^5-130x^4+75x^3+266x^2-440x+197$
