Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 6

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.10.20

Задача 220(e).

Умножить матрицы: e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:
Перемножим матрицы по определению

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 19 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

Задача 220(f).

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Решение:
Перемножим матрицы по отпределению

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Задача 221.
Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Решение:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}^3$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^2\right)^2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

d) ММИ:
База:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - Истина

Пусть

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверим для k = n + 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вывод:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 224.
Вычислить $A \cdot A'$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$$

Задача 274.
Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

Решение:
Используем метод Гауса:

$$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 0 & -1217.07 & -904.878 \\ 0 & 1314.63 & 1075.61 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 0 & -1217.07 & -904.878 \\ 0 & 0 & 98.1964 \end{vmatrix} =$$

$246 * -1217.07 * 98.1964 = -29399925.566807996$

Задача 632(c).
Вычислить определитель: c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

Решение:
Воспользуемся методом Гауса:

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+x \\ 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} = 2a^2(a+x)$$

Задача 232(d).

Вычислить определитель: d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Решение:
Воспользуемся методом Гауса:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 * 1 = 1$$

Задача 232(f).

Вычислить определитель: f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Решение:
Воспользуемся методом Гауса:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega-1 & \omega-1 \\ 0 & \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} = \text{Константа - } \omega = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega-1 & \omega-1 \\ 0 & 0 & -\omega(\omega-1) \end{vmatrix} = -\omega(\omega-1)^2$$
Вычислим значение, подставив ω
$-\omega(\omega-1) = -\omega^3 + 2\omega^2 - \omega = (1, \pi) + (2, \frac{4\pi}{3}) + (1, \frac{5\pi}{3})$
Представим в векторном виде и сложим:
(Картинку вставлять сложно :(опишу словами)
Векторы $(2, \frac{4\pi}{3}), (1, \frac{5\pi}{3})$ и их сумма образуют равнобедренный треугольник
с углом при вершине $\frac{\pi}{3}$ (равносторонний треугольник)
Значит их сумма - $(1, \frac{4\pi}{3})$, а общая сумма (и определитель) - $(3, \frac{4\pi}{3})$.

Задача 284.

$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

Решение:
Разложим определитель по 1 строчке:
$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x+y & x \\ x & y \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} y & x \\ x+y & y \end{vmatrix} + (x+y)\begin{vmatrix} y & x+y \\ x+y & x \end{vmatrix} =$$
$x(xy + y^2 - x^2) - y(y^2 - x^2 - xy) + (x+y)(xy - x^2 - 2xy - y^2) = \text{Раскроем скобки} =$
$-2(x^3 + y^3)$
