2023.12.24

Задача 102.

Вычислить (x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i).

Решение:

$$(x - (1+i))(x - (1-i))(x + (1+i))(x + (1-i)) = (x - (1+i))(x + (1+i))(x + (1-i))(x - (1-i)) = (x^2 - (1+i)^2)(x^2 - (1-i)^2) = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i) = (x^4 + 4)$$

Задача 105(с).

Вычислить $(1+2i)^5 - (1-2i)^5$.

Решение:

$$(1+2i)^5 - (1-2i)^5 = (1+2i)^5 - (1-2i)^5 = (1+5*2i+10*-4+10*-8i+5*16+1*32i) - (1+5*2i+10*-4+10*8i+5*16+1*-32i) = (1+10i-40-80i+80+32i) - (1-10i-40+80i+80-32i) = (41-38i) - (41+38i) = -76i$$

Задача 107(d).

Вычислить $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

$$\frac{Peшeнue:}{(1-i)^5-1} =$$

По треугольнику паскаля, как и в прошлом задании

$$\frac{(-4+4i)-1}{(-4-4i)+1} = \frac{-5+4i}{-3-4i} = \frac{5-4i}{3+4i} = \frac{(5-4i)(3-4i)}{25} = \frac{((4-4i)+1)((4-4i)-1)}{25} = \frac{16(1-i)^2-1}{25} = \frac{16*-2i-1}{25} = \frac{-32i-1}{25} = -\frac{1+32i}{25} = -\frac{1}{25} - \frac{32i}{25}$$

Задача 108(b).

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6, \\ (3+2i)x + (3-2i)y = 8. \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases}
(2+i)x + (2-i)y = 6, |*(3+2i)| \\
(3+2i)x + (3-2i)y = 8, |*(2+i)|
\end{cases}$$

$$((2-i)(3+2i) - (3-2i)(2+i))y = -2$$

$$((8+i) - (8-i))y = -2$$

$$2iy = -2$$

$$y = i$$

$$\begin{cases} (2+i)x + (2-i)y = 6\\ y = i \end{cases} \begin{cases} (2+i)x + 2i + 1 = 6\\ y = i \end{cases}$$

$$(2+i)x = 5 - 2i$$

$$x = \frac{5-2i}{2+i} = \frac{(5-2i)(2-i)}{5} = \frac{8-9i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{9i}{5}$$

Итого

$$\begin{cases} x = \frac{8}{5} - \frac{9i}{5} \\ y = i \end{cases}$$

Задача 112(b, g).

Вычислить: b) $\sqrt{-8i}$, g) $\sqrt{2-3i}$.

Решение:

b)
$$i = (a+bi)^2 \leftrightarrow$$

$$a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(знаки а и в совпадают)

$$\begin{array}{l} \sqrt{-8i} = 2i\sqrt{2}i = 2i\sqrt{2}\sqrt{i} = \pm 2i\sqrt{2}\big(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = \pm 2i\big(1+i\big) = \pm(-2+2i) \\ \mathrm{g}) \\ 2 - 3i = (a+bi)^2 \leftrightarrow \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 = a^2 - b^2 \\ -3 = 2ab \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{-3}{2b} \\ b^2 - \frac{9}{4b^2} + 2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{-3}{2b} \\ b^4 - \frac{9}{4} + 2b^2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{-3}{2b} \\ 4b^4 + 8b^2 - 9 = 0 \end{array} \right. \\ b^2 = \frac{-8\pm\sqrt{64+144}}{-8} = 1 \pm \frac{\sqrt{208}}{8} = 1 \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \\ a^2 = b^2 + 2 = 3 \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \end{array}$$

$$\text{ Wtoro:} \\ \sqrt{2-3i} = \pm \big(\sqrt{3\pm\frac{\sqrt{13}}{2}} + i\sqrt{1\pm\frac{\sqrt{13}}{2}}\big) \end{array}$$

Задача 113(b).

Решить уравнение $x^2 - (3 - 2i)x + (5 - 5i) = 0$.

Решение:

$$x^{2} - (3 - 2i)x + (5 - 5i) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^{2} - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(3 - 2i) \pm \sqrt{(3 - 2i)^{2} - 4(1)(5 - 5i)}}{2(1)}$$

Значение под корнем:

$$(3-2i)^2 - 4(1)(5-5i)$$

$$= (3-2i)(3-2i)-20+20i$$

$$= 9-6i-6i+4i^2-20+20i$$

$$= 9-12i+4(-1)-20+20i$$

$$= -7+8i$$

$$x = \frac{-(3-2i)\pm\sqrt{-7+8i}}{2}$$
Найдем, чему равен $\sqrt{-7+8i}$:
$$\sqrt{a+bi} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{2}i$$

$$-7+8i$$

$$a = -7$$

$$b = 8$$

$$\sqrt{-7+8i} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2+8^2}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{(-7)^2+8^2}+7}}{2}i$$

$$\sqrt{-7+8i} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{49+64}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{49+64}+7}}{2}i$$

$$\sqrt{-7+8i} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{113}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{113}+7}}{2}i$$
Итого: $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{113}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{113}+7}}{2}i$

Подставим это значение в полученное ранее равенство

Итого:

$$x = \frac{-(3-2i)\pm\sqrt{\frac{\sqrt{113}-7}{2}}\pm-\frac{\sqrt{\sqrt{113}+7}}{2}i}{2}$$

Ответ:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{113} - 7}{2}}}{2} + i \frac{2 \pm -\frac{\sqrt{\sqrt{113} + 7}}{2}}{2}$$