2023.11.13

Задача 410(d).

Обратить матрицу:
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Воспользуемся методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 410(f).

Решение:

Воспользуемся методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -1\frac{1}{2} \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = > \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 416.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Решение:

Воспользуемся методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc}
2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\
0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2
\end{array}\right)^{-}$$

Будем умножать i строчку на i и прибавлять к ней i-1ю

$$\begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix} => \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-2 & 4 & -2 & \dots & 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -3 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n
\end{pmatrix} => \begin{pmatrix}
2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -3 & 6 & \dots & 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n
\end{pmatrix}$$

Осталось обнулить диагональ с отрицательными числами.

Я доказал истинность следующего утверждения по индукции,

но док-во не вместилось на поля страницы (Разбирусь, как это написать в латехе - допишу)

$$\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{1} & 0 & 0 & \dots & 0 & n+1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{n(n+1)}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & n+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n(n+1)}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 & n+1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n+1 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} =>$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}^{-1} = ()^{-1}$$

Задача 442(b).

Найти ранг матрицы:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

Решение:

Решение: