Цуканов Михаил
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 17

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.06

Задача 405.
Две параллельные прямые $2x-5y+6=0$ и $2x-5y-7=0$ делят плоскость на три области: полосу заключенную между этими прямыми и две области вне этой полосы. Установить каким областям принадлежат точки $A(2,1)$, $B(3,2)$, $C(1,1)$, $D(2,8)$, $E(7,1)$, $F(-4,6)$.

Решение:
Нарисовав данные прямые и точки получим результаты:
$A(2,1)$ - между
$B(3,2)$ - между
$C(1,1)$ - между
$D(2,8)$ - сверху
$E(7,1)$ - снизу
$F(-4,6)$ - сверху

Задача 406.
Даны две точки $A(-3,1)$ и $B(5,4)$ и прямая $x-2y+1=0$. Установить, пересекает ли данная прямая отрезок AB или его продолжение за точку A или точку B.

Решение:
$y = \frac{x+1}{2}$
$y(-3) = -1$
$y(5) = 3$
Границы отрезка AB находятся выше соотв точек прямой. Значит они не пересекаются.

Задача 411.
Дан треугольник ABC: $A(3,1)$, $B(-2,4)$, $C(1,0)$ и прямая $x-7y+5=0$. Установить, пересекает ли прямая стороны треугольника или их продолжение.

Решение:
Рассмотрим значения прямой у точек треугольника.
$y = \frac{x+5}{7}$
$y(3) = \frac{8}{7} > 1$
$y(-2) = \frac{3}{7} < 4$
$y(1) = \frac{6}{7} > 0$
Значит прямая пересекает стороны AB и BC и продолжение AC.

Задача 442.
Зная уравнение стороны треугольника $x+7y-6=0$ и уравнения биссектрис $x+y-2=0$, $x-3y-6=0$, выходящих из концов этой стороны, найти координаты вершины, противолежащей данной стороне.

Решение:

Выразим x через y и константы. Подставим эти выражения в уравнения других прямых и получим точки пересечения биссектрисс и стороны - вершины треугольника.
$X_1(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$
$X_2(6, 0)$; Найдем направляющие векторы (как перпендикуляры к нормалям, выраженные в уравнениях):
Сторона: $\vec{p_1} = \{7, -1\}$; Биссектрисса 1: $\vec{p_2} = \{1, -1\}$; Биссектрисса 2: $\vec{p_3} = \{1, 3\}$
Найдем синусы и косинусы углов между биссектрисами и стороной через скалярное произведение направляющих векторов, затем используем их в матрице повороте.
$\cos\widehat{\vec{p_1}, \vec{p_2}} = \frac{7+1}{\sqrt{50}\sqrt{2}} = \frac{4}{5}; \sin\widehat{\vec{p_1}, \vec{p_2}} = \frac{3}{5}$
$\cos\widehat{\vec{p_1}, \vec{p_3}} = \frac{7-3}{\sqrt{50}\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}; \sin\widehat{\vec{p_1}, \vec{p_3}} = \frac{121}{125}$
Умножим на матрицы поворота:
$\overrightarrow{p_2'} = \vec{p_2} * \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \{\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}\}$
$\overrightarrow{p_3'} = \vec{p_3} * \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{25} & -\frac{121}{125} \\ \frac{121}{125} & \frac{2\sqrt{5}}{25} \end{pmatrix} = \{\frac{10\sqrt{5}+363}{125}, \frac{30\sqrt{5}-121}{125}\}$
Осталось вычислить пересечение получившихся сторон.
$\left\{ 3\alpha + 20 = \right.$

Задача 559.
Даны две точки $A(-3, 1, 5)$ и $B(5, 4, 2)$ и плоскость $2x - 4y + z + 14 = 0$. Установить, пересекает ли данная плоскость отрезок AB, его продолжение за точкой A или за точкой B?

Решение:
Свободный член уравнения плоскости равен 14, значит проекция точки на плоскости на нормаль равна $-14 * n$, где n - длина нормали. Нормаль: $\vec{n} = \{2, -4, 1\}$.
$\vec{n} \cdot \vec{a} = -5$
$\vec{n} \cdot \vec{b} = -4$
Значит обе точки ближе к нулю координат, чем плоскость. При этом точка B ближе к нулю координат, чем A. То есть плоскость пересекает продолжение отрезка AB за точкой A.

Задача 608.
Составить уравнение биссекторных плоскостей двугранных углов между плоскостями $7x + y - 6 = 0$ и $3x + 5y - 4z + 1 = 0$.

Решение:
Биссекторная плоскость будет выражаться через нормаль и точку на ней.
Ее нормаль - среднее арифметическое нормализованных нормалей данных плоскостей:
$\overrightarrow{n_1} = \{7, 1, 0\}; n_1 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}; \overrightarrow{n_2} = \{3, 5, -4\}; n_2 = \sqrt{50} = 5\sqrt{2};$
$\vec{n} = \frac{\vec{n_1}}{2n_1} + \frac{\vec{n_2}}{2n_2} = \frac{\{10, 6, -4\}}{10\sqrt{2}} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{10}, -\frac{\sqrt{2}}{5}\}$
На этом этапе можно умножить нормаль на константу, тк направление не изменится.
$\vec{n} = \{5, 3, -2\}$
Ее точка - любая точка прямой-пересечения данных плоскостей:
$$\begin{cases} 7x + y - 6 = 0 \\ 3x + 5y - 4z + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 6 - 7x \\ 3x + 30 - 35x - 4z + 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = 6 - 7x \\ 31 = 32x + 4z \end{cases} \begin{cases} y = 6 - 7\frac{31-4z}{32} \\ x = \frac{31-4z}{32} \\ z = z \end{cases}$$
$\begin{cases} x = -\frac{25}{32} + \frac{7t}{8} \\ y = \frac{31}{32} - \frac{t}{8} \\ z = t \end{cases}$ Значит если $t = 0$, то точка на плоскости: $X(-\frac{25}{32}, \frac{31}{32}, 0)$

Итого уравнение биссекторной плоскости: $\vec{p} = \{-\frac{25}{32}, \frac{31}{32}, 0\} + t\{5, 3, -2\}$
