Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 2

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.25

Задача 120.
Представить в тригонометрической форме: $2+\sqrt{3}+i$.

Решение:
$2+\sqrt{3}+i=$
$2(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=$
Рассмотрим выражение в скобках как вектор.
Это будет сумма векторов $(1,0)$ и $(1,\frac{\pi}{3})$.
Получившийся треугольник равнобедренный. Найдем его основание и угол при нем.
(Это и будет ответом)
Длина (по т. косинусов):
$c=\sqrt{1+1-2\cos\frac{2\pi}{3}}=\sqrt{3}$
Угол:
$\alpha=\frac{\pi-\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$
$2(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6})=2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$

Задача 137(c, d).
Вычислить, пользуясь формулой Муавра
c) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$,
d) $\left(\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}\right)+\left(\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}\right)$.

Решение:
c) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$

Рассмотрим выражение в скобках как сумму векторов $(1,0)$ и $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$
Оба вектора имеют длинну 1, и угол между ними известен - $\frac{5\pi}{6}$.
Используя теорема косинусов найдем длинну суммы - $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Геометрически найдем угол (аргумент) суммы - $\frac{5\pi}{12}$
Найдем значение выражения:
$$\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}=(2+\sqrt{3})^{12}(\cos\tfrac{5\pi}{12}*24+isin\tfrac{5\pi}{12}*24)=(2+\sqrt{3})^{12}$$
d) $\left(\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}\right)+\left(\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}\right)=$
$$\left(\dfrac{2^{15}(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{15}}{2^{10}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})^{20}}\right)+\left(\dfrac{2^{15}(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{15}}{2^{10}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})^{20}}\right)=$$
$$\left(\dfrac{2^{5}(\cos(15*\frac{2\pi}{3})+i\sin(15*\frac{2\pi}{3}))}{(\cos(20*-\frac{\pi}{4})-i\sin(20*-\frac{\pi}{4}))}\right)+\left(\dfrac{2^{5}(\cos(15*-\frac{2\pi}{3})-i\sin(15*-\frac{2\pi}{3}))}{(\cos(20*\frac{\pi}{4})+i\sin(20*\frac{\pi}{4}))}\right)=$$

$2^5\left(\dfrac{1}{-1}\right)+2^5\left(\dfrac{1}{-1}\right)=$
$-2^5-2^5=-2^6$

Задача 143(b, e).
Извлечь корни b) $\sqrt[3]{2+2i}$, e) $\sqrt[6]{-27}$.

Решение:
b) $\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[6]{8}(\cos(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k)+i\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k)), k\in\{0,1,2\}$
e) $\sqrt[6]{-27}=\sqrt{3}(\cos(\frac{-\pi}{12}+\frac{1}{6}\pi k)+i\sin((\frac{-\pi}{12}+\frac{1}{6}\pi k))), k\in\{0,1,2,3,4,5\}$

Задача 145(c).
Вычислить $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

Решение:
$\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}(\cos(-\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{6})+i\sin(-\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}))$
$k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

Задача 125.
Доказать, что всякое комплексное число z, отличное от -1, модуль которого 1, может быть представлено в форме $z=\dfrac{1+it}{1-it}$, где t – вещественное число.

Решение:
$\frac{1+it}{1-it}=\frac{(1+it)^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2+2ti}{1+t^2}=$
$\frac{1-t^2}{1+t^2}+i\frac{2t}{1+t^2}=$
Заметим, что длина упрощенного вектора всегда равна 1.
Значит $\forall t$ $v(t)$ пренадлежит данной окружности и при этом x и y по модулю не больше 1
Докажем, что множество значений $v(t)$ "заполняет"все множество точек окружности.
Исследуем функции $y(t)$ и $x(t)$. Обе функции непрерывны как отношения элементарных непрерывных функций (знаменатель никогда не равен 0).
Найдем минимум и максимум x и y:
$x'(t)=\frac{-2t(1+t^2)-2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}=0\leftrightarrow t=0\leftrightarrow x=1\wedge y=0$
$y'(t)=\frac{2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}=0\leftrightarrow t=\pm1\leftrightarrow(x=0\wedge y=1)\vee(x=0\wedge y=-1)$
Пока не понятно, достигает ли $x(t)$ -1. Определим это
$\frac{1-t^2}{1+t^2}=-1$ нет решений $\rightarrow$ Не достигает.
При этом функция непрерывна и стремится к -1 при $t\rightarrow+\infty$.
При этом она ограничена сверху и снизу. Значит она принимает все значения из множества $(-1;1]$.
Аналогично для для $y(t)$ получаем, что она принимает все значения из множества $[-1;1]$
Значит множество пар $(x(t),y(t))$ заполняет множество точек окружности. чтд.

Задача 182.
Найти сумму всех корней n-й степени $(n>1)$ из 1.

Решение:
Любое множество корней n-й степени - правильный n-угольник. Каждый корень - радиус-вектор к соотв. вершине.
Значит сумма корней - сумма таких радиус-векторов. Если бы она не равнялась 0, то при умножении ее на $(1, \frac{2\pi}{n})$, ее значение должно было бы повернуться на $\frac{2\pi}{n}$.
При этом все вершины переходят в друг друга, а значит и сумма не должна поменяться. Значит сумма равна 0.

Задача 183.
Вычислить $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + ... + n\varepsilon^{n-1}$, где ε – корень n-й степени из 1.

Решение:
$1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + ... + n\varepsilon^{n-1} =$
$\frac{(1+2\varepsilon+3\varepsilon^2+...+n\varepsilon^{n-1})(\varepsilon-1)}{(\varepsilon-1)} =$
$\frac{n-1-\varepsilon-\varepsilon^2-...-\varepsilon}{(\varepsilon-1)} =$
$\frac{n-1}{(\varepsilon-1)} =$

Задача 146.
Выразить $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$

Решение:
$\cos 5x = \cos(2x + 3x) = \cos 2x * \cos 3x - \sin 2x * \sin 3x =$
$(\cos^2 x - \sin^2 x)(4\cos^3 x - 3\cos x) - 2\sin x \cos x(3\sin x - 4\sin^3 x) =$
$4\cos^5 x - 3\cos^3 x - 4\sin^2 x \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + 6\sin^4 x \cos x$
