Цуканов Михаил
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 14

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.11.21

Задача 92.
Даны две смежные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-4,-7)$ и $B(2,6)$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,1)$. Найти две другие вершины параллелограмма. Система координат аффинная.

Решение:
Переведем параллелограмм в систему координат, в которой начало в точке A.
Значит новые координаты точек: $A(0,0), B(6,13), M(7,8)$
$2 * \vec{AM} = \vec{AC} => C(14,16)$
$\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BD} <=> \vec{AD} = 2 * (\vec{AM} - \frac{1}{2}\vec{AB}) => D(14-6, 16-13) <=> D(8,3)$ Теперь переведем полученные значения в изначальную систему координат.
$C(10,9), D(4,-4)$ Ответ: $C(10,9), D(4,-4)$

Задача 111.
Даны две точки $A(8,-6,7)$ и $B(-20,15,10)$. Установить, пересекает ли прямая AB какую-нибудь из осей координат.

Решение:
Определим уравнение прямой.
$l = A + \alpha(B - A)$
Тогда нужно решить 3 системы уравнений относительно α.
$$\begin{pmatrix} 8-28\alpha & \beta \\ -6+21\alpha & 0 \\ 7+3\alpha & 0 \end{pmatrix} \alpha = -\frac{7}{3} \text{ и } \alpha = \frac{2}{7} \text{ Нет решений}$$
$$\begin{pmatrix} 8-28\alpha & 0 \\ -6+21\alpha & \beta \\ 7+3\alpha & 0 \end{pmatrix} \alpha = -\frac{7}{3} \text{ и } \alpha = \frac{2}{7} \text{ Нет решений}$$
$$\begin{pmatrix} 8-28\alpha & 0 \\ -6+21\alpha & 0 \\ 7+3\alpha & \beta \end{pmatrix} \beta = \frac{55}{7} \text{ и } \alpha = \frac{2}{7}$$
Итого ответ: Прямая пересекает ось z.

Задача 120.
Относительно полярной системы координат даны точки $A(2, \frac{\pi}{3})$, $B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$, $C(5, \frac{\pi}{2})$, $D(3, \frac{\pi}{6})$. Найти координаты этих точек в соответствующей прямоугольной системе координат.

Решение:
$X(l,\phi) = X(l\cos\phi, l\sin\phi)$
$A(2, \frac{\pi}{3}) = A(1, \sqrt{3})$
$B(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}) = B(-1, 1)$
$C(5, \frac{\pi}{2}) = C(0, 5)$
$D(3, \frac{\pi}{6}) = D(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$

Задача 122.
Зная полярные координаты точки $\rho = 10$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Найти её прямоугольные координаты, если полюс находится в точке $(2, 3)$, а полярная ось параллельна оси Ox.

Решение:
Данная полярная система координат сдвинута относительно начала декартовой системы координат на вектор $\{2, 3\}$. Значит его нужно будет прибавить к полученным значениям.
$A(10, \frac{\pi}{6} = A(5\sqrt{3}, 5) = A(2 + 5\sqrt{3}, 8)$
Значение в 3х системах координат. В начальной в промежуточной декартовой с началом в точке (2, 3) и конечная - декартова с началом в точке (0, 0)
Итого ответ: $A(2 + 5\sqrt{3}, 8)$

Задача 128.
Найти цилиндрические координаты точек по их прямоугольным координатам $A(3, -4, 5)$, $B(1, -1, 1)$, $C(-6, 0, 8)$.

Решение:
$M(x, y, z) = M(z, r, \phi) = M(z, \sqrt{x^2 + y^2}, \phi)$
При этом угол ϕ будет определятся косинусом и синусом угла $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$
$A(3, -4, 5) = A(5, 5, \arcsin(-\frac{4}{5}))$
$B(1, -1, 1) = B(1, \sqrt{2}, \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = B(1, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$
$C(-6, 0, 8) = C(8, 6, \arccos(-1)) = C(8, 6, \pi)$

Задача 665.
Найти формулы перехода от одной аффинной системы координат Oxy с координатным углом ω к другой аффинной системе координат $Ox'y'$, если одноименные оси этих систем взаимно перпендикулярны, а разноименные образуют острые углы. Длины базисных векторов равны 1.

Решение:
x перпендикулярен x' и y перпендикулярен y', а значит одноименные оси координат не будут оказывать друг на друга влияния.
При этом разноименные оси образуют острый угол, а значит будут влиять друг на друга (при этом проекции положительные).
Этот острый угол будет равен $\frac{\pi}{2} - \omega$
Спроектировав на оси $Ox'Oy'$ вектор $\{1, 0\}$, заданный в Oxy системе координат, получим $\{0, cos(\frac{\pi}{2} - \omega)\}$
Спроектировав на оси $Ox'Oy'$ вектор $\{0, 1\}$, заданный в Oxy системе координат, получим $\{\cos(\frac{\pi}{2} - \omega), 0\}$
Упростим $\cos(\frac{\pi}{2} - \omega) = -\sin\omega$
Любой вектор в системе координат Oxy будет линейной комбинацией векторов $\{0, 1\}$ и $\{1, 0\}$.
А значит и любой вектор в системе координат Oxy будет равен $\{-y\sin\omega, -x\sin\omega\}$.
Такое преобразование можно представить в виде матрицы.
$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\omega \\ -\sin\omega & 0 \end{pmatrix}$$
Домножив вектор в системе координат Oxy на эту матрицу получим вектор в системе координат $Ox'y'$. (На обратную матрицу - обратно)
