Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 6
Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.25

Задача 220(e).

Умножить матрицы: e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Решение:
Перемножим матрицы по определению

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 6 & 12 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 19 \\ -5 & 5 & 9 \\ 12 & 26 & 32 \end{pmatrix}$$

Задача 220(f).

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix}$

Решение:
Перемножим матрицы по отпределению

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & b \\ 1 & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$$

Задача 221.
Выполнить действия:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

Решение:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

d) ММИ:

База:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ - Истина

Пусть

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Проверим для k = n + 1:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вывод:

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Задача 224.

Вычислить $A \cdot A'$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 18 & 21 \\ 21 & 27 \end{pmatrix}$

Задача 274.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$

Решение:

$\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix} = 246 * 543 * 621 - 427 * 443 * 342 + 327 * 1014 * 721 + 342 * 543 * 327 - 246 * 721 * 443 - 621 * 1014 * 427 = -29400000$

Задача 632(c).

Вычислить определитель: c) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix}$

Решение:

Воспользуемся методом Гауса:

$\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & 2a & a+x \\ 0 & 0 & a+x \end{vmatrix} = 2a^2(a+x)$

Задача 232(d).

Вычислить определитель: d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

Решение:
Воспользуемся методом Гауса:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 * 1 = 1$

Задача 232(f).

Вычислить определитель: f) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix}$, где $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Решение:
Воспользуемся методом Гауса:
$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega-1 & \omega-1 \\ 0 & \omega^2-1 & \omega-1 \end{vmatrix} =$ Константа $\omega + 1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \omega-1 & \omega-1 \\ 0 & 0 & -\omega(\omega-1) \end{vmatrix} = -\omega(\omega-1)^2$
Вычислим значение, подставив ω
$-\omega(\omega-1)^2 = -\omega^3 + 2\omega^2 - \omega = (1, \pi) + (2, \frac{4\pi}{3}) + (1, \frac{5\pi}{3})$
Представим в векторном виде и сложим:
Векторы $(1, \pi), (1, \frac{5\pi}{3})$ и их сумма образуют равнобедренный треугольник
с углом при вершине $\frac{\pi}{3}$ (равносторонний треугольник)
Значит их сумма - $(1, \frac{4\pi}{3})$, а общая сумма (и определитель) - $(3, \frac{4\pi}{3})$.

Задача 284.

$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$

Решение:
Разложим определитель по 1 строчке:
$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} x+y & x \\ x & y \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} y & x \\ x+y & y \end{vmatrix} + (x+y)\begin{vmatrix} y & x+y \\ x+y & x \end{vmatrix} =$

$x(xy + y^2 - x^2) - y(y^2 - x^2 - xy) + (x+y)(xy - x^2 - 2xy - y^2) =$ Раскроем скобки $=$
$-2(x^3 + y^3)$
