

Задача 31.

Даны вектора $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$, $\vec{d} = \{16, 10, 18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора \vec{d} на плоскость, определяемую векторами \vec{a} и \vec{b} при направлении проектирования, параллельном вектору \vec{c} .

Решение:

Плоскость (\vec{a}, \vec{b}) определяется нормалью.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \{8, 5, -6\}$$

Уравнение плоскости: $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$

Расстояние от начала координат до плоскости равно 0, и вектор \vec{d} начинается в начале координат. Значит нужно спроектировать на плоскость только саму точку $(16, 10, 18)$. Проекция будет совпадать с точкой пересечения прямой, параллельной \vec{c} и проходящей через \vec{d}

Уравнение прямой: $\vec{p} = \vec{d} + \alpha * \vec{c}$

Значит уравнение точки пересечения: $(\vec{d} + \alpha * \vec{c}) \cdot \vec{n} = 0$

$$\alpha = -\frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\vec{c} \cdot \vec{n}}$$
$$\alpha = -\frac{16*8+5*10-6*18}{4*8+0*5-3*6} = -5$$

Значит спроектированная точка: $\vec{p} = \vec{d} + -5\vec{c} = \{16 - 5*4, 10 - 5*0, 18 - 5*3\} = \{-4, 10, 3\}$

Ответ: $\{-4, 10, 3\}$

Задача 138.

Доказать, что при любом расположении точек A, B, C, D на плоскости или в пространстве имеет место равенство $(\vec{BC}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BD}) + (\vec{AB}, \vec{CD}) = 0$.

Решение:

Раскроем векторы так, чтобы остались только отношения радиус векторов, если взять A за системы центр координат.

$$(\vec{BC}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BD}) + (\vec{AB}, \vec{CD}) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(\vec{AC} + \vec{BA}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BA} + \vec{AD}) + (\vec{AB}, \vec{CA} + \vec{AD}) = 0 \Leftrightarrow$$

// В силу ассоциативности скалярного произведения

$$(\vec{AC}, \vec{AD}) + (\vec{BA}, \vec{AD}) + (\vec{CA}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{AD}) + (\vec{AB}, \vec{CA}) + (\vec{AB}, \vec{AD}) = 0$$

Первое и четвертое, второе и пятое, третье и шестое слагаемые взаимно обратные.

Значит сумма каждой пары - 0, значит сумма пар - 0. ч.т.д.

Задача 142.

Даны два неколлинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} . Найти вектор \vec{x} , компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} и удовлетворяющий системе уравнений $(\vec{a}, \vec{x}) = 1$, $(\vec{b}, \vec{x}) = 0$.

Решение:

По условию \vec{x} ортогонален \vec{b} и компланарен \vec{a} . То есть он ортогонален \vec{b} и $\vec{a} \times \vec{b}$.

То есть, если $\vec{l} = \vec{a} \times \vec{b}$, то $\vec{x} = \alpha * \vec{l}$. Найдем α

$l = ab^2 \sin(\vec{a}, \vec{b})$, при этом $\alpha a l \cos(\vec{a}, \vec{l}) = 1$. То есть $\alpha a^2 b^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.
 Значит $\alpha = \frac{1}{a^2 b^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b})}$
 Итого ответ: $\vec{x} = \frac{\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{b}}{a^2 b^2 \sin^2(\vec{a}, \vec{b})}$

Задача 145.

Даны два вектора \vec{a} и \vec{n} . Найти вектор \vec{b} , являющийся ортогональной проекцией вектора \vec{a} на плоскость, перпендикулярную вектору \vec{n} .

Решение:

Векторы $\vec{a}, \vec{n}, \vec{b}$ лежат в одной плоскости (по т. о трех перпендикулярах). Значит если $\vec{l} = \vec{a} \times \vec{n} \times \vec{n}$, то \vec{l} тоже лежит в этой плоскости и при этом так же лежит на плоскости, перп. \vec{n} .

Это значит, что \vec{l} коллинеарен \vec{b} . То есть $\vec{b} = \alpha * \vec{l}$. При этом $b = a \cos((\vec{n}, \hat{0}), \vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{l}}{l}$

Значит $\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{l}}{l^2}$

Тогда ответ: $\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{n} \times \vec{n})}{|\vec{a} \times \vec{n} \times \vec{n}|^2} * \vec{a} \times \vec{n} \times \vec{n}$

Задача 151.

Даны два вектора $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$. Найти вектор \vec{c} , компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , перпендикулярный к вектору \vec{a} , равный ему по длине и образующий с вектором \vec{b} тупой угол.

Решение:

Нужно найти вектор, перпендикулярный $\vec{a} \times \vec{b}$ и \vec{a} .

$\vec{l} = (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{a}$ подходит под оба условия.

$l = a^2 b \sin(\vec{b}, \vec{a})$, при этом требуется вектор с длиной a .

значит возьмем вектор $\vec{p} = \frac{1}{ab \sin(\vec{b}, \vec{a})} \vec{l}$

Чтобы угол между \vec{p} и \vec{b} был тупым, нужно, чтобы они находились в разных полупространствах относительно плоскости, заданной $\vec{b} \times \vec{a}$ и \vec{a} . Это значит, что если $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$, то тройки $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{p})$ и $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ должны быть разными (одна левой, другая - правой).

При этом тройка $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ левая, значит $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{p})$ - правая. То есть $\vec{l} = (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{a}$ (а не $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$)

Итого ответ: $\frac{\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{a}}{ab \sin(\vec{b}, \vec{a})}$

Задача 184.

Даны три вектора $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$. Найти вектор \vec{d} длины 1, перпендикулярный к векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

Решение:

Определим ориентацию тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -48.$$

Значит тройка левая.

Пусть $\vec{l} = \vec{b} \times \vec{a}, \vec{d} = \frac{\vec{l}}{l}$. Тогда тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ - левая.

Найдем векторы \vec{l} и \vec{d}

$$\vec{l} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \{-6, 6, 24\} = 6 * \{-1, 1, 4\}$$

$$l = 6 * \sqrt{1 + 1 + 16} = 18 * \sqrt{2}.$$

$$\text{Значит } \vec{d} = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$$

$$\text{Ответ: } \left\{-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$$

Задача 191.

Вычислить объем параллелепипеда, зная длины $|\vec{OA}| = a$, $|\vec{OB}| = b$, $|\vec{OC}| = c$ трёх его ребер, выходящих из одной его вершины O , и углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COB = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ между ними.

Решение:

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на длину соотв. высоты.

Рассмотрим основание, ... векторы \vec{OA} и \vec{OB} . Его площадь равна $ab \sin \gamma$

Теперь рассчитаем длину высоты. Она будет равна координате z вектора \vec{OC} .

Рассмотрим \vec{OC} как повернутый вектор $\{0, 0, c\}$

$$\vec{OC} = \{0, 0, c\} * \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \{c \sin \alpha, -c \sin \beta \cos \alpha, c \cos \alpha \cos \beta\}$$

Значит высота будет равна $c \cos \alpha \cos \beta$.

Значит объем параллелепипеда равен $abc \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$

Итого ответ: $abc \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma$

Задача 192.

Три вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} связаны соотношениями $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Найти длины этих векторов.

Решение:

При таком условии базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - ортогональный. Значит синус угла между любыми двумя векторами равен 1. Значит длина каждого из векторов равна произведению длин оставшихся.

$$a = bc; b = ac; c = ab$$

$$\frac{bc}{a} = \frac{ac}{b} = \frac{ab}{c} = 1$$

$$b^2 c^2 = a^2 c^2 = a^2 b^2$$

тогда

$$a = b = c \text{ при этом } a = bc; b = ac; c = ab$$

$$\text{Значит } a = b = c = 1$$

Задача 197.

Даны три некопланарных вектора $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, отложенных от одной точки O . Найти вектор $\vec{OD} = \vec{d}$, отложенный от той же точки O и образующий с векторами \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} равные между собой острые углы.

Решение:

Так как от длины векторов не меняется угол, введем векторы $\vec{x} = \frac{\vec{a}}{a}$; $\vec{y} = \frac{\vec{b}}{b}$; $\vec{z} = \frac{\vec{c}}{c}$;,, длина которых будет равна 1. Возьмем точку M - центроид треугольника ($\vec{OM} = \frac{\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}}{3}$), образованного

векторами $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ и докажем, что вектор \overrightarrow{OM} образует с векторами $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ три равных угла.

Введем точки $X = \vec{x}; Y = \vec{y}; Z = \vec{z}$;

Рассмотрим треугольники $(O, X, M), (O, Y, M), (O, Z, M)$. Стороны каждого из них соотв. равны. Значит равны и треугольники. Значит вектор \overrightarrow{OM} образует с векторами $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ равные углы
что и требовалось доказать.

Итого ответ: $\frac{\vec{a}}{3a} + \frac{\vec{b}}{3b} + \frac{\vec{c}}{3c}$
