Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 1

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2024.04.08

Задача 102.
Вычислить $(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$.

Решение:
$(x-(1+i))(x-(1-i))(x+(1+i))(x+(1-i)) =$
$(x-(1+i))(x+(1+i))(x+(1-i))(x-(1-i)) =$
$(x^2-(1+i)^2)(x^2-(1-i)^2) =$
$(x^2-2i)(x^2+2i) =$
(x^4+4)

Задача 105(c).
Вычислить $(1+2i)^5-(1-2i)^5$.

Решение:
$(1+2i)^5-(1-2i)^5 =$
$(1+2i)^5-(1-2i)^5 =$
$(1+5*2i+10*-4+10*-8i+5*16+1*32i)-(1+5*-2i+10*-4+10*8i+5*16+1*-32i) =$
$(1+10i-40-80i+80+32i)-(1-10i-40+80i+80-32i) =$
$(41-38i)-(41+38i) =$
$-76i$

Задача 107(d).
Вычислить $\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$.

Решение:
$\dfrac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1} =$

По треугольнику паскаля, как и в прошлом задании
$\dfrac{(-4+4i)-1}{(-4-4i)+1} = \dfrac{-5+4i}{-3-4i} = \dfrac{5-4i}{3+4i} = \dfrac{(5-4i)(3-4i)}{25} = \dfrac{((4-4i)+1)((4-4i)-1)}{25} =$
$\dfrac{16(1-i)^2-1}{25} = \dfrac{16*-2i-1}{25} = \dfrac{-32i-1}{25} = -\dfrac{1+32i}{25} = -\dfrac{1}{25}-\dfrac{32i}{25}$

Задача 108(b).
Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (2+i)x+(2-i)y=6, \\ (3+2i)x+(3-2i)y=8. \end{cases}$$

Решение:

$$\left\{ \begin{array}{c} (2+i)x+(2-i)y=6, \mid *(3+2i) \\ (3+2i)x+(3-2i)y=8, \mid *(2+i) \end{array} \right\}$$

Вычитаем из первого второе
$((2-i)(3+2i)-(3-2i)(2+i))y=-2$
$((8+i)-(8-i))y=-2$
$2iy=-2$
$y=i$
$\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6\\ y=i\end{cases}\begin{cases}(2+i)x+2i+1=6\\ y=i\end{cases}$
$(2+i)x=5-2i$
$x=\dfrac{5-2i}{2+i}=\dfrac{(5-2i)(2-i)}{5}=\dfrac{8-9i}{5}=\dfrac{8}{5}-\dfrac{9i}{5}$

Итого

$$\begin{cases}x=\dfrac{8}{5}-\dfrac{9i}{5}\\ y=i\end{cases}$$

Задача 112(b, g).
Вычислить: b) $\sqrt{-8i}$, g) $\sqrt{2-3i}$.

Решение:
b)
$i=(a+bi)^2\leftrightarrow$
$a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
$b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$
(знаки a и b совпадают)

$\sqrt{-8i}=2i\sqrt{2i}=2i\sqrt{2}\sqrt{i}=\pm2i\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=\pm2i(1+i)=\pm(-2+2i)$
g)
$2-3i=(a+bi)^2\leftrightarrow$
$\begin{cases}2=a^2-b^2\\ -3=2ab\end{cases}\begin{cases}a=\frac{-3}{2b}\\ b^2-\frac{9}{4b^2}+2=0\end{cases}\begin{cases}a=\frac{-3}{2b}\\ b^4-\frac{9}{4}+2b^2=0\end{cases}\begin{cases}a=\frac{-3}{2b}\\ 4b^4+8b^2-9=0\end{cases}$
$b^2=\frac{-8\pm\sqrt{64+144}}{-8}=1\pm\frac{\sqrt{208}}{8}=1\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$
$a^2=b^2+2=3\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$
Итого:
$\sqrt{2-3i}=\pm(\sqrt{3\pm\frac{\sqrt{13}}{2}}+i\sqrt{1\pm\frac{\sqrt{13}}{2}})$

Задача 113(b).
Решить уравнение $x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$.

Решение:
$x^2-(3-2i)x+(5-5i)=0$
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$x=\frac{-(3-2i)\pm\sqrt{(3-2i)^2-4(1)(5-5i)}}{2(1)}$

Значение под корнем:
$(3-2i)^2-4(1)(5-5i)$

$= (3-2i)(3-2i) - 20 + 20i$
$= 9 - 6i - 6i + 4i^2 - 20 + 20i$
$= 9 - 12i + 4(-1) - 20 + 20i$
$= -7 + 8i$
$x = \frac{-(3-2i) \pm \sqrt{-7+8i}}{2}$
Найдем, чему равен $\sqrt{-7+8i}$:
$\sqrt{a+bi} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \frac{\operatorname{sgn}(b)\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{2}i$
$-7+8i$
$a = -7$
$b = 8$
$\sqrt{-7+8i} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{(-7)^2+8^2}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{(-7)^2+8^2}+7}}{2}i$
$\sqrt{-7+8i} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{49+64}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{49+64}+7}}{2}i$
$\sqrt{-7+8i} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{113}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{113}+7}}{2}i$
Итого: $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{113}-7}{2}} + \frac{\sqrt{\sqrt{113}+7}}{2}i$
Подставим это значение в полученное ранее равенство
Итого:
$x = \frac{-(3-2i) \pm \sqrt{\frac{\sqrt{113}-7}{2}} \pm - \frac{\sqrt{\sqrt{113}+7}}{2}i}{2}$
Ответ:
$x = \frac{-3 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{113}-7}{2}}}{2} + i\frac{2 \pm - \frac{\sqrt{\sqrt{113}+7}}{2}}{2}$
