Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 2
Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.09.18

Задача 120.
Представить в тригонометрической форме: $2+\sqrt{3}+i$.

Решение:
$2+\sqrt{3}+i=$
$2\sqrt{2+\sqrt{3}}(\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}+i*\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}})=$
$(2\sqrt{2+\sqrt{3}}, \arccos\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2})$

Задача 137(c, d).
Вычислить, пользуясь формулой Муавра
c) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$,
d) $\left(\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}\right)+\left(\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}\right)$.

Решение:
c)
d) $\left(\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}\right)+\left(\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}\right)=$
$\left(\dfrac{2^{15}(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^{15}}{2^{10}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})^{20}}\right)+\left(\dfrac{2^{15}(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})^{15}}{2^{10}(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})^{20}}\right)=$
$\left(\dfrac{2^5(\cos(15*\frac{2\pi}{3})+i\sin(15*\frac{2\pi}{3}))}{(\cos(20*-\frac{\pi}{4})-i\sin(20*-\frac{\pi}{4}))}\right)+\left(\dfrac{2^5(\cos(15*-\frac{2\pi}{3})-i\cos(15*-\frac{2\pi}{3}))}{(\cos(20*\frac{\pi}{4})+i\cos(20*\frac{\pi}{4}))}\right)=$
-$2^5+2^5=0$

Задача 143(b, e).
Извлечь корни b) $\sqrt[3]{2+2i}$, e) $\sqrt[6]{-27}$.

Решение:
b) $\sqrt[3]{2+2i}=\sqrt[6]{8}(\cos(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k)+i\sin(\frac{\pi}{12}+\frac{2}{3}\pi k))$
e) $\sqrt[6]{-27}=\sqrt{3}(\cos(\frac{-\pi}{12}+\frac{1}{6}\pi k)+i\sin((\frac{-\pi}{12}+\frac{1}{6}\pi k)))$

Задача 145(c).
Вычислить $\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$.

Решение:
$\sqrt[6]{\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}=\sqrt[6]{\frac{\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4}))}{2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}}=\frac{1}{\sqrt[12]{2}}(\cos(-\frac{7\pi}{12})+i\sin(-\frac{7\pi}{12}))$

Задача 125.
Доказать, что всякое комплексное число z, отличное от -1, модуль которого 1, может быть представлено в форме $z = \dfrac{1+it}{1-it}$, где t – вещественное число.

Решение:

Задача 182.
Найти сумму всех корней n-й степени $(n > 1)$ из 1.

Решение:
Любое множество корней n-й степени - правильный n-угольник, при этом $x = 1$ всегда является корнем. Значит корни всегда симметричны относительно вещественной оси.
Для четных n сумма корней равна 0, для нечетных - 1. Итого сумма равна $[n/2]$

Задача 183.
Вычислить $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + ... + n\varepsilon^{n-1}$, где ε – корень n-й степени из 1.

Решение:

Задача 146.
Выразить $\cos 5x$ через $\cos x$ и $\sin x$

Решение:
$\cos 5x = \cos(2x + 3x) = \cos 2x * \cos 3x - \sin 2x * \sin 3x =$
$(\cos^2 x - \sin^2 x)(4\cos^3 x - 3\cos x) - 2\sin x \cos x(3\sin x - 4\sin^3 x) =$
$4\cos^5 x - 3\cos^3 x - 4\sin^2 x \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + 6\sin^4 x \cos x$
