

Задача 276.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Решение:

Воспользуемся методом Гаусса

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 * 1 * 1 * 1 = 1$$

Задача 295.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & -2 & -1 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & \dots & -2 \\ -2 & -1 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2 & -2 & \dots & n-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & \dots & -2 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & \dots & -2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & n-2 \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

Задача 280.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

Выразим определитель через перестановки:

Возьмем i элемент первой строчки.

$i=1 \Rightarrow$ Произведение $= 2*5! = 240$

Иначе произведение $= \frac{5!}{i}$ (-1 от четности перестановок, тк кол-во обращений $= 1$)

Сложим произведения: $240(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}) = 240(2 + \frac{25+50}{60}) = 788$

Задача 306.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha + \beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}$$

Решение:

Будем домножать i строчку на α^{i-1} тогда можно будет вычесть из i строчки $i - 1$

При этом нужно делить выражение на α^{i-1}

Тогда получим:

$$\alpha^{\frac{-n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \alpha & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha^2\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha^n \end{vmatrix} = \alpha^{\frac{-n(n-1)}{2}} * \alpha^{\frac{n(n+1)}{2}} = \alpha^n$$