Цуканов Михаил
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 16

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.25

Задача 514.
Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2, 3, 0)$ и через прямую $x = 1$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$. Система координат аффинная.

Решение:
Определим оставшиеся 2 точки, достаточные для задания плоскости.
$x = 1 \land y = 2 + t \land z = 2 - t => x = 1 \land z = 4 - y$.
Выберем удобные точки на этой прямой. Например $(1, 0, 4)$ и $(1, 4, 0)$.
$\vec{a} = \{3, -3, 4\}$ $\vec{b} = \{3, 1, 0\}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \{-4, 12, 12\}$$

$\vec{n} = \{-1, 3, 3\}$
Тогда уравнение плоскости: $-x + 3y + 3z - 11 = 0$

Задача 518.
Написать уравнения биссектрисы тупого угла между прямой $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ y - 4z + 14 = 0 \end{cases}$ и её ортогональной проекцией на плоскость $x + y + 1 = 0$. Система координат прямоугольная.

Решение:
Нормаль к плоскости: $\vec{n} = \{1, 1, 0\}$
Направляющий вектор прямой: $\vec{l} = \{8, 4, 1\}$
Точка пересечения прямой и плоскости: $M(1, -2, 3)$
Найдем точку, принадлежащую ортогональной проекции прямой на данную плоскость.
Для этого возьмем точку прямой $M + \vec{l}$ и составим уравнение прямой, проходящей через эту точку и параллельую нормали к плоскости:
$\{1, 1, 0\}t + \{9, 2, 4\} = \vec{p} \land x + y + 1 = 0 <=>$

$$\begin{cases} x = t + 9 \\ y = t + 2 \\ z = 4 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} <=> t = -6 <=> \begin{cases} x = 3 \\ y = -4 \\ z = 4 \end{cases}$$

Тогда направляющий вектор проекции будет равен: $\vec{k} = M - (3, -4, 4) = (-2, 2, -1)$
Проверим, что угол тупой: $\vec{l} \cdot \vec{k} = -16 + 8 - 1 < 0 \to \widehat{(\vec{l}, \vec{k})} > \frac{\pi}{2}$
Тогда направляющий вектор искомой прямой будет равен среднему арифметическому нормализованных направляющих векторов данной прямой и ее проекции: $\frac{\vec{k}}{6} + \frac{\vec{l}}{18} = \frac{3\vec{k} + \vec{l}}{18} = \{\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, -\frac{1}{9}\}$
Можем безболезненно умножить его на 9: $\{1, 5, -1\}$.
Тогда ответ: $\vec{p} = \{1, 5, -1\}t + \{1, -2, 3\}$

Задача 508.
Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 2, 3)$ параллельной прямой $x = y = z$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки. Система координат аффинная.

Решение:
Искомая плоскость должна отсекать на осях Ox и Oy равные отрезки.
Значит она параллельна прямой x = -y (вектору $\{1, -1, 0\}$)
По условию она параллельная прямой x = y = z (вектоу $\{1, 1, 1\}$)
И проходит через точку $(1, 2, 3)$
$$\vec{n} = \{1, 1, 0\} \times \{1, 1, 1\} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{-1, 1, 2\}$$
Тогда уравнение плоскости:
$-x + y + 2z = -1 + 2 + 6$
$-x + y + 2z - 7 = 0$

Задача 569.
Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $(1, 2, 3)$ и $(4, 5, 7)$ и перпендикулярной к плоскости $x - y + 2z - 4 = 0$.

Решение:
Для задания плоскости необходимо 3 точки. Обозначим недостающую за $X(x, y, z)$
Тогда нормаль к искомой плоскости будет равна
$$\{1 - x, 2 - y, 3 - z\} \times \{4 - x, 5 - y, 7 - z\} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - x & 2 - y & 3 - z \\ 4 - x & 5 - y & 7 - z \end{vmatrix} =$$
$\{(2 - x)(7 - z) - (3 - z)(5 - y), (3 - z)(4 - x) - (1 - x)(7 - z), (1 - x)(5 - y) - (2 - y)(4 - x)\} =$
$\{$
$(14 - 7y - 2z + yz) - (15 - 5z - 3y + yz),$
$(12 - 4z - 3x + xz) - (7 - 7x - z + xz),$
$(5 - 5x - y + xy) - (8 - 4y - 2x + yx)$
$\}$
Нормаль к даннй плоскости равна $\{1, -1, 2\}$
Искомая плоскость перпендикулярна данной. Значит скалярное произведение их нормалей равно 0:
$(-1 + 3z - 4y) - (5 - 3z + 4x) + 2(-3 + 3y - 3x) = 0$
$-10x + 2y + 6z = 12$
Значит в искомую плоскость попадает любая точка, удовлетворяющая уравнению $-5x + y + 3z = 6$.
Ответ: $-5x + y + 3z = 6$
