Михаил Цуканов
st117303
st117303@student.spbu.ru

Homework Assignment 12

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.11.13

Задача 10.
Дан четырёхугольник $ABCD$. Найти такую точку M, чтобы $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$

Решение:
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{MO}=\vec{0}$
$4\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$
Значит M - центр массы четырехугольника $ABCD$
То есть M - середина средней линии (Такая точка единственная по свойству средней линии).

Задача 13.
Дан тетраэдр $ABCD$. Найти точку M для которой $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

Решение:
Аналогично задаче 10 раскроем каждый вектор как сумму радиус-векторов.
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{MO}=\vec{0}$
Значит M - тоже центр масс. Для тетраэдра это - точка пересечения медиан.

Задача 24.
В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно λ. Принимая за базис векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

Решение:
$\overrightarrow{AB}=\{0,1\}$,
$\overrightarrow{BC}=\{\lambda,0\}$,
$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\{1,0\}-(\{0,1\}+\{\lambda,0\})=\{1-\lambda,-1\}$,
$\overrightarrow{DA}=\{-1,0\}$,

Задача 17.
Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна нулю.

Решение:
Пойдем от обратного. Пусть $\sum_{i=3}^{n}\overrightarrow{OP}_i=\overrightarrow{a}$
Повернем многоугольник на угол между двумя его вершинами ($\gamma=180-\alpha$, где α - угол многоугольника). При этом получившаяся фигура будет равна исходной в силу симметрии правильного многоугольника. То есть сумма не должна поменяться.
домножим сумму на матрицу поворота относительно оси Z

$$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{a}*\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\gamma + y\sin\gamma \\ -x\sin\gamma + y\cos\gamma \\ z \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x(1-\cos\gamma) = y\sin\gamma \\ y(\cos\gamma - 1) = x\sin\gamma \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x(1-\cos\gamma)}{\sin\gamma} = y \\ -x(\cos\gamma-1)^2 = x\sin\gamma^2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x(1-\cos\gamma)}{\sin\gamma} = y \\ x((\cos\gamma-1)^2 + \sin\gamma^2) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{x(1-\cos\gamma)}{\sin\gamma} = y \\ x(2-2\cos\gamma) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \gamma = 0$

По условию $\gamma > 0$ значит $x = 0 \wedge y = 0$ чтд.

Задача 29.
Показать, что каковы бы ни были три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и три числа α, β, γ векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ компланарны.

Решение:

$\overrightarrow{\dot{a}} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$
$\overrightarrow{\dot{b}} = \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$
$\overrightarrow{\dot{c}} = \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$
3 вектора комланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.
$\overrightarrow{\dot{c}} = -\overrightarrow{\dot{a}} - \overrightarrow{\dot{b}}$
Значит они компланарны.

Задача 31.
Даны вектора $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$, $\vec{d} = \{16, 10, 18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\vec{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при направлении проектирования, параллельном вектору $\vec{c}$.

Решение:
Плоскость $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ определяется нормалью.
$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \{8, 5, -6\}$$
Уравнение плоскости: $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{n} = 0$
Расстояние от начала координат до плоскости равно 0, и вектор d начинается в начале координат. Значит нужно спроектировать на плоскость только саму точку (16, 10, 18). Проекция будет совпадать с точкой пересечения прямой, параллельной $\overrightarrow{c}$ и проходящей через $\overrightarrow{d}$
Уравнение прямой: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{d} + \alpha * \overrightarrow{c}$
Значит уравнение точки пересечения: $(\overrightarrow{d} + \alpha * \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$
$\alpha = -\frac{\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{n}}$
$\alpha = -\frac{16*8+5*10-6*18}{4*8+0*5-3*6} = -5$

Значит спроектированная точка: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{d} + -5\overrightarrow{c} = \{16 - 5*4, 10 - 5*0, 18 - 5*3\} = \{-4, 10, 3\}$
Ответ: $\{-4, 10, 3\}$
