Цуканов Михаил
st117303
st117303@student.spbu.ru

# Homework Assignment 13

Алгебра и геометрия, 1 семестр

2023.12.25

**Задача 31.**
Даны вектора $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$, $\vec{d} = \{16, 10, 18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора $\vec{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при направлении проектирования, параллельном вектору $\vec{c}$.

*Решение:*
Плоскость $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ определяется нормалью.

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \{8, 5, -6\}$$

Уравнение плоскости: $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{n} = 0$
Расстояние от начала координат до плоскости равно 0, и вектор d начинается в начале координат. Значит нужно спроектировать на плоскость только саму точку (16, 10, 18). Проекция будет совпадать с точкой пересечения прямой, параллельной $\overrightarrow{c}$ и проходящей через $\overrightarrow{d}$
Уравнение прямой: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{d} + \alpha * \overrightarrow{c}$
Значит уравнение точки пересечения: $(\overrightarrow{d} + \alpha * \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{n} = 0$
$\alpha = -\frac{\overrightarrow{d} \cdot \overrightarrow{n}}{\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{n}}$
$\alpha = -\frac{16*8+5*10-6*18}{4*8+0*5-3*6} = -5$

Значит спроектированная точка: $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{d} + -5\overrightarrow{c} = \{16 - 5*4, 10 - 5*0, 18 - 5*3\} = \{-4, 10, 3\}$
Ответ: $\{-4, 10, 3\}$

---

**Задача 138.**
Доказать, что при любом расположении точек $A$, $B$, $C$, $D$ на плоскости или в пространстве имеет место равенство $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

*Решение:*
Расскроем векторы так, чтобы остались только отношения радиус векторов, если взять $A$ за системы центр координат.
$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0 <=>$
$(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}) = 0 <=>$
// В силу ассоциативности скалярного произведения
$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 0$
Первое и четвертое, второе и пятое, третье и шестое слагаемые взаимно обратные.
Значит сумма каждой пары - 0, значит сумма пар - 0. ч.т.д.

---

**Задача 142.**
Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найти вектор $\vec{x}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и удовлетворяющий системе уравнений $(\vec{a}, \vec{x}) = 1$, $(\vec{b}, \vec{x}) = 0$.

*Решение:*
По условию $x$ ортоганален $b$ и компланарен $a$. То есть он ортоганален $b$ и $a \times b$.
То есть, если $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b}$, то $\overrightarrow{x} = \alpha * \overrightarrow{l}$. Найдем $\alpha$

$l = ab^2 \sin(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})$, при этом $\alpha a l \cos(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{l}}) = 1$. То есть $\alpha a^2 b^2 \sin^2(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}}) = 1$.
Значит $\alpha = \frac{1}{a^2b^2\sin^2(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})}$

Итого ответ: $\overrightarrow{x} = \frac{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \times \overrightarrow{b}}{a^2b^2\sin^2(\widehat{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}})}$

---

**Задача 145.**
Даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{n}$. Найти вектор $\vec{b}$, являющийся ортогональной проекцией вектора $\vec{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\vec{n}$.

*Решение:*
Векторы $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{b}$ лежат в одной плоскости (по т. о трех перпендикулярах). Значит если $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n}$, то $\overrightarrow{l}$ тоже лежит в этой плоскости и при этом так же лежит на плоскости, перп. $\overrightarrow{n}$.
Это значит, что $\overrightarrow{l}$ коллинеарен $\overrightarrow{b}$. То есть $\overrightarrow{b} = \alpha * \overrightarrow{l}$. При этом $b = a\cos((\overrightarrow{n}, \hat{0}), \overrightarrow{a}) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{l}}{l}$
Значит $\alpha = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{l}}{l^2}$
Тогда ответ: $\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n})}{|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n}|^2} * \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{n}$

---

**Задача 151.**
Даны два вектора $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$. Найти вектор $\vec{c}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перпендикулярный к вектору $\vec{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\vec{b}$ тупой угол.

*Решение:*
Нужно найти вектор, перпендикулярный $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{a}$.
$\vec{l} = (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{a}$ подходит под оба условия.
$l = a^2 b \sin(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}})$, при этом требуется вектор с длиной $a$.
значит возьмем вектор $\vec{p} = \frac{1}{ab\sin(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}})}\vec{l}$
Чтобы угол между $\vec{p}$ и $\vec{b}$ был тупым, нужно, чтобы они находились в разных полупространствах относительно плоскости, заданной $\vec{b} \times \vec{a}$ и $\vec{a}$. Это значит, что если $\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$, то тройки $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{p})$ и $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ должны быть разными (одна левой, другая - правой).
При этом тройка $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ левая, значит $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{p})$ - правая. То есть $\vec{l} = (\vec{b} \times \vec{a}) \times \vec{a})$ (а не $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})$)

Итого ответ: $\frac{\vec{b} \times \vec{a} \times \vec{a}}{ab\sin(\widehat{\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a}})}$

---

**Задача 184.**
Даны три вектора $\vec{a} = \{8, 4, 1\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$. Найти вектор $\vec{d}$ длины 1, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

*Решение:*
Определим ориентацию тройки $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$
$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -48.$$
Значит тройка левая.
Пусть $\vec{l} = \vec{b} \times \vec{a}, \vec{d} = \frac{\vec{l}}{l}$. Тогда тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ - левая.

Найдем векторы $\vec{l}$ и $\vec{d}$

$$\vec{l} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \{-6, 6, 24\} = 6 * \{-1, 1, 4\}$$

$l = 6 * \sqrt{1+1+16} = 18 * \sqrt{2}.$

Значит $\vec{d} = \{-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\}$

Ответ: $\{-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{3}\}$

---

**Задача 191.**
Вычислить объем параллелепипеда, зная длины $|\overrightarrow{OA}| = a$, $|\overrightarrow{OB}| = b$, $|\overrightarrow{OC}| = c$ трёх его ребер, выходящих из одной его вершины $O$, и углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COB = \beta$, $\angle AOB = \gamma$ между ними.

*Решение:*
Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на длину соотв. высоты.
Рассмотрим основание, ... векторы $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$. Его площадь равна $ab\sin\gamma$
Теперь рассчитаем длину высоты. Она будет равна координате $z$ вектора $\vec{OC}$.
Рассмотрим $\vec{OC}$ как повернутый вектор $\{0, 0, c\}$

$$\vec{OC} = \{0, 0, c\} * \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \\ 0 & -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \{c\sin\alpha, -c\sin\beta\cos\alpha, c\cos\alpha\cos\beta\}$$

Значит высота будет равна $c\cos\alpha\cos\beta$.
Значит объем параллелепипеда равен $abc\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$
Итого ответ: $abc\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma$

---

**Задача 192.**
Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ связаны соотношениями $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$, $\vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}]$, $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Найти длины этих векторов.

*Решение:*
При таком условии базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - ортоганальный. Значит синус угла между любыми двумя векторами равен 1. Значит длина каждого из векторов равна произведению длин оставшихся.
$a = bc; b = ac; c = ab$
$\frac{bc}{a} = \frac{ac}{b} = \frac{ab}{c} = 1$
$b^2c^2 = a^2c^2 = a^2b^2$
тогда
$a = b = c$ при этом $.a = bc; b = ac; c = ad$
Значит $a = b = c = 1$

---

**Задача 197.**
Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, отложенных от одной точки $O$. Найти вектор $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, отложенный от той же точки $O$ и образующий с векторами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равные между собой острые углы.

*Решение:*
Так как от длины векторов не меняется угол, введем векторы $\vec{x} = \frac{\vec{a}}{a}; \vec{y} = \frac{\vec{b}}{b}; \vec{z} = \frac{\vec{c}}{c};$, длина которых будет равна 1. Возьмем точку $M$ - центроид треугольника ($\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}}{3}$), образованного

векторами $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ и докажем, что вектор $\overrightarrow{OM}$ образует с векторами $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ три равных угла.
Введем точки $X = \vec{x}; Y = \vec{y}; Z = \vec{z};$
Рассмотрим треугольники $(O, X, M), (O, Y, M), (O, Z, M)$. Стороны каждого из них соотв. равны. Значит равны и треугольники. Значит вектор $O\vec{M}$ образует с векторами $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ равные углы чтд.
Итого ответ: $\frac{\vec{a}}{3a} + \frac{\vec{b}}{3b} + \frac{\vec{c}}{3c}$

---