

Задача 10.

Дан четырехугольник $ABCD$. Найти такую точку M , чтобы $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$

Решение:

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OC} + \vec{MO} + \vec{OD} + \vec{MO} = \vec{0}$$
$$4\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}$$

Значит M - центр массы четырехугольника $ABCD$

То есть M - середина средней линии (Такая точка единственная по свойству средней линии).

Задача 13.

Дан тетраэдр $ABCD$. Найти точку M для которой $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{0}$.

Решение:

Аналогично задаче 10 раскроем каждый вектор как сумму радиус-векторов.

$$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OB} + \vec{MO} + \vec{OC} + \vec{MO} + \vec{OD} + \vec{MO} = \vec{0}$$

Значит M - тоже центр масс. Для тетраэдра это - точка пересечения медиан.

Задача 24.

В трапеции $ABCD$ отношение основания BC к основанию AD равно λ . Принимая за базис векторы \vec{AD} и \vec{AB} , найти координаты векторов \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} , \vec{DA} , \vec{AC} и \vec{BD} .

Решение:

$$\vec{AB} = \{0, 1\},$$

$$\vec{BC} = \{\lambda, 0\},$$

$$\vec{CD} = \vec{AD} - (\vec{AB} + \vec{BC}) = \{1, 0\} - (\{0, 1\} + \{\lambda, 0\}) = \{1 - \lambda, -1\},$$

$$\vec{DA} = \{-1, 0\},$$

Задача 17.

Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна нулю.

Решение:

Пойдем от обратного. Пусть $\sum_{i=3}^n \vec{OP}_i = \vec{a}$

Повернем многоугольник на угол между двумя его вершинами ($\gamma = 180 - \alpha$, где α - угол многоугольника). При этом получившаяся фигура будет равна исходной в силу симметрии правильного многоугольника. То есть сумма не должна поменяться.

домножим сумму на матрицу поворота относительно оси Z

$$\vec{a} = \vec{a} * \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \gamma + y \sin \gamma \\ -x \sin \gamma + y \cos \gamma \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x(1 - \cos \gamma) = y \sin \gamma \\ y(\cos \gamma - 1) = x \sin \gamma \end{cases} \begin{cases} \frac{x(1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma} = y \\ -x(\cos \gamma - 1)^2 = x \sin^2 \gamma \end{cases} \begin{cases} \frac{x(1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma} = y \\ x((\cos \gamma - 1)^2 + \sin^2 \gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x(1 - \cos \gamma)}{\sin \gamma} = y \\ x(2 - 2 \cos \gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \gamma = 0$$

По условию $\gamma > 0$ значит $x = 0 \wedge y = 0$ чтд.

Задача 29.

Показать, что каковы бы ни были три вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и три числа α, β, γ векторы $\alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$, $\beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$ компланарны.

Решение:

$$\vec{a} = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b}$$

$$\vec{b} = \gamma\vec{b} - \alpha\vec{c}$$

$$\vec{c} = \beta\vec{c} - \gamma\vec{a}$$

3 вектора компланарны тогда и только тогда, когда они линейно зависимы.

$$\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$$

Значит они компланарны.

Задача 31.

Даны вектора $\vec{a} = \{1, 2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, -2, 1\}$, $\vec{c} = \{4, 0, 3\}$, $\vec{d} = \{16, 10, 18\}$. Найти вектор, являющийся проекцией вектора \vec{d} на плоскость, определяемую векторами \vec{a} и \vec{b} при направлении проектирования, параллельном вектору \vec{c} .

Решение:

Плоскость (\vec{a}, \vec{b}) определяется нормалью.

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \{8, 5, -6\}$$

Уравнение плоскости: $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$

Расстояние от начала координат до плоскости равно 0, и вектор \vec{d} начинается в начале координат. Значит нужно спроектировать на плоскость только саму точку $(16, 10, 18)$. Проекция будет совпадать с точкой пересечения прямой, параллельной \vec{c} и проходящей через \vec{d}

Уравнение прямой: $\vec{p} = \vec{d} + \alpha * \vec{c}$

Значит уравнение точки пересечения: $(\vec{d} + \alpha * \vec{c}) \cdot \vec{n} = 0$

$$\alpha = -\frac{\vec{d} \cdot \vec{n}}{\vec{c} \cdot \vec{n}}$$

$$\alpha = -\frac{16*8+5*10-6*18}{4*8+0*5-3*6} = -5$$

Значит спроектированная точка: $\vec{p} = \vec{d} + -5\vec{c} = \{16 - 5*4, 10 - 5*0, 18 - 5*3\} = \{-4, 10, 3\}$

Ответ: $\{-4, 10, 3\}$