Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

УТВЕРЖДАЮ

##### Директор ИМФИ

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_/Кытманов А.М./

« \_\_\_\_\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 201\_ г.

**ИТОГОВАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АТТЕСТАЦИЯ ВЫПУСКНИКОВ   
ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ**

ПРОГРАММА ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО НАПРАВЛЕНИЮ

010400.68 «Прикладная математика и информатика»

магистерские программы

010400.68.01 математическое моделирование

010400.68.02 оптимизация и оптимальное управление

010400.68.03 математическая физика

**Красноярск 2014**

Программа государственного экзамена

1. Теоремы о неподвижных точках. Принцип сжимающих отображений. Устойчивость неподвижных точек. Теорема Каччополи.
2. Дифференцирование в нормированных пространствах. Сильная производная (Фреше) и ее свойства. Дифференциал Гато. Теорема о неявной функции.
3. Метод Ньютона для нелинейных операторов. Модифицированный метод Ньютона и его сходимость.
4. Принцип Шаудера. Вспомогательные утверждения: выпуклые множества, тела, оболочки, симплексы. Принцип Брауэра. Случай бесконечномерных пространств.
5. Теорема Какутани и ее приложения. Многозначные отображения. Полунепрерывные сверху отображения. Игра двух лиц с нулевой суммой. Теорема о минимаксе.
6. Ветвление решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Постановка задач и вывод уравнения разветвления. Линеаризованная задача. Ветвление для уравнения 2-го порядка.
7. Монотонные операторы в частично упорядоченных банаховых пространствах. Монотонные операторы в гильбертовом пространстве.
8. Теория степени в конечномерном случае. Теорема Сарда и ее следствия. Предварительные соображения: примеры, степень, гомотопия, явное определение степени, случай двумерного пространства, угловая функция, вращение векторного поля, формула Пуанкаре. Построение степени в конечномерном случае.
9. Степень Лерэ-Шаудера. Основное определение степени и ее свойства. Теорема Лерэ-Шаудера.
10. Прямые и итерационные методы решения сеточных уравнений.
11. Лемма об остром угле. Разрешимость операторного уравнения.
12. Разрешимость уравнений с нелинейным монотонным оператором.
13. Теоремы единственности для операторных уравнений с коэрцитивным, слабо компактным, монотонным оператором.
14. Определение и свойства простых функции, функции класса (S->X).
15. Понятие дифференцируемости функций класса (S->X), пространство Cm(S,X), норма. Полнота указанного пространства.
16. Понятие измеримости и интегрируемости по Бохнеру функций класса (S->X), пространство Lp (S,X). Норма, скалярное произведение. Полнота указанного пространства.
17. Понятие и свойства нестационарных/эволюционных операторных уравнений.
18. Свойства нестационарных операторов.
19. Примеры, приводящие к понятию метода слабой аппроксимации. Формулировка метода слабой аппроксимации.
20. Понятие обратной задачи. Ключевые моменты исследования разрешимости задачи идентификации функции источника параболического уравнения с данными Коши..
21. Сопоставление характерных скоростей природных физических (физиологических) процессов со скоростью выполнения операций с плавающей точкой различных ЭВМ. Возможность математического моделирования некоторых задач в реальном времени. Понятие СуперЭВМ.
22. Сетки и их разновидности, сеточные функции.
23. Понятия аппроксимации, устойчивости, сходимости разностных схем. Теорема Лакса и ее применение к исследованию сходимости разностных схем. Примеры разностных схем для одномерных модельных уравнений теплопроводности и переноса.
24. Анализ устойчивости разностной схемы для простейших уравнений диффузии и переноса. Условие устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви и его физический смысл.
25. Принципы построения вычислительных методов на основе метода Бубнова-Галеркина. Примеры «управления точностью (величиной ошибки)» на различных его этапах.
26. Разностные схемы для одномерного уравнения теплопроводности. Метод расщепления. Разностные схемы для многомерного уравнения теплопроводности.
27. Прямые и итерационные методы решения сеточных уравнений.
28. Применение быстрого преобразования Фурье, метод Конкуса и Голуба для решения эллиптических уравнений.
29. Метод установления для решения эллиптических уравнений.
30. Распространение линейных волн. Диссипация и дисперсия сеточного волнового решения. Схемы Лакса-Вендроффа и Годунова.
31. Уравнения движения несжимаемой вязкой жидкости. Разностные схемы для двумерных уравнений в переменных функция тока-завихрённость.
32. Уравнения движения сжимаемой жидкости. Схема Лакса-Вендроффа. Задача о распаде разрыва и схема Годунова.
33. Итоги развития античной математики.
34. Ключевые моменты развития математического анализа.
35. Философские проблемы современной математики и информатики.

**Список литературы**

**Основная литература**

1. Канторович Л. В., Акимов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
2. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Под редакцией Келлера Дж. Б. и Антмана С. М.: Мир, 1974.
3. Хатсон В., Пим Д. Приложения функционального анализа к теории операторов. М.: Мир, 1983.
4. Андреев В. К. Элементы нелинейного функционального анализа. Красноярск, КГУ, 2002.
5. Шлапунов, А. А. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : конспект лекций / А. А. Шлапунов, В. В. Работин, Т. М. Садыков ; Сиб. федерал. ун-т. Версия 1.0. Электрон. дан. (PDF ; 1,22 Мб). Красноярск : ИПК СФУ, 2007. 265 online. (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; УМКД 1-2007). Загл. с титул. экрана. Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/1/u\_lectures.pdf.
6. Распопов, В. Е. Численные методы [Электронный ресурс] : конспект лекций / В. Е. Распопов, М.М. Клунникова ; Сиб. федерал. ун-т. Версия 1.0. Электрон. дан. (PDF ; 1,3Мб). Красноярск : ИПК СФУ, 2007. 189 online. (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции; 13-2007). Загл. с титул. экрана. Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/13/u\_lectures.pdf.
7. Андреев, В. К. Вопросы прикладного функционального анализа [Электронный ресурс] : конспект лекций / В. К. Андреев ; Сиб. федерал. ун-т. Версия 1.0. Электрон. дан. (PDF; 728 кб). Красноярск : [б. и.], 2007ИПК СФУ. 107 online. (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции; УМКД 2-2007). Загл. с титул. экрана. Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/2/u\_lectures.pdf.
8. Треногин, В. А. Функциональный анализ: Учебник / В.А. Треногин // М.:ФИЗМАТЛИТ, 2002. 488 c.
9. Belov, Yu.Ya. Inverse Problems for Partial Differential Equations / Yu.Ya. Belov // Utrecht: VSP, 2002. - 211 p.
10. Белов, Ю.Я. Методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений [Электронный ресурс]: электрон. учеб. пособие / Ю.Я. Белов, И.В. Фроленков, Т.Н. Шипина; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 707 кб). - Красноярск : ИПК СФУ, 2007. - 140 online. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции ; УМКД  19-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: свободный. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/19/u\_posob.pdf
11. Кабанихин, С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин.- Новосибирск: Сибирское научное издателüство, 2009. - 457 с.
12. Михлин, С.Г. Курс математической физики / С.Г. Михлин // СПб.: Лань, 2002. – 576 с.
13. Родионов, А. А. Дифференциальные уравнения [Электронный ресурс] : конспект лекций / А. А. Родионов, А. М. Франк ; Сиб. федерал. ун-т. - Версия 1.0. - Электрон. дан. (PDF ; 18356 кб). – Красноярск ИПК СФУ, 2007. - 137 on-line. - (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции; УМКД  14-2007). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/14/u\_lectures.pdf
14. Белов, Ю. Я. Уравнения с частными производными [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю. Я. Белов ; Сиб. федерал. ун-т. Ин-т математики. - Электрон. дан. (PDF ; 591 Кб). - Красноярск : СФУ, 2008. - 118 с. - (Электронная библиотека СФУ. УМКД - 2008, Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции). - Загл. с титул. экрана. - Режим доступа: открытый. <http://files.lib.sfu-kras.ru/ebibl/umkd/Belov/u_course.pdf>
15. Адрианов А.Л., Блинов А.Н., Матвеев А.Д., Гапоненко Ю.А., Китаев А.В., Работина Л.Г. Современные вычислительные алгоритмы для исследования математических моделей (Электронная библиотека СФУ. Учебно-методические комплексы дисциплин в авторской редакции; 15-2007), УМКД №15 передан СФУ в 2007 г. с доработкой в 2008 г. Научный руководитель проекта А.М. Кытманов, руководитель творческого коллектив А.Л. Адрианов.
16. Годунов С.К. Введение в теорию разностных схем / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1977. – 440 с.
17. Бабенко К.И. Основы численного анализа / К.И. Бабенко. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.
18. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Марчук Г.И. – СПб.: Лань, 2009. – 608 с.
19. Бахвалов Н.С. Численные методы: учеб. пособие/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. –М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. – 640 с.
20. Формалев В.Ф. Численные методы / В.Ф. Формалев, Д.Л. Ревизников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. –400 с.
21. Зализняк В. Е., Численные методы. Основы научных вычислений, М.: Издательство Юрайт, 2012.
22. Зализняк В. Е., Основы вычислительной физики. Часть. 1: Введение в конечно-разностные методы, Москва: Техносфера, 2008.
23. Самарский А. А., Гулин А. В., Устойчивость разностных схем, М.: Эдиториал УРСС, 2005.
24. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. - М.: Лань, 2010.
25. Клайн М. Математика. Поиск истины. М.: Лань, 2007.
26. Клайн М. Математика. Утрата определённости. М.: Лань, 2007.
27. Знаменская О.В., Шлапунов А.А. История и методология прикладной математики и информатики (методические указания по выполнению самостоятельной работы). - Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. - 24 с.
28. Шлапунов А.А. Краткий экскурс в историю математики / А.А. Шлапунов. – Красноярск: изд-во КрасГУ, 2005. – 36 с.

**Дополнительная литература**

1. Белов, Ю.Я. Метод слабой аппроксимации / Ю.Я. Белов, С.А. Кантор // Красноярск: Краснояр.гос.ун-т, 1999. - 236 с.
2. Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас // М.:Мир, 1978.
3. Дубинский, Ю.А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения / Ю.А. Дубинский // Современные проблемы математики. - Т.9. Москва, 1976.
4. Денисов, А.М. Введение в теорию обратных задач: Учебн. пособие / А.М. Денисов // М.: Изд-во МГУ, 1994. - 208 с.
5. Дьяченко В.Ф. Основные понятия вычислительной математики / В.Ф. Дьяченко. – М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1977. – 128 с.
6. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994.
7. Самарский А.А., Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
8. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1971.
9. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
10. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
11. Бауэр Ф.Л. Информатика. Вводный курс: В 2-х ч. Ч.1. Пер. с нем./ Ф.Л. Бауэр, Г. Гооз. – М.: Мир, 1990. – 336 с.
12. Форсайт Дж. Машинные методы математических вычислений/ Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 279 с.

**Видеоресурсы**

1. [Курс лекций «Экономичные разностные схемы решения многомерных задач», Ковеня В. М.](http://tube.sfu-kras.ru/video/755), http://math.sfu-kras.ru/edu/res.

**Образец экзаменационного билета**

**Государственный экзамен**

Направление «Прикладная математика и информатика»

(магистратура)

Название дисциплины – междисциплинарный

1. Итоги развития античной математики. *(2балла)*
2. Имеется операторное уравнение

с заданными непрерывными функциями конечные и

А. Укажите условия на , при которых к уравнению (1) применим принцип Шаудера. *(2балл)*

Б. При каких условиях на эти же данные к уравнению (1) применим принцип неподвижной точки. Привести оценку скорости сходимости. *(2балла)*

В. При каких условиях на входные данные к уравнению (1) применима теорема о неявном операторе. *(2балла)*

*Указание.* Всюду в качестве основного банахова пространства взять Все шаги доказательства тех или иных требуемых свойств обосновать либо ссылками на леммы и теоремы курса, либо прямыми оценками

1. Доказать, что функция измерима и интегрируема по Бохнеру. Вычислить интеграл Бохнера. *(3балла)*
2. Сделать доказательный полный вывод о пригодности разностной схемы (РС)

указав: а) дифференциальное уравнение (математическую запись, "название", тип), которое аппроксимирует данная РС; б) явность (неявность) данной РС; в) устойчивость РС (неустойчива, абсолютно устойчива, условно устойчива при ... (указать условие); г) порядок аппроксимации РС при произвольном соотношении временного и пространственного шагов; д) возможный (?) повышенный порядок аппроксимации РС при специальном соотношении шагов (для проверки этой "возможности"\ использовать дифференциальное следствие аппроксимируемого уравнения). *Каждый пункт оценивается в 1 балл.*

1. Как определяется и что характеризует число обусловленности квадратной матрицы СЛАУ? В каком соотношении должно находиться обратное число обусловленности (RCOND) с машинной точностью (погрешностью от округления - ERROR) для доброкачественного решения СЛАУ*. (3 балла)*

**Регламент проведения государственного экзамена**

1. Общее время проведения экзамена – 4 часа.
2. Форма проведения экзамена – письменно.
3. Место и время проведения экзамена - согласно расписанию ГАК, которое составляется за месяц до начало работы ГАК.
4. Студент приходит на экзамен не позднее, чем за 15 минут до его начала.
5. Во время экзамена допускается использование справочной литературы по согласованию с комиссией.
6. Письменную работу проверяет комиссия. Работа оценивается по 20 бальной шкале. Каждое задание имеет свой оценочный бал в зависимости от уровня сложности. Критерии оценки за задание: «0»- задание не выполнялось или выполнено не верно; «50% от оценочного балла» -задание выполнено частично, в целом идея решения верна; «100% от оценочного балла» - задание выполнено полностью и правильно. Общая оценка за работу выставляется по сумме баллов всеми членами комиссии. Критерии общей оценки по сумме баллов (переводная шкала) устанавливаются комиссией.
7. Апелляция проводится в день экзамена после завершения проверки письменных работ и объявления результатов экзамена на основании поданного заявления на имя председателя комиссии.

«\_\_\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_ 2014 г. протокол №

Председатель НУМСИ Лейнартас Е.К. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

*(подпись)*