دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد	۲۰ اردیبهشت۱۳۹۸

تمرین : سری ۴

مدرّس: دکتر شهرام خزائی — *مهلت تحویل* ۱۰ خرداد

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها یک مگابایت است. بنابرین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- تایپ کردن و مرتب نوشتن تمرینات ۱۰ امتیاز اضافی دارد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست و تمدید نخواهد شد.
- ارسال‌های پس از موعد، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با و ali_nasseh86@yahoo.com مطرح نمایید.

مسأله ۱

الف)(۵نمره) ثابت کنید

$$Cov(X,Y) = Cov(X, E(Y|X))$$

ب)(۵نمره) نشان دهید که اگر دو متغیر تصادفی X و Y از توزیع یکسانی آمده باشند و لزوما مستقل نباشند، آنگاه:

$$Cov(X+Y, X-Y) = 0$$

مسأله ۲

الف)(۴نمره) فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی و $G(s) = E(s^X)$ تابع مولد احتمال X باشد. نشان دهید

$$E(\frac{1}{1+X}) = \int_0^1 G(s)ds$$

ب)(۴نمره) متغیر تصادفی مثبت X، $log-normal$ با پارامترهای μ و σ^2 نامیده می شود، اگر $log(X)$ یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد. با استفاده از تابع مولد گشتاور نرمال، میانگین و واریانس متغیر تصادفی $log-normal$ را به دست آورید.

مسأله‌ی ۳

(۸نمره) برای متغیر تصادفی نرمال استاندارد Z داریم $\mu_n = E(Z^n)$. نشان دهید

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{عددی فرد است } n \\ \frac{(2j)!}{2^j j!} & n = 2j \end{cases} \tag{۱}$$

مسأله‌ی ۴

(۸نمره) با چندبار انداختن یک سکه می توان با اطمینان حداقل 90 درصد مقدار احتمال روآمدن سکه را با اختلاف حداکثر 0.1 از مقدار واقعی تخمین زد؟

مسأله ۵

الف)(۴نمره) فرض کنید $X_1, X_2, \ldots$ دنباله ای از متغیر های تصادفی باشند که با احتمال 1 به عدد حقیقی c همگرا هستند. نشان دهید که دنباله ی فوق در احتمال نیز به c همگراست.

ب)(۴نمره) 100 عدد حقیقی را به نزدیک ترین عدد صحیح آن گرد می کنیم و با هم جمع می کنیم. فرض کنید خطای گرد کردن یک عدد حقیقی دارای توزیع یکنواخت در بازه ی $[-0.5, 0.5]$ باشد. احتمال اینکه اختلاف حاصل جمع این 100 عدد گرد شده از مقدار واقعی جمع آن ها بیشتر از ۵ باشد را به طور تقریبی محاسبه کنید.

مسأله ۶

الف)(۴نمره) برای هر دو متغیر تصادفی دلخواه X و Y، فرض کنید $\sigma_X^2 = Var(X)$ ، $\sigma_Y^2 = Var(Y)$ و $\sigma_{X+Y}^2 = Var(X+Y)$. نشان دهید:

$$\frac{\sigma_{X+Y}}{\sigma_X + \sigma_Y} \leq 1$$

ب)(۸نمره) فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نمایی مستقل با پارامتر مشترک λ باشند. حال مقادیر $E[min(X,Y)]$ و $E[max(2X,Y)]$ را به دست آورید.

مسأله ۷

(۵نمره) الف) فرض کنید x و y متغیرهای تصادفی یکنواخت در بازه $(0,\alpha)$ و مستقل از هم هستند. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $z=|x-y|$ را بیابید.
(۱۰نمره) ب) فرض کنید x و y متغیرهای تصادفی یکنواخت در بازه $(0,1)$ و مستقل از هم هستند. متغیرهای تصادفی w و z را به این صورت تعریف می کنیم:

$$w = max(x,y)$$

$$z = min(x,y)$$

تابع چگالی احتمال را برای موارد زیر به دست آورید:
۱) $r = w - z$
۲) $s = w + z$

مسأله ۸

(۵نمره امتیازی) فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و یکنواخت روی بازه ی $(-1,1)$ باشند. تابع چگالی احتمال $\frac{X_1+X_2+...+X_n}{\sqrt{n}}$ را برای $n=2,3,4$ به صورت دستی محاسبه و رسم نمایید. با استفاده از یک نرم افزار مناسب مانند $MATLAB$ نیز این کار را برای $n=8,16,32$ انجام دهید و با تابع چگالی احتمال متغیر گوسی که به آن میل می کند، مقایسه کنید.

مسأله ۹

(۸نمره) فرض کنید $X_1, X_2, ...$ طول پرش ورزشکاران مختلف باشد که همه آن ها $i.i.d$ می باشند. می گوییم فرد i رکورد زده است، اگر مقدار X_i از تمامی مقادیر $X_1, X_2, ..., X_{i-1}$ بزرگ تر باشد. میانگین و واریانس تعداد رکوردهای اعضای شماره 1 تا n را بیابید.

مسأله ۱۰

الف)(۴نمره) نشان دهید که اگر متغیر تصادفی θ دارای توزیع یکنواخت در بازه ی $[0,2\pi]$ باشد، در این صورت دو متغیر تصادفی $X = Sin(\theta)$ و $Y = Cos(\theta)$ ناهمبسته هستند.

ب)(۴نمره) اگر داشته باشیم که $Cov(X,Y)=0$ ، نشان دهید:

$$\rho(X+Y,X-Y)=\frac{Var(X)-Var(Y)}{Var(X)+Var(Y)}$$

مسأله ۱۱

دو متغیر تصادفی X و Y را می گوییم دارای توزیع نرمال دومتغیره هستند، اگر تابع چگالی احتمال توام آن ها به صورت

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\times[(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2-\frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y}+(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2]\}$$

باشد
الف)(۴نمره) نشان دهید متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ_x و واریانس σ_x^2 و متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال با میانگین μ_y و واریانس σ_y^2 است.
ب)(۴نمره) نشان دهید که چگالی احتمال شرطی متغیر X به شرط $Y=y$ دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu_x+(\frac{\rho\sigma_x}{\sigma_y})(y-\mu_y)$ و واریانس $\sigma_x^2(1-\rho^2)$ است.
ج)(۴نمره) ضریب همبستگی X و Y را محاسبه کنید.
د)(۳نمره) نشان دهید که دو ترکیب خطی نابدیهی از متغیرهای X و Y وجود دارد که مستقل از هم اند.

مسأله ۱۲

(۱۰ نمره امتیازی) فرض کنید نقطه ای تصادفی در بازه ی $[0,1]$ انتخاب می کنیم و آن را M می نامیم. سپس دو نقطه ی تصادفی یکی در سمت راست نقطه ی M یا بازه ی $[M,1]$ و دیگری را در سمت چپ نقطه ی M یا بازه ی $[0,M]$ انتخاب می کنیم و به ترتیب R و L می نامیم. حال فرض کنید طول نقطه ی M برابر با X و طول پاره خط LR برابر با W باشد. کوواریاس دو متغیر X و W را بیابید.