



تمرین : سری ۱

مدّرس: دکتر شهرام خزائی

مهلت تحویل ۲ فروردین

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها یک مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- تحویل تمرین‌ها در فرمت لاتک ۱۰ درصد نمره‌ی اضافه خواهد داشت.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست و تمدید نخواهد شد.
- ارسال‌های پس از موعد، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- از مجموع ۱۲۰ نمره سوالات زیر کافی است به ۱۰۰ نمره پاسخ دهید.
- برای هر مسئله فضاهای نمونه‌ای و پیشامدها را به طور دقیق تعریف کنید.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با mousavi.amirali1377@gmail.com یا Karimisajed1378@gmail.com مطرح نمایید.

مسأله ۱ (۱۰ نمره)

- دو کیسه در اختیار داریم که کیسه اول دارای ۳ توپ قرمز و ۷ توپ آبی و کیسه دوم دارای ۶ توپ قرمز و ۴ توپ آبی است. یک کیسه را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم و از آن یک توپ برمی‌داریم.
- الف) احتمال آنکه توپ مورد نظر قرمز باشد چقدر است؟
- ب) اگر توپ انتخاب شده قرمز باشد، احتمال آنکه توپ را از کیسه دوم برداشته باشیم چقدر است؟

مسأله ۲ (۵ نمره)

یک آزمایشگاه تشخیص سرطان با احتمال ۵٪ برای بیماران غیرسرطانی پاسخ مثبت و با احتمال ۹۹٪ برای بیماران سرطانی پاسخ مثبت می‌دهد. از بین بیماران یک بیمارستان که ۷٪ آنها سرطانی هستند یک بیماری را به صورت تصادفی انتخاب کرده و آزمایش روی وی مثبت نشان داده شده‌است. احتمال آنکه بیمار سرطانی باشد چقدر است؟

مسأله ۳ (۱۰ نمره)

n سکه در اختیار داریم که احتمال خط آمدن سکه i ام برابر $\frac{i}{n}$ است. یک سکه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و حاصل پرتاب خط می‌شود. احتمال آنکه سکه‌ی پرتاب شده، سکه k ام باشد ($1 \leq k \leq n$) چقدر است؟

مسأله ۴ (۵ نمره)

درستی رابطه زیر را بررسی کنید.

اگر $P(A|C) \geq P(A|C^c)$ و $P(B|C) \geq P(B|C^c)$ آنگاه $P(AB|C) \geq P(AB|C^c)$

مسأله ۵ (۱۰ نمره)

می‌خواهیم بین دو نفر یکی را به صورت تصادفی انتخاب کنیم. روشی ارائه دهید که بتوانیم با استفاده از یک سکه ناسالم که با احتمال p شیر می‌آید این کار را انجام دهیم.

مسأله ۶ (۱۰ نمره)

۱۰ توپ قرمز و ۱۰ توپ سبز و ۱۰ کیسه داریم. توپ‌ها را به صورت تصادفی درون کیسه‌ها قرار می‌دهیم به طوری که هر کیسه شامل دقیقاً دو توپ باشد. احتمال آنکه دقیقاً k کیسه شامل توپ‌های با رنگ متفاوت باشند را بیابید.

مسأله ۷ (۱۰ نمره)

اگر E_i ها پیشامدهای یک فضای نمونه باشند نشان دهید:

$$P(E_1 E_2 \dots E_n) \geq P(E_1) + \dots + P(E_n) - (n - 1)$$

مسأله ۸ (۱۰ نمره)

یک قدم‌زن تصادفی درون بازه $[A, B]$ از اعداد صحیح در حال حرکت است به طوری که در هر بار حرکت با احتمال برابر به چپ یا راست می‌رود و این کار را تا زمانی انجام می‌دهد که به یکی از دو سره بازه برسد. ثابت کنید اگر حرکت خود را از نقطه C ($A \leq C \leq B$) شروع کند که فاصله آن با A برابر a و با B برابر b است آنگاه احتمال آنکه در B متوقف شود برابر $\frac{a}{a+b}$ است.

مسأله ۹ (۱۰ نمره)

n سبد داریم که هر کدام شامل a توپ سفید و b توپ مشکی هستند. تصادفاً یک توپ از سبد اول برمی‌داریم و به سبد دو انتقال می‌دهیم سپس تصادفاً یک توپ از سبد دوم برمی‌داریم و به سبد سوم انتقال می‌دهیم و این کار را تا آخرین سبد انجام می‌دهیم. حال یک توپ به تصادف از سبد آخر برمی‌داریم. احتمال آنکه این توپ سفید باشد چقدر است؟

مسأله ۱۰ (۱۵ نمره)

می‌گوییم رویداد F حاوی اطلاعات منفی درباره رویداد E است و می‌نویسیم $E \searrow F$ اگر داشته باشیم $P(E|F) \leq P(E)$

عبارات زیر را اثبات کنید یا برایشان مثال نقض بیاورید.

الف) اگر $B \searrow A$ آنگاه $A \searrow B$

ب) اگر $A \searrow B$ و $A \searrow C$ آنگاه $B \searrow C$

ج) اگر $A \searrow B$ و $A \searrow C$ آنگاه $A \cap C \searrow B$

مسأله ۱۱ (۱۰ نمره)

فرض کنید به طور مداوم با حریفی بی‌نهایت پولدار بازی می‌کنید. در هر بازی یا یک سکه می‌برید یا یک سکه می‌بازید. اگر هر بازی را مستقلاً با احتمال p ببرید، نشان دهید اگر $\frac{1}{p} \leq p$ با احتمال ۱ سرانجام ورشکست خواهید شد و اگر $\frac{1}{p} > p$ احتمال آن $(\frac{1-p}{p})^k$ خواهد بود که k میران پول شما در ابتدای کار است.

مسأله ۱۲ (۱۵ نمره)

در یک کیسه r توپ قرمز، b توپ آبی و g توپ سبز قرار دارد. در هر مرحله یک توپ را به تصادف از کیسه خارج کرده و کنار می‌گذاریم. این کار را تا زمانی که همه‌ی توپ‌های درون کیسه یک‌رنگ باشند ادامه می‌دهیم.

الف) احتمال آنکه همه‌ی توپ‌های باقیمانده در آخر سبز باشند چقدر است؟

ب) احتمال آنکه توپ‌های قرمز اولین توپ‌هایی باشند که تمام می‌شوند چقدر است؟