دانشکده‌ی علوم ریاضی

احتمال و کاربرد ۳۱ فروردین ۱۳۹۸

تمرین : سری ۳

مدرّس: دکتر شهرام خزائی *مهلت تحویل ۲۰ اردیبهشت*

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها یک مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- نوشتن تمرینات با استفاده از LaTeX، ۱۰ نمره‌ی اضافه دارد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست و تمدید نخواهد شد.
- ارسال‌های پس از موعد، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- از مجموع ۱۱۰ نمره‌ی سؤالات کافی است به ۱۰۰ نمره پاسخ دهید و حلّ سؤالات بیشتر، نمره‌ی اضافه به همراه نخواهد داشت.
- سوالات خود پیرامون تمرین‌ها را با `arashashoori199821@gmail.com` یا `karimisajed1378@gmail.com` مطرح نمایید.

پرسش ۱

توزیع توأم متغیرهاي تصادفي X و Y داده شده است.
الف) توزیع حاشیه اي X و Y را محاسبه کنید. (۲ نمره)
ب) استقلال یا عدم استقلال X و Y را بررسي کنید. (۲ نمره)
پ) براي تمام مقادیر y که در ساپورت Y قرار دارند، $E[X|Y=y]$ را به دست آورید. حال با استفاده از این مقادیر به دست آمده، به طور شهودي استقلال یا عدم استقلال X و Y را نتیجه بگیرید. (۲ نمره)
ت) مقدار $E[X^2+Y^2|XY<10]$ را محاسبه کنید. (۲ نمره)
ث) تابع جرم احتمال متغیر تصادفي $Z=X^2+Y^2$ را محاسبه کنید. (۲ نمره)

	1	2	3	4	5	X
1	0.04	0.01	0	0.01	0.04	
2	0.12	0.03	0	0.03	0.12	
3	0.08	0.02	0	0.02	0.08	
4	0.16	0.04	0	0.04	0.16	
Y						

پرسش ۲

الف) X یک متغیر تصادفی یکنواخت بین $(0, A)$ است $(A < \infty)$. a چقدر باشد تا مقدار $E[|X - a|]$ حداقل شود. (۴ نمره)

ب) بخش قبل را به ازای اینکه X متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ باشد حل کنید. (۴ نمره)

پرسش ۳

الف) ۳ نقطه X_1 و X_2 و X_3 به صورت تصادفی روی یک خط انتخاب می شوند. احتمال اینکه X_2 بین X_1 و X_3 قرار گیرد چقدر است. (۲ نمره)

ب) دو نقطه‌ی x_1, x_2 در بازه‌ی $(0, 1)$ به صورت مستقل و با توزیع یکنواخت انتخاب می‌شوند.
$y = x_1 - x_2$. $f_y(y)$ را بدست آورید.(۳ نمره)

ج) بر روی یک دایره به شعاع R یک نقطه با توزیع $f_\theta(\theta) = a + bcos(\frac{\theta}{2})$ انتخاب می‌کنیم. به طوری که امید ریاضی θ ، $\frac{\pi}{2}$ شود. a،b را بدست آورید.(۴نمره)

د) فاصله نقطه را با نقطه‌ی $\theta = 0$ روی دایره با r نمایش می‌دهیم. $f_r(r)$ را بدست آورید. (۳ نمره)

ه) $E[r]$ را بدست آورید. (۳ نمره)

و) $Var[r]$ را بدست آورید. (۳ نمره)

پرسش ۴

تابع چگالی توام X و Y به شکل زیر داده شده است.

$$f_{(x,y)} = \frac{1}{x^2y^2} \qquad x \geqslant 1, y \geqslant 1$$

الف) تابع چگالی توام U=XY و V=X/Y را محاسبه کنید. (۶ نمره)

ب) توزیع حاشیه ای U و V را محاسبه کنید. (۳ نمره)

پرسش ۵

ابتدا n متغیر تصادفی مستقل و یکنواخت بین ۰ تا ۱ تولید میکنیم و سپس آن ها را به صورت $X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)}$ مرتب میکنیم. ثابت کنید به ازای $1 \leqslant k \leqslant n+1$ داریم:
$P(X_{(k)} - X_{(k-1)} > t) = (1-t)^n$
که $X_{(0)} \equiv 0, X_{(n+1)} \equiv 1$ (۸ نمره)

پرسش ۶

اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامتر های λ_1 و λ_2 باشند، توزیع $Z = X_1/X_2$ را بیابید و مقدار $P(X_1 < X_2)$ را محاسبه کنید. (۴ نمره)

پرسش ۷

الف) میخواهیم تابع توزیع احتمال وقوع یک پدیده را بررسی کنیم.
می دانیم اگر پدیده تا لحظه t اتفاق نیفتاده باشد، احتمال اینکه در این لحظه اتفاق افتد به t بستگی ندارد. فرم کلی توزیع احتمال وقوع این پدیده چگونه است.(۹ نمره)
ب) فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نمایی باشند با پارامتر λ. توزیع متغیر تصادفی $Y = min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ را بدست آورید.(۴نمره)
ج) چراغ قوه ای داریم که به آن n باتری وصل کرده ایم. عمر هر باتری توزیع نمایی با پارامتر λ است. تا زمانی که همه باتری ها خراب نشده اند چراغ قوه کار می‌کند. امید ریاضی زمان کار کرد چراغ قوه را بدست آورید.(۴نمره)

پرسش ۸

فرض کنید درون یک ظرف N ذره داریم که میانگین انرژی هر کدام از ذرات E_0 است و داریم $E = \frac{1}{2}mv^2$ (که E انرژی ذره، m جرم ذره که برای همه ذرات ثابت در نظر گرفته شده و v اندازه سرعت ذرات است). توزیع سرعت ذرات در هر کدام از مولفه های x و y و z (v_x, v_y, v_z) مستقل و گوسی(با واریانس یکسان) است. میانگین سرعت در هر کدام از راستاها صفر است. اندازه سرعت هر ذره را با v نمایش می دهیم و داریم: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.
تابع توزیع اندازه سرعت ذرات را به دست آورید.(۱۰ نمره)

پرسش ۹

فرض کنید ذره ای از مبدا مختصات شروع به حرکت می کند. طول هر گام l_0 است و جهت آن در فضای ۳ بعدی تصادفی است. بعد از N قدم:
الف) میانگین بردار فاصله را بدست آورید؟(۱ نمره)
ب)مقدار $E[r^2]$ را به دست آورید (که r فاصله تا مبدا مختصات است).(۷ نمره)

پرسش ۱۰

میخواهیم حرکت ولگرد تصادفی را در فضای پیوسته بررسی کنیم.
احتمال اینکه ذره در زمان t در بازه‌ی $(X, X+dX)$ باشد را با $P(t,X)dX$ نمایش می‌دهیم.
فرض کنید طول قدم های ذره ΔX (که به سمت صفر میل میکند) باشد و این حرکت Δt طول بکشد. به طوری که $\dfrac{\Delta X^2}{\Delta t}$ ثابت است. ذره به احتمال $\frac{1}{2}$ به راست و به احتمال $\frac{1}{2}$ به چپ میرود.
الف) رابطه بازگشتی برای $P(t,X)$ بنویسید.(۲ نمره)
ب)با بسط تیلور این تابع نشان دهید که (مقدار D یک ثابت است):(۴ نمره)

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$$

ج) فرض کنید ذره از مبدا شروع به حرکت کرده است. فقط با استفاده از رابطه بالا $E[X^2]$ را در زمان t به دست آورید. راهنمایی: سعی کنید $E[X^2]$ را در یک طرف بسازید.(۸ نمره)
د) یک رابطه گوسی برای $P(t,X)$ حدس بزنید و نشان دهید این توزیع در رابطه قسمت ب صدق میکند.(۴نمره)

پرسش ۱۱

این پرسش نمره‌ای ندارد و به عنوان تمرین غیرتحویلی داده شده است.
میخواهیم نشان دهیم توزیع دو جمله ای به ازای N های بزرگ شبیه توزیع گاوسی میشود.

$$P(n_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}$$

این توزیع را به صورت زیر پیوسته میکنیم.

$$P(n_1, n_1+dn_1) = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}dn$$

$$W(n_1) := \frac{N1}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}$$

فرض کنید به ازای n_1^* مقدار $W(n_1)$ بیشینه میشود.
قرار دهید: $n_1 = n_1^* + \eta$
الف) $lnW(n)$ را بنویسید و $\dfrac{dlnW(n)}{dn}$ را بدست آورید و با توجه به آن n_1^* را بدست آورید. راهنمایی:

$$\frac{dlnn!}{dn} = ln(n+1) \simeq ln(n)$$

ب) بسط تیلور $lnW(n_1)$ را حول n_1^* بر حسب $lnW(n_1^*)$ و مشتقات $lnW(n)$ بنویسید.
ج) ازجملاتی که در بسط تیلور ضریب $\dfrac{1}{N}$ به توانی بزرگتر یا مساوی ۲ دارند صرف نظر کنید و $W(n)$ را بدست آورید.