



۲ فروردین ۱۳۹۸

احتمال و کاربرد

## تمرین : سری ۲

مهلت تحویل ۲۳ فروردین

مدّرس: دکتر شهرام خزائی

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها یک مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- نوشتن تمرینات با استفاده از  $\text{\LaTeX}$ ، ۱۰ نمره‌ی اضافه دارد.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست و تمدید نخواهد شد.
- ارسال‌های پس از موعد، درصدی از نمره‌ی کامل را دریافت خواهند کرد.
- از مجموع ۱۲۵ نمره‌ی سؤالات کافی است به ۱۰۰ نمره پاسخ دهید و حلّ سؤالات بیشتر، نمره‌ی اضافه به همراه نخواهد داشت.
- سؤالات خود پیرامون تمرین‌ها را با [HannaYzade@gmail.com](mailto:HannaYzade@gmail.com) یا [doosth.ali@gmail.com](mailto:doosth.ali@gmail.com) مطرح نمایید.

### مسأله‌ی ۱

دو نفر می‌خواهند دوئل کنند. می‌دانیم که اگر ماشه‌ی تفنگ این دو نفر کشیده‌شود، تفنگ نفر اوّل با احتمال  $p$  و تفنگ نفر دوّم با احتمال  $q$  شلیک می‌کند و درصورت شلیک، فرد مقابل حتماً کشته می‌شود. این دو نفر تا زمانی که هردو زنده هستند، در هرثانیه یک بار دوئل می‌کنند. (هم زمان باهم ماشه‌ی تفنگ خود را می‌کشند.)  
 الف) اگر  $X$  تعداد ثانیه‌هایی باشد که هردو زنده‌اند،  $E[X]$  را محاسبه کنید. (اگر فردی در دوئل اوّل کشته‌شود، ۱ ثانیه زنده بوده است.) (۵ نمره)  
 ب) احتمال اینکه در این دوئل هر دو نفر کشته‌شوند چقدر می‌باشد؟ (۵ نمره)

### مسأله‌ی ۲ (۱۰ نمره)

یک گونی داریم که ۷۰ توپ رنگی از ۷ رنگ مختلف در آن موجود است. هم‌چنین می‌دانیم از هر رنگ ۱۰ توپ در گونی داریم. به تصادف ۲۰ تا از توپ‌ها را از گونی بیرون می‌کشیم. امید ریاضی تعداد رنگ‌های مختلفی که در این ۲۰ توپ دیده می‌شود چقدر است؟

### مسأله‌ی ۳ (۸ نمره)

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با مقادیر طبیعی باشد. ثابت کنید  $X$  بی‌حافظه<sup>۱</sup> است اگر و تنها اگر دارای توزیع هندسی باشد.

### مسأله‌ی ۴ (۱۲ نمره)

ثابت کنید واریانس متغیر تصادفی فوق هندسی، از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$n \frac{D}{N} \left(1 - \frac{D}{N}\right) \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

که در آن  $N$  تعداد کل اشیاء درون جعبه،  $D$  تعداد اشیاء خراب و  $n$  تعداد اشیاء برداشته‌شده از جعبه است.

### مسأله‌ی ۵ (۱۰ نمره)

یک دسته کارت شامل ۵۲ کارت داریم. ۱۳ کارت آبی، ۱۳ کارت قرمز، ۱۳ کارت زرد و ۱۳ کارت سبز می‌باشند. کارت‌های هر رنگ با اعداد ۱ تا ۱۳ شماره‌گذاری شده‌اند. یک بار تاس می‌اندازیم و به اندازه‌ی عدد تاس از دسته کارت، کارت برمی‌داریم. امید ریاضی و واریانس تعداد کارت‌های برداشته‌شده با شماره‌ی بیش از ۱۰ را محاسبه کنید.

### مسأله‌ی ۶

جایگشت تصادفی  $P = p_1, p_2, \dots, p_{2n-1}, p_{2n}$  از اعداد ۱ تا  $2n$  را در نظر بگیرید. گفته می‌شود  $(i, j)$  یک نابه‌جایی<sup>۲</sup> در جایگشت است اگر  $i < j$  و  $p_i > p_j$  باشد. الف) امید ریاضی تعداد نابه‌جایی‌ها در جایگشت  $P$  چقدر است؟ (۵ نمره) ب) اگر بدانیم برای  $i$  های زوج،  $1 \leq p_i \leq n$  می‌باشد، امید ریاضی تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت را محاسبه کنید. (۵ نمره)

---

memoryless<sup>۱</sup>  
Inversion<sup>۲</sup>

### مسأله‌ی ۷ (۵ نمره)

پمپ بنزین شهر زیبا دارای یک جایگاه برای بنزین زدن می‌باشد. ماشین‌ها در سه صف کنارهم برای بنزین زدن توقف کرده‌اند. هربار که یک ماشین بنزین می‌زند و جایگاه خالی می‌شود، متصدی پمپ بنزین به صورت تصادفی یکی از سه ماشین سرصف‌ها را برای ورود به جایگاه انتخاب می‌کند. در ابتدا ماشین مرد خسته، دهمین ماشین در صف اول می‌باشد. اگر ماشین مرد خسته  $X$  امین ماشینی باشد که وارد جایگاه می‌شود، امید ریاضی و واریانس  $X$  را محاسبه کنید. (فرض کنید صف‌ها طول نامتناهی دارند).

### مسأله‌ی ۸ (۵ نمره)

زنبور ملکه هر سال با احتمال  $\frac{1}{2^i}$  به تعداد  $i \leq 1$  تخم می‌گذارد. انتظار می‌رود زنبور ملکه در سال پیش‌رو چند تخم بگذارد؟

### مسأله‌ی ۹

شهر زیبا به صورت یک جدول  $1000 \times 1000$  می‌باشد که خانه‌های جدول، خانه‌های شهر هستند. شهرداری شهر زیبا برای اداره‌ی بهتر شهر، آن را به منطقه‌هایی به شکل مربع‌های  $n \times n$  افراز کرده‌است. در شهر زیبا به طور متوسط، ماهانه ۵۰۰ آتش سوزی رخ می‌دهد. الف) اگر  $n$  برابر ۵۰ باشد، احتمال وقوع آتش سوزی در هر منطقه در ماه چقدر است؟ (۱۰ نمره) ب) اگر  $n$  برابر ۱۰۰ باشد، زمان مورد انتظار برای اولین آتش سوزی در یک منطقه چند روز است؟ (۵ نمره)

### مسأله‌ی ۱۰

پلیس شهر برای خنثی کردن یک بمب باید رمز  $n$  رقمی آن را پیدا کند. بمب دارای یک نمایشگر دیجیتال و یک صفحه کلید می‌باشد. آقای پلیس در هر مرحله یک عدد  $n$  رقمی (این عدد می‌تواند با رقم ۰ آغاز شود). مثل  $d_1 d_2 d_3 \dots d_n$  را از طریق صفحه کلید وارد کرده و  $Enter$  را می‌زند. پس از فشردن  $Enter$  اگر رقم  $i$  ام رمز بمب برابر با  $d_i$  بود، جایگاه  $i$  ام نمایشگر سبز و گرنه قرمز می‌شود. اگر همه‌ی جایگاه‌ها سبز بود، رمز پیدا شده و بمب خنثی می‌شود و گرنه آقای پلیس باید عدد  $n$  رقمی دیگری را امتحان کند. می‌دانیم آقای پلیس باهوش است و اگر در مرحله‌ای متوجه شود رقم  $i$  ام رمز بمب برابر با  $x$  می‌باشد، در تمام مراحل بعد، رقم  $i$  ام عددی که وارد می‌کند را  $x$  قرار می‌دهد و اگر متوجه شود رقم  $i$  ام رمز بمب برابر با  $x$  نیست، از آن پس از  $x$  به عنوان رقم  $i$  ام عدد ورودی استفاده نمی‌کند. واضح است که آقای پلیس پس از حداکثر ۱۰ مرحله می‌تواند بمب را خنثی کند. الف) اگر  $X$  تعداد مراحل تا خنثی شدن بمب باشد، توزیع  $X$  را محاسبه کنید. (۱۰ نمره) ب) مقدار  $E[X]$  را به ازای  $1 \leq n \leq 5$  به دست آورده و پاسخ خود را تحلیل کنید. (۵ نمره) ج) رباتی پیدا شده که با روش‌های جادویی می‌تواند رقم  $i$  ام رمز  $(\forall i : 1 \leq i \leq n)$  را در ثانیه‌ی  $Y_i \in [0, 10]$  پیدا

کند. اگر  $Y_i$  ها متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکنواخت باشند، امید ریاضی زمان خنثی شدن بمب را محاسبه کنید. (۵ نمره)

### مسئله ۱۱ (۱۰ نمره)

عدد  $510510$  را داریم. در هر مرحله، اگر عددمان برابر  $k$  باشد، یکی از مقسوم‌الیه‌های  $k$  مثل  $d$  (شامل  $1$  و  $k$ ) را به تصادف انتخاب کرده، به جای  $k$  عدد  $\frac{k}{d}$  را نگه می‌داریم. امید ریاضی عددی که بعد از  $10$  مرحله داریم را محاسبه کنید.

### مسئله ۱۲

- می‌دانیم احتمال حضور هر یال در گراف  $100$  رأسی  $G$  برابر  $p$  می‌باشد.
- الف) امید ریاضی و واریانس تعداد یال‌های  $G$  را محاسبه کنید. (۴ نمره)
- ب) احتمال اینکه تعداد یال‌های  $G$  برابر با  $4851$  باشد چقدر است؟ (۲ نمره)
- ج) امید ریاضی تعداد مؤلفه‌های همبندی  $G$  به شرط این‌که  $G$ ،  $4851$  یال داشته باشد را به دست آورید. (۳ نمره)
- د) برای محاسبه‌ی امید ریاضی تعداد مؤلفه‌های همبندی  $G$  در حالت کلی ایده‌ای دارید؟ (۱ نمره)

عیدتون مبارک !