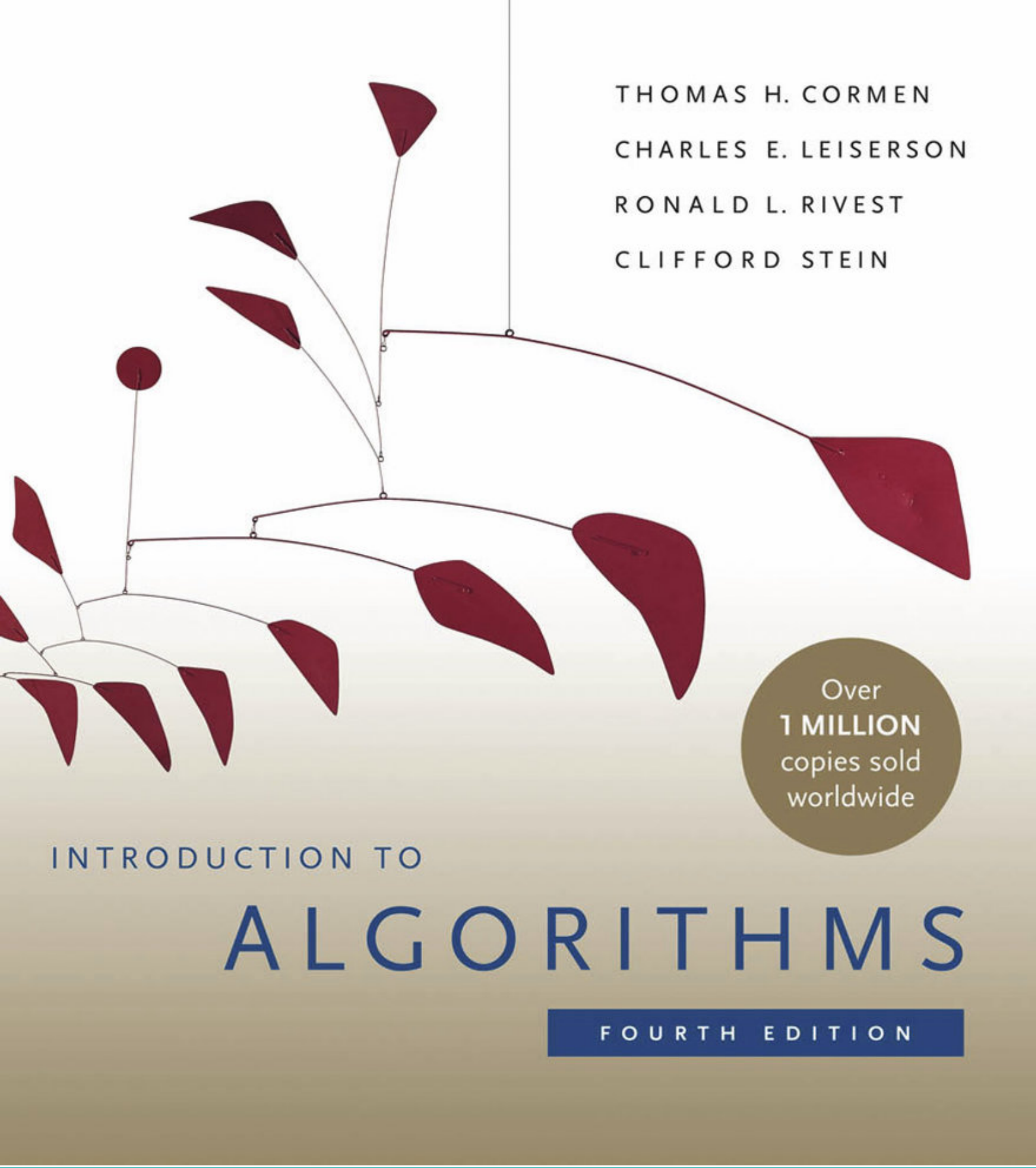


《算法导论第四版》学习笔记

作者：左元

目录

第一部分

基础知识

简介

当你设计和分析算法时，你需要能够描述算法的运行方式以及如何设计算法。你还需要一些数学工具来证明你的算法是正确且高效的。这部分内容将帮助你入门。本书的后续部分将在此基础上展开。

第 1 章提供了算法及其在现代计算系统中的位置的概述。本章定义了算法的概念并列举了一些例子。它还提出了将算法视为一种技术的观点，与高速的硬件、图形用户界面（GUI）、面向对象系统和网络等技术并列。

在第 2 章中，我们首次见到了解决排序 n 个数字序列问题的算法。它们以伪代码形式编写，虽然不能直接转换为任何传统的编程语言，但足够清晰地传达了算法的结构，以便你能够在自己选择的编程语言中实现它。我们研究的排序算法包括插入排序（使用增量方法）和归并排序（使用递归技术，称为“分而治之”）。虽然每个算法所需的时间随 n 的值增加而增加，但增长的速率在这两个算法之间有所不同。我们在第 2 章中确定了这些运行时间，并开发了一个有用的“渐近”符号来表示它们。

第 3 章对渐近符号进行了精确定义。我们将使用渐近符号来界定函数的增长范围，最常见的情况是描述算法运行时间的函数，上下界都包括在内。该章节首先非正式地定义了最常用的渐近符号，并给出了如何应用它们的示例。然后，它正式地定义了五种渐近符号，并介绍了将它们组合使用的约定。第 3 章的其余部分主要是数学符号的展示，更多地是为了确保你使用的符号与本书一致，而不是教授你新的数学概念。

第 4 章进一步探讨了第 2 章中介绍的分治策略。它提供了两个额外的示例，展示了用于相乘方阵的分治算法，其中包括令人惊讶的 Strassen 算法。第 4 章介绍了解决递归关系的方法，这对描述递归算法的运行时间很有用。在代入法中，你猜测一个答案并证明它的正确性。递归树提供了一种生成猜测的方法。第 4 章还介绍了强大的“主方法”技术，你通常可以使用它来解决由分而治之算法引起的递归关系。虽然该章节提供了主定理所依赖的基础定理的证明，但你可以自由地使用主方法，而不必深入研究证明。第 4 章以一些高级主题结束。

第 5 章介绍了概率分析和随机算法。通常，你使用概率分析来确定算法的运行时间，在这种情况下，由于固有的概率分布的存在，相同大小的不同输入可能具有不同的运行时间。在某些情况下，你可能会假设输入符合已知的概率分布，以便对所有可能的输入求平均运行时间。在其他情况下，概率分布不是来自输入，而是来自算法执行过程中所做的随机选择。一个算法的行为不仅由其输入决定，还由随机数生成器产生的值决定，这就是随机算法。你可以使用随机算法来对输入强制施加概率分布，从而确保没有特定的输入会导致性能下降，甚至用于限制允许产生错误结果的算法的错误率。

附录 A-D 包含其他数学材料，在阅读本书时对你会有帮助。你可能在阅读本书之前已经看过附录章节中的大部分内容（尽管我们使用的特定定义和符号约定在某些情况下可能与你之前看到的有所不同），所以你应该将附录视为参考资料。另一方面，你可能尚未看到第一部分的大部分材料。第一部分的所有章节和附录都以教程风格编写。

第一章 算法在计算中的作用

什么是算法？为什么研究算法是值得的？相对于计算机中使用的其他技术，算法的作用是什么？本章将回答这些问题。

1.1 算法

非正式地说，算法是一种明确定义的计算过程，它以某些值或一组值作为输入，并在有限时间内产生某些值或一组值作为输出。因此，算法是一系列计算步骤，将输入转化为输出。

你也可以将算法视为解决明确定义的计算问题的工具。问题的陈述以一般性的方式指定了问题实例的所需输入/输出关系，通常是任意大的问题实例。算法描述了一种特定的计算过程，以实现所有问题实例的输入/输出关系。

举个例子，假设你需要将一组数字按照单调递增的顺序进行排序。这个问题在实践中经常出现，并为引入许多标准的设计技术和分析工具提供了丰富的素材。以下是我们如何正式定义排序问题：

输入：n 个数的一个序列 $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$。

输出：输入序列的一个排列（排序之后的）$\langle a'_1, a'_2, ..., a'_n \rangle$，满足 $\langle a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n \rangle$。

因此，给定输入序列 $\langle 31, 41, 59, 26, 41, 58 \rangle$，一个正确的排序算法将输出序列 $\langle 26, 31, 41, 41, 58, 59 \rangle$。这样的输入序列被称为排序问题的一个实例。一般来说，问题的一个实例包括计算问题解所需的输入（满足问题陈述中规定的约束条件）。

由于许多程序将其作为中间步骤使用，排序是计算机科学中的一项基本操作。因此，你可以选择使用许多优秀的排序算法。哪种算法对于给定的应用程序最佳取决于多个因素，包括待排序项的数量，项的部分排序程度，对项值可能存在的限制，计算机的体系结构以及要使用的存储设备类型：主内存、磁盘，甚至是过时的磁带。

对于一个计算问题的算法，如果对于每个作为输入提供的问题实例，它能在有限的时间内停止计算，并输出问题实例的正确解，那么这个算法是正确的。一个正确的算法解决了给定的计算问题。而一个不正确的算法可能在某些输入实例上根本无法停止计算，或者在停止时给出错误的答案。与你可能期望的相反，如果能够控制错误率，不正确的算法有时也可能是有用的。当我们学习用于查找大素数的算法时，我们将在第 31 章中看到一个具有可控错误率的算法的例子。然而，通常情况下，我们只关注正确的算法。

算法可以用英语、计算机程序甚至硬件设计来进行规定。唯一的要求是规定必须提供对应计算过程的精确描述。

算法解决哪种问题

排序远非唯一一个已经开发出算法的计算问题。（当你看到本书的厚度时，你可能已经怀疑到这一点。）算法的实际应用无处不在，包括以下示例：

- 人类基因组计划在实现以下目标方面取得了巨大进展：鉴定人类 DNA 中大约 3 万个基因，确定构成人类 DNA 的大约 30 亿个化学碱基对的序列，将这些信息存储在数据库中，并开发用于数据分析的工具。每个步骤都需要复杂的算法。虽然这些问题的解决方案超出了本书的范围，但许多解决这些生物学问题的方法使用了本书中介绍的思想，使科学家能够在有效利用资源的同时完成任务。动态规划（如第 14 章所述）是解决其中几个生物学问题的重要技术，特别是涉及确定 DNA 序列之间相似性的问题。这样做可以节省时间（包括人力和机器时间）和金钱，因为实验技术可以提取更多的信息。
- 互联网使全球人民能够快速访问和检索大量信息。借助巧妙的算法，互联网上的网站能够管理和操作这些大量的数据。一些必须使用算法的问题的示例包括找到数据传输的良好路径（解决此类问题的技术出现在第 22 章），以及使用搜索引擎快速找到包含特定信息的网页（相关技术在第 11 章和第 32 章）。
- 电子商务使得商品和服务能够在电子环境下进行协商和交换，并且它依赖于个人信息的隐私，例如信用卡号码、密码和银行对账单。电子商务中使用的核心技术包括公钥加密和数字签名（在第 31 章中介绍），这些技术基于数值算法和数论。

- 制造业和其他商业企业经常需要以最有利的方式分配稀缺资源。石油公司可能希望知道在哪里安置油井以最大化预期利润。政治候选人可能希望确定在哪里花钱购买竞选广告，以最大化赢得选举的机会。航空公司可能希望以最低成本的方式为航班分配机组，确保每个航班得到覆盖，并满足政府对机组排班的规定。互联网服务提供商可能希望确定在哪里投放额外资源，以更有效地为其客户提供服务。所有这些都是可以通过将它们建模为线性规划问题来解决的例子，这是第 29 章讨论的内容。

尽管这些例子的一些细节超出了本书的范围，但我们确实介绍了适用于这些问题和问题领域的基本技术。我们还展示了如何解决许多具体问题，包括以下问题：

- 你手上有一张道路地图，上面标记了相邻交叉口之间的距离，你希望确定从一个交叉口到另一个交叉口的最短路径。即使不允许路径相交，可能的路径数量也可能非常大。你如何选择所有可能路径中最短的一条呢？你可以首先将道路地图（它本身就是实际道路的模型）建模为一个图（我们将在第六部分和附录 B 中介绍）。在这个图中，你希望找到从一个顶点到另一个顶点的最短路径。第 22 章展示了如何高效解决这个问题。
- 给定一个以零件库形式表示的机械设计，其中每个零件可能包含其他零件的实例，按顺序列出零件，使得每个零件都出现在使用它的任何零件之前。如果设计包含 n 个零件，则存在 $n!$ 种可能的顺序，其中 $n!$ 表示阶乘函数。由于阶乘函数的增长速度甚至超过指数函数，你不可能可行地生成每个可能的顺序，然后验证在该顺序中，每个零件都出现在使用它的零件之前（除非只有几个零件）。这个问题是拓扑排序的一个实例，第 20 章展示了如何高效解决这个问题。
- 医生需要确定一张图像是否代表了一个恶性肿瘤或良性肿瘤。医生有很多其他肿瘤的图像可用，其中一些已知是恶性的，一些已知是良性的。恶性肿瘤很可能与其他恶性肿瘤更相似，而良性肿瘤更可能与其他良性肿瘤相似。通过使用聚类算法，如第 33 章所示，医生可以确定哪种结果更有可能。
- 你需要对一个包含文本的大文件进行压缩，以便占用更少的空间。有许多已知的方法可以实现这一目的，包括 “LZW 压缩算法”，它寻找重复的字符序列。第 15 章研究了一种不同的方法，即 “Huffman 编码”，它通过不同长度的位序列对字符进行编码，其中出现频率更高的字符使用较短的位序列进行编码。

这些列表远非详尽无遗（你可能从本书的厚度中推测出来了），但它们展示了许多有趣的算法问题所共有的两个特点：

1. 它们有许多潜在的解决方案，其中绝大多数并不能解决手头的问题。在不显式地检查每个可能的解决方案的情况下，找到一个能够解决问题或是一个 “最佳” 解决方案，可能会带来相当大的挑战。
2. 它们具有实际应用。在上述问题列表中，寻找最短路径提供了最简单的例子。运输公司，如货车或铁路公司，有着在道路或铁路网络中找到最短路径的经济利益，因为选择更短的路径可以降低劳动力和燃料成本。或者，互联网上的路由节点可能需要找到网络中的最短路径，以便快速路由一条消息。或者，一个想要从纽约开车到波士顿的人可能希望使用导航应用程序找到驾驶方向。

并非每个由算法解决的问题都有一个容易确定的候选解集。例如，给定一组表示定期时间间隔取样的信号样本的数值，离散傅里叶变换将时间域转换为频率域。也就是说，它将信号近似为正弦波的加权和，产生不同频率的强度，这些频率的加和近似于取样信号。离散傅里叶变换除了是信号处理的核心之外，还在数据压缩和大多项式和整数乘法中具有应用。第 30 章介绍了这个问题的高效算法，即快速傅里叶变换（通常称为 “FFT”）。该章还概述了一个硬件 FFT 电路的设计。

数据结构

这本书还介绍了几种数据结构。数据结构是一种存储和组织数据的方式，以便于访问和修改。选择适当的数据结构是算法设计的重要组成部分。没有一种单一的数据结构适用于所有目的，因此你应该了解其中几种数据结构的优势和限制。

技术

虽然你可以将本书作为算法的 “菜谱” 使用，但你可能会遇到一些问题，对于这些问题，你无法很容易地找到已发布的算法（例如，本书中的许多练习和问题）。本书将教你算法设计和分析的技巧，以便你能够独立开发算法，验证其正确性，并分析其效率。不同的章节涉及算法问题解决的不同方面。一些章节解决特定的问题，例如在第 9 章中找到中位数和顺序统计量，在第 21 章中计算最小生成树，在第 24 章中确定网络中的最大流。其

他章节介绍了一些技术，例如在第 2 章和第 4 章中的分治法、第 14 章中的动态规划以及第 16 章中的摊还分析。

难题

本书的大部分内容都是关于高效算法的。我们通常衡量算法的效率是通过速度：一个算法产生结果需要多长时间？然而，有一些问题我们并没有找到在合理时间内运行的算法。第 34 章研究了这些问题中的一个有趣子集，被称为 NP 完全问题。

为什么 NP 完全问题很有趣？首先，尽管我们从未找到过 NP 完全问题的高效算法，但也没有人能够证明不存在高效算法。换句话说，没有人知道是否存在适用于 NP 完全问题的高效算法。其次，NP 完全问题集合具有一个显著的特性，即如果其中任何一个问题存在高效算法，那么所有问题都存在高效算法。这种关系使得缺乏高效解决方案更加引人入胜。第三，几个 NP 完全问题与我们已知存在高效算法的问题相似但并不相同。计算机科学家对于问题陈述的微小变化如何导致已知最佳算法的效率发生巨大变化感到着迷。

你应该了解 NP 完全问题，因为它们在实际应用中出现得相当频繁。如果你需要为一个 NP 完全问题设计一个高效算法，你可能会花费很多时间进行无果的搜索。相反，如果你能证明该问题是 NP 完全问题，你可以把时间花在开发高效的近似算法上，也就是一种能够给出较好但不一定是最优解的算法。

举个具体的例子，考虑一个带有中央配送中心的送货公司。每天，公司会在中心配送中心装货，并将货物送到多个地址。在一天结束时，每辆卡车必须回到中心配送中心，以便准备下一天的装货。为了降低成本，公司希望选择一种送货顺序，使得每辆卡车行驶的总距离最小。这个问题就是著名的“旅行推销员问题”，它是一个 NP 完全问题。目前没有已知的高效算法。然而，在一定的假设条件下，我们知道有一些高效算法可以计算出接近最小总距离的解。第 35 章讨论了这种” 近似算法”。

可选计算模型

多年来，我们可以指望处理器的时钟速度以稳定的速度增加。然而，物理限制对不断增长的时钟速度构成了根本性障碍：因为功率密度与时钟速度超线性增加，一旦时钟速度足够高，芯片就有熔化的风险。因此，为了每秒执行更多计算，芯片被设计成不仅包含一个处理” 核心”，而是几个处理核心。我们可以将这些多核计算机类比为在单个芯片上的几个顺序计算机。换句话说，它们是一种” 并行计算机”。为了从多核计算机中获得最佳性能，我们需要设计考虑并行性的算法。第 26 章介绍了一种” 任务并行” 算法模型，它利用了多个处理核心。这个模型在理论和实践的角度都有优势，许多现代并行编程平台也采用了类似于这种并行模型的方法。

本书中的大部分示例假设在算法开始运行时所有输入数据都是可用的。算法设计的大部分工作也是基于这个假设进行的。然而，在许多重要的实际示例中，输入数据实际上是随时间到达的，而算法必须在不知道未来将到达的数据的情况下决定如何进行。在数据中心，作业不断到达和离开，调度算法必须决定何时何地运行作业，而不知道未来将会到达哪些作业。在互联网中，必须根据当前状态路由流量，而不知道未来流量将到达的位置。医院急诊室必须根据患者的病情进行分诊决策，而不知道未来其他患者何时到达以及他们需要哪些治疗。接收输入数据的算法并非一开始就具有所有输入，而是随着时间推移，这些算法被称为在线算法，第 27 章对其进行了研究。

1.2 作为一种技术的算法

如果计算机的速度是无限快的，计算机内存是免费的，你还有理由学习算法吗？答案是肯定的，即使没有其他原因，你仍然希望确保你的解决方法能够终止，并且以正确的答案终止。

如果计算机的速度是无限快的，任何正确的问题解决方法都可以。你可能希望你的实现符合良好的软件工程实践的要求（例如，你的实现应该设计良好并有文档说明），但你通常会选择最容易实现的方法。

当然，计算机可能很快，但它们并不是无限快的。计算时间是一种有限的资源，因此它非常宝贵。虽然有句谚语说“时间就是金钱”，但时间比金钱更宝贵：你可以在花费之后再获得金钱，但一旦时间花费了，就无法回收。内存可能不贵，但它既不是无限的，也不是免费的。你应该选择能够有效利用时间和空间资源的算法。

效率

不同的算法用于解决同一问题时，它们的效率常常有很大差异。这些差异可能比硬件和软件造成的差异更为显著。

以排序问题为例，第 2 章介绍了两种排序算法。第一种称为插入排序，它花费大约 c_1n^2 的时间来排序 n 个元素，其中 c_1 是一个与 n 无关的常数。也就是说，它的时间复杂度大约与 n^2 成正比。第二种归并排序，花费大约 $c_2n\lg n$ 的时间，其中 $\lg n$ 表示 log_2n，c_2 是另一个与 n 无关的常数。插入排序通常具有比归并排序更小的常数因子，因此 $c_1 < c_2$。我们将看到，常数因子对运行时间的影响远远小于对输入规模 n 的依赖。我们将插入排序的运行时间写为 $c_1n \cdot n$，归并排序的运行时间写为 $c_2n \cdot \lg n$。然后我们可以看到，插入排序的运行时间中有一个 n 因子，而归并排序的运行时间中有一个 $\lg n$ 因子，后者要小得多。例如，当 n 为 1000 时，$\lg n$ 大约为 10，当 n 为 1,000,000 时，$\lg n$ 仅约为 20。虽然对于小的输入规模，插入排序通常比归并排序运行更快，但一旦输入规模 n 足够大，归并排序的 $\lg n$ 相对于 n 的优势将远远弥补常数因子的差异。无论 c_1 比 c_2 小多少，总有一个交叉点，在该点之后归并排序更快。

举一个具体的例子，我们比较一个运行插入排序的速度更快的计算机 A 与一个运行归并排序的速度较慢的计算机 B。它们各自需要对一个包含 1 千万个数字的数组进行排序。（尽管 1 千万个数字可能看起来很多，但如果这些数字是 8 字节的整数，那么输入数据大约占用 80 兆字节的内存，即使是廉价的笔记本电脑的内存也能容纳多次。）假设计算机 A 每秒执行 100 亿条指令（比目前最快的任何顺序计算机都要快），而计算机 B 每秒只执行 1000 万条指令（比大多数当代计算机都要慢得多），因此计算机 A 的计算能力比计算机 B 高 1000 倍。为了使差距更加明显，假设世界上最聪明的程序员用机器语言为计算机 A 编写插入排序算法，所得到的代码需要 $2n^2$ 条指令来对 n 个数字进行排序。进一步假设一个普通的程序员使用一个效率低下的编译器，使用高级语言实现了归并排序，所得到的代码需要 $50n\lg n$ 条指令。对于排序 1 千万个数字，计算机 A 需要

$$\frac{2 \cdot (10^7)^2 \text{条指令}}{10^{10} \text{条指令/秒}} = 20,000 \text{秒（大于 5.5 小时）}$$

而计算机 B 需要

$$\frac{50 \cdot 10^7 \lg 10^7 \text{条指令}}{10^{10} \text{条指令/秒}} = 1163 \text{秒（少于 20 分钟）}$$

通过使用一个增长速度较慢的算法，即使使用一个糟糕的编译器，计算机 B 的运行速度也比计算机 A 快了超过 17 倍！当对 1 亿个数字进行排序时，归并排序的优势更加明显：插入排序需要超过 23 天，而归并排序只需要不到 4 小时。虽然 1 亿可能看起来是一个很大的数字，但每半小时就有超过 1 亿次网络搜索，每分钟发送超过 1 亿封电子邮件，一些最小的星系（被称为超紧密矮星系）包含大约 1 亿颗恒星。一般来说，随着问题规模的增加，归并排序的相对优势也会增加。

算法和其它技术

上述例子显示，你应该将算法视为一种技术，就像计算机硬件一样。整个系统的性能取决于选择高效的算法，就像选择快速的硬件一样重要。就像其他计算机技术正在迅速发展一样，算法也在不断进步。考虑到其他先进技术的存在，你可能会想知道算法在当代计算机上是否真的那么重要。例如以下技术：

- 高级的计算机体系结构和制造技术
- 易用的，符合人类使用习惯的用户图形界面（GUI）
- 面向对象技术
- web 开发技术
- 网络技术
- 机器学习
- 以及移动设备技术

答案是肯定的。虽然有些应用程序在应用层面上并不明确要求算法内容（例如一些简单的基于网络的应用程序），但许多应用程序确实需要。例如，考虑一个基于网络的服务，用于确定如何从一个地点到另一个地点的出行方式。它的实现将依赖于快速的硬件、图形用户界面、广域网，可能还依赖于面向对象技术。它还需要算法来执行诸如寻找路线（可能使用最短路径算法）、渲染地图和插值地址等操作。

此外，即使一个应用程序在应用层面上不需要算法内容，也严重依赖于算法。应用程序依赖于快速硬件吗?

硬件设计使用了算法。应用程序依赖于图形用户界面吗？任何 GUI 的设计都依赖于算法。应用程序依赖于网络吗？网络中的路由严重依赖于算法。应用程序是用机器码以外的语言编写的吗？那么它经过了编译器、解释器或汇编器的处理，这些工具都广泛使用算法。算法是当代计算机中大多数技术的核心。

机器学习可以被视为一种在不明确设计算法的情况下执行算法任务的方法，而是通过从数据中推断模式并自动学习解决方案。乍一看，自动化算法设计的机器学习似乎使学习算法变得过时。然而，相反的是真实的。机器学习本身就是一组算法，只是以不同的名称出现。此外，目前看来，机器学习的成功主要集中在那些我们作为人类并不真正了解什么是正确算法的问题上。著名的例子包括计算机视觉和自动语言翻译。对于人类很好理解的算法问题，例如本书中的大多数问题，专门设计用于解决特定问题的高效算法通常比机器学习方法更成功。

数据科学是一个跨学科领域，其目标是从结构化和非结构化数据中提取知识和洞见。数据科学运用统计学、计算机科学和优化等方法。算法的设计和分析对该领域至关重要。数据科学的核心技术与机器学习的技术有很大的重叠，包括本书中介绍的许多算法。

此外，随着计算机容量的不断增加，我们能够解决比以往更大规模的问题。正如我们在上述插入排序和归并排序的比较中看到的那样，算法的效率差异在更大规模的问题上尤为突出。

拥有扎实的算法知识和技巧是定义真正有技术的程序员的一个特征。在现代计算技术的支持下，你可以在不了解太多算法的情况下完成一些任务，但如果你在算法方面有良好的基础，你可以做得更多、更好。

第二章 算法基础

本章将让你熟悉我们在整本书中用来思考算法设计和分析的框架。它是自成体系的，但其中包含了对第 3 章和第 4 章将引入的材料的几个参考。（它还包含了几个求和符号，附录 A 中介绍了如何解决它们。）

我们将从检查插入排序算法开始，以解决第 1 章介绍的排序问题。我们将使用伪代码来指定算法，如果你有计算机编程经验，应该可以理解。我们将看到为什么插入排序能正确排序，并分析其运行时间。该分析引入了一种描述运行时间随待排序项数量增加而增长的符号。在讨论完插入排序后，我们将使用一种称为分治法的方法来开发一种排序算法，称为归并排序。最后，我们将分析归并排序的运行时间。

2.1 插入排序

我们的第一个算法，插入排序，解决的是第一章提出的**排序问题**。

输入：n 个数的一个序列 $\langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$。

输出：输入序列的一个排列（排序之后的）$\langle a'_1, a'_2, ..., a'_n \rangle$，满足 $\langle a'_1 \leq a'_2 \leq \cdots \leq a'_n \rangle$。

要排序的数字也被称为键（keys）。虽然问题的概念是对序列进行排序，但输入以包含 n 个元素的数组的形式呈现。当我们想要对数字进行排序时，通常是因为它们是与其他数据相关联的键，我们称之为卫星数据。键和卫星数据一起形成一条记录。例如，考虑一个包含学生记录的电子表格，其中包含许多关联的数据，如年龄、平均绩点和所修课程数量。其中任何一个数量都可以是一个键，但当电子表格进行排序时，它会将与键关联的记录（即卫星数据）一起移动。在描述排序算法时，我们关注的是键，但重要的是要记住通常存在关联的卫星数据。

在本书中，我们通常将算法描述为以伪代码编写的过程，这些伪代码在许多方面类似于 C、C++、Java、Python 或 JavaScript。（如果我们忽略了你喜欢的编程语言，请谅解，我们无法列出所有编程语言。）如果你已经接触过这些语言中的任何一种，那么你应该很容易理解用伪代码编写的算法。伪代码与真正的代码之间的区别在于，在伪代码中，我们采用最清晰简洁的表达方法来指定给定的算法。有时候，最清晰的方法是使用英语，因此如果你在类似于真正的代码的部分中遇到嵌入的英语短语或句子，不要感到惊讶。伪代码和真正的代码之间的另一个区别是，为了更简洁地传达算法的本质，伪代码通常忽略了软件工程的某些方面，如数据抽象、模块化和错误处理。

我们从插入排序开始，这是一种对少量元素进行排序的高效算法。插入排序的工作方式类似于整理一手扑克牌。首先，左手为空，将扑克牌堆放在桌子上。从扑克牌堆中拿起第一张牌，用左手拿住。然后，用右手从牌堆中逐张取出一张牌，并将其插入到左手的正确位置。如图2.1所示，你可以通过将每张牌与已在左手中的每张牌进行比较来找到牌的正确位置，从右向左移动。一旦你在左手中看到一张其值小于或等于右手中的牌的牌，就将右手中的牌插入到左手中该牌的右侧。如果左手中的所有牌的值都大于右手中的牌，则将此牌放在左手中最左边的位置。始终保持左手中的牌是排序的，而这些牌最初是放在桌子上的牌堆的顶部牌。

插入排序的伪代码在下一页上给出，它被称为 INSERTION-SORT 过程。它接受两个参数：包含要排序的值的数组和要排序的值的数量。这些值占据数组的位置，我们用表示。当 INSERTION-SORT 过程结束时，数组包含原始的值，但按排序顺序排列。

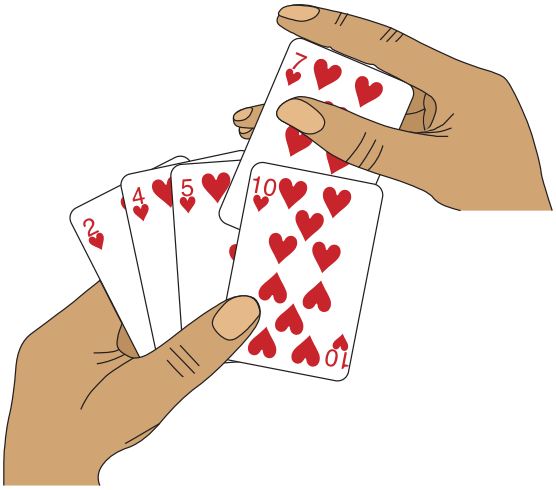


图 2.1: 使用插入排序对手中的牌进行排序

```
INSERTION-SORT(A, n)
1  for i = 2 to n
2      key = A[i]
3      // Insert A[i] into the sorted subarray A[1 : i − 1].
4      j = i − 1
5      while j > 0 and A[j] > key
6          A[j + 1] = A[j]
7          j = j − 1
8      A[j + 1] = key
```

循环不变量和插入排序的正确性

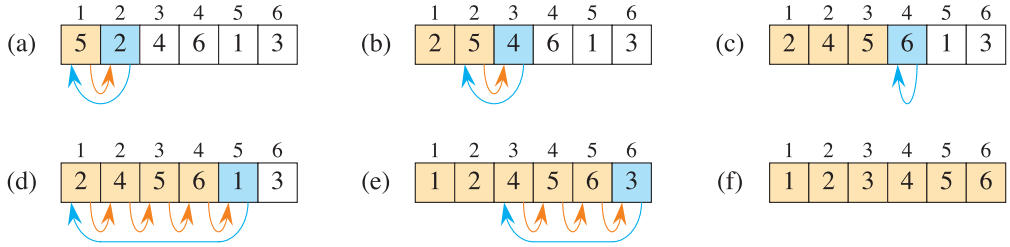


图 2.2: INSERTION-SORT(A, n) 的操作，其中 A 最初包含序列 $langle5, 2, 4, 6, 1, 3\rangle$ 以及有 $n = 6$。数组索引出现在矩形上方，数组位置中存储的值出现在矩形内部。(a)-(e) 行 1-8 的 **for** 循环迭代。在每次迭代中，蓝色矩形中存放着从 $A[i]$ 中取出的 key，该 key 与行 5 中其左边的棕色矩形中的值进行比较。橙色箭头显示在行 6 中向右移动一个位置的数组值，蓝色箭头指示 key 在行 8 中移动到的位置。(f) 最终排序的数组。

图2.2展示了该算法如何对初始序列 $\langle 5, 2, 4, 6, 1, 3\rangle$ 的数组 A 进行排序。索引 i 表示正在插入到手中的“当前卡片”。在每次由 i 索引的 **for** 循环的开始时，子数组（数组的连续部分）$A[1 : i - 1]$（即 $A[1]$ 到 $A[i - 1]$）构成当前已排序的手牌，而剩余的子数组 $A[i + 1 : n]$（元素 $A[i + 1]$ 到 $A[n]$）对应于仍留在桌上的牌堆。实际上，元素 $A[1 : i - 1]$ 是最初在位置 1 到 $i - 1$ 上的元素，但现在以排序顺序排列。我们将 $A[1 : i - 1]$ 的这些属性正式陈述为一个循环不变量：

> 在第 1-8 行的 **for** 循环的每次迭代开始时，子数组 $A[1 : i - 1]$ 由原来在 $A[1 : i - 1]$ 中的元素组成，但已经按序排列。

循环不变量主要用来帮助我们理解算法的正确性。关于循环不变式，我们必须证明三条性质：

初始化：循环的第一次迭代之前，它为真。

保持：如果循环的某次迭代之前它为真，那么下次迭代之前它仍为真。

终止：在循环终止时，循环不变量（通常会包含循环终止的原因）为我们提供一个有用的性质，该性质有助于证明算法是正确的。

当前两条性质成立时，在循环的每次迭代之前循环不变量为真。（当然，为了证明循环不变量在每次迭代之前保持为真，我们完全可以使用不同于循环不变量本身的其他已证实的事实。）注意，这类似于数学归纳法，其中为了证明某条性质成立，需要证明一个基本情况和一个归纳步骤。这里，证明第一次迭代之前循环不变量成立对应于基本情况，证明从一次迭代到下一次迭代不变式成立对应于归纳步骤。

第三条性质也许是最重要的，因为我们将使用循环不变量来证明正确性。通常，我们和导致循环终止的条件一起使用循环不变量。终止性不同于我们通常使用数学归纳法的做法，在归纳法中，归纳步骤是无限地使用的，这里当循环终止时，停止“归纳”。

让我们看看对于插入排序，如何证明这些性质成立。

初始化：首先证明在第一次循环迭代之前 (当 $i = 2$ 时)，循环不变量成立。所以子数组 $A[1 : i-1]$ 仅由单个元素 $A[1]$ 组成，实际上就是 $A[1]$ 中原来的元素。而且该子数组是排序好的 (毕竟，只包含一个元素的子数组怎么样才不是已经排好序的呢？)。这表明第一次循环迭代之前循环不变量成立。

保持：其次处理第二条性质：证明每次迭代保持循环不变量。非形式化地，**for** 循环体的第 4-7 行将 $A[i-1]$、$A[i-2]$、$A[i-3]$ 等向右移动一个位置，直到找到 $A[i]$ 的适当位置，第 8 行将 $A[i]$ 的值插入该位置。这时子数组 $A[1 : i]$ 由原来在 $A[1 : i]$ 中的元素组成，但已按序排列。那么对 **for** 循环的下一次迭代增加 i 将保持循环不变量。

第二条性质的一种更形式化的处理要求我们对第 5-7 行的 **while** 循环给出并证明一个循环不变量。然而，这里我们不愿陷入形式主义的困境，而是依赖以上非形式化的分析来证明第二条性质对外层循环成立。

终止：最后研究在循环终止时发生了什么。循环变量 i 从 2 开始，每次迭代增加 1。一旦第 1 行代码的 i 的值超过了 n，循环就将终止。也就是循环会在 $i = n + 1$ 时终止。在循环不变式的表述中将 i 用 $n + 1$ 代替，我们有：子数组 $A[1 : n]$ 由原来在 $A[1 : n]$ 中的元素组成，但已按序排列。注意到，子数组 $A[1 : n]$ 就是整个数组，我们推断出整个数组已排序。因此算法正确。

在本章后面以及其他章中，我们将采用这种循环不变式的方法来证明算法的正确性。

伪代码中的一些约定

- 缩进表示块结构。例如，第 1 行开始的 **for** 循环体由第 2-8 行组成，第 5 行开始的 **while** 循环体包含第 6-7 行但不包含第 8 行。我们的缩进风格也适用于 **if-else** 语句。采用缩进来代替常规的块结构标志，如 **begin** 和 **end** 语句，可以大大提高代码的清晰性。
- **while**、**for** 与 **repeat-until** 等循环结构以及 **if-else** 等条件结构与 C、C++、Java、Python 和 JavaScript 中的那些结构具有类似的解释。不像某些出现于 C++、Java 和 JavaScript 中的情况，本书中在退出循环后，循环计数器保持其值。因此，紧接在一个 **for** 循环后，循环计数器的值就是第一个超出 **for** 循环界限的那个值。在证明插入排序的正确性时，我们使用了该性质。第 1 行的 **for** 循环头为 **for** $i = 2$ **to** n，所以，当该循环终止时，$i = n + 1$。当一个 **for** 循环每次迭代增加其循环计数器时，我们使用关键词 **to**。当一个 **for** 循环每次迭代减少其循环计数器时，我们使用关键词 **downto** 。当循环计数器以大于 1 的一个量改变时，该改变量跟在可选关键词 **by** 之后。
- 符号“//”表示该行后面部分是个注释。
- 变量（例如 i，j 和 key）都是给定过程的局部变量。我们在不明确说明的情况下，不使用全局变量。
- 我们通过在方括号中指定数组名后跟索引来访问数组元素。例如，$A[i]$ 表示数组 A 的第 i 个元素。
  尽管许多编程语言对数组采用从 0 开始的索引（0 是最小有效索引），但我们选择最清晰易懂的索引方案供人类读者理解。因为人们通常从 1 开始计数，而不是从 0 开始，所以本书中的大多数（但不是全部）数组使用从 1 开始的索引。为了明确一个特定算法是基于 0 索引还是 1 索引，我们会明确指定数组的边界。如果你正在使用一个我们用 1 索引指定的算法，但你正在使用强制使用 0 索引的编程语言（如 C、C++、Java、Python 或 JavaScript）编写代码，那么你应该获得可以适应的荣誉。你可以选择始终从每个索引中减去 1，

或者为每个数组分配一个额外的位置，并忽略位置 0。

符号 ":" 表示子数组。因此，$A[i:j]$ 表示由元素 $A[i], A[i+1], \cdots, A[j]$ 组成的 A 的子数组。我们还使用这个符号来表示数组的边界，就像我们之前讨论数组 $A[1:n]$ 时所做的那样。

- 通常，我们将复合数据组织成对象，对象由属性组成。我们使用许多面向对象编程语言中的语法来访问特定的属性：对象名称，后跟一个点，再后跟属性名称。例如，如果一个对象 x 具有属性 f，我们用 $x.f$ 表示该属性。

  我们将表示数组或对象的变量视为指向表示数组或对象的数据的指针（在某些编程语言中称为引用）。对于对象 x 的所有属性 f，将 $y = x$ 设置后，$y.f$ 将等于 $x.f$。此外，如果我们现在设置 $x.f = 3$，那么之后不仅 $x.f$ 等于 3，$y.f$ 也等于 3。换句话说，在赋值 $y = x$ 之后，x 和 y 指向同一个对象。这种处理数组和对象的方式与大多数现代编程语言一致。

  我们的属性表示法可以"级联"。例如，假设属性 f 本身是指向某种具有属性 g 的对象的指针。那么表示法 $x.f.g$ 隐式地被表示为 $(x.f).g$。换句话说，如果我们已经将 $y = x.f$ 赋值，那么 $x.f.g$ 和 $y.g$ 是相同的。

  有时指针可能不指向任何对象。在这种情况下，我们给它一个特殊的值 NIL。
- 我们通过值传递方式将参数传递给过程：被调用的过程接收到参数的自己副本，如果它对参数进行赋值，调用过程不会看到这个变化。当对象被传递时，表示对象的数据的指针被复制，但对象的属性不会被复制。例如，如果 x 是一个被调用过程的参数，被调用过程中的赋值操作 $x = y$ 对调用过程是不可见的。然而，如果调用过程与 x 指向同一个对象，则赋值操作 $x.f = 3$ 是可见的。类似地，数组是通过指针传递的，因此传递的是数组的指针而不是整个数组，对单个数组元素的更改对调用过程是可见的。再次强调，大多数当代编程语言都是以这种方式工作的。
- **return** 语句立即将控制权转回调用过程中的调用点。大多数 **return** 语句还接受一个值作为返回给调用者的结果。我们的伪代码与许多编程语言不同之处在于，我们允许在单个 **return** 语句中返回多个值，而不需要创建对象将它们打包在一起。
- 布尔运算符 "and" 和 "or" 具有短路求值的特性。也就是说，对于表达式 "x and y"，首先求值 x。如果 x 的值为 **FALSE**，则整个表达式无法为 **TRUE**，因此不会对 y 进行求值。另一方面，如果 x 的值为 **TRUE**，则必须对 y 进行求值以确定整个表达式的值。类似地，在表达式 "x or y" 中，只有当 x 的值为 **FALSE** 时才会对 y 进行求值。短路求值的运算符使我们能够编写布尔表达式，例如 "x != NIL and $x.f = y$"，而无需担心当 x 为 NIL 时对 "$x.f$" 的求值会发生什么。
- 关键字 **error** 表示发生了错误，因为调用过程的条件不满足，所以过程立即终止。调用过程负责处理错误，因此我们不指定要采取的具体操作。

2.2 分析算法

分析算法的含义已经演变为预测算法所需的资源。你可能考虑到的资源包括内存、通信带宽或能量消耗。然而，最常见的情况是你会希望衡量计算时间。如果你分析一个问题的多个候选算法，你可以找出最高效的算法。可能会有不止一个可行的候选算法，但在这个过程中通常可以排除一些较差的算法。

在你分析算法之前，你需要一个它运行的技术模型，包括该技术的资源以及一种表示它们成本的方法。本书的大部分内容假设计算机程序的实现技术是通用的单处理器随机访问机（RAM）模型，同时假设算法以计算机程序的形式实现。在 RAM 模型中，指令一个接一个地执行，没有并发操作。RAM 模型假设每条指令的执行时间与其他指令相同，并且每次数据访问（使用变量的值或存储到变量中）的时间与其他数据访问相同。换句话说，在 RAM 模型中，每条指令或数据访问都需要固定的时间，即使是对数组的索引操作也是如此。

严格来说，我们应该准确地定义 RAM 模型中的指令及其成本。然而，这样做将变得冗长，并且对算法设计和分析的洞察力帮助不大。然而，我们必须小心不要滥用 RAM 模型。例如，如果 RAM 模型中有一个排序的指令，那么你可以在一步中完成排序。这样的 RAM 是不现实的，因为真实计算机中不存在这样的指令。因此，我们的指导是真实计算机的设计方式。RAM 模型包含在真实计算机中常见的指令：算术运算（如加法、减法、乘法、除法、取余、取整、取上整）、数据移动（加载、存储、复制）和控制（条件和无条件分支、子程序调用和

返回）。

RAM 模型中的数据类型包括整数、浮点数（用于存储实数近似值）和字符。真实计算机通常没有单独的数据类型来表示布尔值 TRUE 和 FALSE。相反，它们经常测试一个整数值是否为 0（FALSE）或非零（TRUE），就像在 C 语言中一样。尽管在本书中我们通常不关心浮点数的精度（许多数字在浮点数中无法精确表示），但对于大多数应用程序来说，精度至关重要。我们还假设每个数据字的位数有一个限制。例如，在处理大小为 n 的输入时，我们通常假设整数由 $c \log 2n$ 位表示，其中 $c \geq 1$ 为某个常数。我们要求 $c \geq 1$ 以便每个字可以容纳 n 的值，使我们能够索引各个输入元素，并限制 c 为一个常数，以避免字大小任意增长。（如果字大小可以任意增长，我们可以在一个字中存储大量数据，并在常数时间内对其进行操作，这是一个不现实的场景。）

实际计算机包含未在上述列表中列出的指令，这些指令在 RAM 模型中代表了一个灰色区域。例如，指数运算是否是一个常数时间的指令？一般情况下，不是的：计算 x^n，其中 x 和 n 是一般整数，通常需要时间与 n 的对数成比例（参见第 934 页上的方程式（31.34）），而且你必须担心结果是否适合计算机字中。然而，如果 n 是一个精确的 2 的幂，指数运算通常可以视为一个常数时间的操作。许多计算机具有” 左移” 指令，该指令在常数时间内将整数的位向左移动 n 位。在大多数计算机中，将整数的位左移 1 位等同于乘以 2，因此将位左移 n 位等同于乘以 2^n。因此，只要 n 不超过计算机字的位数，这些计算机可以通过将整数 1 左移 n 位来在 1 个常数时间指令内计算 2^n。我们将尽量避免 RAM 模型中的这种灰色区域，并将计算 2^n 和乘以 2^n 视为常数时间的操作，前提是结果足够小以适应计算机字中。

RAM 模型没有考虑到在当代计算机中普遍存在的内存层次结构。它既没有模拟缓存，也没有模拟虚拟内存。几种其他计算模型试图考虑内存层次效应，这在实际机器上的真实程序中有时非常重要。本书的第 11.5 节和一些问题考察了内存层次效应，但在大部分情况下，本书的分析并不考虑这些效应。包含内存层次结构的模型比 RAM 模型复杂得多，因此使用起来可能会很困难。此外，RAM 模型的分析通常对实际机器上的性能预测非常准确。

虽然通常在 RAM 模型中分析算法是直接的，但有时也可能很具有挑战性。你可能需要运用数学工具，如组合学、概率论、代数灵活性以及识别公式中最重要项的能力。因为算法可能对每个可能的输入表现不同，我们需要一种方式来用简单易懂的公式总结其行为。

插入排序的分析

插入排序（INSERTION-SORT）过程需要多长时间？一种方法是在你的计算机上运行它并计时运行时间。当然，你首先需要用一种真实的编程语言实现它，因为无法直接运行我们的伪代码。这样的定时测试会告诉你什么？你将了解插入排序在你特定的计算机上、特定的输入下、你创建的特定实现中、你运行的特定编译器或解释器、你链接的特定库以及与你的定时测试同时运行的特定后台任务（例如检查网络上的传入信息）下运行所需的时间。如果你再次在相同的输入上在你的计算机上运行插入排序，你甚至可能得到不同的定时结果。从仅在一个计算机上的一种插入排序实现以及一个输入上运行，如果你给它一个不同的输入、在不同的计算机上运行它，或者用不同的编程语言实现它，你能确定有关插入排序运行时间的什么呢？并不多。我们需要一种预测的方法，能够根据新的输入来预测插入排序所需的时间。

与其计时运行插入排序，甚至进行多次运行，我们可以通过分析算法本身来确定所需时间。我们将研究它执行伪代码的次数以及每行伪代码的运行时间。我们首先会得出一个精确但复杂的运行时间公式。然后，我们将使用一种方便的符号表示法，提取公式的重要部分，以便比较解决同一问题的不同算法的运行时间。

我们如何分析插入排序？首先，让我们承认运行时间取决于输入。对于排序一千个数字所需的时间比排序三个数字所需的时间长，并不令人感到惊讶。此外，相同大小的两个输入数组的插入排序可能需要不同的时间，这取决于它们的排序程度。尽管运行时间可能取决于输入的许多特征，但我们将重点关注已被证明具有最大影响的特征，即输入的大小，并将程序的运行时间描述为输入大小的函数。为此，我们需要更仔细地定义” 运行时间” 和” 输入大小” 这些术语。我们还需要明确我们是在讨论引发最坏情况行为、最好情况行为还是其他情况下的运行时间。

输入大小的最佳概念取决于所研究的问题。对于许多问题，例如排序或计算离散傅里叶变换，最自然的度量方式是输入中项目的数量–例如，正在排序的项目数 n。对于许多其他问题，例如两个整数的乘法，输入大小的最佳度量是表示输入所需的总位数（采用普通二进制表示法）。有时，用一个以上的数字描述输入的大小更加

合适。例如，如果算法的输入是一个图形，通常通过图中顶点的数量和边的数量来表征输入的大小。我们将在研究的每个问题中指明使用的输入大小度量方式。

算法在特定输入上的运行时间是执行的指令和数据访问次数。我们应该如何计算这些开销应该独立于任何特定计算机，但在 RAM 模型的框架内进行。暂时采用以下观点。执行我们的伪代码的每行都需要恒定的时间。一行可能比另一行需要更多或更少的时间，但我们假设第 k 行的每次执行都需要 c_k 的时间，其中 c_k 是一个常数。这个观点与 RAM 模型一致，也反映了伪代码在大多数实际计算机上的实现方式。

让我们分析插入排序过程。如前所述，我们将首先设计一个精确的公式，其中使用了输入大小和所有语句的成本 c_k。然而，这个公式可能会变得混乱。然后，我们将切换到一种更简洁、更易于使用的简化符号表示法。这种简化表示法清楚地说明了如何比较算法的运行时间，特别是随着输入大小的增加。

为了分析 INSERTION-SORT 过程，让我们在接下来的页面上查看它，记录每个语句的时间成本和每个语句的执行次数。对于每个 $i = 2, 3, \cdots, n$，设 t_i 表示在第 5 行的 while 循环测试中对于该 i 值执行的次数。当 for 循环或 while 循环以通常的方式退出（因为循环头中的测试结果为 FALSE），测试的执行次数比循环体多一次。由于注释不是可执行语句，请假设它们不占用时间。

INSERTION-SORT(A, n)		*cost*	*times*
1	**for** $i = 2$ **to** n	c_1	n
2	$key = A[i]$	c_2	$n-1$
3	// Insert $A[i]$ into the sorted subarray $A[1:i-1]$.	0	$n-1$
4	$j = i-1$	c_4	$n-1$
5	**while** $j > 0$ and $A[j] > key$	c_5	$\sum_{i=2}^{n} t_i$
6	$A[j+1] = A[j]$	c_6	$\sum_{i=2}^{n}(t_i-1)$
7	$j = j-1$	c_7	$\sum_{i=2}^{n}(t_i-1)$
8	$A[j+1] = key$	c_8	$n-1$

算法的运行时间是每个语句执行时间的总和。一个执行需要 c_k 步并且执行 m 次的语句对总运行时间的贡献为 $c_k m$。我们通常用 $T(n)$ 表示算法在大小为 n 的输入上的运行时间。要计算 $T(n)$，即 INSERTION-SORT 在给定输入值上的运行时间，我们将成本和次数两列的乘积相加，得到

$$\begin{aligned} T(n) =& c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{i=2}^{n} t_i + c_6 \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1) \\ &+ c_7 \sum_{i=2}^{n} (t_i - 1) + c_8(n-1). \end{aligned}$$

即使对于给定大小的输入，算法的运行时间可能取决于给定的该大小的输入。例如，在 INSERTION-SORT 中，最佳情况是数组已经排序好。在这种情况下，每次执行第 5 行时，key 的值（即最初在 $A[i]$ 中的值）已经大于或等于 $A[1:i-1]$ 中的所有值，因此在第 5 行的第一次测试中，循环将总是退出。因此，我们有 $t_i = 1$ 对于 $i = 2, 3, \cdots, n$，最佳情况的运行时间由以下公式给出

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\, n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

我们可以将这个运行时间表示为 $an+b$，其中 a 和 b 是依赖于语句成本 c_k 的常数（其中 $a = c_1+c_2+c_4+c_5+c_8$，$b = c_2 + c_4 + c_5 + c_8$）。因此，运行时间是 n 的线性函数。

最坏情况出现在数组按逆序排列的情况下，即初始时按降序排列。该过程必须将每个元素 $A[i]$ 与整个已排序子数组 $A[1:i-1]$ 中的每个元素进行比较，因此对于 $i = 2, 3, \cdots, n$，$t_i = i$。（在第 5 行，该过程发现每次 $A[j] > key$，并且 while 循环仅在 j 达到 0 时退出。）注意到

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} i &= \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) - 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - 1\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} (i-1) &= \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\end{aligned}$$

我们可以看到插入排序在最坏情况下的运行时间是

$$\begin{aligned}T(n) =& c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\ &+ c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_8(n-1) \\ =& \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}\right) n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8\right) n \\ &- (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\end{aligned} \tag{2.2}$$

我们可以将最坏情况的运行时间表示为 $an^2 + bn + c$，常数 a，b 和 c 依赖于语句代价 c_k（现在，$a = c_5/2 + c_6/2 + c_7/2$，$b = c_1 + c_2 + c_4 + c_5/2 - c_6/2 - c_7/2 + c_8$ 以及 $c = -(c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$）。这个运行时间是 n 的平方函数。

一般来说，对于给定输入，插入排序的运行时间是固定的，尽管我们可能会看到某些有趣的“随机”算法，对于这些算法而言，对于固定的输入，算法的行为可能会变化。

最坏情况和平均情况的分析

我们对插入排序的分析同时考虑了最好情况（即输入数组已经排序）和最坏情况（即输入数组按逆序排列）。然而，在本书的剩余部分，我们通常（但不总是）只关注寻找最坏情况的运行时间，即任意大小为 n 的输入的最长运行时间。为什么呢？以下是三个原因：

- 算法的最坏情况运行时间为任何输入提供了一个运行时间的上界。如果你知道最坏情况运行时间，那么你可以确保算法永远不会花费更长的时间。你不需要对运行时间进行猜测，并希望它不会变得更糟。这一特性对于实时计算尤其重要，因为在实时计算中，操作必须在截止日期之前完成。
- 对于某些算法，最坏情况经常发生。例如，在搜索数据库中的特定信息时，搜索算法的最坏情况通常发生在数据库中不存在该信息的情况下。在某些应用中，对不存在信息的搜索可能很频繁。
- ”平均情况”通常与最坏情况差不多糟糕。假设你在一个包含 n 个随机选择数字的数组上运行插入排序。确定将元素 $A[i]$ 插入子数组 $A[1:i-1]$ 中的位置需要多长时间？平均而言，$A[1:i-1]$ 的一半元素小于 $A[i]$，另一半元素大于 $A[i]$。因此，平均而言，$A[i]$ 与子数组 $A[1:i-1]$ 的一半元素进行比较，所以 t_i 大约为 $i/2$。因此，结果的平均情况运行时间是输入规模的二次函数，就像最坏情况运行时间一样。

在某些特定情况下，我们对算法的平均情况运行时间感兴趣。我们将在本书中看到概率分析技术应用于各种算法。平均情况分析的范围有限，因为对于特定问题的“平均”输入可能不明确。通常，我们假设给定大小的所有输入等可能出现。实际上，这个假设可能被违反，但我们有时可以使用随机化算法，通过进行随机选择来进行概率分析并得出预期的运行时间。我们在第 5 章和其他几个后续章节中更详细地探讨随机化算法。

增长量级

为了简化对 INSERTION-SORT 过程的分析，我们使用了一些简化的抽象概念。首先，我们忽略了每个语句的实际成本，而使用常数 c_k 来表示这些成本。然而，方程 (2.1) 和 (2.2) 中的最佳情况和最坏情况的运行时间相当复杂。这些表达式中的常数提供了比我们实际需要的更多细节。这就是为什么我们还将最佳情况的运行时间表

示为 $an+b$，其中 a 和 b 是依赖于语句成本 c_k 的常数，以及为什么我们将最坏情况的运行时间表示为 an^2+bn+c，其中 a，b 和 c 是依赖于语句成本的常数。因此，我们不仅忽略了实际的语句成本，还忽略了抽象的成本 c_k。

现在让我们再做一个简化的抽象：我们真正关心的是运行时间的增长率或阶数。因此，我们只考虑公式的主要项（例如，an^2），因为对于较大的 n 值来说，次要项相对不重要。我们还忽略主要项的常数系数，因为对于较大的输入，常数因子比增长率在确定计算效率时要不重要。对于插入排序的最坏情况运行时间，当我们忽略次要项和主要项的常数系数时，只剩下主要项的 n^2 因子。这个因子 n^2 是运行时间中最重要的部分。例如，假设一个算法在特定机器上在大小为 n 的输入上花费 $n^2/100+100n+17$ 微秒。尽管 n^2 项的系数 $1/100$ 和 n 项的系数 100 相差了四个数量级，但是一旦 n 超过 10000，$n^2/100$ 项就主导了 $100n$ 项。尽管 10000 可能看起来很大，但它比一个普通城镇的人口要小。许多现实世界的问题具有更大的输入规模。

为了突出运行时间的增长率，我们使用了特殊的符号，使用希腊字母 Θ（theta）。我们表示插入排序的最坏情况运行时间为 $\Theta(n^2)$。我们还表示插入排序的最好情况运行时间为 $\Theta(n)$。暂时将 Θ 记号视为表示” 当 n 很大时大致成正比” 的方式，因此 $\Theta(n^2)$ 表示” 当 n 很大时大致与 n^2 成正比”，$\Theta(n)$ 表示” 当 n 很大时大致与 n 成正比”。我们将在本章中非正式地使用 Θ 记号，并在第 3 章中精确定义它。

通常情况下，如果一个算法的最坏情况运行时间具有较低的增长阶数，我们会认为该算法比另一个算法更高效。由于常数因子和次要项的影响，具有较高增长阶数的算法在小规模输入上可能比具有较低增长阶数的算法花费更少的时间。但是在足够大的输入上，一个最坏情况运行时间为 $\Theta(n^2)$ 的算法，例如，其最坏情况下的时间比一个最坏情况运行时间为 $\Theta(n^3)$ 的算法更少。无论 Θ-notation 中隐藏了哪些常数，总是存在某个数 n_0，使得对于所有输入大小 $n \geq n_0$，$\Theta(n^2)$ 算法在最坏情况下击败 $\Theta(n^3)$ 算法。

2.3 设计算法

你可以选择从广泛的算法设计技术中进行选择。插入排序使用增量方法：对于每个元素 $A[i]$，将其插入到子数组 $A[1:i]$ 的适当位置，已经对子数组 $A[1:i-1]$ 进行了排序。

本节介绍了另一种设计方法，称为 “分治法”，我们将在第 4 章中详细探讨。我们将使用分治法设计一个排序算法，其最坏情况运行时间远远小于插入排序。使用遵循分治法的算法的一个优点是，分析其运行时间通常是直接的，使用的技术我们将在第 4 章中探讨。

2.3.1 分治策略

许多有用的算法具有递归的结构：为了解决一个给定的问题，它们会递归（调用自身）一次或多次来处理紧密相关的子问题。这些算法通常遵循分治法：它们将问题分解为几个与原始问题类似但规模较小的子问题，递归地解决这些子问题，然后将这些解合并以创建原始问题的解决方案。

在分治法中，如果问题足够小（基本情况），则直接解决它而不进行递归。否则（递归情况），你执行三个特定的步骤：

分解原问题为若干子问题，这些子问题是原问题的规模较小的实例。

解决这些子问题，递归地求解各子问题。然而，若子问题的规模足够小，则直接求解。

合并这些子问题的解成原问题的解。

归并排序算法严格遵照了以上的分治策略。在每一个步骤，归并排序会对子数组 $A[p:r]$ 进行排序。归并排序从整个数组 $A[1:n]$ 开始，一直递归下降到越来越小的子数组。下面就是归并排序的操作过程：

分解：将待排序的子数组 $A[p:r]$ 分成两个相邻的子数组，每个子数组的大小都是原数组的一半。为此，计算子数组 $A[p:r]$ 的中点 q（取 p 和 r 的平均值），并将 $A[p:r]$ 分成子数组 $A[p:q]$ 和 $A[q+1:r]$。

解决：通过使用归并排序对两个子数组 $A[p:q]$ 和 $A[q+1:r]$ 进行递归排序来征服。

合并：通过将两个已排序的子数组 $A[p:q]$ 和 $A[q+1:r]$ 合并回 $A[p:r]$，得到排序好的答案。

当待排序的子数组 $A[p:r]$ 仅包含 1 个元素时，即 p 等于 r 时，递归 “bottoms out”（到达基本情况）。正如我们在 INSERTION-SORT 循环不变式的初始化参数中指出的那样，只包含一个元素的子数组总是有序的。

归并排序算法的关键操作发生在“合并”步骤中，即合并两个相邻的已排序子数组。合并操作是由下一页上的辅助过程 MERGE(A, p, q, r) 执行的，其中 A 是一个数组，p、q 和 r 是数组的索引，满足 $p \le q < r$。该过程假设相邻的子数组 $A[p:q]$ 和 $A[q+1:r]$ 已经递归地排序好了。它将这两个已排序的子数组合并成一个单独的已排序子数组，取代当前的子数组 $A[p:r]$。

为了理解 MERGE 过程的工作原理，让我们回到我们之前提到的纸牌游戏的情景。假设你在桌子上有两堆面朝上的纸牌。每堆纸牌都是有序的，最小值的牌在顶部。你希望将这两堆纸牌合并成一堆有序的纸牌，放在桌子上面朝下。基本步骤包括选择两堆面朝上纸牌中较小的一张牌，将其从所属的堆中移除（暴露出新的顶部牌），然后将这张牌面朝下放在输出堆上。重复这个步骤，直到其中一堆纸牌为空，这时你可以将剩下的一堆纸牌整体翻转并放在输出堆上。

我们来思考一下合并两堆有序纸牌需要多长时间。每个基本步骤都需要固定的时间，因为你只是比较两张顶部的纸牌。如果你开始时的两堆有序纸牌分别有 $n/2$ 张牌，那么基本步骤的数量至少为 $n/2$（因为在其中一堆被清空时，每张纸牌都被发现比另一堆的某张纸牌小），最多为 n（实际上最多为 $n-1$，因为经过 $n-1$ 个基本步骤后，其中一堆必定为空）。每个基本步骤花费固定的时间，而总的基本步骤数量在 $n/2$ 和 n 之间，因此我们可以说合并操作的时间与 n 大致成正比。也就是说，合并操作的时间复杂度为 $\Theta(n)$。

```
MERGE(A, p, q, r)
 1  n_L = q − p + 1          // length of A[p : q]
 2  n_R = r − q              // length of A[q + 1 : r]
 3  let L[0 : n_L − 1] and R[0 : n_R − 1] be new arrays
 4  for i = 0 to n_L − 1     // copy A[p : q] into L[0 : n_L − 1]
 5      L[i] = A[p + i]
 6  for j = 0 to n_R − 1     // copy A[q + 1 : r] into R[0 : n_R − 1]
 7      R[j] = A[q + j + 1]
 8  i = 0                    // i indexes the smallest remaining element in L
 9  j = 0                    // j indexes the smallest remaining element in R
10  k = p                    // k indexes the location in A to fill
11  // As long as each of the arrays L and R contains an unmerged element,
    //      copy the smallest unmerged element back into A[p : r].
12  while i < n_L and j < n_R
13      if L[i] ≤ R[j]
14          A[k] = L[i]
15          i = i + 1
16      else A[k] = R[j]
17          j = j + 1
18      k = k + 1
19  // Having gone through one of L and R entirely, copy the
    //      remainder of the other to the end of A[p : r].
20  while i < n_L
21      A[k] = L[i]
22      i = i + 1
23      k = k + 1
24  while j < n_R
25      A[k] = R[j]
26      j = j + 1
27      k = k + 1
```

具体来说，MERGE 过程的工作步骤如下。它将两个子数组 $A[p:q]$ 和 $A[q+1:r]$ 复制到临时数组 L 和 R（”left” 和”right”），然后将 L 和 R 中的值合并回 $A[p:r]$ 中。第 1 行和第 2 行计算子数组 $A[p:q]$ 和 $A[q+1:r]$ 的长度 n_L 和 n_R，然后第 3 行创建具有长度 n_L 和 n_R 的数组 $L[0:n_L-1]$ 和 $R[0:n_R-1]$。第 4 至第 5 行的 for

循环将子数组 $A[p:q]$ 复制到 L，第 6 至第 7 行的 for 循环将子数组 $A[q+1:r]$ 复制到 R。

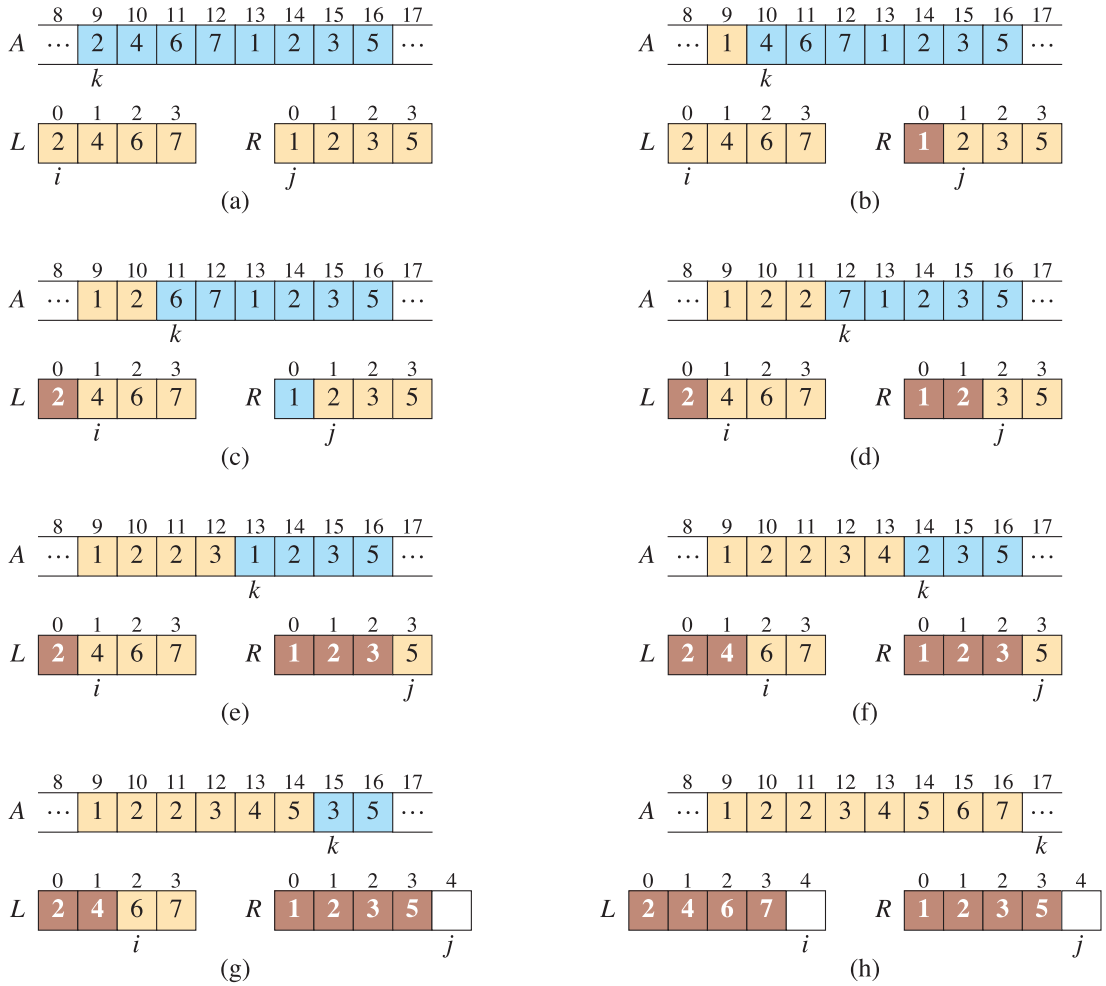


图 2.3: 在调用 MERGE$(A, 9, 12, 16)$ 时，循环行 8-18 中的操作是，当子数组 $A[9:16]$ 包含值 $\langle 2,4,6,7,1,2,3,5\rangle$ 时进行的。在分配和复制到数组 L 和 R 之后，数组 L 包含 $\langle 2,4,6,7\rangle$，数组 R 包含 $\langle 1,2,3,5\rangle$。A 中的棕色位置包含它们的最终值，L 和 R 中的棕色位置包含尚未复制回 A 的值。总体而言，棕色位置始终包含最初在 $A[9:16]$ 中的值。A 中的蓝色位置包含将要复制的值，L 和 R 中的深色位置包含已经复制回 A 的值。(a)-(g) 是循环 12-18 行的每次迭代之前的数组 A、L 和 R 以及它们的相应索引 k、i 和 j。在 (g) 部分，R 中的所有值都已经复制回 A（j 等于 R 的长度），因此循环 12-18 行的 while 循环终止。(h) 是终止时的数组和索引。行 20-23 的 while 循环复制回 A 中剩余的 L 和 R 的值，这些值是最初在 $A[9:16]$ 中的最大值。在这里，行 20-23 将 $L[2:3]$ 复制到 $A[15:16]$，并且因为 R 中的所有值已经复制回 A，所以循环 24-27 行的 while 循环迭代 0 次。此时，$A[9:16]$ 的子数组已经排序完成。

在图2.3中展示的第 8-18 行执行基本步骤。循环 12-18 行重复地在 L 和 R 中找到尚未复制回 $A[p:r]$ 的最小值，并将其复制回去。正如注释所示，索引 k 表示正在填充的 A 的位置，索引 i 和 j 分别表示 L 和 R 中剩余最小值的位置。最终，L 或 R 中的所有值都被复制回 $A[p:r]$，并且此循环终止。如果循环终止是因为已经将 R 的所有值复制回去，即 j 等于 n_R，那么 i 仍然小于 n_L，这意味着 L 的一些值尚未复制回去，而这些值是 L 和 R 中最大的值。在这种情况下，循环 20-23 行将 L 的这些剩余值复制到 $A[p:r]$ 的最后几个位置。因为 j 等于 n_R，所以循环 24-27 行的 while 循环不会执行。如果相反，循环 12-18 行终止是因为 i 等于 n_L，则所有的 L 已经被复制回 $A[p:r]$，而循环 24-27 行将 R 的剩余值复制回 $A[p:r]$ 的末尾。

为了证明 MERGE 过程在 $\Theta(n)$ 的时间内运行，其中 $n = r-p+1$，观察到第 1-3 行和第 8-10 行每行都需要常数时间，而第 4-7 行的循环需要 $\Theta(n_L+n_R) = \Theta(n)$ 的时间。要计算第 12-18 行、20-23 行和 24-27 行的三个 while 循环的时间，观察到这些循环的每次迭代都将 L 或 R 中的一个值复制回 A，并且每个值都只复制回 A 一次。因此，这三个循环总共进行了 n 次迭代。由于这三个循环的每次迭代都需要常数时间，所以在这三个循环中总共花费的时间是 $\Theta(n)$。

```
MERGE-SORT(A, p, r)
1  if p ≥ r                          // zero or one element?
2      return
3  q = ⌊(p + r)/2⌋                   // midpoint of A[p : r]
4  MERGE-SORT(A, p, q)               // recursively sort A[p : q]
5  MERGE-SORT(A, q + 1, r)           // recursively sort A[q + 1 : r]
6  // Merge A[p : q] and A[q + 1 : r] into A[p : r].
7  MERGE(A, p, q, r)
```

现在，我们可以将MERGE过程作为合并排序算法中的子程序使用。在下一页上的过程MERGE-SORT(A, p, r)对子数组$A[p : r]$中的元素进行排序。如果p等于r，则子数组只有1个元素，因此已经排序。否则，我们必须有$p < r$，并且MERGE-SORT执行分割、征服和合并步骤。分割步骤简单地计算一个索引q，将$A[p : r]$分为两个相邻的子数组：$A[p : q]$，包含$\lceil n/2 \rceil$个元素，和$A[q+1 : r]$，包含$\lfloor n/2 \rfloor$个元素。初始调用MERGE-SORT$(A, 1, n)$对整个数组$A[1 : n]$进行排序。

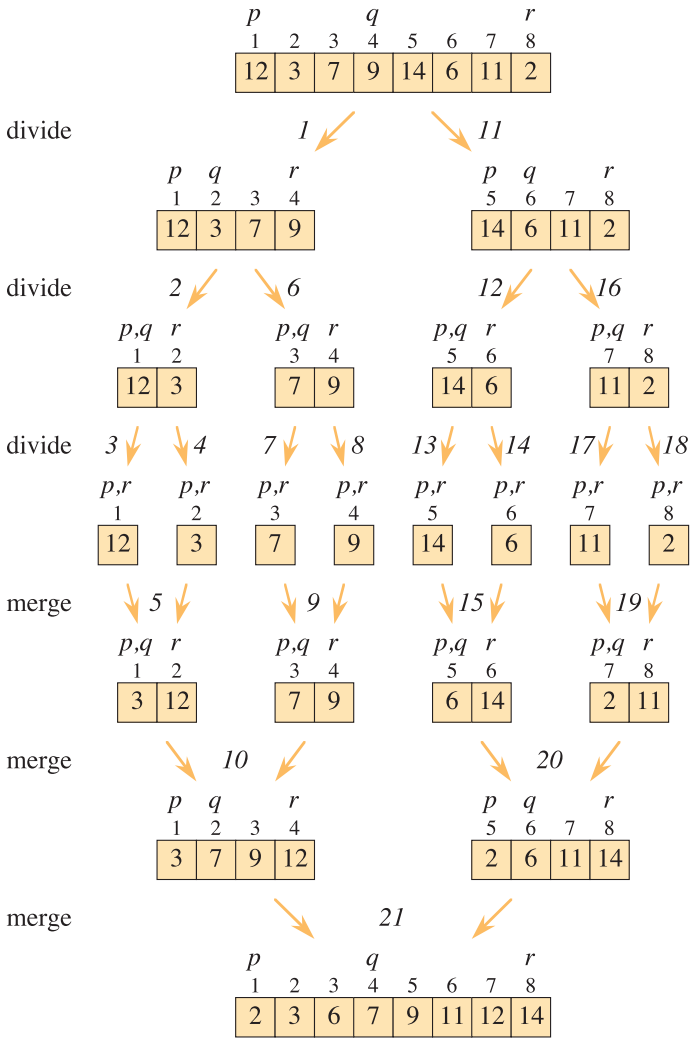


图 2.4: 归并排序在数组长度为8的数组A上面的操作过程。数组A最开始时是：$\langle 12, 3, 7, 9, 14, 6, 11, 2 \rangle$。每个子数组中的索引$p$、$q$和$r$如图所示。斜体数字表示了MERGE-SORT和MERGE过程的调用顺序，初始调用是MERGE-SORT$(A, 1, 8)$

图2.4展示了当$n = 8$时该过程的操作，还显示了分割和合并步骤的顺序。该算法递归地将数组分割为包含一个元素的子数组。合并步骤将成对的1元素子数组合并为长度为2的已排序子数组，将它们合并为长度为4的已排序子数组，最终将它们合并为长度为8的最终已排序子数组。如果n不是2的精确幂，则某些分割步骤会

创建长度相差 1 的子数组（例如，将长度为 7 的子数组分割时，一个子数组长度为 4，另一个子数组长度为 3）。无论合并的两个子数组的长度如何，合并 n 个项的时间复杂度为 $\Theta(n)$。

2.3.2 分析分治算法

当一个算法包含递归调用时，通常可以通过递归方程或递归来描述其运行时间，该递归方程描述了算法在较小输入上的运行时间与问题规模 n 上的总体运行时间之间的关系。然后，可以使用数学工具来解决递归方程并提供算法性能的界限。

分治算法的运行时间的递归方程可从基本方法的三个步骤中推导出来。与插入排序类似，假设 $T(n)$ 是规模为 n 的问题的最坏情况运行时间。如果问题规模足够小，例如 $n < n_0$，其中 $n_0 > 0$ 是一个常数，直接的解决方案只需要常数时间，我们将其表示为 $\Theta(1)$。假设问题的划分产生了大小为 n/b 的子问题，即原问题大小的 $1/b$。对于归并排序，a 和 b 都是 2，但是我们将看到其他分治算法中的 $a \neq b$。解决一个大小为 n/b 的子问题需要 $T(n/b)$ 的时间，因此解决所有 a 个子问题需要 $aT(n/b)$ 的时间。如果将问题划分成子问题需要 $D(n)$ 的时间，将子问题的解合并成原问题的解需要 $C(n)$ 的时间，我们得到递归关系式

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{if } n < n_0 \\ D(n) + aT(n/b) + C(n) & \text{otherwise} \end{cases}$$

第 4 章展示了如何求解以上形式的递归式。

有时候，分治算法中的划分步骤的大小 n/b 不是整数。例如，归并排序将一个大小为 n 的问题划分为大小为 $\lfloor n/2 \rfloor$ 和 $\lceil n/2 \rceil$ 的子问题。由于 $\lfloor n/2 \rfloor$ 和 $\lceil n/2 \rceil$ 之间的差异最多为 1，对于大的 n 来说，这比将 n 除以 2 的影响要小得多，因此我们会简单地将它们都称为大小为 $n/2$。正如第四章所讨论的那样，忽略 floor 和 ceiling 并不会影响分治递归的解决方案的增长顺序。

我们还要采用的另一个约定是省略递归基的语句，我们将在第四章中更详细地讨论这个问题。原因是基本情况几乎总是 $T(n) = \Theta(1)$，如果 $n < n_0$，其中 $n_0 > 0$ 是一个常数。这是因为算法在常量大小的输入上运行时间是恒定的。采用这种约定可以节省大量的写作时间。

归并排序算法的分析

下面是如何设置归并排序在 n 个数字上的最坏情况运行时间 $T(n)$ 的递归公式：

划分：划分步骤只是计算子数组的中间位置，这需要恒定时间。因此，$D(n) = \Theta(1)$。

解决：递归地解决两个大小为 $n/2$ 的子问题，每个子问题对运行时间的贡献为 $2T(n/2)$（忽略 floor 和 ceiling，如我们所讨论的）。

合并：由于对 n 元素子数组进行合并的 MERGE 过程需要 $\Theta(n)$ 的时间，因此我们有 $C(n) = \Theta(n)$。

当我们将归并排序分析中的函数 $D(n)$ 和 $C(n)$ 相加时，我们正在添加一个 $\Theta(n)$ 的函数和一个 $\Theta(n)$ 的函数。这个和是 n 的线性函数。也就是说，当 n 很大时，它大致与 n 成正比，因此归并排序的划分和合并时间总共为 $\Theta(n)$。将 $\Theta(n)$ 添加到解决步骤中的 $2T(n/2)$ 项中，得到归并排序最坏情况运行时间 $T(n)$ 的递归公式：

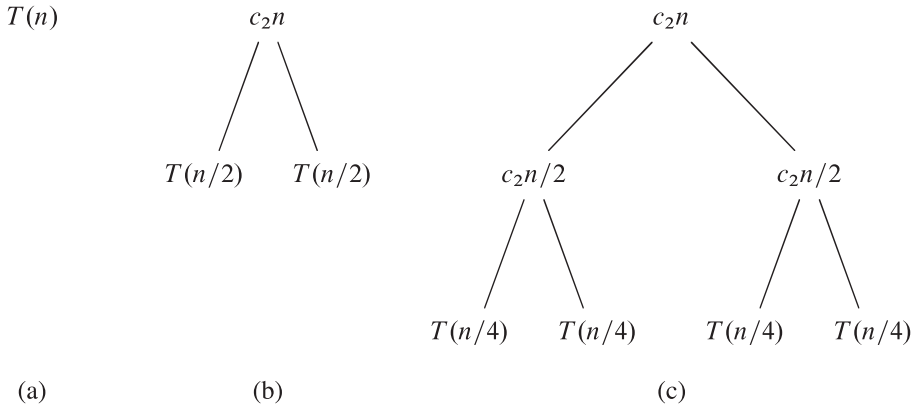
$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n) \tag{2.3}$$

第四章介绍了“主定理”，它表明 $T(n) = \Theta(n \lg n)$。与最坏情况运行时间为 $\Theta(n^2)$ 的插入排序相比，归并排序以 n 的因子换取了 $\lg n$ 的因子。因为对数函数增长比任何线性函数都要慢，所以这是一个好的交易。对于足够大的输入，具有 $\Theta(n \lg n)$ 最坏情况运行时间的归并排序优于最坏情况运行时间为 $\Theta(n^2)$ 的插入排序。

我们不需要使用主定理来直观地理解为什么 (2.3) 的递归解是 $T(n) = \Theta(n \lg n)$。为简单起见，假设 n 是 2 的幂次方，隐含的基本情况是 $n = 1$。那么递归 (2.3) 本质上是：

$$T(n) = \begin{cases} c_1 & \text{if } n = 1 \\ 2T(n/2) + c_2 n & \text{if } n > 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

其中常数 $c_1 > 0$ 表示解决大小为 1 的问题所需的时间，$c_2 > 0$ 是分割和合并步骤每个数组元素的时间。



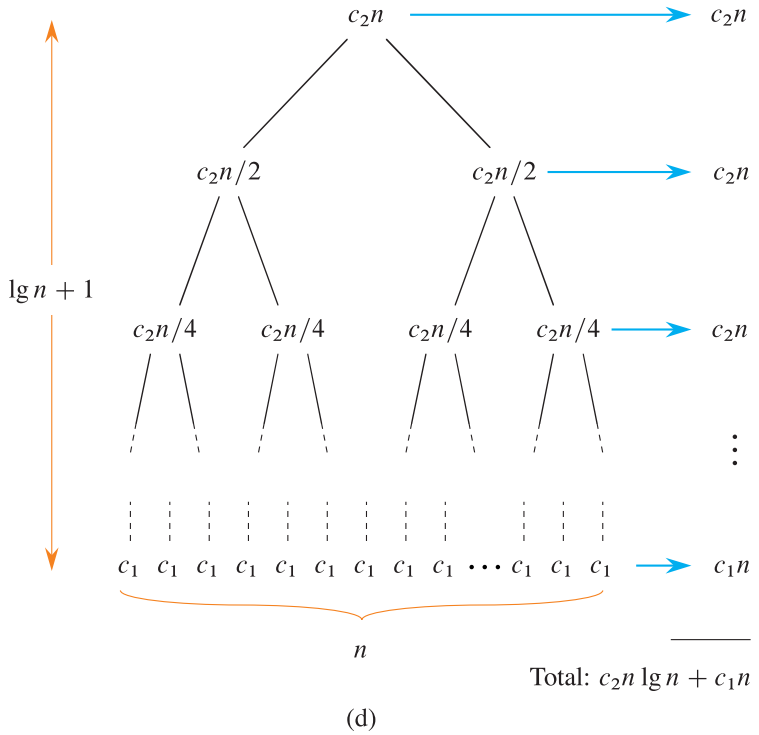


图 2.5: 如何为递归式 (2.4) 构建递归树。图 (a) 显示了 $T(n)$，在 (b)-(d) 中逐步扩展以形成递归树。在 (d) 中完全展开的树有 $\lg n + 1$ 层。叶子节点上面的每个层级共同贡献 $c_2 n$ 的总成本，而叶子节点层级则贡献 $c_1 n$。因此，总成本为 $c_2 n \lg n + c_1 n = \Theta(n \lg n)$。

图2.5说明了解决递归 (2.4) 的一种方法。图 (a) 显示了 $T(n)$，图 (b) 将其扩展为表示递归的等效树。$c_2 n$ 项表示在递归的顶层进行分割和合并的成本，根的两个子树是两个更小的递归 $T(n/2)$。图 (c) 展示了进一步扩展 $T(n/2)$ 的过程，第二层递归中每个节点分割和合并的成本为 $c_2 n/2$。继续通过将树中的每个节点展开为由递归确定的组成部分，直到问题大小降至 1，每个问题的成本为 c_1。图 (d) 显示了得到的递归树。

接下来，将每个层级的成本相加。顶层的总成本为 $c_2 n$，下一层的总成本为 $c_2(n/2) + c_2(n/2) = c_2 n$，之后的层级总成本为 $c_2(n/4) + c_2(n/4) + c_2(n/4) + c_2(n/4) = c_2 n$，以此类推。每个层级的节点数是上一层级的两倍，但每个节点仅贡献上一层节点成本的一半。从一个层级到下一个层级，加倍和减半相互抵消，因此每个层级的成本相同：$c_2 n$。通常情况下，距离顶部 i 个层级的层级具有 2^i 个节点，每个节点贡献 $c_2(n/2^i)$ 的成本，因此距离顶部第 i 个层级的总成本为 $2^i \cdot c_2\left(n/2^i\right) = c_2 n$。底层具有 n 个节点，每个节点贡献 c_1 的成本，总成本为 $c_1 n$。

在图2.5中递归树的总层数是 $\lg n + 1$，其中 n 是叶子节点的数量，对应于输入大小。一个非正式的归纳论证

证明了这个结论。当 $n = 1$ 时，基本情况发生，此时树只有 1 层。由于 $\lg 1 = 0$，因此 $\lg n + 1$ 给出了正确的层数。现在假设归纳假设是具有 2^i 个叶子节点的递归树的层数为 $\lg 2^i + 1 = i + 1$（因为对于任何 i 值，我们有 $\lg 2^i = i$）。因为我们假设输入大小是 2 的幂次方，所以要考虑的下一个输入大小是 2^{i+1}。具有 $n = 2^{i+1}$ 个叶子节点的树比具有 2^i 个叶子节点的树多 1 层，因此总层数为 $(i + 1) + 1 = \lg 2^{i+1} + 1$。

要计算递归式 (2.4) 表示的总成本，只需将所有层级的成本相加。递归树有 $\lg n + 1$ 层。叶子节点上面的每个层级成本均为 $c_2 n$，叶子节点层级成本为 $c_1 n$，总成本为 $c_2 n \lg n + c_1 n = \Theta(n \lg n)$。

第三章 如何刻画算法的运行时间？

算法运行时间的增长量级，定义在第 2 章中，为表征算法效率提供了一种简单的方法，并且还允许我们将其与备选算法进行比较。一旦输入大小 n 足够大，具有 $\Theta(n \lg n)$ 最坏情况运行时间的归并排序将击败具有 $\Theta(n^2)$ 最坏情况运行时间的插入排序。尽管我们有时可以确定算法的确切运行时间，就像第 2 章中对插入排序所做的那样，但额外的精度很少值得计算。对于足够大的输入，确切运行时间的乘法常数和低阶项被输入大小本身的影响所支配。

当我们考虑输入大小足够大以使仅有运行时间增长量级相关时，我们正在研究算法的渐近效率。也就是说，我们关心的是算法运行时间如何随着输入大小在极限情况下随着输入大小无限增加而增加。通常，渐近效率更高的算法对于除非非常小的输入外都是最佳选择。

本章介绍了几种简化算法渐近分析的标准方法。下一节非正式地介绍了三种最常用的“渐近符号”类型，其中我们已经在 Θ 符号中看到了一个例子。它还展示了一种使用这些渐近符号来推断插入排序最坏情况运行时间的方法。然后，我们更正式地查看渐近符号，并介绍了本书中使用的几种符号约定。最后一节回顾了在分析算法时经常出现的函数行为。

3.1 O记号，Ω记号和Θ记号

当我们在第二章分析插入排序在最坏情况下的运行时间时，我们是从下面的超级复杂的式子开始的

$$\left(\frac{c_5}{2}+\frac{c_6}{2}+\frac{c_7}{2}\right)n^2+\left(c_1+c_2+c_4+\frac{c_5}{2}-\frac{c_6}{2}-\frac{c_7}{2}+c_8\right)n - (c_2+c_4+c_5+c_8)\,.$$

然后我们舍弃了低阶项 $(c_1+c_2+c_4+c_5/2-c_6/2-c_7/2+c_8)n$ 和 $c_2+c_4+c_5+c_8$，并忽略了 n^2 的系数 $c_5/2+c_6/2+c_7/2$。这只留下了因子 n^2，我们将其放入 Θ 符号中，表示为 $\Theta(n^2)$。我们使用这种方式来表征算法的运行时间：舍弃低阶项和主导项的系数，并使用一种关注运行时间增长速度的符号表示法。

Θ 符号不是唯一的“渐近符号”。在本节中，我们还将看到其他形式的渐近符号。我们首先直观地看一下这些符号，重新审视插入排序以了解如何应用它们。在下一节中，我们将看到我们的渐近符号的正式定义，以及使用它们的约定。

在具体介绍之前，请记住我们将看到的渐近符号是为了表征函数而设计的。恰好我们最感兴趣的函数表示算法的运行时间。但是，渐近符号可以应用于表征算法的其他方面（例如它们使用的空间量），甚至可以应用于与算法毫无关系的函数。

O 记号

O 符号表征了函数渐近行为的上限。换句话说，它表示函数的增长速度不会超过某个速率，这个速率基于最高阶项。例如，考虑函数 $7n^3+100n^2-20n+6$。它的最高阶项是 $7n^3$，因此我们说这个函数的增长速度是 n^3。因为这个函数的增长速度不会超过 n^3，所以我们可以写成 $O(n^3)$。你可能会惊讶地发现我们也可以写成函数 $7n^3+100n^2-20n+6$ 是 $O(n^4)$。为什么呢？因为这个函数的增长速度比 n^4 慢，所以我们说它不会增长得更快。正如你可能猜到的那样，这个函数也是 $O(n^5)$、$O(n^6)$ 等等。更一般地，它是 $O(n^c)$，其中 $c \geq 3$ 是任意常数。

Ω 记号

Ω 符号表征了函数渐近行为的下限。换句话说，它表示函数的增长速度至少和某个速率一样快，这个速率基于最高阶项，就像 O 符号一样。因为函数 $7n^3+100n^2-20n+6$ 中最高阶项的增长速度至少和 n^3 一样快，所以这个函数是 $\Omega(n^3)$。这个函数也是 $\Omega(n^2)$ 和 $\Omega(n)$。更一般地，它是 $\Omega(n^c)$，其中 $c \leq 3$ 是任意常数。

Θ 记号

Θ 符号表征了函数渐近行为的紧密上下界。它表示函数以某个特定速率增长，这个速率基于最高阶项，就像之前提到的那样。换句话说，Θ 符号表征了函数的增长速度，上下差别不超过一个常数因子。这两个常数因子

不一定相等。

如果你可以证明一个函数既是 $O(f(n))$ 又是 $\Omega(f(n))$，其中 $f(n)$ 是某个函数，那么你已经证明了这个函数是 $\Theta(f(n))$。（下一节将这个事实陈述为一个定理。）例如，因为函数 $7n^3+100n^2-20n+6$ 既是 $O\left(n^3\right)$ 又是 $\Omega\left(n^3\right)$，所以它也是 $\Theta\left(n^3\right)$。

例子：插入排序

让我们重新审视插入排序，并看看如何使用渐近符号来表征其 $\Theta\left(n^2\right)$ 的最坏情况运行时间，而不像第二章那样计算总和。这里再次给出 INSERTION-SORT 过程：

```
INSERTION-SORT(A, n)
1  for i = 2 to n
2      key = A[i]
3      // Insert A[i] into the sorted subarray A[1 : i − 1].
4      j = i − 1
5      while j > 0 and A[j] > key
6          A[j + 1] = A[j]
7          j = j − 1
8      A[j + 1] = key
```

我们能观察到伪代码的操作是什么？该过程有嵌套循环。外部循环是一个 for 循环，无论排序的值如何，它都会运行 $n-1$ 次。内部循环是一个 while 循环，但它的迭代次数取决于被排序的值。循环变量 j 从 $i-1$ 开始，在每次迭代中递减 1，直到它达到 0 或 $A[j] \le key$。对于给定的 i 值，while 循环可能迭代 0 次，$i-1$ 次或任何在它们之间。while 循环的主体（第 6-7 行）每次迭代都需要恒定的时间。

这些观察足以推导出 INSERTION-SORT 的任何情况的 $O\left(n^2\right)$ 运行时间，给我们一个适用于所有输入的总体陈述。运行时间由内部循环主导。因为外部循环的 $n-1$ 次迭代中的每一次都会导致内部循环最多迭代 $i-1$ 次，并且因为 i 最多为 n，内部循环的总迭代次数最多为 $(n-1)(n-1)$，小于 n^2。由于内部循环的每次迭代都需要恒定的时间，内部循环中花费的总时间最多是常数乘以 n^2，即 $O\left(n^2\right)$。

通过一点创造力，我们还可以看到 INSERTION-SORT 的最坏情况运行时间是 $\Omega\left(n^2\right)$。通过说一个算法的最坏情况运行时间是 $\Omega\left(n^2\right)$，我们的意思是对于每个大于某个阈值的输入大小 n，都存在大小为 n 的至少一个输入，使得该算法需要至少 cn^2 时间，其中 c 是某个正常数。这并不一定意味着算法对于所有输入都需要至少 cn^2 时间。

现在让我们看看为什么 INSERTION-SORT 的最坏情况运行时间是 $\Omega\left(n^2\right)$。对于一个值要移到它起始位置的右侧，它必须在第 6 行中被移动。实际上，对于一个值要移动到它起始位置的右侧 k 个位置，第 6 行必须执行 k 次。如图 3.1 所示，让我们假设 n 是 3 的倍数，这样我们就可以将数组 A 分成 $n/3$ 个位置的组。假设在 INSERTION-SORT 的输入中，$n/3$ 个最大值占据了前 $n/3$ 个数组位置 $A[1:n/3]$。（它们在前 $n/3$ 个位置内的相对顺序并不重要。）一旦数组被排序，这 $n/3$ 个值中的每一个都会在最后 $n/3$ 个位置 $A[2n/3+1:n]$ 中的某个位置结束。为了实现这一点，这 $n/3$ 个值中的每一个都必须通过中间的 $n/3$ 个位置 $A[n/3+1:2n/3]$。这 $n/3$ 个值中的每一个都会逐个通过这些中间的 $n/3$ 个位置，至少需要通过第 6 行 $n/3$ 次。因为至少有 $n/3$ 个值必须通过至少 $n/3$ 个位置，所以 INSERTION-SORT 在最坏情况下所需的时间至少与 $(n/3)(n/3)=n^2/9$ 成正比，即 $\Omega\left(n^2\right)$。

因为我们已经证明了 INSERTION-SORT 在所有情况下都以 $O\left(n^2\right)$ 时间运行，并且存在一种输入使其需要 $\Omega\left(n^2\right)$ 时间，因此我们可以得出结论，INSERTION-SORT 的最坏情况运行时间是 $\Theta\left(n^2\right)$。上下界的常数因子可能不同并不重要。重要的是我们已经在常数因子（不计低阶项）范围内表征了最坏情况的运行时间。这个论点并没有表明 INSERTIONSORT 在所有情况下都以 $\Theta\left(n^2\right)$ 时间运行。实际上，我们在第 2 章中看到，最好情况的运行时间是 $\Theta(n)$。

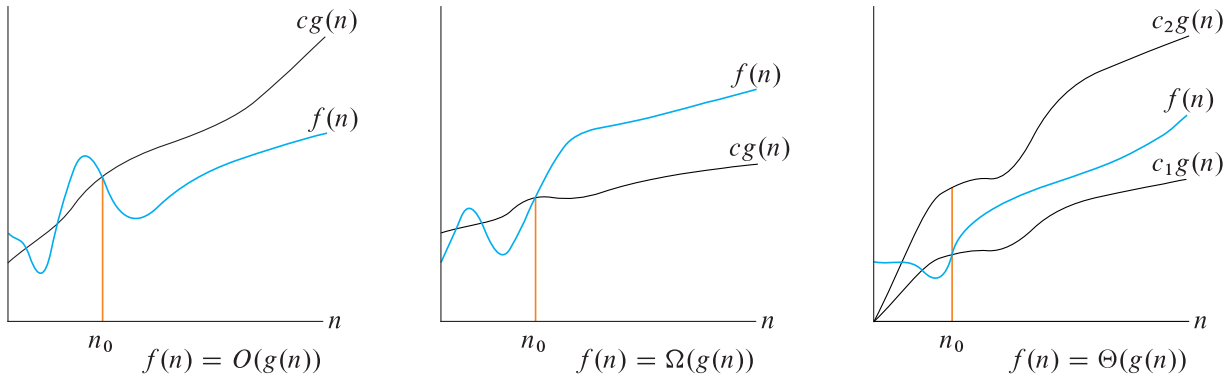


图 3.1: 图是 O, Ω 和 Θ 符号的图形示例。在每个部分中，显示的 n_0 值是最小可能值，但任何更大的值也可以。(a) O 符号给出函数的上界，精确到一个常数因子。如果存在正常数 n_0 和 c 使得在 n_0 及其右侧，$f(n)$ 的值总是在或低于 $cg(n)$ 上，则我们写作 $f(n) = O(g(n))$。(b) Ω 符号给出函数的下界，精确到一个常数因子。如果存在正常数 n_0 和 c 使得在 n_0 及其右侧，$f(n)$ 的值总是在或高于 $cg(n)$ 上，则我们写作 $f(n) = \Omega(g(n))$。(c) Θ 符号将函数约束在常数因子之内。如果存在正常数 n_0, c_1 和 c_2 使得在 n_0 及其右侧，$f(n)$ 的值总是在 $c_1 g(n)$ 和 $c_2 g(n)$ 之间，则我们写作 $f(n) = \Theta(g(n))$。

3.2 渐进记号：形式化定义

在非正式地了解渐进符号后，让我们更加正式。我们用来描述算法渐进运行时间的符号是基于函数定义的，这些函数的定义域通常是自然数集合 $\mathbb{N}$ 或实数集合 $\mathbb{R}$。这些符号方便描述运行时间函数 $T(n)$。本节定义了基本的渐进符号，并介绍了一些常见的“适当”的符号滥用。

O 记号

正如我们在第 3.1 节中所看到的，O 符号描述了一个渐进上界。我们使用 O 符号给出一个函数的上界，精确到一个常数因子。以下是 O 符号的正式定义。对于给定的函数 $g(n)$，我们用 $O(g(n))$（发音为“big-oh of g of n”或有时简称为“oh of g of n”）表示函数集合 $O(g(n)) = \{f(n)$ ：存在正常数 c 和 n_0，使得

$$0 \le f(n) \le cg(n) \text{ for all } n \ge n_0\}.^{1}$$

如果存在正常数 c 使得 $f(n) \le cg(n)$ 对于足够大的 n 成立，则函数 $f(n)$ 属于集合 $O(g(n))$。图 3.2(a) 展示了 O 符号的直观理解。对于所有大于等于 n_0 的 n 值，函数 $f(n)$ 的值都在或低于 $cg(n)$ 上。

$O(g(n))$ 的定义要求集合中的每个函数 $f(n)$ 都是渐进非负的：只要 n 足够大，$f(n)$ 必须是非负的。（渐进正函数是指对于所有足够大的 n，函数都是正的。）因此，函数 $g(n)$ 本身必须是渐进非负的，否则集合 $O(g(n))$ 为空。因此，我们假设在 O 符号中使用的每个函数都是渐进非负的。这个假设也适用于本章中定义的其他渐进符号。

你可能会惊讶我们是如何用集合来定义 O 符号的。实际上，你可能会期望我们会写“$f(n) \in O(g(n))$”，以表示 $f(n)$ 属于集合 $O(g(n))$。相反，我们通常写“$f(n) = O(g(n))$”，并说“$f(n)$ 是 big-oh of $g(n)$”，以表达相同的概念。虽然一开始可能会感到混乱，但在本节后面我们将看到这样做的好处。

让我们探讨一个例子，说明如何使用 O 符号的正式定义来证明我们丢弃低阶项和忽略最高阶项的常数系数的做法是正确的。我们将展示 $4n^2 + 100n + 500 = O(n^2)$，即使低阶项的系数比主项大得多。我们需要找到正常数 c 和 n_0，使得对于所有 $n \ge n_0$，都有 $4n^2 + 100n + 500 \le cn^2$。将两边都除以 n^2 得到 $4 + 100/n + 500/n^2 \le c$。这个不等式对于许多 c 和 n_0 的选择都成立。例如，如果我们选择 $n_0 = 1$，那么这个不等式对于 $c = 604$ 成立。如果我们选择 $n_0 = 10$，那么 $c = 19$ 可以工作，选择 $n_0 = 100$ 允许我们使用 $c = 5.05$。

我们也可以使用 O 符号的正式定义来证明函数 $n^3 - 100n^2$ 不属于集合 $O(n^2)$，即使 n^2 的系数是一个大的负数。如果我们有 $n^3 - 100n^2 = O(n^2)$，那么就会有正常数 c 和 n_0，使得对于所有 $n \ge n_0$，都有 $n^3 - 100n^2 \le cn^2$。同样，我们将两边都除以 n^2，得到 $n - 100 \le c$。无论我们为常数 c 选择什么值，这个不等式都不成立，对于任何 $n > c + 100$ 的值都不成立。

Ω 记号

正如 O 符号提供了一个函数的渐进上界，Ω 符号提供了一个渐进下界。对于给定的函数 $g(n)$，我们用 $\Omega(g(n))$（读作“big-omega of g of n”或有时简称“omega of g of n”）表示函数集合：$\Omega(g(n)) = \{f(n)$：存在正常数 c 和 n_0，使得对于所有 $n \geq n_0\}$，都有 $0 \leq cg(n) \leq f(n)$。图 3.2(b) 展示了 Ω 符号的直观理解。对于所有 n 值，包括或在 n_0 右侧的值，$f(n)$ 的值在或以上 $cg(n)$。

我们已经展示了 $4n^2 + 100n + 500 = O\left(n^2\right)$。现在让我们展示 $4n^2 + 100n + 500 = \Omega\left(n^2\right)$。我们需要找到正常数 c 和 n_0，使得对于所有 $n \geq n_0$，都有 $4n^2 + 100n + 500 \geq cn^2$。与之前一样，我们将两边都除以 n^2，得到 $4 + 100/n + 500/n^2 \geq c$。当 n_0 为任何正整数且 $c = 4$ 时，这个不等式成立。

如果我们从 $4n^2$ 项中减去低阶项而不是加上它们会怎么样？如果 n^2 项的系数很小怎么办？函数仍然是 $\Omega\left(n^2\right)$。例如，让我们展示 $n^2/100 - 100n - 500 = \Omega\left(n^2\right)$。除以 n^2 得到 $1/100 - 100/n - 500/n^2 \geq c$。我们可以选择任何大于或等于 10,005 的 n_0 值，并找到一个正值 c。例如，当 $n_0 = 10,005$ 时，我们可以选择 $c = 2.49 \times 10^{-9}$。是的，那是一个非常小的 c 值，但它是正数。如果我们选择更大的 n_0 值，我们也可以增加 c 值。例如，如果 $n_0 = 100,000$，那么我们可以选择 $c = 0.0089$。n_0 值越高，我们就越可以选择接近系数 $1/100$ 的 c 值。

Θ 记号

我们使用 Θ 符号表示渐进紧密界限。对于给定的函数 $g(n)$，我们用 $\Theta(g(n))$（读作“theta of g of n”）表示函数集合：$\Theta(g(n)) = \{f(n)$：存在正常数 c_1, c_2 和 n_0，使得对于所有 $n \geq n_0\}$，都有 $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$。图 3.2(c) 展示了 Θ 符号的直观理解。对于所有 n 值，包括或在 n_0 右侧的值，$f(n)$ 的值在或以上 $c_1 g(n)$ 并在或以下 $c_2 g(n)$。换句话说，对于所有 $n \geq n_0$，函数 $f(n)$ 与常数因子内的 $g(n)$ 相等。

$O-, \Omega-$ 和 Θ 符号的定义导致以下定理，其证明我们留作练习 3.2-4。

定理 3.1

对于任何两个函数 $f(n)$ 和 $g(n)$，当且仅当 $f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$ 时，我们有 $f(n) = \Theta(g(n))$。♡

我们一般将定理3.1用在证明渐进紧界上面，也就是用渐进上界和渐进下界来证明渐进紧界。

渐进记号和运行时间

当使用渐进符号来描述算法的运行时间时，确保所使用的渐进符号尽可能精确，而不会过度陈述其适用于哪个运行时间。以下是一些使用渐进符号来描述运行时间的正确和不正确的示例。

让我们从插入排序开始。我们可以正确地说插入排序的最坏运行时间是 $O\left(n^2\right), \Omega\left(n^2\right)$，并且由于3.1，$\Theta\left(n^2\right)$。虽然三种描述最坏情况运行时间的方式都是正确的，但 $\Theta\left(n^2\right)$ 界限是最精确和最受欢迎的。同样地，我们可以正确地说插入排序的最佳情况运行时间为 $O(n), \Omega(n)$ 和 $\Theta(n)$，其中 $\Theta(n)$ 最精确，因此最受欢迎。

以下是我们不能正确说的内容：插入排序的运行时间是 $\Theta\left(n^2\right)$。这是一种夸大其词的说法，因为通过省略声明中的“最坏情况”，我们留下了一个涵盖所有情况的概括性陈述。错误在于插入排序并不总是在 $\Theta\left(n^2\right)$ 时间内运行，因为正如我们所见，它在最佳情况下运行时间为 $\Theta(n)$。但我们可以正确地说插入排序的运行时间是 $O\left(n^2\right)$，因为在所有情况下，它的运行时间都不会超过 n^2。当我们使用 $O\left(n^2\right)$ 而不是 $\Theta\left(n^2\right)$ 时，没有问题出现，即使有些情况下运行时间增长得比 n^2 慢。同样地，我们不能正确地说插入排序的运行时间是 $\Theta(n)$，但我们可以说它的运行时间是 $\Omega(n)$。

归并排序呢？由于归并排序在所有情况下都以 $\Theta(n \lg n)$ 时间运行，我们可以只说它的运行时间是 $\Theta(n \lg n)$，而不指定最坏情况、最佳情况或任何其他情况。

有时人们会混淆 O 符号和 Θ 符号，错误地使用 O 符号来表示渐进紧密界限。他们会说：“一个 $O(n \lg n)$ 时间复杂度的算法比一个 $O\left(n^2\right)$ 时间复杂度的算法运行得更快。”也许是这样，也许不是。由于 O 符号仅表示渐进上界，所谓的 $O\left(n^2\right)$ 时间复杂度的算法实际上可能在 $\Theta(n)$ 时间内运行。你应该小心选择适当的渐进符号。如果要表示渐进紧密界限，请使用 Θ 符号。

我们通常使用渐进符号来提供最简单和最精确的界限。例如，如果一个算法在所有情况下的运行时间为 $3n^2 + 20n$，我们使用渐进符号来写出它的运行时间为 $\Theta\left(n^2\right)$。严格来说，我们也可以写出运行时间为 $O\left(n^3\right)$ 或 $\Theta\left(3n^2 + 20n\right)$。然而，在这种情况下，这些表达式都不如写 $\Theta\left(n^2\right)$ 有用：如果运行时间为 $3n^2 + 20n$，那么 $O\left(n^3\right)$

不如 $\Theta\left(n^2\right)$ 精确，而 $\Theta\left(3n^2+20n\right)$ 引入了复杂性，混淆了增长的顺序。通过编写最简单和最精确的界限，例如 $\Theta\left(n^2\right)$，我们可以对不同的算法进行分类和比较。在整本书中，你将看到几乎所有的渐进运行时间都基于多项式和对数函数：例如 $nn\lg^2 nn^2\lg n$ 或 $n^{1/2}$。你还将看到其他一些函数，例如指数、$\lg\lg n$ 和 $\lg^* n$（请参见第 3.3 节）。通常很容易比较这些函数的增长速度。问题 3-3 会给你提供良好的练习。

等式和不等式中的渐进记号

虽然我们正式地将渐进符号定义为集合，但在公式中，我们使用等号 (=) 而不是集合成员符号 ($\in$)。例如，我们写道 $4n^2+100n+500=O\left(n^2\right)$。我们还可以写成 $2n^2+3n+1=2n^2+\Theta(n)$。我们如何解释这样的公式？

当渐进符号单独出现在等式（或不等式）的右侧时，例如 $4n^2+100n+500=O\left(n^2\right)$，等号表示集合成员关系：$4n^2+100n+500\in O\left(n^2\right)$。然而，通常情况下，当渐进符号出现在公式中时，我们将其解释为代表某个我们不想命名的匿名函数。例如，公式 $2n^2+3n+1=2n^2+\Theta(n)$ 表示 $2n^2+3n+1=2n^2+f(n)$，其中 $f(n)\in\Theta(n)$。在这种情况下，我们让 $f(n)=3n+1$，它确实属于 $\Theta(n)$。

以这种方式使用渐进符号可以帮助消除方程中不必要的细节和杂乱。例如，在第 2 章中，我们将归并排序的最坏运行时间表示为递归式

$$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n)$$

如果我们只关心 $T(n)$ 的渐进行为，那么没有必要准确指定所有低阶项，因为它们都被理解为包含在由术语 $\Theta(n)$ 表示的匿名函数中。

这段文字讲解了渐进符号在表达式中的应用。其中，匿名函数的数量被理解为渐进符号出现的次数。例如，在表达式

$$\sum_{i=1}^{n}O(i)$$

中，只有一个匿名函数（一个关于 i 的函数）。因此，这个表达式与 $O(1)+O(2)+\cdots+O(n)$ 不同，后者没有一个清晰的解释。

在某些情况下，渐进符号出现在等式的左侧，如

$$2n^2+\Theta(n)=\Theta\left(n^2\right)$$

使用以下规则解释这样的等式：无论在等号左边如何选择匿名函数，总有一种方式可以选择等号右边的匿名函数使等式成立。因此，我们的例子意味着对于任何 $\Theta(n)$ 中的函数 $f(n)$，都存在一些 $\Theta\left(n^2\right)$ 中的函数 $g(n)$，使得 $2n^2+f(n)=g(n)$ 对于所有的 n 都成立。换句话说，等式的右侧提供了比左侧更粗略的细节。

这段文字讲解了如何将多个等式链在一起。例如，我们可以将以下关系组合在一起：

$$\begin{aligned}2n^2+3n+1&=2n^2+\Theta(n)\\&=\Theta\left(n^2\right)\end{aligned}$$

按照上述规则，分别解释每个等式。第一个等式表示存在一些函数 $f(n)\in\Theta(n)$，使得对于所有的 n，$2n^2+3n+1=2n^2+f(n)$。第二个等式表示对于任何函数 $g(n)\in\Theta(n)$（例如刚才提到的 $f(n)$），都存在一些函数 $h(n)\in\Theta\left(n^2\right)$，使得对于所有的 n，$2n^2+g(n)=h(n)$。这种解释意味着 $2n^2+3n+1=\Theta\left(n^2\right)$，这正是等式链的直观含义。

渐进记号的适当的滥用

这段文字讲解了渐进符号的滥用问题。除了将等号滥用为集合成员关系，我们现在可以看到它具有精确的数学解释，还有一种滥用渐进符号的情况，即必须从上下文中推断趋向于 ∞ 的变量。例如，当我们说 $O(g(n))$ 时，我们可以假设我们关注 $g(n)$ 随着 n 的增长而增长，如果我们说 $O(g(m))$，我们就是在谈论 $g(m)$ 随着 m 的增长而增长。表达式中的自由变量指示了哪个变量趋向于 ∞。

需要上下文知识来确定哪个变量趋向于 ∞ 的最常见情况是，当渐进符号内部的函数是常数时，例如表达式 $O(1)$。我们无法从表达式中推断出哪个变量趋向于 ∞，因为表达式中没有变量。上下文必须消除歧义。例如，如果使用渐进符号的等式是 $f(n)=O(1)$，那么很明显我们感兴趣的变量是 n。然而，从上下文中知道感兴趣的变量是 n，可以通过使用 O 符号的正式定义来理解这个表达式：表达式 $f(n)=O(1)$ 意味着随着 n 趋近于 ∞，函数 $f(n)$ 被一个常数从上方限制。从技术上讲，如果我们在渐进符号本身中明确指示趋向于 ∞ 的变量可能会更少歧

义，但那会使符号变得混乱。相反，我们只需确保上下文清楚地表明哪个变量（或变量）趋向于 ∞ 即可。

当渐进符号内部的函数被正常数限制时，例如 $T(n) = O(1)$，我们通常会以另一种方式滥用渐进符号，尤其是在陈述递归关系式时。我们可能会写出类似于 $T(n) = O(1)$，其中 $n < 3$。根据 O 符号的正式定义，这个陈述是没有意义的，因为定义只说明对于某个 $n_0 > 0$，当 $n \geq n_0$ 时，$T(n)$ 被正数常数 c 限制在上面。$n < n_0$ 时，$T(n)$ 的值不一定受到限制。因此，在例子 $T(n) = O(1)$ 中，当 $n < 3$ 时，我们不能推断出任何关于 $T(n)$ 的限制，因为可能 $n_0 > 3$。

当我们说 $T(n) = O(1)$，其中 $n < 3$ 时，通常意味着存在一个正的常数 c，使得 $n < 3$ 时 $T(n) \leq c$。这种惯例使我们省去了命名限制常数的麻烦，使其保持匿名状态，同时我们将注意力集中在分析中更重要的变量上。其他渐进符号也有类似的滥用。例如，$T(n) = \Theta(1)$，其中 $n < 3$ 表示当 $n < 3$ 时，$T(n)$ 在正数常数上下限制。

偶尔，描述算法运行时间的函数可能无法定义某些输入大小，例如，当算法假设输入大小是 2 的精确幂时。我们仍然使用渐进符号来描述运行时间的增长，理解任何限制仅适用于函数被定义的情况。例如，假设 $f(n)$ 仅在自然数或非负实数的子集上定义。那么，$f(n) = O(g(n))$ 意味着在 $f(n)$ 的定义域上，即在 $f(n)$ 被定义的地方，对于所有 $n \geq n_0$，O 符号定义中的界 $0 \leq T(n) \leq cg(n)$ 成立。这种滥用很少被指出，因为通常从上下文中可以清楚地理解其含义。

在数学中，滥用符号是可以接受的，而且经常是可取的，只要我们不误用它。如果我们清楚地理解了滥用的含义，并且不得出错误的结论，它可以简化我们的数学语言，有助于提高我们的高层次理解，并帮助我们专注于真正重要的事情。

o 记号

O 符号提供的渐进上界可能是渐进紧的，也可能不是。界 $2n^2 = O\left(n^2\right)$ 是渐进紧的，但界 $2n = O\left(n^2\right)$ 不是。我们使用小 o 符号来表示不是渐进紧的上界。我们正式定义小 $o(g(n))$（"g 的 n 的小 o"）为集合

$$o(g(n)) = \{f(n) \text{ 对于任何正常数} c > 0 \text{存在常数} n_0 > 0, \text{使得} 0 \leq f(n) < cg(n) \text{对于所有} n \geq n_0\}$$

例如，$2n = o\left(n^2\right)$，但 $2n^2 \neq o\left(n^2\right)$。

O 符号和小 o 符号的定义相似。主要区别在于，在 $f(n) = O(g(n))$ 中，界 $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ 对于某些正常数 $c > 0$ 成立，但在 $f(n) = o(g(n))$ 中，界 $0 \leq f(n) < cg(n)$ 对于所有正常数 $c > 0$ 成立。直观地说，在小 o 符号中，当 n 变大时，函数 $f(n)$ 相对于 $g(n)$ 变得微不足道：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

一些作者使用这个极限作为小 o 符号的定义，但本书中的定义也限制了匿名函数为渐进非负。

ω 记号

类比于 O 符号和 o 符号，ω 符号是 Ω 符号的对应物。我们使用 ω 符号来表示不是渐进紧的下界。一种定义方法是：当且仅当 $g(n) \in o(f(n))$ 时，$f(n) \in \omega(g(n))$。然而，正式地，我们将 $\omega(g(n))$（"g 的 n 的小 ω"）定义为集合

$$\omega(g(n)) = \{f(n) \text{ 对于任何正常数} c > 0 \text{存在常数} n_0 > 0, \text{使得} 0 \leq cg(n) < f(n) \text{对于所有} n \geq n_0\}$$

在 o 符号的定义中，$f(n) < cg(n)$，而在 ω 符号的定义中，则相反：$\mathrm{cg}(n) < f(n)$。对于 ω 符号的例子，我们有 $n^2/2 = \omega(n)$，但 $n^2/2 \neq \omega\left(n^2\right)$。关系 $f(n) = \omega(g(n))$ 意味着

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

如果极限存在。也就是说，当 n 变大时，$f(n)$ 相对于 $g(n)$ 变得任意大。

比较函数

许多实数的关系属性也适用于渐进比较。对于以下内容，请假设 $f(n)$ 和 $g(n)$ 是渐进正的。

传递性

$$
\begin{aligned}
&f(n) = \Theta(g(n)) \text{ and } g(n) = \Theta(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = \Theta(h(n)),\\
&f(n) = O(g(n)) \text{ and } g(n) = O(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = O(h(n)),\\
&f(n) = \Omega(g(n)) \text{ and } g(n) = \Omega(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = \Omega(h(n)),\\
&f(n) = o(g(n)) \text{ and } g(n) = o(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = o(h(n)),\\
&f(n) = \omega(g(n)) \text{ and } g(n) = \omega(h(n)) \quad \text{imply} \quad f(n) = \omega(h(n)).
\end{aligned}
$$

反身性

$$
\begin{aligned}
f(n) &= \Theta(f(n)),\\
f(n) &= O(f(n)),\\
f(n) &= \Omega(f(n)).
\end{aligned}
$$

对称性

$$
f(n) = \Theta(g(n)) \text{ if and only if } g(n) = \Theta(f(n)).
$$

对称转换

$$
\begin{aligned}
f(n) = O(g(n)) \quad &\text{if and only if } g(n) = \Omega(f(n))\\
f(n) = o(g(n)) \quad &\text{if and only if } g(n) = \omega(f(n))
\end{aligned}
$$

由于这些属性适用于渐进符号，我们可以将两个函数 f 和 g 的渐进比较与两个实数 a 和 b 的比较进行类比：

$f(n) = O(g(n))$ is like $a \le b$,

$f(n) = \Omega(g(n))$ is like $a \ge b$,

$f(n) = \Theta(g(n))$ is like $a = b$,

$f(n) = o(g(n))$ is like $a < b$,

$f(n) = \omega(g(n))$ is like $a > b$.

如果 $f(n) = o(g(n))$，我们称 $f(n)$ 渐进小于 $g(n)$；如果 $f(n) = \omega(g(n))$，我们称 $f(n)$ 渐进大于 $g(n)$。

然而，实数的一个属性不能转化为渐进符号：

三分律：对于任何两个实数 a 和 b，恰好有一个成立：$a < b, a = b$ 或 $a > b$。

虽然可以比较任何两个实数，但并非所有函数都是渐进可比的。也就是说，对于两个函数 $f(n)$ 和 $g(n)$，可能既不满足 $f(n) = O(g(n))$，也不满足 $f(n) = \Omega(g(n))$。例如，我们无法使用渐进符号比较函数 n 和 $n^{1+\sin n}$，因为 $n^{1+\sin n}$ 中的指数值在 0 和 2 之间振荡，并取得了其中的所有值。

3.3 标准记号和常用函数

本节回顾了一些标准的数学函数和符号，并探讨了它们之间的关系。它还说明了渐进符号的使用。

单调性

如果 $m \le n$ 意味着 $f(m) \le f(n)$，则函数 $f(n)$ 是单调递增的。类似地，如果 $m \le n$ 意味着 $f(m) \ge f(n)$，则它是单调递减的。如果 $m < n$ 意味着 $f(m) < f(n)$，则函数 $f(n)$ 是严格递增的；如果 $m < n$ 意味着 $f(m) > f(n)$，则函数 $f(n)$ 是严格递减的。

向下取整和向上取整

对于任何实数 x，我们用 $\lfloor x \rfloor$（读作“x 的底部”）表示不大于 x 的最大整数，用 $\lceil x \rceil$（读作“x 的顶部”）表示不小于 x 的最小整数。向下取整函数是单调递增的，向上取整函数也是如此。

向下取整和向上取整遵循以下属性。对于任何整数 n，我们有

$$
\lfloor n \rfloor = n = \lceil n \rceil
$$

对于所有实数 x，我们有：

$$x-1<\lfloor x\rfloor\leq x\leq\lceil x\rceil<x+1.$$

我们还有

$$-\lfloor x\rfloor=\lceil -x\rceil,$$

或者等价的，

$$-\lceil x\rceil=\lfloor -x\rfloor.$$

对于任意实数 $x\geq 0$ 和整数 $a,b>0$，我们有

$$\left\lceil\frac{\lceil x/a\rceil}{b}\right\rceil=\left\lceil\frac{x}{ab}\right\rceil,$$
$$\left\lfloor\frac{\lfloor x/a\rfloor}{b}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{ab}\right\rfloor,$$
$$\left\lceil\frac{a}{b}\right\rceil\leq\frac{a+(b-1)}{b},$$
$$\left\lfloor\frac{a}{b}\right\rfloor\geq\frac{a-(b-1)}{b}.$$

对于任意整数 n 和实数 x，我们有

$$\lfloor n+x\rfloor=n+\lfloor x\rfloor,$$
$$\lceil n+x\rceil=n+\lceil x\rceil.$$

模算术

对于任何整数 a 和任何正整数 n，$a \bmod n$ 的值是商 a/n 的余数（或者说模数）：

$$a \bmod n=a-n\lfloor a/n\rfloor$$

即使 a 是负数，也有

$$0\leq a \bmod n<n$$

如果已经定义了一个整数除以另一个整数时的余数的明确概念，则提供特殊的符号来表示余数的相等是方便的。如果 $(a \bmod n)=(b \bmod n)$，我们写作 $a=b(\mathrm{mod}n)$，并说 a 等价于 b，模 n。换句话说，当 a 和 b 除以 n 时余数相同时，$a=b(\mathrm{mod}n)$。等价地，当且仅当 n 是 $b-a$ 的因子时，$a=b(\mathrm{mod}n)$。如果 a 与 b 在模 n 意义下不等价，则写作 $a\neq b(\mathrm{mod}n)$。

多项式

给定非负整数 d，n 的 d 次多项式是形如

$$p(n)=\sum_{i=0}^{d}a_i n^i,$$

的函数 $p(n)$，其中常数 $a_0,a_1,\ldots,a_d$ 是多项式的系数，且 $a_d\neq 0$。当且仅当 $a_d>0$ 时，多项式是渐进正的。对于渐进正的 d 次多项式 $p(n)$，有 $p(n)=\Theta\left(n^d\right)$。对于任何实常数 $a\geq 0$，函数 n^a 是单调递增的，而对于任何实常数 $a\leq 0$，函数 n^a 是单调递减的。如果 $f(n)=O\left(n^k\right)$，则称函数 $f(n)$ 是多项式有界的，其中 k 是某个常数。

指数

对于所有的实数 $a > 0, m$ 和 n，我们有以下性质：

$$\begin{aligned} a^0 &= 1, \\ a^1 &= a, \\ a^{-1} &= 1/a, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (a^m)^n &= (a^n)^m \\ a^m a^n &= a^{m+n}. \end{aligned}$$

对于所有的 n 和 $a \geq 1$，函数 a^n 对于 n 单调递增。某些时候，我们假定 $0^0 = 1$。

我们可以通过以下事实将多项式和指数函数的增长速率联系起来。对于所有实常数 $a > 1$ 和 b，有：

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$$

从上面的式子我们可以得出以下结论：

$$n^b = o\left(a^n\right)$$

因此，任何底数严格大于 1 的指数函数增长速度都比任何多项式函数快。

使用 e 表示自然对数函数的底数 2.71828…，对于所有实数 x，我们有：

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

其中“!”表示本节后面定义的阶乘函数。对于所有实数 x，我们有以下不等式：

$$1 + x \leq e^x,$$

等号成立当且仅当 $x = 0$。当 $|x| \leq 1$ 时，我们有近似关系 $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + x^2$。当 $x \to 0$ 时，用 $1 + x$ 来近似 e^x 是相当好的：

$$e^x = 1 + x + \Theta\left(x^2\right).$$

（在这个方程中，渐进符号用于描述 $x \to 0$ 时的极限行为，而不是 $x \to \infty$。）对于所有 x，我们有：

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

对数

我们使用以下记号：

$$\begin{aligned} \lg n &= \log_2 n && \text{(binary logarithm)}, \\ \ln n &= \log_e n && \text{(natural logarithm)}, \\ \lg^k n &= (\lg n)^k && \text{(exponentiation)} \\ \lg \lg n &= \lg(\lg n) && \text{(composition)}. \end{aligned}$$

我们采用以下符号约定：在没有括号的情况下，$\lg n + 1$ 表示 $(\lg n) + 1$ 而不是 $\lg(n + 1)$。

对于任何常数 $b > 1$，如果 $n \leq 0$，则函数 $\log_b n$ 未定义，如果 $n > 0$，则函数严格单调递增，如果 $0 < n < 1$，

则函数为负，如果 $n > 1$，则函数为正，如果 $n = 1$，则函数为 0。对于所有实数 $a > 0, b > 0, c > 0$ 和 n，我们有：

$$\begin{aligned} a &= b^{\log_b a}, \\ \log_c(ab) &= \log_c a + \log_c b, \\ \log_b a^n &= n \log_b a \\ \log_b a &= \frac{\log_c a}{\log_c b}, \\ \log_b(1/a) &= -\log_b a, \\ \log_b a &= \frac{1}{\log_a b}, \\ a^{\log_b c} &= c^{\log_b a}, \end{aligned}$$

这里，上面的每个等式中，对数的底都是 1。

根据方程（3.19），将对数的底从一个常数变为另一个常数只会使对数的值乘以一个常数因子。因此，我们经常在不关心常数因子的情况下使用符号 “$\lg n$”，例如在 O 符号中。计算机科学家发现 2 是对数最自然的底数，因为许多算法和数据结构涉及将问题分成两部分。当 $|x| < 1$ 时，$\ln(1 + x)$ 有一个简单的级数展开式：

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

对于 $x > -1$，我们同样有以下不等式：

$$\frac{x}{1 + x} \leq \ln(1 + x) \leq x$$

等号仅在 $x = 0$ 时成立。

如果 $f(n) = O\left(\lg^k n\right)$，其中 k 是某个常数，则称函数 $f(n)$ 是 polylogarithmically 有界的。我们可以通过在方程（3.13）中将 n 替换为 $\lg n$，将 a 替换为 2^a，来将多项式和 polylogarithm 的增长联系起来。对于所有实常数 $a > 0$ 和 b，我们有：

$$\lg^b n = o\left(n^a\right)$$

因此，任何正的多项式函数的增长速度都比任何 polylogarithmic 函数快。

阶乘

记号 $n!$（读作 “n 的阶乘”）定义为当整数 $n \geq 0$ 时，

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{if } n > 0. \end{cases}$$

从而有，$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$.

阶乘函数有一个相对宽松的上界：$n! \leq n^n$，因为 n 的阶乘中的每一项最大也就是 n。下面是斯特林近似：

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

e 是自然对数的底，斯特林近似给了我们一个阶乘函数的更加严格的上界和更加严格的下界。

$$\begin{aligned} n! &= o\left(n^n\right), \\ n! &= \omega\left(2^n\right), \\ \lg(n!) &= \Theta(n \lg n), \end{aligned}$$

斯特林近似在证明等式（3.28）时很有用。下面的等式对于所有的 $n \geq 1$ 都成立：$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\alpha_n}$ 这里 $\frac{1}{12n+1} < \alpha_n < \frac{1}{12n}$.

迭代函数

我们使用符号 $f^{(i)}(n)$ 表示函数 $f(n)$ 迭代应用 i 次到 n 的初始值。形式上，假设 $f(n)$ 是实数上的一个函数。

对于非负整数 i，我们递归地定义：

$$f^{(i)}(n) = \begin{cases} n & \text{if } i = 0 \\ f\left(f^{(i-1)}(n)\right) & \text{if } i > 0 \end{cases}$$

例如，如果有 $f(n) = 2n$，那么 $f^{(i)}(n) = 2^i n$ 。

迭代对数函数

我们使用符号 $\lg^* n$（读作 “n 的 log star”）表示迭代对数，定义如下。让 $\lg^{(i)} n$ 如上所述，其中 $f(n) = \lg n$。因为非正数的对数是未定义的，所以只有在 $\lg^{(i-1)} n > 0$ 时，$\lg^{(i)} n$ 才有定义。请注意将 $\lg^{(i)} n$（连续应用 i 次的对数函数，以 n 为参数开始）与 $\lg^i n$（将 n 取对数 i 次）区分开来。然后我们定义迭代对数函数为：

$$\lg^* n = \min\left\{i \geq 0 : \lg^{(i)} n \leq 1\right\}.$$

迭代对数是一个增长非常非常慢的函数：

$$\begin{aligned} \text{gg}^* 2 &= 1 \\ \text{gg}^* 4 &= 2 \\ \lg^* 16 &= 3, \\ \lg^* 65536 &= 4 \\ \lg^*\left(2^{65536}\right) &= 5 \end{aligned}$$

由于可观察宇宙中的原子数量估计约为 10^{80}，远小于 $2^{65536} = 10^{65536/\lg 10} \approx 10^{19,728}$，因此我们很少遇到一个输入大小 n，使得 $\lg^* n > 5$。

斐波那契数

我们将斐波那契数定义为 F_i，对于 $i \geq 0$，有如下成立：

$$F_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0, \\ 1 & \text{if } i = 1 \\ F_{i-1} + F_{i-2} & \text{if } i \geq 2. \end{cases}$$

因此，在前两个数字后，每个斐波那契数都是前两个数的和，形成了以下序列：

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

斐波那契数与黄金比 ϕ 及其共轭 $\hat{\phi}$ 有关，它们是方程的两个根：

$$x^2 = x + 1$$

黄金分割率的定义如下：

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ &= 1.61803\ldots \end{aligned}$$

and its conjugate, by

$$\begin{aligned} \widehat{\phi} &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ &= -.61803\ldots \end{aligned}$$

特别的，我们有公式 $F_i = \frac{\phi^i - \widehat{\phi}^i}{\sqrt{5}}$。因为 $|\hat{\phi}| < 1$，所以

$$\begin{aligned}\frac{|\hat{\phi}^i|}{\sqrt{5}} &< \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &< \frac{1}{2}\end{aligned}$$

可以推导出

$$F_i = \left\lfloor \frac{\phi^i}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor,$$

也就是说，第 i 个斐波那契数 F_i 等于 $\phi^i/\sqrt{5}$ 四舍五入到最近的整数。因此，斐波那契数呈指数增长。

第四章 分治策略

分治法是设计渐进有效算法的强大策略。我们在第 2.3.1 节中学习归并排序时看到了分治法的一个例子。在本章中，我们将探讨分治法的应用，并获得有价值的数学工具，可以用来解决分析分治算法时出现的递归关系式。

回想一下，对于分治法，你需要递归地解决给定问题（实例）。如果问题足够小-基本情况-你只需直接解决它而不进行递归。否则-递归情况-你需要执行三个特征步骤：

1. 将问题分成一个或多个子问题，这些子问题是相同问题的较小实例。2. 通过递归地解决它们来征服子问题。3. 将子问题的解组合成原始问题的解。

分治算法将一个大问题分解成更小的子问题，这些子问题本身可能会被分解成更小的子问题，以此类推。当递归到达基本情况且子问题足够小以直接解决而无需进一步递归时，递归停止。

递归式

为了分析递归分治算法，我们需要一些数学工具。递归式是一种方程，它描述了一个函数与其在其他通常更小的参数上的值之间的关系。递归式与分治方法密不可分，因为它们为我们提供了一种用数学方式描述递归算法运行时间的自然方法。在第 2.3.2 节中，我们分析归并排序的最坏情况运行时间时，看到了递归式的一个例子。

对于第 4.1 节和第 4.2 节中介绍的分治矩阵乘法算法，我们将导出描述它们最坏情况运行时间的递归式。为了理解这两个分治算法为什么表现出特定的性能，你需要学习如何解决描述它们运行时间的递归式。第 4.3-4.7 节介绍了几种解决递归式的方法。这些部分还探讨了递归式背后的数学，这可以为设计自己的分治算法提供更强的直觉。

我们希望尽快了解算法。因此，让我们现在只介绍一些递归式基础知识，然后在看完矩阵乘法示例后，我们将更深入地研究递归式，特别是如何解决它们。

递归式的一般形式是一个方程或不等式，使用函数本身描述整数或实数上的一个函数。它包含两个或多个情况，具体取决于参数。如果一个情况涉及在不同（通常更小）的输入上递归调用函数，则它是一个递归情况。如果一个情况不涉及递归调用，则它是一个基本情况。可能有零个、一个或多个函数满足递归式的声明。如果至少有一个函数满足它，则递归式是明确定义的，否则是不明确定义的。

算法递归式

我们将特别关注描述分治算法运行时间的递归式。如果对于每个充分大的阈值常数 $n_0 > 0$，递归式 $T(n)$ 满足以下两个性质，则它是算法递归式：

1. 对于所有 $n < n_0$，我们有 $T(n) = \Theta(1)$。

2. 对于所有 $n \geq n_0$，每个递归调用路径都在有限数量的递归调用内终止于定义的基本情况。

类似于我们有时滥用渐近符号（参见第 60 页），当一个函数未定义于所有参数时，我们理解这个定义受限于 $T(n)$ 被定义的 n 值。

为什么表示（正确的）分治算法最坏情况运行时间的递归式 $T(n)$ 会满足所有充分大的阈值常数的这些性质呢？第一个性质表明存在常数 c_1, c_2，使得对于 $n < n_0$，有 $0 < c_1 \leq T(n) \leq c_2$。对于每个合法输入，算法必须在有限时间内输出所解决问题的解（参见第 1.1 节）。因此，我们可以让 c_1 是调用过程并返回所需的最小时间，它必须是正的，因为需要执行机器指令来调用过程。如果某些 n 值没有合法输入，则该算法的运行时间可能对某些 n 值未定义，但它必须至少为一个 n 值定义，否则该“算法”将无法解决任何问题。因此，我们可以让 c_2 是该算法在任何大小为 $n < n_0$ 的输入上的最大运行时间，其中 n_0 是

为什么表示（正确的）分治算法最坏情况运行时间的递归式 $T(n)$ 会满足所有充分大的阈值常数的这些性质呢？第一个性质表明存在常数 c_1, c_2，使得对于 $n < n_0$，有 $0 < c_1 \leq T(n) \leq c_2$。对于每个合法输入，算法必须在有限时间内输出所解决问题的解（参见第 1.1 节）。因此，我们可以让 c_1 是调用过程并返回所需的最小时间，它必须是正的，因为需要执行机器指令来调用过程。如果某些 n 值没有合法输入，则该算法的运行时间可能对某些 n 值未定义，但它必须至少为一个 n 值定义，否则该“算法”将无法解决任何问题。因此，我们可以让 c_2 是

该算法在任何大小为 $n < n_0$ 的输入上的最大运行时间，其中 n_0 足够大，使得该算法解决大小小于 n_0 的至少一个问题。由于大小小于 n_0 的输入最多只有有限个，而且如果 n_0 足够大，则至少有一个输入。因此，$T(n)$ 满足第一个性质。如果第二个性质对于 $T(n)$ 不成立，则该算法不正确，因为它将陷入无限递归循环或无法计算解决方案。因此，可以推断出，正确的分治算法的最坏情况运行时间的递归式将是算法递归式。

递归式的约定

我们采用以下约定：

如果未明确说明基本情况，则假定递归式是算法递归式。这意味着你可以自由选择任何足够大的阈值常数 n_0，使得 $T(n) = \Theta(1)$ 的基本情况范围。有趣的是，当分析算法时，你可能会看到大多数算法递归式的渐近解不依赖于阈值常数的选择，只要它足够大使递归式定义良好即可。

在将定义在整数上的递归式转换为定义在实数上的递归式时，去掉任何向下取整或向上取整时，算法分治递归式的渐近解通常也不会改变。第 4.7 节给出了一个足够的条件，可以忽略大多数分治递归式中的向下取整和向上取整。因此，我们经常在没有向下取整和向上取整的情况下陈述算法递归式。这样做通常简化了递归式的陈述以及与它们进行的任何数学运算。

有时你可能会看到不是方程而是不等式的递归式，例如 $T(n) \le 2T(n/2) + \Theta(n)$。因为这样的递归式仅陈述了 $T(n)$ 的上限，所以我们使用 O-符号而不是 Θ-符号来表示其解。同样地，如果将不等式反转为 $T(n) \ge 2T(n/2) + \Theta(n)$，则由于递归式仅给出 $T(n)$ 的下限，因此我们在其解中使用 Ω-符号。

分治算法和递归式

本章通过使用递归式分析两个分治算法来说明分治方法，这两个算法用于矩阵乘法。第 4.1 节介绍了一种简单的分治算法，通过将大小为 n 的矩阵乘法问题分成四个大小为 $n/2$ 的子问题来递归地解决。该算法的运行时间可以由递归式表征：

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(1),$$

结果表明，该递归式的解为 $T(n) = \Theta\left(n^3\right)$。虽然这种分治算法并不比使用三重嵌套循环的直接方法更快，但由于 V. Strassen 提出的渐近更快的分治算法，我们将在第 4.2 节中探讨其原理。Strassen 的非凡算法将大小为 n 的问题分成了七个大小为 $n/2$ 的子问题，并递归地解决它们。Strassen 算法的运行时间可以由递归式描述：

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta\left(n^2\right),$$

该递归式的解为 $T(n) = \Theta\left(n^{\lg 7}\right) = O\left(n^{2.81}\right)$。Strassen 算法在渐近意义下超过了直接循环方法。

这两个分治算法都将大小为 n 的问题分成了几个大小为 $n/2$ 的子问题。虽然在使用分治时，所有子问题的大小通常相同，但并非总是如此。有时将大小为 n 的问题划分为不同大小的子问题是有益的，此时描述运行时间的递归式反映了不规则性。例如，考虑一种分治算法，它将大小为 n 的问题分成一个大小为 $n/3$ 的子问题和一个大小为 $2n/3$ 的子问题，需要 $\Theta(n)$ 的时间来划分问题并合并子问题的解。然后，该算法的运行时间可以由递归式描述：

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + \Theta(n)$$

结果表明，该递归式的解为 $T(n) = \Theta(n \lg n)$。我们甚至会在第 9 章看到一种算法，通过递归地解决一个大小为 $n/5$ 的子问题和一个大小为 $7n/10$ 的子问题来解决一个大小为 n 的问题，对于划分和合并步骤需要 $\Theta(n)$ 的时间。该算法的性能满足递归式：

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + \Theta(n)$$

其解为 $T(n) = \Theta(n)$。

虽然分治算法通常创建大小为原问题大小的常数分数的子问题，但并非总是如此。例如，线性搜索的递归版本（参见练习 2.1-4）仅创建一个子问题，其规模比原问题小一个元素。每个递归调用需要常数时间加上递归

地解决一个元素较少的子问题所需的时间，导致递归式：

$$T(n) = T(n-1) + \Theta(1)$$

其解为 $T(n) = \Theta(n)$。尽管如此，大多数高效的分治算法都解决了原问题大小的常数分数大小的子问题，这也是我们将重点关注的地方。

求解递归式

在第 4.1 节和第 4.2 节学习了矩阵乘法的分治算法之后，我们将探讨几种解决递归式的数学工具 - 即获得渐近 Θ_-、O 或 Ω 界限的工具。我们需要易于使用的工具，可以处理最常见的情况。但我们也需要通用工具，可以处理不太常见的情况，尽管需要更多的努力。本章提供了四种解决递归式的方法：

- 代入法（第 4.3 节）中，你猜测一个界限的形式，然后使用数学归纳法证明你的猜测是正确的，并解出常数。这种方法可能是解决递归式最健壮的方法，但它也要求你做出一个好的猜测，并产生归纳证明。
- 递归树法（第 4.4 节）将递归式建模为一棵树，其节点代表递归不同层次上产生的代价。为了解决递归式，你需要确定每个层次上的代价并将它们相加，可能使用第 A.2 节中用于界定求和的技巧。即使你不使用这种方法正式证明一个界限，它也可以帮助你猜测代入法中使用的界限形式。
- 主方法（第 4.5 节和第 4.6 节）是最简单的方法，当适用时。它提供了形如

  $$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

  的递归式的界限，其中 $a > 0$ 和 $b > 1$ 是常数，$f(n)$ 是给定的“驱动”函数。这种递归式在算法研究中比其他任何递归式都更常见。它描述了一个创建 a 个子问题的分治算法，每个子问题的大小是原问题的 $1/b$，使用 $f(n)$ 的时间进行划分和合并步骤。要应用主方法，你需要记忆三种情况，但一旦你掌握了这些情况，就可以轻松确定许多分治算法的运行时间渐近界限。
- Akra-Bazzi 方法（第 4.7 节）是解决分治递归式的通用方法。虽然它涉及微积分，但它可以用于攻击比主方法解决的更复杂的递归式。

4.1 正方形矩阵相乘

我们可以使用分治方法来相乘方阵。如果你以前见过矩阵，那么你可能知道如何相乘它们（否则，你应该阅读第 D.1 节）。让 $A = (a_{ik})$ 和 $B = (b_{jk})$ 是方阵，都是 $n \times n$。矩阵积 $C = A \cdot B$ 也是一个 $n \times n$ 的矩阵，其中对于 $i, j = 1, 2, \ldots, n$，C 的 (i, j) 项为

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

通常，我们假设矩阵是密集的，意味着大多数 n^2 个元素不为 0，而不是稀疏的，其中大多数 n^2 个元素为 0，非零元素可以比在 $n \times n$ 数组中更紧凑地存储。

计算矩阵 C 需要计算 n^2 个矩阵元素，每个元素都是输入自 A 和 B 的 n 个成对乘积之和。MATRIX-MULTIPLY 过程以直接的方式实现了这个策略，并略微推广了问题。它以三个 $n \times n$ 矩阵 A, B 和 C 作为输入，并将矩阵积 $A \cdot B$ 添加到 C 中，将结果存储在 C 中。因此，它计算的是 $C = C + A \cdot B$，而不仅仅是 $C = A \cdot B$。如果只需要乘积 $A \cdot B$，则在调用该过程之前将所有 n^2 个元素的 C 初始化为 0，这需要额外的 $\Theta(n^2)$ 时间。我们将看到，矩阵乘法的成本在渐近意义下支配了这个初始化成本。

```
MATRIX-MULTIPLY(A, B, C, n)
1  for i = 1 to n                    // compute entries in each of n rows
2      for j = 1 to n                // compute n entries in row i
3          for k = 1 to n
4              c_ij = c_ij + a_ik · b_kj   // add in another term of equation (4.1)
```

MATRIX-MULTIPLY 的伪代码如下。第 1-4 行的 for 循环计算每一行 i 的元素，并且在给定行 i 中，第 2-4 行的 for 循环计算每个列 j 的每个元素 c_{ij}。第 3-4 行的每次 for 循环迭代都会添加方程（4.1）的一个额外项。

因为每个三重嵌套的 for 循环都运行了 n 次迭代，并且每次执行第 4 行都需要常数时间，所以 MATRIX-MULTIPLY 过程的运行时间为 $\Theta(n^3)$。即使我们加上将 C 初始化为 0 的 $\Theta(n^2)$ 时间，运行时间仍然为 $\Theta(n^3)$。

一个简单的分治算法

让我们看看如何使用分治方法计算矩阵积 $A \cdot B$。对于 $n > 1$，分割步骤将 $n \times n$ 矩阵划分为四个 $n/2 \times n/2$ 子矩阵。我们假设 n 是 2 的幂次方，这样当算法递归时，我们可以保证子矩阵的维数是整数。（练习 4.1-1 要求您放松这个假设。）与 MATRIX-MULTIPLY 一样，我们实际上计算的是 $C = C + A \cdot B$。但是为了简化算法背后的数学，让我们假设 C 已经被初始化为零矩阵，这样我们确实在计算 $C = A \cdot B$。分割步骤将每个 $n \times n$ 矩阵 A, B 和 C 视为四个 $n/2 \times n/2$ 子矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

我们可以将矩阵乘积写为如下形式

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对应了以下等式

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}, \\ C_{12} &= A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}, \\ C_{21} &= A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}, \\ C_{22} &= A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} \end{aligned}$$

方程（4.5）-（4.8）涉及到八个 $n/2 \times n/2$ 乘法和四个 $n/2 \times n/2$ 子矩阵的加法。

当我们试图将这些方程转换为可以用伪代码描述甚至实现的算法时，有两种常见的矩阵分割实现方法。

一种策略是分配临时存储空间来保存 A 的四个子矩阵 A_{11}、A_{12}、A_{21} 和 A_{22}，以及 B 的四个子矩阵 B_{11}、B_{12}、B_{21} 和 B_{22}。然后将 A 和 B 中的每个元素复制到相应子矩阵的相应位置。在递归征服步骤之后，将每个 C 的四个子矩阵 C_{11}、C_{12}、C_{21} 和 C_{22} 中的元素复制到它们在 C 中的相应位置。这种方法需要 $\Theta(n^2)$ 时间，因为复制了 $3n^2$ 个元素。

第二种方法使用索引计算，更快且更实用。可以通过指示子矩阵位于矩阵中的位置而不触及任何矩阵元素来在矩阵内指定子矩阵。将矩阵（或递归地，子矩阵）划分仅涉及对此位置信息进行算术运算，该位置信息具有与矩阵大小无关的恒定大小。对子矩阵元素的更改会更新原始矩阵，因为它们占用相同的存储空间。接下来，我们假设使用索引计算，并且可以在 $\Theta(1)$ 时间内执行分割。练习 4.1-3 要求您展示，无论是使用复制的第一种方法还是使用索引计算的第二种方法对于矩阵乘法的总渐近运行时间都没有影响。但是对于其他分治矩阵计算，例如矩阵加法，可能会有所不同，练习 4.1-4 要求您展示。

MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 过程使用方程 (4.5) - (4.8) 来实现平方矩阵乘法的分治策略。与 MATRIX-MULTIPLY 一样，过程 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 计算 $C = C + A \cdot B$，因为如果需要，在调用过程之前可以将 C 初始化为 0，以仅计算 $C = A \cdot B$。

```
MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A, B, C, n)
 1  if n == 1
 2  // Base case.
 3       c_11 = c_11 + a_11 · b_11
 4       return
 5  // Divide.
 6  partition A, B, and C into n/2 × n/2 submatrices
         A_11, A_12, A_21, A_22; B_11, B_12, B_21, B_22;
         and C_11, C_12, C_21, C_22; respectively
 7  // Conquer.
 8  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_11, B_11, C_11, n/2)
 9  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_11, B_12, C_12, n/2)
10  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_21, B_11, C_21, n/2)
11  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_21, B_12, C_22, n/2)
12  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_12, B_21, C_11, n/2)
13  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_12, B_22, C_12, n/2)
14  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_22, B_21, C_21, n/2)
15  MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE(A_22, B_22, C_22, n/2)
```

当我们按照伪代码进行操作时，我们将推导一个递归式来描述其运行时间。假设 $T(n)$ 是使用此过程乘两个 $n \times n$ 矩阵的最坏情况时间。

在基本情况下，当 $n = 1$ 时，第 3 行只执行一个标量乘法和一个加法，这意味着 $T(1) = \Theta(1)$。按照我们的常规惯例，对于常数基本情况，我们可以在递归公式的声明中省略此基本情况。递归情况发生在 $n > 1$ 时。如前所述，我们将使用索引计算在第 6 行中分割矩阵，需要 $\Theta(1)$ 的时间。第 8-15 行递归地调用 MATRIX-Multiply-Recursive 共八次。前四个递归调用计算方程（4.5）-（4.8）的第一项，随后的四个递归调用计算并添加第二项。每个递归调用将 A 的子矩阵和 B 的子矩阵的积添加到 C 的相应子矩阵中，得益于索引计算。因为每个递归调用乘以两个 $n/2 \times n/2$ 矩阵，从而对总运行时间贡献了 $T(n/2)$，因此所有八个递归调用所需的时间为 $8T(n/2)$。没有合并步骤，因为矩阵 C 是原地更新的。因此，递归情况的总时间是分割时间和所有递归调用的时间之和，或 $\Theta(1) + 8T(n/2)$。

因此，省略基本情况的声明，我们将 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 的运行时间递归式表示为

$$T(n) = 8T(n/2) + \Theta(1)$$

正如我们将在第 4.5 节中从主方法中看到的那样，递归式（4.9）的解为 $T(n) = \Theta(n^3)$，这意味着它具有与直接 MATRIX-MULTIPLY 过程相同的渐近运行时间。

为什么这个递归式的 $\Theta(n^3)$ 解比第 41 页上合并排序递归式（2.3）的 $\Theta(n \lg n)$ 解大得多？毕竟，合并排序的递归式包含一个 $\Theta(n)$ 项，而递归矩阵乘法的递归式仅包含一个 $\Theta(1)$ 项。

让我们思考一下对于递归式（4.9），递归树会与第 43 页上图 2.5 所示的合并排序递归树相比会是什么样子。合并排序递归式中的因子 2 决定了每个树节点有多少个子节点，进而决定了每个树层次上有多少项贡献于总和。相比之下，对于 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 的递归式（4.9），每个递归树内部节点有八个子节点，而不是两个，导致递归树更加“丰满”，拥有更多的叶子节点，尽管内部节点每个都要小得多。因此，递归式（4.9）的解增长速度比递归式（2.3）的解快得多，这在实际解中得到了证明：$\Theta(n^3)$ 与 $\Theta(n \lg n)$。

4.2 矩阵相乘的 Strassen 算法

你可能很难想象任何矩阵乘法算法都可以在 $\Theta(n^3)$ 时间内完成，因为矩阵乘法的自然定义需要 n^3 个标量乘法。事实上，许多数学家认为，在 1969 年之前，无法在 $o(n^3)$ 时间内计算矩阵乘积，直到 V. Strassen [424] 发布了一种出色的递归算法，用于计算 $n \times n$ 矩阵的乘积。Strassen 的算法运行时间为 $\Theta(n^{\lg 7})$。由于 $\lg 7 = 2.8073549\ldots$，

Strassen 的算法运行时间为 $O\left(n^{2.81}\right)$，这比 $\Theta\left(n^3\right)$ 的 MATRIX-MULTIPLY 和 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 过程渐近更好。

Strassen 方法的关键是使用 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 过程中的分治思想，但使递归树不那么丰满。我们实际上会通过一个常数因子增加每个分治步骤的工作量，但减少丰满性将会收益更多。我们不会将递归（4.9）的八路分支完全降至递归（2.3）的二路分支，但我们会稍微改进它，这将产生很大的差异。Strassen 的算法不是执行 8 个 $n/2\times n/2$ 矩阵的递归乘法，而是只执行 7 个。消除一个矩阵乘法的代价是几个新的 $n/2\times n/2$ 矩阵的加减运算，但仍然只有一个常数。我们将采用通用术语称它们为“加法”，而不是在每个地方都说“加法和减法”，因为减法结构上与加法相同，只是符号不同。

为了了解如何减少乘法的数量，以及为什么减少乘法的数量对于矩阵计算可能是有利的，请假设你有两个数字 x 和 y，并且你想计算量 x^2-y^2。直接计算需要两个乘法来平方 x 和 y，然后是一次减法（可以将其视为“负加法”）。但让我们回想一下旧的代数技巧 $x^2-y^2=x^2-xy+xy-y^2=x(x-y)+y(x-y)=(x+y)(x-y)$。使用所需数量的这种表述，你可以计算和 $x+y$ 和差 $x-y$，然后将它们相乘，只需要一个乘法和两个加法。以一个额外的加法为代价，只需要一个乘法来计算看起来需要两个乘法的表达式。如果 x 和 y 是标量，没有太大的区别：两种方法都需要三个标量操作。然而，如果 x 和 y 是大矩阵，那么乘法的代价将超过加法的代价，在这种情况下，第二种方法优于第一种方法，尽管不是渐近优于。

Strassen 的策略是通过增加矩阵加法的代价来减少矩阵乘法的数量，这一点并不明显-也许是本书中最大的低估！与 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 一样，Strassen 的算法使用分治方法计算 $C=C+A\cdot B$，其中 AB 和 C 均为 $n\times n$ 矩阵，n 是 2 的幂。Strassen 的算法通过四个步骤从页 82 上的方程式（4.5）-（4.8）计算 C 的四个子矩阵 $C_{11}C_{12}C_{21}$ 和 C_{22}。我们将在分析成本的同时沿着这个过程开发一个总运行时间的递归 $T(n)$。让我们看看它是如何工作的：

1. 如果 $n=1$，则每个矩阵都包含一个单独的元素。执行单个标量乘法和单个标量加法，如 MATRIX-MULTIPLYReCURSIVE 中的第 3 行，需要 $\Theta(1)$ 时间，并返回。否则，将输入矩阵 A 和 B 以及输出矩阵 C 划分为 $n/2\times n/2$ 子矩阵，如方程式 (4.2) 所示。通过索引计算，这一步需要 $\Theta(1)$ 时间，就像 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 一样。

2. 创建 $n/2\times n/2$ 矩阵 $S_1S_2\ldots S_{10}$，每个矩阵是步骤 1 中两个子矩阵之和或差。创建并清零七个 $n/2\times n/2$ 矩阵 $P_1P_2\ldots P_7$ 以容纳七个 $n/2\times n/2$ 矩阵乘积。所有 17 个矩阵可以在 $\Theta\left(n^2\right)$ 时间内创建，并初始化 P_i。

3. 使用步骤 1 中的子矩阵和步骤 2 中创建的矩阵 $S_1S_2\ldots S_{10}$，递归计算每个七个矩阵乘积 $P_1P_2\ldots P_7$，需要 $7T(n/2)$ 时间。

4. 通过添加或减去各种 P_i 矩阵来更新结果矩阵 C 的四个子矩阵 $C_{11}C_{12}C_{21}C_{22}$，这需要 $\Theta\left(n^2\right)$ 时间。

我们很快就会看到步骤 $2-4$ 的细节，但我们已经有足够的信息来建立 Strassen 算法运行时间的递归。通常，步骤 1 中的基本情况需要 $\Theta(1)$ 时间，我们在陈述递归时将其省略。当 $n>1$ 时，步骤 1、2 和 4 总共需要 $\Theta\left(n^2\right)$ 的时间，而步骤 3 需要对 $n/2\times n/2$ 矩阵进行七次乘法。因此，我们得到了以下 Strassen 算法运行时间的递归式：

$$T(n)=7T(n/2)+\Theta\left(n^2\right)$$

与 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 相比，我们为一个递归子矩阵乘法付出了一个常数数量的子矩阵加法。一旦你理解了递归和它们的解决方案，你就能够看到这种权衡实际上导致了更低的渐近运行时间。根据第 4.5 节中的主方法，递归式 (4.10) 的解为 $T(n)=\Theta\left(n^{\lg 7}\right)=O\left(n^{2.81}\right)$，超过了 $\Theta\left(n^3\right)$ 时间算法。现在，让我们深入细节。第 2 步创建以下 10 个矩阵：

$$
\begin{aligned}
S_1 &= B_{12} - B_{22}, \\
S_2 &= A_{11} + A_{12}, \\
S_3 &= A_{21} + A_{22}, \\
S_4 &= B_{21} - B_{11}, \\
S_5 &= A_{11} + A_{22}, \\
S_6 &= B_{11} + B_{22}, \\
S_7 &= A_{12} - A_{22}, \\
S_8 &= B_{21} + B_{22}, \\
S_9 &= A_{11} - A_{21}, \\
S_{10} &= B_{11} + B_{12}.
\end{aligned}
$$

第 2 步将 $n/2 \times n/2$ 矩阵相加或相减 10 次，需要 $\Theta\left(n^2\right)$ 的时间。

第 3 步递归地乘以 $n/2 \times n/2$ 矩阵 7 次，计算以下 $n/2 \times n/2$ 矩阵，每个矩阵都是 A 和 B 子矩阵乘积之和或差的乘积：

$$
\begin{aligned}
P_1 &= A_{11} \cdot S_1 \left(= A_{11} \cdot B_{12} - A_{11} \cdot B_{22}\right), \\
P_2 &= S_2 \cdot B_{22} \left(= A_{11} \cdot B_{22} + A_{12} \cdot B_{22}\right), \\
P_3 &= S_3 \cdot B_{11} \left(= A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{11}\right), \\
P_4 &= A_{22} \cdot S_4 \left(= A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{11}\right), \\
P_5 &= S_5 \cdot S_6 \quad \left(= A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{22} + A_{22} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{22}\right), \\
P_6 &= S_7 \cdot S_8 \quad \left(= A_{12} \cdot B_{21} + A_{12} \cdot B_{22} - A_{22} \cdot B_{21} - A_{22} \cdot B_{22}\right), \\
P_7 &= S_9 \cdot S_{10} \quad \left(= A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{12} - A_{21} \cdot B_{11} - A_{21} \cdot B_{12}\right).
\end{aligned}
$$

算法执行的唯一乘法是这些方程式的中间列中的乘法。右列只是显示了这些乘积在步骤 1 中创建的原始子矩阵方面的值，但算法从未明确计算这些项。

第 4 步将步骤 3 中创建的各种 P_i 矩阵加到和减去乘积 C 的四个 $n/2 \times n/2$ 子矩阵。我们从以下等式开始：

$$
C_{11} = C_{11} + P_5 + P_4 - P_2 + P_6
$$

将右侧的计算展开，每个 P_i 单独展开一行，并垂直对齐抵消的项，我们可以看到对 C_{11} 的更新等于：

$$
\begin{array}{llll}
A_{11} \cdot B_{11} + A_{11} \cdot B_{22} + A_{22} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{22} & & & \\
- A_{22} \cdot B_{11} & & + A_{22} \cdot B_{21} & \\
- A_{11} \cdot B_{22} & & - A_{12} \cdot B_{22} & \\
- A_{22} \cdot B_{22} & - A_{22} \cdot B_{21} & + A_{12} \cdot B_{22} & + A_{12} \cdot B_{21} \\
\hline
A_{11} \cdot B_{11} & & & + A_{12} \cdot B_{21}
\end{array},
$$

对应了等式 (4.5)。类似的，我们设

$$
C_{12} = C_{12} + P_1 + P_2
$$

意思是更新为 C_{12} 等于

$$\begin{aligned}&A_{11}\cdot B_{12}-A_{11}\cdot B_{22}\\&+A_{11}\cdot B_{22}+A_{12}\cdot B_{22}\\\hline&A_{11}\cdot B_{12}+A_{12}\cdot B_{22},\end{aligned}$$

对应了等式 (4.6)。设

$$C_{21}=C_{21}+P_3+P_4$$

表示更新为 C_{21} 等于

$$\begin{aligned}&A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{11}\\&-A_{22}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21}\\&A_{21}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{21},\end{aligned}$$

对应了等式 (4.7)。最后，设

$$C_{22}=C_{22}+P_5+P_1-P_3-P_7$$

表示更新为 C_{22} 等于

$$\begin{array}{llll}A_{11}\cdot B_{11}+A_{11}\cdot B_{22}+A_{22}\cdot B_{11}+A_{22}\cdot B_{22} & & & \\ -A_{11}\cdot B_{22} & & +A_{11}\cdot B_{12} & \\ & -A_{22}\cdot B_{11} & & -A_{21}\cdot B_{11}\\ -A_{11}\cdot B_{11} & & -A_{11}\cdot B_{12}+A_{21}\cdot B_{11}+A_{21}\cdot B_{12} & \\ \hline & A_{22}\cdot B_{22} & & +A_{21}\cdot B_{12}\ ,\end{array}$$

这对应于方程 (4.8)。总的来说，由于在第 4 步中我们要进行 12 次 $n/2\times n/2$ 矩阵的加减，因此该步骤确实需要 $\Theta\left(n^2\right)$ 的时间。

我们可以看出，Strassen 算法的步骤 1-4 使用 7 个子矩阵乘法和 18 个子矩阵加法来生成正确的矩阵乘积。我们还可以看出，递归式 (4.10) 描述了它的运行时间。由于第 4.5 节表明该递归式的解为 $T(n)=\Theta\left(n^{\lg 7}\right)=o\left(n^3\right)$，因此 Strassen 方法在渐近意义下击败了 $\Theta\left(n^3\right)$ 的 MATRIX-MULTIPLY 和 MATRIX-MULTIPLY-RECURSIVE 过程。

4.3 用代入法求解递归式

4.4 用递归树方法求解递归式

4.5 用主方法求解递归式

4.6 连续主定理的证明

4.7 Akra-Bazzi 递归式

第五章 概率分析与随机算法

5.1 雇佣问题

假设你需要雇用一位新的办公室助手。你之前的招聘尝试都没有成功，因此你决定使用一家就业机构。就业机构每天向你推荐一个候选人。你会面试该候选人，然后决定是否雇用他。你必须向就业机构支付一笔小费来面试申请人。实际上雇用一个申请人更加昂贵，因为你必须解雇当前的办公室助手，并向就业机构支付大量的招聘费用。你承诺始终拥有最适合工作的人。因此，你决定在面试每个申请人之后，如果该申请人比当前的办公室助手更有资格，你将解雇当前的办公室助手并雇用新的申请人。你愿意支付这种策略的结果费用，但你希望估计这种费用会是多少。

本页上的 HIRE-ASSISTANT 过程以伪代码表示了这种招聘策略。办公室助手工作的候选人编号为 1 到 n，按照这个顺序进行面试。该过程假定在面试候选人 i 之后，你可以确定候选人 i 是否是迄今为止最优秀的候选人。它首先创建一个虚拟候选人，编号为 0，该候选人的资质低于其他所有候选人。

这个问题的成本模型与第 2 章中描述的模型不同。我们关注的不是 HIRE-ASSISTANT 的运行时间，而是面试和招聘所支付的费用。表面上，分析此算法的成本表面上，分析这个问题的成本似乎与分析归并排序的运行时间非常不同。然而，所使用的分析技术无论是分析成本还是运行时间都是相同的。在任何情况下，我们都在计算执行某些基本操作的次数。

面试的成本很低，例如 c_i，而招聘则很昂贵，成本为 c_h。假设一共雇用了 m 人，则与此算法相关的总成本为 $O(c_i n + c_h m)$。无论你雇用多少人，你总是会面试 n 个候选人，因此总是会产生与面试相关的 cost $c_i n$。因此，我们集中分析 $c_h m$，即招聘成本。这个数量取决于你面试候选人的顺序。

这种情况作为一种常见的计算范例。算法通常需要通过检查序列的每个元素并维护当前的“赢家”来找到序列中的最大或最小值。招聘问题模拟了一个过程多久更新其当前获胜元素的概念。

最坏情况分析

在最坏的情况下，你实际上会雇用你面试的每个候选人。如果候选人按照严格递增的质量顺序到来，则会发生这种情况，此时你将雇用 n 次，总雇用成本为 $O(c_h n)$。

当然，候选人并不总是按照质量递增的顺序到来。事实上，你不知道他们到达的顺序，也无法控制这个顺序。因此，自然而然地会问，在典型或平均情况下我们期望会发生什么。

可能性分析

概率分析是在问题分析中使用概率的方法。最常见的情况是，我们使用概率分析来分析算法的运行时间。有时我们使用它来分析其他量，例如 HIRE-ASSISTANT 过程中的招聘成本。为了进行概率分析，我们必须使用关于输入分布的知识或假设。然后我们分析我们的算法，计算平均情况下的运行时间，即在可能输入的分布上进行平均或期望值计算。在报告这样的运行时间时，我们称之为平均情况下的运行时间。

在决定输入分布时必须小心。对于某些问题，你可以合理地假设所有可能输入的集合，并使用概率分析作为设计高效算法的技术和获得有关问题的见解的手段。对于其他问题，你无法确定合理的输入分布，在这些情况下你无法使用概率分析。

对于招聘问题，我们可以假设申请人以随机顺序到来。对于这个问题，这意味着什么呢？我们假设你可以比较任何两个候选人并决定哪个更有资格，这就是说，候选人之间存在一个完全顺序。（有关完全顺序的定义，请参见第 B.2 节。）因此，你可以为每个候选人排名，从 1 到 n 使用 rank(i) 表示申请人 i 的排名，并采用约定，即较高的排名对应更有资格的申请人。有序列表 $\langle \text{rank}(1), \text{rank}(2), \ldots, \text{rank}(n) \rangle$ 是列表 $\langle 1, 2, \ldots, n \rangle$ 的排列。说申请人以随机顺序到来等价于说这个排名列表等可能地是 1 到 n 的 $n!$ 个排列中的任何一个。或者，我们说这些排名形成一个均匀随机排列，也就是说，每个可能的 $n!$ 个排列出现的概率相等。第 5.2 节包含了招聘问题的概率分析。

随机算法

为了使用概率分析，你需要了解有关输入分布的一些信息。在许多情况下，你对输入分布了解甚少。即使你确实了解有关分布的一些信息，你可能无法将此知识计算模型化。然而，概率和随机性经常作为算法设计和分析的工具，通过使算法的一部分表现出随机性。

在招聘问题中，似乎候选人是以随机顺序呈现给你的，但你无法知道他们是否真的是这样。因此，为了为招聘问题开发随机化算法，你需要更多地控制你面试候选人的顺序。因此，我们将略微改变模型。就业机构提前向你发送 n 个候选人的列表。每天，你随机选择要面试的候选人。虽然你对候选人一无所知（除了他们的姓名），但我们已经做出了重大改变。你没有接受就业机构给你的顺序并希望它是随机的，而是获得了控制过程并强制执行随机顺序。

更一般地说，如果算法的行为不仅由其输入确定，而且还由随机数生成器产生的值确定，则称该算法为随机化算法。我们假设我们可以使用随机数生成器 RANDOM。调用 RANDOM(a, b) 将返回一个整数，该整数在 a 和 b 之间（包括 a 和 b），每个这样的整数具有相等的可能性。例如，RANDOm$(0, 1)$ 以 $1/2$ 的概率产生 0，并以 $1/2$ 的概率产生 1。调用 RANDOM$(3, 7)$ 返回 $3, 4, 5, 6$ 或 7 中的任何一个，每个整数的概率为 $1/5$。RANDOM 返回的每个整数都独立于先前调用返回的整数。你可以将 RANDOM 想象为掷一个 $(b - a + 1)$ 面的骰子来获取其输出。（在实践中，大多数编程环境提供伪随机数生成器：一种返回“看起来”统计上随机的数字的确定性算法。）

在分析随机算法的运行时间时，我们将运行时间的期望值取自由随机数生成器返回的值的分布。我们通过将随机化算法的运行时间称为期望运行时间来将这些算法与输入为随机的算法区分开来。通常，在概率分布涉及算法输入时，我们讨论平均情况下的运行时间，而在算法本身进行随机选择时，我们讨论期望运行时间。

5.2 指示器随机变量

5.3 随机算法

在前一节中，我们展示了了解输入分布如何帮助我们分析算法的平均情况行为。如果你不知道分布怎么办？那么你就无法进行平均情况分析。然而，如第 5.1 节所述，你可能能够使用随机化算法。

对于像招聘问题这样的问题，假设输入的所有排列是等可能的是有帮助的，概率分析可以指导我们开发随机化算法。我们不是假设输入的分布，而是强制执行分布。特别地，在运行算法之前，让我们随机排列候选人，以强制实施每个排列等可能的属性。虽然我们已经修改了算法，但我们仍然期望大约聘请新办公助理 $\ln n$ 次。但现在我们期望这对于任何输入都是如此，而不是对于从特定分布中提取的输入。

让我们进一步探讨概率分析和随机化算法之间的区别。在第 5.2 节中，我们声称，在假设候选人以随机顺序到达的情况下，聘请新办公助理的预期次数约为 $\ln n$。该算法是确定性的：对于任何特定输入，聘请新办公助理的次数始终相同。此外，聘请新办公助理的次数因不同输入而异，并且取决于各候选人的排名。由于此数字仅取决于候选人的排名，因此为了表示特定输入，我们可以按顺序列出候选人的排名 $\langle \text{rank}(1), \text{rank}(2), \ldots, \text{rank}(n) \rangle$。给定排名列表 $A_1 = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$，新办公助理总是被聘请 10 次，因为每个连续的候选人都比前一个更好，并且在每次迭代中都会执行 HIRE-ASSISTANT 的第 5-6 行。给定排名列表 $A_2 = \langle 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$，只有在第一次迭代中才会聘请新办公助理。给定排名列表 $A_3 = \langle 5, 2, 1, 8, 4, 7, 10, 9, 3, 6 \rangle$，将聘请三次新办公助理，即面试排名为 5、8 和 10 的候选人。回想一下，我们算法的成本取决于你聘请新办公助理的次数，因此我们可以看到存在昂贵的输入（例如 A_1），廉价的输入（例如 A_2）和中等昂贵的输入（例如 A_3）。

另一方面，考虑随机化算法，该算法首先对候选人列表进行排列，然后确定最佳候选人。在这种情况下，我们在算法中随机化，而不是在输入分布中随机化。给定特定的输入，例如上面的 A_3，我们无法确定最大值被更新的次数，因为这个数量在每次运行算法时都不同。第一次在 A_3 上运行算法时，它可能会生成排列 A_1 并执行 10 次更新。但是第二次运行算法时，它可能会生成排列 A_2 并仅执行一次更新。第三次运行算法时，它可能执行其他数量的更新。每次运行算法时，其执行取决于所做的随机选择，并且很可能与算法的先前执行不同。对于该算法和许多其他随机化算法，没有特定的输入会引起其最坏情况的行为。即使你最坏的敌人也不能产生一个糟糕的输入数组，因为随机排列使输入顺序无关紧要。仅当随机数生成器产生“不幸”的排列时，随机化算法才

表现不佳。

对于招聘问题，在代码中唯一需要更改的是随机排列数组，就像在 RANDOMIZED-HIRE-ASSISTANT 过程中所做的那样。这个简单的变化创建了一个随机化算法，其性能与假设候选人按随机顺序呈现所获得的性能相匹配。

5.4 概率分析和指示器随机变量的进一步使用

这个高级部分通过四个例子进一步说明了概率分析。第一个例子确定了在一个有 k 个人的房间里，其中两个人有相同的生日的概率。第二个例子研究了将球随机投掷到箱子中时会发生什么。第三个例子调查了抛硬币时连续正面的“连胜”情况。最后一个例子分析了一个招聘问题的变体，在这个问题中你必须在没有实际面试所有候选人的情况下做出决策。

5.4.1 生日悖论

我们的第一个例子是生日悖论。在一个房间里，必须有多少人才有 50% 的概率其中两个人是同一年的同一天出生的？答案非常少。悖论在于，实际上比一年中的天数甚至比一年中天数的一半还要少，我们将看到这一点。

为了回答这个问题，我们用整数 $1, 2, \ldots, k$ 对房间里的人进行编号，其中 k 是房间里的人数。我们忽略闰年问题，并假设所有年份都有 $n = 365$ 天。对于 $i = 1, 2, \ldots, k$，让 b_i 表示第 i 个人的生日是哪一天，其中 $1 \le b_i \le n$。我们还假设生日在一年中 n 天内均匀分布，因此对于 $i = 1, 2, \ldots, k$ 和 $r = 1, 2, \ldots, n$，$\Pr\{b_i = r\} = 1/n$。

给定两个人 i 和 j，他们具有相同生日的概率取决于随机选择生日是否独立。从现在开始，我们假设生日是独立的，因此 i 和 j 的生日都落在第 r 天的概率为：

$$\begin{aligned}\Pr\{b_i = r \text{ and } b_j = r\} &= \Pr\{b_i = r\}\Pr\{b_j = r\} \\ &= \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

所以他们落到同一天过生日的概率是

$$\begin{aligned}\Pr\{b_i = b_j\} &= \sum_{r=1}^{n} \Pr\{b_i = r \text{ and } b_j = r\} \\ &= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

第二部分

排序和顺序统计量

简介

第六章 堆排序

第七章 快速排序

第八章 线性时间排序

第九章 中位数和顺序统计量

第三部分

数据结构

简介

第十章 基本数据结构

第十一章 哈希表

第十二章 二叉搜索树

第十三章 红黑树

第四部分

高级设计与分析技术

简介

第十四章 动态规划

第十五章 贪心算法

第十六章 均摊分析

第五部分

高级数据结构

简介

第十七章 增强数据结构

第十八章 B 树

第十九章 用于不相交集合的数据结构

第六部分

图算法

简介

第二十章 基本的图算法

第二十一章 最小生成树

第二十二章 单源最短路径

第二十三章 所有结点对的最短路径问题

第二十四章 最大流

第二十五章 二部图匹配

第七部分

算法问题选编

简介

第二十六章 并行算法

第二十七章 在线算法

第二十八章 矩阵操作

第二十九章 线性规划

第三十章 多项式与快速傅立叶变换

第三十一章 数论算法

第三十二章 字符串匹配

第三十三章 机器学习算法

第三十四章 NP 完全性

第三十五章 近似算法

第八部分

附录：数学基础知识

简介

当你分析算法时，通常需要借助一些数学工具。其中一些工具就像高中代数那样简单，但其他工具可能对你来说是新的。在第一部分中，我们看到了如何操作渐近符号和解决递归问题。这个附录包括了分析算法中使用的其他几个概念和方法的汇编。正如第一部分的介绍中所指出的那样，你可能在阅读本书之前就已经看过这个附录中的大部分材料，尽管这里出现的一些特定符号约定可能与你在其他地方看到的不同。因此，你应该把这个附录当作参考资料。然而，与本书的其余部分一样，我们包括了练习和问题，以便你提高这些领域的技能。

附录 A 提供了评估和限定求和的方法，在算法分析中经常出现。这里的许多公式都出现在任何微积分教材中，但你会发现把这些方法编制在一个地方很方便。

附录 B 包含了集合、关系、函数、图和树的基本定义和符号。它还给出了这些数学对象的一些基本属性。

附录 C 从计数的基本原理开始：排列、组合等。其余部分包含基本概率的定义和属性。本书中大多数算法不需要概率来进行分析，因此你可以在第一次阅读时轻松地省略本章后面的部分，甚至不用浏览它们。稍后，当你遇到想更好地理解的概率分析时，你会发现附录 C 为参考目的组织得很好。

附录 D 定义了矩阵及其运算和一些基本属性。如果你已经学过线性代数课程，那么你可能已经看过这些材料的大部分内容。但是，你可能会发现在一个地方查找符号和定义很有帮助。

求和

当一个算法包含迭代控制结构，如 while 或 for 循环时，你可以将其运行时间表示为循环体每次执行所花费的时间之和。例如，第 2.2 节认为插入排序的第 i 次迭代在最坏情况下需要的时间与 i 成比例。将每次迭代花费的时间相加得到了求和（或级数）$\sum_{i=2}^{n} i$。评估这个求和产生了算法最坏情况下运行时间为 $\Theta\left(n^2\right)$ 的界限。这个例子说明了为什么你应该知道如何操作和限制求和。

附录 A.1 列出了涉及求和的几个基本公式。附录 A.2 提供了有用的限制求和技巧。附录 A.1 中的公式没有证明，但其中一些的证明出现在附录 A.2 中，以说明该部分的方法。你可以在任何微积分教材中找到大多数其他证明。

集合

计数和概率

矩阵