

Laborpraktikum MODSIM

1. Praktikumsaufgabe

Protokoll

Gruppe SS22-1: Linhsen, Luca
Troll, Aaron
Wang, Zhi

Abgabedatum: 06.05.2022

Aufgabe 1: Verbesserte Polygonzugmethode mit Schätzung des LDF

Verifizierung des lokalen Diskretisierungsfehlers:

① Überprüfen des max. geschätzten LDF
für das System gilt

$$f(\hat{x}_i, u_i, t_i) = -\frac{1}{T_m} \hat{x}_i + \frac{1}{T_m} u_i$$

der max. geschätzte LDF ist \hat{d}_{12}

$$\hat{d}_{12} = \frac{h}{6} (k_1 - 2k_2 + k_3)$$

kurz vor dem Sprungzeitpunkt $t_i = 0,95$

$$k_1 = 0 ; k_2 = 0$$

$$k_3 = \frac{u_0}{T_m} = 0,55$$

$$\hat{d}_{12} = 0,0083 \rightarrow \text{stimmt überein}$$

② Obere Schranke von d_{i+1}

Aus Interesse haben wir im Programm auch den exakten LDF bestimmt und wollen nun überprüfen, ob die obere Schranke stimmt

$$|d_{i+1}| \leq \frac{h^3}{6} \max_{\tau} |\ddot{x}(\tau)|, \tau \in [t_i, t_{i+1}]$$

$$x(t) = \begin{cases} u_0(1 - e^{-\frac{(t-t_s)}{T_m}}), & t \geq t_s \\ 0, & t < t_s \end{cases}$$

$$\ddot{x}(t) = \begin{cases} \frac{u_0}{T_m^3} e^{-\frac{(t-t_s)}{T_m}}, & t \geq t_s \\ 0, & t < t_s \end{cases}$$

$$\max_{\tau} |\ddot{x}(\tau)| \stackrel{\tau=t_s}{=} \frac{u_0}{T_m^3} \quad \text{bei } i=11$$

$$|d_{12}| = \frac{h^3}{6} \cdot \frac{u_0}{T_m^3} = 8,33 \cdot 10^{-7}$$

Der von uns bestimmte maximale exakte LDF liegt bei $8,31 \cdot 10^{-7}$ und stimmt somit gut überein.

Erklärung des Verhaltens von LDF und GDF (Grafiken siehe Anhang):

Das Model kann der exakten Lösung nach dem Sprung am Eingang zunächst nicht folgen. Der lokale Diskretisierungsfehler ist hier am größten und konvergiert im weiteren Verlauf gegen Null, wobei der geschätzte Fehler \hat{d}_{12} deutlich größer ist als der tatsächliche Fehler d_{12} zum Zeitpunkt des Sprungs. Der globale Diskretisierungsfehler summiert sich zunächst weiter auf und konvergiert dann gegen Null. Dies ist dadurch möglich, dass der Fortpflanzungsfehler negativ ist und wie der lokale Diskretisierungsfehler gegen Null konvergiert, sodass die Summe $g_{i+1} = d_{i+1} + g_1 + e_{i+1}$ für große i auch gegen Null konvergiert.

Aufgabe 2: Automatische Schrittweitensteuerung

Berechnung von h_{\min} und h_{\max} :

Bestimmung von h_{\min} , h_{\max}

Begrenzung von h :

- Obere Grenze $h_{\text{krit}} \hat{=} h_{\max}$ zur Sicherung der num. Stabilität
- Untere Grenze h_{\min} auf Grund von Rundungsfehlern

① Berechnung von h_{\max}

Integrationsvorschrift für VPG (hier mit skalarem Zustand x):

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + h k_2$$

$$\text{mit } k_2 = \lambda \left(\hat{x}_i + \frac{h}{2} k_1 \right) ; k_1 = \lambda \hat{x}_i$$

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i + h \cdot \lambda \left(\hat{x}_i + \frac{h}{2} \lambda \hat{x}_i \right) = \hat{x}_i \left(1 + h \cdot \lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 \right)$$

$$\text{mit } \mu = h \lambda$$

$$\hat{x}_{i+1} = \hat{x}_i \left(1 + \mu + \frac{1}{2} \mu^2 \right)$$

damit ergibt sich die Übertragungsfunktion $G(z)$

$$G(z) = \frac{1}{z - 1 - \mu - \frac{1}{2} \mu^2}$$

die char. Gleichung lautet also

$$z = 1 + \mu + \frac{1}{2} \mu^2$$

Die Stabilität ist gegeben für $|z| < 1$, also

$$\left| 1 + \mu + \frac{1}{2} \mu^2 \right| < 1$$

$$\left| 1 + h \cdot \lambda + \frac{1}{2} h^2 \lambda^2 \right| < 1$$

$$\text{mit } \lambda = -\frac{1}{T_m}$$

$$\left| 1 - \frac{h}{T_m} + \frac{h^2}{2 T_m^2} \right| < 1$$

1. Fall: $1 \dots 1 < 0$

$$-1 + \frac{h}{T_m} - \frac{h^2}{2T_m^2} < 1 \quad | \cdot (-1) \quad | +1$$

$$2 - \frac{h}{T_m} + \frac{h^2}{2T_m^2} > 0 \quad | \cdot 2T_m^2$$

$$4T_m^2 - 2hT_m + h^2 > 0$$

$$(2T_m - h)^2 = 4T_m^2 - 4T_m h + h^2$$

$$\underbrace{(2T_m - h)^2}_{>0} + \underbrace{2T_m h}_{>0} > 0$$

erfüllt für $h > 0$

Das Ergebnis stimmt auch mit dem in der Praxis verwendeten Stabilitätsintervall

$$-2 < h \cdot \lambda < 0$$

überein, da $\lambda = -1/T_m$

$$\Rightarrow \underline{h_{\max} = 2T_m}$$

2. Fall: $1 \dots 1 > 0$

$$1 - \frac{h}{T_m} + \frac{h^2}{2T_m^2} < 1$$

$$\frac{h}{T_m} \left(\frac{h}{2T_m} - 1 \right) < 0$$

> 0 , da $h > 0$ (s.o.), $T_m > 0$

$$\frac{h}{2T_m} - 1 < 0$$

$$h < 2T_m$$

(2) Berechnung von h_{\min}

Es soll gewährleistet sein, dass

$$|\hat{d}_{i+1}| < \varepsilon_{\text{LOF}}$$

für VPG gilt:

$$|\hat{d}_{i+1}| = \left| \frac{h}{6} (k_1 - 2k_2 + k_3) \right|$$

$$k_1 = -\frac{1}{T_m} \hat{x}(t_i) + \frac{1}{T_m} u(t_i)$$

$$k_2 = -\frac{1}{T_m} \left[\hat{x}(t_i) + \frac{h}{2} k_1 \right] + \frac{1}{T_m} u(t_i + \frac{h}{2})$$

$$k_3 = -\frac{1}{T_m} \left[\hat{x}(t_i) - h k_1 + 2h k_2 \right] + \frac{1}{T_m} u(t_i + h)$$

Der größte lokale Diskretisierungsfehler \hat{d}_{\max} ist der, welcher aus im Integrationsschritt 0,9s zu 1,0s entsteht, also bei $(t_i < t_s) \wedge (t_i + h) \geq t_s$ mit $t_s = 1\text{s}$ - Zeitpunkt des Sprungs von u

es ergeben sich folgende Werte:

$$t_i < t_s \rightarrow \hat{x}(t_i) = 0; u(t_i) = 0 \rightarrow k_1 = 0$$

$$t_i + \frac{h}{2} < t_s \rightarrow u(t_i + \frac{h}{2}) = 0 \rightarrow k_2 = 0$$

$$t_i + h \geq t_s \rightarrow u(t_i + h) = \Delta u \rightarrow k_3 = \frac{\Delta u}{T_m}$$

Damit folgt:

$$|\hat{d}_{\max}| = \left| \frac{h \cdot \Delta u}{6 T_m} \right| \leq \varepsilon_{\text{LOF}} \quad \text{hier: } \Delta u = u_0$$

$$\Rightarrow h_{\min} \leq \frac{6 T_m}{u_0} \varepsilon_{\text{LOF}} = 12 \varepsilon_{\text{LOF}} = 12 \cdot 10^{-6} \dots 12 \cdot 10^{-5}$$

Wahl des Intervalls:

$$\frac{6 T_m}{u_0} \varepsilon_{\text{LOF}} < h < 2 T_m$$

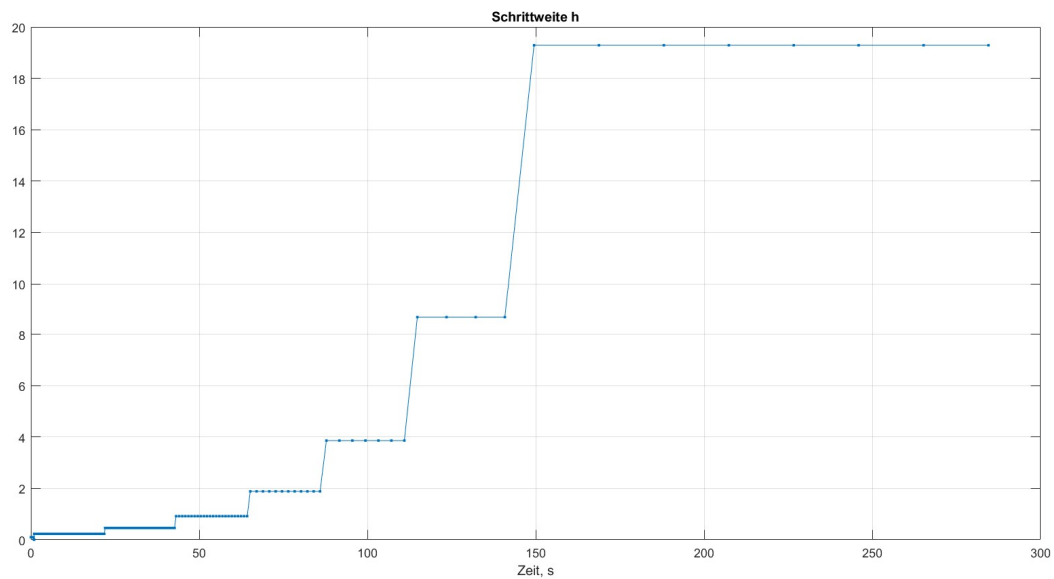


Abbildung 1: Schrittweite h

Erklärung:

Zu erkennen ist, dass die Schrittweite h sich nur in dem vorgegebenen Grenzgebiet zwischen h_{min} und h_{max} bewegt, wobei die Schrittweite zum Sprungzeitpunkt den kleinsten Wert hat. Außerdem lässt sich deutlich sehen, dass die Schrittweite immer größer gewählt wird, je kleiner der globale Diskretisierungsfehler ist. Dadurch wurde der Rechenaufwand gerade zum Ende der Simulation deutlich verringert, da nur noch einige wenige Schritte bestimmt werden müssen.

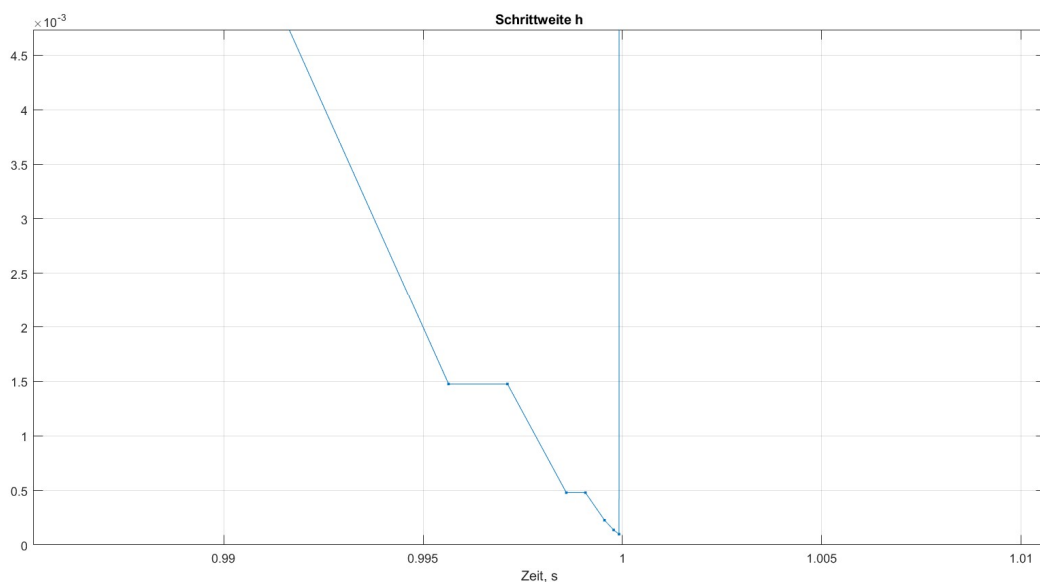


Abbildung 2: Schrittweite h zum Zeitpunkt des Sprungs

Die Schrittweite h wird zum Zeitpunkt des Sprungs auf Grund der starken Änderung am Eingang des PT1-Gliedes stark verkleinert, damit die Grenze ε_{LDF} des lokalen Diskretisierungsfehlers $\hat{d}_{i+1} < \varepsilon_{LDF}$ eingehalten werden kann. Dadurch wurde der maximale lokale Diskretisierungsfehler \hat{d}_{max} im Gegensatz zur Simulation ohne Schrittweitensteuerung verringert.

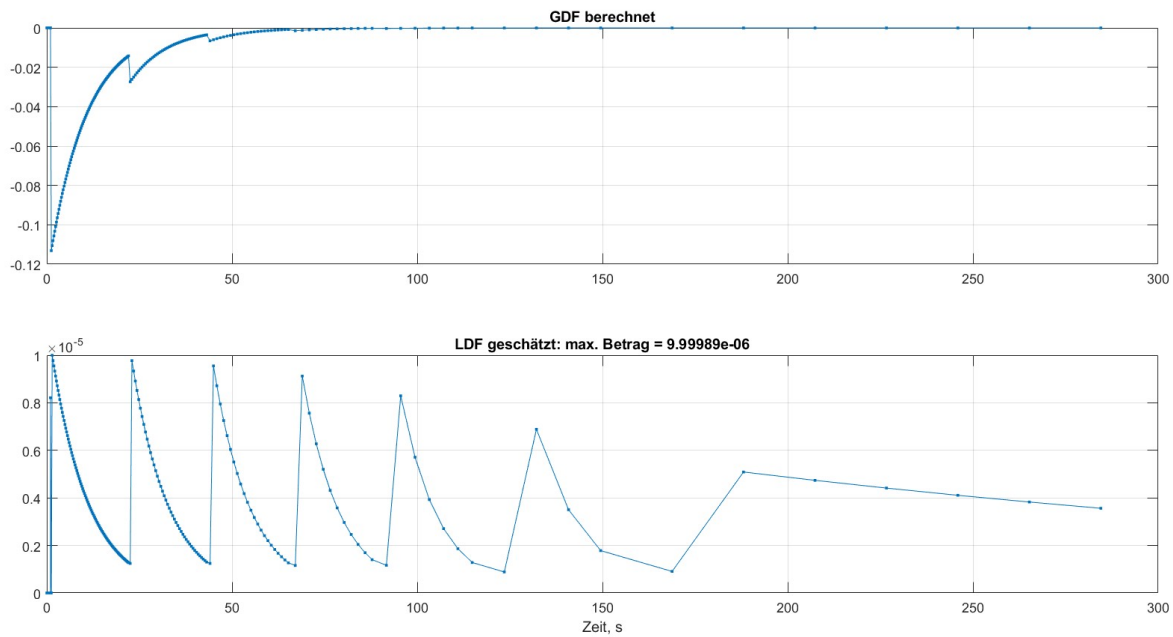


Abbildung 3: globaler und lokaler Diskretisierungsfehler

Ein weiterer Unterschied zur Simulation ohne Schrittweitensteuerung ist das „zackige“ Verhalten der Diskretisierungsfehler, welches dadurch entsteht, dass bei einer Änderung von h der lokale Diskretisierungsfehler einen größeren Wert aufweist und dann bei konstant bleibender Schrittweite wieder abklingt. Die Schrittweite h wird erhöht, sobald der lokale Diskretisierungsfehler unter eine bestimmte Grenze fällt. Diese Grenze wird bestimmt durch die Bedingung:

$$h_{neu} > 2h_{alt}$$

$$h_{neu} = \sqrt[3]{\frac{\varepsilon_{LDF}}{|\hat{d}(h_{alt})|}} h_{alt}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn

$$\sqrt[3]{\frac{\varepsilon_{LDF}}{|\hat{d}(h_{alt})|}} > 2$$

Somit wird h erhöht, wenn

$$|\hat{d}(h_{alt})| < \frac{\varepsilon_{LDF}}{8}$$

Aufgabe 3: Pseudorate-Modulator

Im Folgenden erklären wir die Ergebnisse der Simulation anhand der Durchführung mit einem Eingangssprung von $u = 0,17$. Die Abbildungen der anderen Durchführungen sind im Gruppenordner zu finden.

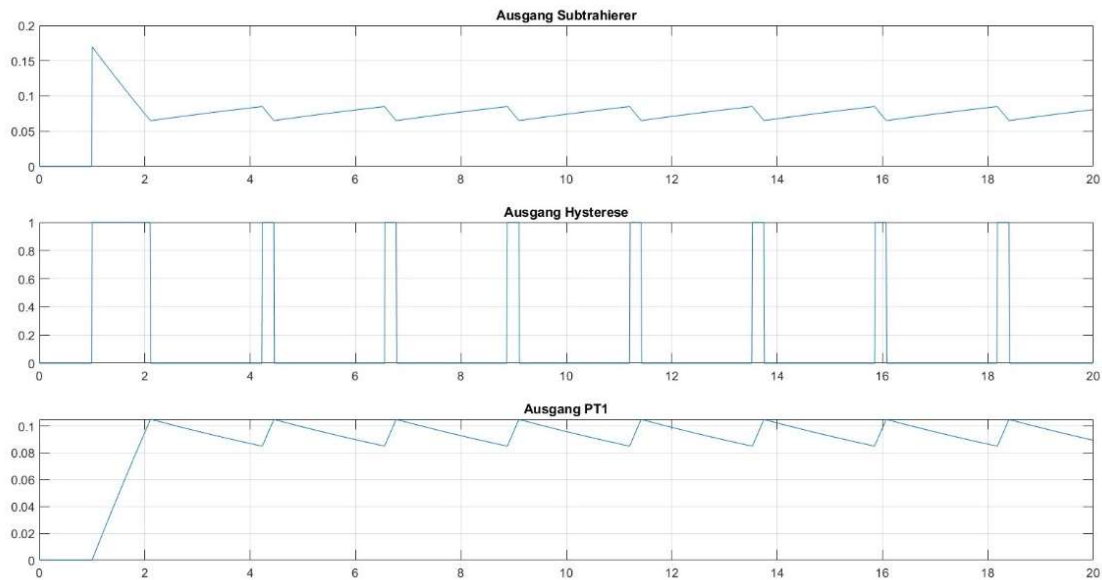


Abbildung 4: Ausgangssignale ohne Schrittweitensteuerung

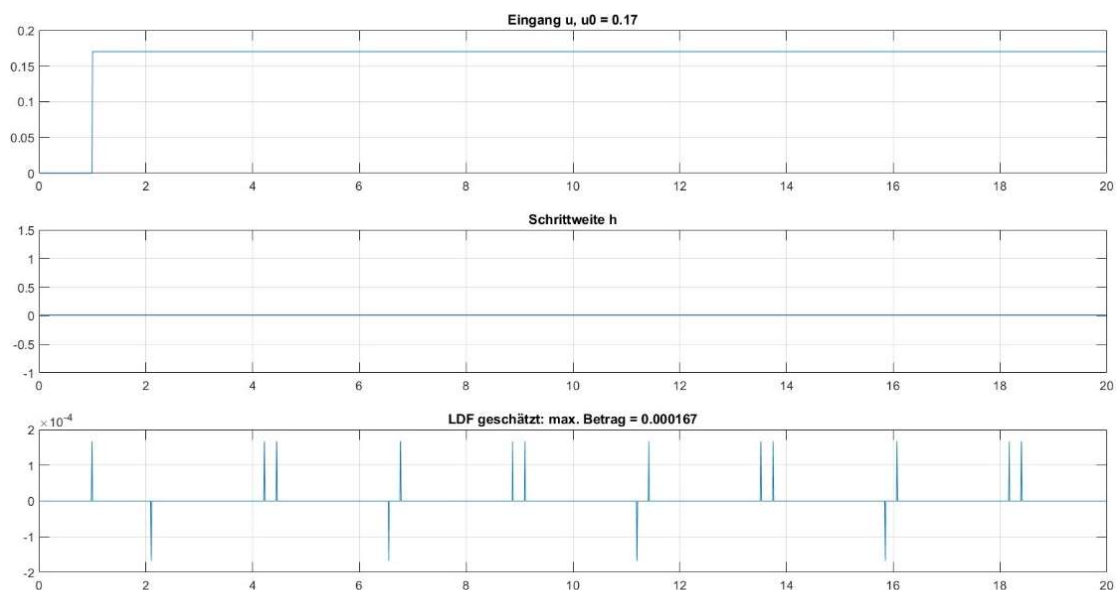


Abbildung 5: Eingang, Schrittweite h und LDF ohne Schrittweitensteuerung

Anhand der Ausgangssignale erkennt man deutlich eine sich Einstellende Schwingung, welche der berechneten Schwingung nahekommt. Dieses PWM-Signal spiegelt sich auch im lokalen Diskretisierungsfehler wieder, welches im Betrag sein Maximum immer zu den Zeiten hat, in der sich das Ausgangssignal der Hysterese ändert. Es entspricht etwa dem Ergebnis aus Teilaufgabe eins mit einem sich periodisch wiederholenden Eingangssprung.

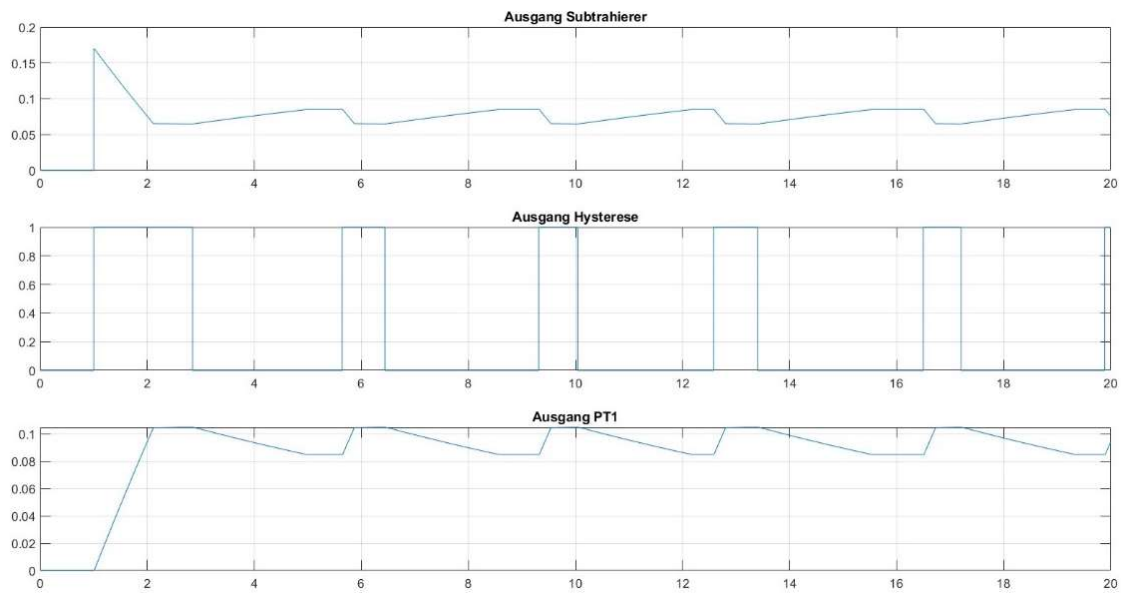


Abbildung 6: Ausgangssignale mit Schrittweitensteuerung

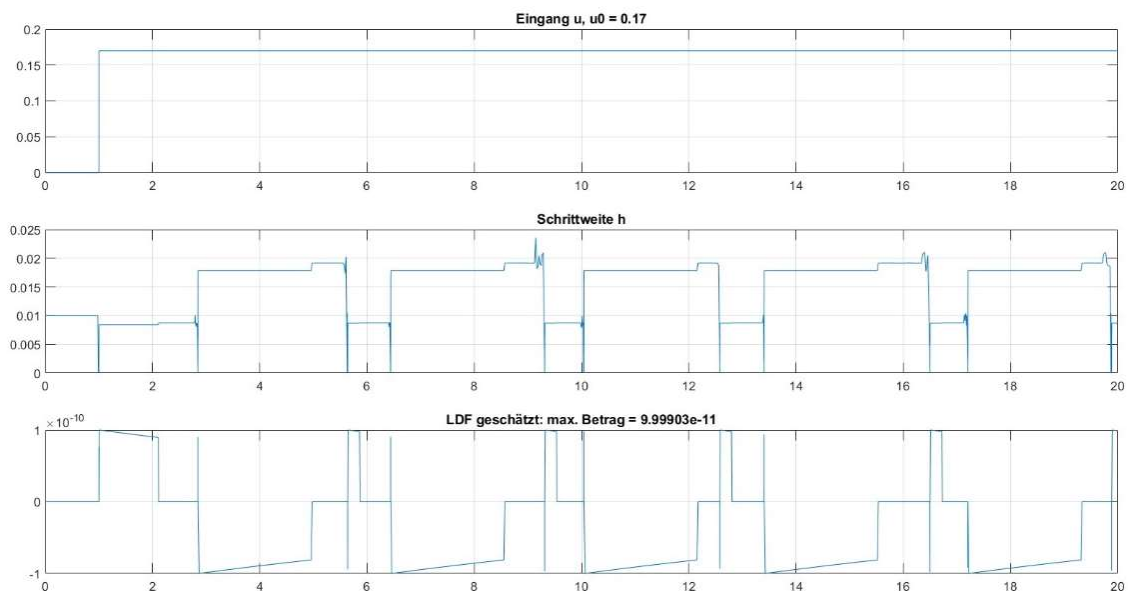


Abbildung 7: Eingang, Schrittweite h und LDF mit Schrittweitensteuerung

Bei der Simulation mit Schrittweitensteuerung ist auffällig, dass die sich einstellende Impulsperiode τ_p deutlich größer ist, als die sich einstellende Periode ohne Schrittweitensteuerung. Auch zu erwähnen ist, dass das Maximum des lokalen Diskretisierungsfehlers bei der Simulation mit Schrittweitensteuerung etwa um den Faktor 10^6 kleiner ist. Die im Laufe der Simulation verwendete Schrittweite h entspricht den Ergebnissen aus Teilaufgabe 1. Zu den Zeitpunkten, bei denen am Eingang des PT1-Gliedes ein Sprung anliegt, ist die Schrittweite h sehr klein und wird größer, solange der Eingang konstant bleibt. Aus dem Grund, dass hier jedoch mehrere Systeme aufeinander einwirken und voneinander abhängig sind, lässt sich hier nicht eine so eindeutige Grenze für den lokalen Diskretisierungsfehler ermitteln, bei dessen Unterschreitung die Schrittweite h erhöht wird. Jedoch lässt sich in dem Graphen eine solche Grenze erahnen.

Tabelle 1: Impulsbreite τ_e und Impulsperiode τ_p

		τ_e		τ_p	
		analytisch	Messwert	analytisch	Messwert
$u = 0.17$	ohne SWS	0,2210	0,24	2,3341	2,33
	mit SWS	0,2210	0,8302	2,3341	3,9196
$u = -0.25$	ohne SWS	0,2424	0,23	1,3865	1,37
	mit SWS	0,2424	1,7321	1,3865	3,575
$u = 0.49$	ohne SWS	0,3419	0,49	0,8239	0,82
	mit SWS	0,3419	2,1955	0,8239	4,5574

Anmerkung: SWS - Schrittweitensteuerung

Deutlich zu sehen ist, dass die Impulsbreite und -periode der Simulation mit Schrittweitensteuerung stark von dem analytisch berechneten Wert abweicht. Berechnet man jedoch den daraus resultierenden Mittelwert, ergeben sich für die Schrittweitensteuerung ebenfalls gute Ergebnisse. Ziel dieses Systems ist es, dass das sich einstellende pulswertenmodulierte Signal im Mittelwert dem eingprägten Sollwert entspricht. Damit können System geregelt werden, welche nur zwei diskrete Zustände (z.B. „an“ und „aus“/„offen“ und „zu“) einnehmen können.

Mittelwert des PWM-Signals: $\bar{y} = y_e \frac{\tau_e}{\tau_p}$ mit $|y_e| = 1$

Sollwert		Mittelwert \bar{y} aus Simulation \approx
$u = 0.17$	ohne SWS	0,103 s
	mit SWS	0,212 s
$u = -0.25$	ohne SWS	-0,168 s
	mit SWS	-0,485 s
$u = 0.49$	ohne SWS	0,598 s
	mit SWS	0,482 s

Für den Eingangssprung auf $u = -0.25$ ergeben sich bessere Werte für die Simulation ohne Schrittweitensteuerung, für die beiden anderen Eingangssprünge liefert die Schrittweitensteuerung jedoch bessere Ergebnisse.

Zu erwähnen ist noch, dass die Schrittweitensteuerung in diesem Fall nicht zu weniger Rechenaufwand/Simulationszeit, jedoch auch nicht zu erheblich größeren Rechenzeiten führt. Ein Durchlauf für einen Sprung am Eingang auf $u = 0.17$ und einem Simulationsintervall von 20 s dauerte im Schnitt 3,494 s. Eine Simulation ohne Schrittweitensteuerung dauerte 3,372 s. (Werte ermittelt über Profiler).

Anhang

Hier sind die Grafiken für Teilaufgabe 1. Die Grafiken der Teilaufgabe 3 für die anderen Sollwerte sind im Gruppenordner zu finden. Außerdem sind dort auch alle hier eingefügten Grafiken gespeichert.

Grafiken Teilaufgabe 1:

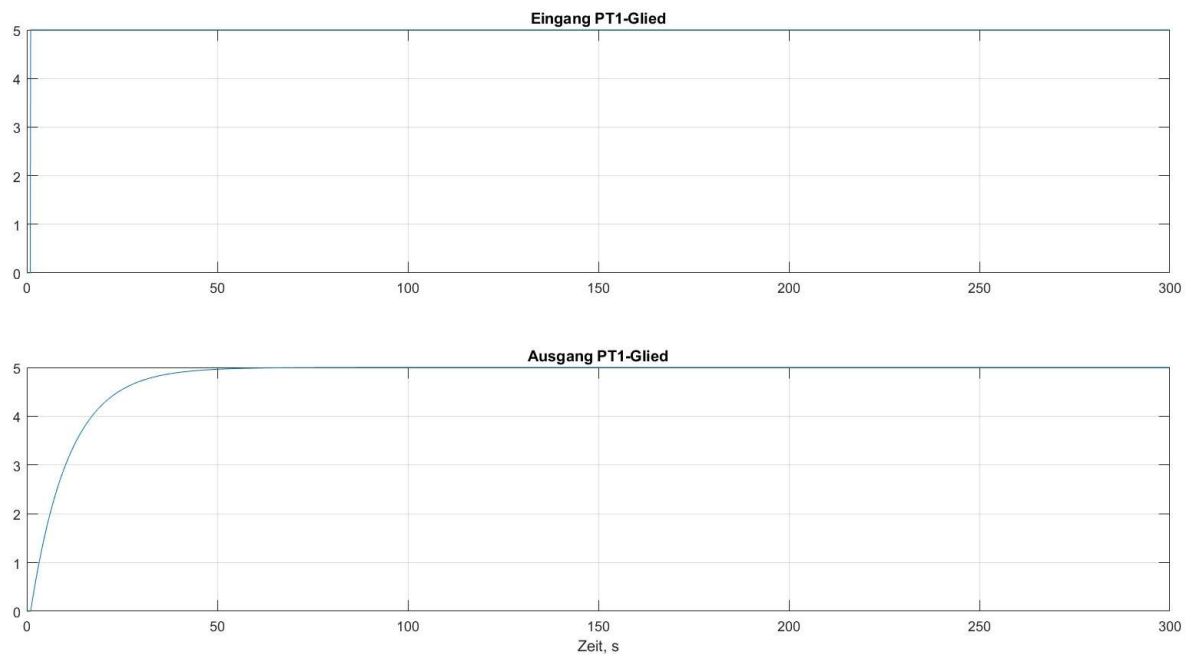


Abbildung 8: Eingang und Ausgang PT1-Glied

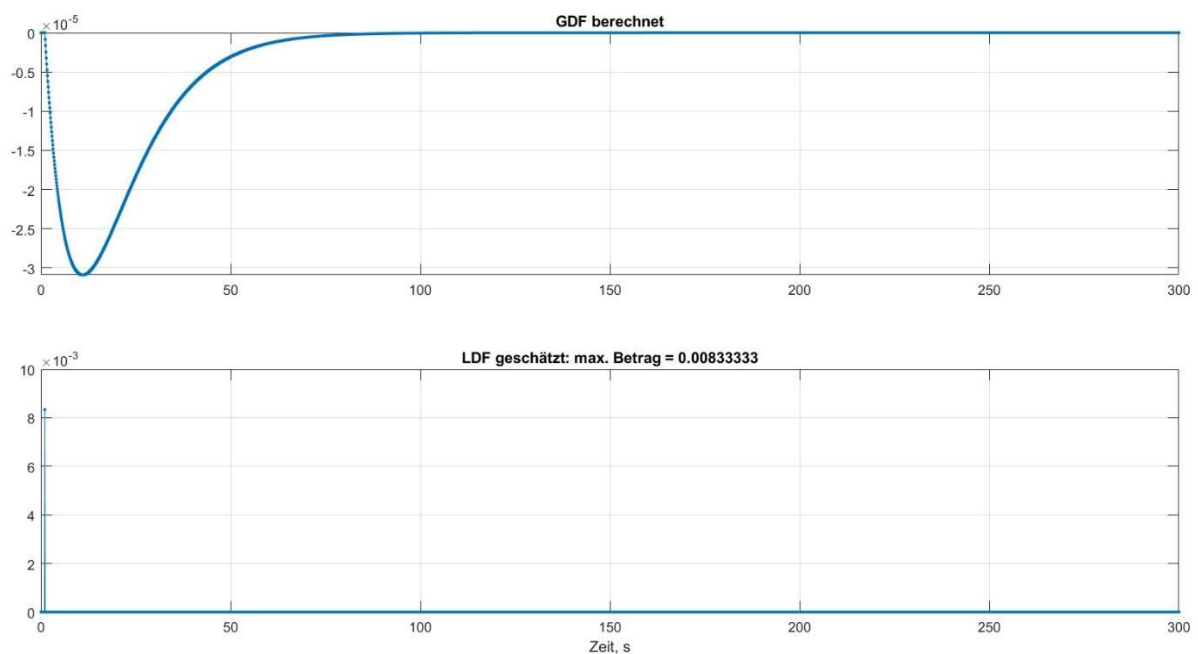


Abbildung 9: globaler und lokaler Diskretisierungsfehler