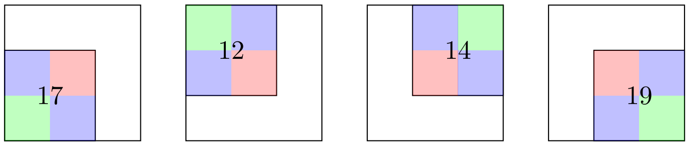
HÖJDPUNKTEN 2023
Ung Vetenskapssport

Högstadietävling - lösningsförslag

Problem 1. I rutnätet nedan ska siffrorna $1-9$ placeras in så att alla siffror förekommer exakt en gång. Vi vill att summan av siffrorna i varje $2\times 2-$delkvadrat ska vara densamma, oavsett vilken delkvadrat vi väljer (notera att det finns totalt fyra sådana delkvadrater). Vad är det minsta möjliga värdet på denna summa?

Lösning: Svaret är 16. Vi börjar med ett (ogiltigt) exempel. Placera 1 till 9 i rutorna som i rutnätet längst till vänster, och räkna ut summan i varje $2\times 2-$kvadrat för att få talen i figurerna till höger.

6	2	7
3	1	4
8	5	9



Detta är inte ett giltigt sätt att placera ut talen, eftersom summorna i de respektive $2\times 2-$kvadraterna inte är samma.

Räknar vi nu ut summan av de fyra talen i $2\times 2-$kvadraterna får vi

$$17+12+14+19=62.$$

Ett annat sätt att räkna ut den här summan är genom att notera att:

- varje grön ruta är med i exakt en 2×2 kvadrat, och bidrar alltså till summan en gång
- varje blå ruta är med i exakt två 2×2 kvadrater, och bidrar alltså till summan två gånger
- den röda rutan är med i alla fyra 2×2 kvadrater, och bidrar alltså till summan fyra gånger

vilket ger att summan också är lika med

$$1\cdot(\text{gröna})+2\cdot(\text{blåa})+4\cdot(\text{röd})=1\cdot(9+8+7+6)+2\cdot(5+4+3+2)+4\cdot(1)=62.$$

Med detta sättet att räkna ut denna summan blir det tydligt att den inte kan bli mindre än vad den är nu: vi har ju placerat det minsta talet i den röda rutan (som räknas flest gånger), talen 2 till 5 i de blå rutorna (som räknas näst flest gånger) och de största talen i de gröna rutorna (som bara räknas en gång). Alltså kommer denna summa alltid vara minst 62, oavsett hur vi placerar talen i rutorna.

Vad händer nu om varje $2\times 2-$kvadrat har samma summa? Talen i $2\times 2-$kvadraterna som vi räknat ut ovan blir alla samma, och har tillsammans en summa som är minst 62 enligt vad vi visat ovan. Så de måste vara minst $\frac{62}{4}=15.5$. Alltså går det inte att uppnå summan 15 i varje $2\times 2-$delkvadrat. Vi kan dock uppnå summan 16 i varje $2\times 2-$delkvadrat. Det finns två sätt att göra det på:

9	2	6
4	1	7
8	3	5

9	1	8
4	2	5
7	3	6

De enda lösningarna som uppnår summan 16 i alla $2\times 2-$delkvadrater.
Lösningar som bara skiljer sig genom att rutan är speglad eller roterad ser vi som samma lösning.

Problem 2. I en kruka finns bollar med olika färger. Mer än 61 procent och mindre än 65 procent av bollarna är gröna. Vilket är det minsta möjliga antalet bollar som kan finnas i krukan?

Lösning: Svaret är åtta bollar! Om det till exempel finns fem gröna bollar så är $5/8 = 62.5\%$ gröna, vilket är mellan 61 och 65 procent. Vi utesluter alla mindre tal ett i taget:

1. En boll: $\frac{0}{1} < 61\% < 65\% < \frac{1}{1}$ (0 gröna bollar är för lite och 1 grön boll för mycket)
2. Två bollar: $\frac{1}{2} < 61\% < 65\% < \frac{2}{2}$ (1 grön boll är för lite och 2 gröna bollar för mycket)
3. Tre bollar: $\frac{1}{3} < 61\% < 65\% < \frac{2}{3}$ (1 grön boll är för lite och 2 gröna bollar för mycket)
4. Fyra bollar: $\frac{2}{4} < 61\% < 65\% < \frac{3}{4}$ (2 gröna bollar är för lite och 3 gröna bollar för mycket)
5. Fem bollar: $\frac{3}{5} < 61\% < 65\% < \frac{4}{5}$ (3 gröna bollar är för lite och 4 gröna bollar för mycket)
6. Sex bollar: $\frac{3}{6} < 61\% < 65\% < \frac{4}{6}$ (3 gröna bollar är för lite och 4 gröna bollar för mycket)
7. Sju bollar: $\frac{4}{7} < 61\% < 65\% < \frac{5}{7}$ (4 gröna bollar är för lite och 5 gröna bollar för mycket)

Problem 3. Kalle och Lisa spelar ett spel. Först väljer Kalle ut 4 positiva heltal. Sedan berättar han för Lisa vilka tal han valde. Lisa ska sedan med hjälp av $+, -, \times$ och $\div$ försöka skapa ett tal delbart med 6. Hon får göra uträkningar i vilken ordning hon vill (så hon kan använda sig av parenteser), men får bara använda varje tal en gång. Om hon lyckas vinner hon, annars vinner Kalle. Kan Lisa vinna spelet oavsett vilka tal Kalle väljer?

Lösning 1: Ja! Oavsett vilka tal Lisa fick, så måste det finnas två tal som har samma rest om man delar med 3, eftersom det finns fyra tal totalt. Låt säga att a och b har samma rest om man delar med 3. I så fall så är $a - b$ delbart med 3. Nu har vi två fall:

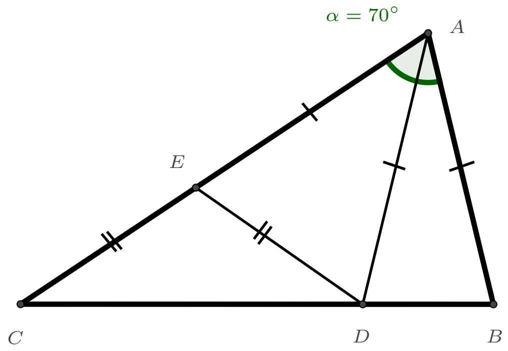
(a) Om minst ett av de sista två talen (säg c och d) är jämnt, så är deras produkt cd också jämn, vilket ger att $(a - b)cd$ är delbart med 6.

(b) Annars är både c och d udda, men då är $c + d$ jämnt, så $(a - b)(c + d)$ är delbart med 6.

I båda fallen så kunde Lisa få ett tal delbart med 6, så hon vinner alltid!

Lösning 2: Ja! Om Lisa fick de fyra talen a, b, c och d så finns det 15 möjliga summor hon skulle kunna räkna ut: en för varje delmängd av talen. Till exempel kan hon räkna ut a, b, c, d, $a + b$, $a+c$, $a+d$, $a+b+d$, och så vidare. Bland dessa summor måste det finnas minst två som har samma rest vid divison med 6, eftersom det finns minst 7 summor. Om Lisa tar skillnaden mellan dessa summor, får hon ett tal som är delbart med 6. Problemet är att summorna kanske båda använder samma tal (till exempel så används a av både $a + c$ och $a + b + d$). Detta är dock okej, för när vi tar skillanden så kommer de tal som används i båda summorna att ta ut varandra, så vi använder talen som överlappar noll gånger istället för två gånger. Därmed har vi löst problemet!

Problem 4. I triangeln ABC så är vinkeln $\angle BAC = 70°$. På sidan BC väljs en punkt D och på sidan AC väljs en punkt E, så att $|AB| = |AD| = |AE|$. Det visar sig att $|DE| = |EC|$. Bestäm alla vinklar i triangeln ABC.



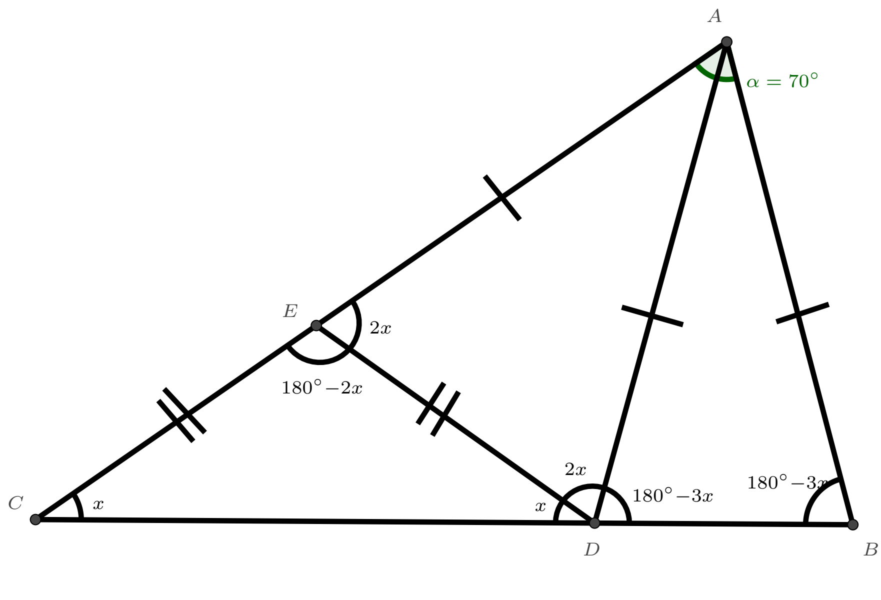
Lösning: Vi inför en variabel $x = \angle ACB$ (se figur nedan). Därefter räknar vi ut resten av vinklarna i termer av denna vinkel:

- $\angle EDC = x$, eftersom $\triangle ECD$ är likbent och $\angle ECD = \angle ACB = x$
- $\angle CED = 180° - 2x$, eftersom vinkelsumman i $\triangle ECD$ är $180°$ och vi vet att de två andra vinklarna båda är x
- $\angle AED = 2x$, eftersom vi vet att $\angle CED = 180° - 2x$ och de bildar tillsammans en rät linje
- $\angle ADE = 2x$, eftersom $\triangle AED$ är likbent och $\angle AED = 2x$
- $\angle ADB = 180° - 3x$, eftersom vi vet att $\angle CDA = x + 2x = 3x$ och de bildar tillsammans en rät linje
- $\angle ABD = 180° - 3x$, eftersom $\triangle ADB$ är likbent och $\angle ADB = 180° - 3x$

Men vi vet också att vinkelsumman i $\triangle ABC$ är 180 grader, så vi får:

$$\begin{aligned} 180° &= 70° + x + (180° - 3x) \implies \\ 2x &= 70° \implies \\ x &= 35° \end{aligned}$$

och därmed är $\angle ACB = 35°$ och $\angle ABC = 180° - 3x = 75°$.



Problem 5. Det sitter 100 personer i en ring. Vi vet att vissa av dem är lögnare som alltid ljuger, och att vissa av dem är sanningssägare som alltid talar sanning, men vi vet inte vem som är vad. Alla i ringen säger att de sitter bredvid minst en lögnare. Vilket är det minsta och största antal lögnare som kan finnas i ringen?

Lösning: Svaret är att det finns minst 34 lögnare och max 50. Beteckna en lögnare med L och en sanningssägare med S. Vi gör följande observationer:

(a) Inga lögnare kan sitta bredvid varandra, för då skulle de inte ljuga. Alltså finns *som mest* $\frac{100}{2} = 50$ lögnare. Vi kan också uppnå detta genom att sätta varannan L och varannan S:

$$LSLSLSLSLS...LSLS$$

(b) Det kan aldrig vara tre sanningssägare i rad, för då skulle den i mitten inte tala sanning. Det ger att minst var tredje person är en lögnare, så det finns *minst* $\frac{100}{3} > 33$ lögnare, alltså minst 34 stycken. Vi kan också uppnå detta:

$$LSLSLSSLSSLSSLSS...LSSLSS$$

där vi placerat LSLS i början och sedan 32 stycken kopior av LSS.

Det är enkelt att dubbelkolla att exemplen vi gav som uppnår 34 respektive 50 lögnare faktiskt funkar och ger dessa antal lögnare, så vi är klara!

Problem 6. För ett heltal x så är

$$x^2 = x \cdot x$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

...

Till exempel så är $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.
Anders tog ett positivt heltal x, och räknade ut att $x^{15} = 4\ 747\ 561\ 509\ 943$. Vad är x?

Lösning 1: Svaret är att $x = 7$.
Vi vet att

$$10^{15} = 1\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000 > 4\ 747\ 561\ 509\ 943.$$

Därför måste talet x vara mindre än 10. Det kan inte vara jämnt, eftersom x^{15} i så fall skulle varit jämnt. Det kan inte heller vara delbart med 5, eftersom x^{15} i så fall skulle slutat på 0 eller 5. Alltså måste vi ha $x = 1, 3, 7$ eller 9.

- x kan inte vara 1, eftersom $1^{15} = 1$
- x kan inte vara 3 eller 9, eftersom det då skulle varit delbart med 3. Men alla tal som är delbara med 3 har också en siffersumma som är delbar med 3, och

  $$4 + 7 + 4 + 7 + 5 + 6 + 1 + 5 + 0 + 9 + 9 + 4 + 3 = 64$$

  vilket inte är delbart med 3

Det enda alternativet som återstår är att $x = 7$.

Lösning 2: Samma som tidigare, men om vi vill kan vi istället utesluta 3 och 9 på följande sätt:

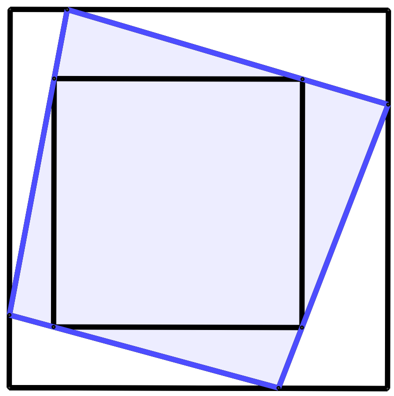
$$\begin{aligned} 3^{15} &= 3 \cdot 3 \cdot ... \cdot 3 \ \ \text{(där antal treor är 15)} \\ &= 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \\ &< 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \\ &= 30\ 000\ 000 \end{aligned}$$

vilket är för litet. Här använde vi att $3 \cdot 3 = 9$.

$$\begin{aligned} 9^{15} &= 9 \cdot 9 \cdot ... \cdot 9 \ \ \text{(där antal nior är 15)} \\ &= \cdot 729 \cdot 729 \cdot 729 \cdot 729 \cdot 729 \\ &> 700 \cdot 700 \cdot 700 \cdot 700 \cdot 700 \\ &= 7^5 \cdot 100^5 \\ &> 1000 \cdot 10\ 000\ 000\ 000 \\ &= 10\ 000\ 000\ 000\ 000 \end{aligned}$$

vilket är för stort. Här använde vi att $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ och att $7^5 = 49 \cdot 49 \cdot 7 > 1000$.

Problem 7. I figuren syns två kvadrater (svart omkrets) med parallella sidor. Den stora kvadraten har sidlängd 3 och den lilla har sidlängd 2. Vad är arean av den blå skuggade fyrhörningen?



Lösning: Svaret är att arean är 6. *Anmärkning: I problemet under tävlingen så hade den lilla kvadraten sidlängd* 5 *och den stora* 10*. Svaret var då* 50*. Lösningsmetoden är samma!*

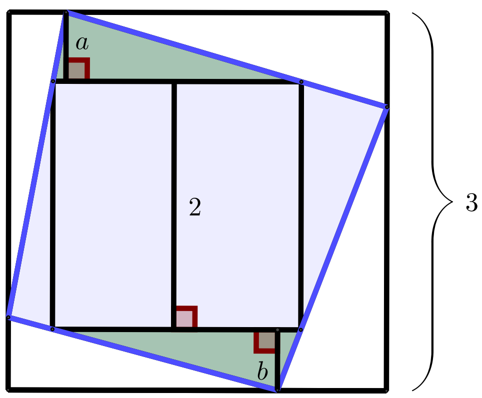
Vi börjar med att räkna ut summan av areorna av de två gröna trianglarna i bilden nedan. Vi vet inte vad höjderna är i dessa trianglar, och kallar dem därför för a och b (som i bilden). Vi vet däremot att summan av höjderna är 1. Det är för att de två höjderna tillsammans med den lilla kvadratens sidlängd (alltså 2) är lika långt som den stora kvadratens sidlängd (alltså 3), så de två höjderna summerar till $3 - 2 = 1$. Skrivet som en ekvationen har vi:

$$a + b + 2 = 3 \qquad \text{vilket ger att} \qquad a + b = 1.$$

De två gröna trianglarna har båda bas 2 (den lilla kvadratens sidlängd). Det betyder att arean av den övre gröna triangeln är $\frac{2 \cdot a}{2} = a$ och att arean av den undre gröna trianglen är $\frac{2 \cdot b}{2} = b$, enligt formeln för triangelns area. Alltså har de tillsammans area $a + b = 1$.

Exakt samma resonemang ger att summan av motsvarande trianglar på höger och vänster sida av den lilla kvadraten tillsammans har area 1. Till sist har den lilla kvadraten area $2 \cdot 2 = 4$. Så den totala arean vi vill räkna ut blir

$$1 + 1 + 4 = 6.$$



Anmärkning: I allmänhet gäller att om den lilla kvadraten har sidlängd x och den stora har sidlängd y så har en fyrhörning som den i bilden ovan area xy - beviset för detta är precis samma!

Problem 8. Eleverna i UVS-byn bor i 49 höghus som ligger jämnt utspridda längs med en och samma gata. I det första huset bor 1 elev, i det andra huset bor 2 elever, och så vidare till och med hus nummer 49 där 49 elever bor. När det är dags att organisera en stor mattetävling vill arrangörerna veta i vilket hus de ska hålla tävlingen för att minimera den totala ressträckan för alla eleverna. Vilket hus ska de välja?

Lösning: Svaret är hus nummer 35.
Det totala antalet personer som bor i UVS-byn är $1+2+...+49$. Vi kan räkna ut dubbelt av denna summan genom att para ihop termer:

$$\begin{array}{rl} 2\cdot(1+2+...+49) = & 1+2+...+48+49+ \\ & 49+48+...+2+1 \\ \hline = & 50+50+...+50+50 \\ = & 50\cdot 49 \end{array}$$

så det totala antalet elever i byn är hälften av detta:

$$1+2+...+49 = \frac{50\cdot 49}{2} = 25\cdot 49 = (5\cdot 7)^2 = 35^2.$$

Låt säga att vi valt ett hus k. För att det ska vara optimalt måste det åtminstone vara bättre än hus $k-1$ och hus $k+1$.

- Vad händer om vi flyttar till hus $k+1$? För alla som bor i hus 1 till k skulle avståndet öka med ett, medan det för resterande personer skulle minska med ett. Alltså är det bara bättre att stanna i hus k om *minst hälften bor i hus* 1 *till* k.
- Vad händer om vi flyttar till hus $k-1$? För alla som bor i hus 1 till $k-1$ skulle avståndet minska med ett, medan det för resterande personer skulle öka med ett. Alltså är det bara bättre att stanna i hus k om *max hälften bor i hus* 1 *till* $k-1$.

Vi söker alltså ett hus k så att minst hälften bor i hus 1 till k och max hälften bor i hus 1 till $k-1$.

Antalet personer som bor i hus 1 till k är $1+2+...+k$, vilket vi kan räkna ut på samma sätt som ovan:

$$\begin{array}{rccccccccc} 2\cdot(1+2+...+k) = & & 1 & + & 2 & +...+ & (k-1) & + & k \\ & + & k & + & (k-1) & +...+ & 2 & + & 1 \\ \hline = & & (k+1) & + & (k+1) & +...+ & (k+1) & + & (k+1) \\ = & & k(k+1). & & & & & & \end{array}$$

Delar vi detta med 2 får vi att totala antalet personer i hus 1 till k är

$$1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

På precis samma sätt visar vi att antalet personer som bor i hus 1 till $k-1$ måste vara $\frac{k(k-1)}{2}$. När vi nu vet dessa formler för antalet som bor i de första k respektive $k-1$ husen, kan vi omformulera "max hälften bor i hus 1 till $k-1$" och "minst hälften bor i hus 1 till k" som:

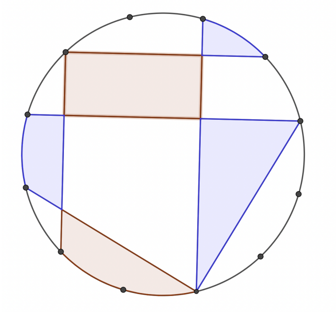
$$\frac{(k-1)k}{2} \leq \frac{35^2}{2} \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Om vi multiplicerar allt med 2 så måste olikheten fortfarande gälla, så vi får att

$$(k-1)k \leq 35^2 \leq k(k+1).$$

Det är tydligt att enda heltalet k som uppfyller detta är $k=35$. (Om k är mindre gäller inte högra olikheten, om k är större gäller inte vänstra).

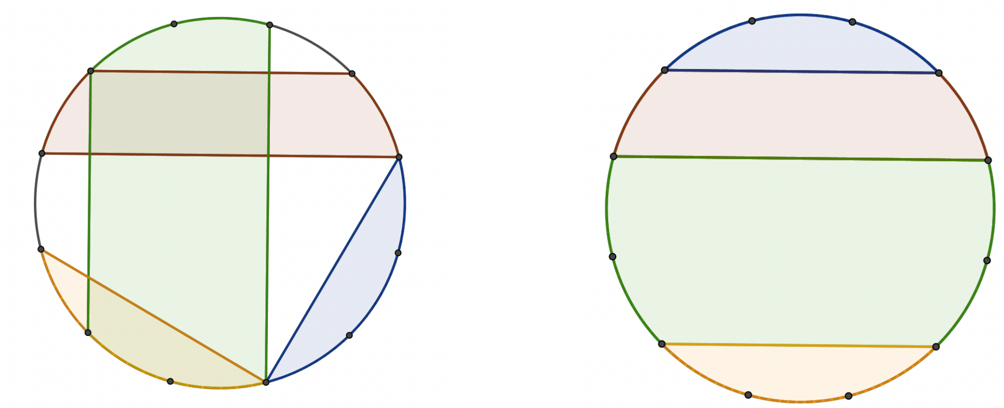
Problem 9. Bevisa att summan av areorna av de blå områdena är samma som summan av areorna av de röda områdena. Figuren är en cirkel och punkterna på omkretsen är jämnt utspridda.



Lösning 1: I den vänstra bilden nedan har fyra bitar av cirkeln färgats i fyra olika färger, som sedan arrangerats om i den högra bilden så att de precis täcker hela cirkeln utan överlapp. Notera att:

- röda områden i den ursprungliga bilden (se uppgiftsformuleringen ovan) motsvarar exakt de områden där bitarna i den vänstra bilden nedan överlappar
- blå områden i den ursprungliga bilden (se uppgiftsformuleringen ovan) motsvarar exakt de områden som bitarna i den vänstra bilden nedan inte täcker alls

Men de överlappande områdena och de områden som inte täcks alls i den vänsta bilden nedan måste ha samma area, eftersom de 4 bitarna tillsammans har exakt samma area som cirkeln. Därmed har vi bevisat påståendet i uppgiften.



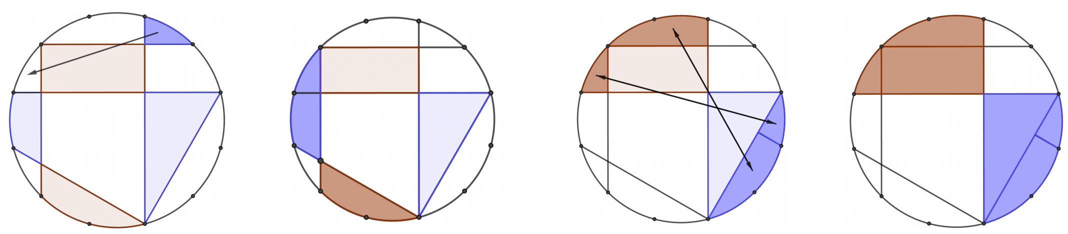
Lösning 2: En annan lösning fås genom att "klippa och klistra" med bitarna som i de fyra bilderna nedan. Eftersom den röda och blåa biten är lika stora i sista bilden, måste de varit det från början.

Bild 1 Flytta den mörkblå biten uppe i höger hörn längs med pilen.

Bild 2 Den mörkröda och mörkblåa biten är lika stora, så vi kan ta bort dem.

Bild 3 De mörkröda bitarna är lika stora som motsvarande mörkblåa bitar, så vi kan lägga till dem.

Bild 4 Den mörkröda och mörkblåa biten är lika stora, så vi kan ta bort dem.



Problem 10. På tavlan står talen $1, 2, 3, ..., 1000$. Kevin väljer ut 12 av dem, och suddar ut resten. Därefter noterar han att ingen summa av några tal som är kvar på tavlan är ett potenstal. Är detta möjligt?
Notera: Ett potenstal är ett tal på formen n^k för heltal n och $k \geq 2$. Till exempel så är följande tal potenstal: $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$, $49 = 7 \cdot 7 = 7^2$, $128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$.

Lösning: Vi vet att 79 är ett primtal, eftersom det inte delas av $2, 3, 5$ eller 7 och $11 \cdot 11 > 79$ (det räcker att kolla delbarhet med dessa tal, för om 79 inte var ett primtal skulle det varit en produkt av två mindre tal, men då måste minst ett av dessa tal vara mindre än 11 eftersom $11 \cdot 11 > 79$, och de enda primtalen under 11 är $2, 3, 5$ och 7). Låt oss nu välja talen

$$1 \cdot 79, 2 \cdot 79, ..., 12 \cdot 79.$$

Detta är 12 stycken tal och det största av dem är $12 \cdot 79 = 948 < 1000$, så de stod alla på tavlan från början. Deras summa är

$$\begin{aligned} 1 \cdot 79 + 2 \cdot 79 + ... + 12 \cdot 79 &= 79 \cdot (1 + 2 + ... + 12) \\ &= 79 \cdot \frac{12(12+1)}{2} \\ &= 79 \cdot 78. \end{aligned}$$

Varje summa av några av dessa tal måste vara delbar med 79, eftersom varje tal är delbart med 79. Men ingen summa av några av talen kan vara delbar med 79^2, eftersom summan av *alla* tal är $79 \cdot 78 < 79^2$. Eftersom 79 är ett primtal, så följer det att ingen summa kan vara ett potenstal (om ett primtal delar ett potenstal n^k så måste det dela potenstalet minst $k \geq 2$ gånger, men vi har just visat att primtalet 79 delar varje summa av några av talen *exakt* en gång), så vi är klara!