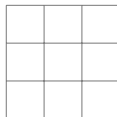


Högstadietävling - lösningsförslag

Problem 1

I rutnätet nedan ska siffrorna 1 – 9 placeras in så att alla siffror förekommer exakt en gång. Vi vill att summan av siffrorna i varje 2×2 -delkvadrat ska vara densamma, oavsett vilken delkvadrat vi väljer (notera att det finns totalt fyra sådana delkvadrater). Vad är det minsta möjliga värdet på denna summa?



Lösning

Svaret är 16. Vi börjar med ett (ogiltigt) exempel. Placera 1 till 9 i rutorna som i rutnätet längst till vänster, och räkna ut summan i varje 2×2 -kvadrat för att få talen i figurerna till höger.

6	2	7
3	1	4
8	5	9

17		

12		

	14	

	19	

Detta är inte ett giltigt sätt att placera ut talen, eftersom summorna i de respektive 2×2 -kvadraterna inte är samma.

Räknar vi nu ut summan av de fyra talen i 2×2 -kvadraterna får vi

$$17 + 12 + 14 + 19 = 62.$$

Ett annat sätt att räkna ut den här summan är genom att notera att:

- varje grön ruta är med i exakt en 2×2 kvadrat, och bidrar alltså till summan en gång
- varje blå ruta är med i exakt två 2×2 kvadrater, och bidrar alltså till summan två gånger
- den röda rutan är med i alla fyra 2×2 kvadrater, och bidrar alltså till summan fyra gånger

vilket ger att summan också är lika med

$$1 \cdot (\text{gröna}) + 2 \cdot (\text{blåa}) + 4 \cdot (\text{röd}) = 1 \cdot (9 + 8 + 7 + 6) + 2 \cdot (5 + 4 + 3 + 2) + 4 \cdot (1) = 62.$$

Med detta sättet att räkna ut denna summan blir det tydligt att den inte kan bli mindre än vad den är nu: vi har ju placerat det minsta talet i den röda rutan (som räknas flest gånger), talen 2 till 5 i de blå rutorna (som räknas näst flest gånger) och de största talen i de gröna rutorna (som bara räknas en gång). Alltså kommer denna summa alltid vara minst 62, oavsett hur vi placerar talen i rutorna.

Vad händer nu om varje 2×2 -kvadrat har samma summa? Talen i 2×2 -kvadraterna som vi räknat ut ovan blir alla samma, och har tillsammans en summa som är minst 62 enligt vad vi visat ovan. Så de måste vara minst $\frac{62}{4} = 15.5$. Alltså går det inte att uppnå summan 15 i varje 2×2 -delkvadrat. Vi kan dock uppnå summan 16 i varje 2×2 -delkvadrat. Det finns två sätt att göra det på:

9	2	6
4	1	7
8	3	5

9	1	8
4	2	5
7	3	6

*De enda lösningarna som uppnår summan 16 i alla 2×2 -delkvadrater.
Lösningar som bara skiljer sig genom att rutan är speglad eller roterad ser vi som samma lösning.*

Problem 2

I en kruka finns bollar med olika färger. Mer än 61 procent och mindre än 65 procent av bollarna är gröna. Vilket är det minsta möjliga antalet bollar som kan finnas i krukans?

Lösning

Svaret är åtta bollar! Om det till exempel finns fem gröna bollar så är $5/8 = 62.5\%$ gröna, vilket är mellan 61 och 65 procent. Vi utesluter alla mindre tal ett i taget:

1. En boll: $\frac{0}{1} < 61\% < 65\% < \frac{1}{1}$ (0 gröna bollar är för lite och 1 grön boll för mycket)
2. Två bollar: $\frac{1}{2} < 61\% < 65\% < \frac{2}{2}$ (1 grön boll är för lite och 2 gröna bollar för mycket)
3. Tre bollar: $\frac{1}{3} < 61\% < 65\% < \frac{2}{3}$ (1 grön boll är för lite och 2 gröna bollar för mycket)
4. Fyra bollar: $\frac{2}{4} < 61\% < 65\% < \frac{3}{4}$ (2 gröna bollar är för lite och 3 gröna bollar för mycket)
5. Fem bollar: $\frac{3}{5} < 61\% < 65\% < \frac{4}{5}$ (3 gröna bollar är för lite och 4 gröna bollar för mycket)
6. Sex bollar: $\frac{3}{6} < 61\% < 65\% < \frac{4}{6}$ (3 gröna bollar är för lite och 4 gröna bollar för mycket)
7. Sju bollar: $\frac{4}{7} < 61\% < 65\% < \frac{5}{7}$ (4 gröna bollar är för lite och 5 gröna bollar för mycket)

Problem 3

Kalle och Lisa spelar ett spel. Först väljer Kalle ut 4 positiva heltal. Sedan berättar han för Lisa vilka tal han valde. Lisa ska sedan med hjälp av $+$, $-$, \times och \div försöka skapa ett tal delbart med 6. Hon får göra uträkningar i vilken ordning hon vill (så hon kan använda sig av parenteser), men får bara använda varje tal en gång. Om hon lyckas vinner hon, annars vinner Kalle. Kan Lisa vinna spelet oavsett vilka tal Kalle väljer?

Observation: Notera först att det inte spelar någon roll om vi vill att Lisa ska använda alla tal eller inte. Det är för att om hon kan få något som är delbart med 6 genom att bara använda några av talen, så kan hon använda alla genom att multiplicera med de oanvända talen. Resultatet kommer fortfarande vara delbart med 6. Vi presenterar nu tre olika lösningmetoder.

Lösning 1

Ja! Oavsett vilka tal Lisa fick, så måste det finnas två tal som har samma rest om man delar med 3, eftersom det finns fyra tal totalt. Låt säga att a och b har samma rest om man delar med 3. I så fall så är $a - b$ delbart med 3. Nu har vi två fall:

- (a) Om minst ett av de sista två talen (säg c och d) är jämnt, så är deras produkt cd också jämn, vilket ger att $(a - b)cd$ är delbart med 6.
- (b) Annars är både c och d udda, men då är $c + d$ jämnt, så $(a - b)(c + d)$ är delbart med 6.

I båda fallen så kunde Lisa få ett tal delbart med 6, så hon vinner alltid!

Lösning 2

Ja! Vi kollar på några olika fall.

- Om det finns något tal som är delbart med 6 så vinner Lisa direkt, genom att helt enkelt ta det talet. (Om hon vill använda alla tal kan hon ta produkten av dem alla).
- Om det finns två tal som har samma rest när man delar med 6, så är deras skillnad delbar med 6, så då kan Lisa vinna.
- Om det finns två tal vars rester när man delar med 6 summerar till 6, så kan Lisa vinna genom att ta deras summa (alltså om det finns två tal med rester 1 och 5, med rester 2 och 4 eller med rester 3 och 3).

Men nu noterar vi att de möjliga resterna vid division med 6 är 0, 1, 2, 3, 4 och 5. Vi har just visat att om Lisa får något tal med rest 0 (alltså ett tal delbart med 6) så vinner hon. Vidare vinner hon om hon får två tal med samma rest. Så för att Kalle ska ha någon chans att vinna måste han åtminstone ge fyra tal som alla har olika rester bland 1, 2, 3, 4 och 5. Men då måste han ge tal med antingen både rest 1 och rest 5 eller både rest 2 och rest 4, vilket innebär att Lisa vinner enligt vårt sista fall ovan.

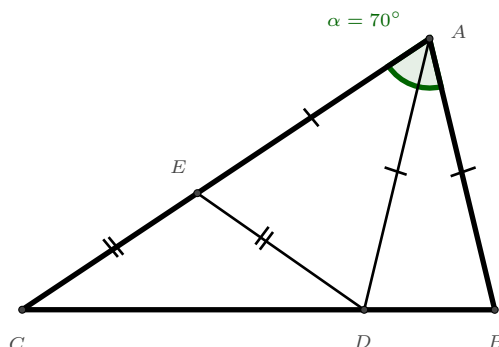
Lösning 3

Ja! Om Lisa fick de fyra talen a, b, c och d så finns det 15 möjliga summer hon skulle kunna räkna ut: en för varje delmängd av talen. Till exempel kan hon räkna ut $a, b, c, d, a + b, a + c, a + d, a + b + d$, och så vidare. Bland dessa summer måste det finnas minst två som har samma rest vid division med 6, eftersom det finns minst 7 summer. Om Lisa tar skillnaden mellan dessa summer, får hon ett tal som är delbart med 6. Problemet är att summorna kanske båda använder samma tal (till exempel så används a av både $a + c$ och $a + b + d$). Detta är dock okej, för när vi tar skillnaden så kommer de tal som används i båda summorna att ta ut varandra, så vi använder talen som överlappar noll gånger istället för två gånger. Därmed har vi löst problemet!

Anmärkning: Det var ganska många i tävlingen som påstod att Lisa inte kan vinna om Kalle ger talen 1, 1, 1, 1, eftersom det inte går att få något tal ≥ 6 då. Man kan dock få $0 = (1 - 1) \cdot 1 \cdot 1$, vilket är delbart med 6!

Problem 4

I triangeln ABC så är vinkeln $\angle BAC = 70^\circ$. På sidan BC väljs en punkt D och på sidan AC väljs en punkt E , så att $|AB| = |AD| = |AE|$. Det visar sig att $|DE| = |EC|$. Bestäm alla vinklar i triangeln ABC .



Lösning

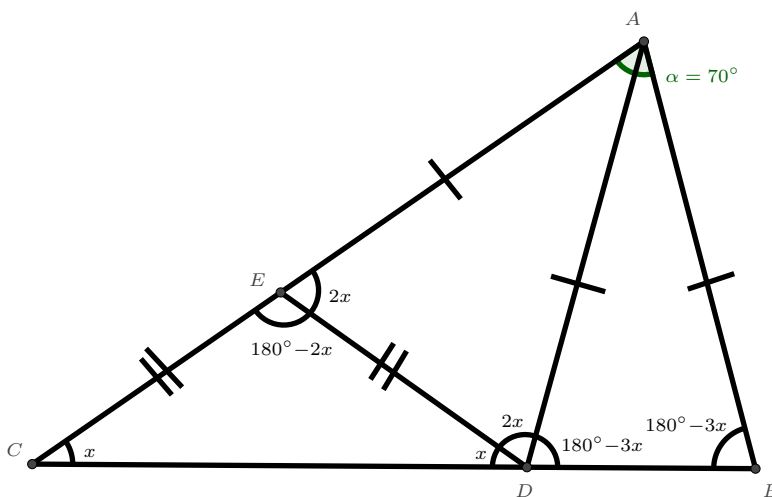
Vi inför en variabel $x = \angle ACB$ (se figur nedan). Därefter räknar vi ut resten av vinklarna i termer av denna vinkel:

- $\angle EDC = x$, eftersom $\triangle ECD$ är likbent och $\angle ECD = \angle ACB = x$
- $\angle CED = 180^\circ - 2x$, eftersom vinkelsumman i $\triangle ECD$ är 180° och vi vet att de två andra vinklarna båda är x
- $\angle AED = 2x$, eftersom vi vet att $\angle CED = 180^\circ - 2x$ och de bildar tillsammans en rät linje
- $\angle ADE = 2x$, eftersom $\triangle AED$ är likbent och $\angle AED = 2x$
- $\angle ADB = 180^\circ - 3x$, eftersom vi vet att $\angle CDA = x + 2x = 3x$ och de bildar tillsammans en rät linje
- $\angle ABD = 180^\circ - 3x$, eftersom $\triangle ADB$ är likbent och $\angle ADB = 180^\circ - 3x$

Men vi vet också att vinkelsumman i $\triangle ABC$ är 180 grader, så vi får:

$$\begin{aligned} 180^\circ &= 70^\circ + x + (180^\circ - 3x) \\ \implies 2x &= 70^\circ \\ \implies x &= 35^\circ \end{aligned}$$

och därmed är $\angle ACB = 35^\circ$ och $\angle ABC = 180^\circ - 3x = 75^\circ$.



Anmärkning: Det är inte en fullständigt motiverad lösning om man gissar alla vinklar och sen kontrollerar att trianglarna blir likbenta och vinkelsummorna 180 grader. Hur kan vi veta att det inte finns fler lösningar i så fall? Om man har en motivering till varför det bara kan finnas ett möjligt svar, och sen gissar svaret och visar att det funkar, så skulle det kunna bli en fullständig lösning - men det är inte helt lätt att motivera! Ett av de lättaste sätten att göra det är att lösa uppgiften på liknande sätt som ovan (vilket ju gav att det bara finns ett möjligt svar).

Problem 5

Det sitter 100 personer i en ring. Vi vet att vissa av dem är lögnare som alltid ljugar, och att vissa av dem är sanningssägare som alltid talar sanning, men vi vet inte vem som är vad. Alla i ringen säger att de sitter bredvid minst en lögnare. Vilket är det minsta och största antal lögnare som kan finnas i ringen?

Lösning

Svaret är att det finns minst 34 lögnare och max 50. Beteckna en lögnare med L och en sanningssägare med S. Vi gör följande observationer:

- (a) Inga lögnare kan sitta bredvid varandra, för då skulle de inte ljuga. Alltså finns *som mest* $\frac{100}{2} = 50$ lögnare. Vi kan också uppnå detta genom att sätta varannan L och varannan S:

$LSLSLSLSLS...LSLS$

- (b) Det kan aldrig vara tre sanningssägare i rad, för då skulle den i mitten inte tala sanning. Det ger att minst var tredje person är en lögnare, så det finns *minst* $\frac{100}{3} > 33$ lögnare, alltså minst 34 stycken. Vi kan också uppnå detta:

$LSLSLSSLSSLSSLSS...LSSLSS$

där vi placerat LSLS i början och sedan 32 stycken kopior av LSS.

Det är enkelt att dubbelkolla att exemplen vi gav som uppnår 34 respektive 50 lögnare faktiskt funkar och ger dessa antal lögnare, så vi är klara!

Problem 6

För ett heltal x så är

$$x^2 = x \cdot x$$

$$x^3 = x \cdot x \cdot x$$

$$x^4 = x \cdot x \cdot x \cdot x$$

...

Till exempel så är $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

Anders tog ett positivt heltal x , och räknade ut att $x^{15} = 4\,747\,561\,509\,943$. Vad är x ?

Lösning 1

Svaret är att $x = 7$.

Vi vet att

$$10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000 > 4\,747\,561\,509\,943.$$

Därför måste talet x vara mindre än 10. Det kan inte vara jämnt, eftersom x^{15} i så fall skulle varit jämnt. Det kan inte heller vara delbart med 5, eftersom x^{15} i så fall skulle slutat på 0 eller 5. Alltså måste vi ha $x = 1, 3, 7$ eller 9.

- x kan inte vara 1, eftersom $1^{15} = 1$
- x kan inte vara 3 eller 9, eftersom det då skulle varit delbart med 3. Men alla tal som är delbara med 3 har också en siffersumma som är delbar med 3, och

$$4 + 7 + 4 + 7 + 5 + 6 + 1 + 5 + 0 + 9 + 9 + 4 + 3 = 64$$

vilket inte är delbart med 3

Det enda alternativet som återstår är att $x = 7$.

Lösning 2

Samma som tidigare, men om vi vill kan vi istället utesluta 3 och 9 på följande sätt:

$$\begin{aligned} 3^{15} &= 3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3 \quad (\text{där antal treor är } 15) \\ &= 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 \\ &< 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \\ &= 30\,000\,000 \end{aligned}$$

vilket är för litet. Här använde vi att $3 \cdot 3 = 9$.

$$\begin{aligned} 9^{15} &= 9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9 \quad (\text{där antal nior är } 15) \\ &= 729 \cdot 729 \cdot 729 \cdot 729 \cdot 729 \\ &> 700 \cdot 700 \cdot 700 \cdot 700 \cdot 700 \\ &= 7^5 \cdot 100^5 \\ &> 1000 \cdot 10\,000\,000\,000 \\ &= 10\,000\,000\,000\,000 \end{aligned}$$

vilket är för stort. Här använde vi att $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ och att $7^5 = 49 \cdot 49 \cdot 7 > 1000$.

Lösning 3

En annan möjlighet är att kolla på slutsiffrorna för $1^{15}, 2^{15}, \dots, 9^{15}$. Som tidigare vet vi att $x < 10$. Vidare vet vi att $2^{15}, 4^{15}, 6^{15}$ och 8^{15} alla är jämna tal, så de slutar på en jämn siffra och alltså kan x inte vara något av 2, 4, 6 eller 8. Vi vet också att 5^{15} slutar på 5 eftersom det är delbart med 5, så x kan inte vara 5. Vidare är $1^{15} = 1$, så x är inte 1. Det återstår att utesluta 3 och 9. Notera att:

- slutsiffrorna i $3^1, 3^2, 3^3, \dots$ är 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, Alltså är 7 slutsiffran i 3^{15} , så eftersom x^{15} slutar på 3 så kan x inte vara 3.
- slutsiffrorna i $9^1, 9^2, 9^3, \dots$ är 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, Alltså är 9 slutsiffran i 9^{15} , så eftersom x^{15} slutar på 3 så kan x inte vara 9.

Vi har här använt att för att räkna ut slutsiffran i till exempel 3^{15} så behöver vi bara veta slutsiffran i 3^{14} och ta den gånger 3, för att räkna ut slutsiffran i 3^{14} så behöver vi bara veta slutsiffran i 3^{13} och ta den gånger 3, och så vidare. Det är för att när man multiplicerar två tal så bestäms slutsiffran i produkten bara av slutsiffrorna i de två faktorerna - de tidigare siffrorna spelar ingen roll.

För att dubbelkolla kan vi kontrollera att slutsiffrorna i $7^1, 7^2, 7^3, \dots$ är 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, Så slutsiffran i 7^{15} är 3, precis som väntat, och svaret är $x = 7$.

Lösning 4

Vi noterar på samma sätt som tidigare att $x < 10$. Vi provar nu att dela 4 747 561 509 943 med 7:

$$\begin{array}{r} 5 \ 5 \ 1 \ 1 \ 2 \quad 1 \ 5 \ 3 \ 6 \\ 4 \ 7 \ 4 \ 7 \ 5 \ 6 \ 1 \ 5 \ 0 \ 9 \ 9 \ 4 \ 3 \\ \hline 7 \end{array} = 678 \ 223 \ 072 \ 849 \quad \text{rest } 0$$

där de små siffrorna ovanför täljaren är minnesiffror från uträkningen. Notera att divisionen gick jämnt ut, och alltså var x^{15} delbart med 7. Men 7 är ett primtal, och inget annat tal under 10 är delbart med 7, så om x var något annat än 7 skulle dess primtalsfaktorisering inte innehållit 7, och alltså skulle x^{15} inte varit delbart med 7. Med andra ord har vi nu visat att enda möjligheten är att $x = 7$.

Lösning 5

En sista lösningsmetod är att helt enkelt gissa att $x = 7$, räkna ut 7^{15} , och kontrollera att det ger exakt 4 747 561 509 943. Detta är väldigt jobbigt, tar jättelång tid, och är inte att rekommendera, men det är inte omöjligt att göra det under tävlingens skrivtid som var 3 timmar.

Om man vill snabba på processen lite så är det värt att notera att man kan börja med att räkna ut $7^2 = 49$, och sen istället för att räkna $7^3 = 49 \cdot 7$ så kan man hoppa direkt till $7^4 = 49 \cdot 49 = 2401$ med bara en uträkning istället för två. Därifrån kan man direkt räkna ut 7^8 som

$$7^8 = 7^4 \cdot 7^4 = 2401 \cdot 2401 = 5 \ 764 \ 801.$$

Därifrån kan man räkna ut 7^{16} som

$$7^{16} = 7^8 \cdot 7^8 = 5 \ 764 \ 801 \cdot 5 \ 764 \ 801 = 33 \ 232 \ 930 \ 569 \ 601.$$

Till sist kan vi räkna ut 7^{15} genom att dividera detta med 7, och får då

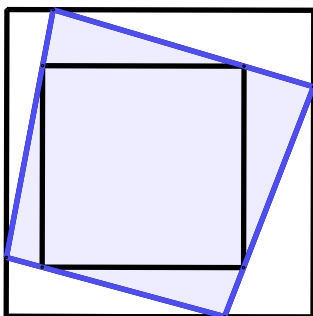
$$\frac{33 \ 232 \ 930 \ 569 \ 601}{7} = 4 \ 747 \ 561 \ 509 \ 943$$

vilket är samma som x^{15} . Så $x = 7$.

Notera att vi genom att upprepat ta talet vi fått hittills gånger sig självt kunde räkna ut $7^2, 7^4, 7^8$ och 7^{16} med bara fyra uträkningar istället för femton uträkningar (i sista stegen blev multiplikationerna väldigt långa, och det skulle knappt få plats på en sida om vi skrev ut allt med uppställningarna istället för att bara skriva svaren, men detta är fortfarande mycket snabbare än att räkna ut $7 \cdot 7 \cdot 7 \dots 7$ genom att multiplicera med 7 femton gånger).

Problem 7

I figuren syns två kvadrater (svart omkrets) med parallella sidor. Den stora kvadraten har sidlängd 3 och den lilla har sidlängd 2. Vad är arean av den blå skuggade fyrhörningen?



Lösning

Svaret är att arean är 6. *Anmärkning: I problemet under tävlingen så hade den lilla kvadraten sidlängd 5 och den stora 10. Svaret var då 50. Lösningssmetoden är samma!*

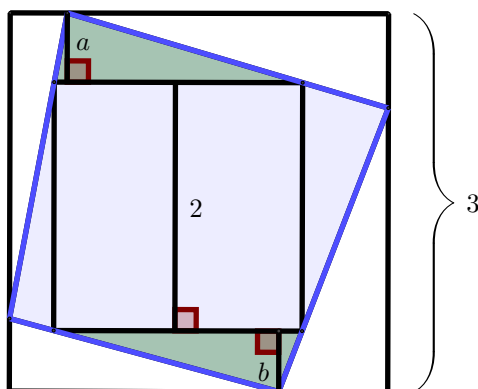
Vi börjar med att räkna ut summan av areorna av de två gröna triangelarna i bilden nedan. Vi vet inte vad höjderna är i dessa trianglar, och kallar dem därför för a och b (som i bilden). Vi vet däremot att summan av höjderna är 1. Det är för att de två höjderna tillsammans med den lilla kvadratens sidlängd (alltså 2) är lika långt som den stora kvadratens sidlängd (alltså 3), så de två höjderna summerar till $3 - 2 = 1$. Skrivet som en ekvation har vi:

$$a + b + 2 = 3 \quad \text{vilket ger att} \quad a + b = 1.$$

De två gröna triangelarna har båda bas 2 (den lilla kvadratens sidlängd). Det betyder att arean av den övre gröna triangeln är $\frac{2 \cdot a}{2} = a$ och att arean av den undre gröna triangeln är $\frac{2 \cdot b}{2} = b$, enligt formeln för triangelns area. Alltså har de tillsammans area $a + b = 1$.

Exakt samma resonemang ger att summan av motsvarande trianglar på höger och vänster sida av den lilla kvadraten tillsammans har area 1. Till sist har den lilla kvadraten area $2 \cdot 2 = 4$. Så den totala arean vi vill räkna ut blir

$$1 + 1 + 4 = 6.$$



Anmärkning 1: Det finns andra sätt att räkna ut arean. Till exempel kan vi förlänga den lilla kvadratens sidor tills de möter den stora kvadratens sidor - då bildas fyra rektanglar i hörnen som kan sättas ihop till en kvadrat med sidlängd $3 - 2 = 1$ och area 1. Den lilla blåa kvadraten i mitten har area $2 \cdot 2 = 4$. Utöver dessa återstår då bara fyra rektanglar längs kanterna, och de måste alltså ha total area $9 - 4 - 1 = 4$. Var och en av dem är exakt till hälften blå, så de har en gemensam blå area på 2, vilket ger total blå area $4 + 2 = 6$ i hela figuren. Notera dock att denna lösning också använde sig av att summan $a + b$ av höjderna i bilden är 1 för att visa att kvadraten vi kan sätta ihop från hörnbitarna har sidlängd 1. Denna insikt är mycket viktig för att lösa uppgiften!

Anmärkning 2: I allmänhet gäller att om den lilla kvadraten har sidlängd x och den stora har sidlängd y så har en fyrhörning som den i bilden ovan area xy - beviset för detta är precis samma!

Problem 8

Eleverna i UVS-byn bor i 49 höghus som ligger jämnt utspridda längs med en och samma gata. I det första huset bor 1 elev, i det andra huset bor 2 elever, och så vidare till och med hus nummer 49 där 49 elever bor. När det är dags att organisera en stor mattetävling vill arrangörerna veta i vilket hus de ska hålla tävlingen för att minimera den totala ressträckan för alla eleverna. Vilket hus ska de välja?

Lösning

Svaret är hus nummer 35.

Det totala antalet personer som bor i UVS-byn är $1 + 2 + \dots + 49$. Vi kan räkna ut dubbelt av denna summan genom att para ihop termer:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 49) &= \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & 48 + 49 + \\ & & & & & & 49 + 48 + \dots + 2 + 1 \end{array} \\ &= 50 + 50 + \dots + 50 + 50 \\ &= 50 \cdot 49 \end{aligned}$$

så det totala antalet elever i byn är hälften av detta:

$$1 + 2 + \dots + 49 = \frac{50 \cdot 49}{2} = 25 \cdot 49 = (5 \cdot 7)^2 = 35^2.$$

Låt säga att vi valt ett hus k . För att det ska vara optimalt måste det åtminstone vara bättre än hus $k - 1$ och hus $k + 1$.

- Vad händer om vi flyttar till hus $k + 1$? För alla som bor i hus 1 till k skulle avståndet öka med ett, medan det för resterande personer skulle minska med ett. Alltså är det bara bättre att stanna i hus k om *minst hälften bor i hus 1 till k* .
- Vad händer om vi flyttar till hus $k - 1$? För alla som bor i hus 1 till $k - 1$ skulle avståndet minska med ett, medan det för resterande personer skulle öka med ett. Alltså är det bara bättre att stanna i hus k om *max hälften bor i hus 1 till $k - 1$* .

Vi söker alltså ett hus k så att minst hälften bor i hus 1 till k och max hälften bor i hus 1 till $k - 1$.

Antalet personer som bor i hus 1 till k är $1 + 2 + \dots + k$, vilket vi kan räkna ut på samma sätt som ovan:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + 2 + \dots + k) &= \begin{array}{ccccccc} 1 & + & 2 & + & \dots & + & (k-1) + k \\ + k & + & (k-1) & + & \dots & + & 2 + 1 \end{array} \\ &= (k+1) + (k+1) + \dots + (k+1) + (k+1) \\ &= k(k+1). \end{aligned}$$

Delar vi detta med 2 får vi att totala antalet personer i hus 1 till k är

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

På precis samma sätt visar vi att antalet personer som bor i hus 1 till $k - 1$ måste vara $\frac{k(k-1)}{2}$. När vi nu vet dessa formler för antalet som bor i de första k respektive $k - 1$ husen, kan vi omformulera "max hälften bor i hus 1 till $k - 1$ " och "minst hälften bor i hus 1 till k " som:

$$\frac{(k-1)k}{2} \leq \frac{35^2}{2} \leq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Om vi multiplicerar allt med 2 så måste olikheten fortfarande gälla, så vi får att

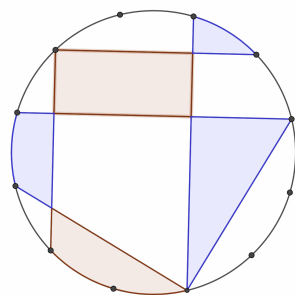
$$(k-1)k \leq 35^2 \leq k(k+1).$$

Det är tydligt att enda heltalet k som uppfyller detta är $k = 35$. (Om k är mindre gäller inte högra olikheten, om k är större gäller inte vänstra).

Anmärkning: Det finns andra lösningsmetoder, dessa är lite mer tekniska och presenteras i lösning 2 till gymnasietävlingens uppgift 4.

Problem 9

Bevisa att summan av areorna av de blå områdena är samma som summan av areorna av de röda områdena. Figuren är en cirkel och punkterna på omkretsen är jämnt utspridda.

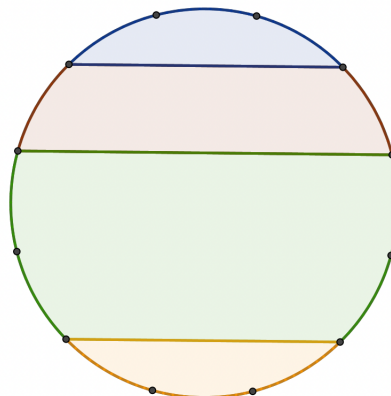
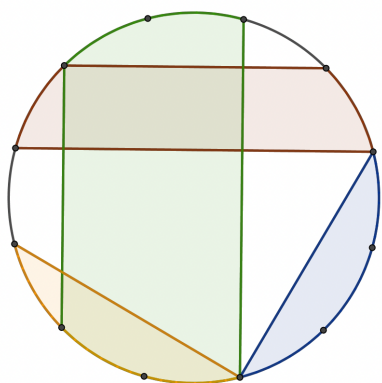


Lösning 1

I den vänstra bilden nedan har fyra bitar av cirkeln färgats i fyra olika färger, som sedan arrangerats om i den högra bilden så att de precis täcker hela cirkeln utan överlapp. Notera att:

- röda områden i den ursprungliga bilden (se uppgiftsformuleringen ovan) motsvarar exakt de områden där bitarna i den vänstra bilden nedan överlappar
- blå områden i den ursprungliga bilden (se uppgiftsformuleringen ovan) motsvarar exakt de områden som bitarna i den vänstra bilden nedan inte täcker alls

Men de överlappande områdena och de områden som inte täcks alls i den vänstra bilden nedan måste ha samma area, eftersom de 4 bitarna tillsammans har exakt samma area som cirkeln. Därmed har vi bevisat påståendet i uppgiften.



Lösning 2

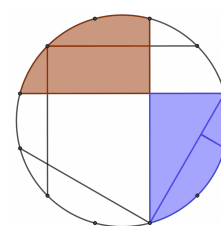
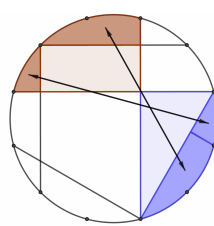
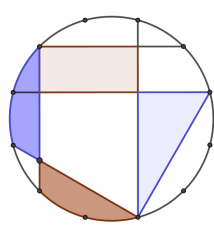
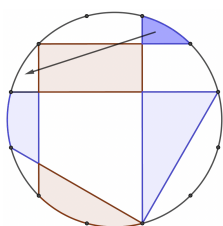
En annan lösning fås genom att "klippa och klistra" med bitarna som i de fyra bilderna nedan. Eftersom den röda och blåa biten är lika stora i sista bilden, måste de varit det från början.

Bild 1 Flytta den mörkblå biten upp i höger hörn längs med pilen.

Bild 2 Den mörkröda och mörkblåa biten är lika stora, så vi kan ta bort dem.

Bild 3 De mörkröda bitarna är lika stora som motsvarande mörkblåa bitar, så vi kan lägga till dem.

Bild 4 Den mörkröda och mörkblåa biten är lika stora, så vi kan ta bort dem.



Anmärkning: Det finns andra lösningsmetoder som bygger på att helt enkelt räkna ut vissa av areorna. Dessa är lite mer tekniska och presenteras i lösning 3 till gymnasietävlingens uppgift 8.

Problem 10

På tavlan står talen $1, 2, 3, \dots, 1000$. Kevin väljer ut 12 av dem, och suddar ut resten. Därefter noterar han att ingen summa av några tal som är kvar på tavlan är ett potensstal. Är detta möjligt? *Notera: Ett potensstal är ett tal på formen n^k för heltal n och $k \geq 2$. Till exempel så är följande tal potensstal: $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$, $49 = 7 \cdot 7 = 7^2$, $128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$.*

Lösning

Vi vet att 79 är ett primtal, eftersom det inte delas av 2, 3, 5 eller 7 och $11 \cdot 11 > 79$ (det räcker att kolla delbarhet med dessa tal, för om 79 inte var ett primtal skulle det varit en produkt av två mindre tal, men då måste minst ett av dessa tal vara mindre än 11 eftersom $11 \cdot 11 > 79$, och de enda primtalen under 11 är 2, 3, 5 och 7). Låt oss nu välja talen

$$1 \cdot 79, 2 \cdot 79, \dots, 12 \cdot 79.$$

Detta är 12 stycken tal och det största av dem är $12 \cdot 79 = 948 < 1000$, så de stod alla på tavlan från början. Deras summa är

$$\begin{aligned} 1 \cdot 79 + 2 \cdot 79 + \dots + 12 \cdot 79 &= 79 \cdot (1 + 2 + \dots + 12) \\ &= 79 \cdot \frac{12(12+1)}{2} \\ &= 79 \cdot 78. \end{aligned}$$

Varje summa av några av dessa tal måste vara delbar med 79, eftersom varje tal är delbart med 79. Men ingen summa av några av talen kan vara delbar med 79^2 , eftersom summan av *alla* tal är $79 \cdot 78 < 79^2$. Eftersom 79 är ett primtal, så följer det att ingen summa kan vara ett potensstal (om ett primtal delar ett potensstal n^k så måste det dela potensstalet minst $k \geq 2$ gånger, men vi har just visat att primtalet 79 delar varje summa av några av talen *exakt* en gång), så vi är klara!