Học Máy

(Machine Learning)

Thân Quang Khoát

khoattq@soict.hust.edu.vn

Viện Công nghệ thông tin và Truyền thông Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội Năm 2016

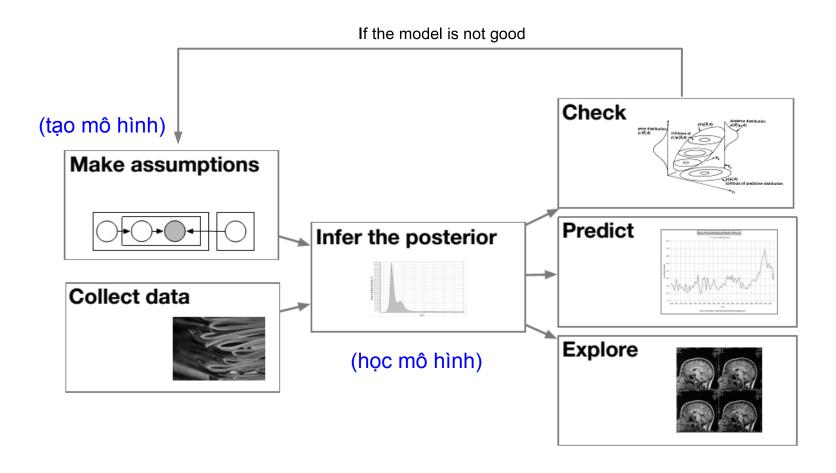
Nội dung môn học:

- Giới thiệu chung
- Các phương pháp học không giám sát
- Các phương pháp học có giám sát
 - Phân loại với Naïve Bayes
- Đánh giá hiệu năng hệ thống học máy

Các phương pháp học dựa trên xác suất

- Các phương pháp thống kê cho bài toán phân loại
- Phân loại dựa trên một mô hình xác suất
- Việc phân loại dựa trên khả năng xảy ra (probabilities)
- Các chủ đề chính:
 - Giới thiệu về xác suất
 - Định lý Bayes
 - Xác suất hậu nghiệm cực đại (Maximum a posteriori)
 - Ước lượng khả năng có thể nhất (Maximum likelihood estimation)
 - Phân loại Naïve Bayes

Quá trình mô hình hoá



[Blei, 2012]

Các khái niệm cơ bản về xác suất

- Giả sử chúng ta có một thí nghiệm (ví dụ: tung một con xúc sắc) mà kết quả của nó mang tính ngẫu nhiên.
- Không gian các khả năng S. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra Ví dụ: S= {1,2,3,4,5,6} đối với thí nghiệm tung con xúc sắc
- Sự kiện E. Một tập con của không gian các khả năng

```
Ví dụ: E = \{1\}: kết quả con xúc sắc đổ ra là 1
Ví dụ: E = \{1,3,5\}: kết quả con súc xắc đổ ra là một số lẻ
```

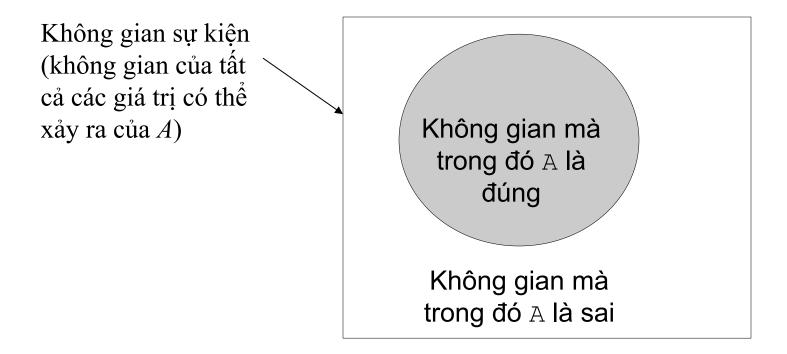
Không gian các sự kiện ⋈. Không gian (thế giới) mà các kết quả của sự kiện có thể xảy ra

Ví dụ: w bao gồm tất cả các lần tung súc xắc

■ Biến ngẫu nhiên A. Một biến ngẫu nhiên biểu diễn (diễn đạt) một sự kiện, và có một mức độ về khả năng xảy ra sự kiện này

Biểu diễn xác suất

P(A): "Phần của không gian (thế giới) mà trong đó A là đúng"



[http://www.cs.cmu.edu/~awm/tutorials]

Các biến ngẫu nhiên 2 giá trị

- Một biến ngẫu nhiên 2 giá trị (nhị phân) có thể nhận một trong 2 giá trị: đúng (true) hoặc sai (false)
- Các tiên đề
 - $0 \le P(A) \le 1$
 - P(true) = 1
 - P(false) = 0
 - $\bullet P(A V B) = P(A) + P(B) P(A \land B)$
- Các hệ quả
 - $P(\text{not } A) \equiv P(\sim A) = 1 P(A)$
 - $P(A) = P(A \land B) + P(A \land \sim B)$

Các biến ngẫu nhiên đa trị

Một biến ngẫu nhiên nhiều giá trị có thể nhận một trong số k (>2) giá trị $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$

$$P(A = v_i \land A = v_j) = 0 \text{ if } i \neq j$$

$$P(A = v_1 \lor A = v_2 \lor ... \lor A = v_k) = 1$$

$$P(A = v_1 \lor A = v_2 \lor ... \lor A = v_i) = \sum_{j=1}^{i} P(A = v_j)$$

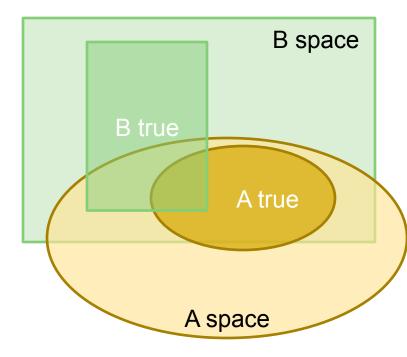
$$\sum_{j=1}^{k} P(A = v_j) = 1$$

$$P(B \land [A = v_1 \lor A = v_2 \lor ... \lor A = v_i]) = \sum_{j=1}^{i} P(B \land A = v_j)$$

[http://www.cs.cmu.edu/~awm/tutorials]

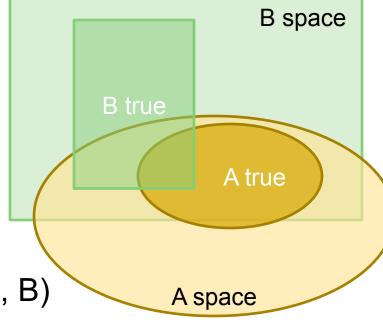
Xác suất đồng thời (1)

- Xác suất đồng thời (kết hợp, joint probability):
 P(A,B) là tỉ lệ của không gian (thế giới) mà trong đó A đúng và B đúng.
- Ví dụ
 - A: Tôi sẽ đi đá bóng vào ngày mai
 - B: Nam không đi đá bóng
 - P(A,B): Xác suất của việc tôi sẽ đi đá bóng vào ngày mai nhưng Nam lại không đi



Xác suất đồng thời (2)

- Gọi S_A là không gian của biến A
- Gọi S_B là không gian của biến B



Gọi S_{AB} là không gian của biến (A, B)

$$S_{AB} = S_A \otimes S_B$$

Khi đó:

 $P(A, B) = (Phần không gian để A đúng và B đúng) / <math>|S_{AB}|$

Xác suất có điều kiện (1)

- Xác suất có điều kiện (conditional probability):
 P(A|B) là tỉ lệ của không gian mà trong đó A là đúng,
 với điều kiện (đã biết) là B đúng
- Ví dụ
 - A: Tôi sẽ đi đá bóng vào ngày mai
 - B: Trời sẽ không mưa vào ngày mai
 - P(A|B): Xác suất của việc tôi sẽ đi đá bóng vào ngày mai nếu (đã biết rằng) trời sẽ không mưa (vào ngày mai)
- Phân biệt với xác suất đồng thời?

Xác suất có điều kiện (2)

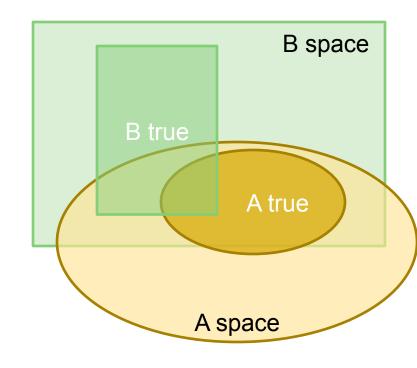
Định nghĩa:
$$P(A \mid B) = \frac{P(A, B)}{P(B)}$$

Các hệ quả:

$$P(A, B) = P(A|B) . P(B)$$

$$P(A|B) + P(\sim A|B) = 1$$

$$\sum_{i=1}^k P(A = v_i \mid B) = 1$$



Các biến độc lập về xác suất (1)

- Hai sự kiện A và B được gọi là độc lập về xác suất nếu xác suất của sự kiện A là như nhau đối với các trường hợp:
 - Khi sự kiện B xảy ra, hoặc
 - Khi sự kiện B không xảy ra, hoặc
 - Không có thông tin (không biết gì) về việc xảy ra của sự kiện B

Ví dụ

- A: Tôi sẽ đi đá bóng vào ngày mai
- ▶B: Biển Đông có nhiều cá
- $\bullet P(A|B) = P(A)$
 - → "Dù Biến Đông có bao nhiêu cá thì cũng không ảnh hưởng tới quyết định của tôi về việc đi đá bóng ngày mai."

Các biến độc lập về xác suất (2)

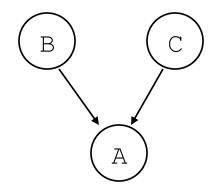
Từ định nghĩa của các biến độc lập về xác suất P(A|B)=P(A), chúng ta thu được các luật như sau

- $P(\sim A \mid B) = P(\sim A)$
- $\bullet P(B|A) = P(B)$
- $P(A, B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(\sim A, B) = P(\sim A) \cdot P(B)$
- $P(A, \sim B) = P(A) \cdot P(\sim B)$
- $P(\sim A, \sim B) = P(\sim A) \cdot P(\sim B)$

Xác suất có điều kiện với nhiều biến

P(A|B,C) là xác suất của A khi đã biết B và C

- Ví dụ
 - A: Tôi sẽ đi dạo bờ sông vào sáng mai
 - B: Thời tiết sáng mai rất đẹp
 - C: Tôi sẽ dậy sớm vào sáng mai
 - P(A|B,C): Xác suất của việc tôi sẽ đi dạo dọc bờ sông vào sáng mai, nếu (đã biết rằng) thời tiết sáng mai rất đẹp và tôi sẽ dậy sớm vào sáng mai



P(A|B,C)

Độc lập có điều kiện

- Hai biến A và C được gọi là độc lập có điều kiện đối với biến B, nếu P(A|B,C) = P(A|B)
- Ví dụ
 - A: Tôi sẽ đi đá bóng vào ngày mai
 - B: Trận đá bóng ngày mai sẽ diễn ra trong nhà
 - C: Ngày mai trời sẽ không mưa
 - P(A|B,C) = P(A|B)
 - → Nếu biết rằng trận đấu ngày mai sẽ diễn ra trong nhà, thì xác suất của việc tôi sẽ đi đá bóng ngày mai không phụ thuộc vào thời tiết

Các quy tắc quan trọng của xác suất

Quy tắc chuỗi (chain rule)

- P(A, B) = P(A|B) . P(B) = P(B|A) . P(A) = P(B, A)
- P(A|B) = P(A,B)/P(B) = P(B|A).P(A)/P(B)
- P(A,B|C) = P(A,B,C)/P(C) = P(A|B,C).P(B,C)/P(C)= P(A|B,C).P(B|C)

Độc lập về xác suất và độc lập có điều kiện

- P(A|B) = P(A); nếu A và B là độc lập về xác suất
- P(A,B|C) = P(A|C).P(B|C); nếu A và B là độc lập có điều kiện đối với C
- P(A₁,...,A_n|C) = P(A₁|C)...P(A_n|C); nếu A₁,...,A_n là độc lập có điều kiện đối với C

Định lý Bayes

$$P(h \mid D) = \frac{P(D \mid h).P(h)}{P(D)}$$

- P(h): Xác suất trước (tiên nghiệm) của giả thiết h
- P (D): Xác suất trước (tiên nghiệm) của việc quan sát được dữ liệu D
- P(D|h): Xác suất (có điều kiện) của việc quan sát được dữ liệu D, nếu biết giả thiết h là đúng. (likelihood)
- P (h | D): Xác suất (hậu nghiệm) của giả thiết h là đúng, nếu quan sát được dữ liệu D
 - Các phương pháp phân loại dựa trên xác suất sẽ sử dụng xác suất hậu nghiệm (posterior probability) này!

Định lý Bayes: Ví dụ (1)

Giả sử chúng ta có tập dữ liệu sau (dự đoán 1 người có chơi tennis)?

| Ngày | Ngoài trời | Nhiệt độ | Độ ẩm | Gió | Chơi tennis |
|------|------------|-------------|-------------|------|-------------|
| N1 | Nắng | Nóng | Cao | Yếu | Không |
| N2 | Nắng | Nóng | Cao | Mạnh | Không |
| N3 | Âm u | Nóng | Cao | Yếu | Có |
| N4 | Mưa | Bình thường | Cao | Yếu | Có |
| N5 | Mưa | Mát mẻ | Bình thường | Yếu | Có |
| N6 | Mưa | Mát mẻ | Bình thường | Mạnh | Không |
| N7 | Âm u | Mát mẻ | Bình thường | Mạnh | Có |
| N8 | Nắng | Bình thường | Cao | Yếu | Không |
| N9 | Nắng | Mát mẻ | Bình thường | Yếu | Có |
| N10 | Mưa | Bình thường | Bình thường | Yếu | Có |
| N11 | Nắng | Bình thường | Bình thường | Mạnh | Có |
| N12 | Âm u | Bình thường | Cao | Mạnh | Có |

Định lý Bayes: Ví dụ (2)

- Dữ liệu D. Ngoài trời là nắng và Gió là mạnh
- Giả thiết (phân loại) h. Anh ta chơi tennis
- Xác suất tiên nghiệm P(h). Xác suất rằng anh ta chơi tennis (bất kể Ngoài trời như thế nào và Gió ra sao)
- Xác suất tiên nghiệm P (D). Xác suất rằng Ngoài trời là nắng và Gió là mạnh
- P (D|h). Xác suất Ngoài trời là nắng và Gió là mạnh, nếu biết rằng anh ta chơi tennis
- P (h | D) . Xác suất anh ta chơi tennis, nếu biết rằng Ngoài trời là nắng và Gió là mạnh

Xác suất hậu nghiệm cực đại (MAP)

- Với một tập các giả thiết (các phân lớp) có thể ℍ, hệ thống học sẽ tìm giả thiết có thể xảy ra nhất (the most probable hypothesis) h (ℍ) đối với các dữ liệu quan sát được D
- Giả thiết h này được gọi là giả thiết có xác suất hậu nghiệm cực đại (Maximum a posteriori – MAP)

$$h_{MAP} = \underset{h \in H}{\operatorname{arg\,max}} \ P(h \mid D)$$

$$h_{MAP} = \underset{h \in H}{\operatorname{arg\,max}} \ \frac{P(D \mid h).P(h)}{P(D)} \qquad \text{(b\"{o}'i \ d\~{i}nh \ l\'{y} \ Bayes)}$$

$$h_{MAP} = \underset{h \in H}{\operatorname{arg\,max}} P(D \mid h).P(h)$$
 (P(D) là như nhau đối với các giả thiết h)

MAP: Ví dụ

- Tập H bao gồm 2 giả thiết (có thể)
 - h₁: Anh ta chơi tennis
 - h₂: Anh ta không chơi tennis
- Tính giá trị của 2 xác xuất có điều kiện: P(h₁ | D), P(h₂ | D)
- Giả thiết có thể nhất $h_{MAP} = h_1$ nếu $P(h_1 | D) \ge P(h_2 | D)$; ngược lại thì $h_{MAP} = h_2$
- Bởi vì P(D) = P(D, h₁) + P(D, h₂) là như nhau đối với cả 2 giả thiết h₁ và h₂, nên có thể bỏ qua đại lượng P(D)
- Vì vậy, cần tính: P(D|h₁).P(h₁) và P(D|h₂).P(h₂), và đưa ra quyết định tương ứng
 - Nếu $P(D|h_1) \cdot P(h_1) \ge P(D|h_2) \cdot P(h_2)$, thì kết luận anh ta chơi tennis
 - Ngược lại, thì kết luận là anh ta không chơi tennis

Đánh giá khả năng có thể nhất (MLE)

- Phương pháp MAP: Với một tập các giả thiết có thể H, cần tìm một giả thiết cực đại hóa giá trị: P(D|h).P(h)
- Uớc lượng khả năng có thể nhất (Maximum likelihood estimation MLE): Giả sử tất cả các giả thiết đều có giá trị xác suất trước như nhau: P (h₁) =P (h₁), ∀h₁, h₁∈H
- Phương pháp MLE tìm giả thiết cực đại hóa giá trị P(D|h); trong đó P(D|h) được gọi là khả năng có thể (likelihood) của dữ liệu D đối với h
- Giả thiết có khả năng nhất (maximum likelihood hypothesis)

$$h_{ML} = \underset{h \in H}{\operatorname{arg\,max}} P(D \mid h)$$

MLE: Ví dụ

- Tập H bao gồm 2 giả thiết có thể
 - h₁: Anh ta chơi tennis
 - h₂: Anh ta không chơi tennis
 - D: Tập dữ liệu (các ngày) mà trong đó thuộc tính *Outlook* có giá trị *Sunny* và thuộc tính Wind có giá trị *Strong*
- Tính 2 giá trị khả năng xảy ra (likelihood values) của dữ liệu D
 đối với 2 giả thiết: P(D|h₁) và P(D|h₂)
 - P(Outlook=Sunny, Wind=Strong $| h_1 \rangle = 1/8$
 - P(Outlook=Sunny, Wind=Strong $| h_2 \rangle = 1/4$
- Giả thiết MLE $h_{\text{MLE}} = h_1$ nếu $P(D|h_1) \ge P(D|h_2)$; và ngược lại thì $h_{\text{MLE}} = h_2$
 - \rightarrow Bởi vì P(Outlook=Sunny, Wind=Strong|h₁) < P(Outlook=Sunny, Wind=Strong|h₂), hệ thống kết luận rằng: Anh ta sẽ không chơi tennis!

Phân Ioại Naïve Bayes (1)

- Biểu diễn bài toán phân loại (classification problem)
 - Một tập học D_train, trong đó mỗi ví dụ học x được biểu diễn là một vectơ n chiều: (x_1, x_2, \dots, x_n)
 - Một tập xác định các nhãn lớp: C= { c₁, c₂, ..., c_m}
 - Với một ví dụ mới z, thì z sẽ được phân vào lớp nào?
- Mục tiêu: Xác định phân lớp có thể (phù hợp) nhất đối với z

$$\begin{split} c_{\mathit{MAP}} &= \operatorname*{arg\,max}_{c_i \in \mathcal{C}} P(c_i \mid z) \\ c_{\mathit{MAP}} &= \operatorname*{arg\,max}_{c_i \in \mathcal{C}} P(c_i \mid z_1, z_2, ..., z_n) \\ c_{\mathit{MAP}} &= \operatorname*{arg\,max}_{c_i \in \mathcal{C}} \frac{P(z_1, z_2, ..., z_n \mid c_i).P(c_i)}{P(z_1, z_2, ..., z_n)} \end{split} \tag{bởi định lý Bayes)}$$

Phân Ioại Naïve Bayes (2)

Để tìm được phân lớp có thể nhất đối với z:

$$c_{MAP} = \underset{c_i \in C}{\operatorname{arg\,max}} P(z_1, z_2, ..., z_n \mid c_i) . P(c_i) \qquad \begin{array}{l} (P(z_1, z_2, ..., z_n) \mid \text{à} \\ \text{như nhau với các lớp)} \end{array}$$

Giả sử (assumption): Các thuộc tính là độc lập có điều kiện (conditionally independent) đối với các lớp

$$P(z_1, z_2, ..., z_n \mid c_i) = \prod_{j=1}^n P(z_j \mid c_i)$$

Phân loại Naïve Bayes tìm phân lớp có thể nhất đối với z

$$c_{NB} = \underset{c_i \in C}{\operatorname{arg\,max}} P(c_i) \cdot \prod_{j=1}^{n} P(z_j \mid c_i)$$

Phân loại Naïve Bayes: Giải thuật

- Giai đoạn học (training phase), sử dụng một tập học Đối với mỗi phân lớp có thể (mỗi nhãn lớp) c_i∈C
 - Tính giá trị xác suất trước: P(c_i)
 - Đối với mỗi giá trị thuộc tính x_j , tính giá trị xác suất xảy ra của giá trị thuộc tính đó đối với một phân lớp c_i : $P(x_j | c_i)$
- Giai đoạn phân lớp (classification phase), đối với một ví dụ mới
 - Đối với mỗi phân lớp c₁∈C, tính giá trị của biểu thức:

$$P(c_i).\prod_{j=1}^n P(x_j \mid c_i)$$

Xác định phân lớp của z là lớp có thể nhất c*

$$c^* = \underset{c_i \in C}{\operatorname{arg\,max}} P(c_i) \cdot \prod_{j=1}^n P(x_j \mid c_i)$$

Phân loại Naïve Bayes: Ví dụ (1)

Một sinh viên trẻ với thu nhập trung bình và mức đánh giá tín dụng bình thường sẽ mua một cái máy tính?

| Rec. ID | Age | Income | Student | Credit_Rating | Buy_Computer |
|---------|--------|--------|---------|---------------|--------------|
| 1 | Young | High | No | Fair | No |
| 2 | Young | High | No | Excellent | No |
| 3 | Medium | High | No | Fair | Yes |
| 4 | Old | Medium | No | Fair | Yes |
| 5 | Old | Low | Yes | Fair | Yes |
| 6 | Old | Low | Yes | Excellent | No |
| 7 | Medium | Low | Yes | Excellent | Yes |
| 8 | Young | Medium | No | Fair | No |
| 9 | Young | Low | Yes | Fair | Yes |
| 10 | Old | Medium | Yes | Fair | Yes |
| 11 | Young | Medium | Yes | Excellent | Yes |
| 12 | Medium | Medium | No | Excellent | Yes |
| 13 | Medium | High | Yes | Fair | Yes |
| 14 | Old | Medium | No | Excellent | No |

Phân loại Naïve Bayes: Ví dụ (2)

- Biểu diễn bài toán phân loại
 - z = (Age=Young, Income=Medium, Student=Yes, Credit_Rating=Fair)
 - Có 2 phân lớp có thể: c_1 ("Mua máy tính") và c_2 ("Không mua máy tính")
- Tính giá trị xác suất trước cho mỗi phân lớp
 - $P(c_1) = 9/14$
 - $P(c_2) = 5/14$
- Tính giá trị xác suất của mỗi giá trị thuộc tính đối với mỗi phân lớp
 - $P(Age=Young|c_1) = 2/9;$
 - $P(Income=Medium|c_1) = 4/9;$
 - P(Student=Yes| c_1) = 6/9;
 - P(Credit_Rating=Fair| c_1) = 6/9;

$$P(Age=Young|c_2) = 3/5$$

$$P(Income=Medium|c_2) = 2/5$$

$$P(Student=Yes|c_2) = 1/5$$

$$P(Credit_Rating=Fair|c_2) = 2/5$$

Phân loại Naïve Bayes: Ví dụ (3)

- Tính toán xác suất có thể xảy ra (likelihood) của ví dụ z đối với mỗi phân lớp
 - Đối với phân lớp C₁

```
P(z|c_1) = P(Age=Young|c_1).P(Income=Medium|c_1).P(Student=Yes|c_1).

P(Credit\_Rating=Fair|c_1) = (2/9).(4/9).(6/9).(6/9) = 0.044
```

Đối với phân lớp c₂

```
P(z|c_2) = P(Age=Young|c_2).P(Income=Medium|c_2).P(Student=Yes|c_2).
 P(Credit\_Rating=Fair|c_2) = (3/5).(2/5).(1/5).(2/5) = 0.019
```

- Xác định phân lớp có thể nhất (the most probable class)
 - Đối với phân lớp c_1 $P(c_1).P(z|c_1) = (9/14).(0.044) = 0.028$
 - Đối với phân lớp c_2 $P(c_2).P(z|c_2) = (5/14).(0.019) = 0.007$
 - →Kết luận: Anh ta (z) sẽ mua một máy tính!

Phân loại Naïve Bayes: Vấn đề (1)

■ Nếu không có ví dụ nào gắn với phân lớp c_{i} có giá trị thuộc tính $x_{j}...$

$$P(x_{j} | c_{i}) = 0$$
, và vì vậy:
$$P(c_{i}) \cdot \prod_{j=1}^{n} P(x_{j} | c_{i}) = 0$$

■ Giải pháp: Sử dụng phương pháp Bayes để ước lượng P (x; | c;)

$$P(x_j \mid c_i) = \frac{n(c_i, x_j) + mp}{n(c_i) + m}$$

- n (c_i): số lượng các ví dụ học gắn với phân lớp c_i
- n (c_i , x_j) : số lượng các ví dụ học gắn với phân lớp c_i có giá trị thuộc tính x_j
- p: ước lượng đối với giá trị xác suất $P(x_j | c_i)$
 - \rightarrow Các ước lượng đồng mức: p=1/k, với thuộc tính f_j có k giá trị có thế
- m: một hệ số (trọng số)
 - \rightarrow Để bổ sung cho n (c_i) các ví dụ thực sự được quan sát với thêm m mẫu ví dụ với ước lượng p

Phân loại Naïve Bayes: Vấn đề (2)

- Giới hạn về độ chính xác trong tính toán của máy tính
 - \cdot P ($x_j \mid c_i$) <1, đối với mọi giá trị thuộc tính x_j và phân lớp c_i
 - · Vì vậy, khi số lượng các giá trị thuộc tính là rất lớn, thì:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{j=1}^n P(x_j \mid c_i) \right) = 0$$

Giải pháp: Sử dụng hàm lôgarit cho các giá trị xác suất

$$c_{NB} = \underset{c_i \in C}{\operatorname{arg\,max}} \left(\log \left[P(c_i) \cdot \prod_{j=1}^n P(x_j \mid c_i) \right] \right)$$

$$c_{NB} = \underset{c_i \in C}{\operatorname{arg\,max}} \left(\log P(c_i) + \sum_{j=1}^n \log P(x_j \mid c_i) \right)$$

Phân loại văn bản bằng NB (1)

Biểu diễn bài toán phân loại văn bản

- Tập học D_train, trong đó mỗi ví dụ học là một biểu diễn văn bản gắn với một nhãn lớp: D = {(d_k, c_i)}
- Một tập các nhãn lớp xác định: C = {C₁}

Giai đoạn học

- Từ tập các văn bản trong D_train, trích ra tập các từ khóa (keywords/terms): T = {t_i}
- Gọi D_c_i (⊆D_train) là tập các văn bản trong D_train **có nhãn lớp** c_i
- Đối với mỗi phân lớp c_i
 - Tính giá trị xác suất trước của phân lớp c_i : $P(c_i) = \frac{|D_-c_i|}{|D|}$
 - Đối với mỗi từ khóa t_j , tính xác suất từ khóa t_j xuất hiện đối với lớp c_i

$$P(t_{j} \mid c_{i}) = \frac{\left(\sum_{d_{k} \in D_{-}c_{i}} n(d_{k}, t_{j})\right) + 1}{\left(\sum_{d_{k} \in D_{-}c_{i}} \sum_{t_{m} \in T} n(d_{k}, t_{m})\right) + \left|T\right|} \qquad \text{(n } (d_{k}, t_{j}) : số lần xuất hiện của từ khóa t_{j} trong văn bản d_{k})}$$

Phân loại văn bản bằng NB (2)

- Giai đoạn phân lớp đối với một văn bản mới d
 - Từ văn bản d, trích ra tập T_d gồm các từ khóa (keywords) t_j đã được định nghĩa trong tập T (T_d ⊆ T)
 - Giả sử (assumption). Xác suất từ khóa t_j xuất hiện đối với lớp c_i là độc lập đối với vị trí của từ khóa đó trong văn bản
 P(t_j ở vị trí k|c_i) = P(t_j ở vị trí m|c_i), ∀k,m
 - Đối với mỗi phân lớp c_{i} , tính xác suất hậu nghiệm của văn bản d đối với c_{i} $P(c_{i}).\prod_{t\in T_{j}}P(t_{j}\,|\,c_{i})$
 - Phân lớp văn bản d thuộc vào lớp c*

$$c^* = \underset{c_i \in C}{\operatorname{arg\,max}} P(c_i) \cdot \prod_{t_j \in T_d} P(t_j \mid c_i)$$

Phân loại Naïve Bayes: Tổng kết

- Một trong các phương pháp học máy được áp dụng phổ biến nhất trong thực tế
- Dựa trên định lý Bayes
- Việc phân loại dựa trên các giá trị xác suất của các khả năng xảy ra của các giả thiết (phân loại)
- Mặc dù đặt giả sử về sự độc lập có điều kiện của các thuộc tính đối với các phân lớp, nhưng phương pháp phân loại Naïve Bayes vẫn thu được các kết quả phân loại tốt trong nhiều lĩnh vực ứng dụng thực tế
- Khi nào nên sử dụng?
 - Có một tập huấn luyện có kích thước lớn hoặc vừa
 - Các ví dụ được biểu diễn bởi một số lượng lớn các thuộc tính
 - Các thuộc tính độc lập có điều kiện đối với các phân lớp

Các phương pháp học dựa trên xác suất

- Dựa trên lý thuyết xác suất
- Nhằm học (xấp xỉ) một mô hình xác suất
- Định lý Bayes đóng vai trò trung tâm
- Kết hợp tri thức tiên nghiệm (các xác suất tiên nghiệm)
 với dữ liệu quan sát được
- Tính toán trực tiếp các xác suất xảy ra đối với các giả thiết (phân lớp)
- Cung cấp các giải thuật học máy có tính ứng dụng thực tế, như phân loại Naïve Bayes