Simulation Methods

October 19, 2023

[ ]:
```python
from IPython.display import Image
```

1 Lognormal Distribution and Continuous Compounding

1.1 Definition

Định nghĩa: Biến ngẫu nhiên Y tuân theo phân phối logarit chuẩn nếu biến ngẫu nhiên $X = \ln Y$ tuân theo phân phối chuẩn

Phân phối logarit chuẩn của biến Y hoàn toàn có thể được xác định thông qua hai tham số: trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên $\ln Y$

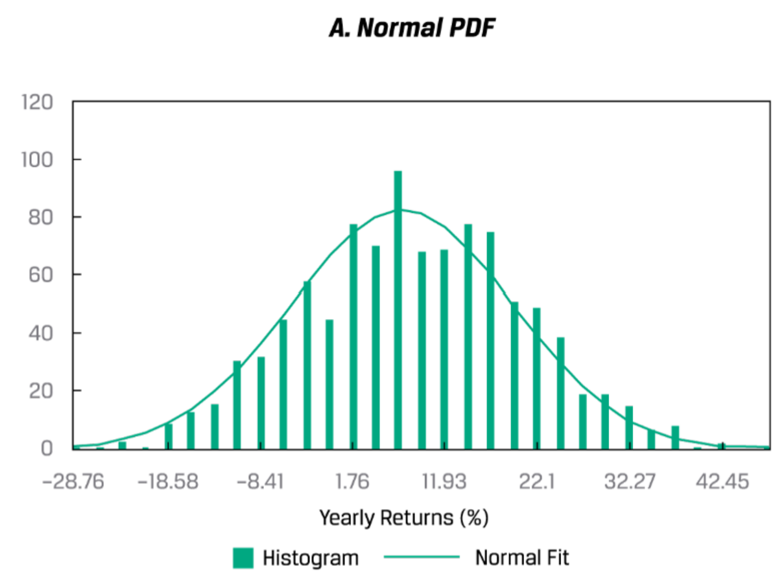
Giả sử μ và σ^2 lần lượt là trung bình và phương sai của biến ngẫu nhiên X. Khi đó, $Y = e^X$ có phân phối logarit chuẩn, đồng thời trung bình μ_L và phương sai σ_L^2 của Y được xác định như sau:

$$\mu_L = e^{\mu + 0.5\sigma^2}$$

$$\sigma_L^2 = e^{2\mu + \sigma^2} \times \left(e^{\sigma^2} - 1\right)$$

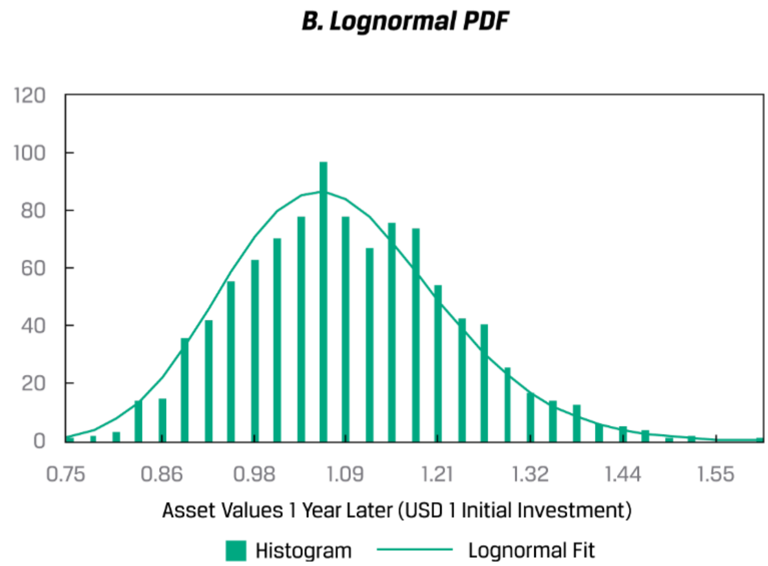
[ ]:
```python
Image(filename = "Pictures/01.png")
```

[ ]:



```
[ ]: Image(filename = "Pictures/02.png")
```

[ ]:



1.2 Continuously Compounded Rates of Return

Trong phần này, chúng ta sẽ chứng minh rằng nếu tỷ suất sinh lợi ghép lãi liên tục của tài sản tuân theo phân phối chuẩn, thì giá tài sản tương lai tuân theo phân phối logarit chuẩn. Hơn nữa, chúng ta cũng sẽ chỉ ra rằng giá tài sản có thể được mô tả tốt bằng phân phối logarit chuẩn bất chấp lãi suất ghép lãi liên tục không tuân theo phân phối chuẩn. Các kết quả này cung cấp cơ sở lý thuyết cho việc sử dụng phân phối logarit chuẩn trong các mô hình định giá tài sản

Rõ ràng, chúng ta có thể biểu diễn giá tài sản tại thời điểm T nào đó trong tương lai (P_t) thông qua giá tài sản ở hiện tại P_0 và tỷ suất sinh lợi ghép lãi liên tục $r_{0,T}$

$$P_T = P_0 \times e^{r_{0,T}}$$

Hơn nữa, ở LM5, chúng ta đã chứng minh tỷ suất sinh lợi ghép lãi liên tục từ hiện tại tới T bằng tổng các tỷ suất sinh lợi ghép lãi liên tục trong một kỳ:

$$r_{0,T} = r_{0,1} + r_{1,2} + ... + r_{T_1,T}$$

Nếu các tỷ suất sinh lợi ngắn hạn ở trên có phân phối chuẩn, thì $r_{0,T}$ tuân theo phân phối chuẩn hoặc tiệm cận chuẩn (tùy thuộc và các giả định được thỏa mãn). Khi đó, rõ ràng P_T tuân theo phân phối logarit chuẩn

Một giả định quan trọng trong nhiều ứng dụng đầu tư là các tỷ suất lợi nhuận phân phối độc lập và giống hệt nhau (**independently and identically distributed** - i.i.d). Sự độc lập ở đây nghĩa là nhà đầu tư không thể dự đoán tỷ suất lợi nhuận trong tương lai dựa vào số liệu lợi nhuận trong quá khứ; trong khi sự giống hệt thể hiện giả định về tính dừng - ngụ ý rằng trung bình và phương sai của lợi nhuận không thay đổi qua từng kỳ

Giả định các tỷ suất lợi nhuận một kỳ thỏa mãn i.i.d. với trung bình và phương sai lần lượt là μ và σ^2 (nhưng không nhất thiết phải tuân theo một phân phối đặc biệt). Khi đó:

$$E\left(r_{0,T}\right) = E\left(r_{0,1}\right) + E\left(r_{1,2}\right) + ... + E\left(r_{T_1,T}\right) = \mu T$$

$$\sigma^2\left(r_{0,T}\right) = \sigma^2 T$$

Lợi nhuận ghép lãi liên tục xuất hiện trong nhiều mô hình định giá tài sản cũng như quản trị rủi ro. Độ biến động (`Volatility`) đo lường độ lệch chuẩn ($\sigma\left(r_{0,T}\right) = \sigma\sqrt{T}$) lợi nhuận ghép lãi liên tục của tài sản cơ sở (và thương được công bố như một chỉ số hàng năm). Trong thực tế, chúng ta thường ước lượng độ biến động thông qua dữ liệu lịch sử, với một năm cơ sở gồm 250 ngày (con số gần tương đương với số ngày thị trường tài chính hoạt động thực tế mỗi năm)

2 Monte Carlo Simulation

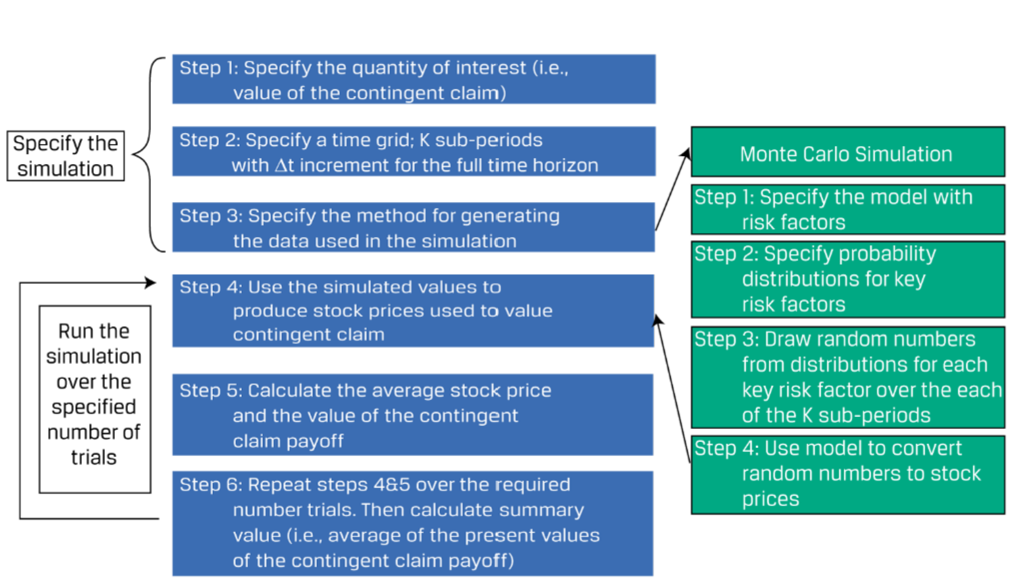
Mô phỏng Monte Carlo được sử dụng rộng rãi để ước lượng rủi ro và lợi tức trong đầu tư. Ở đây, phân tích viên mô phỏng lãi/lỗ của danh mục/tài sản trong một khoảng thời gian xác định. Các phép thử được thực hiện lặp đi lặp lại trong mô phỏng, với mỗi thử nghiệm liên quan đến việc rút ra các quan sát ngẫu nhiên từ các phân phối xác suất, tạo ra một phân phối tần suất mô phỏng lợi tức của danh mục, vốn chỉ ra hiệu suất và rủi ro đầu tư của danh mục

Một ứng dụng quan trọng của mô phỏng Monte Carlo trong đầu tư chính là nó được sử dụng như một công cụ định giá các chứng khoán phức tạp vốn không có công thức định giá cụ thể. Đối với các chứng khoán khác, ví dụ như chứng khoán đảm bảo bằng tài sản thế chấp với các quyền chọn phức tạp, mô phỏng Monte Carlo cũng là nguồn mô hình hóa quan trọng. Phân tích viên hoàn toàn kiểm soát các giả định khi thực hiện mô phỏng Monte Carlo, và do đó họ hoàn toàn có thể vận hành mô hình định giá thông qua mô phỏng đó nhằm kiểm tra độ nhạy của mô hình với các giả định quan trọng

Các bước triển khai mô phỏng Monte Carlo được trình bày trong Hình 2.

[ ]:
```
# Quy trình thực hiện mô phỏng Monte Carlo
Image(filename = "Pictures/03.png")
```

[ ]:



3 Bootstrapping

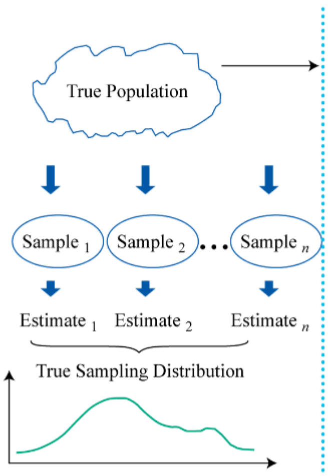
Trong phân tích thống kê, các phân tích viên có thể sử dụng phương pháp lấy mẫu lại (*resampling*), liên tục lấy mẫu từ dữ liệu quan sát ban đầu để suy luận các tham số thống kê của tổng thể. **Bootstrap** là một trong những phương pháp lấy mẫu lại phổ biến nhất, sử dụng mô phỏng máy tính trong suy luận thống kê mà không sử dụng phân phối thống kê như z hay t

Bootstrap và mô phỏng Monte Carlo đều được xây dựng dựa trên việc lấy mẫu lại. Bootstrapping lấy mẫu lại liên tục trên một tập dữ liệu được coi như tổng thể thực và từ đó suy luận các hệ số thống kê cho tổng thể (ví dụ như trung bình, phương sai, skewness hay kurtosis). Mô phỏng Monte Carlo được xây dựng dựa trên việc tạo ra dữ liệu ngẫu nhiên với phân phối của các hệ số thống kê đã được biết trước

(xem thêm LM7 - Quant)

[ ]:
```
# Định nghĩa Bootstrapping
Image(filename = "Pictures/04.png")
```

[ ]:



Trong bootstrap, chúng ta "vẽ" mẫu lại liên tục từ một mẫu gốc, và mỗi mẫu được "vẽ" ra có cùng kích thước với mẫu gốc.

Quy trình thực hiện Bootstrapping được mô tả trong Hình 5

[ ]:
```
# Quy trình thực hiện Bootstrapping
Image(filename = "Pictures/05.png")
```

[ ]: