

Page 44 6. 分别用 \downarrow 和 \uparrow 等价表示下列公式

$$(1) \quad \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg((p \downarrow p) \vee q) \Leftrightarrow \neg((p \downarrow p) \downarrow q) \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q) \\ \neg p \vee q \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \uparrow \neg q \Leftrightarrow p \uparrow (q \uparrow q)$$

$$(2) \quad p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg\neg q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow q \\ p \wedge \neg q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow (q \uparrow q)) \\ \Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow (p \uparrow (q \uparrow q))$$

$$(3) \quad \neg p \vee \neg q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \vee (q \downarrow q) \Leftrightarrow \neg\neg((p \downarrow p) \vee (q \downarrow q)) \Leftrightarrow \neg((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \\ \Leftrightarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \\ \neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow p \uparrow q$$

$$(4) \quad p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \vee \neg(\neg p \vee q) \\ \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \vee \neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \downarrow \neg q) \vee (p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg\neg((\neg p \downarrow \neg q) \vee (p \downarrow q)) \\ \Leftrightarrow \neg((\neg p \downarrow \neg q) \downarrow (p \downarrow q)) \Leftrightarrow \neg(((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \\ \Leftrightarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \downarrow (((p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)) \downarrow (p \downarrow q)) \\ p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q) \vee \neg\neg(\neg p \wedge \neg q) \\ \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \vee \neg(\neg p \uparrow \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \uparrow q) \vee \neg((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)) \\ \Leftrightarrow \neg((p \uparrow q) \wedge ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))) \Leftrightarrow (p \uparrow q) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q))$$

(1) $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

证明:

- 1 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow (A \rightarrow B))$ 公理2
- 2 $(A \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B))$ 前件互换定理2
- 3 $A \rightarrow A$ 定理1
- 4 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (3) 与 (2) 用分离规则

(3) $A \rightarrow B, \neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A \vdash A \rightarrow C$

证明:

- 1 $A \rightarrow B$ 假设
- 2 $\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A$ 假设
- 3 $(\neg(B \rightarrow C) \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ 公理3
- 4 $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ (2) 与 (3) 用分离规则
- 5 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理2
- 6 $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ (4) 与 (5) 用分离规则
- 7 $A \rightarrow C$ (1) 与 (6) 用分离规则

(5) $\vdash (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$

证明:

- 1 $(B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))$ 加后件定理5
- 2 $((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))) \rightarrow$
- 3 $\rightarrow (A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))))$ 公理1
- 4 $(A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))))$
- 5 $\rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))))$ 公理2

- 6 $A \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)))$ (1) 与 (2) 用分离规则
- 7 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)))$ (6) 与 (4) 用分离规则
- 8 $(A \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D))) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$ 定理3
- 9 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((C \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow D)))$ (7) 与 (8) 用三段论定理8

(7) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$

证明:

- 1 $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理1
- 2 $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow (B \rightarrow A)))$ 加后件定理5
- 3 $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow (B \rightarrow A))$ (1) 与 (2) 用分离规则
- 4 $(B \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((B \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A))$ 公理2
- 5 $(B \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A))$ 对 (4) 用前件互换定理2
- 6 $B \rightarrow B$ 定理1
- 7 $(B \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (6) 与 (5) 用分离规则
- 8 $((A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (B \rightarrow A)$ (3) 与 (7) 用三段论定理8

(9) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

证明:

- 1 $A \rightarrow A$ 定理1
- 2 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
- 3 $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理14
- 4 $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ (2) 与 (3) 用分离规则分离而得
- 5 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (4) 与 (1) 用定理18

(9) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

证明：(另外一种证法)

1 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

2 $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$ 加后件定理5

3 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$ (1) 与 (2) 用分离规则

4 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$
 $\rightarrow (((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A))$ 加后件定理5

5 $((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ (3) 与 (4) 用分离规则

6 $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理9

7 $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (6) 与 (5) 用分离规则

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$

证明:

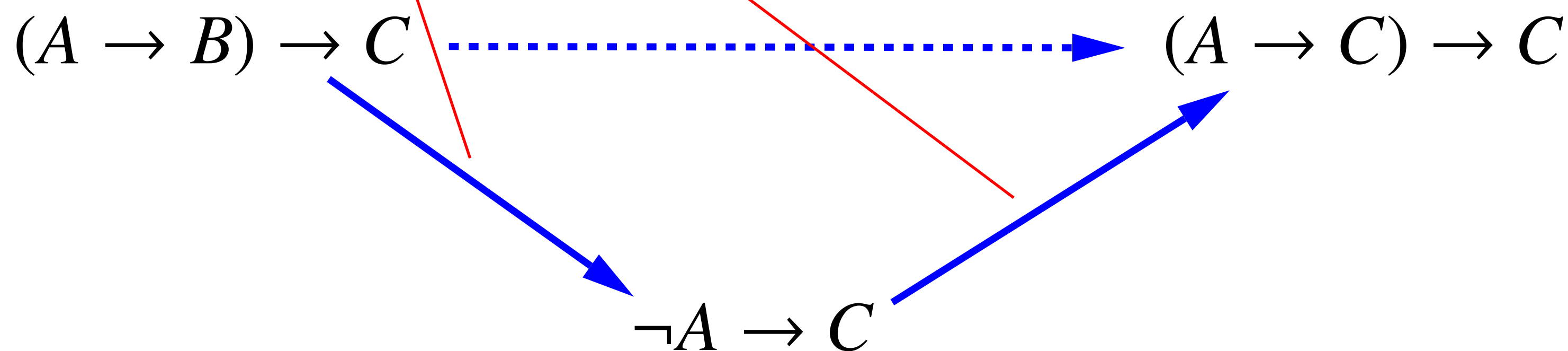
- 1 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
- 2 $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C))$ 加后件定理5
- 3 $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ (1) 与 (2) 用分离规则
- 4 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ 定理14
- 5 $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ 加后件定理5
- 6 $(\neg C \rightarrow C) \rightarrow C$ 定理9
- 7 $((\neg C \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$ 加前件定理4
- 8 $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (6) 与 (7) 用分离规则
- 9 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ (4) 与 (5) 用三段论定理8
- 10 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (9) 与 (8) 用三段论定理8
- 11 $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (3) 与 (10) 用三段论定理8

$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$

证明:

- 1 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
- 2 $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C))$ 加后件定理5
- 3 $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ (1) 与 (2) 用分离规则
- 4 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ 定理14
- 5 $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ 加后件定理5
- 6 $(\neg C \rightarrow C) \rightarrow C$ 定理9
- 7 $((\neg C \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$ 加前件定理4
- 8 $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (6) 与 (7) 用分离规则
- 9 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ (4) 与 (5) 用三段论定理8
- 10 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (9) 与 (8) 用三段论定理8
- 11 $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (3) 与 (10) 用三段论定理8

证明思路:

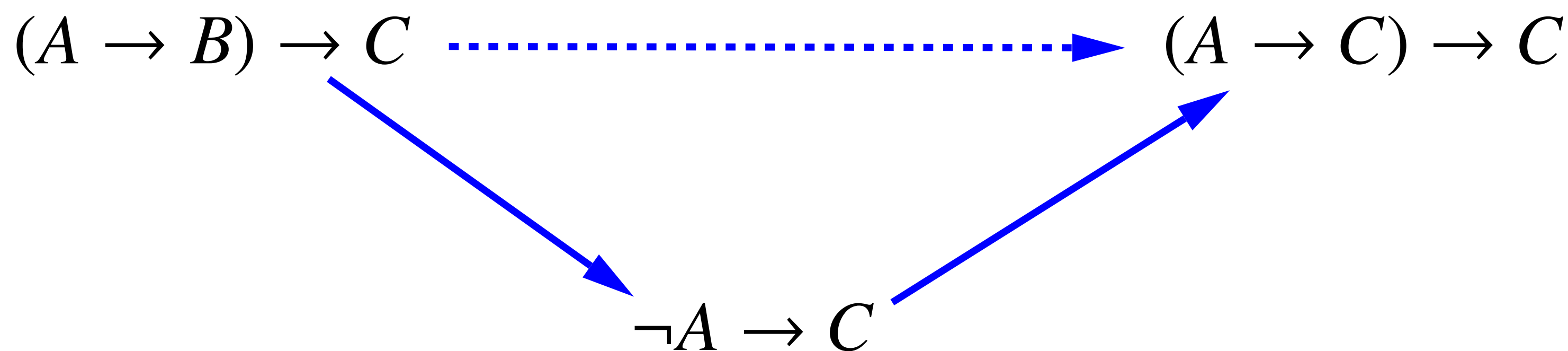


$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$

证明:

- 1 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
- 2 $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C))$ 加后件定理5
- 3 $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)$ (1) 与 (2) 用分离规则
- 4 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ 定理14
- 5 $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ 加后件定理5
- 6 $(\neg C \rightarrow C) \rightarrow C$ 定理9
- 7 $((\neg C \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$ 加前件定理4
- 8 $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (6) 与 (7) 用分离规则
- 9 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ (4) 与 (5) 用三段论定理8
- 10 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (9) 与 (8) 用三段论定理8
- 11 $((A \rightarrow B) \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (3) 与 (10) 用三段论定理8

证明思路:



(13) $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$

证明:

- 1 $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C))$ 加后件定理5
- 2 $(\neg C \rightarrow C) \rightarrow C$ 定理9 加前件定理4
- 3 $((\neg C \rightarrow C) \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$
- 4 $((A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (2) 与 (3) 用分离规则
- 5 $(\neg C \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (1) 与 (4) 用三段论定理8
- 6 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow A)$ 定理14
- 7 $(\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)$ (6) 与 (5) 用三段论定理8
- 8 $((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$
 $\rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)))$ 加前件定理4
- 9 $((B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)))$
 $\rightarrow (((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C)))$ 公理2
- 10 $(B \rightarrow C) \rightarrow ((\neg A \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$ (7) 与 (8) 用分离规则
- 11 $((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C)) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$
- 12 $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (\neg A \rightarrow C))$ 加后件定理5 (10) 与 (9) 用分离规则
- 13 $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$ (12) 与 (11) 用三段论定理8
- 14 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6
- 15 $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B))$ 加后件定理5
- 16 $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$ (14) 与 (15) 用分离规则
- 17 $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow C))$ (16) 与 (13) 用三段论定理8
- 18 $((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$ 前件互换及加前件定理
- 19 $(A \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow C))$ 前件互换定理
- 20 $(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (((A \rightarrow B) \rightarrow B) \rightarrow C))$ 前件互换及加前件定理