

(1). $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

只须证 $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

证明:

- 1 $A \rightarrow B$
- 2 $\neg B$ 假设
- 3 $\neg\neg A \rightarrow A$ 定理10
- 4 $\neg\neg A \rightarrow B$ (3)与(1)用三段论定理8
- 5 $\neg B \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg B)$ 定理6
- 6 $B \rightarrow \neg\neg B$ (2)与(5)用分离规则
- 7 $\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B$ (4)与(6)用三段论定理8
- 8 $(\neg\neg A \rightarrow \neg\neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 公理3
- 9 $\neg B \rightarrow \neg A$ (7)与(8)用分离规则
- 10 $\neg A$

(2). $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

只须证 $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$

证明:

- 1 $A \rightarrow B$ 假设
- 2 $B \rightarrow C$ 假设
- 3 A 假设
- 4 B (3)与(1)用分离规则
- 5 C (4)与(2)用分离规则

(3). $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

只须证 $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$

证明:

1 $(A \rightarrow B) \rightarrow A$ 假设

2 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

3 $\neg A \rightarrow A$ (2) 与 (1) 用三段论定理8

4 $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$ 定理9

5 A (3) 与 (4) 用分离规则

(4) $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

只须证 $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$

证明:

1 $\neg(A \rightarrow B)$ 假设

2 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理6

3 $(\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A)$ 定理14

4 $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow A$ (2) 与 (3) 用分离规则

5 A (1) 与 (4) 用分离规则

2. 将PC中公理3改成 $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$ ，记所得系统为PC1。

证明：

$$(1) \vdash_{PC} (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$$

$$(2) \vdash_{PC1} (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$5 \quad (B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \quad (3) (4) \text{用分离规则}$$

$$\rightarrow (B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))$$

证明：

(1)

$$1 \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{公理3}$$

$$2 \quad B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \quad (1) \text{前件互换}$$

$$3 \quad ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \quad \text{定理13}$$

$$4 \quad B \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \quad (2) (3) \text{用三段论定理8}$$

$$5 \quad \neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \quad (4) \text{前件互换}$$

$$6 \quad (\neg A \rightarrow (B \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B))) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)))$$

$$7 \quad (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \quad (5) (6) \text{用分离规则} \quad \text{公理2}$$

$$8 \quad (\neg A \rightarrow \neg(\neg A \rightarrow \neg B)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \quad \text{公理3}$$

$$9 \quad (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \quad (7) (8) \text{用三段论定理8}$$

(2)

$$1 \quad (\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A) \quad \text{公理3}$$

$$2 \quad ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))$$

$$\rightarrow (B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))) \quad \text{公理1}$$

$$3 \quad B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)) \quad (1) (2) \text{用分离规则}$$

$$4 \quad (B \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)))$$

$$\rightarrow ((B \rightarrow (\neg A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A))) \quad \text{公理2}$$