数理逻辑

任世军
e-mail:ren_shijun@163.com

哈尔滨工业大学 计算机学院

2021 年 4 月

Outline

相关信息

1. 课程介绍 (离散数学 $\Leftarrow$ 数理逻辑 $\Rightarrow$ 形式语义学,程序设计方法学)
2. 教材
3. 参考书
4. 研究内容
5. 发展历史
   - 初始阶段(1660-19 世纪末)
     1. 亚里士多德
     2. 莱布尼兹
     3. 布尔代数
   - 过度阶段(1900-1940)
     1. 非欧几何公理方法
     2. 实数理论皮亚诺算术
     3. 集合论、数学基础及希尔伯特计划
   - 成熟阶段(1930-)
     1. 哥德尔不完全性定理
     2. 四论 (证明论 模型论 递归论 公理化集合论)

从程序到模型

```
int n=100;
int bPrime=1;
for(int i=2;i<n;i++){
    if(n%i==0){
      bPrime=0;
        break;
    }
}
if(bPrime==1){
    printf("%d is prime!\n",n);
}
else{
    printf("%d isn't prime!\n",n);
}
```

$$
\begin{array}{l}
1\ A_1 \\
2\ A_2 \\
3\ A_3 \\
\vdots \\
\text{n}\ A_n
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
(A_1)^v \\
\wedge\ (A_2)^v \\
\vdots \\
\wedge\ (A_n)^v
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&(A \rightarrow B)^v \\
&= 1 - A^v + A^v B^v
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} K &= t \\ &\mid f \\ &\mid K \cdot K \end{aligned}}
$$

$$t \cdot (f \cdot t) \in K?$$

$$
\boxed{\begin{aligned} f \cdot K &\Rightarrow K \\ t \cdot K &\Rightarrow t \end{aligned}}
$$

$$f \cdot t \Rightarrow^* t \cdot t?$$

数字字谜问题

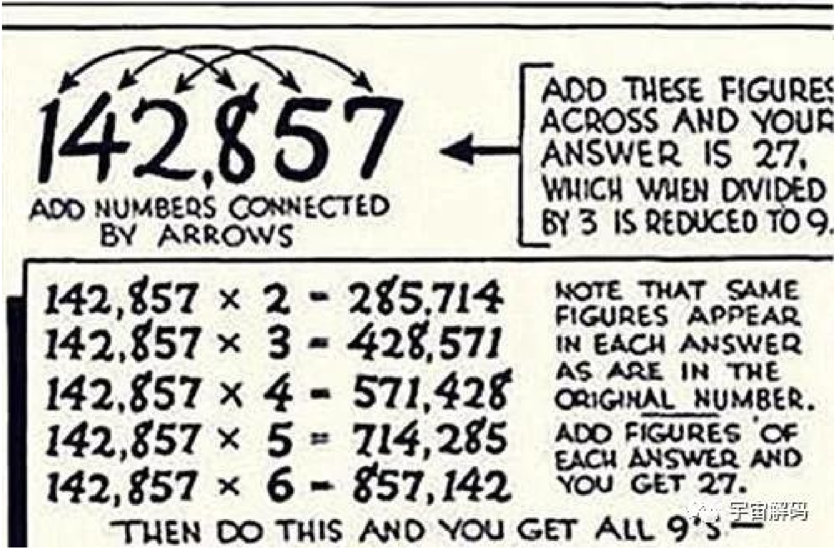
已知公式：

```
   D C N A L D
 + G E R A L D
 -------------
   R C B E R T
```

共有10个字母A, B, C, D, E, G, N, L, R, T
每个字母代表0-9中的一个，没有重复。
已知D=5，计算其余9个字母代表的数字。

```
   5 2 6 4 8 5
 + 1 9 7 4 8 5
 -------------
   7 2 3 9 7 0
```

金字塔数字之谜 (特殊的窗口加法)

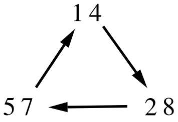


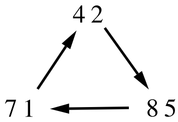
金字塔数字之谜 (特殊的窗口加法)

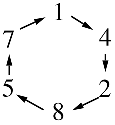
$14 \oplus 14 = 28 \quad 14 \oplus 28 = 42 \quad 14 \oplus 57 = 71$

$28 \oplus 28 = 57 \quad 28 \oplus 57 = 85 \quad 57 \oplus 57 = 14$

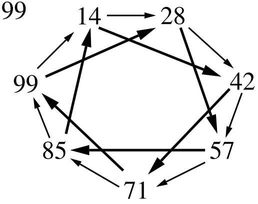
14	28	57
28	57	14
	85	







14	28	42	57	71	85	99
28	57	85	14	42	71	99
57	14	71	28	85	42	99



形式逻辑与数理逻辑

孩子放学后, 妈妈问: 老师教你什么了.
孩子回答: 我教她了.
妈妈感到很诧异. . .
孩子接着说: 老师问我1+2等于几, 我教他说, 等于3.

姐姐打了弟弟, 弟弟哭了, 向妈妈告状.
妈妈责备姐姐, 不该打弟弟.
姐姐说: 我没打他, 我是扶了他一下.
弟弟说: 不是扶, 我这里痛着呢.

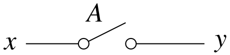
$\boxed{\text{概念}}$ → 集合

$\boxed{\text{判断}}$ → 元素与集合的关系

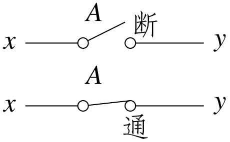
$\boxed{\text{推理}}$

电路中的逻辑——开关

- 开关及其两种状态



开关



开关的两种状态

- 开关 $\rightarrow$ 事件

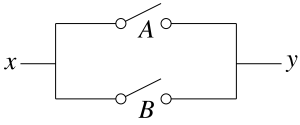
  可以从开关 A 得到一个事件:“x 和 y 两点是接通的。”

  用 A 表示此事件。

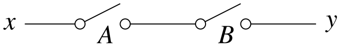
  对立事件 $\overline{A}$ 就是:“x 和 y 两点是切断的。”

a 对开关 A 和 B 而言有对应的事件 A 和 B,$A \vee B$ 和 $A \wedge B$ 在电路中意味着什么呢?

事件 $A \vee B$ 表示“或者 A 通或者 B 通”。因此 $A \vee B$ 的发生等价于 A 与 B 之一是通的,这说明事件 $A \vee B$ 对应于开关 A 和 B 并联所得到的电路。



表示事件$A \vee B$ 的开关



表示事件$A \wedge B$ 的开关

事件 $A \wedge B$ 表示“A 通并且 B 通”。因此 $A \wedge B$ 的发生等价于 A 与 B 两者都是通的,这说明事件 $A \wedge B$ 对应于开关 A 和 B 串联所得到的电路。

电路中的逻辑——通断表

- 复杂开关 $A \vee B$ 的通断表

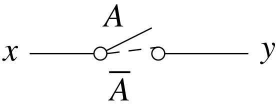
开关 A	开关 B	复杂开关 $A \vee B$
通	通	通
通	断	通
断	通	通
断	断	断

- 复杂开关 $A \wedge B$ 的通断表

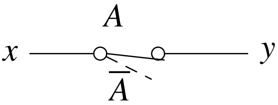
开关 A	开关 B	复杂开关 $A \wedge B$
通	通	通
通	断	断
断	通	断
断	断	断

电路中的逻辑——状态相反的开关

- 与开关 A 状态相反的开关 $\overline{A}$



A 断 $\overline{A}$ 通



A 通 $\overline{A}$ 断

- 开关 $\overline{A}$ 的通断表

开关 A	开关 $\overline{A}$
通	断
断	通

- 真值表
- 通断表 $\rightarrow$ 真值表
  1. 通 $\rightarrow$ 真 $\rightarrow 1 \rightarrow T$.
  2. 断 $\rightarrow$ 假 $\rightarrow 0 \rightarrow F$.

  开关的通断对应事件的真假
- 真值表

A	$\bar{A}$
真 (1)	假 (0)
假 (0)	真 (1)

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

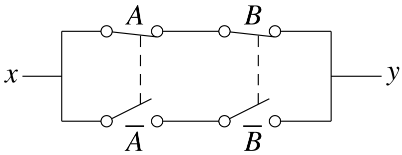
楼梯上有一盏电灯,问应该如何设计电路以使楼上与楼下均能自由开关它?
设楼下的开关为 A,楼上的开关为 B,应如何设计电路才能达到预定的要求呢?
如果开关 A, B 已经接入电路并已经达到要求,那么这个电路就是一个新的开关 P。

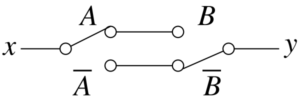
- 如果 $A = B = 1$,那么 $P = 1$.

A	B	P
1	1	1
1	0	
0	1	
0	0	

A	B	P
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

于是 $P = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$



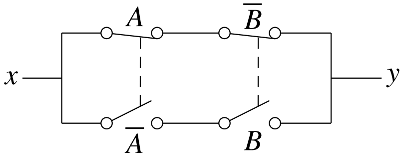


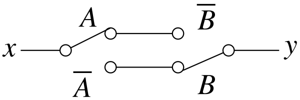
- 如果 $A = B = 1$,那么 $P = 0$?

电路中的逻辑——应用

A	B	P
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

于是 $P = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$

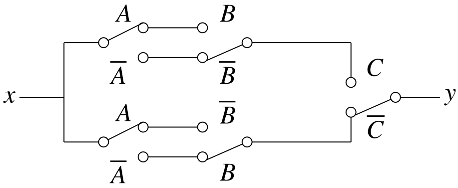


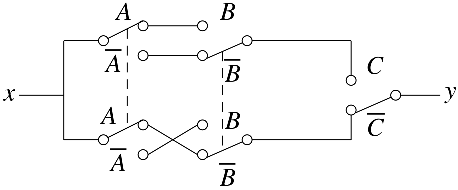


一个展览大厅有三个门,问应该如何设计电路以使三个门处的任何一个均能自由开关展览厅的灯?
设三个门处的开关分别为 A,B 和 C,应如何设计电路才能达到预定的要求。

A	B	C	P
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

电路中的逻辑——应用扩展


A
B
$\overline{A}$
$\overline{B}$
C
x
y
A
$\overline{B}$
$\overline{C}$
$\overline{A}$
B


A
B
$\overline{A}$
$\overline{B}$
C
x
y
A
B
$\overline{C}$
$\overline{A}$
$\overline{B}$

命题

Definition (命题)

命题是一个能判断真假的陈述句。

Definition (原子命题)

不包含其它命题成分的命题称为简单命题 (原子命题)。

Definition (复合命题)

至少包含一个其它命题成分的命题称为复合命题。

Definition (支命题)

组成复合命题的那些命题称为支命题。

逻辑联结词

- 把几个支命题联结起来构成复合命题的词项叫作逻辑联结词。如
  - 并非……
  - …… 并且……
  - …… 或者……
  - 如果…… 那么……
  - …… 当且仅当……
- 命题的真假
  - 简单命题的真假取决于它是否反映了客观世界。
  - 复合命题的真假也是如此。
  - 但是复合命题是由其支命题组成的。
  - 支命题的真假完全可以决定复合命题的真假。

例子

- 2 是素数并且 3 也是素数;
- 2 是素数并且 3 也是偶数。

如果用 p 表示“2 是素数”,q 表示“3 是偶数”。那么“2 是素数并且 3 是偶数”可以表示成“p 并且 q”在形如“p 并且 q”这样的复合命题中,只有当两个支命题 p 和 q 都真时,“p 并且 q”才真。否则就是假。
所以上面两个命题中第 1 个命题是真的,而第 2 个命题是假的。

- 更多例子

例子

- 雪是白的.
- 雪是黑的.
- 好大的雪啊!
- 任何一个大偶数可以表成两个素数之和.
- 太阳有第 11 颗行星.
- $2+2=5$.
- 2 是素数又是偶数.
- 陈胜吴广起义之日杭州下雨.
- 你上哪儿去?
- 这句话是假的。
- $x+y<0$

自然语言中的联结词

- 逻辑中的联结词可以用某种自然语言来表述，但绝不等同于任何一种自然语言中相关的词。
- 在汉语中说“甲和乙有了孩子，并且结婚了”与说“甲和乙结婚了，并且有了孩子”含义有所不同。
- 在汉语里并且作为连接词，它联结的句子不仅有递进的意思还有时间的先后顺序。但是逻辑中的连接词仅与真假值有关系。

联结词的符号表示

- 否定词 $\neg$:对应于“并非……”
- 合取词 $\wedge$:对应于“…… 并且……”
- 析取词 $\vee$:对应于“…… 或者……”
- 蕴含词 $\rightarrow$:对应于“如果…… 那么……”
- 等价词 $\leftrightarrow$:对应于“…… 当且仅当……”

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

符号化表示

1. 用 p 表示" 今天是星期五"
" 今天不是星期五" 可用 $\neg p$ 来表示。
2. 用 p 表示"2 是素数",q 表示"2 是偶数"
"2 是素数并且 2 也是偶数" 可表示为 $p \wedge q$。
3. 用 p 表示" 研一生上组合数学课",q 表示" 研一生上算法设计课"
" 研一生或者上组合数学课,或者上算法设计课" 可表示为 $p \vee q$。
4. 用 p 表示" 明天下雨",q 表示" 我在家看书"
" 如果明天下雨,那么我在家看书" 可表示为 $p \to q$。
5. 用 p 表示" 你是大一新生",q 表示" 你能在寝室用电脑"
" 只有你不是大一新生,才能在寝室用电脑" 可表示为 $q \to \neg p$。
A 当且仅当 B A 当 B $B \to A$ A 仅当 B $A \to B$
6. 用 p 表示" 三角形是等腰三角形",q 表示" 三角形中有两个角相等"
" 三角形是等腰三角形当且仅当三角形中有两个角相等" 可表示为
$p \leftrightarrow q$。

符号化表示

A 当且仅当 B => $A \leftrightarrow B$

A 当 B => $B \to A$

A 仅当 B => 只有 B 才有 A => 非 B 一定非 A => $A \to B$

A 的充分必要条件是 B => $A \to B$

A 的充分条件是 B => $B \to A$

A 的必要条件是 B => $A \to B$

真值函数

设 $D = \{0,1\}$,一个映射 $f : D^n \to D$ 称为一个 n 元真值函数。

- $\neg$ 是一个一元真值函数
- $\wedge$ 是二元真值函数
- $\vee$ 是二元真直函数
- $\to$ 是二元真值函数
- $\leftrightarrow$ 是二元真值函数
- 有多少个 2 元真值函数?

1. 字母表:字符(symbol)的集合称为字母表。命题逻辑中字母表往往包含 $Atom(L^p)$。
2. 字符串:由字母表中的字符构成的有限长的序列称为字母表上的字符串(symbol string)。字符串中字符的个数称为字符串的长度。长度为 0 的字符串称为空串(empty string),ϵ 表示。空串是没有任何字符的字符串,是一个特殊的字符串。若 A 是字母表,则用 A^* 表示上所有字符串的集合(包括空串)。
3. A^* 的子集称为形式语言。

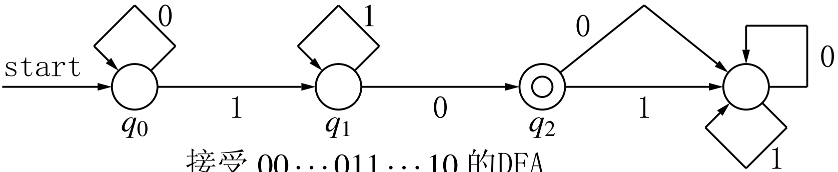
形式语言的例子

设字母表 $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$A^*$ 是由 10 个阿拉伯数字组成的所有十进位数的集合且包括空串 ϵ 和有限个“0”构成的字符串(如:$00,000,0000$ 等)。下面的(1)-(4)均为字母表 A 上的形式语言:

1. $L_1=\{0,5,10,15,20,25,30,35,40,45,\cdots\}$ 表示可以被 5 整除的所有十进制数的集合。
2. $L_2=\{0000,0001,0010,0011,0100,0101,0110,0111,\cdots,1111\}$,该形式语言中的字符串是由 0 和 1 构成的所有长度为 4 的数字的集合,可以看成是长度为 4 的所有二进制数的集合。
3. $L_3=\{1,3,5,7,9,11,13,15,\cdots\}$,该形式语言表示所有奇数的集合。
4. $L_4=\{0,1,4,9,16,25,36,49,\cdots\}$,该形式语言表示所有十进制数的平方的集合。

设 $\sum = \{0,1\}$,$\sum^*$ 中的元素就是 0,1 组成的有限长的字符串构成的集合,包括空串 ϵ, 则集合 $A = \{00\cdots011\cdots10\}$ 就是一个形式语言。字符串前面 0 的个数大于等于 0,1 的个数大于等于 1,最后是一个 0。这个集合包含字符串 10,010,0110,001110 等等。

在形式语言与自动机中可以用有限状态自动机来表示其可接受的字符串集合。这样一个形式语言就和自动机画上了等号。



接受 $00\cdots011\cdots10$ 的DFA

命题变项和指派(赋值)

Definition (命题变项)

表示命题的变元称为命题变元或命题变项。命题变项的集合用 $Atom(L^p)$ 表示。

Definition (指派或赋值)

任意一个映射 $v : Atom(L^p) \to \{0, 1\}$ 称为命题演算的一个指派或赋值 (valuation)。并且对 $p \in Atom(L^p)$，将 $v(p)$ 记作 p^v，自然有 $p^v \in \{0, 1\}$。

Definition (命题公式)

1. $Atom(L^p)$ 中的元素是命题公式。
2. 如果 A 是命题公式,那么 $\neg A$ 也是命题公式。
3. 如果 A, B 是命题公式,那么 $A \wedge B, A \vee B, A \to B, A \leftrightarrow B$ 都是命题公式。
4. 只有 1,2,3 确定的表达式才是命题公式。

命题公式集合表示为 $Form(L^p)$。

公式的形成过程　语法分析树　联结词的优先级

命题公式的赋值

Definition (弄真和弄假)

设 v 是一个指派(赋值),$A \in Form(L^p)$ 是任意一个命题公式,若在 v 下,公式 A 的值为真,则称 v 弄真 A,记为 $v(A) = 1$ 或 $A^v = 1$; 若在 v 下,公式 A 的值为假,则称 v 弄假 A,记为 $v(A) = 0$ 或 $A^v = 0$;

命题公式的赋值

命题公式 A 的指派 A^v 递归的定义如下：

1. 如果 A 是原子公式 p,则 $A^v = p^v$ 且 $p^v \in \{0, 1\}$;
2. 如果 $A = \neg B$ 且 $B^v \in \{0, 1\}$,则当 $B^v = 1$ 时,规定 $A^v = 0$;当 $B^v = 0$ 时,规定 $A^v = 1$;
3. 如果 $A = B \wedge C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$,那么当 $B^v = 1$ 且 $C^v = 1$ 时,规定 $A^v = 1$;当 $B^v = 0$ 或 $C^v = 0$ 时,规定 $A^v = 0$;
4. 如果 $A = B \vee C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$,那么当 $B^v = 0$ 且 $C^v = 0$ 时,规定 $A^v = 0$;当 $B^v = 1$ 或 $C^v = 1$ 时,规定 $A^v = 1$;
5. 如果 $A = B \to C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$,那么当 $B^v = 1$ 且 $C^v = 0$ 时,规定 $A^v = 0$;当 $B^v = 0$ 或 $C^v = 1$ 时,规定 $A^v = 1$;
6. 如果 $A = B \leftrightarrow C$ 且 $B^v, C^v \in \{0, 1\}$,那么当 $B^v = C^v$ 时,规定 $A^v = 1$;当 $B^v \neq C^v$ 时,规定 $A^v = 0$;

命题赋值的计算

设 $A, B \in Form(L^p)$,把 $0, 1$ 看作是通常的实数,并按照通常的实数做运算,那么

1. $(\neg A)^v = 1 - A^v$
2. $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$
3. $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$
4. $(A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v$
5. $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$

赋值的计算与手工列出真值表会得到同样的结果。

公式赋值的性质

命题:真值的确定性

对任意一个赋值 v,和任意的命题公式 $A \in Form(L^p)$,都有 $A^v \in \{0,1\}$。

证明

设 v 是任意一个赋值,$A \in Form(L^p)$ 是一个命题公式,

1. 如果 $A \in Atom(L^p)$ 是原子公式,由于 v 是一个赋值,所以它是从集合 $Atom(L^p)$ 到集合 $\{0,1\}$ 的映射,故 $A^v \in \{0,1\}$。
2. 如果 $A = \neg B$,由数学归纳法知,$B^v \in \{0,1\}$,从而 $A^v = 1 - B^v \in \{0,1\}$。
3. 作业

设 $A \in Form(L^p)$,则

1. 若对任意的赋值 v,都有 $A^v = 1$,则称 A 为永真式或重言式(tautology)。
2. 若对任意的赋值 v,都有 $A^v = 0$,则称 A 为永假式或矛盾式(contradiction)。
3. 若存在赋值 v,使得 $A^v = 1$,则称 A 为可满足的(satisfiable)。

永真式的判定

判定 $A \to (B \to A)$ 为永真式。

- 真值表方法

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

- 计算方法

对任意的赋值 $v : Atom(L^p) \to \{0, 1\}$,我们有

$$\begin{aligned}(A \to (B \to A))^v &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + A^v B^v) \\ &= 1 - A^v B^v + (A^v)^2 B^v \\ &= 1 - A^v B^v + A^v B^v \\ &= 1\end{aligned}$$

- 反证法

对任意赋值 v,若 $(A \to (B \to A))^v = 0$,则推出矛盾。

永假式的判定

判定 $\neg(A \to A)$ 为永假式。

- 真值表方法

A	$A \to A$	$\neg(A \to A)$
0	1	0
1	1	0

- 计算方法
  对任意的赋值 $v: Atom(L^p) \to \{0,1\}$,我们有

$$\begin{aligned}(\neg(A \to A))^v &= 1 - (A \to A)^v \\ &= 1 - (1 - A^v + A^v \cdot A^v) \\ &= A^v - A^v A^v \\ &= 0\end{aligned}$$

可满足公式的判定

判定 $(A \to \neg A) \to A$ 为可满足的。

- 真值表方法

A	$\neg A$	$A \to \neg A$	$(A \to \neg A) \to A$
0	1	1	0
1	0	0	1

- 计算方法
  对任意的赋值 $v : Atom(L^p) \to \{0,1\}$,欲使
  $$((A \to \neg A) \to A)^v = 1$$

只须要

$$1 - (A \to \neg A)^v + (A \to \neg A)^v \cdot A^v = 1$$

只须要

$$(A \to \neg A)^v (1 - A^v) = 0$$

只须要

$$A^v = 1$$

Definition (逻辑蕴含)

设 $\Gamma \subseteq Form(L^p), A \in Form(L^p)$。如果对任意的赋值 v,当 v 对 Γ 中的任一公式赋值为 1 时(即对任意的 $B \in \Gamma$,有 $B^v = 1$),有 v 对命题公式 A 的赋值也为 1(即 $A^v = 1$),则称 Γ 可以语义推出(semantic deduce) A,或称 Γ 可以逻辑推出(logically deduce)A,或称 Γ 可以逻辑蕴含(logically conclude)A,或称 A 是 Γ 的逻辑结果(logical result),记为 $\Gamma \models A$ 或 $\Gamma \Rightarrow A$。

Definition (逻辑等价)

设 $A, B \in Form(L^p)$,如果 $A \Rightarrow B$ 并且 $B \Rightarrow A$,则称 A 和 B 逻辑等价,记为 $A \Leftrightarrow B$.

定义的推论

设 $A, B \in Form(L^p)$,$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当对任意的赋值 v 都有 $A^v = B^v$。

逻辑蕴含和逻辑等价的性质

逻辑蕴含

$A \Rightarrow B$ 当且仅当 $A \to B$ 是永真式。

逻辑等价

$A \Leftrightarrow B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是永真式。

逻辑等价是 $Form(L^p)$ 上的等价关系

1. 对任意的 $A \in Form(L^p)$ 都有 $A \Leftrightarrow A$.
2. 对任意的 $A, B \in Form(L^p)$,若 $A \Leftrightarrow B$,则 $B \Leftrightarrow A$.
3. 对任意的 $A, B, C \in Form(L^p)$,若 $A \Leftrightarrow B$,$B \Leftrightarrow C$,则 $A \Leftrightarrow C$.

常用的逻辑等价式

设 A、B 和 C 是任意的命题公式，分别用 1 和 0 表示重言式和矛盾式，则

1. $\neg\neg A \Leftrightarrow A$(对合律)；
2. $A \wedge A \Leftrightarrow A$;$A \vee A \Leftrightarrow A$(幂等律)；
3. $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$;$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$(交换律)；
4. $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$;$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$(结合律)；
5. $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$(分配律)；
6. $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$;$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$(吸收律)；
7. $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$;$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$(德摩根律)；
8. $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$;$A \vee 0 \Leftrightarrow A$(同一律)；
9. $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$;$A \vee 1 \Leftrightarrow 1$(零一律)；
10. $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$;$A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$(排中律)；

代入定理和替换定理

代入定理

设 A 是含有命题变元 p 的永真式,那么将 A 中 p 的所有出现均代换为命题公式 B 得到的公式(称为 A 的代入实例)仍为永真式。

例如 $p \to (q \to p)$ $\quad A^v = [A(p)]^v = [A(p^v)]^v, [A(B)]^v = [A(B^v)]^v$

替换定理

设命题公式 A 含有子公式 C(C 为 A 中的符号串并为命题公式),如果 $C \Leftrightarrow D$,那么将 A 中子公式 C 的某些出现(未必全部)用 D 替换得到公式 B,必有 $A \Leftrightarrow B$。

由 $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$ 有 $(P \to Q) \wedge (R \to (P \to Q)) \Leftrightarrow ?$

范式定义

Definition (范式的定义)

命题公式 B 称为命题公式 A 的合取(析取)范式 (conjunctive(disjunctive) normal form),如果 $B \Leftrightarrow A$,并且 B 呈如下形式:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m (C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m)$$

其中 $C_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为 B 的子句,它们形如 $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n)$,$L_j (j = 1, 2, \cdots, n)$ 为原子公式或者原子公式的否定。称 L_j 为子句的文字。

范式定义

Definition (范式的定义)

命题公式 B 称为命题公式 A 的合取(析取)范式 (conjunctive(disjunctive) normal form),如果 $B \Leftrightarrow A$,并且 B 呈如下形式:

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m (C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_m)$$

其中 $C_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 称为 B 的子句,它们形如 $L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n (L_1 \wedge L_2 \wedge \cdots \wedge L_n)$,$L_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 为原子公式或者原子公式的否定。称 L_j 为子句的文字。

文字 —— 命题变元及其否定 (正文字和负文字)　子句 —— 文字的析取式
合取范式 —— 子句的合取式

范式

Theorem (范式定理)

对任意公式 ϕ,均可以做出它的合取(析取)范式。

1. 消去蕴含和等价
2. 减少否定词的辖域
3. 逐次使用合取对析取,析取对合取满足分配律将公式化成合取或析取范式。

Example (例子)

做出 $(p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$ 的合取范式和析取范式。

Definition (定义)

命题公式 B 称为命题公式 A 的主合取(析取)范式(major conjunctive(disjunctive) normal form),如果

1. B 是 A 的合取(析取)范式;
2. B 中的每一个子句均出现 A 中所有命题变元且仅出现一次。

极大项——主合取范式中的合取项
极小项——主析取范式中的析取项

主范式——极大项与极小项

- 含有 n 个命题变元的命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 共有 2^n 个极大项。
- 每个极大项有 2^n 种真值指派，但指派为 0 的只有一个。
- 对同一个指派，任意两个不同的极大项的真值取值不能同为 0。
- 所有 2^n 个极大项的合取 $\wedge$ 式逻辑等价于 0。

- 含有 n 个命题变元的命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 共有 2^n 个极小项。
- 每个极小项有 2^n 种真值指派，但指派为 1 的只有一个。
- 对同一个指派，任意两个不同的极小项的真值取值不能同为 1。
- 所有 2^n 个极小项的析取式 $\vee$ 式逻辑等价于 1。

主范式

求解步骤

- 求解命题公式的合取 (析取) 范式。
- 除去合取 (析取) 范式中所有永真永假项。
- 合并相同的变元与相同的项。
- 对合取 (析取) 项中缺少的变元 r,通过析取 (合取) 永假式 (永真式)$r \wedge \neg r (r \vee \neg r)$ 并用分配律补齐。

Example (例子)

做出 $(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$ 的主合取范式和主析取范式。

弄假指派与范式

Theorem (命题 1)

对于一个命题公式的任何一个指派,这个指派可以弄假一个子句,这个子句包含命题公式中的所有命题变元且只包含一次。在这类子句中,这个指派不能弄假任何其它的子句,从而弄真所有其它的子句。

Theorem (命题 2)

对于一个公式的任何一个弄假指派,则有该命题公式的一个主合取范式中的一个合取项,使得这一个指派弄假这个合取项,并且只弄假这个合取项。

弄假指派与范式

Theorem (命题 3)

通过公式的主合取范式可以直接写出公式的弄假指派,这就是公式的所有弄假指派。

Theorem (命题 4)

如果已知公式的所有弄假指派,则可以写出该公式的主合取范式。

Theorem (命题 5)

如果已知公式的所有弄真指派,则可以写出该公式的主析取范式。

主范式与指派

Theorem (定理 2.2.2)

永真式无主合取范式,永假式无主析取范式。

Theorem (定理 2.2.3)

任一命题公式 (非永真,非永假) 都存在唯一与之等价的主合取范式和主析取范式。

Theorem (定理 2.2.4)

设变元 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的极大项全体为 $M_1, M_2, \cdots, M_{2^n}$,$A(p_1, p_2, \cdots, p_n) \Leftrightarrow \wedge_{i \in I} M_i$ 为 A 的主合取范式,其中 $I \subseteq \{1, 2, \cdots, 2^n\}$,则 A 的主析取范式为 $A \Leftrightarrow \neg \wedge_{i \in \bar{I}} M_i$。$A$ 的极大项与极小项的数目之和为 2^n。

n 元联结词的个数

命题

n 元命题公式的全体可以划分为 2^{2^n} 个等价类,每一类中的公式相互逻辑等价,都等价于它们公共的主合取范式(主析取范式)。

Example

派三个人 A, B, C 去完成一项任务,需满足以下条件:

- 若 A 去,则 C 也去。
- 若 B 去,则 C 不能去。
- 若 C 不去,则不是 A 去就是 B 去。

分别用 P, Q, R 表示派 A, B, C 去。由条件可做出主析取范式为
$(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$

一元联结词

Table: 一元联结词

p	$\Delta_1(p)$	$\Delta_2(p)$	$\Delta_3(p)$	$\Delta_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

其中 Δ_1,Δ_4 为常联结词,Δ_2 为幺联结词,Δ_3 为否定词。

$$\Delta_1(p) \Leftrightarrow f, \Delta_4(p) \Leftrightarrow t, \Delta_2(p) \Leftrightarrow p, \Delta_3(p) \Leftrightarrow \neg p$$

二元联结词

Table: 二元联结词

p	q	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$	$*_5$	$*_6$	$*_7$	$*_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
p	q	$*_9$	$*_{10}$	$*_{11}$	$*_{12}$	$*_{13}$	$*_{14}$	$*_{15}$	$*_{16}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

二元联结词

我们有下面的等价式

$$p *_1 q \Leftrightarrow 0, p *_{16} q \Leftrightarrow 1, \text{即 } *_1, *_{16} \text{ 为常联结词}$$

$$p *_4 q \Leftrightarrow p, p *_6 q \Leftrightarrow q, \text{即 } *_4, *_6 \text{ 为投影联结词}$$

$$p *_{13} q \Leftrightarrow \neg p, p *_{11} q \Leftrightarrow \neg q, \text{即 } *_{13}, *_{11} \text{ 为二元否定词}$$

$p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q), *_9$ 称为或非词，用记号 $\downarrow$ 表示，即 $p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

$p *_{15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q), *_{15}$ 称为与非词，用记号 $\uparrow$ 表示，即 $p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

$p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \to q), p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \to p)$, 即 $*_3, *_5$ 为蕴含否定词，可以表示为

$$p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

$*_7$ 称为异或词，用记号 $\bar{V}$ (或者 $\oplus$) 表示，即

$$p \bar{V} q \Leftrightarrow p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

除此之外，$*_2$ 为 $\wedge$，$*_8$ 为 $\vee$，$*_{12}, *_{14}$ 为 $\to$，$*_{10}$ 为 $\leftrightarrow$。

联结词的表示与完备词组

Definition (联结词的可表示)

称 n 元联结词 h 是由 m 个联结词 $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 可表示的,如果 $h(p_1, \cdots, p_n) \Leftrightarrow A$,而 A 中所含的联结词仅取自 $g_1, g_2, \cdots, g_m$。

命题

任何一个一元、二元联结词都可以通过 $\neg, \vee, \wedge$ 表示出来。

Definition (完备联结词组)

当联结词组 $\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$ 可表示所有一元、二元联结词时,称其为完备联结词组。

命题

$\{\neg, \rightarrow\}$ 和 $\{\Delta_1, \rightarrow\}$ 都是完备联结词组。

命题

$\{\downarrow\}$ 和 $\{\uparrow\}$ 都是完备联结词组。

例: 用 $\{\uparrow\}$ 表示 $(p \to \neg q) \to \neg r$

命题

任何一个 n 元联结词 $h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ 都可以通过联结词 $\neg, \to$ 表示出来。

归纳法:$h(p_1, p_2, \cdots, p_n) \Leftrightarrow (p_1 \to h(1, p_2, \cdots, p_n)) \wedge (\neg p_1 \to h(0, p_2, \cdots, p_n))$

对偶式

Definition (对偶式的定义)

在仅含有联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 的命题公式 A 中,将 $\wedge$ 换成 $\vee$,$\vee$ 换成 $\wedge$,0 换成 1,1 换成 0,得到的公式称为 A 的对偶式,记为 A^*。

Definition (内否式的定义)

设有命题公式 $A(p_1, p_2, \cdots, p_n)$,对 A 中的 p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 用 $\neg p_i$ 做代入所得的结果为 A 的对偶式,记为 A^-。

Theorem (对偶式的相关定理)

1. $(A^-)^- \Leftrightarrow A$ 2. $\neg(A^*) \Leftrightarrow (\neg A)^* \Leftrightarrow A^-$ 3. $\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$
4. $\neg(A^-) \Leftrightarrow (\neg A)^-$ 5. $(\neg A)^- \Leftrightarrow A^*$ 6. $(A^*)^* = A$

Theorem

若 $A \Leftrightarrow B$,则 $A^* \Leftrightarrow B^*$。

Theorem

若 $A \rightarrow B$ 永真,则 $B^* \rightarrow A^*$ 也永真。

PC 的字母表

PC 的语言部分的字母表(符号表)是集合

$$\sum = \{(,),\neg,\rightarrow,p,q,r,p_1,p_2,p_3,\cdots\}.$$

PC 的公式

1. $p,q,r,p_1,p_2,p_3,\cdots$ 为(原子)公式。
2. 如果 A,B 是公式,那么 $(\neg A),(A\rightarrow B)$ 也是公式。
3. 只有(1)和(2)确定的 $\sum^*$ 的字符串才是公式。

公式中最外层的括号可以省略。

推理部分

公理集合

- $A_1 : A \to (B \to A)$
- $A_2 : (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- $A_3 : (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

推理规则

称为分离规则(modus ponens),形式如下:

$$r_{mp} : \frac{A, A \to B}{B}$$

证明和定理

Definition (证明)

称下列公式序列为公式 A 在 PC 中的一个证明:

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$,$A_i$ 或者是 PC 中的公理,或者是 $A_j (j < i)$,或者是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 用分离规则导出的。其中 A_m 就是公式 A。

Definition (定理)

称 A 是 PC 中的定理,记为 $\vdash_{PC} A$,如果公式 A 在 PC 中有一个证明。

演绎和演绎结果

Definition (演绎)

设 Γ 为 PC 的公式的集合,称以下公式序列为公式 A 的一个以 Γ 为前提在 PC 中的演绎:

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

其中 $A_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 或者是 PC 中的公理,或者是 Γ 的成员,或者是 $A_j (j < i)$,或者是 $A_j, A_k (j, k < i)$ 使用分离规则导出的。其中,A_m 就是公式 A。

Definition (演绎结果)

称 A 是前提 Γ 在 PC 中的演绎结果,记为 $\Gamma \vdash_{PC} A$,如果公式 A 有一个以 Γ 为前提在 PC 中的演绎。如果 $\Gamma = B$,则用 $B \vdash_{PC} A$ 表示 $\Gamma \vdash_{PC} A$,如果 $B \vdash_{PC} A$ 并且 $A \vdash_{PC} B$ 则记为 $A \vdash\dashv B$。

基本定理

1. $\vdash A \to A$.
2. 如果 $\vdash A \to (B \to C)$, 那么 $\vdash B \to (A \to C)$.
3. $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$.
4. $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.
5. $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$.
6. $\vdash \neg A \to (A \to B)$.
7. $\vdash A \to (\neg A \to B)$.
8. (三段论) 如果 $\vdash (A \to B)$, $\vdash (B \to C)$, 那么 $\vdash (A \to C)$.

基本定理

9. $\vdash (\neg A \to A) \to A.$
10. $\vdash \neg\neg A \to A.$
11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A.$
12. $\vdash A \to \neg\neg A.$
13. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A).$
14. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A).$
15. $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A).$
16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A).$