数理逻辑第一次作业答案

杨鹏

2022/06/03

1. 将下列语句形式化为命题公式

(1) 大学里的学生不是本科生就是研究生。

(1)大学里的学生不是本科生就是研究生。
A: 大学里的学生是本科生。B: 大学里的学生是研究生。
(A∧¬B)∨(¬A∧B)
理由：本科生与研究生是不相容的属性，而析取所表达的只能是"相容或".

解： ~~设 P 表示命题“大学里的学生是本科生”，Q 表示命题“大学里的学生是研究生”，上述命题可写作 $P \vee Q$。~~

(2) 只要你接到超速罚单，你的车速就超过每小时 100 公里。

解： 设 P 表示命题“你接到超速罚单”，Q 表示命题“你的车速超过每小时 100 公里”，上述命题可写作 $P \to Q$。

(3) 除非你年满 18 周岁，否则你没有选举权。

解： 设 P 表示命题“你年满 18 周岁”，Q 表示命题“你有选举权”，上述命题可写作 $Q \to P$。

2. 判定下列逻辑蕴含和逻辑等价是否成立，其中 A,B,C,D 为任意公式

(1) $A \Rightarrow B \to A$

解： 根据逻辑蕴含的定义，只需证明所有弄真 A 的指派亦弄真公式 $B \to A$，下面用表格法进行证明：

表 1: 题 2(1) 解

A	B	$B \to A$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

从表 1 可知，所有弄真 A 的指派亦弄真公式 $B \to A$，因此 $A \Rightarrow B \to A$ 成立。

(2) $\neg A \to \neg B \Rightarrow B \to A$

解： 根据逻辑蕴含的定义，只需证明所有弄真 $\neg A \to \neg B$ 的指派亦弄真公式 $B \to A$，下面用表格法进行证明：

表 2: 题 2(2) 解

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \to \neg B$	$B \to A$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

从表 2 可知，所有弄真 $\neg A \to \neg B$ 的指派亦弄真公式 $B \to A$，因此 $\neg A \to \neg B \Rightarrow B \to A$ 成立。

(3) $A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to (A \to C)$

解：本题也可以通过表格法来证明，但由于命题公式过多，该方法比较复杂，因此下面通过指派赋值来证明：

对任意的指派 v，有 $(A \to (B \to C))^v$：

$$\begin{aligned}(A \to (B \to C))^v &= 1 - (A)^v + (A)^v(B \to C)^v \\ &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + B^vC^v) \\ &= 1 - A^v + A^v -)^vB^v + A^vB^vC^v \\ &= 1 - A^vB^v + A^vB^vC^v\end{aligned}$$

对任意的指派 v，有 $((A \to B) \to (A \to C))^v$：

$$\begin{aligned}((A \to B) \to (A \to C))^v &= 1 - (A \to B)^v + (A \to B)^v(A \to C)^v \\ &= 1 - (1 - A^v + A^vB^v) + (1 - A^v + A^vB^v)(1 - A^v + A^vC^v) \\ &= 1 - A^vB^v + A^vB^vC^v\end{aligned}$$

因此 $(A \to (B \to C))^v = ((A \to B) \to (A \to C))^v$，故有 $A \to (B \to C) \Rightarrow (A \to B) \to (A \to C)$ 成立。

(4) $A \to (B \to C) \Leftrightarrow A \wedge B \to C$

解：根据逻辑等价的定义，需证明 $A \to (B \to C) \Rightarrow A \wedge B \to C$ 和 $A \wedge B \to C \Rightarrow A \to (B \to C)$，下面通过指派赋值来证明：

对任意的指派 v，有 $(A \to (B \to C))^v$：

$$\begin{aligned}
(A \to (B \to C))^v &= 1 - (A)^v + (A)^v(B \to C)^v \\
&= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + B^vC^v) \\
&= 1 - A^v + A^v -)^vB^v + A^vB^vC^v \\
&= 1 - A^vB^v + A^vB^vC^v
\end{aligned}$$

对任意的指派 v，有 $(A \wedge B \to C)^v$：

$$\begin{aligned}
(A \wedge B \to C)^v &= 1 - (A \wedge B)^v + (A \wedge B)^vC^v \\
&= 1 - A^vB^v + A^vB^vC^v
\end{aligned}$$

因此 $(A \to (B \to C))^v = (A \wedge B \to C)^v$，故 $A \to (B \to C) \Leftrightarrow A \wedge B \to C$ 成立。

(5) $A \vee B \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$

解：同样地，根据逻辑等价的定义，需证明 $A \vee B \to C \Rightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$ 和 $(A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow A \vee B \to C$。下面通过指派赋值来证明：

对任意的指派 v，有 $(A \vee B \to C)^v$：

$$\begin{aligned}
(A \vee B \to C)^v &= 1 - (A \vee B)^v + (A \vee B)^vC^v \\
&= 1 - (A^v + B^v - A^vB^v) + (A^v + B^v - A^vB^v)C^v \\
&= 1 - A^v - B^v + A^vB^v + A^vC^v + B^vC^v - A^vB^vC^v
\end{aligned}$$

对任意的指派 v，有 $((A \to C) \wedge (B \to C))^v$：

$$\begin{aligned}
((A \to C) \wedge (B \to C))^v &= (A \to C)^v + (B \to C)^v - (A \to C)^v(B \to C)^v \\
&= (1 - A^v + A^vC^v)(1 - B^v + B^vC^v) \\
&= (1 - A^v + A^vC^v) - B^v(1 - A^v + A^vC^v) + B^vC^v(1 - A^v + A^vC^v) \\
&= 1 - A^v + A^vC^v - B^v + A^vB^v - A^vC^vB^v + B^vC^v - B^vC^vA^v + B^vC^vA^v \\
&= 1 - A^v - B^v + A^vB^v + A^vC^v + B^vC^v - A^vB^vC^v
\end{aligned}$$

因此 $(A \vee B \to C)^v = ((A \to C) \wedge (B \to C))^v$，可知 $A \vee B \to C \Leftrightarrow (A \to C) \wedge (B \to C)$ 成立。

(6) $\neg A \vee B, A \to B \wedge C, D \to B \Rightarrow \neg B \to C$

解：在教材中还有一种类似于表格法的证明方法，其也是通过逻辑蕴含的定义来证明的，具体如下。使得 $\neg A \vee B, A \to B \wedge C, D \to B$ 中各个公式为真的指派有：

- $\alpha_1(A)=T,\alpha_1(B)=T,\alpha_1(C)=T,\alpha_1(D)=T$，此时 $\alpha_1(\neg B\to C)=T$
- $\alpha_2(A)=T,\alpha_2(B)=T,\alpha_2(C)=T,\alpha_2(D)=F$，此时 $\alpha_2(\neg B\to C)=T$
- $\alpha_3(A)=F,\alpha_3(B)=T,\alpha_3(C)=T,\alpha_3(D)=T$，此时 $\alpha_3(\neg B\to C)=T$
- $\alpha_4(A)=F,\alpha_4(B)=T,\alpha_4(C)=T,\alpha_4(D)=F$，此时 $\alpha_4(\neg B\to C)=T$
- $\alpha_5(A)=F,\alpha_5(B)=T,\alpha_5(C)=F,\alpha_5(D)=T$，此时 $\alpha_5(\neg B\to C)=T$
- $\alpha_6(A)=F,\alpha_6(B)=T,\alpha_6(C)=F,\alpha_6(D)=F$，此时 $\alpha_6(\neg B\to C)=T$
- $\alpha_7(A)=F,\alpha_7(B)=F,\alpha_7(C)=T,\alpha_7(D)=F$，此时 $\alpha_7(\neg B\to C)=T$
- $\alpha_8(A)=F,\alpha_8(B)=F,\alpha_8(C)=F,\alpha_8(D)=F$，此时 $\alpha_8(\neg B\to C)=F$

可以发现，当 $\alpha_8(A)=F,\alpha_8(B)=F,\alpha_8(C)=F,\alpha_8(D)=F$ 时，$\alpha_8(\neg B\to C)=F$。因此，$\neg A\vee B, A\to B\wedge C, D\to B\Rightarrow\neg B\to C$ 不成立。

3. 求下列公式的合取范式与析取范式

(1) $\neg(q\to p)\wedge(r\to\neg s)$

合取范式与析取范式如下：

$$\begin{aligned}
\neg(q\to p)\wedge(r\to\neg s) &\Leftrightarrow \neg(\neg q\vee p)\wedge(\neg r\vee\neg s)\\
&\Leftrightarrow (q\wedge\neg p)\wedge(\neg r\vee\neg s)\\
&\Leftrightarrow q\wedge\neg p\wedge(\neg r\vee\neg s)\ \text{（合取范式）}\\
&\Leftrightarrow ((q\wedge\neg p)\wedge\neg r)\vee((q\wedge\neg p)\wedge\neg s)\\
&\Leftrightarrow (q\wedge\neg p\wedge\neg r)\vee(q\wedge\neg p\wedge\neg s)\ \text{（析取范式）}
\end{aligned}$$

(2) $\neg p\wedge q\to r$

合取范式与析取范式如下：

$$\begin{aligned}
\neg p\wedge q\to r &\Leftrightarrow \neg(\neg p\wedge q)\vee r\\
&\Leftrightarrow (p\vee\neg q)\vee r\\
&\Leftrightarrow p\vee\neg q\vee r\ \text{（析取范式）}\\
&\Leftrightarrow (p\vee\neg q\vee r)\ \text{（合取范式）}
\end{aligned}$$

(3) $\neg(p\vee q)\leftrightarrow p\wedge q$

合取范式与析取范式如下：

$$
\begin{aligned}
\neg(p\vee q)\leftrightarrow p\wedge q &\Leftrightarrow ((p\vee q)\vee(p\wedge q))\wedge(\neg(p\vee q)\vee\neg(p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (((p\vee q)\vee p))\wedge((p\vee q)\vee q))\wedge(\neg(p\vee q)\vee\neg(p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge(p\vee q))\wedge(\neg(p\vee q)\vee\neg(p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(\neg(p\vee q)\vee\neg(p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge((\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\vee\neg q))\\
&\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge((\neg p\vee(\neg p\vee\neg q))\wedge(\neg q\vee(\neg p\vee\neg q)))\\
&\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge((\neg p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q))\\
&\Leftrightarrow (p\vee q)\wedge(\neg p\vee\neg q)\quad\text{（合取范式）}\\
&\Leftrightarrow ((p\vee q)\wedge\neg p)\vee((p\vee q)\wedge\neg q)\\
&\Leftrightarrow ((p\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg p))\vee((p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg q))\\
&\Leftrightarrow (p\wedge\neg p)\vee(q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)\vee(q\wedge\neg q)\\
&\Leftrightarrow (q\wedge\neg p)\vee(p\wedge\neg q)\quad\text{（析取范式）}
\end{aligned}
$$

4. 求下列公式的主合取范式与主析取范式

(1) $p\rightarrow p\wedge q$

主合取范式与主析取范式如下：

$$
\begin{aligned}
p\rightarrow p\wedge q &\Leftrightarrow \neg p\vee(p\wedge q)\\
&\Leftrightarrow (\neg p\vee p)\wedge(\neg p\vee q)\\
&\Leftrightarrow (\neg p\vee q)\quad\text{（主合取范式）}\\
&\Leftrightarrow (\neg p\wedge(q\vee\neg q))\vee((p\vee\neg p)\wedge q)\\
&\Leftrightarrow ((\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q))\vee((p\wedge q)\vee(\neg p\wedge q))\\
&\Leftrightarrow (\neg p\wedge q)\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)\quad\text{（主析取范式）}
\end{aligned}
$$

(2) $p\vee q\rightarrow(q\rightarrow r)$

主合取范式与主析取范式如下：

$$\begin{aligned}
p \vee q \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \rightarrow r)\\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee r)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee (\neg q \vee r)) \wedge (\neg q \vee (\neg q \vee r))\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg q \vee r)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee r)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \quad \text{（主合取范式）}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p \vee q \rightarrow (q \rightarrow r) &\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (q \rightarrow r)\\
&\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee (\neg q \vee r)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee r)\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \neg q \vee r\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee ((p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q) \wedge r)\\
&\Leftrightarrow ((\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \vee ((p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)\\
&\quad \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \vee ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r))\\
&\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)\\
&\quad \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \quad \text{（主析取范式）}
\end{aligned}$$

(3) $(p \rightarrow p \wedge q) \vee r$

求主合取范式与主析取范式还有一种简单的方法，首先求得全部指派赋值：

因此主合取范式为：$\neg p \vee q \vee r$，主析取范式为：$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$。

表 3: 题 4(3) 解

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	r	$(p \rightarrow p \wedge q) \vee r$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T
T	T	T	T	F	T
T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	T