数理逻辑 (II)

任世军
e-mail:ren_shijun@163.com

哈尔滨工业大学 计算学部

2021 年 12 月

17. $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
18. $\vdash \neg A \to C$ 并且 $\vdash B \to C$ 当且仅当 $\vdash (A \to B) \to C$
19. $\vdash A \to A \vee B$，其中 $A \vee B$ 定义为 $\neg A \to B$
20. $\vdash A \to B \vee A$
21. 如果 $\vdash P \to Q$，$\vdash R \to S$，那么 $\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$
22. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
23. $\vdash A \wedge B \to C$ 当且仅当 $\vdash A \to (B \to C)$，其中 $A \wedge B$ 定义为 $\neg(A \to \neg B)$
24. $\vdash A \wedge B \to A$
25. $\vdash A \wedge B \to B$
26. $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$
27. $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

PC 中的定理（续）

28. $\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ $\quad \vdash P \leftrightarrow Q$ 即 $\vdash P \rightarrow Q$和 $\vdash Q \rightarrow P$
29. $\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$
30. $\vdash (A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
31. $\vdash (A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
32. $\vdash A \wedge (A \vee B) \leftrightarrow A$
33. $\vdash A \vee (A \wedge B) \leftrightarrow A$
34. $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
35. $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

演绎定理、合理性、一致性和完全性

Theorem (演绎定理)

对 PC 中任意公式集合 Γ 和公式 A, B,$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$ 当且仅当 $\Gamma \vdash_{PC} A \to B$。

Theorem (PC 的合理性)

PC 是合理的,即对任意公式集 Γ 和公式 A,如果 $\Gamma \vdash A$,则 $\Gamma \Rightarrow A$。特别是如果 A 为 PC 中的定理 ($\vdash A$),则 A 永真 ($\Rightarrow A$)。

Definition (公式集的一致性)

设 Γ 是 *PC* 的一个公式集,如果不存在 *PC* 的公式 A,使得 $\Gamma \vdash A$ 与 $\Gamma \vdash \neg A$ 同时成立,则称 Γ 是一个一致的公式集。

Definition (公式集的完全性)

设 Γ 是 *PC* 的一个公式集，如果对任意的公式 A，$\Gamma \vdash A$ 或 $\Gamma \vdash \neg A$ 必有一个成立，则称 Γ 是一个完全的公式集。

Theorem (PC 的一致性)

PC 是一致的，即不存在公式 A，使得 A 与 $\neg A$ 均为 PC 中的定理。

Theorem (PC 的不完全性)

PC 不是完全的，即存在公式 A，使得 $\vdash A$，$\vdash \neg A$ 均不能成立。

PC 的理论

Definition (PC 的理论)

PC 的理论 (theory) 指的是如下的集合：

$$Th(PC) = \{A | \vdash_{PC} A\}$$

PC 基于前提 Γ 的扩充 (extension) 指的是：

$$Th(PC \cup \Gamma) = \{A | \Gamma \vdash_{PC} A\}$$

Theorem (不一致与完全性)

PC 的不一致的扩充必定是完全的，但是至少有一个公式不是公式的一致扩充的定理。特别地，当公式集合 Γ *不一致的时候，扩充* $Th(PC \cup \Gamma)$ *是完全的；当* Γ *一致时，至少有一个公式* A *使得*

$$A \notin Th(PC \cup \Gamma)(\text{即}\Gamma \nvdash A)$$

PC 的完备性

Theorem (完备性定理)

PC 是完备的，即对任意公式集合 Γ 和公式 A，如果 $\Gamma \Rightarrow A$，那么 $\Gamma \vdash A$。特别地，如果 $\Rightarrow A$，即 A 永真，那么 $\vdash A$，即 A 是 PC 中的一个定理。

命题 1

如果 Γ 一致，$\Gamma \nvdash A$，那么 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 是也一致的。

命题 2

如果 Γ 一致，$\Gamma \vdash A$，那么 $\Gamma \cup \{A\}$ 是也一致的。

命题 3

如果 Γ 一致，那么存在公式集合 Δ，使得 $\Gamma \subseteq \Delta$，Δ 是一致的并且 Δ 是完全的。

命题 3 的证明

公式集 Δ 的构造

设 $A_0, A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 是 PC 中所有公式的序列,构造公式集合序列如下:

1. $\Delta_0 = \Gamma$
2. $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\}$如果$\Delta_n \vdash A_n$
3. $\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg A_n\}$如果$\Delta_n \nvdash A_n$
4. $\Delta = \cup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$。

Δ 的完全性

因为对 PC 中的任一公式 A,不妨设它就是 A_i。由 Δ_i 的构造方式知,如果 $\Delta_i \vdash A_i$,那么 $A = A_i \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$,从而 $\Delta \vdash A$。如果 $\Delta_i \nvdash A_i$,那么 $\neg A = \neg A_i \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$,从而 $\Delta \vdash \neg A$。

命题 3 的证明（续）

公式集 $\Delta_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ 的一致性

用归纳法。首先 $\Delta_0 = \Gamma$ 是一致的，其次，假设 Δ_k 一致，如果 $\Delta_k \nvdash A_k$，那么 $\Delta_{k+1} = \Delta_k \cup \{\neg A_k\}$。由前面的命题知 Δ_{k+1} 是一致的; 如果 $\Delta_k \vdash A_k$，那么 $\Delta_{k+1} = \Delta_k \cup \{A_k\}$。由前面的命题知 Δ_{k+1} 也是一致的。

对公式 A，如果 $\Delta \vdash A$，则对某个 n，有 $\Delta_n \vdash A$。

由演绎序列的定义。

公式集 Δ 的一致性

用反证法。设有 A，使得 $\Delta \vdash A$ 并且 $\Delta \vdash \neg A$，于是存在 m, n，使得 $\Delta_m \vdash A, \Delta_n \vdash \neg A$ 。令 $k = \max\{m, n\}$，从而 $\Delta_k \vdash A$ 并且 $\Delta_k \vdash \neg A$，矛盾。

PC 的完备性（续）

命题 4

上面构造的公式集合 Δ,有如下性质:对任一公式 A,$A \in \Delta$ 当且仅当 $\Delta \vdash A$

命题 4 的证明概要.

必要性显然,只须证充分性。

1. 从 $\Delta \vdash A$ 知 $\Delta_j \vdash A_i$。
2. 从 $j \leq i$ 知 $\Delta_j \subseteq \Delta_i$,有 $\Delta_i \vdash A_i$,故 $A_i \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$。
3. 从 $i < j$ 知,也有 $\Delta_i \vdash A_i$,故 $A_i \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$。
4. 否则 $\Delta_i \nvdash A_i$,从而 $\neg A_i \in \Delta_{i+1}$。但 $i+1 \leq j$ 可知 $\Delta_{i+1} \subseteq \Delta_j$,从而 $\Delta_j \vdash \neg A_i$,与 Δ_j 的一致性矛盾。

□

命题 5

设 Γ 是 *PC* 的一致公式集合，那么存在一个指派 ∂，使得对任一公式 $A \in \Gamma$，都有 $A^{\partial} = 1$。

命题 5 的证明概要.

设 Δ 是上面命题构造的公式集合，因此 $\Gamma \subseteq \Delta$，Δ 一致并且完全。现在定义映射 $\bar{\partial}$ 如下：$A^{\bar{\partial}} = \begin{cases} 1 & \text{当} A \in \Delta \\ 0 & \text{当} A \notin \Delta \end{cases}$

1. 由于 Δ 是一致的并且是完全的，所以 $\bar{\partial}$ 确实是公式集合到 $\{0, 1\}$ 的映射。
2. 映射 $\bar{\partial}$ 满足真值运算 $\neg, \rightarrow$（即 $(\neg A)^{\bar{\partial}} = 1 - A^{\bar{\partial}}, (A \rightarrow B)^{\bar{\partial}} = 1 - A^{\bar{\partial}} + A^{\bar{\partial}}B^{\bar{\partial}}$）。
3. 令 $\partial = \bar{\partial}|_{Atom(L^p)}$，对 *PC* 中任一公式 A，都有 $A^{\partial} = A^{\bar{\partial}}$。

$\square$

完备性定理的证明.

设 A 为 PC 中的任一公式,Γ 为一个公式集合,$\Gamma \Rightarrow A$,那么 $\Gamma \vdash A$。如果 Γ 不是一致的,那么 Γ 演绎 PC 中的所有公式,所以 $\Gamma \vdash A$。如果 Γ 是一致的,假设 $\Gamma \nvdash A$,那么 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 也是一致的,由上面的命题知道,存在一个指派 ∂,使得 ∂ 弄真集合 $\Gamma \cup \{\neg A\}$ 中的所有公式。从而这个指派弄真 Γ 中的所有公式,可是弄假 A,这与 Γ 逻辑蕴含 A 相矛盾。 $\square$

Theorem (公式集的一致性和可满足性)

PC 的公式集合 Γ 是一致的当且仅当它是可满足的。

自然演绎系统 ND 的语言部分

首先有一个符号表（字母表）
$\sum = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots\}$。
公式的定义如下：

1. $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots$ 为（原子）公式。
2. 如果 A, B 是公式，那么 $(\neg A)$，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \rightarrow B)$，$(A \leftrightarrow B)$ 也是公式。
3. 只有 (1)(2) 确定的表达式才是公式。

公式中最外层的括号可以省略。

自然演绎系统 ND 的推理部分

公理模式

$\Gamma \cup \{A\} \vdash A \quad (\in)$

推理规则

共有 14 条推理规则。

- 推理规则 1 (假设引入规则) 出自于重言式 $B \to (A \to B)$)

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B} \quad (+)$$

- 推理规则 2 (假设消除规则) 出自于重言式 $\neg A \to (A \to B)$)

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad (-)$$

- 推理规则 3（析取 $\vee$ 引入规则）出自于重言式 $A \to A \vee B, B \to A \vee B$）

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee+)$$

- 推理规则 4（析取 $\vee$ 消除规则）出自于重言式 $(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C) \to C$

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \quad (\vee-)$$

- 推理规则 5（合取 $\wedge$ 引入规则）出自于重言式 $A \to (B \to A \wedge B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge+)$$

- 推理规则 6（合取 $\wedge$ 消除规则）出自于重言式 $A \wedge B \to A, A \wedge B \to B$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \quad (\wedge-)$$

- 推理规则 7 (蕴含 $\to$ 引入规则)

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad (\to +)$$

- 推理规则 8 (蕴含 $\to$ 消除规则)

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B} \quad (\to -)$$

- 推理规则 9 ($\neg$ 引入规则)

$$\frac{\Gamma; A \vdash B, \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \quad (\neg +)$$

- 推理规则 10 ($\neg$ 消除规则) 源于重言式 $A \to (\neg A \to B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} \quad (\neg -)$$

- 推理规则 11 (¬¬ 引入规则)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A} \quad (\neg\neg+)$$

- 推理规则 12 (¬¬ 消除规则)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \quad (\neg\neg-)$$

- 推理规则 13 (↔ 引入规则)

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B, \Gamma \vdash B \to A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B} \quad (\leftrightarrow +)$$

- 推理规则 14 (↔ 消除规则)

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \to B}, \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \to A} \quad (\leftrightarrow -)$$

Definition (演绎结果和定理)

在 ND 中称 A 为 Γ 的演绎结果,记为 $\Gamma \vdash_{ND} A$,如果存在一个序列

$$\Gamma_1 \vdash A_1, \Gamma_2 \vdash A_2, \cdots, \Gamma_m \vdash A_m (= \Gamma \vdash A)$$

使得对任意的 $i = 1, 2, \cdots, m$, $\Gamma_i \vdash A_i$ 或者公理,或者是 $\Gamma_j \vdash A_j (j < i)$,或者是 $\Gamma_{j_1} \vdash A_{j_1}, \Gamma_{j_2} \vdash A_{j_2}, \cdots, \Gamma_{j_k} \vdash A_{j_k} (j_1, j_2, \cdots, j_k < i)$ 使用推理规则导出。称 A 为 ND 的定理,如果 $\Gamma \vdash A$,并且 $\Gamma = \phi$。即 $\vdash A$。

ND 的基本定理

Theorem (定理 3.2.1)

$\vdash A \vee \neg A$

Theorem (定理 3.2.2)

$\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

Theorem (定理 3.2.3)

$\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Theorem (定理 3.2.4)

$\neg A \rightarrow B \vdash\dashv A \vee B$

ND 的基本定理

Theorem (定理 3.2.5)

$A \to B \dashv\vdash \neg A \vee B$

Theorem (定理 3.2.6)

$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $\vdash A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Theorem (定理 3.2.7)

PC 的公理是 ND 的定理,即

(1) $\vdash_{ND} A \to (B \to A)$

(2) $\vdash_{ND} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $\vdash_{ND} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

例 1

- 北京是中国的城市。
- 上海是中国的城市。
- 天津是中国的城市。

例 2

1. 所有人都是要死的。
2. 苏格拉底是人。
3. 苏格拉底也是要死的。

命题逻辑表达知识的局限性 (续)

例 3

- 所有实数的平方都是非负的。
- -3 是一个实数。
- -3 的平方也是非负的。

谓词演算基本概念

Definition (定义 4.2.1)

个体词:用于表示研究对象的词。分个体常元和个体变元。用 $a, b, c, \cdots$ 表示个体常元; 用 $x, y, z, \cdots$ 表示个体变元。

Definition (定义 4.2.2)

谓词:用于表示研究对象的性质或研究对象之间关系的词称为谓词,用大写的英文字母表示。

Example (例 4.2.1)

分析下列自然语言中的个体词和谓词并形式化:

1. $\sqrt{2}$ 是无理数。
2. 张三和李四是计算机专业的学生。
3. 实数 x 比实数 y 大。

谓词演算基本概念

Definition (定义 4.2.3)

n 元谓词:含有 n 个个体常元的谓词称为 n 元谓词。

Definition (定义 4.2.4)

个体域(论域):个体变元的取值范围称为个体域,用 D 表示。

Definition (定义 4.2.5)

函词:用于描述从一个个体域到另一个个体域映射。用 $f, g, h \cdots$ 表示。含有 n 个变元的函词称为 n 元函词。

Example (例 4.2.2)

用谓词对命题“张三的父亲是工程师”进行形式化。

谓词演算基本概念

Definition (定义 4.2.6)

量词:用于限制个体词的数量,分为全称量词和存在量词。

- 全称量词,用符号 $\forall$ 表示,代表"任意的"或"所有的"。
- 存在量词,用符号 $\exists$ 表示,代表"至少有一个"。

Example (例 4.2.3)

用谓词 $P(x)$ 表示"x 是有理数",那么

- $\forall x P(x)$ 表示:
- $\exists x P(x)$ 表示:

谓词演算基本概念

Example (量词之间的关系)

- $\forall x P(x) = \neg\exists x \neg P(x)$
- $\exists x P(x) = \neg\forall x \neg P(x)$
- $\neg\forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$
- $\neg\exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$

Definition (定义 4.2.7 项)

1. 个体常元和个体变元是项。
2. 如果 $f^{(n)}$ 是一个 n 元函词,且 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为项,那么 $f^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 也是项。
3. 只有由 (1),(2) 经过有限次复合产生的结果才是项。

Example (例 4.2.5)

用 $father(x)$ 表示 x 的父亲,a 表示张三,则 $father(a), father(father(a)), \cdots$ 都是项。

Definition (定义 4.2.8 合式公式)

1. 不含联结词的谓词即原子谓词公式是合式公式。
2. 若 A 为合式公式,则 $\neg A$ 也是合式公式。
3. 若 A, B 为合式公式,则 $A \vee B, A \wedge B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 都是合式公式。
4. 若 A 是合式公式,x 为变元符号,则 $(\forall x)A, (\exists x)A$ 都是合式公式。
5. 只有 (1)、(2)、(3) 和 (4) 确定的表达式才是合式公式。

谓词演算基本概念

Definition (定义 4.2.10)

辖域:量词所约束的范围。

Definition (定义 4.2.9)

- 约束变元:受量词约束的个体变元称为约束变元。
- 自由变元:不受量词约束的个体变元称为自由变元。

谓词演算基本概念

Definition (定义 4.2.11)

易名规则:变元更名,将量词变元以及该量词变元在其辖域中的所有出现更改为其他未在公式中出现的变元。

Example (例 4.2.10)

1. $\neg R(x,y,z) \wedge \forall x Q(x,y) \to \exists y P(y)$
2. $\forall v(P(v,y) \to Q(x))$

变元更名的目的是保持变元的独立性。

Example (例 4.3.1)

将下列公式翻译成谓词公式:

1. 任意有理数都是实数。
2. 有的实数是有理数。

Example (例 4.3.4)

将命题"过平面中的两个不同点有且仅有一条直线通过"用谓词形式化。

定义谓词:$D(x)$: x 为平面上的点。$G(x)$: x 为平面上的直线。
$L(x,y,z)$: z 通过 x,y。$E(x,y)$: x 与 y 相等。
形式化为:$\forall x \forall y (D(x) \wedge D(y) \wedge \neg E(x,y) \rightarrow$
$\exists z (G(z) \wedge L(x,y,z) \wedge \forall u (G(u) \wedge L(x,y,u) \rightarrow E(u,z)))$

Example

将下列公式翻译成谓词公式:
1. 每个作家都写过作品。
2. 有的作家没写过小说。
3. 有的作品不是小说。

集合论中的例子:
存在空集,即存在没有元素的集合。$\exists x \forall y \neg (y \in x)$
两个集合相等的充分必要条件是它们包含的元素相同。
$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$
群论中的例子: 存在左单位元,并且群的每个元素都有逆元素。
$\exists x ((\forall y (x \circ y = y)) \wedge (\forall y \exists z (z \circ y = x)))$
奇怪的理发师:有一位理发师规定: 我为且仅为那些不为自己理发的人理发。
$\exists x (P(x) \wedge \forall y (Q(x, y) \leftrightarrow \neg Q(y, y))))$
$P(x)$: x 是理发师。$Q(x, y)$: x 为 y 理发。

形式系统 FC 的字母表 $\sum = L_v \cup L_a \cup L_f \cup L_p \cup L_l$

个体变元 $v_1, v_2, v_3 \cdots$	（简称变元）	L_v
个体常元 $a_1, a_2, a_3 \cdots$	（简称常元）	L_a
函词 $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)} \cdots$	（一元函词）	L_f
$f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)} \cdots$	（二元函词）	
$\cdots \quad \cdots$		
$f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)} \cdots$	（n 元函词）	
$\cdots \quad \cdots$		
谓词 $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)} \cdots$	（一元谓词）	L_p
$P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)} \cdots$	（二元谓词）	
$\cdots \quad \cdots$		
$P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)} \cdots$	（n 元谓词）	
$\cdots \quad \cdots$		
真值联结词：$\to, \neg$		L_l
量词：$\forall$		
括号：(,)		

形式系统 FC 中的项和公式

$\mathcal{L}(FC)$ 的项

1. 变元和常元是项。
2. 对任意正整数 n,如果 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为项,$f^{(n)}$ 为 n 元函词,那么 $f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$ 也为项。
3. 除了有限次的使用 (1)(2) 得到的表达式以外,其余的都不是项。

$\mathcal{L}(FC)$ 的公式

1. 对任意正整数 n,如果 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 为项,$P^{(n)}$ 为 n 元谓词符号,那么 $P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$ 也为公式,并称之为原子公式。
2. 如果 A, B 为公式,v 为任意一个变元符号,那么 $(\neg A), (A \to B), (\forall vA)$ 都是公式。
3. 除了有限次的使用 (1)(2) 得到的表达式以外,其余的都不是公式。

关于 $\mathcal{L}(FC)$ 的说明：

1. 这里的符号是抽象的。并无特别的意义。
2. 其它的联结词和存在量词 $\exists$ 被看成是缩写符号。
3. $\mathcal{L}(FC)$ 中没有等词 $=$，带有等词的以后展开。
4. 不含有任何函词的系统称为纯谓词演算系统。
5. 在 $\mathcal{L}(FC)$ 中引入命题符号，或者 0 元谓词符号作为命题符号，这样命题演算系统 PC 就成为 FC 的一个子系统。

约定：

1. 为了增加可读性，用 $f^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 代替 $f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$，用 $P^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 代替 $P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$。
2. 和 PC 中一样，最外层的括号可以省略。并且 $\forall v(\exists v)$ 的优先级高于所有的二元联结词，和 $\neg$ 同级。

一些基本概念

量词的辖域

公式 A 称为量词 $\forall v(\exists v)$ 的辖域,如果 $\forall v(\exists v)$ 与 A 毗连并且 A 的任何真截断(如果 $A = ww', w' \neq \epsilon$,那么我们称 w 为 A 的真截断)都不是公式。
简单地说,辖域就是量词的作用范围。

约束变元和自由变元

公式 A 中,变元 v 的某个出现叫做约束的出现,如果该变元为 $\forall v(\exists v)$ 的指导变元,并且出现在 $\forall v(\exists v)$ 的辖域内。否则该变元的出现为自由的出现。A 中约束出现的变元称为约束变元,自由出现的变元称为自由变元。

可代入

称项 t 是对 A 中自由变元 v 可代入的,如果 A 中 v 的任何自由出现都不在 $\forall u(\exists u)$ 的辖域内,这里 u 是 t 中的任意一个变元。

代入

对公式 A 中变元 v 的所有自由出现都代换为项 t (t 对 A 中的 v 是可代入的) 的过程称为代入。代换后得到的公式称为 A 的代入实例,记为 A_t^v。如果 A 中没有 v 的自由的出现则 A_t^v 就是 A。
用记号 $A_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{v_1,v_2,\cdots,v_n}$ 表示对 A 中的变元 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 同时做代入,v_i 代为 t_i。它与 $(\cdots((A_{t_1}^{v_1})_{t_2}^{v_2})_{t_3}^{v_3}\cdots)_{t_n}^{v_n}$ 是不同的。

子公式

对公式 B 称为公式 A 的子公式,如果 A 为形如 wBw' 的符号串,其中 w, w' 是符号串,B 是公式。当 w 和 w' 中有一个不是空串,我们就把 B 称为 A 的真子公式。

全称化

设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 为公式 A 的所有的自由变元,那么公式 $\forall v_{i_1} \forall v_{i_2} \cdots \forall v_{i_r} A$ 称为 A 的全称化。其中 $1 \leq r \leq n, 1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_r \leq n$,公式 $\forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n A$ 称为公式 A 的全称封闭式。当 A 无自由变元时,A 的全称封闭式就是它本身。不含自由变元的公式称为命题,FC 中的公式是命题当且仅当它是一个全称封闭式。

一阶谓词演算系统 FC 中的公理和推理规则

一阶谓词演算系统中的理论部分称为一阶逻辑，用 $\mathscr{J}$ 表示。FC 的理论部分用 $\mathscr{J}(FC)$ 表示。

公理模式，由下列公式及其所有的全称化组成

A_1: $A \to (B \to A)$
A_2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
A_4: $\forall vA \to A_t^v$(t 对 A 中的变元 v 可代入)
A_5: $\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$
A_6: $A \to \forall vA$(v 在 A 中无自由出现)。

推理规则

$$r_{mp}: \frac{A, A \to B}{B}$$

FC 中的定理、证明以及演绎、演绎结果的定义与 PC 中是一样的。

Theorem (定理 5.2.1)

证明:对于 FC 中的任何公式 A,变元 v, $\vdash_{FC} \forall vA \to A$

Theorem (定理 5.2.2)

证明:对于 FC 中的任何公式 A,变元 v, $\vdash_{FC} A \to \neg\forall v\neg A$*,也就是* $\vdash_{FC} A \to \exists vA$

Theorem (定理 5.2.3)

证明:对于 FC 中的任何公式 A,变元 v, $\vdash_{FC} \forall vA \to \exists vA$

FC 的基本定理（续）

Theorem (定理 5.2.4（全称推广定理）)

对于 FC 中的任何公式 A,变元 v,如果 $\vdash A$,那么 $\vdash \forall vA$

证明

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$ 是 FC 中公式 A 的证明序列,对证明的长度 n 用归纳法。

1. 当 $n = 1$ 时,A 只能是公理。若 v 在 A 中自由出现,那么 $\forall vA$ 也是公理; 若 v 不在 A 中自由出现,则 $A \to \forall vA$ 为公理,从而由 r_{mp} 知 $\forall vA$ 为定理。
2. 当 $n > 1$ 时,若 A 是公理,则仿照 (1) 的证明知 $\forall vA$ 为定理。若 A_n 为 $A_j (j < n)$,则由归纳假设知 $\forall vA_j = \forall vA$ 为定理。若 A_n 为 $A_i, A_j (i, j < n)$ 推得,不妨设 $A_j = A_i \to A$,则由归纳假设 $\forall vA_i$, $\forall v(A_i \to A)$ 都是定理。再由公理 $A_4 : \forall v(A_i \to A) \to (\forall vA_i \to \forall vA)$ 知 $\forall vA_i \to \forall vA$ 为定理。由分离规则知 $\forall vA$ 为定理。

FC 的基本定理（续）

Theorem (定理 5.2.5)

对于 FC 中的任何公式集合 Γ,公式 A,以及不在 Γ 的任意公式里自由出现的变元 v,如果 $\Gamma \vdash A$,那么 $\Gamma \vdash \forall vA$

证明

对 A 的演绎序列长度 n 用归纳法。

1. 当 $n = 1$ 时,若 A 是公理,则参照前面定理的证明知 $\forall vA$ 是定理,从而 $\Gamma \vdash \forall vA$; 若 $A \in \Gamma$,则 v 不在 A 中自由出现,从而 $A \to \forall vA$ 为公理,从而由 r_{mp} 知 $\Gamma \vdash \forall vA$。
2. 当 $n > 1$ 时,若 A 是公理或 $A \in \Gamma$,则仿照 (1) 的证明知 $\Gamma \vdash \forall vA$。若 A_n 为 $A_j(j < n)$,则由归纳假设知 $\Gamma \vdash \forall vA_j = \forall vA$。若 A_n 为 $A_i, A_j(i,j < n)$ 推得,不妨设 $A_j = A_i \to A$,则由归纳假设 $\Gamma \vdash \forall vA_i$,$\Gamma \vdash \forall v(A_i \to A)$。再由公理 $A_4 : \forall v(A_i \to A) \to (\forall vA_i \to \forall vA)$ 知 $\Gamma \vdash \forall vA_i \to \forall vA$。最后由分离规则知 $\Gamma \vdash \forall vA$。

FC 的基本定理（续）例子

Example (例 5.2.1)

若 $\vdash A \to B$ 且变元 v 在 B 中无自由出现,则 $\vdash \exists vA \to B$。

Example (例 5.2.2)

$\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$

FC 的基本定理（续）例子

Example (例 5.2.1)

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{A \to B} \arrow[r] & \boxed{\neg B \to \neg A} \arrow[r] & \boxed{\forall v(\neg B \to \neg A)} \arrow[r] & \boxed{\forall v \neg B \to \forall v \neg A} \\
& \boxed{\neg \forall v \neg A \to B} & & \neg B \arrow[u] \arrow[u, dashed, bend right] \arrow[ll, bend left]
\end{tikzcd}
$$

Example (例 5.2.2)

$$
\begin{tikzcd}
\exists x \neg A \arrow[r, dashed] & \forall x B \arrow[d] \\
\neg A \arrow[u] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\exists x \neg A \arrow[r] & \forall x B \arrow[d] \\
\neg A \arrow[u] \arrow[ur, dashed] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\exists x \neg A \arrow[r] & \forall x B \arrow[d] \\
\neg A \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r, dashed] & B
\end{tikzcd}
$$

FC 的基本定理（续）

Theorem (定理 5.2.6 演绎定理)

设 Γ 为 FC 中的任一公式集合，A, B 为 FC 中的任意两个公式，那么 $\Gamma; A \vdash B$ 当且仅当 $\Gamma \vdash A \to B$。

Example (例 5.2.3)

证明 $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中 x 在 A 中无自由出现。

Theorem (定理 5.2.7)

设 Γ 为 FC 中的任一公式集合,A, B 为 FC 中的任意两个公式,那么 $\Gamma; A \vdash \neg B$ 当且仅当 $\Gamma; B \vdash \neg A$。

Theorem (定理 5.2.8 反证法)

如果 FC 中的公式集合 $\Gamma \cup \{A\}$ 是不一致的,那么 $\Gamma \vdash \neg A$。

Example (例 5.2.4)

证明:$\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \exists x(\neg A \to B)$。

如果大家的成绩都低于 90 分，那么就会出现对成绩不满者。由此可知一定有人成绩优秀或对成绩不满者。

Example (例 5.2.4)

$$\forall x\neg A \longrightarrow \exists x B$$

$$\neg\exists x(\neg A \to B) \longrightarrow \forall x\neg(\neg A \to B)$$

$$\forall x\neg(\neg A \to B) \longrightarrow \forall x\neg A$$

$$\forall x\neg(\neg A \to B) \longrightarrow \forall x\neg B$$

FC 的基本定理（续）

Theorem (定理 5.2.9)

设 Γ 为 FC 中的任一公式集合, A, B 为 FC 中的任意两个公式, 并且变元 v 不在 Γ 的任何公式里面自由出现, 那么 $\Gamma; A \vdash B$ 蕴含 $\Gamma; \forall v A \vdash B$ 和 $\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$。

Theorem (定理 5.2.10 存在消除)

设 Γ 为 FC 中的任一公式集合, A, B 为 FC 中的任意两个公式, 并且变元 v 不在 Γ 的任何公式以及公式 B 里面自由出现, 那么由 $\Gamma \vdash \exists v A$ 以及 $\Gamma; A \vdash B$ 可以推出 $\Gamma \vdash B$。

Example (例 5.2.5)

$\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists v B)$, 其中 v 在 A 中无自由出现。

Theorem (定理 5.2.11 替换原理)

设 A, B 为 FC 的公式,且满足 $A \vdash\dashv B$（即 $A \vdash B$ 且 $B \vdash A$）,A 是 C 的子公式,D 是将 C 中 A 的若干出现换为公式 B 得到的公式,则 $C \vdash\dashv D$。

Theorem (定理 5.2.12 改名定理)

在 FC 中,若 A' 是 A 的改名式,且 A' 改用的变元不在 A 中出现,则 $A \vdash\dashv A'$。

Example (例 5.2.6)

$\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to \exists xB$

Theorem

(1) $\exists x \neg A \dashv\vdash \neg \forall x A$ (2) $\forall x \neg A \dashv\vdash \neg \exists x A$

Theorem

(1) $\forall x(A \wedge B) \dashv\vdash \forall x A \wedge \forall x B$
(2) $\exists x(A \vee B) \dashv\vdash \exists x A \vee \exists x B$

Theorem

(1) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x A \wedge \exists x B$
(2) $\forall x A \vee \forall x B \vdash \forall x(A \vee B)$
(3) $\exists x \forall y B(x, y) \vdash \forall y \exists x B(x, y)$

形式系统的语义的定义

FC 的一阶语言 $\mathcal{L}(FC)$ 的一个语义是一个结构,该结构包括:
(1) 非空集合 U,称为论域或者个体域。
(2) 一个称为解释的映射 I,$I : L_a \cup L_f \cup L_p \to U \cup U_f \cup U_p$,其中 U_f 是 U 上的所有函数符号(一元,二元等等)构成的集合。U_P 是 U 上的所有关系(0 元,1 元等等)构成的集合。
对于任一常元 a,$I(a) \in U$。记为 $\bar{a}$。
对于每一个 n 元函词 $f^{(n)}$,$I(f^{(n)})$ 为 U 上的一个 n 元函数,记为 $\bar{f}^{(n)}$,即 $\bar{f}^{(n)} : U^n \to U$。
对于每一个 n 元谓词 $P^{(n)}$,$I(P^{(n)})$ 为 U 上的一个 n 元关系,记为 $\bar{P}^{(n)}$,即 $\bar{P}^{(n)} \subseteq U^n$。当 $n = 1$ 时 $\bar{P}^{(1)}$ 为 U 的一个子集,当 $n = 0$ 时 $\bar{P}^{(0)}$ 为 0 或者 1。

一阶谓词演算中，一个指派（在确定了系统的语义的前提下）是指一个映射 $s : L_v \to U$。
这个映射可以扩展到项的集合 L_t 到 U 的映射。对于任意的项 t

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} s(v) & \text{当}t\text{为变元}v\text{时} \\ \bar{a} & \text{当}t\text{为常元}a\text{时} \\ \bar{f}^{(n)}(\bar{s}(t_1), \cdots, \bar{s}(t_n)) & \text{当}t\text{为}f^{(n)}t_1\cdots t_n\text{时} \end{cases}$$

语义的记号

我们把“公式 A 在结构 $\mathcal{U}$ 和指派 s 下取值真”记为 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$，反之记为 $\not\models_{\mathcal{U}} A[s]$。

$\models_{\mathcal{U}} A$ 表示在结构中，对于一切指派 s，A 为真值 T，即 $\models_{\mathcal{U}} A[s] \forall s$。

$\models_{T} A$ 或者 $\models A$ 表示公式 A 在任意的结构中都取真值 T。这时我们说 A 永真。

公式 A 在结构 $\mathcal{U}$ 和指派 s 下取真值 T,也就是 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 定义如下:

- A 为原子公式 $P^{(n)}t_1 \cdots t_n$ 时
$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当} (\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \cdots, \bar{s}(t_n)) \in \bar{P}^{(n)}$$
- A 为公式 $\neg B$ 时
$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当} \not\models_{\mathcal{U}} B[s]$$
- A 为公式 $B \to C$ 时
$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当} \not\models_{\mathcal{U}} B[s] \text{或者} \models_{\mathcal{U}} C[s]$$
- A 为公式 $\forall vB$ 时
$$\models_{\mathcal{U}} A[s] \text{当且仅当对每一个} d \in U \text{有} \models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$$

$s(v|d)$ 与 s 的差别

其中 $s(v|d)$ 也是一个指派,它的定义如下:对于 L_v 中的任何一个元素 u

$$s(v|d)(u) = \begin{cases} s(u) & \text{当} u \neq v \\ d & \text{当} u = v \end{cases}$$

附加的联接词和量词

如果使用联结词 $\vee, \wedge$ 和量词 $\exists$ 的时候,我们可以进一步的定义

$$
\begin{array}{lll}
\models_{\mathcal{U}} B \vee C[s] & \text{当且仅当} & \models_{\mathcal{U}} B[s]\text{或者} \models_{\mathcal{U}} C[s] \\
\models_{\mathcal{U}} B \wedge C[s] & \text{当且仅当} & \models_{\mathcal{U}} B[s]\text{并且} \models_{\mathcal{U}} C[s] \\
\models_{\mathcal{U}} \exists v B[s] & \text{当且仅当} & \text{存在} d \in U \text{使得} \models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]
\end{array}
$$

很容易的证明 $\models_{\mathcal{U}} \exists v B[s]$ 当且仅当$\models_{\mathcal{U}} \neg\forall v \neg B[s]$。

语义举例

Example (例子)

考虑以下的结构,它赋予只含有一个函词、一个谓词和一个常元的一阶谓词系统。
$\bar{U} = \{0, 1, 2, 3, 4 \cdots\}$,即自然数集合。
$\bar{P}^{(2)}$ 为 N 上的 $\leq$ 关系。
$\bar{f}_1^{(1)}$ 为 N 上的后继函数 $\bar{f}_1^{(1)}(x) = x + 1$。
$\bar{a}_1 = 0$。

我们说 $\models P_1^{(2)} a_1 f_1^{(1)} v_1$。但是 $\models P_1^{(2)} f_1^{(1)} v_1 a_1 [s]$ 对任何指派 s 都不成立。
我们还有 $\models \forall v_1 P_1^{(2)} a_1 v_1$。

公理 1,2,3,显然成立。

公理 4 的永真性证明

对于任何结构 $\mathcal{U}$ 和指派 s,有 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$,其中 t 对于 v 是可代入的。因为 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$ 意味着对于任意的 $d \in U$,有 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$,令 $d = \bar{s}(t)$,于是 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$,而 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|\bar{s}(t))]$ 就是 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$,如果 t 对于 v 是可代入的话。于是 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$ 蕴含 $\models_{\mathcal{U}} A_t^v[s]$,所以 $\models_{\mathcal{U}} (\forall vA \to A_t^v)[s]$。

公理 5 的永真性证明

为了证明 $\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$,只需证明由 $\models_{\mathcal{U}} \forall v(A \to B)[s]$ 和 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$ 可以推出 $\models_{\mathcal{U}} \forall vB[s]$ 成立即可。设 $d \in D$,那么 $\models_{\mathcal{U}} A \to B[s(v|d)]$,所以 $\not\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$ 或者 $\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$。因为 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$,所以 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$,从而 $\models_{\mathcal{U}} B[s(v|d)]$ 对 $\forall d \in D$。所以 $\models_{\mathcal{U}} \forall vB[s]$。

公理 6 的永真性证明

为了证明 $A \to \forall vA$ 永真,只需证明对于任意的 $\mathcal{U}$ 和 s,只要 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$ 就有 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$。
设 $\models_{\mathcal{U}} A[s]$,$d$ 为 U 中的任意一个元素,由于 A 中没有自由出现的 v,指派 v 是 U 中的什么元素对公式 A 没有影响,所以 $\models_{\mathcal{U}} A[s(v|d)]$,从而 $\models_{\mathcal{U}} \forall vA[s]$。

设 Γ 为 FC 的任意公式集,B 为 FC 的公式,若对任意一个使得 Γ 中每个公式均为真的结构 U 及指派 s,也使得 B 为真,即有 $\models_U B[s]$,则称 Γ 逻辑蕴含 B,记为 $\Gamma \models_T B$ 或 $\Gamma \models B$。若 $\Gamma = \{A\}$,则有 $A \models B$,称做 A 逻辑蕴含 B,若同时还有 $B \models A$,则称 A 与 B 逻辑等价。