

Bài 1 : Tìm các đạo hàm sau:

$$\text{a. } y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 5$$

$$\text{b. } y = \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3} - \frac{6}{7x^4}$$

$$\text{c. } y = \frac{3x^2 - 6x + 7}{4x}$$

$$\text{d. } y = \left(\frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1)$$

$$\text{e. } y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

$$\text{f. } y = \frac{-x^2 + 7x + 5}{x^2 - 3x}$$

Lời giải:

$$\text{a. } y' = x^2 - x + 1$$

$$\text{b. } y' = \left[\frac{1}{x^4} \left(2x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{6}{7} \right) \right]'$$

$$= \left(\frac{1}{x^4} \right)' \left(2x^3 - 4x^2 + 5x - \frac{6}{7} \right) + \frac{1}{x^4} (6x^2 - 8x + 5)$$

$$= -\frac{2}{x^5} + \frac{8}{x^5} - \frac{15}{x^4} + \frac{24}{7x^5}$$

$$\text{c. } y' = \left[\frac{3x}{4} - \frac{6}{4} + \frac{7}{4x} \right]' = \frac{3}{4} - \frac{7}{4x^2} = \frac{3x^2 - 7}{4x^2}$$

$$\text{d. } y' = \left[\left(\frac{2}{x} + 3x \right) (\sqrt{x} - 1) \right]'$$

$$= \left(-\frac{2}{x^2} + 3 \right) (\sqrt{x} - 1) + \left(\frac{2}{x} + 3x \right) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 3\sqrt{x} - 3 + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} - 3$$

$$e. y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1 - \sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})^2}$$

$$f. y' = \frac{(-2x + 7)(x^3 - 3x) - (2x - 3)(-x^2 + 7x + 5)}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$= \frac{-4x^2 - 10x + 15}{x^2(x - 3)^2}$$

Bài 2 : Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

$$a. y = 2\sqrt{x} \sin x - \frac{\cos x}{x}$$

$$b. y = \frac{3 \cos x}{2x + 1}$$

$$c. y = \frac{t^2 + 2 \cos t}{\sin t}$$

$$d. y = \frac{2 \cos \varphi - \sin \varphi}{3 \sin \varphi + \cos \varphi}$$

$$e. y = \frac{\tan x}{\sin x + 2}$$

$$f. y = \frac{\cot x}{2\sqrt{x-1}}$$

Lời giải:

$$\text{a. Đặt } U = 2\sqrt{x} \sin x \Rightarrow U' = \frac{\sin x + 2x \cdot \cos x}{\sqrt{x}}$$

$$V = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow V' = \frac{\sin x \cdot x - \cos x}{x^2}$$

$$y' = (U - V)' = U' - V'$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\sin x + 2x \cos x}{\sqrt{x}} - \left(-\frac{\sin x \cdot x - \cos x}{x^2} \right) \\ &= \frac{(\sin x \cdot x \sqrt{x} + \sqrt{x} \cdot x \sin x) + (2x^2 \sqrt{x} \cdot \cos x + \cos x)}{x^2} \\ &= \frac{x \sin x (1 + \sqrt{x}) + \cos x (1 + 2x^2 \sqrt{x})}{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } y' &= \left(\frac{3 \cos x}{2x + 1} \right)' = \frac{3(\cos x)'(2x + 1) - (2x + 1)' \cdot 3 \cos x}{(2x + 1)^2} \\ &= \frac{-3 \sin x (2x + 1) - 6 \cos x}{(2x + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c. } y' &= \left(\frac{t^2}{\sin t} + 2 \cot t \right)' \\ &= \frac{2t \cdot \sin t - \cos t \cdot t^2}{\sin^2 t} - \frac{2t}{\sin^2 t} = \frac{2t \sin t - t^2 \cdot \cos t - 2}{\sin^2 t} \end{aligned}$$

$$d. \text{ Dat } U = 2\cos\varphi - \sin\varphi \Rightarrow U' = -2\sin\varphi - \cos\varphi$$

$$V = 3\sin\varphi + \cos\varphi \Rightarrow V' = 3\cos\varphi - \sin\varphi$$

$$y' = \left(\frac{U}{V} \right)' = \left(\frac{U'V - V'U}{V^2} \right)$$

$$= \frac{(-2\sin\varphi - \cos\varphi)(3\sin\varphi + \cos\varphi) - (3\cos\varphi - \sin\varphi)(2\cos\varphi - \sin\varphi)}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$= \frac{-7}{(3\sin\varphi + \cos\varphi)^2}$$

$$e. y' = \left(\frac{\tan x}{\sin x + 2} \right)' = \frac{(\tan x)'(\sin x + 2) - (\sin x + 2)' \cdot \tan x}{(\sin x + 2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\sin x + 2) - \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{(\sin x + 2)^2} = \frac{2 + \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x}{(\sin x + 2)^2 \cdot \cos^2 x}$$

$$= \frac{2 + \sin x - \sin x(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2} = \frac{2 + \sin^3 x}{\cos^2 x(\sin x + 2)^2}$$

$$f. y' = \left(\frac{\cot x}{2\sqrt{x} - 1} \right)' = \frac{(\cot x)'(2\sqrt{x} - 1) - (2\sqrt{x} - 1)' \cdot \cot x}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sin^2 x}(2\sqrt{x} - 1) - \frac{\cot x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x} - 1)^2} = \frac{\frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sin^2 x} - \frac{\cot x}{\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x} - 1)^2}$$

Bài 3 :

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3)f'(3)$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = \left(\sqrt{1+x} \right)' = \frac{(1+x)'}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow f'(3) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(3) = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Vậy } f(3) + (x-3)f'(3) = 2 + (x-3)\frac{1}{4} = 2 + \frac{x-3}{4}.$$

Bài 4 : Cho hai hàm số $f(x) = \tan(x)$ và $g(x) = \dots$

Cho hai hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Tính $\frac{f(0)}{g'(0)}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow g'(0) = 1$$

$$\text{Vậy } \frac{f(0)}{g'(0)} = 1$$

Bài 5 : Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết rằng:

$$f(x) = 3x + \frac{60}{x} - \frac{64}{x^3} + 5$$

Lời giải:

Ta có:

$$f'(x) = 3 - \frac{60}{x^2} + \frac{192}{x^4} = 3 - \frac{3x^4 - 60x^2 + 192}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^4 - 60x^2 + 192}{x^4} = 0 \quad (1)$$

Điều kiện: $x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow 3x^4 - 60x^2 + 192 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 16 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 4 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bài 6 : Cho $f_1(x) = \dots$

Cho $f_1(x) = \frac{\cos x}{x}$, $f_2(x) = x \sin x$. Tính $\frac{f_1'(1)}{f_2'(1)}$

Lời giải:

$$+f'(x) = \left(\frac{\cos x}{x} \right)' = \frac{-\sin x \cdot x - \cos x}{x^2}$$

$$\Rightarrow f_1'(1) = -\sin 1 - \cos 1$$

$$+f_1'(1) = (x \cdot \sin x)' = \sin x + \cos x \cdot x$$

$$\Rightarrow f_2'(1) = \sin 1 + \cos 1 = -(-\sin 1 - \cos 1)$$

$$\text{Vậy } \frac{f_1'(1)}{f_2'(1)} = -1.$$

Bài 7 : Viết phương trình tiếp tuyến của:

a. Hypebol $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2; 3)$

B. Đường cong $y = x^3 + 4x^2 - 1$

tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$

c. Của parabol $y = x^2 - 4x + 4$

tại điểm có tung độ $y_0 = 1$

Lời giải:

a. Ta có: $y' = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = -\frac{2}{(x-1)^2}$

$y'(2) = -2$ (là hệ số góc tiếp tuyến)

Vậy phương trình t^2 của hypebol $y = \frac{x+1}{x-1}$

tại điểm $A(2; 3)$ là:

$$y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 7$$

b. $y' = 3x^2 + 8x$

hệ số góc tuyến tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là:

$$y'(-1) = 3(-1)^2 + 8(-1) = -5$$

$$\text{Với } x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = (-1)^3 + 4(-1)^2 - 1 = 2$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y - 2 = -5(x + 1) \Rightarrow y = -5x - 3$$

c. Tại điểm có tung độ $y_0 = 1$ thì

$$x_0^2 - 4x_0 + 4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = 3 \end{cases}$$

Ta có: $y' = 2x - 4$

+ Với $x_0 = 1 \Rightarrow y'(1) = -2$,

phương trình tiếp tuyến là:

$$y - 1 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 3$$

+ Với $x_0 = 3 \Rightarrow y'(3) = 2$,

phương trình tiếp tuyến là:

$$y - 1 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y = 2x - 5$$

Bài 8 : Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó t được tính bằng giây (s) và S được tính bằng mét (m).

a. Tính vận tốc của chuyển động khi $t = 2s$.

b. Tính gia tốc của chuyển động khi $t = 3s$.

c. Tính gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu.

d. Tính vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải:

a. Ta có: $v(t) = S' = 3t^2 - 6t - 9$

Vận tốc của chuyển động khi $t = 2(s)$ là:

$$v_2 = S'(2) = 3.2^2 - 6.2 - 9 = -9 \text{ (m/s)}$$

b. Ta có: $a(t) = S'' = 6t - 6$

gia tốc của chuyển động khi $t = 3(s)$ là:

$$a_{(3)} = S''(3) = 18 - 6 = 12 \text{ m/s}^2$$

c. Ta có: $v(t) = S' = 3t^2 - 6t - 9 = 0$

$$\begin{cases} t = -1 < 0 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{cases}$$

Gia tốc tại thời điểm $t = 3s$ là:

$$a_{(3)} = S''(3) = 12 \text{ m/s}^2$$

vậy gia tốc tại thời điểm vận tốc triệt tiêu là 12 m/s^2

d. Ta có: $a(t) = S'' = 6t - 6 = 0 \Rightarrow t = 1$

\Rightarrow Vận tốc tại thời điểm $t = 1$ là:

$$v_{(1)} = S'(1) = 3 - 6 - 9 = -12 \text{ (m/s)}$$

Vậy vận tốc tại thời điểm gia tốc triệt tiêu là -12 (m/s) .

Bài 9 :

.Cho hai hàm số: $y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số đã cho tại giao điểm của chúng. Tính góc giữa hai tiếp tuyến kẻ trên.

Lời giải:

Phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm số là:

$$\frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Thay $x = 1$ vào trong hai hàm số ta có $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ giao điểm } M\left(1; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

*Hàm số: $y_1 = y = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và $y = -\frac{1}{x^2\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow y_1'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$$

*Hàm số: $y_2 = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_2' = \sqrt{2}x \Rightarrow y_2'(1) = \sqrt{2}$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y_2 = \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*Vì $y_1'(1).y_2'(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2} = -1$ nên hai tiếp tuyến

vuông góc với nhau và góc giữa hai tiếp tuyến 90° .

Bài 10 :

Với $g(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$; $g'(2)$ bằng:

- A.1
- B. -3
- C.-5
- D.0

Lời giải:

$$\text{Ta có: } g'(2) = \frac{2^2 - 2.2 - 3}{(2-1)^2} = \frac{-3}{1} = -3$$

Chọn đáp án B.

Bài 11 :

Nếu $f(x) = \sin^3 x + x^2$ thì $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ bằng:

- A.0
- B.1
- C.-2
- D.5

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3\sin^2 x \cos x + 2x$$

$$f'(x) = 3(2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x) + 2 \Rightarrow f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 5$$

Chọn đáp án D.

Bài 12 :

$$\text{Cho } h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$$

Tập nghiệm của phương trình $h''(x) = 0$ là:

- | | |
|--------------|-------------------|
| A. $[-1; 2]$ | B. $[-\infty; 0]$ |
| C. $\{-1\}$ | D. \emptyset |

Lời giải:

Ta có: $h'(x) = 15(x+1)^2 + 4$

$h''(x) = 30(x+1);$

$h''(x) = 0 \Leftrightarrow 30(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$

Chọn đáp án C.

Bài 13 :

Cho $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$

Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là:

A. \emptyset

B. $(0; +\infty)$

C. $[-2; 2]$

D. $(-\infty; +\infty)$

Lời giải:

Ta có: $f'(x) = x^2 + x + 1$

$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 \leq 0$

(bất phương trình vô nghiệm)

Chọn đáp án A.