

Bài 1 : Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất hai lần.

a. Hãy mô tả không gian mẫu.

b. Xác định các biến cố sau.

A: "Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo không bé hơn 10"

B: "Mặt 5 chấm xuất hiện ít nhất một lần".

c. Tính $P(A)$, $P(B)$.

Lời giải:

a. Không gian mẫu gồm 36 kết quả đồng khả năng xuất hiện, được mô tả như sau:

Ta có: $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$, trong đó i, j lần lượt là số chấm xuất hiện trong lần gieo thứ nhất và thứ hai, $n(\Omega) = 36$.

b. $A = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \Rightarrow n(A) = 6$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$B = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 5)\}$

$$\Rightarrow n(B) = 11 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

Bài 2 : Có 4 tấm bìa được đánh số từ 1 đến 4. Rút ngẫu nhiên 3 tấm.

a. Hãy mô tả không gian mẫu.

b. Xác định các biến cố sau:

A: "Tổng các số trên 3 tấm bìa bằng 8"

B: "Các số trên 3 tấm bìa là ba số tự nhiên liên tiếp"

c. Tính $P(A)$, $P(B)$.

Lời giải:

a. Không gian mẫu gồm 4 phần tử:

$$\Omega = \{(1, 2, 3); (1, 2, 4); (2, 3, 4); (1, 3, 4)\} \Rightarrow n(\Omega) = 4$$

b. Các biến cố:

$$+ A = \{1, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 3$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}$$

$$+ B = \{(1, 2, 3), (2, 3, 4)\} \Rightarrow n(B) = 2$$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Bài 3 : Một người chọn ngẫu nhiên hai chiếc giày từ bốn đôi giày cỡ khác nhau. Tính xác suất để hai chiếc chọn được tạo thành một đôi.

Lời giải:

4 đôi giày tương ứng với 8 chiếc, do đó số cách chọn hai chiếc giày từ 4 đôi giày là: $C_8^2 = 28$ (cách)

Đặt $P(A)$ là xác suất để chọn được hai chiếc để tạo thành một đôi trong 4 đôi:

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{C_8^2} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

Bài 4 : Gieo một con súc sắc cân đối và đồng nhất. giả sử con súc sắc xuất hiện mặt b chấm. Xét phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$. Tính xác suất sao cho:

- a. Phương trình có nghiệm
- b. Phương trình vô nghiệm
- c. Phương trình có nghiệm nguyên.

Lời giải:

Không gian mẫu khi gieo con súc sắc cân đối và đồng chất:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$$

Đặt A là biến cố: "con súc sắc xuất hiện mặt B chấm";

$$\text{Xét : } x^2 + bx + 2 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = b^2 - 8$$

a. Để phương trình (1) có nghiệm thì:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow b \geq 3$$

$$\Rightarrow A = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

b. Để phương trình (1) vô nghiệm thì:

$$\Delta < 0 \Rightarrow b \leq 2$$

$$\Rightarrow A = \{1, 2\} \Rightarrow n(A) = 2$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

c. Để phương trình (1) có nghiệm nguyên thì:

$$\Delta \in \mathbb{Z} \Rightarrow b^2 - 8 \in \mathbb{Z} \Rightarrow \text{thử } b=3,4,5,6 \text{ ta thấy } b=3 \text{ thỏa mãn} \Rightarrow n(A)=1$$

$$P(A) = 1/6$$

Bài 5 : Từ cỗ bài tú lơ khơ 52 con, rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn con. Tính xác suất sao cho:

a. Cả bốn con đều là át.

b. Được ít nhất là một con át.

c. Được hai con át và hai con K

Lời giải:

Lấy 4 cây từ 52 cây (không kể thứ tự) là một tổ hợp chập 4 của 52 phần tử. Vậy số trường hợp đồng khả năng có thể xảy ra:

$$n = C_{52}^4$$

a. Đặt A là biến cố 4 cây lấy ra đều là át. Ta phải tính P(A):

- Vì 4 cây lấy ra đều là át nên số trường hợp thuận lợi cho A là:

$$m_A = C_4^4 = 1$$

$$\text{vậy } P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{1}{C_{52}^4} \approx 0,0000037$$

b. + Đặt B là biến cố không có con át nào trong 4 con khi lấy ra

$$\text{Vậy } P(B) = \frac{C_{48}^4}{C_{52}^4}$$

+ Đặt C là biến cố có ít nhất một con át được lấy ra từ 4 con

$$\Rightarrow P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{48}^4}{C_{52}^4} = 0,28123$$

c. Đặt A_1 là biến cố rút ra được hai con át và hai con K.

=> Số biến cố thuận lợi cho biến cố A_1 là:

$$C_4^2 \cdot C_4^2$$

$$\Rightarrow P(A_1) = \frac{C_4^2 \cdot C_4^2}{C_{52}^4} \approx 0,000133.$$

Bài 6 : Hai bạn nam và hai bạn nữ được xếp ngồi ngẫu nhiên vào bốn ghế xếp thành hai dãy đối diện nhau. Tính xác suất sao cho:

a. Nam, nữ ngồi đối diện nhau.

b. Nữ ngồi đối diện nhau.

Lời giải:

a. Có 6 cách xếp 2 nam, 2 nữ (không phân biệt hai nam với nhau, hai nữ với nhau). Có 4 cách xếp nam nữ ngồi đối diện nhau. Xác suất để nam, nữ ngồi đối diện nhau là:

$$P(A) = 4/6 = 2/3$$

b. Xác suất để nữ ngồi đối diện nhau (hai nam cũng đối diện nhau) là:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 2/3 = 1/3$$

Bài 7 : Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 6 quả trắng, 4 quả đen. Hộp thứ hai chứa 4 quả trắng, 6 quả đen. Từ mỗi hộp lấy ngẫu nhiên một quả. Kí hiệu:

A là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ nhất trắng"

B là biến cố: "Quả lấy từ hộp thứ hai trắng"

a. Xem xét A và B có độc lập không?

b. Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu.

c. Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra khác màu.

Lời giải:

a. Số phần tử của không gian mẫu là: $10 \times 10 = 100$

Số trường hợp lấy ra một quả cầu trắng ở hộp thứ nhất là 6

Số trường hợp lấy ra 1 quả cầu ở hộp thứ hai là 10. Số trường hợp lấy ra quả cầu ở hộp thứ nhất trắng kết hợp với một quả cầu bất kỳ ở hộp thứ hai là $6 \times 10 = 60$

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Số trường hợp lấy ra quả cầu thứ hai trắng với một quả cầu bất kỳ ở hộp thứ nhất là $4 \times 10 = 40$

Biến cố A.B là lấy ra quả cầu ở hộp thứ nhất trắng và quả cầu ở hộp thứ hai là trắng:

$$P(B) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad P(AB) = \frac{24}{100} = \frac{6}{25}$$

$$\text{Ta có: } P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = P(AB)$$

Vậy A và B là độc lập

b. Gọi A_1 là biến cố hai quả cầu lấy ra cùng trắng.

A_2 là biến cố hai quả cầu lấy ra cùng đen

Rõ ràng A_1 và A_2 xung khắc $A_1 \cap A_2$ là biến cố hai quả cầu lấy ra cùng màu.

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2)$$

$$= P(A_1) + P(A_2) = \frac{6 \cdot 4}{100} + \frac{4 \cdot 6}{100} = 0,48$$

c. Gọi B là biến cố lấy ra hai quả cầu khác màu.

$$P(B) = P(\bar{A}) = 1 - 0,48 = 0,52$$