Câu hỏi 1 (trang 145 SGK Giải tích 12): Định nghĩa sự đơn điệu (đồng biến, nghịch biến) của một hàm số trên một khoảng.

Lời giải:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên K, hàm số f(x):

Đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên K gọi là đơn điệu trên K.

Câu hỏi 2 (trang 145 SGK Giải tích 12): Phát biểu các điều kiện cần và đủ để hàm số f(x) đơn điệu trên một khoảng.

Lời giải:

Cho hàm số y = f(x) có đạo hàm trên K

Nếu $f'(x) > 0, x \in K, f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số thì f(x) đồng biến trên K.

Nếu $f'(x) < 0, x \in K, f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số f(x) nghịch biến trên K.

Câu hỏi 3 (trang 145 SGK Giải tích 12): Phát biểu các điều kiện đủ để hàm số f(x) có cực trị (cực đại cực tiểu) tại điểm x_o

Lời giải:

Điều kiện để hàm có cực trị:

Định lí 1: Cho hàm số y = f(x) liên tục trên $K = (x_0 – h; x_0 + h), h > 0$ và có đạo hàm trên K hoặc trên $K \setminus \{x_0\}$, nếu:

- $f'(x) > 0$ trên $(x_0 – h; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực đại của f(x).

- $f'(x) < 0$ trên $(x_0 – h; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; x_0 + h)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của f(x).

Câu hỏi 4 (trang 145 SGK Giải tích 12): Nêu sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

Lời giải:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2: Xét sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên:

+ Tìm đạo hàm f'(x)

+ Tìm các điểm mà tại đó f'(x) bằng không hoặc không xác định

+ Xét dấu của đạo hàm f'(x) và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

- Tìm cực trị

- Tìm giới hạn vô cực và tiệm cận (nếu có)

- Lập bảng biến thiên.

Bước 3: Vẽ đồ thị hàm số.

Câu hỏi 5 (trang 145 SGK Giải tích 12): Nêu định nghĩa và các tính chất cơ bản của loogarit.

Lời giải:

Định nghĩa: Cho các số a và b với a≠ 1.

Số α thoải mãn đăng thức $a^{\alpha} = b$ thì gọi là

logarit cơ số a của b, kí hiệu $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b$$

* Các tính chất : với a> 0, a≠ 1 và b > 0, ta có:

$\log_a 1 = 0; \log_a a$

$a^{\log_a b} = b; \log_a a^a = a$

$a = \log_a b \Leftrightarrow a^a = b$

Câu hỏi 6 (trang 145 SGK Giải tích 12): Phát biểu định lí về quy tắc logarit, công thức đổi cơ số.

Lời giải:

• Quy tắc tính logarit

Quy tắc 1: với $a, b_1, b_2 > 0; a \neq 1, ta\ có$:

$$\log_a b_1 b_2 = \log_a b_1 + \log_a\ b_2$$

Quy tắc 2: với $a, b_1, b_2 > 0; a \neq 1, ta\ có$:

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a\ b_2$$

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

Quy tắc 3: với $a, b_1, b_2 > 0; a \neq 1, a \in R ta\ có$:

$$\log_a b^a = a \log_a b$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{a} \log_a b$$

• Đổi cơ số

Cho a, b, c > 0, $a \neq 1, c \neq 1,$

ta có: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_a b} (b \neq 1)$$

$$\log_{a^a} b = \frac{1}{a} \log_a b$$

Câu hỏi 7 (trang 145 SGK Giải tích 12): Nêu tính chất của hàm số mũ, hàm số logarit, mối liên hệ giữa đồ thị của hàm số mũ cà hàm số logarit cùng cơ số.

Lời giải:

1. Hàm số mũ

Cho số a > 0, a ≠ 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

Khảo sát:

* D = R.

* Nếu:

- a > 1: hàm số luôn đồng biến

- 0 < a < 1: hàm số luôn nghịch biến

* Đồ thị luôn đi qua hai điểm (0; 1) và (1; a) có tiệm cận ngang là trục Ox.

2. Hàm Logarit

Cho số a > 0, a ≠ 1 . Hàm số

$y = \log_a x$

được gọi là hàm logarit cơ số a.

Khảo sát:

* D = (0;+∞)

* Nếu:

- a > 1: Hàm số luôn đồng biến trên D

- 0 < a < 1: hàm số luôn nghịch biến

* Đồ thị luôn đi qua hai điểm (1; 0) và (a; 1) có tiệm cận đứng là trục Oy.

• Liên hệ giữa đồ thị của hàm số mũ và hàm số logarit cùng cơ số: Đồ thị của hàm số mũ và đồ thị của hàm số logarit đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

Câu hỏi 8 (trang 145 SGK Giải tích 12): Nêu định nghĩa và các phương pháp tính nguyên hàm.

Lời giải:

Nguyên hàm

Cho hàm số f(x) xác định trên K (k là nửa khoảng hay đoạn của trục số). Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nếu F’(x) = f(x) với mọi x thuộc K.

Phương pháp tính nguyên hàm

* Đổi biến số:

- Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và u(x) là

hàm số có đạo hàm liên tục thì:

$\int f(ux)u'(x)dx = F\big(u(x)\big) + C$

*Tính nguyên hàm từng phần"

- Nếu hai hàm số u = u(x) và v = v(x)

có đạo hàm liên tục trên K thì:

$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx$

Hay $\int udv = uv - \int vdv.$

Câu hỏi 9 (trang 145 SGK Giải tích 12): Nêu định nghĩa và các phương pháp tính tích phân.

Lời giải:

• Định nghĩa

Cho hàm số y = f(x) liên tục trên [a; b] , F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a; b]. Hiệu số F(b) – F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số f(x)

kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx.$

Ta có: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

• Phương pháp tính tích phân

a) Đổi biến số:

Định lí 1: Cho hàm số f(x) liên tục trên [a; b]. Giả sử hàm số x = φ(t) có đạo hàm liên tục trên đoạn [α;β] sao cho φ(α) = a; φ(β) = βvà a ≤ φ(t) ≤ b với mọi t ∈ [α;β]. Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi' dt$$

b) Tích phân từng phần

Nếu u = u(x) và v = v(x) là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên đoạn [a; b] thì:

$$\int_a^b u(x) \perp' (x)dx = u(x) \perp (x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x) \perp (x)dx$$

Viết cách khác " $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$

Câu hỏi 10 (trang 145 SGK Giải tích 12): Nhắc lại định nghĩa số phức, số phức liên hợp, mô đun của số phức. Biểu diễn hình học của số phức.

Lời giải:

1. Số phức

Mỗi biểu thức dạng a + bi, trong đó: a, b ∈ R;i^2= -1 được gọi là số phức. Trong đó a được gọi là phần thực, b gọi là phần ảo, số i là đơn vị ảo.

2. Mô đun

Cho số phức z = a + bi, được biểu diễn bởi điểm M(a;b) trên tọa độ Oxy. Ta gọi mô đun của số phức z, kí hiệu là |z| là đọ dài của vectơ OM.

Vậy $|z| = |a+bi| = \overrightarrow{OM} = \sqrt{a^2 + b^2}$

3. Số phức liên hợp

Cho số phức z = a + bi, ta gọi a – bi là số phức liên hợp của z

Kí hiệu $\bar{z}$.

$\bar{z} = a - bi$

Bài tập

Bài 1 (trang 145 SGK Giải tích 12): Cho hàm số $f(x)=ax^2-2(a+1)x+a+2$ ($a \neq 0$)

a) Chứng tỏ rằng phương trình f(x)=0 luôn có nghiệm thực. Tính các nghiệm đó.

b) Tính tổng S và tích P của các nghiệm của phương trình f(x) =0. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của S và P theo a.

Lời giải:

a)Với mọi $a \neq 0$ phương trình f(x) =0

là phương tình bậc hai có biểu thức

$\Delta = (a+1)^2 - a(a+2) = 1 > 0$

nên phương trình luôn có 2 nghiệm $x_1 = 1$ $và$ $x_2 = \frac{a+2}{a}$.

b)Tổng và tích các nghiệm của phương trình f(x) = 0

lần lượt là: $S = x_1 + x_2 = 1 + \frac{a+2}{a} = \frac{2(a+1)}{a}$,

$P = x_1 . x_2 = \frac{a+2}{a}$

*Khảo sát hàm số S(a), ta có:

Tập xác định D =R \{0}

$- \lim_{x \to 0} S(a) = \infty$

⇨ Tiệm cận đứng là a= 0

$- \lim_{x \to \pm\infty} S(a) = 2$

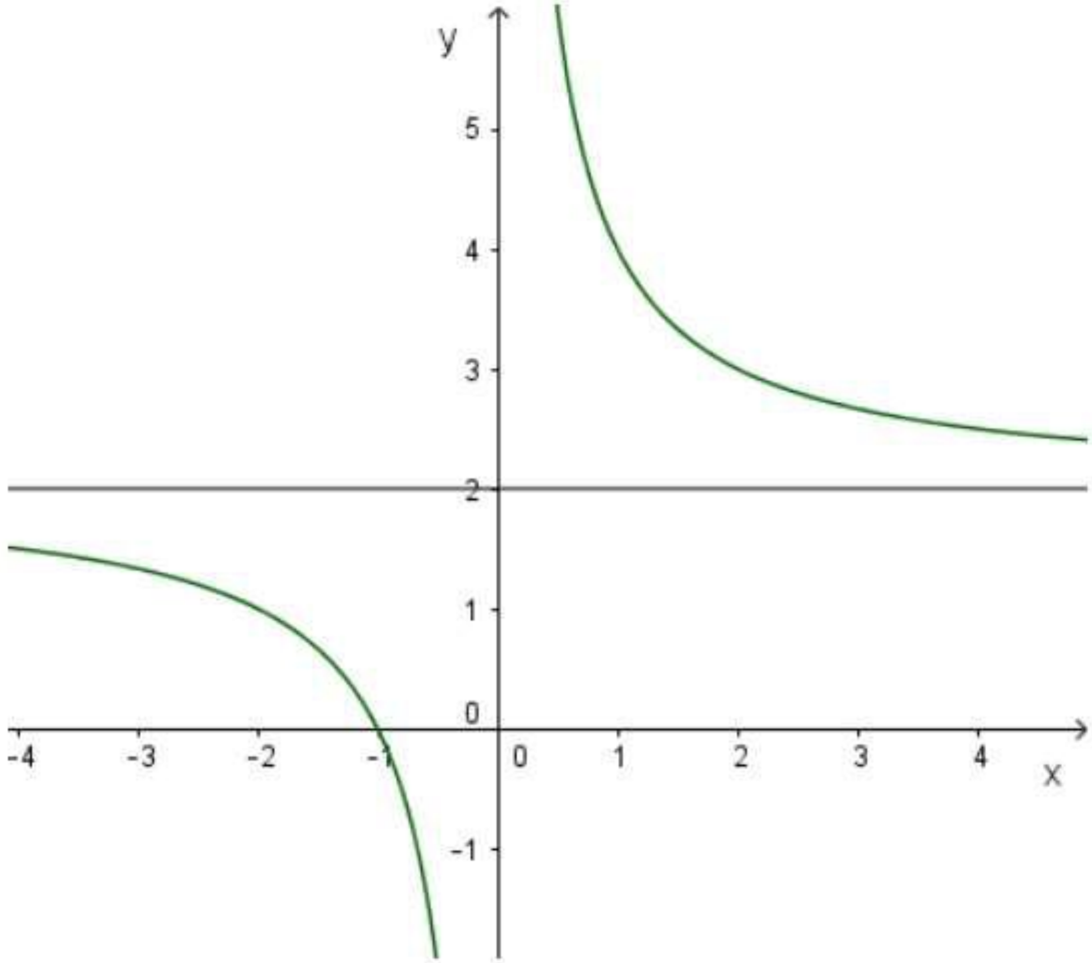
⇨ $Tiệm\ cận\ ngang\ là\ S = 2$

$S'(a) = -\frac{2}{a^2} < 0\ \forall a \neq 0$

Bảng biến thiên:

x	-∝	0	+ ∝
y’	-		-
y	2 ↘ -∝		+∝ ↘ 2

Đồ thị (hình thang trên).



*Khảo sát hàm số P(a) = $\frac{a+2}{a}$, ta có:

Tập xác định D = R \{0}

$\lim_{x\to 0^+} P = +\infty$; $\lim_{x\to 0^-} P = -\infty$ => $a = 0$ là tiệm cận đứng

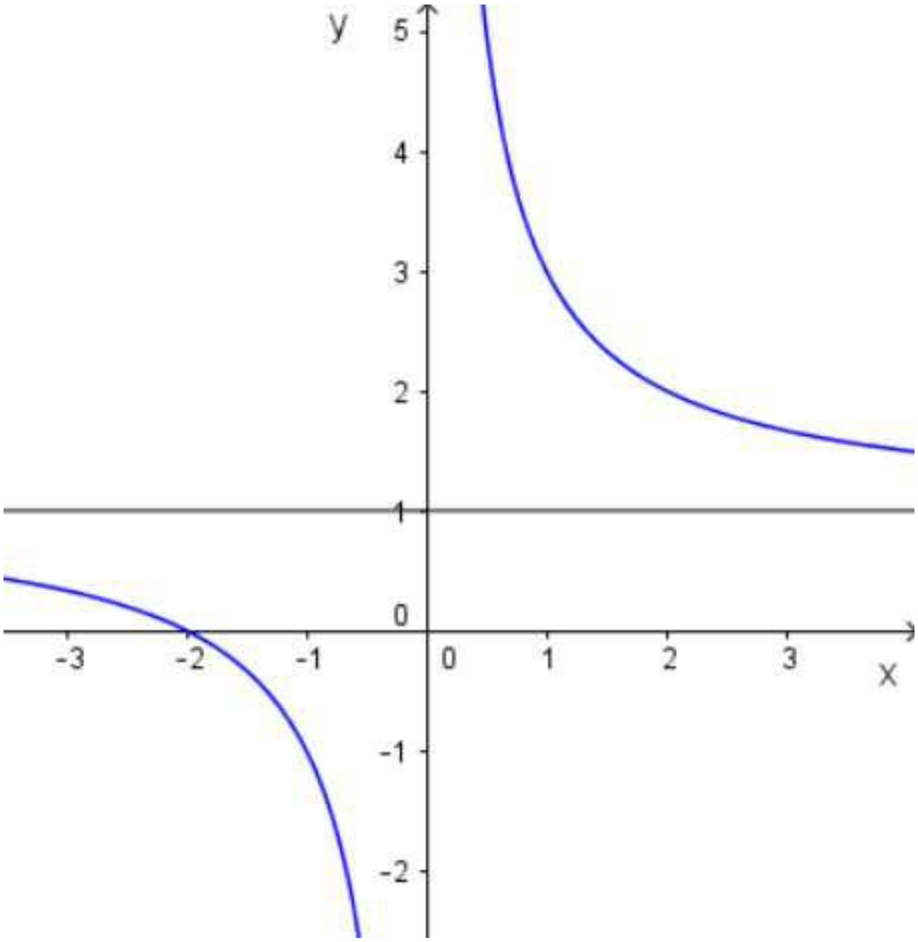
$\lim_{x\to \pm\infty} P = 1$ => $y = 1$ là tiệm cận ngang

$$P'(a) = -\frac{2}{a^2} < 0 \; \forall a \neq 0$$

Bảng biến thiên:

x	-∝	0	+ ∝
y'	-		-
y	1 ↘ -∝		+∝ ↘ 1

Đồ thị (hình trên).



Bài 2 (trang 145 SGK Giải tích 12): Cho hàm số

Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + (a+3)x - 4$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi a = 0.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C) và các đường thẳng

$y = 0; x = -1; x = 1$

Lời giải:

a) Với a = 0 ta có: $y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x - 4$

Tập xác định D = R

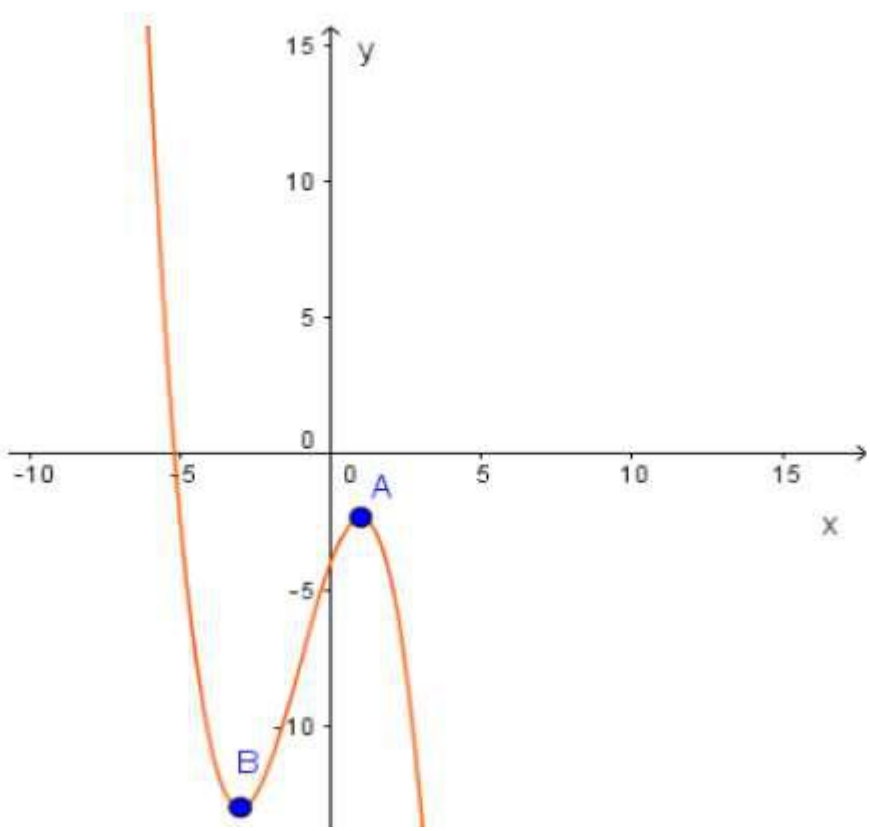
$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} y = -\infty$

$y' = -x^2 - 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ và $x = 1$

Bảng biến thiên:

x	-∝		-3		1		+ ∝
y'		-	0	+	0	-	
y	+ ∝ ↘		-13 ↗		$-\frac{7}{3}$ ↘		−∝

Đồ thị.



b) Diện tích hình phẳng:

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{3}x^3 = x^2 - 3x + 4\right) dx$$

$$= \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 4\right)$$

$$= \frac{26}{3}\ (đvdt)$$

Bài 3 (trang 146 SGK Giải tích 12): Cho hàm số y = $x^3 + ax^2 + bx+1$

a) Tìm a và b để đồ thị của hàm số đi qua hai điểm: A(1;2)và B(-2;-1).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số ứng với các giá trị tìm được của a và b.

c) Tính thể tích vật thể tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường y = 0, x = 0, x = 1 và đồ thị (C) xung quanh trục hoành.

Lời giải:

a) Đồ thị đi qua A(1; 2) và B(2; -1) khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} 2 = 2 + a + b \\ -1 = -8 + 4a - 2b + 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1; b = -1$$

b) Khảo sát hàm số: $y = x^3 + x^2 - x + 1$, ta có:

Tập xác định D = R

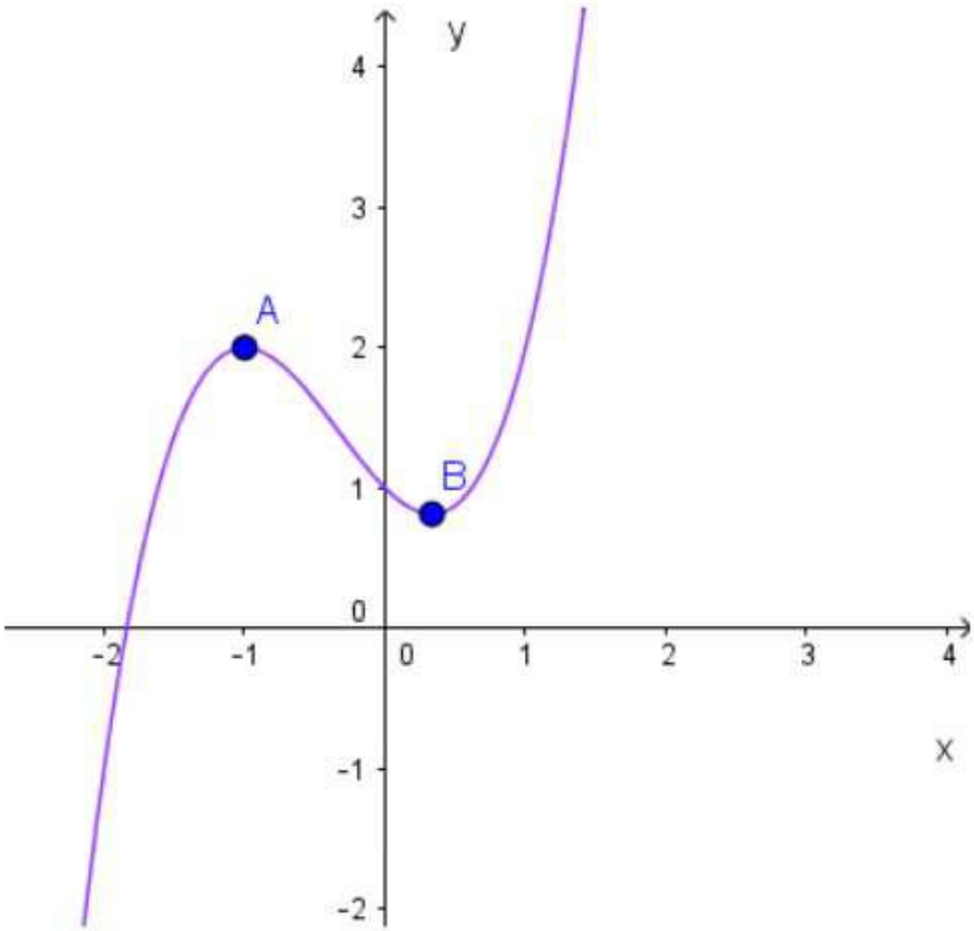
$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty,\ \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

$$y' = 3x^3 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ và } x = \frac{1}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	-∝		1		$\frac{1}{3}$		+∝
y'		+	0	-	0	+	
y			2				+∞
	−∝				$\frac{22}{27}$		

Đồ thị (hình bên).



c) Thể tích của vật thể là:

$$V = \pi \int_0^1 [x^3 + x^2 - x + 1]^2 dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + x^3 - x^2 - x \right) \Big|_0^1$$

$$= 134 \frac{\pi}{105} \text{ (đ}vdt)$$

Bài 4 (trang 146 SGK Giải tích 12): Xét chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình:

$$s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + \frac{t^2}{2} - 3t$$

Trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét.

a) Tính v(2), a(2), biết v(t), a(t) lần lượt là vận tốc và gia tốc chuyển động đã cho.

b) Tìm thời điểm t mà tại đó vận tốc bằng 0.

Lời giải:

Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm ta có:

$v(t)=s'(t)=t^3-3t^2+t-3$

$v(2)=2^3-3.2^2+2-3=-5$ (m/s)

$a(t)=v'(t)=s''(t)=3t^2-6t+1$

$a(2)=3.2^2-6.2+1=1$ (m/s^2)

$v(t)=t^3-3t^2+t-3=0$

$(t-3)(t^1+1)=0 \Rightarrow t = 3$

Vậy thời điểm $t_o=3s$ thì vận tốc bằng 0.

Bài 5 (trang 146 SGK Giải tích 12): Cho hàm số $y = x^4 + a^4 + b$

a) Tính a, b để hàm số cực trị bằng 3/2 khi x =1.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho khi:

a=-1/2,b=1

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại các điểm có tung độ bằng 1.

Lời giải:

a) Ta có: $y' = 4x^3 + 2ax = 2x(2x^2 + a) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ *nếu* $a < 0$

Hàm số đạt cực trị tại $x = 0, x = \pm\sqrt{-\frac{a}{2}}$ *nếu* $a < 0$

Hàm số có cực trị $\frac{3}{2}$ khi x = 1, khi đó ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{-\frac{a}{2}} = 1 \\ 1 + a + b = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

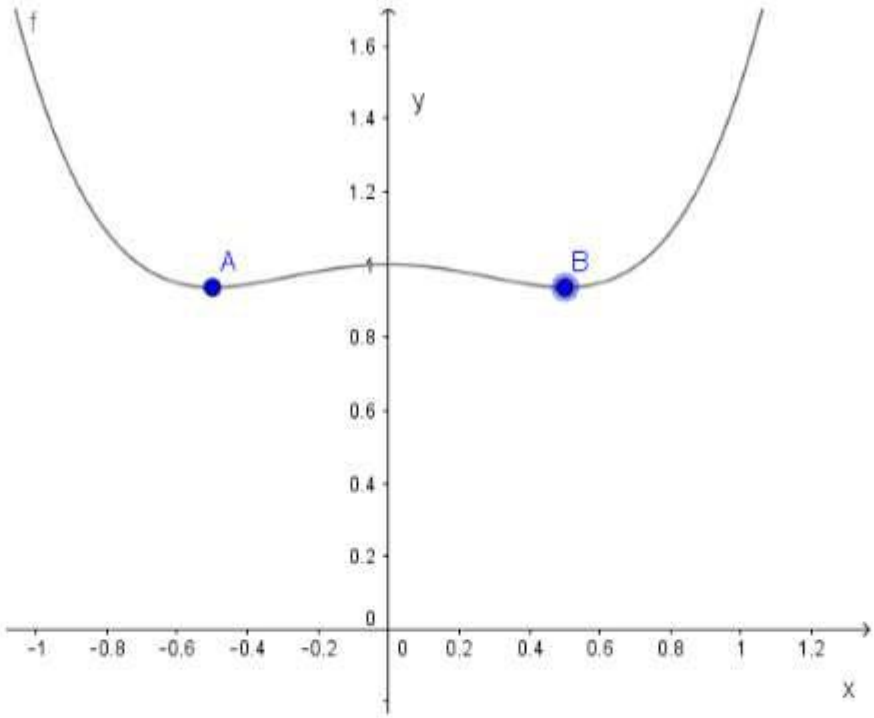
b) Với $a = -\frac{1}{2}, b = 1$. Ta có: $y = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$

Khi đó $y' = 4x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ v $x = \pm\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên:

x	-∝		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		+ ∝
y’		-	0	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↘	$\frac{15}{16}$	↗	1	↘	$\frac{15}{16}$	↗	$+\infty$

Đồ thị (hình dưới).



c) Ta có: $y_0 = f(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 + 1 = 1$

$\Leftrightarrow x_0^4 - \frac{1}{2}x_0^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_0^2\left(x_0^2 - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Do đó, ba điểm tiếp là (0; 1), $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right), (-\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$

Ta có các phương trình tiếp tuyến sau:

*y = 1

$*y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1\ hay\ y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$

$*y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1\ hay\ y = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$

Bài 6 (trang 146 SGK Giải tích 12):

Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+m-1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 2.

b) Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thi (C) tại điểm M có hoành độ a ≠ -1.

Lời giải:

a) Với m = 2ta có: $y = \frac{x-2}{x+1}$

D = R \{-1}

$\lim\limits_{x\to -1^-} y = +\infty, \lim\limits_{x\to 1^+} y = -\infty$

⇨ x = -1 là tiệm cận đứng

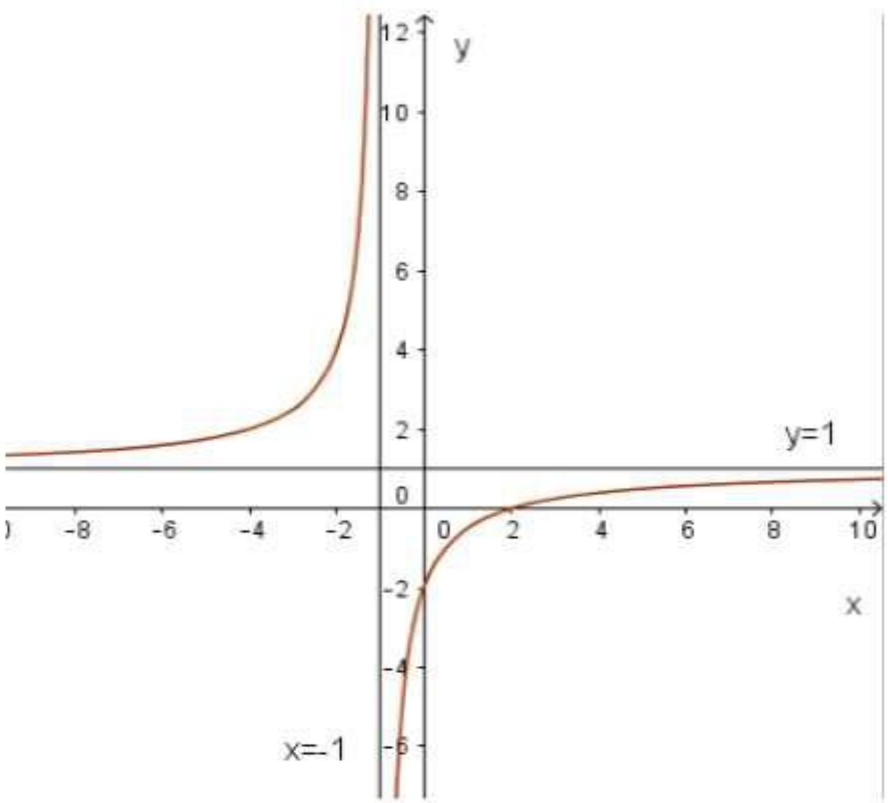
⇨ $\lim\limits_{x\to =\pm\infty} y = 1$ => y = 1 là tiệm cận ngang

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0\ \forall x \neq -1$$

Bảng biến thiên:

x	-∝	-1	+ ∝
y'			-
y	1 ↗ +∞		-∞ ↗ 1

Đồ thị (hình bên).



b) Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $x = a \neq -1$ là:

$y = \frac{3}{(a+1)^2}[x-a] + \frac{a-2}{a+1}$

Bài 7 (trang 146 SGK Giải tích 12): Cho hàm số

Cho hàm số $y = \frac{2}{2-x}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm giao điểm của (C) và đồ thị hàm số $y=x^2+1$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại mỗi giao điểm.

c) Tính thể tích vật tròn xoay thu được khi hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và các đường thẳng y = 0; x = 1 xung quanh trục Ox.

Lời giải:

a) Xét hàm số $y = \frac{2}{2-x}$, ta có:

D = R \ {2}

$\lim_{x \to 2^-} y = +\infty$, $\lim_{x \to 2^+} y = -\infty$ => tiệm cận đứng là x = 2

$\lim_{x \to \pm\infty} y = 0$ => tiệm cận ngang là y = 0

$$y' = \frac{2}{(2-x)^2} > 0 \; \forall x \neq 2$$

Bảng biến thiên:

x	-∞	2	+ ∞
y’	+		+
y	0 ↗ +∞		-∞ ↗ 0

Đồ thị (hình bên).

b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong:

$\frac{2}{2-x} = x^2 + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2x^{2+x=0} \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = 0$ và $x = 1$

Tọa độ các giao điểm A(0;1) B(1; 2)

Phương trình tiếp tuyến của C tại A và B lần lượt là:

$y = \frac{1}{2}x + 1;\ \ y = 2x$

c) Thể tích khối tròn xoay là:

$V = \pi \int_0^1 \left(\frac{2}{2-x}\right)^2 dx = \pi \left(\frac{4}{2-x}\right)\Big|_0^1 = 2\,\pi\ (đvdt)$

Bài 9 (trang 147 SGK Giải tích 12): Giải các phương trình sau:

a) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$

b) $(3^x + 2^x)(3^x + 3.2^x) = 8.6^x$

c) $\log_{\sqrt{3}}(x-2).\log_5 x = 2\log_3(x-2)$

d) $log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 = 0$

Lời giải:

a) $13^{2x+1} - 13^x - 12 = 0$

Đặt $13^x = t > 0$ ta được:

$\begin{cases} 13t^2 - t - 12 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ t= 1 $\Leftrightarrow$ x = 0

b) $(3^x + 2^x)(3^x + 3.2^x) = 8.6^x$

$\Leftrightarrow 3^{2x} + 3.2^{2x} + 4.2^x.3^x = 8.6^x$

$\Leftrightarrow 3^{2x} + 3.2^{2x} - 4.6^x = 0$

Chia hai vế cho $6^x > 0$ ta được:

$\left(\frac{3}{2}\right)^x + 3\left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} t + \frac{3}{t} - 4 = 0 \\ t = \left(\frac{3}{2}\right)^x > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3$ và $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1$

$\Rightarrow x = 0$ và $x = \frac{1}{\log_3 2}$

c) $\log_{\sqrt{3}}(x-2).\log_5 x = 2\log_3(x-2)$

$\Leftrightarrow 2\log_3(x-2).\log_5 x = 2\log_3(x-2)$

$\Leftrightarrow \log_3(x-2)\,[\log_5 x - 1] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3(x-2)=0\\ \log_5 x - 1 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=5\end{array}\right.$

d) Đặt $\log_2 x = t$ ta được:

$t^2 - 5t + 6 = 0$ => t= 3 v t= 2

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = 3\\ \log_2 x = 2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2^3 = 8\\ x = 2^2 = 4\end{array}\right.$

Bài 8 (trang 147 SGK Giải tích 12): Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ trên đoạn $\left[-2;\frac{5}{2}\right]$

b) $f(x) = x^2 lnx$ trên đoạn $[1;e]$

c) $f(x) = xe^{-x}$ trên nửa khoảng $[0;+\infty)$

d) $f(x) = 2sinx + sin2x$ trên đoạn $[0;\frac{3}{2}\pi]$

Lời giải:

a) Tập xác định D = R

Ta có: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow$ x = -1 v x = 2

$f(-2) = -3; f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{33}{2}; f(-1) = 8; f(2) = -19$

$\min\limits_{[-2;\frac{5}{2}]} f(x) = \min\left\{-3; -\frac{33}{2}; 8; -19\right\} = -19$ tại x = 2

$\max\limits_{[-2;\frac{5}{2}]} f(x) = max\left\{-3; -\frac{33}{2}; 8; -19\right\} = 8$ tại x = -1

b) Tập xác định D = $(0;+\infty)$

$f'(x) = x(2lnx + 1) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

$f'(x) > 0\ với\ x > \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Vậy $f'(x) > 0\ với\ x \in [1;e]$

Hàm số đồng biến trên [1;e] nên ta có:

$\min\limits_{[1;e]} f(x) = f(1) = 0; \max\limits_{[1;e]} f(x) = f(e) = e^2$

c) Tập xác định: D = R

$f'(x) = e^{-x}[1-x] = 0 \Leftrightarrow$ x = 1

$f'(x) >$ *với* $x \in (-\infty; 1)$*và* $f'(x) < 0$ *với* $x \in (1; +\infty)$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Suy ra $\min\limits_{[0;+\infty]} f(x) = f(0) = 0; \max\limits_{[0;+\infty)} f(x) = f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$

d) Tập xác định D= R, $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right] \subset D$

$f'(x) = 2cosx + 2cos2x = 0 \Leftrightarrow cos2x = -cosx = \cos(x+\pi)$

$\Leftrightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2}{3}\pi$

Trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\pi\right]$, $f'(x)$ bằng 0 tại $x = 0, x = \frac{\pi}{3}$ *và* $x = \pi$

Ta có: $f(0) = f(\pi) = 0; f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}; f\left(3\frac{\pi}{2}\right) = -2$

Suy ra $\min\limits_{[0;\frac{3}{2}\pi]} f(x) = -2; \max\limits_{\left[0;\frac{3}{2}\pi\right]} f(x) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 10 (trang 147 SGK Giải tích 12): Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{2^x}{3^x - 2^x} \le 2$

b) b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1$

c) $\log^2 x + 3logx \ge 4$

d) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \le \frac{1}{4}$

Lời giải:

a)Ta có: $3^x - 2^x = 0$ <=> x =0

$3^x - 2^x < 0 \text{ với } x < 0$

$3^x - 2^x > 0 \text{ với } x > 0$

Do bất phương trình đã cho tương đương với:

$$\frac{2^x}{3^x-2^x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3.2^x-2.3^x}{3^x-2^x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3t-2}{1-t} \leq 0 \\ t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0 \end{cases} \quad (1)$$

Lập bảng xét dấu của phân thức $\frac{3t-2}{1-t}$ trên 0; $+\infty$)

x	0		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
3t - 2		-	0	+		+	
1 – t		+		+	0	-	
$\frac{3t-2}{1-t}$		-	0		||	-	

Từ bảng xét dấu suy ra các nghiệm của phương trình (1) là:

$0 < \frac{2^x}{3} \leq \frac{2}{3} \text{hoặc } \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ hoặc } x < 0$

Tập nghiệm của bất phương trình là:

$(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > \left(\frac{1}{2}\right)^0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2-1) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > 1 \\ \sqrt{2} < x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$

c) $\log^2 x + 3logx \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log^2 x + 3logx - 4 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} logx \leq -4 \text{ và } logx \geq 1 \\ x > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (0; 10^{-4}] \cup [10; +\infty)$

d) $\frac{1-\log_4 x}{1+\log_2 x} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\log_2 x}{1+\log_2 x} - \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{31-t}{1+t} \leq 0 \\ t = \log_2 x \end{cases}$

$\Leftrightarrow \log_2 x < -1 \text{ hoặc} \log_2 x \geq 1$

$\Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup [2; +\infty)$

Bài 11 (trang 147 SGK Giải tích 12): Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần:

a) $\int_1^{e^4} \sqrt{x} lnx dx$

b) b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2 x} dx$

c) $\int_0^{\pi} (\pi - x) sinxdx$

d) d$\int_{-1}^{0} (2x + 3)e^{-x} dx)$

Lời giải:

a) Đặt $u = lnx, dv = \sqrt{x}dx => du = \frac{1}{x}dx, v = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}$

$\int_1^{e^4} \sqrt{x} lnxdx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}lnx\Big|_1^{e^4} - \frac{2}{3}\int_1^{e^4} x^{\frac{1}{2}}dx$

$= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(lnx - \frac{2}{3}\right)\right]\Big|_1^{e^4} = \frac{20e^6+4}{9}$

b) Đặt $u = x, dv = \frac{dx}{\sin^2 x} => du = dx, v = -cotx$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{sin2x} = -cotx|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} cotxdx$

$= [-xcotx + \ln|sinx|]|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi\frac{\sqrt{3}}{6} + ln2$

c) $\int_0^{\pi} (\pi - x) sinxdx = \int_0^{\pi} (x - \pi) d(cosx)$

$= (x - \pi)cos|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} cosxdx = \pi - sinx|_0^{\pi} = \pi$

d) $\int_{-1}^{0} (2x + 3)e^{-x} dx = -\int_{-1}^{0} (2x + 3)d(e^{-x})$

$= (2x + 3)e - x|_{-1}^{0} - 2\int_{-1}^{0} e^{-x}dx$

$= e - 3 - [2e^{-x}]|_{-1}^{0} = 3e - 5$

Bài 12 (trang 147 SGK Giải tích 12): Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{24}} \tan\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) dx$ (đặt $u = \cos(\frac{\pi}{3} - 4x)$)

b) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{9+25x^2}$ (đặt $x = \frac{3}{5}tant$))

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x cos^4 x dx$ (đặt u = cosx)

d) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tanx}}{\cos^2 x} dx$ (đặt $u = \sqrt{1 + tanx}$

Lời giải:

a) Đặt $u = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) => du = 4\sin\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx$

$x = 0 => u = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{24} => u = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\int_0^{\frac{\pi}{24}} \tan\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)dx = \frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln|u|\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{8}ln3$

b) Đặt $x = \frac{3}{5}tant => dx = \frac{3}{5}\frac{dt}{\cos^2 t}$

$x = \frac{\sqrt{3}}{5}; tant = \frac{\sqrt{3}}{3} => t = \frac{\pi}{6};$

$x = \frac{3}{5} => t = \frac{\pi}{4}$

$\int_{\frac{\sqrt{3}}{5}}^{\frac{3}{5}} \frac{dx}{9+25x^2} = \frac{3}{45}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{(1+2tan2x)cos2t}$

$= \frac{3}{45}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{3}{45}t\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{180}$

c) Ta có: $\cos^4 xsin^3x = sinx(1 - \cos^2 x)\cos^4 x$

Đặt u = cosx

$=>du = -sinxdx; x = 0 => u = 1; x = \frac{\pi}{2} => u = 0$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 xcos^4xdx = -\int_1^0 (1 - u^2)u^4du = \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5}\right)\Big|_1^0 = \frac{2}{35}$

d) Đặt $u = \sqrt{1 + tanx} => du = \frac{dx}{2\cos^2 x\sqrt{1+tanx}}$

⇨ $\frac{dx}{\cos^2 x} = 2udu;$

$x = -\frac{\pi}{4} => u = 0, x = \frac{\pi}{4} => u = \sqrt{2}$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tanx}}{\cos^2 x}dx = 2\int_0^{\sqrt{2}} u^2du = \frac{2u^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{2}} = 4\frac{\sqrt{2}}{3}$

Bài 13 (trang 148 SGK Giải tích 12): Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = x^2 + 1, x = -1, x = 2$ và các trục hoành.

b) $y = lnx, x = \frac{1}{e}; x = e$ và trục hoành.

Lời giải:

a) $S = \int_{-1}^{2}(x^2 + 1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{2} = 6$

b) $S = \int_{\frac{1}{e}}^{e}|lnx|dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} lnxdx + \int_1^e lnxdx$

$= x(1 - lnx)|_{\frac{1}{e}}^{1} + x(lx - 1)|_1^e = 2 - \frac{2}{e}$