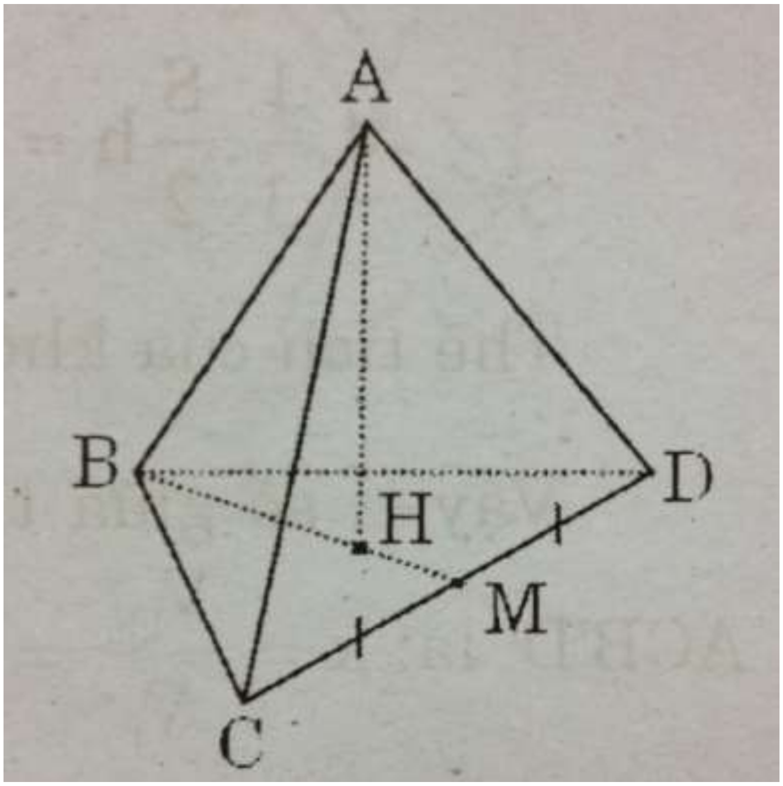
Bài 1 : Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh a

Lời giải:



Gọi tứ diện có cạnh a là ABCD.

Từ a vẽ đường cao AH. Ta có: $H \in (BCD)$

Vì ABCD là tứ diện đều nên:

$\Delta ABH = \Delta ACH = \Delta ADH$

$\Rightarrow HB = HC = HD$

Suy ra H là trọng tậm cũng đồng thời là tâm của tam giác đều BCD.

Khi đó $BH = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.a = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

và $AH = \sqrt{a^2 - BH^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$

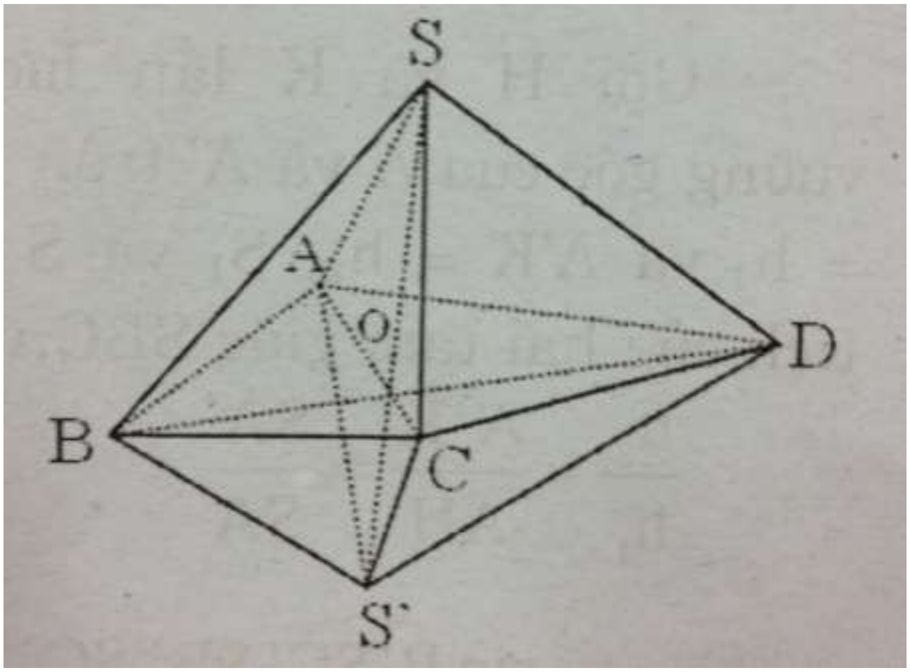
Vậy thể tích tứ diện đều ABCD cạnh bằng a là:

$$V = \frac{1}{3}.S_{\Delta BCD}.AH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Bài 12. Tính thể tích khối bát diện đều cạnh a.

Bài 2 : Tính thể tích khối bát diện đều cạnh a.

Lời giải:



Khối bát diện đều gồm hai khối chóp tứ giác đều bằng nhau. Trong hình bên, SO là chiều cao của khối chóp S.ABCD.

Khi đó $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2}$

Vì bát diện đều có cạnh a nên

$$SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

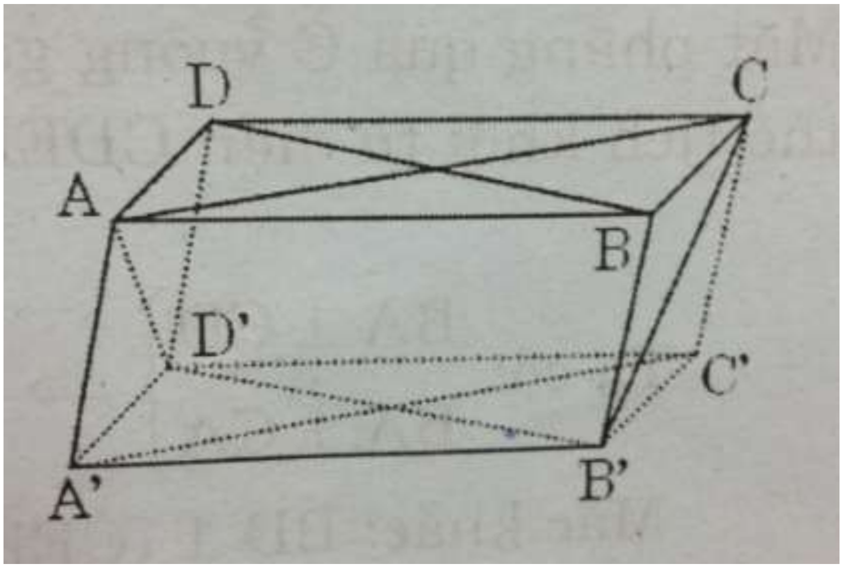
Vậy thể tích của khối tám mặt đều cạnh a là:

$$V = 2.\, V_{S.ABCD} = 2.\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO$$

$$= \frac{2}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

Bài 3 : Cho khối hộp ABCD.A'B'C'D'. Tính tỉ số giữa thể tích của khối hộp đó và thể tích của khối tứ diện ACB'D'.

Lời giải:



Gọi S là diện tích đáy và h là chiều cao của khối hộp.
Chia khối hộp thành tứ diện ACB'D' và bốn khối chóp A.A'B'D', C.C'B'D', B'.BAC, D'.DAC.
Bốn khối chóp A.A'B'D', C.C'B'D', B'.BAC,

D'.DAC đều có diện tích đáy bằng $\frac{S}{2}$ và chiều cao bằng h, nên tổng các thể tích của chúng là:

$$4.\frac{1}{3}.\frac{S}{2}h = \frac{2}{3}Sh.$$

Thể tích của khối tứ diện ACB'D' là:

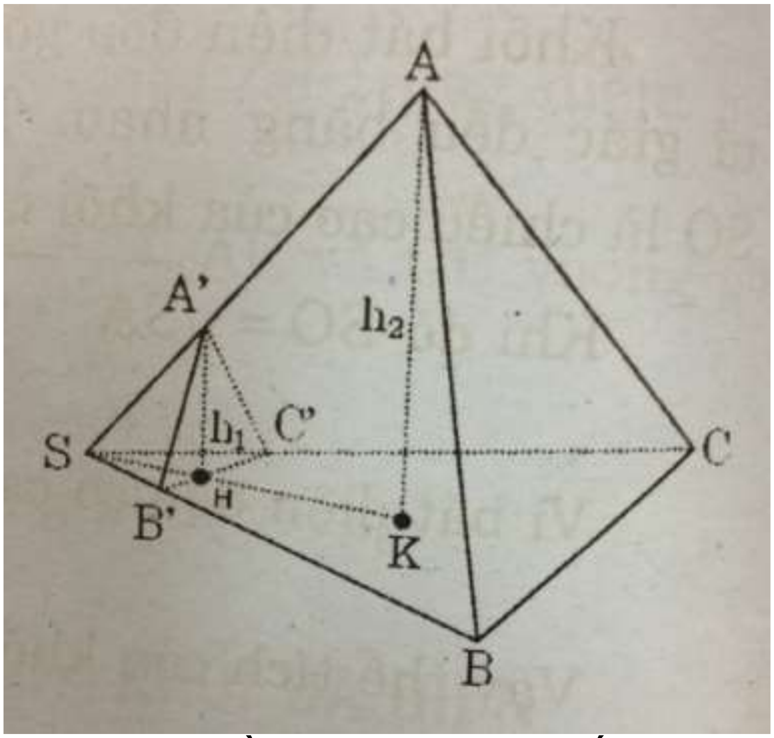
$$V_1 = Sh - \frac{2}{3}Sh = \frac{1}{3}Sh$$

Vậy tỉ số giữa thể tích của khối hộp và thể tích của khối tứ diện ACB'D' là : $k = \frac{V_{kh}}{V_1} = \frac{Sh}{\frac{1}{3}Sh} = 3$

Bài 4 : Cho khối chóp S.ABC. Trên các đoạn thẳng SA, SB, SC lần lượt lấy ba điểm A', B', C' khác với S. Chứng minh rằng:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Lời giải:



Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và A' trên mp(SBC), đặt AH = h_1 và A'K = h_2 , S_1 và S_2 lần lượt là diện tích của hai tam giác SBC và SB'C', ta có:

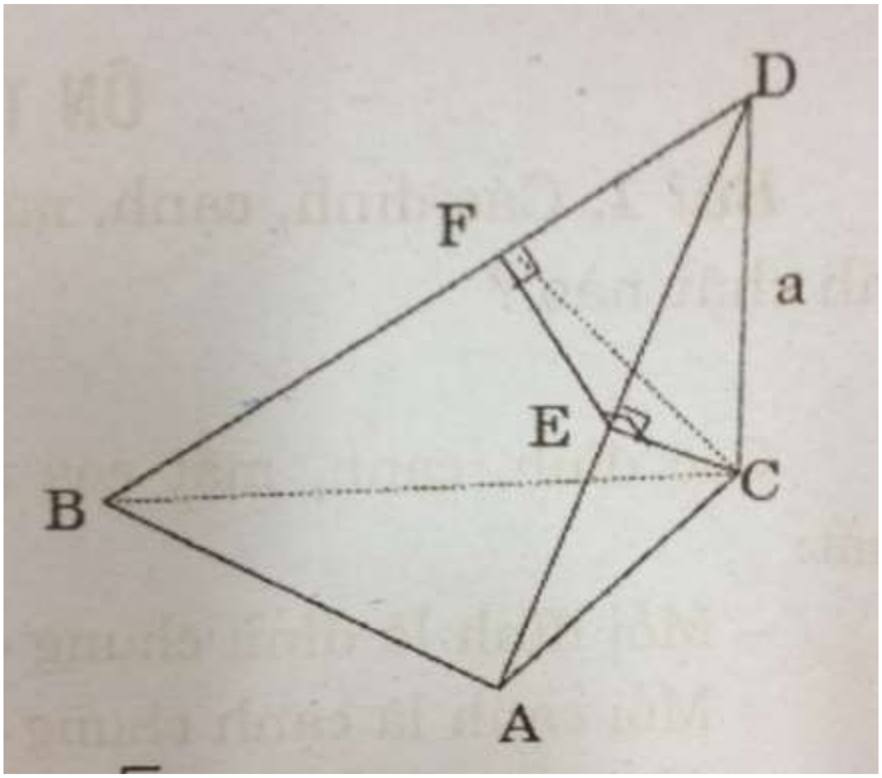
$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{A'K}{AH} = \frac{SA'}{SA}$$

Và $$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}\sin \widehat{B'SC'}.SB'.SC'}{\frac{1}{2}\sin \widehat{BSC}.SB.SC} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

Vậy $$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{\frac{1}{3}.S_2.h_2}{\frac{1}{3}S_1.h_1} = \frac{h_2}{h_1}.\frac{S_2}{S_1} = \frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}$$

Bài 5 : Cho tam giác ABC, vuông cân ở A và AB = a. Trên đường thẳng qua C, vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm D sao cho CD = a. Mặt phẳng qua C vuông góc với BD cắ BD tại F và cắt AD tại E. Tính thể tích khối tứ diện CDEF theo a.

Lời giải:



Ta có: $\left.\begin{array}{l} BA \perp CD \\ BA \perp CA \end{array}\right\} \Rightarrow BA \perp (ADC) \Rightarrow BA \perp CE \quad (1)$

Mặt khác: $BD \perp (CEF)$ (giả thiết) $\Rightarrow BD \perp CE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CE \perp (ABD)$

Vậy $CE \perp EF$, $CE \perp AD$

Tam giác ACD vuông cân ở C và $CA = CD = a$

Suy ra $CE = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$BC = a\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{EC^2 + CD^2} = \sqrt{2a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác BCD vuông ở C và có đường cao CF nên

$$CF.BD = DC.BC \Leftrightarrow CF = \frac{DC.BC}{BD} = \frac{a^2\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = a.\sqrt{\frac{2}{3}}$$

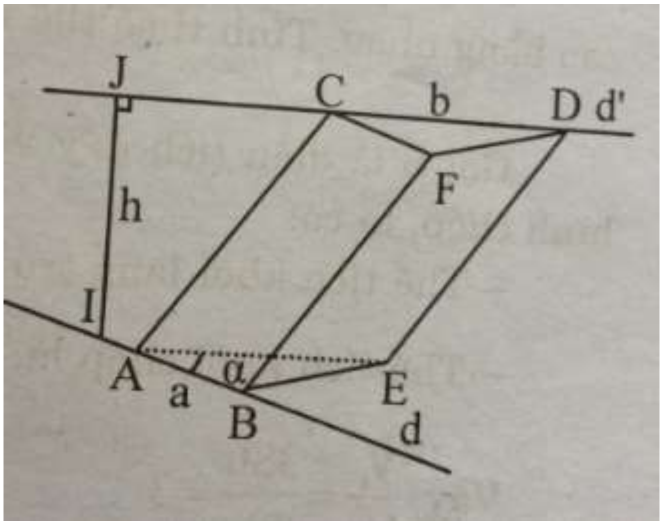
$$\text{Ta có: } \begin{cases} EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}a^2 - \dfrac{a^2}{2}} = a\dfrac{\sqrt{6}}{6} \\ DF = \sqrt{DC^2 - CF^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{2}{3}a^2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ S_{\Delta CEF} = \dfrac{1}{2}CE.EF = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{12} \end{cases}$$

Vậy thể tích của khối tứ diện DCEF là:

$$V = \frac{1}{3}.S_{\Delta CEF}.DF = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2}{36}$$

Bài 6 : Cho hai đường thẳng chéo nhau d và d’. Đoạn thẳng AB có độ dài bằng a trượt trên d, đoạn thẳng CD có độ dài bằng b trượt trên d’. Chứng minh rằng khối tứ diện ABCD có thể tích không đổi.

Lời giải:



Gọi h là khoảng cách từ d đến d’ và α là góc tạo bởi d và d’.

Lần lượt vẽ hai hình bình hành BACF và ACDE.

Ta có ABE.CFD là một hình lăng trụ tam giác có chiều cao bằng h và $\alpha = \widehat{BAE}$ nếu $\widehat{BAE} \le 90^o$ hoặc $\alpha = 180^0 - \widehat{BAE}$ nếu $\widehat{BAE} > 90^0$.

Mặt khác: AE = CD = b

$$\text{Ta có: } V_{ABCD} = V_{D.ABE} = \frac{1}{3}V_{ABE.CFD} = \frac{1}{3}.S_{\Delta ABE}.h$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AB.AE.\sin\widehat{BAE}$$

$$= \frac{1}{6}.h.ab.\sin\alpha \text{ (không đổi).}$$