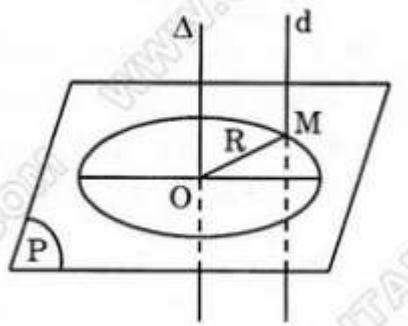


**Bài 1 :** Cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $r$  nằm trên mặt phẳng  $(P)$ . Từ những điểm  $M$  nằm trên đường tròn này ta kẻ những đường thẳng vuông góc với  $(P)$ . Chứng minh rằng những đường thẳng như vậy nằm trên một mặt trụ tròn xoay. Hãy xác định trục và bán kính của mặt trụ đó.

**Lời giải:**



Gọi  $d$  là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  tại tâm  $O$  của đường tròn  $(T)$ .

Từ điểm  $M$  trên đường tròn  $(T)$ , vẽ đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ .

Khi đó đường thẳng  $\Delta$  song song với  $d$  và luôn cách  $d$  một khoảng bằng  $r$ .

Đường thẳng  $\Delta$  thuộc mặt trụ tròn xoay có trục là đường thẳng  $d$  và bán kính  $r$ .

**Bài 2 :** Trong mỗi trường hợp sau đây, hãy gọi tên các hình tròn xoay hoặc khối tròn xoay sinh ra bởi:

a) Ba cạnh của hình chữ nhật khi quay quanh đường thẳng chứa cạnh thứ tư,

b) Ba cạnh của một tam giác cân khi quay quanh trục đối xứng của nó.

c) Một tam giác vuông kể cả các điểm trong của tam giác vuông đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh góc vuông.

d) Một hình chữ nhật kể cả các điểm trong của hình chữ nhật đó khi quay quanh đường thẳng chứa một cạnh.

**Lời giải:**

a) Khi quay một hình chữ nhật xung quanh đường thẳng chứa một cạnh thì ta được một hình trụ

b) Khi quay một tam giác cân xung quanh trục đối xứng của nó ta được một hình nón tròn xoay

c) Một tam giác vuông kể cả điểm trong của nó khi quay xung quanh một đường thẳng chứa một cạnh góc vuông thì tạo ra một khối nón tròn xoay.

d) Một hình chữ nhật kể cả các điểm trong của nó khi quay quanh một đường thẳng chứa một cạnh thì tạo ra một khối trụ tròn xoay

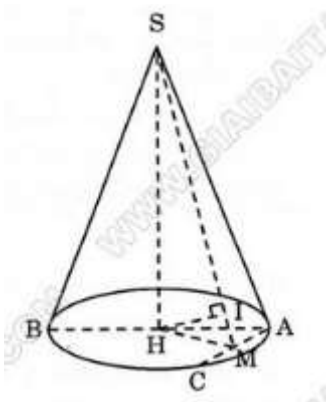
### Bài 3 : Một hình nón có đường cao $h = 20\text{cm}$ , bán kính đáy $r = 25\text{cm}$ .

a) Tính diện tích xung quanh của hình nón đã cho.

b) Tính thể tích của khối nón được tạo thành bởi hình nón đó.

c) Một thiết diện đi qua đỉnh của hình nón và khoảng cách từ tâm của đáy đến mặt phẳng thiết diện là  $12\text{cm}$ . Tính diện tích thiết diện đó

**Lời giải:**



a) Ta có:  $l^2 = h^2 + r^2 = 20^2 + 25^2 = 1025$

Suy ra  $l = \sqrt{1025}$

Vậy  $S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot 25 \cdot \sqrt{1025}$   
 $= 1962,5 \sqrt{41} \text{ (cm}^2\text{)}$

b) Ta có:  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 25^2 \cdot 20 = \frac{12500\pi}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$

c) Hình nón có đỉnh S, tâm của đáy là H và một thiết

diện qua đỉnh là tam giác SAB (A, B thuộc đường tròn đáy).

Gọi M là trung điểm của dây cung AC, ta có: 
$$\begin{cases} AC \perp HM \\ AC \perp SH \end{cases}$$

Suy ra  $AC \perp (SHM) \Rightarrow (SAC) \perp (SHM)$  (theo giao tuyến SM)

Vẽ  $HI \perp SM, I \in SM \Rightarrow HI \perp mp(SAC)$

Trong tam giác vuông SHI, ta có:

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{HM^2} + \frac{1}{HS^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{HM^2} = \frac{1}{HI^2} - \frac{1}{HS^2} = \frac{1}{12^2} - \frac{1}{20^2} = \frac{256}{57600} = \frac{16^2}{240^2}$$

$$\Leftrightarrow HM^2 = \frac{240^2}{16^2} = 15^2 \Leftrightarrow HM = 15(\text{cm})$$

Trong tam giác vuông HM ta có:

$$AM^2 = HA^2 - HM^2 = 25^2 - 15^2 \Leftrightarrow AM = 20 \text{ cm}$$

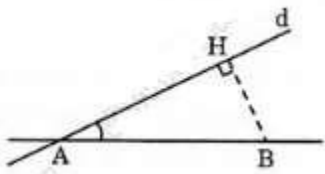
$$\text{Ta có } \sin \widehat{HSM} = \frac{HM}{SM} = \frac{HK}{SH} \Leftrightarrow SM = \frac{HM \cdot SH}{HK} = \frac{15 \cdot 20}{12} = 25 \text{ cm}$$

Vậy diện tích của thiết diện SAB là:

$$S = \frac{SM \cdot AB}{2} = SM \cdot AM = 25 \cdot 20 = 500 \text{ cm}^2$$

**Bài 4 : Trong không gian cho hai điểm A, B cố định và có độ dài  $AB = 20\text{cm}$ . Gọi d là một đường thẳng thay đổi luôn đi qua A và cách B một khoảng bằng  $10\text{cm}$ . Chứng tỏ rằng đường thẳng d luôn nằm trên một mặt nón, hãy xác định mặt nón đó (trục và góc ở đỉnh).**

**Lời giải:**



Từ B vẽ đường thẳng vuông góc với d và cắt d tại H.

Ta có  $BH = 10\text{cm} = d(B, d)$

Đặt  $\alpha = \widehat{BAH}$

Khi đó:

$$\sin \alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

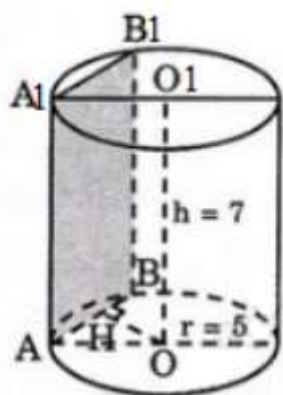
Vậy đường thẳng  $d$  nằm trên mặt nón có đỉnh là  $A$ , trục là đường thẳng  $AB$  và góc ở đỉnh là  $2\alpha = 60^\circ$

## Bài 5 : Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$ và có khoảng cách giữa hai đáy bằng $7\text{cm}$ .

a) Tính diện tích xung quanh của hình trụ và thể tích của khối trụ tạo nên.

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục  $3\text{cm}$ . Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên.

**Lời giải:**



a) Ta có:  $S_{xq} = 2\pi rh = \pi \cdot 10 \cdot 7 = 70\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 25 \cdot 7 = 175\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

b) Mặt phẳng  $(AA_1, BB_1)$  song song với trục  $OO_1$  và cách trục  $3\text{cm}$ .

\*Gọi  $H$  là trung điểm của dây cung  $AB$ .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} OH \perp AB \\ OH \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow OH \perp (AA_1B_1B)$$

$$\Rightarrow OH = d(O, mp(AA_1B_1B))$$

Mà  $OO_1 \parallel mp(AA_1B_1B)$  nên  $OH = d$

$(OO_1, mp(AA_1B_1B))$

$OH = 3\text{cm}$  (giả thiết)

\*Ta lại có:  $\triangle AIO$  vuông ở  $I$  nên:

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

Suy ra  $AH = 4\text{cm}$ . Khi đó  $AB = 2AH = 8\text{cm}$ .

Diện tích của thiết diện hình chữ nhật  $ABB_1A_1$  là:

$$S = AB \cdot AA_1 = 8 \cdot 7 = 56\text{cm}^2$$

**Bài 6 : Cắt một hình nón bằng một mặt phẳng qua trục của nó ta được thiết diện là một tam giác đều cạnh  $2a$ . Tính diện tích xung quanh và thể tích của hình nón đó.**

**Lời giải:**

Tam giác đều SAB cạnh  $2a$  là thiết diện qua trục của hình nón.

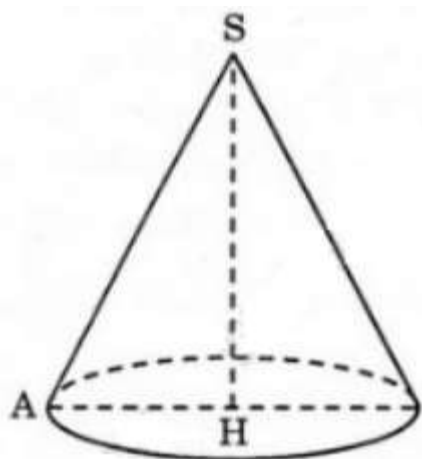
Khi đó hình nón có bán kính  $R = a$ , đường sinh  $l = 2a$ ,

$$\text{chiều cao } h = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Vậy diện tích xung quanh của hình nón và thể tích của khối nón là:

$$S_{xq} = \pi Rl = \pi \cdot a \cdot 2a = 2\pi a^2$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} \pi a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$$



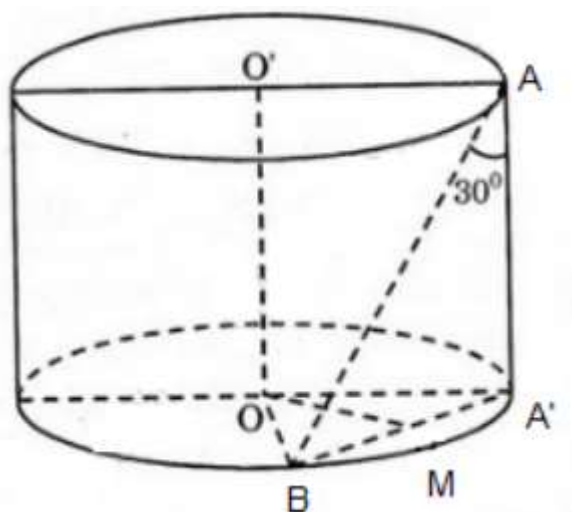
**Bài 7 : Một hình trụ có bán kính  $r$  và chiều cao  $h = r\sqrt{3}$**

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ.

b) Tính thể tích khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho.

c) Cho hai điểm A và B lần lượt nằm trên hai đường tròn đáy sao cho góc giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ bằng  $30^\circ$ . Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và trục của hình trụ.

**Lời giải:**



a) Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần

của hình trụ là:  $S_{xq} = 2\pi rh = 2\pi r \cdot r\sqrt{3} = 2\pi r^2 \sqrt{3}$

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi r^2 \sqrt{3} + 2\pi r^2 = 2\pi(\sqrt{3} + 1) r^2$$

b) Thể tích khối trụ tạo nên bởi hình trụ đã cho là:

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot r\sqrt{3} = \pi r^3 \sqrt{3}$$

c) Vẽ đường sinh  $AA'$  ( $AA' \parallel OO'$ ), ta có  $\widehat{BAA'} = 30^\circ$   
(góc hợp bởi  $AB$  và trục của hình trụ) và  $OO' \parallel mp(AA'B)$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của  $A'B$ .

Ta có:  $O'M \perp A'B$  và  $O'M \perp AA'$

$$\Rightarrow O'M \perp mp(AA'B)$$

$$\Rightarrow O'M = d(O', mp(AA'B)) = d$$

$$(OO', mp(AA'B)) = d(OO', AB)$$

\* Tam giác  $AA'B$  là tam giác vuông ở  $A'$  và có

$$AA' = h = r\sqrt{3}, \widehat{BAA'} = 30^\circ,$$

$$A'B = AA' \cdot \tan \widehat{BAA'} = r\sqrt{3} \cdot \tan 30^\circ = r$$

Tam giác  $OA'B$  là tam giác đều cạnh bằng  $r$

(vì  $OA' = OB = A'B = r$ )

$$\text{Vậy } O'M = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d(AB, OO') = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

**Bài 8 : Một hình trụ có hai đáy là hai hình tròn  $(O; r)$  và  $(O'; r)$ .**

**Khoảng cách giữa hai đáy là  $OO' = r$  . Một hình nón có đỉnh là  $O'$  và có đáy là hình tròn  $(O; r)$ .**

a) Gọi  $S_1$  là diện tích xung quanh của hình trụ và  $S_2$  là diện tích xung quanh của hình nón, hãy tính tỉ số  $S_1/S_2$  .

b) Mặt xung quanh của hình nón chia khối trụ thành hai phần, hãy tính tỉ số thể tích hai phần đó.

## Lời giải:

a)Ta có:

- Hình trụ và hình nón có chiều cao  $h = r\sqrt{3}$ , bán kính bằng  $r$ .

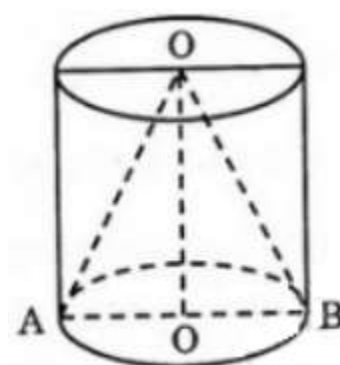
- Hình nón có đường sinh:

$$l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{3r^2 + r^2} = 2r$$

Vậy diện tích xung quanh của hình trụ là:

$$S_1 = 2\pi rh = 2\pi r^2 \sqrt{3}$$

Và hình nón là :  $S_2 = \pi rl = 2\pi r^2$



$$\text{Suy ra } \frac{S_1}{S_2} = \sqrt{3}$$

b)Thể tích của khối trụ là :

$$V_{kt} = \pi r^2 h = \pi r^3 \sqrt{3}$$

thể tích của khối nón là :

$$V_{kn} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi r^3 \sqrt{3}$$

thể tích của phần khối trụ nằm ngoài khối nón là:

$$\begin{aligned} V &= V_{kt} - V_{kn} = \pi r^3 \sqrt{3} - \frac{1}{3} \pi r^3 \sqrt{3} \\ &= \pi r^3 \left( \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \pi r^3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Tỉ số thể tích của mặt xung quanh của hình nón

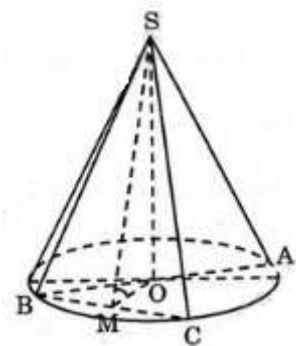
$$\text{chia khối trụ thành hai phần là: } \frac{V_{kn}}{V} = \frac{\frac{1}{3} \pi r^3 \sqrt{3}}{\pi r^3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}$$

## Bài 9 : Cắt hình nón đỉnh S bởi mặt phẳng đi qua trục ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích đáy và thể tích của khối nón tương ứng.

b) Cho dây cung BC của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (SBC) tạo với mặt phẳng chứa đáy hình nón góc  $60^\circ$ . Tính diện tích tam giác SBC.

**Lời giải:**



a) Ta có thiết diện qua trục của hình nón là

tam giác vuông cân SAB, cạnh huyền  $AB = a\sqrt{2}$ .

Vậy đường cao, bán kính và đường sinh của hình nón là:

$$h = SO = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$l = SA = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$$

Diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón là:

$$S_{xq} = \pi r l = \pi \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2}$$

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2}}{2} + \pi r^2$$

Thể tích của khối nón là:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{12}$$



b) Gọi M là trung điểm của BC

Ta có:  $BC \perp OM$  và  $BC \perp SM$

Khi đó góc giữa mp(SBC) và mặt phẳng đáy hình nón  $\widehat{SMO} = 60^\circ$

\*Tam giác SMO vuông ở O nên:

$$SM = \frac{SO}{\sin \widehat{SMO}} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sin 60^\circ} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$OM = SO \cdot \cos \widehat{SMO} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

\*Tam giác OBM vuông ở M nên:

$$BM = \sqrt{OB^2 - OM^2} = \sqrt{r^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow BC = 2BM = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Vậy } S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2} SM \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{a^2 \sqrt{2}}{3}$$

**Bài 10 :** Cho hình trụ có bán kính r và có chiều cao cũng bằng r. Hình vuông ABCD có hai cạnh AB và CD lần lượt là các dây cung của hai đường tròn đáy, còn cạnh BC và AD không phải là đường sinh của hình trụ. Tính diện tích của hình vuông đó và cosin của góc giữa mặt phẳng chứa hình vuông và mặt phẳng đáy.

**Lời giải:**

Gọi  $CC_1$  và  $DD_1$  là hai đường sinh của khối trụ

$$\text{Khi đó } D_1C_1 // = DC \quad (1)$$

Đồng thời ABCD là hình vuông nên  $AB // = DC$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra  $AB // = D_1C_1$

Vậy  $ABC_1D_1$  là hình bình hành

Mặt khác  $ABC_1D_1$  nội tiếp đường tròn (O) nên  $ABC_1D_1$  là hình chữ nhật. Suy ra  $AC_1$  là đường kính của (O)

Nghĩa là  $AC_1 = 2r$

Tam giác  $ABC_1$  vuông ở B nên:

$$BC_1^2 = AC_1^2 - AB^2 = 4r^2 - AB^2 \quad (3)$$

Tam giác  $BCC_1$  vuông ở  $C_1$  nên:

$$BC_1^2 = BC^2 - CC_1^2 = AB^2 - r^2 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 4r^2 - AB^2 = AB^2 - r^2 \Leftrightarrow AB^2 = \frac{5r^2}{2}$$

$$\text{Vậy diện tích của hình vuông ABCD là } S = AB^2 = \frac{5r^2}{2}$$

\*Gọi  $\alpha$  là góc hợp bởi mp(ABCD) và mặt phẳng đáy

$$\text{của hình trụ, ta có: } S = S_{ABCD} = \frac{5r^2}{2}, S' = S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1$$

$$\text{Với } BC_1 = \sqrt{AC_1^2 - AB^2} = \sqrt{(2r)^2 - \frac{5r^2}{2}} = r\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow S' = \frac{r\sqrt{10}}{2} \cdot r\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{r^2}{2} \sqrt{15}$$

Mà  $ABC_1D_1$  là hình chiếu của ABCD trên mặt đáy hình trụ nên:

$$S' = S \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{S'}{S} = \frac{\frac{r^2 \sqrt{15}}{2}}{\frac{5r^2}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$