Bài 1 (trang 106 SGK Đại Số 10): Sử dụng bất đẳng thức để viết các mệnh đề sau

a) x là số dương.

b) y là số không âm.

c) Với mọi số thực α, |α| là số không âm.

d) Trung bình cộng của hai số dương a và b không nhỏ hơn trung bình nhân của chúng.

Lời giải

a) $x > 0$

b) $y \geq 0$

c) $\forall \alpha \in R, |\alpha| \geq 0$

d) $\forall a, b > 0$, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Bài 2 (trang 106 SGK Đại Số 10): Có thể rút ra kết luận gì về dấu của hai số a và b nếu biết

a) $ab > 0$;   b) $\frac{a}{b} > 0$;

c) $ab < 0$;   d) $\frac{a}{b} < 0$?

Lời giải

a) Hai số a và b cùng dấu.

b) Hai số a và b cùng dấu.

c) Hai số a và b trái dấu nhau.

d) Hai số a và b trái dấu nhau.

Bài 3 (trang 106 SGK Đại Số 10): Trong các suy luận sau, suy luận nào đúng?

$(A)\ \begin{cases} x<1 \\ y<1 \end{cases} \Rightarrow xy<1.$ $(B)\ \begin{cases} x<1 \\ y<1 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x}{y}<1.$

$(C)\ \begin{cases} 0<x<1 \\ y<1 \end{cases} \Rightarrow xy<1.$ $(D)\ \begin{cases} x<1 \\ y<1 \end{cases} \Rightarrow x-y<1.$

Lời giải

Suy luận (A) sai vì giả sử x = y = –2 thì x.y = 4 > 1.

Suy luận (B) sai vì giả sử x = –6, y = –3 thì (x/y) = 2 > 1.

Suy luận (C) đúng.

Suy luận (D) sai vì giả sử x = 0, y = -5 => x - y = 5 > 1.

Bài 4 (trang 106 SGK Đại Số 10): Khi cân một vật với độ chính xác đến 0,05kg, người ta cho biết kết quả là 26,4kg. Hãy chỉ ra khối lượng thực của vật đó nằm trong khoảng nào?

Lời giải

Khối lượng thực của vật nằm trong khoảng:

(26,4 - 0,05; 26,4 - 0,05) kg

hay (26,35; 26,35) kg

Bài 5 (trang 106 SGK Đại Số 10): Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, hãy vẽ đồ thị hai hàm số y = f(x) = x + 1 và y = g(x) = 3 - x và chỉ ra các giá trị nào của x thỏa mãn:

a) f(x) = g(x);

b) f(x) > g(x);

c) f(x) < g(x).

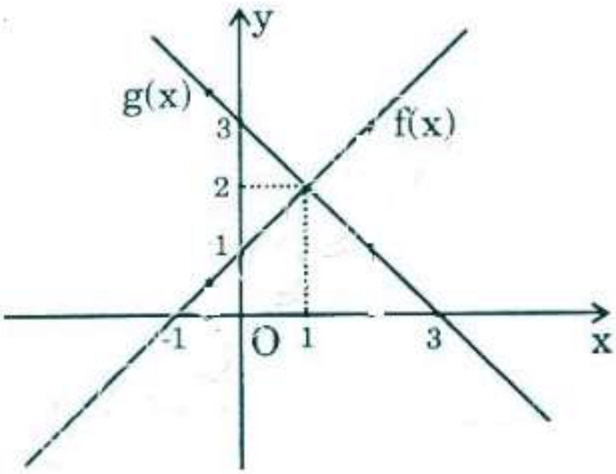
Kiểm tra lại kết quả bằng cách giải phương trình, bất phương trình.

Lời giải

Vẽ đồ thị:

- Vẽ đồ thị hàm số y = f(x) = x + 1 qua hai điểm (0; 1) và (1; 2).

- Vẽ đồ thị hàm số y = g(x) = 3 - x qua hai điểm (0; 3) và (3; 0)



a) Đồ thị của hàm số y = f(x) và y = g(x) cắt nhau tại điểm A(1; 2), hay tại x = 1 thì f(x) = g(x) = 2

Kiểm tra bằng tính toán:

f(x) = g(x) ⇔ x + 1 = 3 - x ⇔ x = 1

b) Khi x > 1 thì đồ thị hàm số y = f(x) nằm phía trên đồ thị hàm số y = g(x), hay với x > 1 thì f(x) > g(x).

Kiểm tra bằng tính toán:

f(x) > g(x) ⇔ x + 1 > 3 - x ⇔ x > 1

c) Khi x < 1 thì đồ thị hàm số y = f(x) nằm phía dưới đồ thị hàm số y = g(x), hay với x < 1 thì f(x) < g(x).

Kiểm tra bằng tính toán:

f(x) < g(x) ⇔ x + 1 < 3 - x ⇔ x < 1

Bài 6 (trang 106 SGK Đại Số 10): Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$$
$$=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)$$

Vì a > 0, b > 0, c > 0 nên áp dụng Bất đẳng thức Cô-si ta có:

$$\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)\geq 2+2+2=6$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c

Do vậy: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$ (đpcm)

Bài 7 (trang 107 SGK Đại Số 10): Điều kiện của một bất phương trình là gì? Thế nào là hai bất phương trình tương đương.

Lời giải

- Điều kiện của một bất phương trình là các điều kiện của ẩn x sao cho các biểu thức của bất phương trình đó đều có nghĩa.

- Hai bất phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Bài 8 (trang 107 SGK Đại Số 10): Nếu quy tắc biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình ax + by ≤ c.

Lời giải

- Vẽ đường thẳng (d): ax + by = c.

- Chọn điểm $M(x_o, y_o)$ (thường chọn điểm (0; 0)) và tính giá trị $ax_o + by_o$.

- So sánh $ax_o + by_o$ với c:

+ Nếu $ax_o + by_o < c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ (d) chứa M.

+ Nếu $ax_o + by_o = c$ thì miền nghiệm là đường thẳng (d).

+ Nếu $ax_o + by_o > c$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa M.

Bài 9 (trang 107 SGK Đại Số 10): Phát biểu định lí về dấu của tam thức bậc hai.

Lời giải

Định lí (trang 101 sgk Đại Số 10):

Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Nếu $\Delta < 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi x.

- Nếu $\Delta = 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a với mọi $x \neq -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $\Delta > 0$ thì f(x) cùng dấu với hệ số a khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$ và f(x) trái dấu với hệ số a khi $x_1 < x < x_2$ (trong đó x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) là hai nghiệm của f(x)).

Bài 10 (trang 107 SGK Đại Số 10): Cho a > 0, b > 0. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$\Leftrightarrow a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geq \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{a}\sqrt{b}) \geq \sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$

$\Leftrightarrow a + b - \sqrt{a}\sqrt{b} \ge \sqrt{a}\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \ge 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \ge 0$ đúng với mọi a > 0, b > 0

Do đó: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \ge \sqrt{a} + \sqrt{b}$ (đpcm)

Bài 11 :

a) Bằng cách sử dụng hằng đẳng thức $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ hãy xét dấu f(x) $= x^4 - x^2 + 6x - 9$ và $g(x) = x^2 - 2x - \frac{4}{x^2 - 2x}$

b) Hãy tìm nghiệm nguyên của bất phương trình sau:

$$x(x^3 - x + 6) > 9$$

Lời giải

(**Lưu ý:** phần bài làm hơi tắt một chút, các bạn có thể tự mình lập bảng xét dấu cho đầy đủ và rõ ràng hơn.)

a) Ta có: $f(x) = x^4 - x^2 + 6x - 9$

$= x^4 - (x - 3)^2 = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 3)$

Do $(x^2 - x + 3) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} > 0$ nên f(x) cùng dấu với $(x^2 + x - 3)$.

Tam thức $x^2 + x - 3$ có hai nghiệm là $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ và $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$

Vậy f(x) < 0 khi $x \in \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$

f(x) > 0 khi $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

$g(x) = x^2 - 2x - \dfrac{4}{x^2 - 2x}$

$= \dfrac{(x^2 - 2x)^2 - 4}{x^2 - 2x} = \dfrac{(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 2)}{x^2 - 2x}$

Vì $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$ nên g(x) cùng dấu với $\dfrac{(x^2 - 2x - 2)}{x^2 - 2x}$

Tam thức $x^2 - 2x - 2$ có hai nghiệm là $x_1 = 1 - \sqrt{3}$; $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Tam thức $x^2 - 2x$ có hai nghiệm là $x_1 = 0$; $x_2 = 2$

Vậy g(x) < 0 khi $x \in (1 - \sqrt{3}; 0) \cup (2; 1 + \sqrt{3})$

g(x) > 0 khi $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{3}) \cup (0; 2) \cup (1 + \sqrt{3}; +\infty)$

b) Ta có: $x(x^3 - x + 6) > 9 \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 6x - 9 > 0$

$\Leftrightarrow x^4 - (x - 3)^2 > 0 \Leftrightarrow (x^2 - x + 3)(x^2 - x - 3) > 0$ (*)

Do $x^2 - x + 3 = x^2 - 2.x.1/2 + 1/4 + 11/4 = (x - 1/2)^2 + 11/4 > 0$ nên (*) tương đương với:

$x^2 - x - 3 > 0$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}$ hoặc $x > \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}$ (kết quả phần a)

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $T = \left(-\infty; \dfrac{-1 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{-1 + \sqrt{13}}{2}; +\infty\right)$

Bài 12 : Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác. Sử dụng định lí về dấu tam thức bậc hai, chứng minh rằng:

$$b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 > 0 \ \forall x$$

Lời giải

Đặt $f(x) = b^2x^2 - (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ ta có:

$\Delta = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2c^2$

$= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc)$

$= [(b - c)^2 - a^2][(b + c)^2 - a^2]$

$= [b - (c + a)][b - c + a](b + c + a)(b + c - a)$

Do a, b, c là 3 cạnh của tam giác nên $b < c + a$; $c < a + b$; $a < b + c$

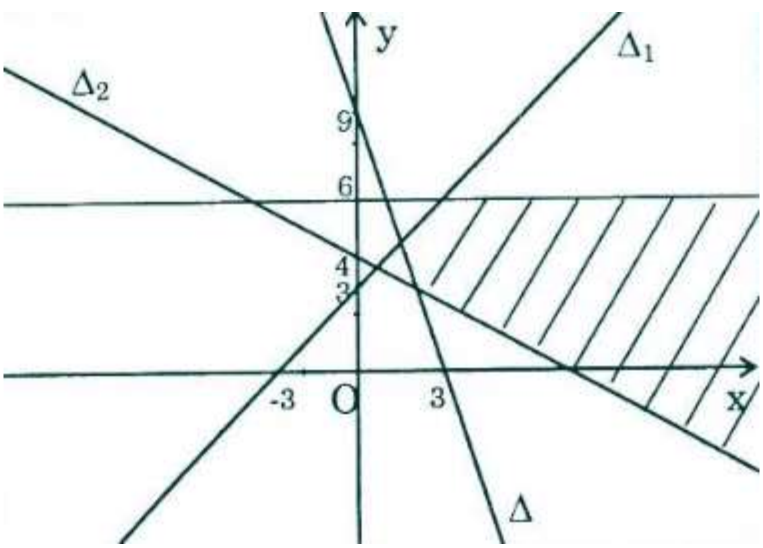
$\Rightarrow b - (c + a) < 0$; $b - c + a > 0$; $b + c + a > 0$; $b + c - a > 0$

$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow f(x)$ cùng dấu với b^2 $\forall x$ hay $f(x) > 0$ $\forall x$ (đpcm).

Bài 13 :Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

$$\begin{cases} 3x + y \geq 9 \\ x \geq y - 3 \\ 2y \geq 8 - x \\ y \leq 6. \end{cases}$$

Lời giải



Vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ các đường thẳng:

(Δ): $3x + y = 9 \Leftrightarrow y = -3x + 9$ đi qua điểm (3; 0); (0; 9)

(Δ_1): $x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = x + 3$ đi qua điểm (-3; 0); (0; 3)

(Δ_2): $x + 2y = 8 \Leftrightarrow y = -x/2 + 4$ đi qua điểm (8; 0); (0; 4)

(Δ_3): $y = 6$ đi qua điểm (0; 6) song song với Ox

Miền nghiệm là miền gạch chéo kể cả các đường biên của nó.

Bài 14): Số -2 thuộc tập nghiệm của bất phương trình

(A) $2x + 1 > 1 - x$; (B) $(2x + 1)(1 - x) < x^2$

(C) $\frac{1}{1-x} + 2 \leq 0$; (D) $(2 - x)(x + 2)^2 < 0$

Lời giải

Chọn câu **B**.

Với $x = -2$ thì $2x + 1 = -3$ và $1 – x = 3$ nên $(2x + 1)(1 - x) = -9$

còn $x^2 = (-2)^2 = 4$.

Vậy $(2x + 1)(1 – x) < x^2$

Bài 15 : Bất phương trình $(x + 1)\sqrt{x} \leq 0$ tương đương với bất phương trình

(A) $\sqrt{x(x+1)^2}$; (B) $(x + 1)\sqrt{x} < 0$

(C) $(x + 1)^2\sqrt{x} \leq 0$; (D) $(x + 1)^2\sqrt{x} < 0$

Lời giải

Chọn câu **(C)**

Ta có: $(x + 1)\sqrt{x} \leq 0$ có $T = \{0\}$

$(x + 1)^2\sqrt{x} \leq 0$ có $T = \{0\}$

$\Rightarrow (x + 1)\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2\sqrt{x} \leq 0$

Bài 16 : Bất phương trình mx2 + (2m – 1)x + m + 1 < 0 có nghiệm khi

(A) $m = 1$; (B) $m = 3$

(C) $m = 0$; (D) $m = 0,25$

Lời giải

Chọn câu **(C)**

Khi m = 0 thì bất phương trình trở thành -x + 1 < 0 ⇔ x > 1.

Đó là tập nghiệm của bất phương trình $mx^2 + (2m - 1)x + m + 1 < 0$

Bài 17 : Hệ bất phương trình sau vô nghiệm

(A) $\begin{cases} x^2 - 2x \le 0 \\ 2x + 1 < 3x + 2 \end{cases}$;

(B) $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \dfrac{1}{x+2} < \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$;

(C) $\begin{cases} x^2 - 5x + 2 < 0 \\ x^2 + 8x + 1 \le 0 \end{cases}$;

(D) $\begin{cases} |x - 1| \le 2 \\ |2x + 1| \le 3. \end{cases}$

Lời giải

Chọn câu **(C)**.

- $x^2 - 5x + 2 < 0$ có $T_1 = \left(\dfrac{5 - \sqrt{17}}{2}; \dfrac{5 + \sqrt{17}}{2}\right)$
- $x^2 + 8x + 1 \le 0$ có $T_2 = \left(-4 - \sqrt{17}; -4 + \sqrt{17}\right)$

Ta thấy : $T_1 \cap T_2 = \varnothing$. Vậy hệ vô nghiệm.