Bài 1 : Hãy lập bảng liệt kê các giới hạn đặc biệt của dãy số và giới hạn đặc biệt của hàm số.

Lời giải:

Một số giới hạn đặc biệt của dãy số:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0, \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0$ (k là số nguyên dương)

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} C = C$ nếu C là hằng số, $u_n = C$, $\forall n$

d) $\lim n^k = +\infty$ (k là số nguyên dương)

e) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Một số giới hạn đặc biệt của hàm số:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k = +\infty$, k nguyên dương

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = -\infty$ nếu k lẻ, là $+\infty$ nếu k chẵn.

Bài 2 : Cho hai dãy số (un) và (vn). Biết |un – 2| ≤ vn với mọi n và lim vn = 0. Có kết luận gì về giới hạn của dãy số (un)?

Lời giải:

$\lim v_n = 0$ nghĩa là cho số ε dương nhỏ tùy ý bắt đầu từ số n_0 nào đó $|v_n| < \varepsilon$ với mọi $n > n_0$.

Theo định nghĩa $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 2) = 0$

do đó: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Bài 3 : Tên một học sinh được mã hóa bởi số 1530. Biết rằng mỗi chữ số trong số này là giá trị một trong các biểu thức A, H, N, O với

$A = \lim \dfrac{3n+1}{n+2}$

H. $\lim \left(\sqrt{n^2+2n} - n\right)$

N. $\lim \dfrac{\sqrt{n} - 2}{3n + 7}$

O. $\lim \dfrac{3^n - 5.4^n}{1 - 4^n}$

Hãy cho biết tên của học sinh này, bằng cách thay các chữ số trên bởi các chữ kí hiệu biểu thức tương ứng.

Lời giải:

$$A = \lim \frac{3n-1}{n+2} = \lim \frac{\left(3 - \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3$$

$$H.\ \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right) = \lim \frac{(\sqrt{n^2+2n} - n)(\sqrt{n^2+2n} + n)}{\sqrt{n^2+2n} + n}$$

$$= \lim \frac{2n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)} = \lim \frac{2}{\left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1\right)} = 1$$

$$N = \lim \frac{\sqrt{n} - 2}{3n + 7} = \lim \frac{(\sqrt{n} - 2)(\sqrt{n} + 2)}{(3n + 7)(\sqrt{n} + 2)} = \lim \frac{n - 4}{(3n + 7)(\sqrt{n} + 2)}$$

$$= \lim \frac{n\left(1 - \frac{4}{n}\right)}{n\left(3 + \frac{7}{n}\right)(\sqrt{n} + 2)} = \lim \frac{1 - \frac{4}{n}}{\left(3 + \frac{7}{n}\right)(\sqrt{n} + 2)} = 0$$

$$O = \lim \frac{3^n - 5.4^n}{1 - 4^n} = \lim \frac{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n - 5\right]}{4^n\left[\frac{1}{4^n} - 1\right]} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 5}{\frac{1}{4^n} - 1} = 5$$

Khi thay đổi chữ số 1530 bởi các biểu thức giới hạn tương ứng ta được chữ HOAN là tên các bạn học sinh đã cho.

Bài 4 (trang 142 SGK Đại số 11):

a. Có nhận xét gì về công bội của các cấp số nhân lùi vô hạn?

b. Cho ví dụ về một cấp số nhân lùi vô hạn và có công bội là số âm và một cấp số nhân lùi vô hạn có công bội là số dương và tính tổng của các cấp số nhân đó.

Lời giải:

a. Cấp số nhân vô hạn với công bội q mà $|q| < 1$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

b. Ví dụ cấp số nhân vô hạn có công bội âm:

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{(-1)^n}{2^n - 1}, \dots$$

tổng của cấp số nhân này là: $S = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$

Ví dụ cấp số nhân lùi vô hạn công bội dương:

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$$

Số hạng đầu là $\dfrac{1}{3}$, công bội $q = \dfrac{1}{3}$

Tổng của cấp số: $S = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$

Bài 5 (trang 142 SGK Đại số 11): Tìm các giới hạn sau:

Lời giải:

a. $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2+x+4}=\frac{2+3}{2^2+2+4}=\frac{1}{2}$

b. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x^2+3x}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x+2)}{x(x+3)}=\lim_{x\to -3}\frac{(x+2)}{x}=\frac{-3+2}{-3}=\frac{1}{3}$

c. $\lim_{x\to 4^-}\frac{2x-5}{x-4}=\frac{2.4-5}{4-4}=-\infty$ (vì $\lim_{x\to 4^-}(x-4)=-\infty$)

d. $\lim_{x\to +\infty}(-x^3+x^2-2x+1)=\lim(-1).(x^3)\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=-\infty$

e. $\lim_{x\to -\infty}\frac{x+3}{3x-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{3-\frac{1}{x}}=\frac{1}{3}$

f. $\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x+4}-x}{3x-1}$

$=\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}+|x|}{3x-1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}|x|+1}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}$

$=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1\right)}{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to -\infty}-\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}{3-\frac{1}{x}}=-\frac{2}{3}$

Bài 6 :Cho hai hàm số f(x) = ...

Cho hai hàm số $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2}$ và $g(x)=\frac{x^3+x^2+1}{x^2}$

a. Tính $\lim_{x\to 0}f(x)$, $\lim_{x\to 0}g(x)$, $\lim_{x\to +\infty}f(x)$, $\lim_{x\to +\infty}g(x)$

b. Hai đường cong dưới dây là đồ thị của hai hàm số đã cho.
Từ kết quả câu a), hãy xác định xem đường cong nào là
đồ thị của mỗi hàm số đó.

Lời giải:

a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-x^2}{x^2} (= \dfrac{1}{0}) = +\infty$ (vì $x^2 > 0$ với mọi $x \neq 0$)

$\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2} (= \dfrac{1}{0}) = +\infty$ (vì $x^2 > 0$ với mọi $x \neq 0$)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+x^2+1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{x^2+1}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty$$

b) Hình b) cho thấy y $\to$ - 1 khi x $\to \pm\infty$

Điều này phù hợp với kết quả $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

Vậy đường cong trong hình b) là đồ thị của hàm $y = f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2}$.

Còn lại hình a) là đồ thị hàm số $y = g(x) = \dfrac{x^3+x^2+1}{x^2}$.

Bài 7 : Xét tính liên tục trên R của hàm số:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{x-2} (x > 2) \\ 5 - x(x \leq 2) \end{cases}$$

Lời giải:

*Ta có: $g(2) = 5 - 2 = 3$

$$\lim_{x\to 2^+} g(2) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}(x+1) = 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} g(2) = \lim_{x\to 2^-}(5 - x) = 5 - 2 = 3$$

Từ kết quả trên ta thấy:

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = \lim_{x\to 2^-} g(x) = g(2).$$

Vậy hàm số g(x) liên tục tại $x = 2$.

*Hàm số g(x) liên tục trên R vì

$\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$ liên tục với $x > 2$ và $5 - x$

Liên tục với $x \le 2$

Bài 8 : Chứng minh rằng phương trình x5 – 3x4 + 5x – 2 = 0 có ít nhất ba nghiệm nằm trong khoảng (-2; 5)

Lời giải:

Đặt $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x - 2$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = -2 < 0 \\ f(1) = 1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(-2).f(-1) < 0$$

f(x) là hàm số đa thức liên tục trên R, nên liên tục trên (0; 1)

$\Rightarrow$ Phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (0; 1)$

Tương tự ta có: $f(2).f(1) < 0$ và $f(3).f(2) < 0$ nên phương trình

$f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $\in (2; 1)$ và $(3; 2)$

vậy phương trình $x^5 - 3x^4 + 5x - 2 = 0$ có ít nhất ba nghiệm trong (-2; 5).

Bài 9 : Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A.Một dãy số có giới hạn thì luôn luôn tăng hoặc luôn luôn giảm.

B.Nếu (u_n) là dãy số tăng thì $\lim u_n = +\infty$.

C.Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = +\infty$ thì $\lim (u_n - v_n) = 0$

D.Nếu $u_n = a_n$ và $-1 < a < 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Lời giải:

a.Sai.

ví dụ $\frac{(-1)^n}{n}$ không tăng không giảm nhưng $\lim \frac{(-1)^n}{n} = 0$

b.Sai. Ví dụ dãy số $u_n = \frac{n+1}{n}$,

$n \in n^*$ là dãy số tăng nhưng $\lim u_n = 1$

c.Sai. Ví dụ dãy số (u_n) với $u_n = n$, dãy số $v_n = \sqrt{n}$

$\lim u_n = +\infty$, $\lim v_n = +\infty$, $\lim (u_n - v_n) = +\infty$

d.Vậy mệnh đề D đúng.

Bài 10 (trang 143 SGK Đại số 11):

Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2+1}$

Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\lim u_n = 0$.

B. $\lim u_n = \frac{1}{2}$

C. $\lim u_n = 1$

D. Dãy (u_n) không có giới hạn khi $n \to +\infty$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } u_n = \frac{1+2+3+...+n}{n^2+1} = \frac{n^2+n}{2(n^2+1)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}}$$

$$\text{Do đó: } \lim u_n = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2}$$. Vậy mệnh đề B đúng.

Bài 11 (trang 143 SGK Đại số 11):

Dãy (u_n) với $u_n = \sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+...+(\sqrt{2})^n$

Chọn mệnh đề đúng trong cách mệnh đề sau:

A. $\lim u_n = \sqrt{2}+(\sqrt{2})^n+... = \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$

B. $\lim u_n = -\infty$

C. $\lim u_n = +\infty$

D. Dãy số (u_n) không có giới hạn khi $n \to +8$.

Lời giải:

$$U_n = \sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+...+(\sqrt{2})^n$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left[(\sqrt{2})^n-1\right]}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n-1\right]$$

$$\Rightarrow \lim u_n = \lim \sqrt{2}(\sqrt{2}+1)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n-1\right] = +\infty$$

Vậy mệnh đề C đúng.

Bài 12 (trang 144 SGK Đại số 11):

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-3x-1}{x-1}$ bằng:

A. - 1

B. $-\infty$.

C. -3

D. $+\infty$

Lời giải:

Ta có: $\lim_{x \to 1^-} \frac{-3x-1}{x-1} = \frac{-3-1}{1-1} = +\infty$

$(\lim_{x \to 1^-}(x-1) = 0, x-1 < 0)$

Vậy mệnh đề đúng là D.

Bài 13 (trang 144 SGK Đại số 11):

Cho hàm số $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ bằng:

A. $+\infty$

B.1

C. $-\infty$

D. -1

Lời giải:

Ta có: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x^2}{x}$

$= \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to -\infty} x = +\infty$

Vậy mệnh đề đúng là A.

Bài 14 (trang 144 SGK Đại số 11):

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} (x \neq 3) \\ m (x = 3) \end{cases}$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 3$ khi m bằng bao nhiêu?

A.4 B. -1 C. 1 D. -4

Lời giải:

Ta có: $\lim_{x\to3} f(x) = \lim_{x\to3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}$

$= \lim_{x\to3} \frac{-(\sqrt{x+1}+2)}{1} = -4$

Vậy mệnh đề A đúng.

Bài 15 (trang 144 SGK Đại số 11): Cho phương trình -4x3 + 4x- 1 = 0 (1)

Mệnh đề sai:

A. Hàm số $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$ liên tục trên R.

B. Phương trình (1) không có nghiệm trên khoảng $(-\infty; 1)$.

C. Phương trình (1) có nghiệm trên khoảng $(-2; 0)$

D. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$

Lời giải:

Đặt $f(x) = -4x^3 + 4x - 1$

Xét $f(-2) = -4.(-2)^3 + 4.(-2) - 1 > 0$

$f(1) = -1 < 0$

$f(-2).f(1) < 0$

f(x) là hàm đa thức, liên tục trên R.

$\Rightarrow$ phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $\in (-2; -1)$

$\Rightarrow$ f(x) có ít nhất một nghiệm $\in (-\infty; 1)$

Vậy mệnh đề B sai.