Bài 1 :

Chứng minh các dãy số $\left(\frac{3}{2}.2^n\right), \left(\frac{5}{2^n}\right), \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$

là các cấp số nhân.

Lời giải:

Để chứng minh dãy (u_n) là cấp số nhân thì ta chứng minh:

$u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in N^*$

(q là công bội cấp số nhân)

$+\ u_n = \frac{3}{5}.2^n$

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{5}.2^{n+1}}{\frac{3}{5}.2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2^n.2^1}{2^n} = 2$

=> $u_{n+1} = 2 \times u_n$. Vậy u_n là cấp số nhân với công bội q = 2.

$+\ u_n = \frac{5}{2^n}$

Với $n \in N^* \Rightarrow u_n > 0$

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^n.2^1} = \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} = u_n\,\frac{1}{2}$

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{2}$

$+\ u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^2.\left(\frac{1}{2}\right)^n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^{n+1}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-1)^n.(-1)^1.\left(\frac{1}{2}\right)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^1}{(-1)^n.\left(\frac{1}{2}\right)^n} = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} = u_n.\left(-\frac{1}{2}\right)$

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -\frac{1}{2}\ \forall n \in N^*$

Bài 2 : Cho cấp số nhân (un) với công bội q

a.Biết $u_1 = 2$, $u_6 = 486$. Tìm q

b.Biết q = 2/3 , u4 = 8/21 . Tìm u_1

c.Biết $u_1 = 3$, q = -2. Hỏi số 192 là số hạng thứ mấy?

Lời giải:

a.Theo công thức $u_n = u_1.q^{n-1}$, thay n = 6 ta được:

$u_6 = u_1q_5 = 2.q_5 = 486$

$q_5 = 243 = 3^5 \Rightarrow q = 3$

b.Ta có: $u_4 = u_1.q^{4-1} = \frac{8}{21} \Rightarrow u_1 = \frac{8}{21}.\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{21} = \frac{9}{7}$

c.Biết $u_1 = 3$, q = -2. Hỏi số 192 là số thứ mấy?

Ta có: $u_n = u_1.q^{n-1} = 192$

$q^{n-1} = 192/u_1 = 192/3 = 64$

$(-2)^n = - 128 = (-2)^7 \Rightarrow n = 7$

Vậy số 192 là số hạng thứ 7.

Bài 3 : Tìm các số hạng của cấp số nhân (un) có năm số hạng, biết:

a.$u_3 = 3$ và $u_5 = 27$

b.$u_4 – u_2 = 25$ và $u_3 – u_1 = 50$

Lời giải:

a. Ta có: $u_n = u_1q^{n-1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_3 = u_1.q^2 = 3 \\ u_5 = u_1.q^4 = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = 9 \\ u_1 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy q = ± 3.

+ Cấp số nhân (u_n) có công bội q có thể viết dưới dạng:

$u_1, u_1q, u_1q^2,\ldots,u_1.q^{n-1}$

Với q = 3 ta có cấp số : 1/3 , 1, 3, 9, 27

Với q = - 3 ta có cấp số: 1/3 , -1, 3, -9, 27

b. $\begin{cases} u_4 - u_2 = 25 \\ u_3 - u_1 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1.q^3 - u_1.q = 25 \\ u_1.q^2 - u_1 = 50 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} u_1.q(q^2 - 1) = 25 \\ u_1(q^2 - 1) = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \dfrac{1}{2} \\ u_1 = -\dfrac{200}{3} \end{cases}$

Vậy năm số hạng là: $-\dfrac{200}{3}; -\dfrac{100}{3}; -\dfrac{50}{3}; -\dfrac{25}{3}; -\dfrac{25}{6}$

Bài 4 : Tìm cấp số nhân có sáu số hạng, biết rằng tổng của năm số hạng đầu là 31 và tổng của năm số hạng sau là 62.

Lời giải:

Gọi u^1, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6 là cấp số nhân của 6 số hạng.

+ Tổng của 5 số hạng đầu là 31 và 5 số hạng sau là 62, nghĩa là:

$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 31 \quad (1) \\ u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 = 62 \quad (2) \end{cases}$

Ta có: (2) – (1) <=> $u_6 - u_1 = 31$

Mà $u_6 = u_1.q^{6-1} = u_1.q^5$

=> $u_1.q_5 - u_1 = 31$ <=> $u_1(q^5 – 1) = 31$ (3)

Mặt khác, tổng của 5 số hạng đầu là:

$S_5 = \dfrac{u_1(q^5 - 1)}{q - 1} = 31 \quad (4).$

Thay (3) vào (4) ta được $\dfrac{31}{q - 1} = 31$

=> q – 1 = 1 => q = 2. Tính ra ta được $u_1 = 1$.

Với $u_n = u_1 q^{n-1}$

=> $u_2 = 2$; $u_3 = 4$, $u_4 = 8$, $u_5 = 16$, $u_6 = 32$

Vậy cấp số nhân cần tìm là: 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Bài 5 : Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh x là 1,4%. Biết rằng dân số của tỉnh hiện nay là 1, 8 triệu người. Hỏi với mức tăng như vậy thì sau 5 năm, 10 năm thì dân số của tỉnh đó tăng bao nhiêu?

Lời giải:

Theo tỷ lệ tăng dân số 1,4% thì dân số hàng năm của tỉnh x là các số hạng của cấp số nhân với công bội q = 1 + 14/1000 = 1.014

Và số hạng đầu u_1 = 1,8 triệu

Theo công thức: $u_n = u_1q^{n-1}$

=> Dân số của tỉnh x sau 5 năm sau là:

$u_6 = 1,8.(1.014)^5 \approx 1.9$ triệu (người)

Vậy sân số sau 10 năm là: $u_{11} = 1,8.(1.014)^{10} \approx 2.1$ triệu (người).

Bài 6 : Cho hình vuông C1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C1 (hình bên). Từ hình vuông C2 lại tiếp tục như trên để được hình vuông C3… Tiếp tục quá trình trên, ta nhận được các dãy các hình vuông C1, C2, C3, …,Cn

Gọi an là độ dài cạnh của hình vuông C_n. Chứng minh dãy số (a_n) là một cấp số nhân.

Lời giải:

Cạnh của hình vuông C_1 là: $a_1 = 4$ (giả thiết)

Theo giả thiết cạnh hình vuông chia thành 4 phần bằng nhau nên theo định lí Pi-ta-go (Pythagore), ta có:

- cạnh hình vuông thứ hai:

$C_2 = a_2 = \sqrt{1^2 + 3^2}$

- cạnh hình vuông thứ ba:

$C_3 = a_3 = \sqrt{\left(\frac{a_2}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a_2}{4}\right)^2} = a_2.\frac{\sqrt{10}}{4}$

Tổng quát cạnh của C_{n+1} là:

$C_{n+1} = a_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a_n}{4}\right)^2} = a_n.\frac{\sqrt{10}}{4} \quad \forall n \in N^*$

Vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 4$, công bội $q = \sqrt{(10)}/4$