

Bài 1 : Tìm các giá trị x thỏa mãn điều kiện của mỗi bất phương trình sau:

a. $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$; b. $\frac{1}{x^4 - 4} \leq \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$

c. $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x+1}$; d. $2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$

Lời giải

a) $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$

b) $\frac{1}{x^4 - 4} \leq \frac{2x}{x^2 - 4x + 3}$

Điều kiện $\begin{cases} x^2 - 4 \neq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ x \neq 1 \text{ và } x \neq 3 \end{cases}$

c) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x+1}$

Điều kiện $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

d) $2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$

Điều kiện $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq -4 \end{cases}$

Bài 2 : Chứng minh các bất phương trình sau vô nghiệm:

a. $x^2 + \sqrt{x+8} \leq -3$

b. $\sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} < \frac{3}{2}$

c. $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} > 1$

Lời giải

a. Ta có:

Vế trái : $x^2 + \sqrt{x+8} \geq 0 \quad \forall x \geq -8.$

Vế phải : $-3 < 0.$

Nên $x^2 + \sqrt{x+8} \leq -3$ vô lý.

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

b. Ta có: $\sqrt{1+2(x-3)^2} \geq 1 \quad \forall x$

$$\sqrt{5-4x+x^2} = \sqrt{1+(4-4x+x^2)} = \sqrt{1+(x-2)^2} \geq 1 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} \geq 1+1=2 > \frac{3}{2}.$$

Vậy bất phương trình $\sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} < \frac{3}{2}$ vô nghiệm.

c. Ta có: $1+x^2 < 7+x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} < \sqrt{7+x^2}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} < 0 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} > 1$ vô nghiệm.

Bài 3 : Giải thích vì sao các cặp bất phương trình sau tương đương?

a) $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$

b) $2x^2 + 5 \leq 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \leq 0$

c) $x+1 > 0$ và $x+1 + \frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x^2+1}$

d) $\sqrt{1-x} \geq x$ và $(2x+1)\sqrt{1-x} \geq x(2x+1)$

Lời giải

a) Nhân hai vế của bất phương trình thứ nhất với -1 và đổi chiều ta được bất phương trình thứ hai. Vậy hai bất phương trình đó tương đương nhau.

b) Chuyển vế và đổi dấu của các hạng tử ta được hai bất phương trình giống nhau. Vậy hai phương trình đó tương đương nhau.

c) Cộng vào hai vế bất phương trình thứ nhất với biểu thức $\frac{1}{x^2+1} > 0$ ta được bất phương trình thứ hai. Vậy hai bất phương trình đó tương đương nhau.

d) Hai bất phương trình có điều kiện chung là $x \geq 1$.

Ta có: $2x + 1 > 0$ ($\forall x \geq 1$) nên nhân hai vế bất phương trình thứ nhất với biểu thức $2x + 1$ ta được bất phương trình thứ hai. Vậy hai bất phương trình đó tương đương nhau.

Bài 4 : Giải các bất phương trình sau:

a. $\frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4}$

b) $(2x - 1)(x + 3) - 3x + 1 \leq (x - 1)(x + 3) + x^2 - 5$

Lời giải

$$\text{a)} \quad \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} < \frac{1-2x}{4} \Leftrightarrow \frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{1-2x}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow 12 \left[\frac{3x+1}{2} - \frac{x-2}{3} - \frac{1-2x}{4} \right] < 0$$

$$\Leftrightarrow 6(3x+1) - 4(x-2) - 3(1-2x) < 0$$

$$\Leftrightarrow 20x + 11 < 0 \Leftrightarrow 20x < -11$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{11}{20}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x < -\frac{11}{20}$

$$\text{b)} \quad (2x-1)(x+3) - 3x + 1 \leq (x-1)(x+3) + x^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 3 - 3x + 1 \leq x^2 + 2x - 3 + x^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 2 \leq 2x^2 + 2x - 8$$

$$\Leftrightarrow 0x \leq -6 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 5 : Giải hệ bất phương trình sau:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases} \quad ; \quad \text{b)} \quad \begin{cases} 15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \\ 2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \end{cases}$$

Lời giải

a) giải từng bất phương trình:

$$6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \Leftrightarrow 6x - 4x < 7 - \frac{5}{7} \Leftrightarrow x < \frac{22}{7}$$

$$\frac{8x+3}{2} < 2x+5 \Leftrightarrow 4x-2x < 5-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}$$

Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình:

$$T = \left(-\infty; \frac{22}{7}\right) \cap \left(-\infty; \frac{7}{4}\right) = \left(-\infty; \frac{7}{4}\right)$$

b) giải từng bất phương trình:

$$15x - 2 > 2x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 15x - 2x > \frac{1}{3} + 2 \Leftrightarrow x > \frac{7}{39}$$

$$2(x-4) < \frac{3x-14}{2} \Leftrightarrow 4(x-4) < 3x-14 \Leftrightarrow x < 2$$

Tập hợp nghiệm của hệ bất phương trình:

$$S = \left(\frac{7}{39}; +\infty\right) \cap (-\infty; 2) = \left(\frac{7}{39}; 2\right)$$