Bài 1 : Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng a, b. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Nếu a // (α), b ⊥(α) thì a ⊥b.

b) Nếu a // (α), b ⊥a thì b ⊥(α).

c) Nếu a // (α), b // (α) thì b // a.

d) Nếu a ⊥(α), b ⊥a thì b ⊥(α).

Lời giải:

a) Đúng

b) Sai

c) Sai

d) Sai

Giải thích:

a) a // (α) a // a' (α) (1)

b ⊥(α) b ⊥a' (2)

(1) và (2) a ⊥b

b) Điều này chưa đủ để b ⊥(α)

c) ● a // (α) a // a' (α)

● b // (α) b // b' (α)

a' và b' có thể cắt nhau nên a và b có thể chéo nhau

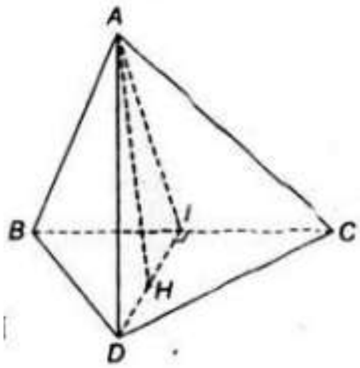
d) a ⊥(α) và b ⊥a thì b có thể nằm trong mp(α)

Bài 2 : Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI)

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Lời giải:



a) ΔABC cân tại A $\Rightarrow AI \perp BC$,

Tương tự $DI \perp BC$.

$$\left.\begin{matrix} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow BC \perp (AID)$$

b) $$\left.\begin{matrix} BC \perp (ADI) \\ AH \perp (ADI) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp BC$$

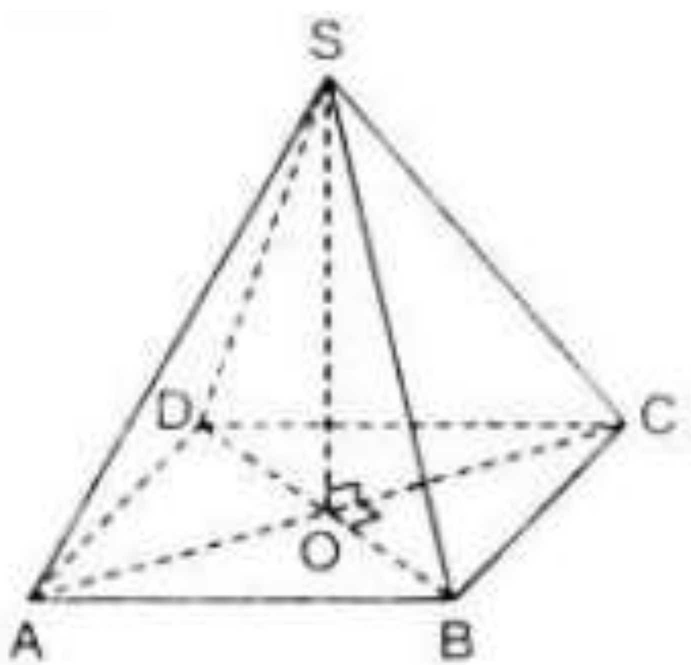
$$\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ AH \perp DI \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH \perp (BCD)$$

Bài 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD tâm O và có SA = SB = SC = SD. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD)

b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Lời giải:



a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$

SO là trung tuyến của hai tam giác cân

SAC, SBD nên: $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC \cap BD = O \end{cases}$

$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

b) Chứng minh $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \text{ (đường chéo hình thoi)} \\ AC \perp SO \\ BD \text{ cắt } SO \text{ trong } (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow AC \perp (SBD)$

*Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \\ AC \text{ cắt } SO \text{ trong } (SAC) \end{cases}$

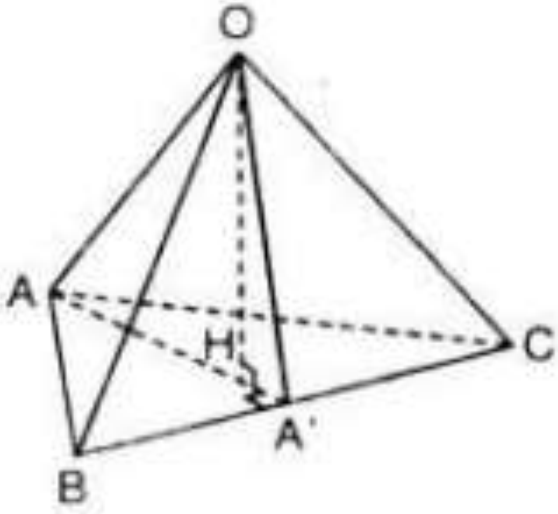
$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

Bài 4 : Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB và OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng :

a) H là trực tâm tam giác ABC.

b) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Lời giải:



a) Ta có : $\left.\begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp (OBC)$

$\left.\begin{matrix} OA \perp (OBC) \\ BC \subset (OBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

$OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BC \perp (OAH)$

Kết hợp $AH \subset (OAH)$, suy ra $AH \perp BC$

Chứng minh tương tự ta có : $BH \perp AC$

$\Rightarrow$ H là trực tâm của tam giác ABC

b) trong tam giác vuông OAM, OH là

đường cao, cho ta :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2} \quad (3)$$

$\left.\begin{matrix} BC \perp (OAH) \\ OM \subset (OAH) \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM \perp BC$

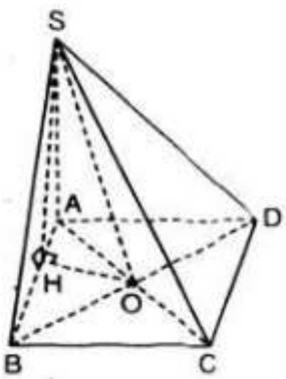
Trong tam giác vuông OBC, OM là đường cao nên:

$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

Bài 5 : Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho SA = SC, SB = SD. Chứng minh rằng:

a) SO ⊥(α)

b) Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).



Lời giải:

a) Chứng minh $SO \perp (\alpha)$

• $SA = SC \Rightarrow$ Tam giác SAC cân tại S

$\Rightarrow SO \perp AC$ (1)

• Tương tự, $SO \perp BD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow SO \perp mp(ABCD)$ hay $SO \perp (\alpha)$

b) Chứng minh $AB \perp (SOH)$

• Ta có $SO \perp mp(ABCD)$ (câu a)

$\Rightarrow AB \perp SO$ (3)

• Theo giả thiết, ta có $AB \perp SH$ (4)

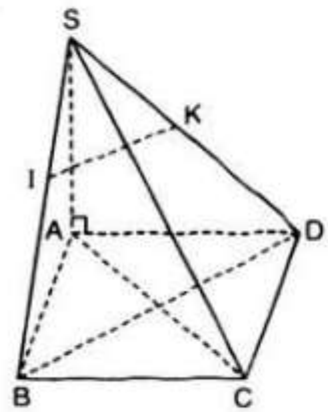
Từ (3) và (4) $\Rightarrow AB \perp (SOH)$

Bài 6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho SI/SB = SK/SD . Chứng minh:

a) BD ⊥ SC

b) IK ⊥mp(SAC)

Lời giải:



a) Cách 1:

Ta có BD ⊥ AC (đường chéo hình thoi)

$$\left.\begin{matrix} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp SA$$

Vậy:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$$

Cách 2: Sử dụng định lý 3 đường vuông góc:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ AC \text{ là hình chiếu của SC trên (ABCD)} \end{cases}$$

$\Rightarrow BD \perp AC$

b) IK ⊥ (SAC)

Do $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$ nên trong mp(SBD),

Ta có: $\left.\begin{matrix} IK // BD \\ BD \perp (SAC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow IK \perp (SAC)$

Bài 7 : Cho tứ diện SABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại B. Trong mp(SAB), kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho SM/SB = SN/SC .

Chứng minh rằng:

a) BC ⊥ (SAB), AM ⊥ (SBC)

b) SB ⊥ AN

Lời giải:

a) Chứng minh BC ⊥ (SAB)

Ta có:

- BC ⊥ AB (vì tam giác ABC vuông ở B)
- BC ⊥ SA (vì SA ⊥ (ABC))

⇒ BC ⊥ (SAB) (đpcm)

*Chứng minh AM ⊥ (SBC)

Ta có:

- BC ⊥ (SAB) ⊃ AM

⇒ BC ⊥ AM (1)

- SB ⊥ AM (2) (giả thiết)

(1) và (2) ⇒ AM ⊥ (SBC) (đpcm)

b) Chứng minh SB ⊥ AN

Ta có:

- $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} \Rightarrow MN // BC$ (3)
- BC ⊥ (SAB) (chứng minh trên)

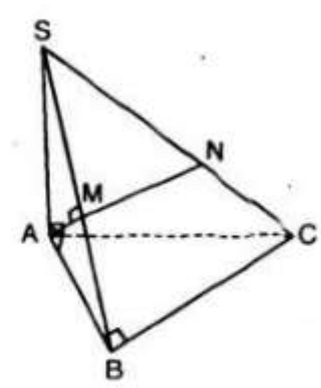
  ⇒ BC ⊥ SB (4)

*(3) và (4) ⇒ MN ⊥ SB (5)

*Theo giả thiết, ta có AM ⊥ SB (6)

Từ (5) và (6), suy ra SB ⊥ (AMN)

⇒ SB ⊥ AN (đpcm).



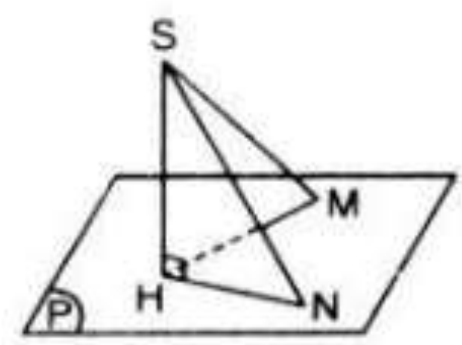
Bài 8 : Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (α) có hình chiếu trên (α) là điểm H. Với điểm M bất kì trên (α) và không trùng với H, ta gọi SM là đường xiên và đoạn HM là hình chiếu của đường xiên đó.

Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau;

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại, đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

Lời giải:



a) Giả sử ta có hai đường xiên SA, SB và các hình chiếu HA, HB của chúng trên mp(α)

Giả sử HA = HB

Vì SH ⊥ mp(α) nên SH ⊥ HA và SH ⊥ SB và các tam giác SHA, SHB là các tam giác vuông. Hai tam giác vuông SHA, SHB có canh SH chung và HA = HB nên :

ΔSHA = ΔSHB SA = SB

Ngược lại nếu SA = SB thì ΔSHA = ΔSHB ⇒ HA = HB

Kết quả, ta có HA = HB SA= SB (đpcm)

b) Giả sử có hai đường xiên SA, SC và các hình chiếu HA, HC của chúng trên mp(α) với giả thiết HC > HA.

Trên đoạn HC, lấy điểm B' sao cho HA' = HA ⇒ HC > HA'. Như vậy, theo kết quả câu a) ta có SA' = SA. Ta có trong các tam giác vuông SHB', SHC thì :

$SC^2 = SH^2 + HC^2$

$SA^2 = SH^2 + HA^2$

Vì HC > HA' nên $SC^2 > SA^2$ ⇒ SC > SA

Suy ra SC > SA

Như vậy HC > HA ⇒ SC > SA

Lí luận tương tự, ta có : SC > SA ⇒ HC > HA

Kết quả : HC > HA ⇔ SC > SA