

Bài 1 : Tìm số gia của hàm số $f(x) = x^3$, biết rằng:

a. $x_0 = 1; \Delta x = 1;$

b. $x_0 = 1; \Delta x = -0,1;$

Lời giải:

Số gia của hàm số được tính theo công thức:

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

a. $\Delta y = f(1 + 1) - f(1) = f(2) - f(1) = 2^3 - 1^3 = 7$

b. $\Delta y = f(1 - 0,1) - f(1) = f(0,9) - f(1) = (0,9)^3 - 1^3 = -0,271.$

Bài 2 :

Tính $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của các hàm số sau theo x và Δx

a. $y = 2x - 5$

b. $y = x^2 - 1$

c. $y = 2x^3$

d. $y = \frac{1}{x}$

Lời giải:

Ta có: $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x_0 = x - \Delta x$;

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x) - f(x - \Delta x)$$

a. * $\Delta y = 2x - 5 - f(x - \Delta x)$

$$= 2x - 5 - [2(x - \Delta x) - 5]$$

$$= 2x - 5 - 2x + 2\Delta x + 5 = 2\Delta x$$

$$* \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

b. * $\Delta y = x^2 - 1 - f(x - \Delta x) = x^2 - 1 - [(x - \Delta x)^2 - 1] = \Delta x(2x - \Delta x)$

$$* \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x - \Delta x)}{\Delta x} = 2x - \Delta x$$

c. * $\Delta y = 2x^3 - f(x - \Delta x) = 2x^3 - 2(x - \Delta x)^3$
 $= 2x^3 - 2[x^3 - 3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3]$
 $= 2\Delta x[3x^2 - 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2]$

$$* \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2[3x^2 - 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2]}{\Delta x} = 6x^2 - 6x \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2$$

d. * $\Delta y = \frac{1}{x} - f(x - \Delta x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - \Delta x} = \frac{x - \Delta x - x}{x(x - \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x - \Delta x)}$

$$* \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x - \Delta x)}$$

Bài 3 : Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của mỗi hàm số tại các điểm đã chỉ ra:

a. $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$

b. $y = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$

c. $y = \frac{x+1}{x-1}$

Lời giải:

a. $y = x^2 + x$ tại $x_0 = 1$

*Giả sử Δx là số gia của đối số tại $x_0 = 1$. Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1 + \Delta x) - f(1) \\ &= (1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x) - (1^2 + 1) \\ &= \Delta x(3 + \Delta x)\end{aligned}$$

$$* \frac{\Delta x}{\Delta y} = 3 + \Delta x$$

$$* \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + \Delta x) = 3$$

b. $y = f(x) = \frac{1}{x}$ tại $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(2 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)} \\ \frac{\Delta x}{\Delta y} &= -\frac{1}{2(2 + \Delta x)}\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2(2 + \Delta x)} \right) = -\frac{1}{4}$$

c. $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + \Delta x) - f(0) \\ &= \frac{(\Delta x + 1)}{(\Delta x - 1)} + 1 = 2 \frac{\Delta x}{\Delta x - 1} \\ \frac{\Delta x}{\Delta y} &= \frac{2}{\Delta x - 1}\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2}{\Delta x - 1} = -2$$

Bài 4 : Chứng minh rằng hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (\text{nếu } x \geq 0) \\ -x^2 & (\text{nếu } x < 0) \end{cases}$$

Không có đạo hàm tại điểm $x = 0$ nhưng có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^2 = 0$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Tại điểm $x = 2$,

$$\text{ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+\Delta x-1)^2 - (2-1)^2}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ (điều phải chứng minh).

Bài 5 : Viết phương trình tiếp tuyến đường cong $y=x^3$.

- Tại điểm $(-1; -1)$;
- Tại điểm có hoành độ bằng 2;
- Biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng 3.

Lời giải:

a. Phương trình tiếp tuyến của hàm số $y = x^3$ tại $M(-1;-1)$ là:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = f(x) = x^3, y'(x_0) = f'(x_0) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = 3x_0^2$$

Tại điểm $(-1; -1)$ tiếp tuyến với đồ thị có phương trình là:

$$y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2.$$

b. Tại điểm $(x_0, f(x_0))$, tiếp tuyến có hệ số góc bằng 3 nghĩa là :

$$f'(x_0) = 3x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Tại $(1; -1)$ tiếp tuyến có phương trình là:

$$y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$$

Tại điểm $(-1;-1)$ tiếp tuyến có phương trình là:

$$y = 3(x + 1) - 1 = 3x + 2.$$

Bài 6 : Viết phương trình tiếp tuyến của hypebol $y = 1/x$

Viết phương trình tiếp tuyến của hypebol $y = \frac{1}{x}$

a. Tại điểm $(\frac{1}{2}; 2)$;

b. Tại điểm có hoành độ bằng -1;

c. Biết rằng hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Hàm số $y = \frac{1}{x}$ có đạo hàm $y' = -\frac{1}{x^2}$

a. Tại điểm $(\frac{1}{2}; 2)$

$$\Rightarrow y'(\frac{1}{2}) = -4$$

Phương trình tiếp tuyến : $y - 2 = -4(x - \frac{1}{2})$

$$\Leftrightarrow y = -4x + 4$$

b. Tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$

$$\Rightarrow y'(-1) = -1 \text{ và } y(-1) = -1$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:

$$y + 1 = -1(x + 1) \text{ hay } y = -x - 2 = -(x + 2)$$

c. Hệ số góc tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(2; \frac{1}{2}\right) \\ x = -2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow N\left(-2; -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Tại $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$ phương trình tiếp tuyến là:

$$y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1$$

Tại $N\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ phương trình tiếp tuyến là:

$$y = -\frac{1}{4}(x + 2) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x - 1$$

Bài 7 : Một vật rơi tự do theo phương trình $s=1/2 gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

a. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t+\Delta t$, trong các trường hợp $\Delta t=0,1\text{s}$; $\Delta t=0,05\text{s}$; $\Delta t=0,001\text{s}$.

b. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5\text{s}$.

Lời giải:

a. Vận tốc trung bình trong khoảng thời gian từ t đến $t + \Delta t$ là:

$$v_{tb} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{4,9(t+\Delta t)^2}{\Delta t} = 9,8t + 4,9\Delta t$$

*Với $t = 5$, $\Delta t = 0,1$ ta có: $v_{tb} = 9,8(5) + 4,9(0,1) = 49,49 \text{ m/s}$

*Với $t = 5$, $\Delta t = 0,05$ ta có: $v_{tb} = 9,8(5) + 4,9(0,05) = 49,245 \text{ m/s}$

*Với $t = 5$, $\Delta t = 0,001$ ta có: $v_{tb} = 9,8(5) + 4,9(0,001) = 49,005 \text{ m/s}$

b. Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 5\text{s}$ là :

$$s'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 9,8t$$

Thay $t = 5\text{s}$, ta có vận tốc tức thời tại $t = 5\text{s}$ là :

$$v(5) = s'(5) = 9,8(5) = 49 \text{ m/s}$$