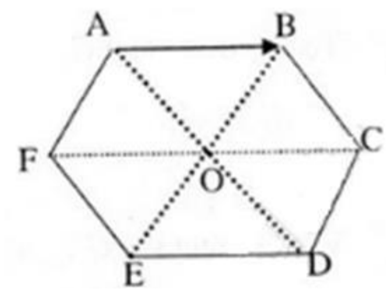
Bài 1 : Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Hãy chỉ ra các vectơ bằng vectơ AB có điểm đầu và điểm cuối là O hoặc các đỉnh của lục giác.

Lời giải:



Các vectơ bằng $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{ED}$.

Bài 2 : Cho hai vectơ a và b đều khác vectơ 0. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a, Hai vecto cùng hướng thì cùng phương.

b, Hai vecto $\vec{b}$ và $k\vec{b}$ cùng phương.

c, Hai vecto $\vec{a}$ và $(-2)\vec{a}$ cùng hướng.

d) Hai vector ngược hướng với vector thứ ba khác vectơ $\vec{0}$ thì cùng phương.

Lời giải:

a) Đúng   b) Đúng   c) Sai   d) Đúng

Bài 3: Tứ giác ABCD là hình gì nếu

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$

Lời giải:

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

=> AB // DC và AB = DC

=> Tứ giác ABCD là hình bình hành

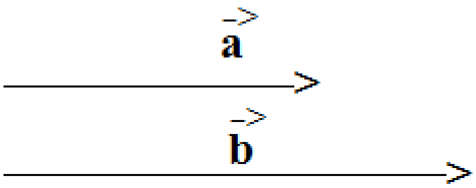
Đồng thời $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$ (hay AB = BC) nên nó là hình thoi.

Bài 4 : Chứng minh rằng

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$$

Lời giải:

- **Trường hợp 1:**



Khi $\vec{a}$; $\vec{b}$ cùng phương thì:

$$\vec{a} = k\,\vec{b} \text{ (với } k \in R\text{)}$$

và $\left|\vec{a}\right| = |k|\left|\vec{b}\right|$.

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{b}+k\,\vec{b}\right| = |1+k|\left|\vec{b}\right| \le \left(1+|k|\right)\left|\vec{b}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right| \le \left|\vec{b}\right| + |k|\left|\vec{b}\right| = \left|\vec{b}\right| + \left|\vec{a}\right|$$

- **Trường hợp 2:**

Khi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

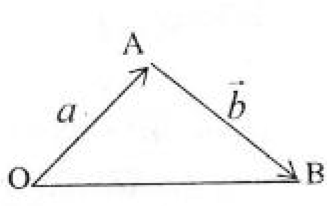
Cho điểm O tùy ý, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ hay $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = OB \quad (1)$

Mà ΔOAB có OA + AB $\geq$ OB

hay $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right| \geq OB \qquad (2)$

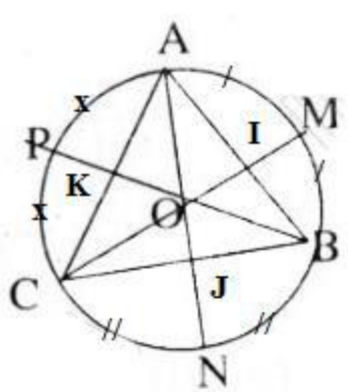


Từ (1) và (2) suy ra $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

Bài 5 : Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho:

a) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$; c) $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$;

Lời giải:



Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, và AC của tam giác đều ABC.

a) Gọi M là trung điểm của cung nhỏ AB

Khi đó OM đi qua trung điểm I của AB và $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OI}$

Mặt khác $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ Suy ra $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM}$.

b) Gọi N là trung điểm của cung nhỏ BC, tương tự phần a) ta có:

$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

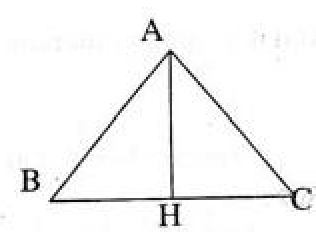
c) Gọi P là trung điểm của cung nhỏ AC, tương tự phần a) ta có:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}$$

Bài 6 : Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính:

a) $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right|$; b) $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$

Lời giải:



a) Từ A vẽ đường cao AH, ta có:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 2\overrightarrow{AH}$$

mà $\overrightarrow{AH} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = 2\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \overrightarrow{CB} = a$

Bài 7 : Cho sáu điểm M, N, P, Q, R, S bất kỳ. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{RQ}$$

Lời giải:

(Áp dụng qui tắc ba điểm)

Ta có:

$$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{RS}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QS}$$

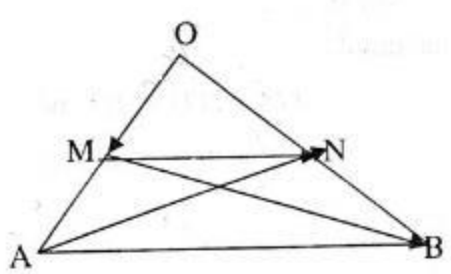
$$=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{RQ}\quad(\text{Vì } \overrightarrow{SP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QS}=\vec{0})$$

Bài 8 : Cho tam giác OAB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA và OB. Tìm các số m, n sao cho:

a) $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$; b) $\overrightarrow{AN}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$;

c) $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$; d) $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$.

Lời giải:



a) Ta có:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$$ (M là trung điểm của OA).

Từ $\overrightarrow{OM}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\Rightarrow m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}.$

$$\Leftrightarrow\left(m-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(m-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=\vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m-\frac{1}{2}=0\\ n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\ n=0\end{cases}$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right)$$ (do N là trung điểm của OB)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ nên $\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

Từ $\overrightarrow{AN}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\Rightarrow m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$

$$\Leftrightarrow(m+1)\overrightarrow{OA}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}=\vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1=0\\ n-\frac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-1\\ n=\frac{1}{2}\end{cases}$$

c) Ta có:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\text{ (MN là đường trung bình của }\Delta ABC\text{)}$$

Và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ nên $\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$

Từ $\overrightarrow{MN}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\Rightarrow m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}.$

$$\Leftrightarrow\left(m+\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+\frac{1}{2}=0\\ n-\frac{1}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{-1}{2}\\ n=\frac{1}{2}\end{cases}$$

d) Ta có:

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{BA}\right)\text{(do M là trung điểm của OA)}$$

$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ nên $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

Từ $\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}\Rightarrow m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

$$\Leftrightarrow(m+1)\overrightarrow{OA}+(n-1)\overrightarrow{OB}=\vec{0}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+\frac{1}{2}=0\\ n-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\frac{1}{2}\\ n=1\end{cases}$$

Bài 9 : Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C' thì

$$3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$$

Lời giải:

Ta có G là trọng tâm ΔABC nên

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

Ta có G' là trọng tâm ΔA'B'C' nên

$$\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{GA'}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}-\overrightarrow{GA}.$$

$$\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{GB'}-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}-\overrightarrow{GB}.$$

$$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{GC'}-\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GC'}+\overrightarrow{G'C'}-\overrightarrow{GC}.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$$

$$=3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+-\overrightarrow{GC}\right)$$

$$=3\overrightarrow{GG'}+\vec{0}+\vec{0}=3\overrightarrow{GG'}$$

Bài 10 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, các khẳng định sau đúng hay sai?

a, Hai vecto đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau.

b, Vecto *a*→≠ *0*→cùng phương với vecto *i*→nếu *a*→có hoành độ bằng 0.

c, Vecto *a*→có hoành độ bằng 0 thì cùng phương với vecta *j*→

Lời giải:

a) Đúng

Gọi $\vec{a}=(x_0;y_0)$

=> vecto đối của $\vec{a}$ là $\vec{b}=-\vec{a}=(-x_0;-y_0)$.

b) Sai

Ta có: $\vec{i} = (1;0)$

=> Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ cùng phương với vectơ $\vec{i}$ khi

$$\vec{a} = k\vec{i} = (k;0)\ (k \in R; k \neq 0).$$

c) Đúng

Ta có: $\vec{j} = (0;1)$

=> Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ cùng phương với vectơ $\vec{j}$ khi

$$\vec{a} = k\vec{j} = (0;k)(k \in R; k \neq 0).$$

Bài 11 :

Cho $\vec{a} = (2;1), \vec{b} = (3;-4); \vec{c} = (-7;2)$.

a) Tìm tọa độ của vecto $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c}$.

b) Tìm tọa độ vecto $\vec{x}$ sao cho $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$.

c) Tìm các số k và h sao cho $\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b}$.

Lời giải:

a) Ta có:

$3\vec{a} = (6;3)$; $2\vec{b} = (6;-8)$ và $-4\vec{c} = (28;-8)$.

$\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} - 4\vec{c} = (40;-13)$.

b) Ta có:

$\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \vec{x} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (8;-7)$.

c) Ta có:

$\vec{c} = k\vec{a} + h\vec{b} = (2k + 3h; k - 4h)$ và $\vec{c} = (-7;2)$.

Suy ra: $\begin{cases} 2k + 3h = -7 \\ k - 4h = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ h = -1 \end{cases}$

Bài 12 :

Cho $\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}-5\vec{j},\vec{v}=m\vec{i}-4\vec{j}$.

Tìm m để $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương.

Lời giải:

Ta có:

$$\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{i}=5\vec{j}\quad;\quad\vec{v}=m\vec{i}-4\vec{j}\Rightarrow\vec{v}=(m;-4)$$

$$\vec{u}//\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}=k\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}=km\\-5=-4k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{2}{5}\\k=\frac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow m=\frac{2}{5}$$

Bài 13 : Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

a) Điểm A nằm trên trục hoành thì có hoành độ bằng 0.

b) P là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi hoành độ của P bằng trung bình cộng các hoành độ của A và B.

c) Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì trung bình cộng các tọa độ tương ứng của A và C bằng trung bình cộng các tọa độ tương ứng của B và D.

Lời giải:

a) Sai

Vì điểm A nằm trên trục Ox nên có tọa độ (x; 0) với x ∈ R.

b) Sai

P là trung điểm của AB khi và chỉ khi hoành độ và tung độ của P bằng trung bình cộng các hoành độ và tung độ của A và B.

$$\begin{cases} x_p = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_p = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

c) Đúng

Vì ABCD là hình bình hành nên hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại trung điểm O của mỗi đường. Theo công thức tính tọa độ trung điểm thì khẳng định c đúng.