Bài 1 : Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = 4 + 3x – x^2$

b) $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 – 7x - 2$

c) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

d) $y = -x^3 + x^2 – 5$

Lời giải:

(**Lưu ý:**

Để xét xem dấu của hàm số là + hay - trong một khoảng nào đó ở bảng biến thiên, bạn lấy một giá trị bất kì nằm trong khoảng đó, thay vào đạo hàm y'. Nếu y' là dương thì dấu của y' trong khoảng đó là + và ngược lại.

Ví dụ: xét dấu $y' = -x^2 + 4$ trong khoảng (-2; 2). Chẳng hạn ta lấy một giá trị bất kì trong khoảng là 1, thay vào y' ta được: $y' = -(-1)^2 + 4 = 3 > 0$. Do đó dấu của y' trong khoảng (-2; 2) sẽ là +.)

a) D = R

$y' = 3 – 2x = 0 \Leftrightarrow x = 3/2$

Bảng biến thiên:

x	$-\propto$		$\frac{3}{2}$		$+\propto$
y'		+	0	-	
y	$-\propto$	↗	$\frac{25}{4}$	↘	$+\propto$

Vậy hàm số đồng biến trong khoảng (-∞; 3/2) và nghịch biến trong khoảng (3/2 ; + ∞).

b) D = R

$y' = x^2 + 6x - 7$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = -7$ hoặc $x = 1$

Bảng biến thiên:

x	-∝		-7		1		+ ∝
y'		+	0	-	0	+	
y		↗	$\frac{239}{3}$	↘		↗	+∝
	-∝				$-\frac{17}{3}$		

Vậy hàm số đồng biến trong các khoảng (-∞ ; -7) và (1 ; +∞); nghịch biến trong khoảng (-7; 1).

c) D = R

y'= $4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

y' = 0 ⇔ x = 0 hoặc x = 1 hoặc x = -1

Bảng biến thiên:

x	-∝		-1		0		1		+ ∝
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	-∝	↘		↗	3	↘		↗	+∝
			2				2		

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng (-∞ ; 1) và (0 ; 1); đồng biến trong các khoảng (-1 ; 0) và (1; +∞).

d) D = R

y'= $-3x_2 + 2x$

y' = 0 ⇔ x = 0 hoặc x = 2/3

Bảng biến thiên:

x	-∝		0		$\frac{2}{3}$		+ ∝
y'		-	0	+	0	-	
y	+ ∝	↘		↗	$-\frac{131}{27}$	↘	
			-5				−∝

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng (-∞ ; 0) và (2/3 ; + ∞), đồng biến trong khoảng (0 ; 2/3).

Bài 2 : Tìm các khoảng đơn điệu của các hàm số:

a) $y = \frac{3x+1}{1-x}$

b) $y = \frac{x^2-2x}{1-x}$

b) $y = \sqrt{(x^2 - x - 20)}$

d) $y = \frac{2x}{x^2-9}$

Lời giải:

a) D = R \ {1}

$$y' = \frac{-4}{(1-x)^2} < 0 \ \forall x \neq 1$$

y' không xác định tại x = 1

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-3	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	-3

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng (-∞ ; 1) và (1 ; +∞) .

b) D = R \ {1}

$$y = \frac{x^2-2x}{1-x} = \frac{x^2-2x+1-1}{1-x} = -x + 1 - \frac{1}{1-x}$$

y' không xác định tại x = 1

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$		‖	$+\infty$	
		↘	‖		↘
		$-\infty$	‖		$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng (-∞ ;1) và (1 ; +∞)

c) D = (-∞ ; -4] ∪ [5; +∞)

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x-20}}$$

y' không xác định tại x = -4 và x = 5

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-4	$\frac{1}{2}$	5		$+\infty$
y'		$-$	‖	0	‖	$+$	
y	$+\infty$						$+\infty$
		↘				↗	
			0		0		

Vậy hàm số nghịch biến trong nửa khoảng (-∞ ; -4] và đồng biến trong nửa khoảng [5 ; + ∞).

d) D = R \ {±3}

$$y' = \frac{-2x^2-18}{(x^2-9)^2} = \frac{-2(x^2+9)}{(x^2-9)^2} < 0 \ \forall x \in D$$

y' không xác định tại x = ±3

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
y'		–	||	–	||	–	
y	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trong các khoảng đó nên hàm số nghịch biến trong khoảng (-∞ ; -3) (-3; 3) và (3; +∞)

Bài 3 : Chứng minh rằng hàm số

$$y = \frac{x}{x^2+1}$$

đồng biến trên khoảng (-1; 1), nghịch biến trên khoảng (-∞; -1) và (1; +∞).

Lời giải:

TXĐ: D = R

$$y' = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)^2}$$

y' = 0 => x = ±1

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		–	0	+	0	–	
y		$\searrow$	y(-1)	$\nearrow$	y(1)	$\searrow$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng (-1; 1), nghịch biến trên khoảng (-∞; -1) và (1; +∞) (đpcm).

Bài 4 : Chứng minh rằng hàm số

$$y = \sqrt{2x - x^2}$$

đồng biến trên khoảng (0; 1), nghịch biến trên khoảng (1; 2).

Lời giải:

TXĐ: D = [0; 2]

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

y' = 0 => x = 1

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	0	−	

Từ bảng trên ta có:

+ y' > 0 với x ∈ (0; 1) do đó đồng biến trên khoản (0; 1);

+ y' < 0 với x ∈ (1; 2) nên nghịch biến trên khoảng (1; 2).

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng (0; 1), nghịch biến trên khoảng (1; 2) (đpcm).

Bài 5 : Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\text{a) } \tan x > x \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \quad \text{b) } \tan x > x + \frac{x^3}{3} \ \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

Lời giải:

a) Xét hàm số y= f(x) = tanx – x trên khoảng (0; π/2)

Ta có:

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \tan^2 x > 0 \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

=> hàm số đồng biến trên khoảng (0; π/2)

Do đó với x > 0 => f(x) > f(0) hay tanx - x > 0

=> tanx > x ∀ x ∈ (0; π/2) (đpcm)

b) Xét hàm số

$$y = g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3} \text{ trên khoảng } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 - x^2 = \tan^2 x - x^2 \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Theo kết quả câu a) thì tanx > x ∀ x ∈ (0; π/2)

Suy ra g'(x) > 0 ∀ x ∈ (0; π/2)

=> hàm số g'(x) đồng biến trên khoảng (0; π/2)

Do đó với x > 0 => g(x) > g(0)

hay $\tan x - x - \frac{x^3}{3} > 0 \Rightarrow \tan x > x + \frac{x^3}{3} \ \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (đpcm).