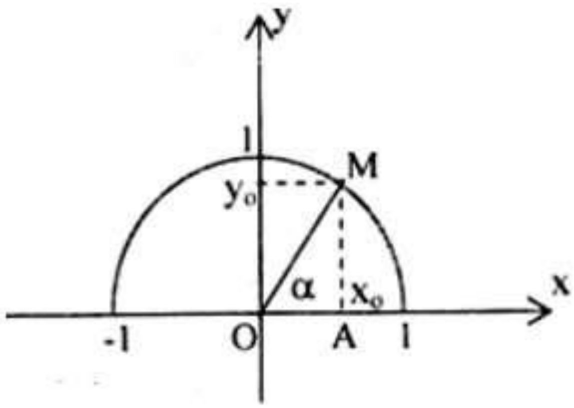
Bài 1 : Hãy nhắc lại định nghĩa giá trị lượng giác của một góc α với 0o ≤ α ≤ 180o. Tại sao khi α là các góc nhọn thì giá trị lượng giác này lại chính là các tỉ số lượng giác đã được học ở lớp 9?

Lời giải:



Với mỗi góc α (0^o ≤ α ≤ 180^o) ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho xOM = α và giả sử M có tọa độ M(x_o; y_o). Khi đó:

- sin của góc α là y_o, kí hiệu: sinα = y_o

Khi α là góc nhọn, trong ΔOAM ta có:

$$\sin\alpha = \frac{AM}{OM} = \frac{y_o}{1} = y_o$$

- côsin của góc α là x_o, kí hiệu: cosα = x_o

Khi α là góc nhọn, trong ΔOAM ta có:

$$\cos\alpha = \frac{OA}{OM} = \frac{x_o}{1} = x_o$$

– tang của góc α là $\frac{y_o}{x_o} (x_o \neq 0)$, kí hiệu $\tan\alpha = \frac{y_o}{x_o}$

Khi α là góc nhọn, trong ΔOAM ta có:

$$\tan\alpha = \frac{AM}{OA} = \frac{y_o}{x_o}$$

– côtang của góc α là $\frac{x_o}{y_o} (y_o \neq 0)$, kí hiệu $\cot\alpha = \frac{x_o}{y_o}$

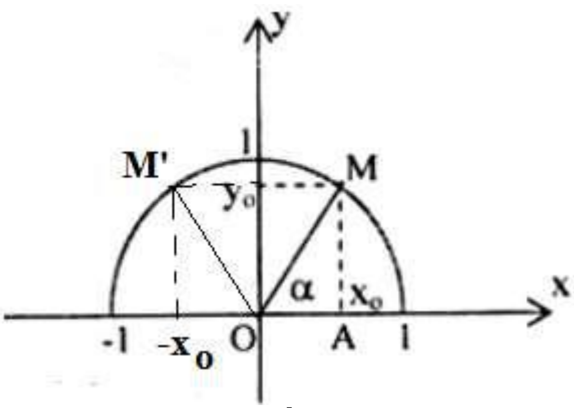
Khi α là góc nhọn, trong ΔOAM ta có:

$$\cot\alpha = \frac{OA}{AM} = \frac{x_o}{y_o}$$

(**Lưu ý:** Trong phần giải trên mình làm gộp 2 ý, các bạn cũng có thể tách riêng từng ý, nhưng như thế khá là dài dòng.)

Bài 2 : Tại sao hai góc bù nhau lại có sin bằng nhau và coossin đối nhau?

Lời giải:



Gọi $M(x_o; y_o)$ nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$

Khi đó điểm $M'(-x_o; y_o)$ trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM' = 180^o - \alpha$ (tức là $\angle xOM'$ là bù với $\angle xOM = \alpha$)

Do đó: $\sin\alpha = y_o = \sin(180^o - \alpha)$

$\cos\alpha = x_o = -(-x_o) = -\cos(180^o - \alpha)$

Bài 3 : Nhắc lại định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Tích vô hướng này với $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ không đổi đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khi nào?

Lời giải:

- Định nghĩa tích vô hướng:

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. **Tích vô hướng** của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a}.\vec{b} = \left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)$$

- Từ định nghĩa trên, khi $|\vec{a}|$ và $|\vec{b}|$ không đổi thì:

+ $\vec{a}.\vec{b}$ đạt giá trị lớn nhất khi $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = 1$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = 0^0 \Rightarrow \vec{a},\vec{b}$ cùng chiều.

+ $\vec{a}.\vec{b}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = -1$

$\Leftrightarrow \left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = 180^0 \Rightarrow \vec{a},\vec{b}$ ngược chiều.

Bài 4 : Trong mặt phẳng Oxy cho vectơ a→(-3; 1) và b→(2; 2). Hãy tính tích vô hướng a→.b→.

Lời giải:

Ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = -3.2 + 1.2 = -4$

Bài 5 : Hãy nhắc lại định lí côsin trong tam giác. Từ các hệ thức này hãy tính cosA, cosB, cosC theo các cạnh của tam giác.

Lời giải:

Định lí côsin trong tam giác ABC có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}.$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Bài 6 : Từ hệ thức a2 = b2 + c2 - 2bccosA trong tam giác, hãy suy ra định lý Pi-ta-go.

Lời giải:

Xét ΔABC vuông tại A, ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90^o$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (vì $\cos 90^o = 0$)

Đây chính là định lí Pi-ta-go.

Bài 7 : Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Lời giải:

Theo định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

Suy ra: a = 2RsinA, b = 2RsinB, c = 2RsinC (đpcm)

Bài 8 : Trong tam giác ABC. Chứng minh rằng

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$

Lời giải:

Theo hệ quả định lí côsin ta có:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

a) $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow \cos A > 0$

$\Leftrightarrow$ A là góc nhọn

Vậy góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$

b) $a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Leftrightarrow \cos A < 0$

$\Leftrightarrow$ A là góc tù

Vậy góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$

c) $a^2 = b^2 + c^2$

Theo định lí Pitago suy ra A là góc vuông

Vậy góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$

(**Lưu ý:** ở phần c) bạn có thể làm như a) và b) để suy ra cosA = 0 cũng được)

Bài 9 : Cho tam giác ABC có ∠A = 60o, BC = 6. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó

Lời giải:

Theo định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{6}{2.\sin 60^\circ} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Bài 10 : Cho tam giác ABC có a = 12, b = 16, c = 20. Tính diện tích S của tam giác, chiều cao ha, bán kính R, r của các đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác và đường trung tuyến ma của tam giác

Lời giải:

- Tính diện tích

$$p = \frac{12 + 16 + 20}{2} = 24$$

$$S = \sqrt{24(24-12)(24-16)(24-20)} = \sqrt{24.12.8.4} = 96 \text{ (đvdt)}$$

- Tính h_a

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Leftrightarrow 96 = \frac{1}{2}.12.h_a \Leftrightarrow 96 = 6.h_a$$

$$\Leftrightarrow h_a = \frac{96}{6} = 16.$$

- Tính R

$$S = \frac{abc}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{12.16.20}{4.96} = 10$$

- Tính r

$$S = pr \Leftrightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{96}{24} = 4$$

- Tính m_a

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(16^2 + 20^2) - 12^2}{4} = 292$$

=> $m_a = \sqrt{292} = 17,09$

Bài 11: Trong tập hợp các tam giác có hai cạnh là a và b, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Ta có:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C$$

Do đó để tam giác có diện tích lớn nhất thì sinC lớn nhất.

=> $\sin C = 1 \Rightarrow \angle C = 90^o$

Vậy trong tập hợp các tam giác có hai cạnh là a, b thì tam giác vuông có hai cạnh góc vuông là a, b có diện tích lớn nhất.