Bài 1 : Có 1kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng cứ sau một khoảng thời gian T = 24000 năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe con người(T được gọi chu kỳ bán rã).

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n.

a. Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n)

b. Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c. Từ kết quả câu b, chứng tỏ sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với khỏe con người, cho biết chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải:

a. Sau khi kì bán rã thứ nhất,

khối lượng chất phóng xạ là $u_1 = \frac{1}{2}$ kg.

Sau chu kì bán rã thứ hai là

$u_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2}$ kg…

Sau chu kì thứ n thì khối lượng là $u_n = \frac{1}{2^n}$ kg

b. $\lim u_n = \lim \frac{1}{2^n} = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ vì $0 < \frac{1}{2} < 1$

c. $\frac{1}{2^n}$ kg $< 10^{-6}$ g $= 10^{-9}$ kg $\Leftrightarrow 2^n > 10^9 \Leftrightarrow n \geq 30$

vậy sau 30 chu kì bằng 30 × 24.000 = 720.000 năm thì chất phóng xạ không còn độc hại.

Bài 2 :

Tìm dãy số (u_n) thỏa mãn $|u_n - 1| < \frac{1}{n^3} \quad \forall n > 0$

Chứng minh rằng: $\lim u_n = 1$

Lời giải:

Cho $d > 0$ nhỉ tùy ý.

Ta chọn số tự nhiên n_0 sao cho $\frac{1}{n_0^3} < d$

Ta có: $n_0^3 > \frac{1}{d} \Leftrightarrow n_0 > \sqrt[3]{\frac{1}{d}}$.

Khi đó thì với mỗi số hạng u_n của dãy số (u_n) mà $n \geq n_0$ ta đều có

$|u_n - 1| < \frac{1}{n_0^3} < d$.

Theo định nghĩa thì $\lim(u_n - 1) = 0$ hay $\lim u_n = 1$.

Bài 3 : Tìm các giới hạn sau:

a. $\lim \frac{6n-1}{3n+2}$

b. $\lim \frac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$

c. $\lim \frac{3^n+5.4^n}{4^n+2^n}$

d. $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$

Lời giải:

a. $\lim \dfrac{6n-1}{3n+2}$

$$= \lim \frac{n\left(6-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{6-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{6-0}{3-0} = 2$$

b. $\lim \dfrac{3n^2+n-5}{2n^2+1}$

$$= \lim \frac{n^2\left(3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{3+\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

c. $\lim \dfrac{3^n+5.4^n}{4^n+2^n}$

$$= \lim \frac{4^n\left(\frac{3^n}{4^n}+5\right)}{4^n\left(1+\frac{2^n}{4^n}\right)} = \lim \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n+5}{1+\left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

$$= \frac{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n + \lim 5}{\lim 1 + \lim\left(\frac{2}{4}\right)^n} = \frac{0+5}{1+0} = 5$$

d.

$$\lim\frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}=\lim\frac{\sqrt{n^2\left(9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}}{n\left(4-\frac{2}{n}\right)}$$

$$=\lim\frac{n\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{n\left(4-\frac{2}{n}\right)}=\lim\frac{\sqrt{9-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\left(4-\frac{2}{n}\right)}=\lim\frac{3}{4}$$

Bài 4 (trang 122 SGK Đại số 11): Để trang hoàng cho căn hộ của mình, chú chuột mickey quyết định tô màu một miếng bài hình vuông cạnh bằng 1, nó tô màu xám các hình vuông nhỏ được đánh số lần lượt là 1, 2, 3,…, n,…, trong đó cạnh của hình vuông kế tiếp bằng một nửa cạnh hình vuông trước đó. (hình dưới). Giả sử quy trình tô màu của Mickey có thể diễn ra vô hạn.

a. Gọi u_n là diện tích hình vuông màu xám thứ n. Tính u_1, u_2, u_3 và u_n

b. Tính lim S_n với $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$

Lời giải:

$$a. u_1=\frac{1}{4},\ u_2=\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4^2},\ldots,\ u_n=\frac{1}{4^n}$$

$$b. \lim S_n=\lim\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right)=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$$

Bài 5 (trang 122 SGK Đại số 11):

Tính tổng $S= -1+\frac{1}{10}-\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{10^{n-1}}+\ldots$

Lời giải:

Ta có, dãy số -1, $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots, \frac{(-1)^n}{10^{n-1}}, \dots$

là một cấp số nhân lùi vô hạn với số

hạng đầu là -1, công bội $q = \frac{1}{10}$.

Tổng của cấp số nhân đó là:

$$S = -1 + \frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{(-1)^n}{10^{n-1}} + \dots = \frac{-1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{-10}{11}.$$

Bài 6 (trang 122 SGK Đại số 11): Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn a = 1,020 202…(chu kì là 02). Hãy viết a dưới dạng một phân số:

Lời giải:

$$a = 1,020202\ldots = 1 + \frac{2}{100} + \frac{2}{10000} + \frac{2}{1000000} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^4} + \frac{2}{10^6} + \ldots = 1 + \frac{\frac{2}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 1 + \frac{2}{99} = \frac{101}{99}$$

Bài 7 : Tính các giới hạn sau:

a. $\lim (n^3 + 2n^2 - n + 1)$

b. $\lim(-n^2 + 5n - 2)$

c. $\lim (\sqrt{n^2 - n} - n)$

d. $\lim (\sqrt{n^2 - n} + n)$

Lời giải:

a. $\lim (n^3 + 2n^2 - n + 1) = \lim n^3.\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right)$

$= \lim n^3.\lim\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}\right) = +\infty.1 = +\infty$

b. $\lim(-n^2 + 5n - 2) = \lim[(-1).n^2.\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)]$

$= \lim(-1).\lim n^2.\lim\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right) = -\infty$

c. $\lim(\sqrt{n^2 - n} - n) = \lim \frac{(\sqrt{n^2 - n} - n)(\sqrt{n^2 - n} + n)}{(\sqrt{n^2 - n} + n)}$

$= \lim \frac{(n^2 - n - n^2)}{(\sqrt{n^2 - n} + n)} = \lim \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \lim \frac{-n}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)} = -\frac{1}{2}$

d. Ta có:

$\lim(\sqrt{n^2 - n} + n)$

$= \lim\left(n\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + n\right) = \lim n.\lim\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1\right) = +\infty.2 = +\infty$

Bài 8 (trang 122 SGK Đại số 11): Cho hai dãy số (un) và (nn). Biết lim un = 3, lim vn = + ∞. Tính các giới hạn:

a. $\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$

b. $\lim \frac{v_n + 2}{v_n^2 - 1}$

Lời giải:

a. $$\lim \frac{3u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{\lim(3u_n - 1)}{\lim(u_n + 1)} = \frac{\lim 3u_n - \lim 1}{\lim u_n + \lim 1} = \frac{9 - 1}{3 + 1} = 2$$

b. $$\lim \frac{v_n + 2}{v_n^2 - 1} = \lim \frac{v_n\left(1 + \frac{2}{v_n}\right)}{v_n\left(v_n - \frac{1}{v_n}\right)} = \frac{\lim\left(1 + \frac{2}{v_n}\right)}{\lim\left(v_n - \frac{1}{v_n}\right)}$$

$$= \frac{\lim 1 + \lim \frac{2}{v^n}}{\lim v_n - \frac{1}{\lim v_n}} = 0.$$