

Bài 1 :

Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4} - \sqrt{-x^2 + 8x - 15}$

a. Tìm tập xác định A của hàm số f(x).

b. Giả sử $B = \{x \in \mathbb{R} : 4 < x \leq 5\}$

Hãy xác định các tập hợp $A \setminus B$ và $\mathbb{R} \setminus (A \setminus B)$.

Lời giải

$$\text{a. } f(x) \text{ xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x + 4 \geq 0 \\ -x^2 + 8x - 15 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x \in [3; 5] \end{cases}$$

$$\text{b. Ta có: } B = \{x \in \mathbb{R} : 4 < x \leq 5\} = (4; 5].$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A; x \notin B\} = [3; 4].$$

$$\mathbb{R} \setminus (A \setminus B) = (-\infty; 3) \cup (4; +\infty).$$

Bài 2 : Cho phương trình : $mx^2 - 2x - 4m - 1 = 0$

a. Chứng minh rằng với mọi giá trị của $m \neq 0$ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt.

b. Tìm giá trị của m để -1 là một nghiệm của phương trình. Sau đó tìm nghiệm còn lại.

Lời giải

a. Ta có : $\Delta' = 1 + m(4m + 1) = 4m^2 + m + 1$

$$= \left(2m + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0 \forall m \neq 0.$$

Vậy với $m \neq 0$ phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

b. $f(-1) = m + 2 - 4m - 1 = -3m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}.$

Với $m = \frac{1}{3}$, phương trình có nghiệm $x_1 = -1$.

Gọi nghiệm còn lại là x_2

Theo định lý viết ta có :

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{m} \Leftrightarrow -1 + x_2 = \frac{2}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x_2 = 7.$$

Bài 3 : Cho phương trình : $x^2 - 4mx + 9(m-1)^2$

- Xem xét với các giá trị nào của m thì phương trình trên có nghiệm ?
- Giả sử x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho, hãy tính tổng và tích của chúng. Tìm một hệ thức giữa x_1 và x_2 độc lập với m .
- Xác định giá trị của m để hiệu các nghiệm của phương trình bằng 4.

Lời giải

a. Ta có : $\Delta' = 4m^2 - 9(m+1)^2 = -5m^2 + 18m - 9$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \leq m \leq 5$.

b. Với $m \in \left[\frac{3}{5}; 5\right]$ phương trình có các nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn :

$$x_1 + x_2 = 4m ; x_1 x_2 = 9(m-1)^2 \Rightarrow x_1 x_2 = 9\left(\frac{x_1 + x_2}{4} - 1\right)^2.$$

Đó là hệ thức giữa hai nghiệm của phương trình không phụ thuộc vào m.

c. Không mất tính tổng quát, giả sử $x_2 > x_1$.

Khi đó ta có : $x_2 - x_1 = 4$ và $x_1 + x_2 = 4m \Rightarrow x_2 = 2(m+1)$.

thay biểu thức của x_2 vào phương trình ta có :

$$4(m+1)^2 - 8m(m+1) + 9(m-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 18m + 13 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1, m_2 = \frac{13}{5}.$$

Nếu $m = 1$ hoặc $m = \frac{13}{5}$ thì hiệu hai nghiệm của phương trình bằng 4.

Bài 4 : Chứng minh rằng các bất đẳng thức :

a. $5(x-1) < x^5 - 1 < 5x^4(x-1)$ biết $x-1 > 0$

b. $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4 \geq 0$ biết $x+y \geq 0$

c. $\sqrt{a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 5$ biết $a+b+c=1; a, b, c \geq -\frac{1}{4}$

Lời giải

a. Ta có : $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x^4 > x^3 > x^2 > x > 1$

$$\Rightarrow 5x^4 > x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 5$$

$$\Rightarrow 5x^4(x-1) > (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1 > 5(x-1)$$

Vậy $5(x-1) < x^5 - 1 < 5x^4(x-1) \quad \forall x > 1$.

b. $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$

$$= (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - xy(x^3 + y^3)$$

$$= (x+y) \left[(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) - xy(x^2 - xy + y^2) \right]$$

$$= (x+y) \left[(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - 2xy(x^2 + y^2) \right]$$

$$= (x+y)(x-y)^2(x^2 + y^2) \geq 0$$

(do $x+y \geq 0, (x-y)^2 \geq 0, x^2 + y^2 \geq 0$)

$$c. \text{ Ta có : } \left(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \right)^2$$

$$= (4a+1) + (4b+1) + (4c+1) + 2\sqrt{4a+1}\sqrt{4b+1} + 2\sqrt{4b+1}\sqrt{4c+1} + 2\sqrt{4c+1}\sqrt{4a+1}.$$

$$= 4(a+b+c) + 3 + 2\sqrt{4a+1}\sqrt{4b+1} + 2\sqrt{4a+1}\sqrt{4c+1} + 2\sqrt{4b+1}\sqrt{4c+1}$$

$$\leq 4(a+b+c) + 3 + (4a+1) + (4b+1) + (4a+1) + (4c+1) + (4b+1) + (4c+1)$$

(BĐT TBC-TBN (Côsi))

$$\leq 12(a+b+c) + 9 \leq 21 < 25. (DPCM)$$

Bài 5 : Giải hệ phương trình sau bằng cách đưa về hệ tam giác :

$$\begin{cases} 3x + 5y - z = 9 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - 2y - 3z = -3 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{Ta có : } \begin{cases} 3x + 5y - z = 9 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - 2y - 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 10y - 2z = 18 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - 2y - 3z = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 13y = 19 \\ x + 3y + 2z = 1 \\ 5x - 2y - 3z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 13y = 19 \\ 3x + 9y + 6z = 3 \\ 10x - 4y - 6z = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 13y = 19 \\ 13x + 5y = -3 \\ 10x - 4y - 6z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 91x + 169y = 247 \\ 91x + 35y = -21 \\ 10x - 4y - 6z = -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 134y = 268 \\ 91x + 35y = -21 \\ 10x - 4y - 6z = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $(x; y; z) = (-1; 2; -2)$

Bài 6 :

- a. Xét dấu của biểu thức $f(x) = 2x(x+2)-(x+2)(x+1)$
- b. Xét sự biến thiên và vẽ trong cùng một hệ tọa độ vuông góc đồ thị của các hàm số : $y = 2x(x+2)$ (C_1) và $y = (x+2)(x+1)$ (C_2)
- c. Tính các hệ số a, b, c để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị lớn nhất bằng 8 và đồ thị của nó đi qua A và B.

Lời giải

a. Ta có : $f(x) = (x+2)(2x-x-1) = (x+2)(x-1)$.

X	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	0	+

$$\Rightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 1$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

b. Hàm số $y = 2x(x+2) = 2x^2 + 4x$.

* Tập xác định: \mathbb{R} .

* Đỉnh $S_1(-1; -2)$.

* Giao điểm với trục tọa độ : $A(-2; 0); O(0; 0)$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$	-2	$+\infty$

– Hàm số $y = (x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$

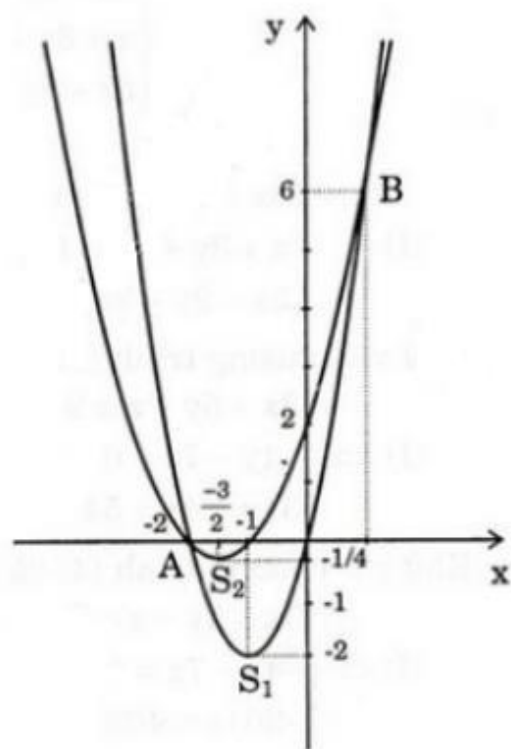
* Tập xác định : \mathbb{R} ; Đỉnh $S_2\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

* Giao điểm với trục tọa độ : $A_2(-2;0); B_2(-1;0); C(0;2)$

* Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

Đồ thị :



Cách 1 : Quan sát đồ thị ta thấy (C_1) cắt (C_2) tại $A(-2 ; 0)$ và $B(1 ; 6)$.

Cách 2 :

Hoành độ giao điểm A và B của (C_1) và (C_2) là nghiệm của phương trình :

$$2x(x+2) = (x+2)(x+1) \Leftrightarrow 2x(x+2) - (x+2)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(2x-x+1) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$* \quad x = -2 \Rightarrow y = 2(-2) \cdot (-2+2) = 0$$

$$* \quad x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1(1+2) = 6$$

Vậy (C_1) cắt (C_2) tại $A(-2 ; 0)$ và $B(1 ; 6)$.

c. Do đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đi qua A và B nên :

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b - 2 \\ c = 8 - 2b \end{cases} \quad (1)$$

Để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng 8 thì

Bài 7 (): Chứng minh các hệ thức sau :

$$\text{a. } \frac{1 - 2 \sin^2 a}{1 + \sin 2a} = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

$$\text{b. } \frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} = \tan 3a$$

$$\text{c. } \frac{\sin^4 a + \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)} = \cos^2 \frac{a}{2}$$

$$\text{d. } \frac{\tan 2x \tan x}{\tan 2x - \tan x} = \sin 2x$$

Lời giải

a. Ta có :

$$\frac{1 - 2 \sin^2 a}{1 + \sin 2a} = \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{\cos^2 a + \sin^2 a + 2 \sin a \cos a}$$

$$= \frac{(\cos + \sin a)(\cos - \sin a)}{(\cos + \sin a)^2} = \frac{\cos + \sin a}{\cos + \sin a}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sin a}{\cos a}}{1 + \frac{\sin a}{\cos a}} = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$$

b.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a} \\ &= \frac{2 \sin \frac{a+5a}{2} \cos \frac{5a-a}{2} + \sin 3a}{2 \cos \frac{a+5a}{2} \cos \frac{5a-a}{2} + \cos 3a} \\ &= \frac{\sin 3a(1 + 2 \cos 2a)}{\cos 3a(1 + 2 \cos 2a)} = \tan 3a \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^4 a + \cos^4 a + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)} \\ &= \frac{(\sin^2 a + \cos^2 a)(\sin^2 a - \cos^2 a) + \cos^2 a}{2(1 - \cos a)} \\ &= \frac{(\sin^2 a - \cos^2 a) + \cos^2 a}{4 \sin^2 \frac{a}{2}} = \frac{4 \sin^2 \frac{a}{2} \cos^2 \frac{a}{2}}{4 \sin^2 \frac{a}{2}} = \cos^2 \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{d. } \frac{\tan 2x \tan x}{\tan 2x - \tan x} = \frac{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \tan x}{\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} - \tan x} = \frac{2 \tan x}{\tan^2 x + 1}$$

$$2 \tan x \cos^2 x = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ \frac{-\Delta}{4a} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \frac{4ac - b^2}{4a} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ 4ac - b^2 = 32b \end{cases} \quad (2)$$

Thay (1) và (2) ta có :

$$4(b-2)(8-2b) - b^2 = 32(b-2)$$

$$\Leftrightarrow 4(8b - 2b^2 - 16 + 4b) - b^2 = 32b - 64$$

$$\Leftrightarrow 32b - 8b^2 - 64 + 16b - b^2 = 32b - 64$$

$$\Leftrightarrow 9b^2 - 16b = 0 \Leftrightarrow b(9b - 16) \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \frac{16}{9} \end{cases}$$

- với $b = 0$ thì $\begin{cases} a = -2 \\ c = 8 \end{cases}$. Vậy hàm số là $y = -2x^2 + 8$

- với $b = \frac{16}{9}$ thì $\begin{cases} a = -\frac{2}{9} \\ c = \frac{40}{9} \end{cases}$. Vậy hàm số là $y = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{16}{9}x + \frac{40}{9}$

Bài 8 (): Rút gọn các biểu thức sau :

a. $\frac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a}$

b. $\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} \tan^2 \frac{a}{2} - \cos^2 a$

c. $\frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$

Lời giải

$$\text{a. } \frac{1 + \sin 4a - \cos 4a}{1 + \cos 4a + \sin 4a}$$

$$= \frac{2 \sin^2 2a + 2 \sin 2a \cos 2a}{2 \cos^2 2a + 2 \sin 2a \cos 2a} = \frac{2 \sin 2a (\sin 2a + \cos 2a)}{2 \cos 2a (\sin 2a + \cos 2a)} = \tan 2a$$

$$\text{b. } \frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} \tan^2 \frac{a}{2} - \cos^2 a$$

$$= \frac{2 \cos^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{2}}{2 \sin^2 \frac{a}{2} \sin^2 \frac{a}{2}} - \cos^2 a = 1 - \cos^2 a = \sin^2 a.$$

$$\text{c. } \frac{\cos 2x - \sin 4x - \cos 6x}{\cos 2x + \sin 4x - \cos 6x}$$

$$= \frac{(\cos 2x - \cos 6x) - \sin 4x}{(\cos 2x - \cos 6x) + \sin 4x} = \frac{2 \sin \frac{2x+6x}{2} \sin \frac{6x-2x}{2} - \sin 4x}{2 \sin \frac{2x+6x}{2} \sin \frac{6x-2x}{2} + \sin 4x} = \frac{2 \sin 2x - 1}{2 \sin 2x + 1}.$$

Bài 9 (): Tính :

$$\text{a. } 4(\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ)$$

$$\text{b. } 96\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\text{c. } \tan 9^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ - \tan 27^\circ$$

Lời giải

a. Ta có:

$$\begin{aligned}& 4(\cos 24^{\circ} + \cos 48^{\circ} - \cos 84^{\circ} - \cos 12^{\circ}) \\&= 4(2 \cos 36^{\circ} \cdot \cos 12^{\circ} - 2 \cos 48^{\circ} \cdot \cos 36^{\circ}) \\&= 8 \cos 36^{\circ} \cdot (\cos 12^{\circ} - \cos 48^{\circ}) \\&= 8 \cos 36^{\circ} \cdot (-2 \sin 30^{\circ} \sin(-18^{\circ})) \\&= 8 \cos 36^{\circ} \cdot \sin 18^{\circ}.\end{aligned}$$

Đặt $x = 36^{\circ}$, ta có : $\sin 3x = \sin(180^{\circ} - 3x) = \sin 2x$

$$\Leftrightarrow 3 \sin x - 4 \sin^3 x = 2 \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 3 - 4(1 - \cos^2 x) = 2 \cos x \quad (\text{do } \sin x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4 \cos^2 x - 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

$$\Rightarrow \cos 36^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow 1-2 \sin ^2 18^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 18^{\circ} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} .$$

$$\text{Vậy } 4(\cos 24^{\circ} + \cos 48^{\circ} - \cos 84^{\circ} - \cos 12^{\circ}) = 8 \cos 36^{\circ} . \sin 18^{\circ} .$$

$$= 8 . \frac{1+\sqrt{5}}{4} . \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = 2(1+\sqrt{5}) \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = 2 .$$

$$\text{b. Ta có : } 96 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 48 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 24 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} = 12 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 6 \sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} = 9$$

$$\begin{aligned}
\text{c. Ta có : } & \tan 9^{\circ} - \tan 63^{\circ} + \tan 81^{\circ} - \tan 27^{\circ} \\
&= \tan 9^{\circ} - \cot 27^{\circ} + \cot 9^{\circ} - \tan 27^{\circ} \\
&= \tan 9^{\circ} + \cot 9^{\circ} - (\cot 27^{\circ} + \tan 27^{\circ}) \\
&= \tan 9^{\circ} + \frac{1}{\tan 9^{\circ}} - \left(\tan 27^{\circ} + \frac{1}{\tan 27^{\circ}} \right) \\
&= \frac{\tan^2 9^{\circ} + 1}{\tan 9^{\circ}} - \frac{\tan^2 27^{\circ} + 1}{\tan 27^{\circ}} \\
&= \frac{1}{\cos^2 9^{\circ} \cdot \tan 9^{\circ}} - \frac{1}{\cos^2 27^{\circ} \cdot \tan 27^{\circ}} \\
&= \frac{1}{\cos 9^{\circ} \cdot \sin 9^{\circ}} - \frac{1}{\cos 27^{\circ} \cdot \sin 27^{\circ}} \\
&= \frac{1}{2 \sin 18^{\circ}} - \frac{1}{2 \sin 54^{\circ}} \\
&= 2 \frac{\sin 54^{\circ} - \sin 18^{\circ}}{\sin 54^{\circ} \cdot \sin 18^{\circ}} \\
&= 4 \frac{\cos 36^{\circ} \cdot \sin 18^{\circ}}{\sin 54^{\circ} \cdot \sin 18^{\circ}} = 4 \frac{\cos 36^{\circ}}{\sin 54^{\circ}} = 4.
\end{aligned}$$

(vì $36^{\circ} + 54^{\circ} = 90^{\circ}$ nên $\sin 54^{\circ} = \cos 36^{\circ}$)

Bài 10 :Rút gọn :

a. $\cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5}$

b. $\sin \frac{x}{7} + \sin \frac{3x}{7} + \sin \frac{5x}{7}$

Lời giải

a. Nhân biểu thức

$\cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5}$ với $\sin \frac{x}{5}$ ta có :

$$\sin \frac{x}{5} \cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \frac{2x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5}$$

$$= \frac{1}{4} \sin \frac{4x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5} = \frac{1}{8} \sin \frac{8x}{5} \cos \frac{8x}{5}$$

$$= \frac{1}{16} \sin \frac{16x}{5} = \sin \frac{16x}{5} : 16 \sin \frac{x}{5}$$

$$\text{Vậy } \cos \frac{x}{5} \cos \frac{2x}{5} \cos \frac{4x}{5} \cos \frac{8x}{5} = \sin \frac{16x}{5} : 16 \sin \frac{x}{5}$$

b. Ta có : $\sin \frac{x}{7} + \sin \frac{3x}{7} + \sin \frac{5x}{7} = \sin \frac{3x}{7} + \left(\sin \frac{5x}{7} + \sin \frac{x}{7} \right)$

$$= \sin \frac{3x}{7} + 2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{5x}{7} + \frac{x}{7} \right) \cos \frac{1}{2} \left(\frac{5x}{7} - \frac{x}{7} \right)$$

$$= \sin \frac{3x}{7} \left(1 + 2 \cos \frac{2x}{7} \right) = \sin \frac{3x}{7} \left(4 \cos^2 \frac{x}{7} - 1 \right)$$

$$\text{Vậy } \sin \frac{x}{7} + \sin \frac{3x}{7} + \sin \frac{5x}{7} = \sin \frac{3x}{7} \left(4 \cos^2 \frac{x}{7} - 1 \right)$$

Bài 11): Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có :

a. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

b. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

Lời giải

a. Ta có : $A + B + C = \pi \Leftrightarrow A = \pi - (B + C)$

$$\Rightarrow \tan A = \tan [\pi - (B + C)] = -\tan(B + C) = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B \tan C - 1}$$

$$\Rightarrow \tan A (\tan B \tan C - 1) = \tan B + \tan C$$

Vậy $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

b. $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

ta có : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$$= 2 \sin(A + B) \cos(A - B) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos C]$$

$$= 2 \sin C [\cos(A - B) + \cos(A + B)] = 4 \sin C \sin A \sin B$$

Vậy $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

Bài 12 : Không sử dụng máy tính, hãy tính :

$$\frac{\sin 40^\circ - \sin 45^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ - \cos 45^\circ + \cos 50^\circ} - \frac{6(\sqrt{3} + 3 \tan 15^\circ)}{3 - \sqrt{3} \tan 15^\circ}$$

Lời giải

Ta có : $\sin 45^{\circ} = \cos 50^{\circ}; \sin 40^{\circ} = \cos 50^{\circ}; \sin 50^{\circ} = \cos 40^{\circ}$

$$\text{Suy ra } \frac{\sin 40^{\circ} - \sin 45^{\circ} + \sin 50^{\circ}}{\cos 40^{\circ} - \cos 45^{\circ} + \cos 50^{\circ}} - \frac{6(\sqrt{3} + 3 \tan 15^{\circ})}{3 - \sqrt{3} \tan 15^{\circ}}$$

$$= \frac{\cos 50^{\circ} - \sin 45^{\circ} + \cos 40^{\circ}}{\cos 40^{\circ} - \cos 45^{\circ} + \cos 50^{\circ}} - \frac{6.3 \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \tan 15^{\circ} \right)}{3 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \tan 15^{\circ} \right)}$$

$$= 1 - 6 \left[\frac{\tan 30^{\circ} + \tan 15^{\circ}}{1 - \tan 30^{\circ} \tan 15^{\circ}} \right] = 1 - 6 \tan 45^{\circ} = -5$$