Bài 1 : Bằng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a. $y = 7 + x - x^2$ tại $x_o = 1$

b. $y = x^3 - 2x + 1$ tại $x_o = 2$.

Lời giải:

$$a.\ y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[7+(1+\Delta x)-(1+\Delta x)^2-(7+1-1^2)]}{\Delta x} = -1$$

$$b.\ y'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(2+\Delta x)^3-2(2+\Delta x)+1]-[2^3-2.2+1]}{\Delta x} = 10$$

Bài 2 : Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

b. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4$

c. $y = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1$

d. $y = 3x^5(8 - 3x^2)$

Lời giải:

$$a.\ y' = (x^5 - 4x^3 + 2x - 3)' = (x^5)' - (4x^3)' + (2x)' - (3)'$$
$$= 5x^4 - 4.(3x^2) + 2 = 5x^4 - 12x^2 + 2$$

$$b.\ y' = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4\right)' = \left(\frac{1}{4}\right)' - \left(\frac{1}{3}x\right)' + (x^2)' - (0,5x^4)'$$

$$= 0 - \frac{1}{3} + 2x - 0,5.(4x^3) = -\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$$

$$c.\ y' = \left(\frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{5} - 1\right)' = \left(\frac{x^4}{2}\right)' - \left(\frac{2x^3}{3}\right)' + \left(\frac{4x^2}{5}\right)' - (1)'$$

$$= \frac{4x^3}{2} - \frac{3.(2x^2)}{3} + \frac{2.(4x)}{5} = 2x^3 - 2x^2 + \frac{8}{5}x$$

$$d.\ y' = [3x^5(8 - 3x^2)]' = (3x^5)'(8 - 3x^2) + 3x^5(8 - 3x^2)'$$
$$= 15x^4((8 - 3x^2) + 3x^5(-6x) = -63x^6 + 120x^4$$

Bài 3 : Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a. $y = (x^7 - 5x^2)^3$

b. $y = (x^2 + 1)(5-3x^2)$

c. $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$

d. $y = \frac{3 - 5x}{x^2 - x + 1}$

e. $y = \left(m + \frac{n}{x^2}\right)^3$ (m, n là các hằng số).

Lời giải:

a. Theo định lí về đạo hàm của hàm số hợp thì:

$y' = [(x^7 - 5x^2)^3] = 3(x^7 - 5x^2)^2.(x^7 - 5x^2)'$

$= 3(7x^6 - 10x).(x^7 - 5x^2)^2$

b. $y' = (x^2 + 1)'(5 - 3x^2) + (x^2 + 1)(5 - 3x^2)' = -12x^3 + 4x$

c. $y = \frac{2x}{x^2-1} = \left(\frac{U}{V}\right)$ (với $U = 2x; V = x^2 - 1$

$$y' = \left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U'V - V'U}{V^2} = \frac{2(x^2 - 1) - 2x.2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

d. $y = \frac{3-5x}{x^2-x+1} = \left(\frac{U}{V}\right)$ (với $U = 3 - 5x; V = x^2 - x + 1)$

$U' = -5; V' = 2x - 1$

$$y' = \left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2} = \frac{-5(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(3 - 5x)}{(x^2 - x + 1)^2}$$

$$= \frac{5x^2 - 6x - 2}{(x^2 - x + 1)^2}$$

e. $y' = 3\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2.\left(m + \frac{n}{x^2}\right)' = -\frac{6n}{x^3}\left(m + \frac{n}{x^2}\right)^2$

Bài 4 : Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a. $y = x^2 - x\sqrt{x} + 1$

b. $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$

c. $y = \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (a là hằng số)

d. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

Lời giải:

a. $y' = (x^2)' - \left(x\sqrt{x}\right)' + (1)' = 2x - x'\sqrt{x} - x\left(\sqrt{x}\right)'$

$$= 2x - \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

b. $y = \sqrt{2 - 5x - x^2}$

Đặt U $= 2 - 5x - x^2$

⇨ $y = \sqrt{U} > y'_U = \frac{1}{2\sqrt{U}}$

$$U'_x = -5 - 2x \Rightarrow y' = y'_U . y'_x = \frac{-5 - 2x}{2\sqrt{2 - 5x - x^2}}$$

c. $$y' = \frac{((x^3)'.\sqrt{a^2-x^2} - x^3\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)')}{a^2-x^2}$$

$$= \frac{((x^3)'.\sqrt{a^2-x^2} - x^3\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)')}{a^2-x^2} = \frac{3a^2x^2 - 2x^4}{(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$d.\ y' = \frac{(1+x)'.\sqrt{1-x} - (1+x)(\sqrt{1-x})'}{1-x} = \frac{\sqrt{1-x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1-x}}}{1-x} = \frac{3-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.$$

Bài 5 : Cho y=x3-3x2+2. Tìm x để:

a. y' > 0 b. y' < 3

Lời giải:

a. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x > 0$

⇔ $3x(x-2) > 0 \Rightarrow x < 0$ *hoặc* $x > 2$

Vậy x < 0 hoặc x > 2 thì :

hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đạo hàm y' > 0

b. Ta có: y' < 3 ⇔ $3x^2 - 6x < 3$

⇔ $3x^2 - 6x - 3 < 0$ ⇔ $x^2 - 2x - 1 < 0$

⇔ $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$

Vậy $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ thì :

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đạo hàm y' < 3.