Bài 1 : Viết khai triển theo công thức nhị thức Niu – tơn:

a) $(a+2b)^5$ b) $(a-\sqrt{2})^6$

c) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{13}$

Lời giải:

a. $(a+2b)^5$

$= C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4(2b) + C_5^2 a^3 (2b)^2$

$+ C_5^3 a^2 (2b)^3 + C_5^4 a (2b)^4 + C_5^5 (2b)^5$

$= a^5 + 10a^4 b + 40a^3b^2 + 80a^2b^3 + 80aab^4 + 32b^5$

b. $(a-\sqrt{2})^6 = C_6^0 a^6 - C_6^1 a^5(\sqrt{2}) + C_6^2 a^4 (\sqrt{2})^2$

$- C_6^3 a^3 (\sqrt{2})^3 + C_6^4 a^2 (\sqrt{2})^4 - C_6^5 a (\sqrt{2})^5 + C_6^6 (\sqrt{2})^6$

$= C_6^0 a^3 - \sqrt{2} C_6^1 a^5 + (\sqrt{2})^2 C_6^2 a^4$

$- (\sqrt{2})^3 C_6^3 a^3 + (\sqrt{2})^4 C_6^4 a^2 - (\sqrt{2})^5 C_6^5 a + (\sqrt{2})^6 C_6^6$

c. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{13} = (x - x^{-1})^{13}$

$= C_{13}^0 - C_{13}^1 x^{12}(x^{-1})^1 + C_{13}^2 x^{11}(x^{-1})^2 - C_{13}^3 x^{10}(x^{-1})^3$

$+ C_{13}^4 x^9 (x^{-1})^4 - C_{13}^5 x^8 (x^{-1})^5 + \dots - C_{13}^{13}(x^{-1})^{13}$

$= C_{13}^0 - C_{13}^1 x^{12}(x^{-1})^1 + C_{13}^2 x^{11}(x^{-1})^2 + \dots$

$+ C_{13}^{12} x^1 (x^{-1})^{12} - C_{13}^{13}(x^{-1})^{13}$

$= C_{13}^0 x^{13} - C_{13}^1 x^{11} + C_{13}^2 x^9 - C_{13}^3 x^7 + C_{13}^4 x^5$

$+ \dots + (-1)^k C_{13}^k x^{n-2k} + \dots + (-1)^{13} \dfrac{1}{x^{13}}$

Bài 2 (): Tìm hệ số của x3 trong khai triển của biểu thức :

$$\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6$$

Lời giải:

Ta có: $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^6 = (x + 2x^{-2})^6$

$= C_6^0 x^6 + C_6^1 x^5 (2.x^{-2})^1 + C_6^2 x^4 (2.x^{-2})^2 + C_6^3 x^3 (2.x^{-2})^3$

$C_6^4 x^2 (2.x^{-2})^4 + C_6^5 x (2.x^{-2})^5 + C_6^6 x^3 (2.x^{-2})^6$

$= C_6^0 x^6 + 2C_6^1 x^3 + 2^2 C_6^2 x^{-4} + 2^3 C_6^3 x^{-3}$

$+ 2^4 C_6^4 x^{-6} + 2^5 C_6^5 x^{-9} + 2^6 C_6^6 x^{-12}$

Vậy hệ số chứa x^3 trong khai triển là: $2.\,C_6^1 = 12$

Bài 3 : Biết hệ số của x2 trong khai triển của (1 – 3x)n là 90. Tìm n.

Lời giải:

Ta có:

$(1 - 3x)^n = C_n^0 - C_n^1.(3x)^1 + C_n^2 (3x)^2$

$- C_n^3 (3x)^3 + ... + (-1)^n C_n^n (3x)^n$

Từ khai triển, ta có hệ số chứa x^2 là: $3^2 C_n^2 = 90$ ($n \geq 2$)

$$2!\frac{n!}{2!(n-2)!} = 10 \Leftrightarrow \frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!} = 10$$

$$\Leftrightarrow (n-1)n = 10 \Leftrightarrow n^2 - n - 10 = 0$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} n = 5 \\ n = -2 \quad (\text{loai}) \end{array}\right.$

Bài 4 : Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$$

Lời giải:

Ta có: $\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^8 = (x^3 + x^{-1})^8$

Gọi số hạng tổng quát thứ k + 1 trong khai triển là:

$$T_{k+1} = C_8^k (x^3)^k (x^{-1})^{8-k} = C_8^k (x^3)^k (x^{-1})^{8-k}$$
$$= C_8^k (x^3)^k (x^{-1})^{8-k} = C_8^k x^{3k} (x^{-1})^{-8+k} = C_8^k x^{-8+4k}$$

Để có số hạng không chứa x trong khai triển thì:

$x^{-8+4k} = x^o$ <=> -8 +4k = 0 <=> k = 2

Vậy số hạng không chứa x là $C_8{}^2 = 28$

Bài 5 : Tìm khai triển biểu thức (3x – 4)17 thành đa thức, hãy tính tổng các hệ số của đa thức nhận được.

Lời giải:

Ta có:

$$(3x-4)^{17} = C_{17}^0 (3x)^{17} - C_{17}^1 (3x)^{16} 4^1$$
$$+ C_{17}^2 (3x)^{15} 4^2 - C_{17}^3 (3x)^{14} 4^3$$
$$+ \ldots + C_{17}^{16} (3x)^1 4^{16} - C_{17}^{17} 4^{17}$$
$$\Rightarrow (3x-4)^{17} = 3^{17} C_{17}^0 x^{17} - 4.3^{16} C_{17}^1 x^{16} + 4^2.3^{15} C_{17}^2 x^{15}$$
$$- 4^3.3^{14} C_{17}^3 x^{14} + \ldots + 4^{16}.3 C_{17}^{16} x^1 - C_{17}^{17} 4^{17}$$

Đặt S là tổng của các hệ số của đa thức bên vế phải.

Thay x = 1 vào hai vế ta được:

$$S = 3^{17}C_{17}^{0} - 4.3^{16}C_{17}^{1} + 4^{2}.3^{15} - 3^{14}.4^{3}$$

$$+ L + 4^{16}.3C_{17}^{16} - C_{17}^{17}4^{17} = (3.1 - 4)^{17}$$

$$\Rightarrow S = -1$$

Bài 6 : Chứng minh rằng:

a) $11^{10} - 1$ chia hết cho 100

b) $101^{100} - 1$ chia hết cho 10.000

c) $\sqrt{10}\left[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}\right]$ là một số nguyên

Lời giải:

a. Ta có: $11^{10} = (10 + 1)^{10} = 10^{10} + C_{10}^{1}.10^{9} + \ldots + C_{10}^{9}.10 + 1$

=> $11^{10} - 1 = 10^{10} + 10.10^{9} + \ldots + 10.10$

= $100(10^{8} + 10^{7} + \ldots + 1)$ chia hết cho 10.

b. Ta có: $101^{100} = (100 + 1)^{100} = 100^{100} + 100.100^{99} + \ldots + 100.100 + 1$

=> $101^{100} - 1 = 100^{2}(100^{98} + \ldots + 1)$ chia hết cho 10000.

$$c. (1+\sqrt{10})^{100} = 1 + C_{100}^{1}\sqrt{10} + C_{100}^{2}(\sqrt{10})^{2} + C_{100}^{3}(\sqrt{10})^{3}$$

$$+ \ldots + C_{100}^{k}(\sqrt{10})^{k} + \ldots + C_{100}^{100}(\sqrt{10})^{100}$$

$$(1-\sqrt{10})^{100} = 1 - C_{100}^{1}\sqrt{10} + C_{100}^{2}(\sqrt{10})^{2} - C_{100}^{3}(\sqrt{10})^{3}$$

$$+ \ldots + (-1)^{k}C_{100}^{k}(\sqrt{10})^{k} + \ldots + (-1)^{100}C_{100}^{100}(\sqrt{10})^{100}$$

$$\sqrt{10}\left[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}\right]$$

$$= 2\sqrt{10}(C_{100}^{1}\sqrt{10} + C_{100}^{3}(\sqrt{10})^{3} + \ldots + C_{100}^{2m+1}(\sqrt{10})^{2m+1} + \ldots)(*)$$

Với m nguyên dương sao cho 2m + 1 < 100

Trong (*) ở vế phải là tổng của các số hạng mà mỗi số hạng là một số nguyên C_{100}^{k} nhân với lũy thừa bậc lẻ của $\sqrt{10}$. Mỗi số hạng này nhân với $\sqrt{10}$ ta được một số nguyên. Do đó tổng đang xét là một số nguyên.