Bài 1 : Tìm tập hợp tất cả các điểm M trong không gian luôn luôn nhìn một đoạn thẳng AB cố định dưới một góc vuông.

Lời giải:

Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có:

$OM = \frac{AB}{2}$ (vì $\widehat{AMB} = 90°$)

Khi đó M thuộc mặt cầu có tâm O bán kính $R = \frac{AB}{2}$

Ngược lại, lấy điểm M thuộc mặt cầu $(O; \frac{AB}{2})$, ta có:

$OM = \frac{AB}{2}$. Suy ra ΔAMB vuông tại M

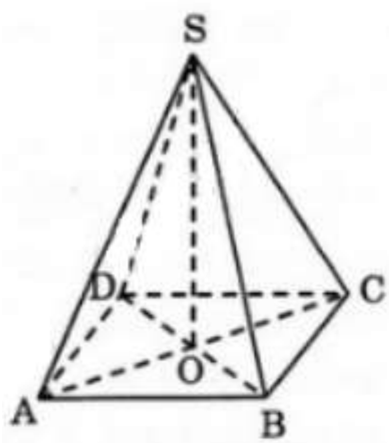
Nghĩa là $\widehat{AMB} = 90°$

Vậy tập hợp các điểm M luôn nhìn đoạn thẳng AB cố định

dưới một góc vuông là mặt cầu tâm O, bán kính $R = \frac{AB}{2}$.

Bài 2 : Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đều bằng a. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp đó.

Lời giải:



Theo đề bài, ABCD là một hình vuông cạnh a nên

$AC = BD = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$

Đồng thời ΔASC và ΔBSD là :

các tam giác vuông cân tại S $\Rightarrow OS = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow OA = OB = OC = OD = OS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

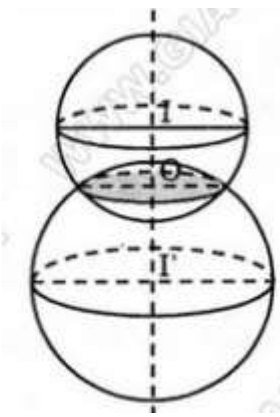
(O là tâm của hình vuông ABCD)

Vậy mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, B, C, D

có tâm là O và bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài 3 : Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn chứa một đường tròn cố định cho trước.

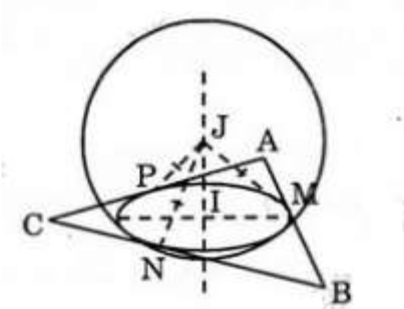
Lời giải:



Gọi I là tâm của mặt cầu chứa đường tròn (C) cố định cho trước, như vậy I phải cách đều tất cả các điểm M thuộc đường tròn (C), suy ra I nằm trên đường thẳng đi qua tâm O của đường tròn (C) và vuông góc với mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C).

Bài 4 : Tìm tập hợp tâm các mặt cầu luôn cùng tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác cho trước.

Lời giải:



*Xét mặt cầu (S) có tâm O, bán kính R và tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC tại M, N, P. H là hình chiếu vuông góc của O trên mp(ABC), ta có:

OM ⊥ AB => BM ⊥ AB

(theo định lí ba đường vuông góc)

Tương tự: HN ⊥ BC, HP ⊥ AC

Ta có: OM = ON = OP = R

Khi đó ΔOHM = ΔOHN = ΔOHP

Suy ra HM = HN = HP

Chứng tỏ H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Vậy tâm O của mặt cầu thuộc đường thẳng d vuông góc với mp(ABC) tại tâm H của đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

*Lấy điểm O thuộc trục đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại N, P, M, ta có: HM ⊥ AB, HN ⊥ BC, HP ⊥ CA

OM ⊥ AB, ON ⊥ BC, OP ⊥ CA (1)

Mặt khác: HM = HN = HP => ΔOHM = ΔOHN = ΔOHP

OM = ON = OP (2)

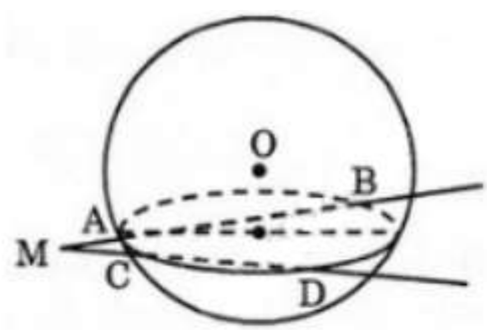
Từ (1) và (2) suy ra mặt cầu (S) tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC. Vậy tập hợp tâm của các mặt cầu tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC cho trước là trục đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài 5 : Từ một điểm M nằm ngoài mặt cầu (O; R), vẽ hai đường thẳng cắt mặt cầu lần lượt tại A, B và C, D.

a) Chứng minh rằng MA.MB = MC.MD

b) Gọi MO = d. Tính MA.MB theo R và d.

Lời giải:



a) Hai đường thẳng MAB và MCD giao nhau xác định một mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C), ngoại tiếp tứ giác phẳng ABCD.

Trong mặt phẳng (P) thì các tích MA.MB và MC.MD là giá trị của phương tích của điểm M đối với đường tròn (C), do đó:

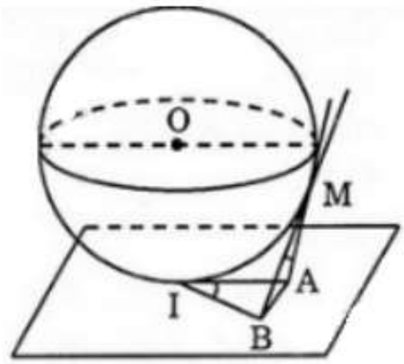
MA.MB = MC.MD.

b) Mặt phẳng (OAB) cắt mặt cầu theo đường tròn lớn và phương tích của điểm M đối với đường tròn này là :

$P_{M/(O)}$ = MA.MB = d^2 - R^2(vì d > R).

Bài 6 : Cho mặt cầu (O; R) tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I. Gọi M là một điểm nằm trên mặt cầu nhưng không phải là điểm đối xứng với I qua tâm O. Từ M ta kẻ hai tiếp tuyến của mặt cầu cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng góc (AMB)= góc (AIB)

Lời giải:



Mặt cầu S(O; R) tiếp xúc với mp(P) tại I và $IA \subset mp(P)$

$\Rightarrow$ AI là tiếp tuyến tại I của mặt cầu (O)

$\Rightarrow$ AM và AI là hia tiếp tuyến của mặt cầu (S)

Khi đó $AM = AI$

Tương tự , $BM = BI$ suy ra $\Delta AMB = \Delta AIB$

Vậy $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

Bài 7 : Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AA' = a, AB = b, AD = c.

a) Hãy xác định tâm và bán kính của mặt cầu đi qua 8 đỉnh của hình hộp đó.

b) Tính bán kính của đường tròn là giao tuyến của mp(ABCD) với mặt cầu trên.

Lời giải:

a)Gọi O là tâm của hình chộp chữ nhật, ta có:

$OA = OB = OC = OD = OA'$

$= OB' = OC' = OD' = \dfrac{AC'}{2}$

Vì $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

nên $OA = \ldots = OD' = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Vậy mặt cầu đi qua tám đỉnh của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có tâm O và bán kính

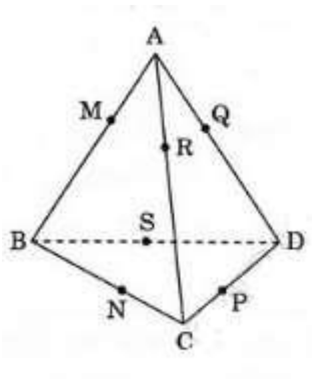
$R = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

b)Mặt cầu (O; R) cắt mp(ABCD) theo giao tuyến là đường tròn (C) ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, bán kính của đường tròn (C) là:

$r = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$

Bài 8 : Chứng minh rằng nếu có một mặt cầu tiếp xúc với 6 cạnh của một hình tứ diện thì tổng các cặp cạnh đối diện của tứ diện bằng nhau.

Lời giải:



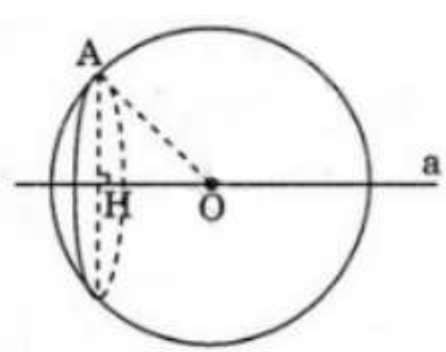
Tứ diện ABCD có các cạnh AB, AC, AD, CB, CD, BD lần lượt tiếp xúc với mặt cầu (O; R) tại M, N, P, Q, R, S, ta có:

$$\begin{cases} AM = AR = AQ = a \\ BM = BN = BS = b \\ CP = CN = CR = c \\ DP = DQ = DS = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AB + CD = a + b + d + c \\ AC + BD = a + d + b + c \\ AD + BC = a + c + b + d \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB + CD = AC + BD = AD + BC$$

Bài 9 : Cho một điểm A cố định và một đường thẳng a cố định không đi qua A. Gọi O là một điểm thay đổi trên a. Chứng minh rằng các mặt cầu tâm O bán kính r = OA luôn luôn đi qua một đường tròn cố định

Lời giải:



Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với đường thẳng a tại H. Khi đó (P) và H cố định.

Ta có: (P) cắt mặt cầu S(O; R) theo đường tròn tâm H và bán kính HA không đổi.

Vậy các mặt cầu tâm O bán kính R = OA luôn đi qua đường tròn cố định tâm H bán kính bằng HA.

Bài 10 : Cho hình chóp S.ABC có bốn đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó.

Lời giải:

*Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Ta có: HB = HC (ΔSBC vuông ở S).

Vẽ Ht $\perp$ mp(SBC), ta có Ht // SA và Ht là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC.

Trong mp(SA, Ht), đường trung trực của SA cắt Ht tại O, ta có:

OS = OA (O nằm trên đường trung trực của SA) (1)

OS = OC = OB (2)

Từ (1) và (2) suy ra: OS = OA = OB = OC.

Vậy O là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC là:

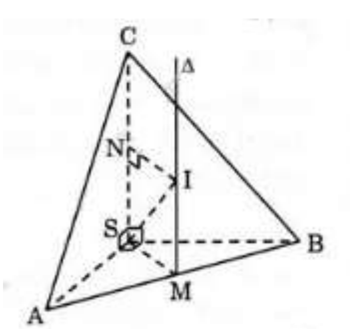
$$R = OS = \sqrt{OH^2 + SH^2} \quad \text{Mà } OH = IS = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}$$

$$SH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{SB^2 + SC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\text{Vậy } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Diện tích mặt cầu là : $S = 4\pi R^2 = \pi(a^2 + b^2 + c^2)$

Thể tích khối cầu là:



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^3}$$

$$= \frac{\pi}{6}(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$$