

Bài 1 : Trong các dãy số (un) sau đây, dãy số nào là cấp số cộng? Tính số hạng đầu và công sai của nó.

a. $u_n = 5 - 2n$ b. $u_n = \frac{n}{2} - 1$

c. $u_n = 3^n$ d. $u_n = \frac{7 - 3^n}{2}$

Lời giải:

a. Vì $u_n = 5 - 2n$ nên $u_1 = 5 - 2 = 3$

giả sử $n \geq 1$, xét hiệu sau:

$$u_{n+1} - u_n = 5 - 2(n + 1) - 5 + 2n = -2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = u_n - 2$$

Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -2$

b. Vì $u_n = \frac{n}{2} - 1$ nên $u_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

giả sử $n \geq 1$, xét hiệu sau:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1}{2} - 1 - \frac{n}{2} + 1 \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = \frac{1}{2}$

c. $u_n = 3^n \Rightarrow u_1 = 3$

giả sử $n \geq 1$, xét hiệu sau:

$$u_{n+1} - u_n = 3^{n+1} - 3^n = 3^n \cdot 3 - 3^n = 2 \cdot 3^n \Rightarrow u_{n+1} = u_n \cdot 2 \neq u_n + d$$

Vậy (u_n) không phải là cấp số cộng vì không xác định được công sai.

$$d.u_n = \frac{7-3n}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{7-3}{2} = 2$$

giả sử $n \geq 1$, xét hiệu sau:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{7-3(n+1)}{2} - \frac{(7-3n)}{2} \\ &= \frac{7-3n-3-7+3n}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow u_{n+1} = u_n - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy (u_n) là cấp số cộng với công sai $d = -\frac{3}{2}$

Bài 2 : Tìm số hạng đầu và công sai của các cấp số cộng sau, biết:

$$a. \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$$

$$b. \begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases}$$

Lời giải:

$$a. \text{Ta có: } \begin{cases} u_1 - [u_1 + (3-1)d + u_1 + (5-1)d] = 10 \\ u_1 + u_1 + (6-1)d = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 10 \\ 2u_1 + 5d = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 16 \\ d = -3 \end{cases}$$

Vậy số hạng đầu bằng 16 và công sai bằng -3

b. Ta có:

$$\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + (7-1)d - [u_1 + (3-1)d] = 8 \\ [u_1 + (2-1)d] \cdot [u_1 + (7-1)d] = 75 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4d = 8 \\ (u_1 - d)(u_1 - 6d) = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2, u_1 = 3 \\ d = 2, u_1 = -17 \end{cases}$$

Vậy cấp số cộng có số hạng đầu là -17 , công sai $d = 2$, hoặc số hạng đầu là 3 , công sai là $d = 2$.

Bài 3 : Trong các bài toán về cấp số cộng, ta thường gặp năm đại lượng u_1, d, n, u_n, S_n .

a. Hãy viết các hệ thức liên hệ giữa các đại lượng đó. Cần phải biết ít nhất mấy đại lượng để có thể tìm được các đại lượng còn lại?

b.Lập bảng theo mẫu sau và điền vào số thích hợp vào ô trống:

u_1	d	u_n	n	S_n
-2		55	20	
	-4		15	120
3	$\frac{4}{27}$	7		
		17	12	72
2	-5			-205

Lời giải:

a.Có thể sử dụng các công thức:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d \text{ với } n \geq 2$$

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \Leftrightarrow S_n = n.u_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$$

b.Điền vào bảng:

u_1	d	u_n	n	S_n
-2	3	55	20	530
36	-4	-20	15	120
3	$\frac{4}{27}$	7	28	140
-5	2	17	12	72
2	-5	-43	10	-205

Bài 4 : Mặt sàn tầng một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 21 bậc, mỗi bậc cao 18cm.

a. Viết công thức để tìm độ cao của một bậc tùy ý so với mặt sân.

b. Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải:

a.Mỗi bậc thang cao 18cm = 0,18m.

=> n bậc thang cao 0,18.n (m)

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân 0,5m nên công thức tính độ cao của một bậc tùy ý so với mặt sân sẽ là:

$$h_n = (0,5 + 0,18n) \text{ (m)}$$

b.Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 21$ là:

$$h_{21} = 0,5 + 0,18.21 = 4,28 \text{ (m)}$$

Bài 5 : Từ 0 đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh bao nhiêu tiếng, nếu có chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng tiếng giờ?

Lời giải:

Số tiếng chuông của đồng hồ theo giờ từ 0 đến 12 giờ là một cấp số cộng hữu hạn u_1, u_2, \dots, u_{12} trong đó u_n với $n = 1, 2, \dots, 12$ với số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 đến 12 giờ trưa là:

$$S_{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 12 = \frac{12(12 + 1)}{2} = 78 \text{ (tiếng)}$$