Bài 1 :

Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ có $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

Với giá trị nào của m thì hai vector

$\vec{a} + m\vec{b}$ và $\vec{a} - m\vec{b}$ vuông góc với nhau?

Lời giải

Ta có: $(\vec{a} + m\vec{b})(\vec{a} - m\vec{b}) = \vec{a}^2 - m^2\left(\vec{b}\right)^2 = 9 - 25m^2.$

Mặt khác $(\vec{a} + m\vec{b}) \perp (\vec{a} - m\vec{b})$ nên $9 - 25m^2 = 0$

Khi đó $m^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow m = \pm\frac{3}{5}$.

Bài 2 :

Cho tam giác ABC và hai điểm M, N sao cho $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$

a, Hãy vẽ M, N khi $\alpha = \frac{2}{3}; \beta = -\frac{2}{3}$;

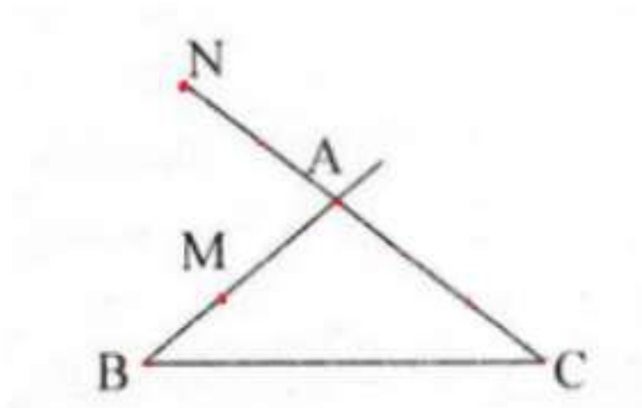
b, Hãy tìm mối liên hệ giữa α và β để MN song song với BC.

Lời giải

a, Khi $\alpha = \frac{2}{3}$ và $\beta = \frac{2}{3}$ ta có:

+) $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ M thuộc đoạn AB sao cho $AM = \frac{2}{3}AB$.

+) $\overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ N thuộc tia đối của tia AC và $AN = \frac{2}{3}AC$.



b, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AC} - \alpha\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

Để MN // BC thì $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \beta\overrightarrow{AC} - \alpha\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AB}$.

$\Rightarrow \beta = \alpha = k.$

Vậy MN // BC $\Leftrightarrow \beta = \alpha$.

Bài 3 : Cho tam giác đều ABC cạnh a.

a, Cho M là một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo a.

b, Cho đường thẳng d tùy ý, tìm điểm N trên đường thẳng d sao cho $NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất.

Lời giải

a, Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh a.

Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp là: $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

ΔABC đều nên O là trọng tâm tam giác do đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$

Nên $\overrightarrow{MA}^2=\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}\Rightarrow MA^2=2R^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}$ (1)

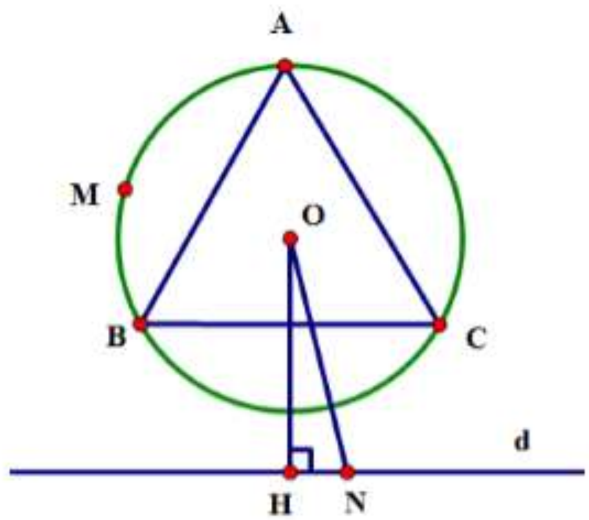
Tương tự: $MB^2=2R^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}$ (2)

$MC^2=2R^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra

$MA^2+MB^2+MC^2=6R^2+2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=6\mathrm{R}^2$.

Suy ra $MA^2+MB^2+MC^2=6.\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=2a^2$.



b, Ta có: $\overrightarrow{NA}^2=\overrightarrow{NO}^2+\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OA}\Rightarrow NA^2=NO^2+R^2+2\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OA}$

Tương tự: $NB^2=NO^2+R^2+2\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OB}$

$NC^2=NO^2+R^2+2\overrightarrow{NO}.\overrightarrow{OC}$

$NA^2+NB^2+NC^2=3\overrightarrow{NO}^2+3R^2+2\overrightarrow{NO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=3NO^2+3R^2$.

Do đó $NA^2+NB^2+NC^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow NO^2$ nhỏ nhất.

$\Leftrightarrow N\equiv H$ (H là hình chiếu của O trên d).

Bài 4 : Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng 6cm. Một điểm M nằm trên cạnh BC sao cho BM = 2cm.

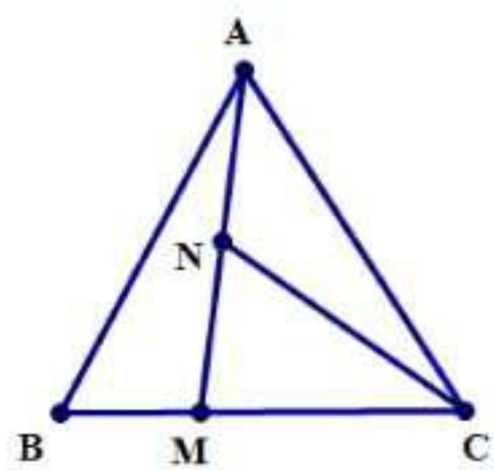
a, Tính độ dài của đoạn thẳng AM và tính coossin của góc BAM ;

b, Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM;

c, Tính độ dài đường trung tuyến vẽ từ đỉnh C của tam giác ACM;

d, Tính diện tích tam giác ABM.

Lời giải



a, Xét tam giác ABM ta có: AB = 6cm, BM = 2cm, $\widehat{ABC} = 60^0$.

Khi đó $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos 60^0$

$$= 36 + 2 - 2.6.2.\frac{1}{2} = 28$$

Vậy AM = $2\sqrt{7}$ cm.

$$\cos\widehat{BAM} = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2.AB.AM} = \frac{36+28-4}{2.6.2\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

b, Trong ΔABM theo định lí sin:

$$\frac{AM}{\sin \widehat{ABM}} = 2R <=> R = \frac{AM}{2\sin \widehat{ABM}} = \frac{2\sqrt{7}}{2.\sin 60^o} = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ (cm).}$$

c. Kẻ trung tuyến CN của ΔACM.

Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác, ta có:

$$CN^2 = \frac{2(CA^2 + CM^2) - AM^2}{4} = \frac{2(36+16)-28}{4} = 19.$$

Vậy $CN = \sqrt{19}$.

d, Gọi S là diện tích tam giác ABM, ta có:

$$S = \frac{1}{2} BA.BM.\sin\widehat{ABM} = \frac{1}{2}.6.2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Bài 5 : Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a, a = b cosC + c cosB;

b, sinA = sinBcosC + sinCcosB;

c, h_a = 2RsinBsinC.

Lời giải

a,Trong tam giác ABC, theo định lí cosin ta có:

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

Do đó $b\cos C + c\cos B = b.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + c.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a} = a.$$

$\Rightarrow$ ĐPCM.

b, Ta có: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^o \Rightarrow \hat{A} = 180^o - (\hat{B} + \hat{C})$

Do đó $\hat{A}$ và $(\hat{B} + \hat{C})$ là hai góc bù nhau.

Nên sinA = sin(B + C) = sinB.cosC + cosB.sinC

Vậy sinA = sinB.cosC + sinC.cosB (ĐPCM).

c, Ta có: $\frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow h_a = b.c\frac{\sin A}{a}$.

mà $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$

$\Rightarrow a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C.$

Nên $h_a = 2R\sin B.2R.\sin C.\frac{\sin A}{2R\sin A} = 2R\sin B\sin C.$

Bài 6 : Cho các điểm A(2; 3), B(9; 4), M(5; y) và P(x; 2).

a, Tìm y để tam giác AMB vuông tại M;

b, Tìm x để ba điểm A, B và P thẳng hàng.

Lời giải

a. $\overrightarrow{MA} = (-3;3-y), \overrightarrow{MB} = (4;4-y).$

ΔAMB vuông tại M nên $MA \perp MB$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow -12 + (3-y)(4-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow M(5;0) \\ y = 7 \Rightarrow M(5;7) \end{array}\right.$$

b. $\overrightarrow{AP} = (x-2;-1), \overrightarrow{AB} = (7;1).$

Ta có: A, P và B thẳng hàng khi $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}(\mathrm{k} \in \mathrm{R})$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 7k \\ 2 - 3 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -5 \end{cases} \Rightarrow P(-5;2).$$

Vậy khi x = -5 thì ba điểm A, P, B thẳng hàng.

Bài 7 : Cho tam giác ABC với H là trực tâm. Biết phương trình đường thẳng AB, BH và AH lần lượt là 4x + y – 12 = 0, 5x – 4y – 15 = 0 và 2x + 2y – 9 = 0. Hãy viết phương trình hai đường thẳng chứa hai cạnh còn lại và đường cao thứ ba.

Lời giải

+) Vì $\{A\} = AB \cap AH$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + y - 12 = 0 \\ 2x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A\left(\dfrac{5}{2}; 2\right)$$

+) Vì $\{B\} = AB \cap BH$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x + y - 12 = 0 \\ 5x - 4y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3;0)$$

+) BH: 5x – 4y – 15 = 0 có vecto chỉ phương là $\vec{u} = (4;5)$.

Đường thẳng AC đi qua A, vuông góc với BH nên nhận $\vec{u} = (4;5)$ làm VTPT.

Phương trình AC là: 4x + 5y – 20 = 0.

+) AH: 2x + 2y – 9 = 0 có vecto chỉ phương là $\vec{u_1} = (1;-1)$.

Đường thẳng BC đi qua B, vuông góc với AH nên

nhận $\vec{u_1} = (1;-1)$ làm VTPT.

Phương trình BC là: x – y – 3 = 0.

+) Vì $\{C\} = AB \cap BC$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 4x+5y-20=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{35}{9} \\ y=\dfrac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{35}{9};\frac{8}{9}\right).$$

AB: 4x + y – 12 = 0 có vecto chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (1;-4)$.

Đường thẳng CH đi qua C, vuông góc với AB nên

nhận $\overrightarrow{u_2} = (1;-4)$ làm VTPT.

Phương trình CH là:

$$\left(x-\frac{35}{9}\right)-4\left(y-\frac{8}{9}\right)=0 \Leftrightarrow x-4y-\frac{1}{3}=0 \Leftrightarrow 3x-12y-1=0.\ .$$

Bài 8 :

Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên
đường thẳng Δ: 4x + 3y – 2 = 0 và tiếp xúc
với hai đường thẳng $d_1: x+y+4=0$
và d_2: 7x – y + 4 = 0

Lời giải

Gọi I(x; y) là tâm đường tròn cần tìm, ta có:

* $I \in \Delta: 4x + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 2 = 0$ (1)

* $d(I;\ d_1) = d(I;\ d_2) \Leftrightarrow |x + y + 4| = \dfrac{|7x - y + 4|}{5}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5(x+y+4) = 7x - y + 4 \\ 5(x+y+4) = -(7x - y + 4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3y - 8 = 0 \\ 3x + y + 6 = 0 \end{array}\right. (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\begin{cases} 4x + 3y - 2 = 0 \\ x - 3y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 4x + 3y - 2 = 0 \\ 3x + y + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$$

+) $I(2;-2) \Rightarrow R = d(I;d_1) = \dfrac{|2-2+4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$

$\Rightarrow (C_1):\ (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8.$

+) $I(-4;6) \Rightarrow R = d(I;d_1) = \dfrac{|-4+6+4|}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}.$

$\Rightarrow (C_2): (x+4)^2 + (y-6)^2 = 18.$

Bài 9 : Cho elip (E) có phương trình:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$$

a, Hãy xác định tọa độ các đỉnh, các tiêu điểm của elip (E) và vẽ elip đó.

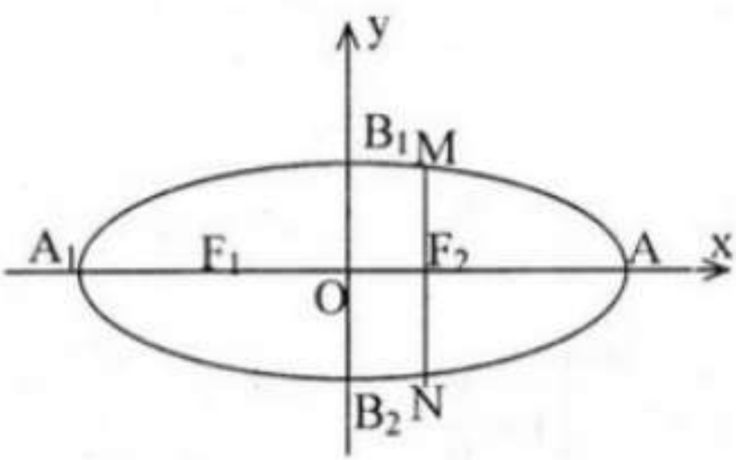
b, Qua tiêu điểm của elip dựng đường song song với Oy và cắt elip tại hai điểm M và N. Tính độ dài đoạn MN.

Lời giải

a, Ta có: $\begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = 36 \end{cases}$ suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 36 = 64$.

Vậy a = 10; b = 6; c = 8

* Tọa độ các đỉnh: $A_1(-10;0), A_2(10;0), B_1(0;-6), B_2(0;6)$
* Tọa độ các tiêu điểm: $F_1(-8;0); F_2(8;0)$



Đường thẳng MN song song với Oy và đi qua tiêu điểm của elip nên hoành độ của M và N cũng chính là hoành độ của tiêu điểm elip.

Giả sử MN đi qua tiêu điểm bên phải thì $\begin{cases} M(8; y_M) \\ N(8; y_N) \end{cases}$

Ta có M$\in$ (E) nên: $\dfrac{8^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{y^2}{36} = \dfrac{9}{25} \Leftrightarrow y^2 = \dfrac{324}{25}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{18}{5} \\ y = -\dfrac{18}{5} \end{array} \right. \text{. Vậy } \begin{cases} M(8;\dfrac{8}{15}) \\ N(8;-\dfrac{8}{15}) \end{cases}.$$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (0;\dfrac{36}{5}) \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \dfrac{36}{5}$

Vậy độ dài đoạn MN là $\dfrac{36}{5}$ (đơn vị chiều dài).