Bài 1 : Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào là đúng ?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song ;

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song ;

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b và b vuông góc với thẳng a, thì a song song với (α).

d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

e) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

Lời giải:

a) Đúng

b) Đúng

c) Sai (vì a có thể nằm trong mp(α), xem hình vẽ)

d) Sai, chẳng hạn hai mặt phẳng (α) và (β) cùng đi qua đường thẳng a và a ⊥ mp(P) nên (α) và (β) cùng vuông góc với mp(P) nhưng (α) và (β) cắt nhau.

e) Sai, chẳng a và b cùng ở trong mp(P) và mp(α) ⊥ d. Lúc đó a và b cùng vuông góc với d nhưng a và b có thể không song song nhau.

Bài 2 : Trong các điều khẳng định sau đây, điều nào đúng?

a) Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

b) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

c) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác cho trước.

d) Đường thẳng nào vuông góc với cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Lời giải:

Câu a) đúng. Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại (xem mục c). Tính chất của khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau (Bài 5 – chương III).

Câu b) sai. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu c) sai. Vì trong trường hợp đường thẳng vuông góc với mặt phẳng thì ta có vô số mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng cho trước vì bất kì mặt phẳng nào chứa đường thẳng cũng đều vuông góc với mặt phẳng cho trước. Để có khẳng định đúng ta phải nói: Qua một đường thẳng không vuông góc với một mặt phẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đã cho.

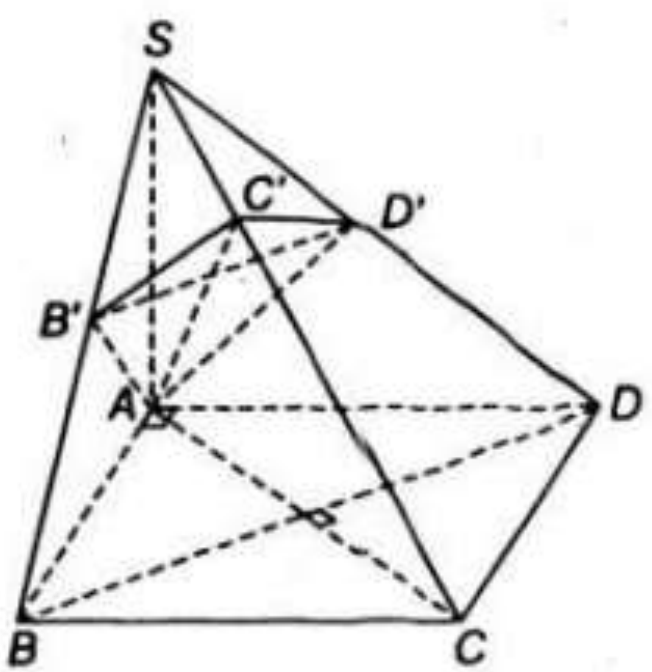
Câu d) sai. Vì đường vuông góc chung của hai đường thẳng phải cắt cả hai đường ấy.

Bài 3 : Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, AC, SD tại B', C', D'. Chứng minh B'D' song song với BD và AB' vuông góc với SB.

Lời giải:



a) Các mặt bên là Δ vuông :

• $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB, SA \perp AD$

• $\begin{cases} CB \perp AB \\ AB \text{ là hình chiếu của } SB \text{ trên } (ABCD) \end{cases}$

$\Rightarrow CB \perp SB$

• Tương tự $CD \perp SD$

Vậy các mặt bên SAB, SAD,

SBC< SDC là tam giác vuông

b) Chứng minh $B'D' // BD$, $AB' \perp SB$

• $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow BD \perp SC$

$\left.\begin{matrix} \Rightarrow BD \perp SC \\ \text{mà } (AB'C'D) \perp SC \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow (AB'C'D') // BD$ nên mặt phẳng (SBD)

chứa BD cắt $(AB'C'D')$ theo giao tuyến $B'D'$

song song với BD.

• $\left.\begin{matrix} AB' \perp BC \left(\text{vì } BC \perp (SAB)\right) \\ AB' \perp SC \text{ (vì } SC \perp (AB'C'D')) \end{matrix}\right\}$

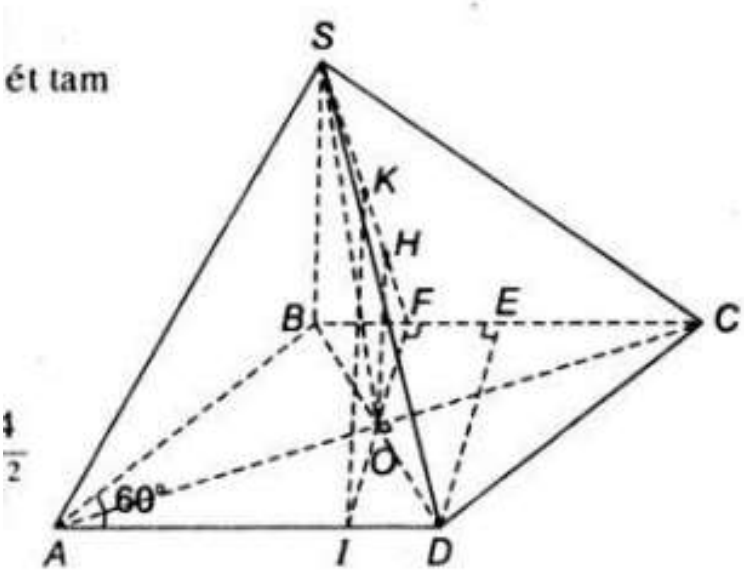
$\Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$

Bài 4 : Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và có góc BAD = 60o. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SO = 3a/4 . Gọi E là trung điểm của đoạn BC và F là trung điểm của đoạn BE.

a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

Lời giải:



a) Từ giả thiết ta suy ra tam giác BOE

là tam giác đều, cạnh $\frac{a}{2}$, do đó OF là đường

cao và ta được $OF \perp BC$.

$$\left.\begin{array}{l} SO \perp (ABCD) \\ OF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow SF \perp BC \text{ (định lí 3 đường vuông góc)}$$

$$\left.\begin{array}{l} SF \perp BC \\ OF \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SOF) \quad ; BC \subset (SBC)$$

b) Vì $(SOF) \perp (SBC)$ và hai mặt phẳng này giao nhau

theo giao tuyến SF nên nếu từ điểm O ta kẻ $OH \perp (SBC)$

và OH chính là khoảng cách từ O đến mp(SBC).

Ta có: $SO = \frac{3a}{4}$; $OF = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SF = \frac{a\sqrt{3}}{8}$

$OH.\ SF = SO.\ OF \Rightarrow OH = \frac{3a}{8}$

Gọi K là hình chiếu của A trên mp(SBC), ta có AK // OH.

Trong ΔAKC thì OH là đường trung bình, do đó:

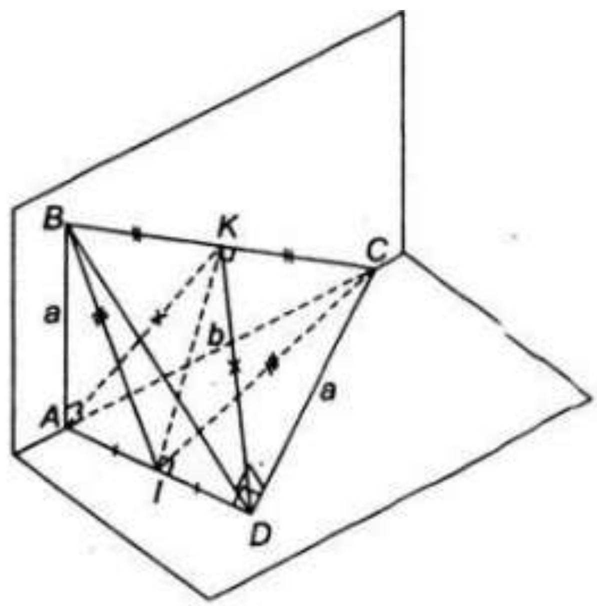
$AK = 2OH \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

Bài 5 : Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ADC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có A vuông tại D có CD = a.

a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC là các tam giác vuông.

b) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của Ad và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Lời giải:



Gọi (α), (β) lần lượt là mặt phẳng chứa

tam giác ABC và ADC.

- (α) $\perp$ (β) theo giao tuyến AC

- AB $\subset$ (α) và AB $\perp$ AC (Tam giác

ABC vuông ở A)

$\Rightarrow$ AB $\perp$ (β)

a) • Chứng minh tam giác BAD vuông

Ta có AB $\perp$ (β) $\supset$ AD $\Rightarrow$ AB $\perp$ AD

Vậy tam giác ABD vuông tại A

- Chứng minh tam giác BDC vuông

Ta có:

$$\begin{cases} DC \perp AB \text{ (vì } AB \perp (\beta) \supset DC) \\ DC \perp AD \text{ (vì tam giác ADC vuông ở D)} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ DC $\perp$ (ABD)

$\Rightarrow$ DC $\perp$ BD

Vậy tam giác BDC vuông ở D.

- Chứng minh IK :

Là đoạn thẳng vuông góc chung của AD và BC

Xét ΔABC và ΔCAD, ta có: $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{D} \text{ (vuông)} \\ AC\text{: cạnh chung} \\ AB = DC = a \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hai trung tuyến BI = CI

$\Rightarrow$ Tam giác IBC cân ở I

$\Rightarrow$ IK $\perp$ BC (1)

*Chứng minh tương tự, ΔABC = ΔDCB

$\Rightarrow$ AK = DK

$\Rightarrow$ Tam giác KAD cân ở K

$\Rightarrow$ IK $\perp$ AD (2)

(1) và (2)

$\Rightarrow$ IK là đoạn thẳng vuông góc chung của AD và BC.

Bài 6 Cho khối lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

a) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD)

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Lời giải:

a) Chứng minh $BC' \perp (A'B'CD)$

• BB'C'C là hình vuông

$\Rightarrow BC' \perp B'C$ (1)

• $DC \perp (BB'C'C)$

$\Rightarrow BC' \perp DC$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BC' \perp (A'B'CD)$

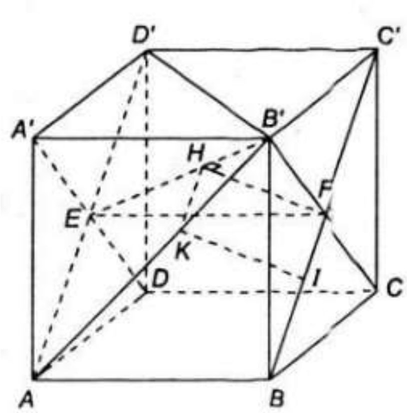
(đpcm)

b) Do AD' // BC' nên mặt phẳng

(AB'D') là mặt phẳng chứa AB' và

song song với BC'.

Ta tìm hình chiếu của BC' trên mp(AB'D')



Gọi E, F là tâm của các mặt bên ADD'A' và ABCC'B'

$\Rightarrow AD' \perp (A'B'CD)$ và $IF \subset (A'B'CD)$

$AD' \perp IF$ (3)

$\Rightarrow EB' \perp IF$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $IF \perp (AB'D')$

Vậy I là hình chiếu của F trên mp(AB'D').

Qua I ta dựng đường thẳng song song với BC' thì đường thẳng này chính là hình chiếu của BC' trên mp(AB'D')

Đường thẳng qua I song song với BC' cắt AB' tại K.

Qua K ta kẻ đường thẳng song song với IF, đường này cắt BC' tại H. KH chính là đường vuông góc chung của AB' và BC'. Thật vậy.

$$IF \perp (AB'D') \Rightarrow \left.\begin{matrix} IF \perp AB' \\ KH // IF \end{matrix}\right\} \Rightarrow KH \perp AB'$$

$$\left.\begin{matrix} BC' \perp (A'B'CD) \\ IF \subset (A'B'CD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} IF \perp BC' \\ KH // IF \end{matrix}\right\} \Rightarrow KH \perp BC''$$

Tam giác EFB' vuông tại F, FI là đường cao thuộc cạnh huyền nên $\frac{1}{IF^2} = \frac{1}{FB^2} + \frac{1}{FE^2}$ với $FB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $EF = a$

Ta tính ra $IF = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow KH = IF = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài 7 (trang 121 SGK Hình học 11): Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a, có góc ...

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60°$ và $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) và độ dài cạnh SC.

b) Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

c) Chứng minh SB vuông góc với SC.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD). Tính tanφ.

Lời giải:

a)● ΔABD cân có góc $\widehat{A} = 60°$ nên

là tam giác đều tâm G và SA = SB = SC

nên S.ABD là hình chóp đều, do đó $SG \perp (ABD)$.

●Tam giác vuông SGA cho:

$$SG^2 = SA^2 - AG^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{15a^2}{36}$$

Vậy $d(S,ABCD) = SG = \dfrac{a\sqrt{15}}{6}$

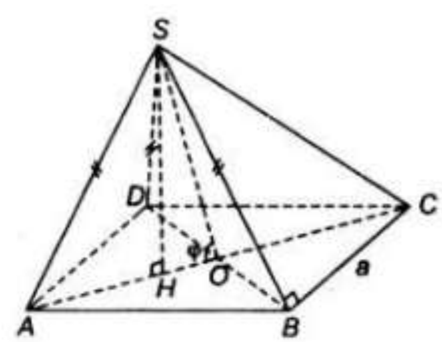
● ΔSGC:

$SC^2 = SG^2 + GC^2$

$= SG^2 + (CO + OG)^2$

$$= \frac{15a^2}{36} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{7a^2}{4} \Rightarrow SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$$



b) $\left.\begin{array}{l} SG \perp (ABCD) \\ (SAC) \text{chứa } SG \end{array}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (ABCD)$

c) Ta có: $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AD \perp (SBG) \\ Mà\ BC // AD \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BC \perp (SBG) \Rightarrow BC \perp SB$

d) Tính tanφ:

$\left.\begin{array}{l} (SBD) \cap (ABCD) \\ SO \perp BD \text{ và } AO \perp BD \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \widehat{SOA}$ là góc giữa (SBD) và (ABCD) $\Rightarrow \widehat{SOA} = \varphi$

ΔSGO vuông tại G, cho:

$$\tan\varphi = \frac{SG}{OG} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{6}}{\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{5}$$