Bài 1 : Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi giá trị của x?

a) $8x > 4x$; **b**) $4x > 8x$

c) $8x^2 > 4x^2$; **d**) $8 + x > 4 + x$

Lời giải

a) chỉ đúng khi $x > 0$ (hay nói cách khác nếu $x < 0$ thì a) sai)

b) chỉ đúng khi $x < 0$

c) chỉ đúng khi $x \neq 0$

d) đúng với mọi x.

Vậy khẳng định d là đúng với mọi giá trị của x.

Bài 2 : Cho số x > 5, số nào trong các số sau đây là số nhỏ nhất?

$A = \frac{5}{x}$; $B = \frac{5}{x} + 1$; $C = \frac{5}{x} - 1$; $D = \frac{x}{5}$

Lời giải

Với $x > 5$ ta có: $\begin{cases} \frac{5}{x} < 1 \Rightarrow \frac{5}{x} - 1 < 0 \\ \frac{5}{x} + 1 > 1; \frac{x}{5} > 0; \frac{5}{x} > 0 \end{cases}$

Vậy khi $x > 5$ thì trong các biểu thức đã cho.

Biểu thức $C = \frac{5}{x} - 1$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 3 : Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

a) C Minh $(b - c)^2 < a^2$ **b**) Từ đó =>: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Lời giải

a) Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên: $a, b, c > 0$; $a + b + c > 0$ và $a + b - c > 0$

Do đó: $a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a - b + c) > 0$

$\Rightarrow a^2 > (b - c)^2$

Vậy $(b - c)^2 < a^2$ **(1)** (đpcm)

b) Tương tự từ a) ta cũng có: $(c - a)^2 < b^2$ **(2)** và $(a - b)^2 < c^2$ (3)

Cộng vế theo vế của (1), (2) và (3) ta được: $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 < a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca) < a^2 + b^2 + c^2$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ (đpcm)

Bài 4 : Chứng minh rằng: x3 + y3 ≥ x2y + xy2, ∀x, y ≥ 0

Lời giải

Ta có: $(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - xy \geq xy$

Do $x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow x + y \geq 0$

Ta có: $(x + y)(x^2 + y^2 - xy) \geq (x + y)xy$

$\Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2$ (đpcm)

Bài 5: Chứng minh rằng: x4 - √x5 + x - √x + 1 > 0, ∀ x ≥ 0

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x}$ (điều kiện $t \geq 0$), ta có:

$x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 = t^8 - t^5 + t^2 - t + 1 = f(t)$

- Khi $0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq t < 1$

Vì $0 \leq t < 1$ nên $\begin{cases} t^8 \geq 0 \\ t^2(1-t^3) \geq 0 \\ 1-t > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow f(t) > 0$ (*)

- Khi $x \geq 1 \Rightarrow t \geq 1$ ta có:

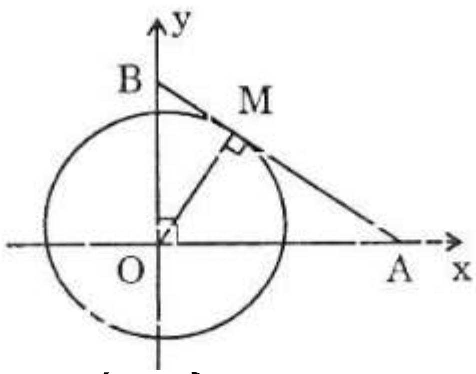
$f(t) = t^5(t^3 - 1) + (t^2 - t + 1)$

$$= t^5(t^3 - 1) + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra: $x^4 - \sqrt{x^5} + x - \sqrt{x} + 1 > 0, \forall x \geq 0$ (đpcm)

Bài 6 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, trên các tia Ox và Oy lần lượt lấy các điểm A và B thay đổi sao cho đường thẳng AB luôn tiếp xúc với đường tròn tâm O bán kính 1. Xác định tọa độ của A và B để đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Lời giải



Gọi tiếp điểm của AB và đường tròn tâm O, bán kính 1 là M, ta có: OM ⊥ AB.

ΔOAB vuông tại O, có OM là đường cao nên $MA.MB = MO^2 = 1$ (hằng số)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có:

$MA + MB \geq 2\sqrt{MA.MB}$

Suy ra tổng MA + MB = AB nhỏ nhất khi và chỉ khi MA = MB

Khi đó: AB = 2MA = 2MO = 2

=> $OA = OB = 2\sqrt{2}$ (áp dụng định lí Pi-ta-go)

Vậy tọa độ là $A(2\sqrt{2}, 0)$ và $B(0, 2\sqrt{2})$.