Bài 1 : Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a)
$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$$
 trên các đoạn [-4; 4] và [0; 5]

b)
$$y = x^4 - 3x^2 + 2$$
 trên các đoạn [0; 3] và [2; 5]

c)
$$y = \frac{2-x}{1-x}$$
 trên các đoạn [2; 4] và [-3; -2]

d)
$$y=\sqrt{5-4x}$$
 trên đoạn [-1; 1]
Lời giải:

a) TXĐ: D = R.

$$y' = 3x^2 - 6x - 9$$
; $y' = 0 => x = -1$ hoặc $x = 3$.

- Xét hàm số trên đoạn [-4; 4]

Vì -1 và 3 đều thuộc đoạn [-4; 4] nên ta tính các giá trị của hàm tại các điểm -4; 4; -1; 3.

Ta có:
$$y(-4) = -41$$
; $y(4) = 15$; $y(-1) = 40$; $y(3) = 8$

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số trên [-4; 4] là:

$$\max_{[-4;4]} y = \max_{[-4;4]} \{-41, 8, 15, 40\} = 40$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [-4; 4] là:

$$\min_{[-4,4]} y = \min_{[-4,4]} \{-41, 8, 15, 40\} = -41$$

- Trên đoạn [0; 5]: ta thấy y' = 0 tại x = 3 ∈ [0; 5]

Ta có:
$$y(0) = 35$$
; $y(5) = 40$; $y(3) = 8$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [0; 5] là:

$$\min_{[0;5]} y = \min_{[0;5]} \{35,8,40\} = 8$$

Giá trị lớn nhất của hàm số trên [0; 5] là:

$$\max_{[0;5]} y = \max_{[0;5]} \{35,8,40\} = 40$$

(Các phần b, c, d) dưới đây trình bày theo một cách khác, ngắn gọn hơn, nhưng vẫn bám sát theo cấu trúc trên.

$$y' = 4x^3 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\min_{[0;3]} y = \min \left\{ y(0), y(3), y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \right\} = \min \left\{ 2; 56; -\frac{1}{4} \right\} = -\frac{1}{4}$$

$$\max_{[0;3]} y = \max \left\{ 2; 56; -\frac{1}{4} \right\} = 56.$$

Do
$$\pm \sqrt{\frac{3}{2}} \notin [2;5]$$
 nên:

$$\min_{[2;5]} y = \min \{y(2), y(5)\} = \min \{6; 552\} = 6.$$

$$\max_{[2;5]} y = \max \{6; 552\} = 552.$$

c) TXĐ: D =
$$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

$$y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0 \ (\forall x \neq 1)$$

=> Hàm số đồng biến trên D.

$$\Rightarrow \min_{[2;4]} y = \min\{y(2), y(4)\} = \min\{0, \frac{2}{3}\} = 0.$$

$$\max_{[2;4]} y = \max \{y(2), y(4)\} = \max \{0, \frac{2}{3}\} = \frac{2}{3}.$$

+ Trên đoạn [-3; -2]

$$\Rightarrow \min_{[-3;-2]} y = \min \{y(-3), y(-2)\} = \min \left\{\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right\} = \frac{5}{4}.$$

$$\max_{[-3,-2]} y = \max \left\{ y(-3), y(-2) \right\} = \max \left\{ \frac{5}{4}, \frac{4}{3} \right\} = \frac{4}{3}.$$

d) TXĐ: D = $(-\infty; 5/4]$

$$y' = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0 \,\forall x \in D$$

=> Hàm số nghịch biến trên D.

Khi đó trên đoạn [-1; 1]:

$$\min_{[-1;1]} y = \min \{y(-1), y(1)\} = \min \{1; 3\} = 1.$$

$$\max_{[-1;1]} y = \max \{1;3\} = 3.$$

Bài 2 : Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Nửa chu vi hình chữ nhật là: 16:2 = 8cm

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm) thì cạnh kia có độ dài là (8 - x) (cm) (với $x \in [0; 8]$).

Diện tích của hình chữ nhật là:

$$y = S(x) = x(8 - x) = -x^2 + 8x$$

Xét hàm số trên ta có: D = [0; 8]

$$y' = -2x + 8 = -2(x - 4)$$

$$y' = 0 => x = 4$$

$$\Rightarrow \max_{[0;8]} y = \max \{S(0), S(8), S(4)\} = \max \{0, 0, 16\} = 16$$

Hàm số đạt giá trị cực đại tại x = 4 (=> cạnh còn lại là 8 - 4 = 4) hay trong số các hình chữ nhật có chu vi 16cm thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

(**Lưu ý:** Thay vì xét max, min như trên, bạn cũng có thể sử dụng Bất đẳng thức Cô-si với hai số x và x - 8 để suy ra kết quả tương tự.)

Bài 3 : Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích 48 m2, hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi độ dài một cạnh của hình chữ nhật là x (m) thì độ dài cạnh còn lại là 48/x (m) (điều kiện: x > 0).

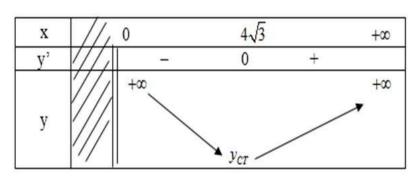
Khi đó chu vi hình chữ nhật là:

$$y = P(x) = 2\left(x + \frac{48}{x}\right) = 2x + \frac{96}{x}$$

Xét hàm số trên (0; +∞):

$$y' = 2 - \frac{96}{x^2}$$
; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3} (loại $x = -4\sqrt{3})$$

Bảng biến thiên:



Suy ra
$$\min_{D} y = y(4\sqrt{3}) = 16\sqrt{3}$$
.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4\sqrt{3}$ hay trong các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 m² thì hình vuông cạnh $4\sqrt{3}$ m là hình có chu vi nhỏ nhất.

Bài 4: Tính giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

a)
$$y = \frac{4}{1+x^2}$$
 ; b) $y = 4x^3 - 3x^4$

Lời giải:

$$a) D = R$$

Ta thấy: $1 + x^2 ≥ 1$

$$\Rightarrow 0 < y = \frac{4}{1+x^2} \le 4$$

=> Hàm số có giá trị lớn nhất là 4 khi $1 + x^2 = 1 => x = 0$

Vậy:

$$\max_{p} y = 4$$

(Cách khác: tính đạo hàm và lập bảng biến thiên)

$$y' = 12x^2 - 12x^3 = 12x^2(x - 1)$$

$$y' = 0 => x = 0$$
; $x = 1$

Bảng biến thiên:

X	-∞		0		1	+
y'		+	0	+	0	_
у		_		/	• y(1) <	

Từ bảng biến thiên suy ra: max y = y(1) = 1

$$\max_{D} y = y(1) = 1$$

Bài 5 : Tính giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a)
$$y = |x|$$
; b) $y = x + \frac{4}{x}$ (x > 0).

Lời giải:

a)

- Cách 1:

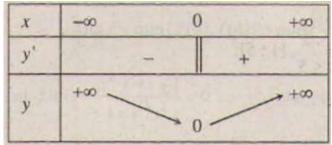
Ta có:
$$y = |x| \ge 0 \ \forall \ x$$

=> Hàm số có giá trị nhỏ nhất là min y = 0 khi x = 0.

- Cách 2:

$$y = |x| = \begin{cases} -x \ v \circ i \ x \in (-\infty; 0) \\ x \ v \circ i \ x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



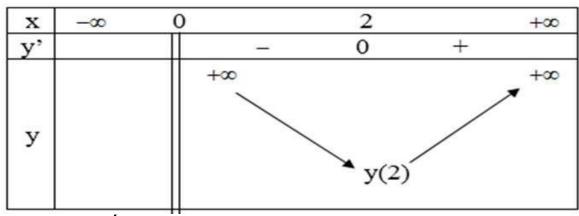
Từ bảng biến thiên suy ra: min y = 0

b) D =
$$(0; +\infty)$$

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

$$y' = 0 => x = 2 (loại x = -2 vì \notin (0; +\infty))$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên suy ra: min y = y(2) = 4