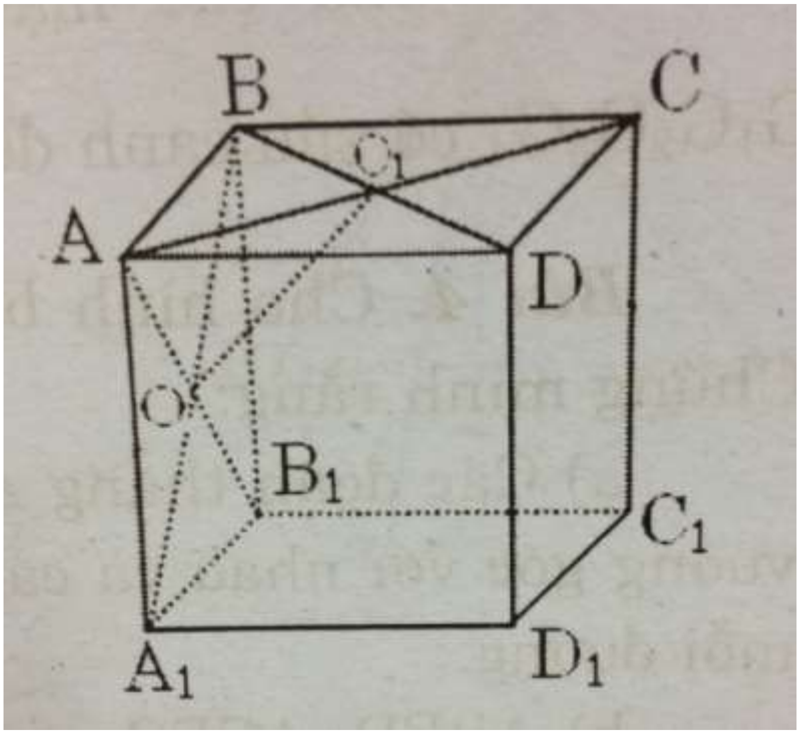
Bài 2 : Cho hình lập phương (H). Gọi (H') là hình bát diện đều có các đỉnh là tâm các mặt của (H). Tính tỉ số diện tích toàn phần của (H) và (H').



Lời giải:

Gọi a là cạnh của hình lập phương ABCD.$A_1B_1C_1D_1$; O_1, O_2 lần lượt là tâm của ABCD và ABB_1A_1. Khi đó O_1O_2 là đường trung bình của tam giác A_1BD.

Suy ra $O_1O_2 = A_1D/2 = a\sqrt{2}/2$

Từ đó ta có: Đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt có chung một cạnh của hình lập phương thì có độ dài bằng $a\sqrt{2}/2$.

Vậy sáu tâm của sáu mặt của hình lập phương tạo thành tám tam giác đều cạnh $a\sqrt{2}/2$, mỗi tâm là đỉnh chung của đúng bốn tam giác đều, và tám tam giác đều này là tám mặt của hình tám mặt đều cạnh bằng $a\sqrt{2}/2$.

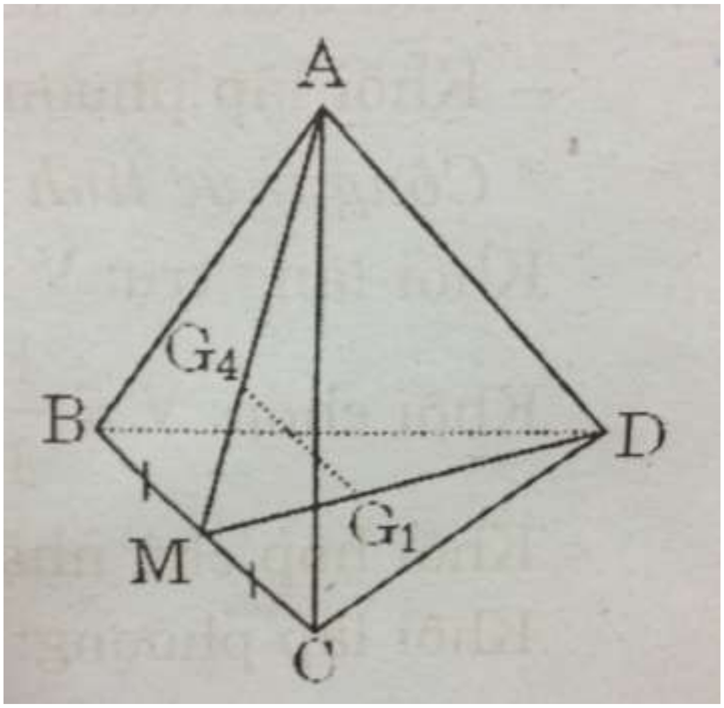
Diện tích toàn phần của hình lập phương là $S_1 = 6a^2$.

Diện tích toàn phần của hình bát diện đều là:

$$S_2 = 8.\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 2\sqrt{3}$$

Bài 3 : Chứng minh rằng tâm của các mặt của hình tứ diện đều là các đỉnh của một tứ diện đều.

Lời giải:



Trong hình trên, gọi G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là

tâm của các tam giác BCD, ACD, ABD, ABC.

Ta có: AG_4 và DG_1 cùng đi qua trung điểm M

của DC nên $\frac{MG_4}{MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_4 // AD$.

Giả sử cạnh của hình tứ diện đều bằng a, ta có:

$$\frac{G_1G_4}{AD} = \frac{MG_1}{MD} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_4 = \frac{1}{3}AD = \frac{a}{3}$$

Tương tự ta có:

$G_1G_2 = G_2G_3 = G_1G_4 = G_2G_3 = G_3G_4 = G_4G_2 = \frac{a}{3}$

Tâm của các mặt của tứ diện đều ABCD tạo thành

tứ diện $G_1G_2G_3G_4$ có sáu cạnh đều bằng $\frac{a}{3}$.

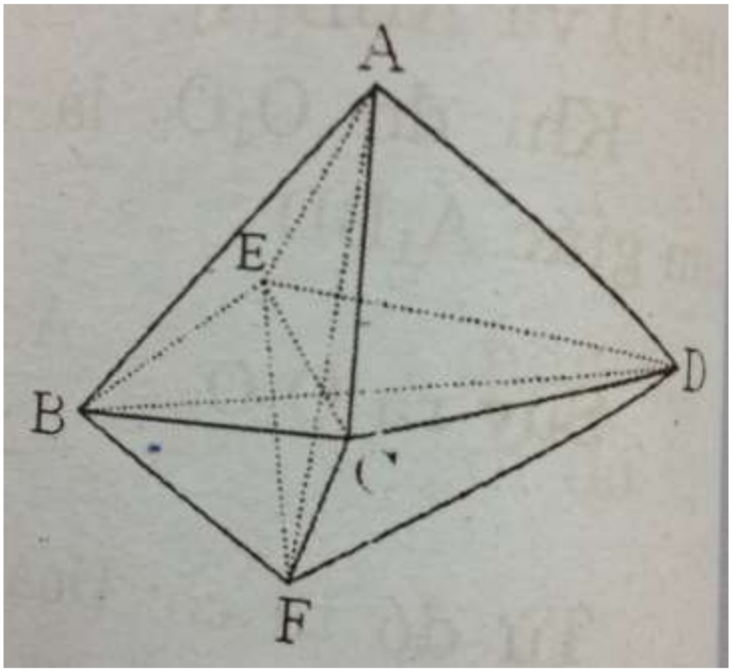
Vậy $G_1G_2G_3G_4$ là tứ diện đều.

Bài 4 : Cho hình bát diện đều ABCDEF.

Chứng minh rằng:

a)Các đoạn thẳng AF, BD và CE đôi một vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b)ABFD, AEFC và BCDE là những hình vuông.



Lời giải:

a)Ta có: B, C, D, E cách đều A và F suy ra B, C, D, E cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AF (1)

- Trong mp(BCDE), ta có BC = CD = DE = EB

Suy ra tứ giác BCDE là hình thoi hoặc hình vuông (2)

- Mặt khác AB = AC = AD = AE (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra BCDE là hình vuông.

Vậy BD và CE vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Chứng minh như trên ta suy ra AF và BD, AF và CE vuông góc nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

b)Ta có: BCDE là hình vuông (chứng minh trên).

Tương tự, ABFD và AEFC cũng là những hình vuông.