Bài 1 : Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng?

a) Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ ⊥a và Δ ⊥b.

b) Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a và b chéo nhau thì đường vuông góc chung của a và b luôn luôn vuông góc với (P).

c) Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ).

d) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b.

e) Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

Lời giải:

a) Sai, đúng là "Đường thẳng Δ là đường thẳng vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b nếu Δ cắt cả a và b, đồng thời Δ ⊥a và Δ ⊥b"

b) Đúng

c) Đúng

d) Sai

e) Sai.

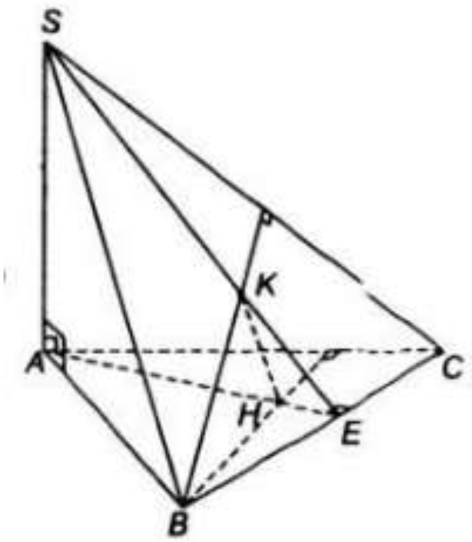
Bài 2 : Cho tứ diện S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng

a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.

b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

Lời giải:



a) Chứng minh AH, SK, BC đồng qui:

• Gọi AA' là đường cao của ΔABC thì $H \in AA'$

• $\begin{cases} BC \perp AA' \\ AA' \text{là hình chiếu của } SA' \text{trên } (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp SA'$

Vậy SA' là đường cao của ΔSBC nên $K \in SA'$.

Do đó AH, SK, BC đồng qui tại A'.

b) Chứng minh $SC \perp (BHK)$, $HK \perp (SBC)$

• Vì H là trực tâm trên ΔABC nên $BH \perp AC$

mà AC là hình chiếu của SC trên ABC $\Rightarrow BH \perp SC$

K là trực tâm của ΔSBC nên $BK \perp SC$.

Vậy SC vuông góc với BH, BK nên $SC \perp (BHK)$

• $\left.\begin{matrix} (BHK) \perp SC \\ SC \subset (SBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (BHK) \perp (SBC)$

$\left.\begin{matrix} (SAA') \perp BC \\ BC \subset (SBC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (SAA') \perp (SBC)$

Vậy (BHK) và (SAA') cùng vuông góc với (SBC)

nên giao tuyến của chúng là HK cũng vuông góc với (SBC).

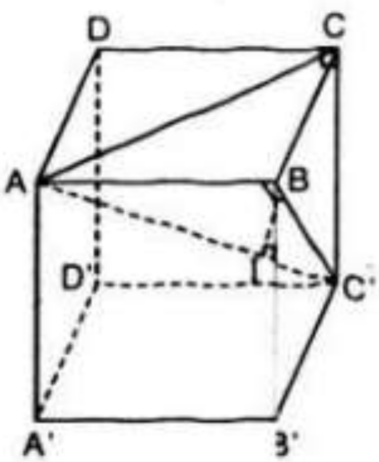
c) Xác định đường vuông góc chung của BC, SA

Ta có $AA' \perp BC$ tại A'. Do $SA \perp (ABC)$ nên $AA' \perp SA$ tại A

$\Rightarrow$ SS' là đường vuông góc chung của BC, SA.

Bài 3 (): Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B' và D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Lời giải:



Các tam giác BAC', CA'A, DAC', A'AC, B'C'A, D'C 'A bằng nhau nên các đường cao ứng với cạnh AC' bằng nhau.

Ta có CC'= a ; CA = $a\sqrt{2}$

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CC'^2} + \frac{1}{AC^2}$$

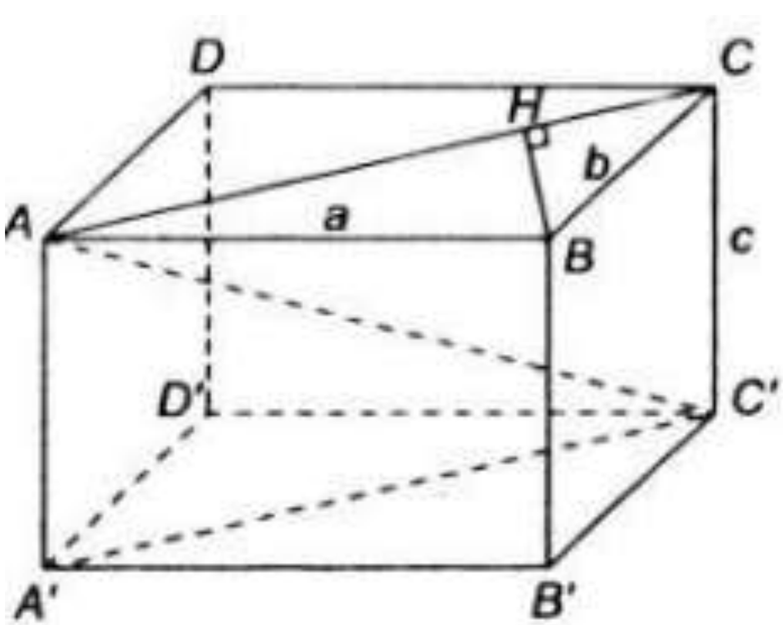
Từ đây ta tính được CH = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

Bài 4 : Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

Lời giải:



a) Ta có : $AA' \perp (ABCD)$

$AA' \subset (ACC'A')$

$\Rightarrow (ACC'A') \perp (ABCD)$

Hai mặt phẳng này vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến AC nên nếu từ B ta kẻ $BH \perp AC$ thì $BH \perp (ACC'A')$ và BH là khoảng cách từ B đến mp(ACC'A')

Ta có $AC^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AC = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ta lại có BH.AC = BA.BC ($=2S_{ABC}$)

$$\Rightarrow BH = \frac{BA.BC}{AC} \Rightarrow BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

b) $(ACC'A') \supset AC$ mà CC' // BB'

nên BB' // (ACC'A')

Mặt phẳng (ACC'A') chính là mặt phẳng chứa A'C' và song song với BB' ;

B là một điểm thuộc BB', do đó khoảng cách BH từ B đến mp(ACC'A') cũng là khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và A'C' và

cũng bằng $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

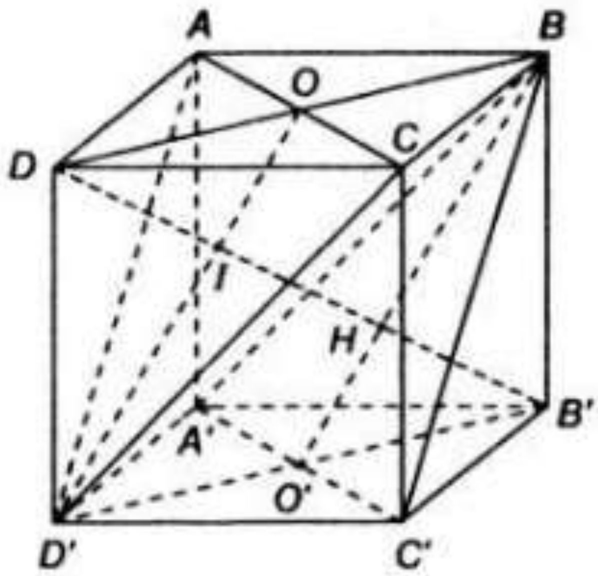
Bài 5 (): Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

a) Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C')

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD)

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'

Lời giải:



a) Chứng minh B’D ⊥ (BA’C’):

Cách 1: Ta có BD là đường chéo của hình chữ nhật BB’D’D và hình chữ nhật AB’C’D

Ta có : $\left.\begin{matrix} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp DD' \end{matrix}\right\}$

⇒ A’C’ ⊥ (BB’D’D) ⇒ A’C’ ⊥ B’D

Tương tự : A’B ⊥ (AB’C’D) ⇒ A’B ⊥ B’D

⇒ B’D ⊥ (BA’C’)

Cách 2 : D.BA’C’ và B’.BA’C’ là các hình chóp đều có chung mặt đáy là ΔBA’C’.

Gọi I là tâm của tam giác BA’C’ thì DI ⊥ (BA’C’) và B’I ⊥ (BA’C’) ⇒ B, I, D thẳng hàng và B’D ⊥ (BA’C’)

b) Khoảng cách giữa (BA'C'), (ACD')

Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} BA'//CD'' \\ BC'//AD' \end{array}\right\} \Rightarrow (BA'C')//(ACD')$$

Gọi O, O' là tâm của ABCD, A'B'C'D' và gọi I, J lần lượt là tâm của hai tam giác đều BA'C' và ACD'.

Xét hình chữ nhật BB'D'D ta có BO' // OD' nên OJ là đường trung bình của ΔDBI nên IJ = JD.

IO' là đường trung bình của $\Delta B'JD$ nên IJ = BI

$$\Rightarrow BI = IJ = JD = \frac{1}{3}B'D$$

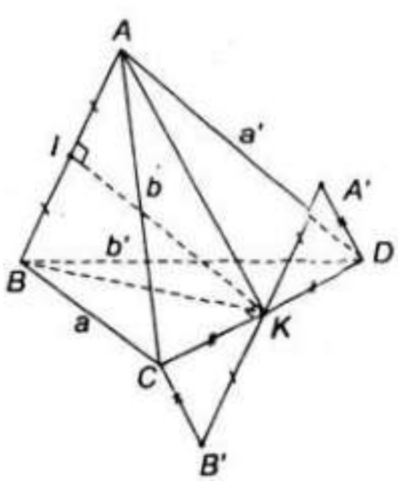
Theo câu trên $B'D \perp (BA'C)$ nên $IJ \perp (BA'C')$

Mà $J \in (ACD')$ nên khoảng cách giữa cách giữa 2 mặt phẳng song song (ACD') và (BA'C') là độ dài IJ.

$$\text{Và } IJ = \frac{1}{3}B'D = \frac{1}{3}\sqrt{B'B^2 + BD^2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Bài 6 : Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD và AD = BC.

Lời giải:



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của cạnh AB và CD. Qua K kẻ đường thẳng d // AB, trên d lấy A', B' sao cho K là trung điểm của A'B' và KA' = IA.

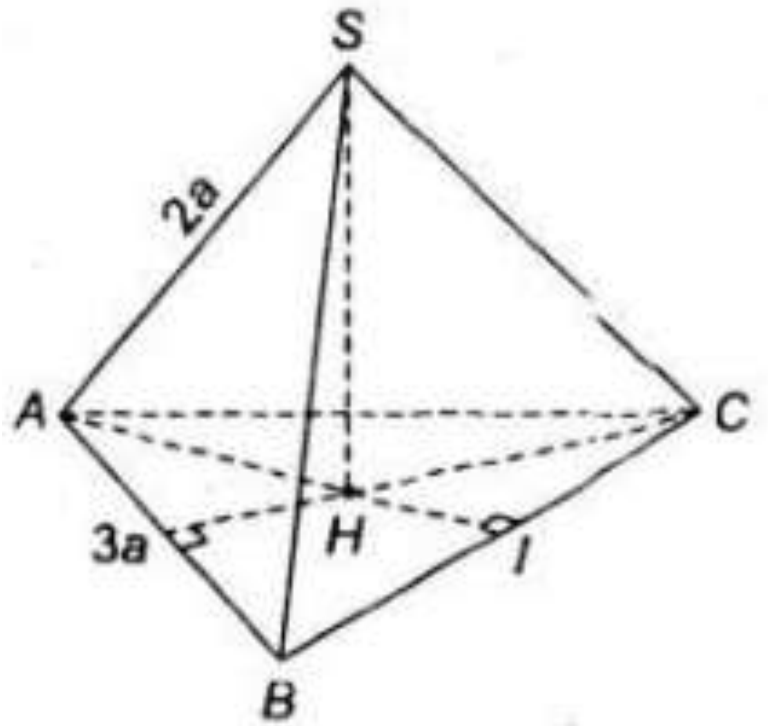
Ta có B'C = A'D (vì $\Delta KB'C = \Delta KA'D$).

Vì $BB' // AA' // IK$ mà IK là đường vuông góc chung của AB và CD nên $BB' \perp B'C$ và $AA' \perp A'D$. Hai tam giác vuông BCB' và ADA' có BB' = AA' và CB' = A'D nên ta suy ra AD = BC.

Chứng minh tương tự ta có AC = BD.

Bài 7 : Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

Lời giải:



•Gọi O là tâm của đáy ABC

(O là trọng tâm, trực tâm của tam giác ABC).

•S.ABC là hình chóp đều $\Rightarrow$ $SO \perp (ABC)$

*Tam giác SAO vuông ở O

$\Rightarrow SO^2 = SA^2 - AO^2$ với :

•$SA = 2a$

•$AO = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{3a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

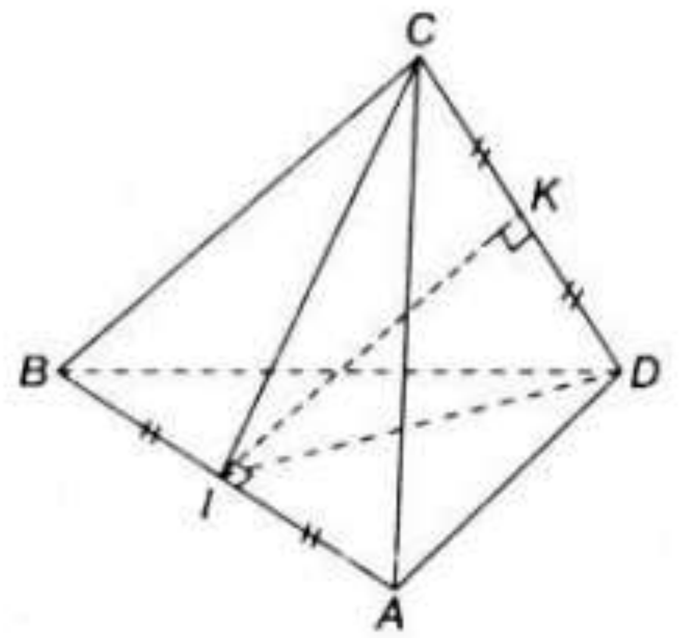
$\Rightarrow SO^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2 \Leftrightarrow SO = a$

Vậy khoảng cách từ S tới mp(ABC)

bằng a.

Bài 8 : Cho tứ diện ABCD cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối diện của tứ diện đều đó.

Lời giải:



Gọi M là trung điểm AB và N là trung điểm CD

Do NA = NB nên Δ cân NAB cho NM ⊥ AB

Do MC = MD nên Δ cân MCD cho MN ⊥ CD.

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AB, CD.

Tam giác vuông BMN cho:

$$MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}}$$

Vậy $d(AB, CD) = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$