Bài 1 : Trong các cặp hàm số dưới đây, hàm số nào là nguyên hàm của hàm số còn lại?

a) e^{-x} và $-e^{-x}$

b) $sin2x$ và $\sin^2 x$

c) $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$và $\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x$

Lời giải:

a) Ta có: $[e^{-x}]' = -e^{-x}$.

Vậy e^{-x} là nguyên hàm của $-e^{-x}$

b) Ta có: $[\sin^2 x]' = 2sinx\ cosx = \sin 2x$.

Vậy $\sin^2 x$ là nguyên hàm của sin 2x.

c) Ta có: $\left[\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x\right]'$

$$= \left(1-\frac{4}{x}\right)' e^x + \left(1-\frac{4}{x}\right)(e^x)'$$

$$= e^x\left[1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right] = \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$$

Vậy $\left(1-\frac{4}{x}\right)e^x$ là nguyên hàm của hàm số $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x$

Bài 2 : Tìm hiểu nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}$

b) $f(x) = \frac{2^x-1}{e^x}$

c) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x\ \cos^2 x}$

d) $f(x) = sin5x.cos3x$

e) $f(x) = \tan^2 x$

f) $f(x) = e^{3-2x}$

g) $f(x) = \frac{1}{(1+x)(1-2x)}$

Lời giải:

a) Ta có: $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{1}{3}}$

$\int f(x)d=\int x^{\frac{2}{3}}dx+\int x^{\frac{1}{6}}dx+\int x^{-\frac{1}{3}}dx$

$=\dfrac{3^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+\dfrac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1}+\dfrac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C$

b) Ta có: $\int f(x)dx=\int\left(\frac{2}{e}\right)^{x}dx-\int e^{-x}dx$

$=\dfrac{2^{x}}{e^{x}(ln2-1)}+\dfrac{1}{e^{x}}+C$

c) Ta có: $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{4}{\sin^2 2x}=[-2cot2x]'$

Vậy $\int f(x)dx=-2cot2x+C$

d) Ta có: $f(x)=sin5xcos3x=\frac{1}{2}[sin8x+sin2x]$

$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int sin8x\,dx+\frac{1}{2}\int sin2x\,dx$

$=-\frac{1}{16}cos8x-\frac{1}{4}cos2x+C$

e) Ta có: $f(x)=\tan^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$

$\int f(x)\ dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\tan x-x+C$

f) Vậy $\int f(x)dx=\int e^{3-2x}dx$

$=-\frac{1}{2}\int e^{3-2x}(3-2x)'dx=-\frac{1}{2}e^{3-2x}+C$

g) Ta có: $f(x)=\frac{[1-2x)+2(x+1)]}{3(1+x)(1-2x)}=\frac{1}{3(x+1)}+\frac{2}{3(1-2x)}$

$f(x)dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{3}\int\frac{(1-2x)'dx}{1-2x}$

$=\frac{1}{3}\ln|1+x|-\frac{1}{3}\ln|1-2x|=\frac{1}{3}ln\left|\frac{1+x}{1-2x}\right|+C$

Bài 3 : 3. Sử dụng phương pháp đổi biến, hãy tính:

a) $\int (1-x)^9$(đặt u = 1 − x)

b) $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dx$(đặt $u = 1 + x^2$)

c) $\int \cos^3 x\, sinxdx$ (đặt u = cosx)

d) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}+2}$ (đặt $u = e^x + 1$)

Lời giải:

a) Đặt $u = 1 - x$; du=-dx

Vậy $\int (1-x)^9 dx = -\int u^9 du = -\frac{u^{10}}{10} + C = -\frac{(1-x)^{10}}{10} + C$

b) Đặt $u = 1 + x^2$); du = 2xdx => $xdx = \frac{du}{2}$

Vậy $\int x(1+x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du = \frac{\frac{1}{2}\left(u^{\frac{3}{2}+1}\right)}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

c) Đặt u = cosx, du= -sinxdx

Vậy$\int \cos^3 x\, sinxdx = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

d) Ta có: $e^x + e^{-x} + 2 = \frac{e^{2x}+2e^x+1}{e^x} = \frac{(e^x+1)'}{e^x}$

Đặt $u = e^x + 1$) ta có:

Vậy $\int f(x)dx = \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{e^x+1} + C$

Bài 4 : Sử dụng phương pháp tính nguyên hàm từng phần, hãy tính:

a) $\int xln(1+x)dx$

b) b) $\int (x^2 + 2x - 1)e^x dx$

c)$\int xsinx(2x+1)dx$

d) $\int (1-x)cosxdx$

Lời giải:

a) Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+x) \\ dv = xdx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x+1}dx \\ v = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

Ta có:

$$\int x\ln(1+x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \int \frac{x^2dx}{2(x+1)}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x) + C$$

$$= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1-x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$$

b) Đặt $\begin{cases} u = x^2+2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2(x+1)dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$\int (x^2+2x-1)e^x dx = (x^2+2x-1)e^x - 2\int (x+1)e^x\ dx \ (1)$$

đặt $\begin{cases} u = x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$

$\int (x+1)e^x dx = (x+1)e^x + \int e^x dx = xe^x + C$

Thay vào (1) ta có: $\int (x^2+2x-1)e^x dx$

$= (x^2+2x-1)e^x - 2xe^x + C = (x^2-1)e^x + C$

c) Đặt u(x) = x và sin (2x + 1)dx = dv(x)

=>du(x) = dx, v(x) =$-\frac{1}{2}\cos(2x+1)$

$$\int x\sin(2x+1)dx = -\frac{1}{2}x\cos(2x+1) + \frac{1}{2}\int \cos(2x+1)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}x\cos(2x+1) + \frac{1}{4}\sin(2x+1) + C$$

d) Đặt 1 – x = u(x); cosdx = dv(x)

⇨ du(x) = -dx, v(x) = sinx

$\int (1-x)\cos x dx = (1-x)\sin x + \int \sin x dx$

$= (1-x)\sin x - \cos x + C$