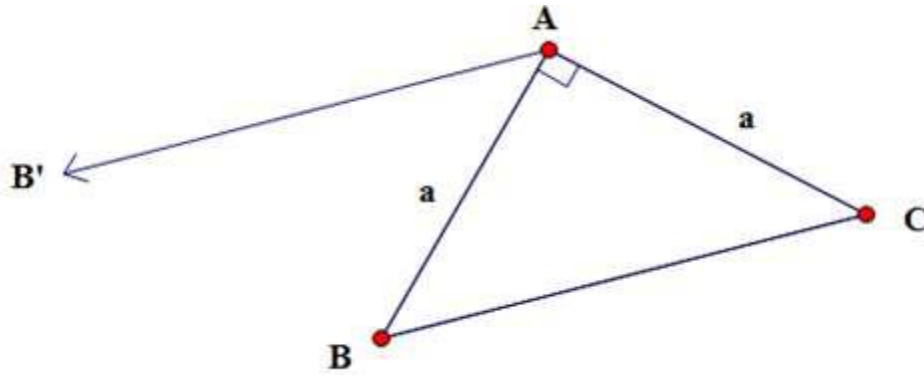


Bài 1 : Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$. Tính các tích vô hướng

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$$

Lời giải:



Ta có:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a.a.\cos 90^0 = 0 \text{ (Vì } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \text{)}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\text{Dựng } \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CB}.$$

$$BC = a\sqrt{2}, \widehat{BAB'} = \widehat{ABC} = 45^0 \Rightarrow \widehat{B'AC} = 135^0.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{AC}|.|\overrightarrow{CB}|.\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a.a\sqrt{2}.\cos \widehat{BAC}$$

$$= a^2\sqrt{2}.\frac{-\sqrt{2}}{2} = -a^2.$$

Bài 2 : Cho ba điểm O, A, B thẳng hàng và biết $OA = a$, $OB = b$. Tính tích vô hướng

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$$

trong hai trường hợp:

a) Điểm O nằm ngoài đoạn AB;

b) Điểm O nằm trong đoạn AB.

Lời giải:



a) Ta có:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos 0^\circ = a.b \quad (\overrightarrow{OA} \text{ và } \overrightarrow{OB} \text{ cùng hướng})$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{OA} \text{ và } \overrightarrow{OB} \text{ ngược hướng nên } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = 180^\circ.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = -1$$

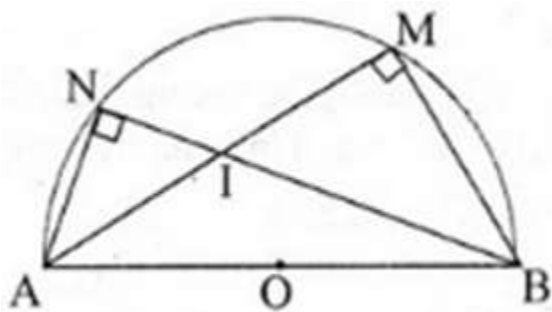
$$\text{Vậy } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a.b \cdot \cos 180^\circ = -ab.$$

Bài 3 : Cho nửa hình tròn tâm O có đường kính AB=2R. Gọi M và N là hai điểm thuộc nửa đường tròn sao cho hai dây cung AM và BN cắt nhau tại I.

a) Chứng minh $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$;

b) Hãy dùng kết quả câu a) để tính $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN}$ theo R.

Lời giải:



a)

$$\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM}$$

Vì $AI \perp MB$ nên $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

Do đó: $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$ (đpcm)

$$\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN}) = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AN}$$

Vì $BI \perp AN$ nên $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$.

Do đó: $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$ (đpcm)

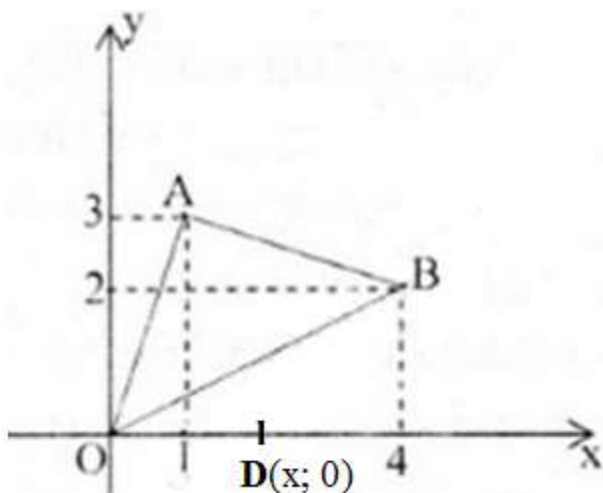
b) Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BN} &= \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4R^2 \end{aligned}$$

Bài 4 : Trên mặt phẳng Oxy, cho hai điểm A(1; 3), B(4; 2).

- Tìm tọa độ điểm D nằm trên trục Ox sao cho $DA = DB$;
- Tính chu vi tam giác OAB.
- Chứng tỏ OA vuông góc với AB và từ đó tính diện tích tam giác OAB.

Lời giải:



a) Gọi $D(x; 0)$. Ta có:

$$DA = \sqrt{(1-x^2) + (3)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 10}$$

$$DB = \sqrt{(4-x^2) + (2)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 20}$$

Do $DA = DB$ nên:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = \sqrt{x^2 - 8x + 20} \Leftrightarrow 6x = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

Vậy $D(\frac{5}{3}; 0)$.

b) Ta có:

$$OA^2 = 1^2 + 3^2 = 10 \Rightarrow OA = \sqrt{10}$$

$$AB^2 = 3^2 + (-1)^2 = 10 \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

$$OB^2 = 4^2 + 2^2 = 20 \Rightarrow OB = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10}$$

Chu vi $\triangle OAB$ là:

$$\begin{aligned} P_{\triangle OAB} &= OA + AB + OB = \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \\ &= \sqrt{10} (2 + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

c) Ta có: $OA^2 + AB^2 = 20 = OB^2$

$\Rightarrow \triangle OAB$ vuông tại A hay $OA \perp AB$

Diện tích $\triangle OAB$ là:

$$S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5$$

Bài 5 : Trên mặt phẳng Oxy hãy tính góc giữa hai vectơ \vec{a} và \vec{b} trong các trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (2; -3), \vec{b} = (6; 4);$

b) $\vec{a} = (3; 2), \vec{b} = (5; -1);$

c) $\vec{a} = (-2; -2\sqrt{3}), \vec{b} = (3; \sqrt{3}).$

Lời giải:

Áp dụng công thức:

Với $\vec{a} = (a_1; a_2), \vec{b} = (b_1; b_2)$ thì:

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

a) Ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 12 - 12 = 0.$$

Suy ra $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = 0$ nên suy ra $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

b) Ta có:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15 - 2 = 13$$

Khi đó: $|\vec{a}| = \sqrt{13}; |\vec{b}| = \sqrt{26}$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{13}{\sqrt{13} \sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } (\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ.$$

c) Ta có:

$$\vec{a}\vec{b} = -6 - 6 = -12$$

Khi đó: $|\vec{a}| = \sqrt{16} = 4$; $|\vec{b}| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{-12}{4 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Vậy } (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ.$$

Bài 6 : Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm: A(7; -3), B(8; 4), C(1; 5), D(0; -2). Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình vuông.

Lời giải:

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{DC} = (1; 7) \\ \overrightarrow{AB} = (1; 7) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} DC = AB \\ DC \parallel AB \end{cases}$$

\Rightarrow ABCD là hình bình hành.

Lại có: $\overrightarrow{AB} = (1; 7)$; $\overrightarrow{AD} = (-7; 1)$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \widehat{BAD} = 90^\circ.$$

\Rightarrow ABCD là hình chữ nhật.

Mặt khác:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}; \quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$\Rightarrow AB = AD$$

\Rightarrow ABCD là hình vuông (vì hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau) (đpcm).

Bài 7 : Trên mặt phẳng Oxy cho điểm A(-2; 1). Gọi B là điểm đối xứng với điểm A qua gốc tọa độ O. Tìm tọa độ của điểm C có tung độ bằng 2 sao cho tam giác vuông ở C.

Lời giải:

Vì B đối xứng với A(-2; 1) qua O nên ta có: B(2; -1)

Gọi tọa độ C(x; 2).

Vì $\triangle ABC$ vuông tại C nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ (*)

Mà $\overrightarrow{CA} = (-2 - x; -1)$ và $\overrightarrow{CB} = (2 - x; -3)$

Nên (*) $\Leftrightarrow -(2 + x)(2 - x) + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow -4 + x^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Vậy C(1; 2) hay C(-1; 2).