Bài 1 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $y = x^2; y = x + 2$

b) $y = |\ln x|; y = 1$

c) $y = (x-6)^2; y = 6x-x^2$

Lời giải:

a) Giả sử đường thẳng $y = x+2$ cắt parabol $y = x^2$ tại A và B.

x_A, x_B là các nghiệm của phương trình:

$x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1; x = 2$

Xét hàm $f(x) = x^2 - x - 2$, $f'(x) = 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
f'(x)		-		-		+		+	
f(x)	$+\infty$		0		$-\frac{9}{4}$		0		$+\infty$

Theo bảng biến thiên ta có: trên đoạn [-1;2] thì $x^2 - x - 2 < 0$

Do đó: $|x^2 - (x + 2)| = -x^2 + x + 2$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{x_A}^{x_B} |x^2 - (x+2)|dx = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2}(\text{đ}vdt)$$

b) Hoành độ các giao điểm là:

$\ln|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1/e; x = e$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{1} [1 + lnx]dx + \int_{1}^{e} (1 - lnx)dx$$

$$= x(lnx - 1)|_{\frac{1}{e}}^{1} - x(lnx - 1)|_{\frac{1}{e}}^{1} = e + \frac{1}{e} - 2\ (đvdt)$$

c) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là:

$(x-6)^2=6x-x^2$

$\Leftrightarrow$ (x-6)(2x-6)=0

$\Leftrightarrow$x=3 ;x=6

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_{3}^{6} [6x - x^2 - (x - 6)^2]dx$$

$$= \int_{3}^{6} (-2x^2 + 18x - 36)dx$$

$$= \left(-\frac{2}{3}x^3 + 9x^2 - 36x\right)\Big|_{3}^{6}$$

$$= -36 + 45 = 9(đvdt)$$

Bài 2 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong y = x2+1 , tiếp tuyến với đường này tại điểm M(2; 5) và trục Oy.

Lời giải:

Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = x^2 + 1$ tại điểm M(2; 5) là :

$y' = y'(2)[x - 2] + 5 \Leftrightarrow y = 4x - 3$

Điểm M(2; 5) thuộc đường $y = x^2 + 1$ vì $5 = 2^2 + 1$

Vậy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_0^2 |x^2 + 1 - (4x - 3)|dx$$

$$= \int_0^2 |x^2 - 4x + 4|dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right)\Big|_0^2 = \frac{8}{3}(đvdt)$$

Bài 3 : Parabol y=x2/2 chia hình tròn có tâm tại gộc toạ độ, bán kính 2√2 thành hai phần. Tìm tỉ số diện tích của chúng.

Lời giải:

Phương trình đường tròn:

$$x^2 + y^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{8 - x^2}$$

Phía trên trục hoành, đường tròn có phương trình:

$$y = \sqrt{8 - x^2}$$

Do tính đối xứng nên diện tích giới hạn bởi

$y = \frac{x^2}{2}$ và $y = \sqrt{8 - x^2}$ bằng hai lần diện tích

giới hạn bởi các đường đó và trục tung.

Hoành độ giao điểm của hai đường là :

$$\frac{x^2}{2} = \sqrt{8 - x^2} \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

$$S = 2\int_0^2 \left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\int_0^2 \sqrt{8 - x^2}dx - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

Đặt $x = 2\sqrt{2}sint$, ta có:

$$2\int_0^2 \sqrt{8 - x^2}dx = 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+cos2t)dt = [8t+4sin2t]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4$$

Diện tích hình giữa hai đường cong là:

$$S = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}$$

Diện tích phần còn lại của hình tròn là:

$$s_1 = \pi\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}$$

Tỉ số diện tích hai phần là:

$$\left[2\pi + \frac{4}{3}\right] : \left[6\pi - \frac{4}{3}\right] = \frac{3\pi+2}{9\pi-2}$$

Bài 4 : Tính thể tích khối tròn xoay đó hình phẳng giới hạn bởi các đường sau quay quanh Ox:

a) $y = 1 - x^2; y = 0$

b) $y = cosx; y = 0; x = 0; x = \pi$

c) $y = tanx; y = 0; x = 0; y = \frac{\pi}{4}$

Lời giải:

a) Hoành độ giao điểm là: $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1) dx = \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3}x^3 + x \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= 16\frac{\pi}{15} (đvdt)$$

b) Ta có: $V = \pi \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 + cos2x) dx$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x + \frac{sin2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

c) Ta có: $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx$

$$= \pi(tanx - x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi - \pi^2}{4}$$

Bài 5 : Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox.

Cho tam giác vuông OPM có cạnh OP nằm trên trục Ox.

Đặt $\widehat{POM} = \alpha', OM = R(0 \le \alpha < \frac{\pi}{3}, R > 0)$.

Gọi V là khối tròn xoay thu được khi quay tam giác đó

xung quanh trục Ox.

a) Tính thể tích của V theo α và R.

b) Tìm α sao cho thể tích của V lớn nhất.

Lời giải:

a) Ta có: OP = R$\cos\alpha, PM = R\sin\alpha$

Phương trình đường thẳng OM là $y = x\tan\alpha$

Vậy thể tích khối tròn xoay là:

$$V = \pi \int_0^{R\cos\alpha} x^2 \tan^2\alpha dx = \pi \tan^2 \frac{x^3}{3}\Big|_0^{R\cos\alpha}$$

$$V = \frac{\pi R^3}{3}\sin^2\alpha . \cos\alpha = \frac{\pi R^3}{3}[\cos\alpha - \cos^3\alpha](đvdt)$$

b) Thể tích V là một hàm số của α, với:

$$V'(\alpha) = \frac{\pi R^3}{3}.[\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha]$$

$$V'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Bảng biến thiên của V(α) $với\ 0 \le \alpha < \frac{\pi}{3}$

α	$-\infty$ $+\infty$		$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$		
V'(α)		+		-	
V(α)	-∞	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Vậy thể tích V lớn nhất khi α là góc có $\cos\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.