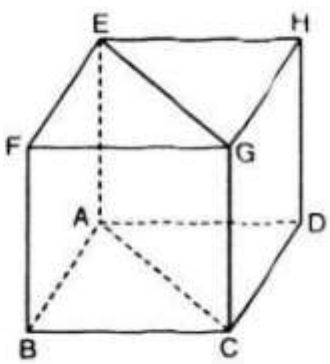
Bài 1 : Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$

b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

Lời giải:



a) Góc giữa $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC}$

Mà ABCD là hình vuông nên $\widehat{BAC} = 45°$

Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = 45°$

b) Góc giữa $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EG}$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{FAC}$

AC, AF, FC là các đường chéo hình vuông bằng nhau

=> bằng nhau.

Vậy ΔAFC đều nên $\widehat{FAC} = 60°$

Do đó $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = 60°$

c) Góc giữa $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = 90°$

Bài 2 : Cho tứ diện ABCD

a)Chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \qquad (1)$$

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu :

ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

Lời giải:

a) Đưa các vectơ có cùng gốc A, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Cộng các đẳng thức trên ta được:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$$

b) Do $AB \perp CD$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Do $AC \perp DB$ nên $\overrightarrow{AC}..\overrightarrow{DB} = 0$

Thay vào đẳng thức (1) ta được:

$$0 + 0 + \overrightarrow{AD}\,\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$$

Bài 3 :

a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không?

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không?

Lời giải:

a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì nói chung a và b không song song với nhau vì a và b có thể cắt nhau hoặc có thể chéo nhau.

b) Trong không gian nếu a ⊥ b và b ⊥c thì a và c vẫn có thể cắt nhau hoặc chéo nhau do đó, nói chung a và c không vuông góc với nhau.

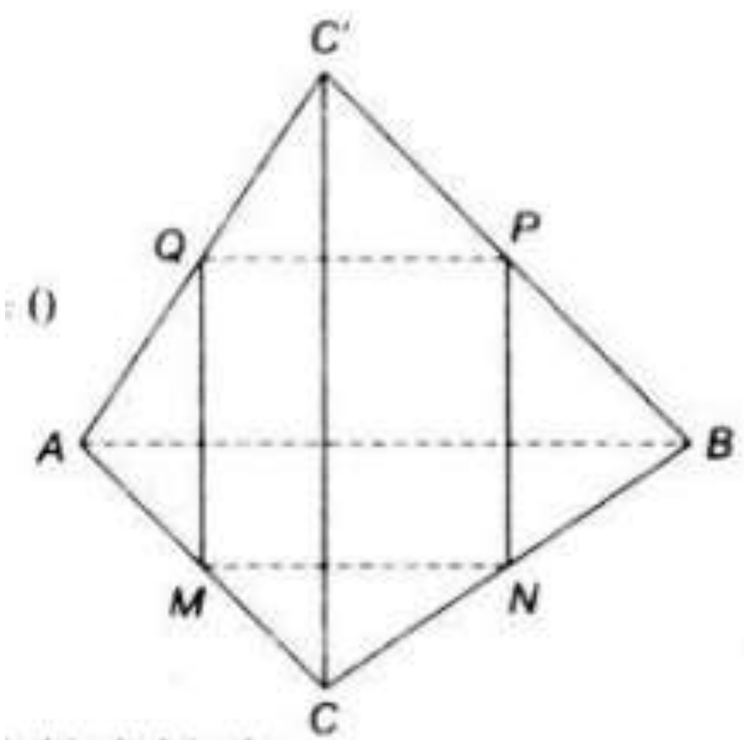
Bài 4 : Cho hai tam giác đều ABC và ABC' trong không gian nói chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và C'A.

Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CC'$

b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Lời giải:



Đặt AB = a, ta có AC = BC = AC' = BC' = a

a) Chứng minh $AB \perp CC'$

Ta có :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} = AB.\ AC.\ \cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})$

$= a.a.\cos 60° = \frac{a^2}{2}$

* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.\ AC.\ \cos(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = a.a.\cos 60° = \frac{a^2}{2}$

Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow AB \perp CC'$ (đpcm)

b) Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật

- MN là đường trung bình của tam giác ABC

  $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1)

- QP là đường trung bình của tam giác ABC'

  $\Rightarrow \overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (2)

*(1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$

$\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành (3)

*Ta có MM // AB và NP // CC'

mà $AB \perp CC'$ nên $MN \perp NP$ (4)

Từ (3) và (4), suy ra MNPQ là hình chữ nhật (đpcm)

Bài 5 :

Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC

và có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$.

Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

Lời giải:

- Chứng minh $SA \perp BC$
- Ta có: $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB})$

  $= \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$
- Đặt $SA = SB = SC = a$

và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA} = \alpha$, ta có:

* $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = SA.\ SC.\ \cos(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}) = a^2\cos\alpha$

* $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB} = SA.\ SB.\cos(\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}) = a^2\cos\alpha$

Vậy $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow SA \perp BC$ (đpcm)

Chứng minh tương tự ta cũng có $SB \perp AC$ và $SC \perp AB$

Bài 6 : Trong không gian cho hai hình vuông ABCD và ABC'D' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Chứng minh rằng AB ⊥OO' và CDD'C' là hình chữ nhật.

Lời giải:

Xét tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'}$,

Ta có:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AO'}\right|.\cos 45° - \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AO}\right|.\cos 45°$

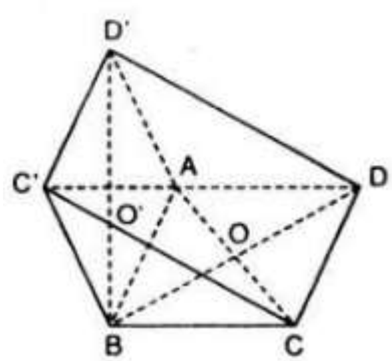
Dễ thấy $\left|\overrightarrow{AO'}\right| = \left|\overrightarrow{AO}\right|$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'} = 0 \Rightarrow AB \perp OO'$

Ta có:

$$\begin{cases} DC // D'C' \text{ vì cùng song song với } A \\ DC = D'C' \end{cases}$$

Nên DCC'D' là hình bình hành (1)



Ta lại có : $\frac{AO'}{AO} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow OO'//CC'$

Mà $OO' \perp AB$ nên $CC' \perp AB$

Suy ra $CC' \perp DC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài 7 Cho S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\,\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$$

Lời giải:

Ta có $\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 = AB^2.AC^2$

(Bình phương vô hướng bằng bình phương độ dài)

$(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2 = (AB.AC.\cos A)^2 = AB^2AC^2\cos^2 A$

Vậy: $\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2$

$= AB^2AC^2(1 - \cos^2 A) = AB^2.AC^2.\sin^2 A$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2.\sin^2 A} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A = S$

Bài 8 : Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và ...

Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$

Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CD$

b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB

và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$

Lời giải:

a) Đặt AB = AC = AD = a

Ta có:

$$\overline{AB}.\overline{AC} = \overline{AB}.(\overline{AD} - \overline{AC}) = \overline{AB}.\overline{AD} - \overline{AB}.\overline{AC}$$

$= a.a.\cos 60° - a.a.\cos 60° = 0$

$\Rightarrow AB \perp CD$

b) *Ta có: $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$ (1)

Và $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$ (2)

(1) + (2) ta được:

$$2\overline{MN} = (\overline{MA} + \overline{MB}) + \overline{AD} + \overline{BC} + (\overline{DN} + \overline{CN})$$

$$\Rightarrow 2\overline{MN} = \vec{0} + \overline{AD} + \overline{BC} + \vec{0} = \overline{AD} + \overline{BC}$$

Từ đó:

$$\overline{AB}.(2\overline{MN}) = \overline{AB}.(\overline{AD} + \overline{BC}) = \overline{AB}.\overline{AD} + \overline{AB}.\overline{BC} = \overline{AB}.\overline{AD} - \overline{BA}.\overline{BC}$$

Mà ΔABC đều nên : $\overline{AB}.(2\overline{MN}) = a.a.\cos 60° - a.a.\cos 60° = 0$

Vậy : $\overline{AB}.(2\overline{MN}) = 2\overline{AB}.\overline{MN} = 0 \Rightarrow AB \perp MN$

$$* \overline{MN}.\overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{BC}).\overline{CD} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AC} + \overline{AB})(\overline{AD} - \overline{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AD}^2 - \overline{AC}\overline{AD} + \overline{AC}\overline{AD} - \overline{AC}^2 - \overline{AB}\overline{AC} + \overline{AB}\overline{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{AB}\overline{AC} + \overline{AB}\overline{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - a^2 - a.a.\cos 60° + a.a.\cos 60°) = 0$$

$\Rightarrow MN \perp CD$