Bài 1 (trang 178 SGK Đại số 11): Nêu định nghĩa các hàm số lượng giác. Chỉ rõ tập xác định và tập giá trị của từng hàm số đó.

Lời giải:

a. Định nghĩa 1 : (Hàm số sin): Quy tắc tương ứng với mỗi số thực x với số thực sinx.

sin: R -> R

x -> y = sinx.

Hàm số y = sinx có tập xác định là R, tập giá trị là đoạn [-1;1].

b.Định nghĩa 2 : (Hàm số cosin): Quy tắc tương ứng với mỗi số thực x với số thực cosx.

cos : R -> R

x -> y = cosx.

Hàm số y = cosx có tập xác định là R, tập giá trị là đoạn [-1;1]

c. Định nghĩa 3: (Hàm số tang): Hàm số tang là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{sinx}{cosx}$$

tan : D -> R

x -> y = tanx.

Hàm số y = tanx có tập xác định

Tập giá trị của hàm số y = tanx là R.

d. Định nghĩa 4 : (Hàm số cotang): là hàm số được xác định bởi công thức

$$y = \frac{cosx}{sinx}$$

cot : D -> R

x -> y = cotx.

Hàm số y = cotx có tập xác định D = {x ∈ R \ x ≠ kπ, k ∈ Z}. Tập giá trị của hàm số y = coty là tập R.

Bài 2 (trang 178 SGK Đại số 11): Cho biết chu kì của mỗi hàm số y = sinx, y = cosx, y = tanx, y = cotx.

Lời giải:

a. Hàm số y = sinx và y = cosx là hàm số tuần hoàn có chu kì là 2 π.

b. Hàm số y = tanx và y = cotx là các hàm số tuần hoàn có chu kì là π.

Bài 3 (trang 178 SGK Đại số 11): Nêu cách giải phương trình lượng giác cơ bản , cách giải phương trình asinx + bcosx = c.

Lời giải:

a) Cách giải phương trình sinx = a (1).

- Trường hợp 1: |a| > 1,
  phương trình (1) vô nghiệm
  vì $sinx| \leq 1, \forall x \in R$.
- Trường hợp 2: $|a| < 1$.

Qua điểm (0; a) dựng đường thẳng vuông góc với Oy cắt

đường tròn lượng giác tại các điểm M_1, M_2. Khi đó:

$$(1)\left[\begin{array}{l} x = \overrightarrow{sđAM_1} \\ x = \overrightarrow{sđAM_2} \end{array}\right. = \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \quad (1.1) \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \; (1.2) \end{array}\right.$$
$(k \in Z)$.

Công thức nghiệm (1.1) và (1.2) có thể viết lại dưới dạng:

$$\left[\begin{array}{l} x = arcsina + k2\pi \\ x = arcsina + 2k\pi \end{array}\right. (k \in Z, arc\sin a = \alpha = \in [-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}]$$

b) Cách giải phương trình cosx = a (2).

- Trường hợp 1: |a| > 1,

phương trình (2) vô nghiệm vì $cosx| \leq 1, \forall x \in R$.

- Trường hợp 2: $|a| \leq 1$

Qua điểm (a; 0) dựng đường thẳng vuông góc với Ox

cắt đường tròn lượng giác tại hai điểm M_1, M_2.Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \overrightarrow{sđAM_1} \\ x = \overrightarrow{sđAM_2} \end{array}\right. = \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \quad (2.1) \\ x = -\alpha + 2k\pi \; (2.2) \end{array}\right.$$
$(k \in Z)$.

Công thức nghiệm (2.1) và (2.2) có thể viết lại dưới dạng :

$$\left[\begin{array}{l} x = arccosa + k2\pi \\ x = arccosa + 2k\pi \end{array}\right. (k \in Z, arc\ cossa = \alpha = \in [0; \pi]).$$

c)Cách giải phương trình tanx = a (3).

Điều kiện xác định của phương trình:

$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$.

Dựa vào đồ thị của hàm số y = tanx,

ta có mỗi $a \in R$, đồ thị hàn số y = tanx

cắt đường thẳng y = a tại các điểm có

hoành độ sai khác nhau một bội của π.

Gọi x_1 là một nghiệm của phương trình bất kì của (3) khi đó:

$x_1 = arctana$ và $(3) \Leftrightarrow x = arctana + k\pi$

$\left(k \in Z, x_1 = arctana \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$.

d)Tương tự như cách giải phương trình (3), ta cũng có:

$cotx = a \Leftrightarrow x = arccotxa + k\pi$.

e)Cách giải phương trình lượng giác cơ bản, đã biết cách giải.

TH1: Nếu a = 0 hoặc b = 0, chẳng hạn a = 0,

ta có ngay $\cos\alpha = \frac{c}{b}$,

Đây là phương trình lượng giác cơ bản, đã biết cách giải.

TH2: Nếu $a.b \neq 0$, ta có:

$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} sinx + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại số α để $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Khi đó, phương trình được đưa về dạng:

$\cos\alpha sinx + \sin\alpha cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Đây là phương trình lượng cơ bản ta đã biết cách giải.

Chú ý: từ phép biến đổi đưa (*) về dạng phương trình

lượng giác cơ bản ta có ngay định lí sau:

Định lý: điều kiện cần và đủ để (*) có nghiệm là : $a^2 + b^2 \geq c^2$.

Bài 4 (trang 178 SGK Đại số 11): Viết công thức tính số hoán vị của tập hợp gồm n phần tử (n > 1). Nêu ví dụ.

Lời giải:

Kí hiệu P_n là các số hoán vị của tập hợp gồm phần tử (n > 1) và P_n được xác định: $P_n = 1.2....n$ hay $P_n = n!$

Ví dụ: Tính số các hoán vị của tập A = {a, b, c, d}.

Giải

Tập A có 4 phần tử, do đó số hoán vị của tập A là $P_4=24$.

Bài 5 (trang 178 SGK Đại số 11): Viết công thức tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử, công thức tính số tổ hợp chập k của n phần tử. Cho ví dụ.

Lời giải:

A.Kí hiệu: A_n^k là số các chỉnh hợp và A_n^k được xác định:

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$

Hay $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Với $1 \leq k \leq n; n \in Z$.

Ví dụ: Tính số các chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử.

Giải

Số chỉnh hợp chập 3 của 4 phần tử là: $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$.

B.Kí hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử

và C_n^k được xác định $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(0 \leq k \leq n)$.

Ví dụ: Một lớp học gồm 50 học sinh. Cần lập một đoàn đại biểu đi dự đại hội đoàn trường gồm 3 học sinh. Hỏi có bao nhiêu cách lập.

Giải: Rõ ràng một nhóm 3 học sinh chính là một tổ hợp chập 3 của 50. Do đó số cách lập đoàn đại biểu là : $C_{50}^3=19600$ (cách).

Bài 6 (trang 178 SGK Đại số 11): Viết công thức nhị thức Niutơn.

Lời giải:

Công thức nhị thức Niutơn:

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^1 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$.

Chú ý: số hạng $T_{(k+1)} = C_n^k a^{(n-k)} b^k$ được gọi là số hạng tổng quát của khái triển $(a+b)^n$.

Bài 7 (trang 178 SGK Đại số 11): Phát biểu định nghĩa xác suất của biến cố.

Lời giải:

Giả sử A là một biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Kí hiệu n(Ω), n(A) theo thứ tự là số các kết quả có thể xảy ra của phép thử và số phần tử của A. Ta gọi là xác suất của biến cố A, kí hiệu P(A) là tỉ số sau:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Bài 8 (trang 178 SGK Đại số 11): Nêu rõ các bước chứng minh bằng quy nạp toán học và cho ví dụ

Lời giải:

Để chứng minh những mệnh đề liên quan đến số tự nhiên $n \in N*$ là đúng với mọi n mà không thể thử trực tiếp được thì ta làm như sau:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n =1 .

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với một số tự nhiên bất kì n = k ≥ 1. Chứng minh rằng nó cũng đúng với n = k+1.

Bước 3: Kết luận mệnh đề đúng với $n \in N*$.

Ví dụ: Chứng minh rằng với mọi $n \in N*$ ta có: n^3+5n chia hết cho 6.

Chứng minh: Đặt $P(n) = n^3+5n$.

Với n =1 => $P(1) = 6 \vdots 6$

Giả sử (P_n) chia hết cho 6 đúng với n=k ≥1, nghĩa là, ta có:

$P(k)=(k^3+5k) \vdots 6$.

Ta có: $P(k+1)=(k+1)^3+5(k+1)=k^3+3k^2+3k+1+5k+5$

$=k^3+5k+3(k^2+k)+6$

Mặt khác, theo giả thiết quy nạp ta có: $k^3+5k) \vdots 6$.

Hơn nữa $k^2+k=k(k+1) \vdots 2$ (hai số tự nhiên tiếp k, k +1 phải có một số chẵn do $k(k+1) \vdots 2$).

Do vậy $P(k+1) \vdots 6$. Tức mệnh đề đúng với n = k + 1.

Theo nguyên lí quy nạp, ta có $P(n) = n^3+5n$ chia hết cho 6 với mọi $n \in N*$.

Bài 9 (trang 178 SGK Đại số 11): Phát biểu định nghĩa cấp số cộng và công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của một số không đổi d.

Lời giải:

Định nghĩa: cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d.

Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.

Ta có: $U_{(n+1)} = U_n + d$, $\forall n \in N *$

Cho cấp số cộng (U_n) công sai d. đặt $S_n = U_1 + U_2 + .. + U_n$

Khi đó:

a) $S_n = \frac{n(U_1+U_2)}{2}$;

b) $S_n = nU_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

Bài 10 (trang 178 SGK Đại số 11): Phát biểu định nghĩa cấp số nhân và công thức tổng n số hạng đầu tiên của một cập số nhân.

Lời giải:

Định nghĩa: Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó từ số hạng thứ hai; mỗi số hạng đều là tích các số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q.

Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

Ta có: $U^{(n+1)} = U^n.q, \forall n \in N *$.

Cho cấp số nhân (U_n),công bội q. đặt $S_n = U_1 + U_2 + .. + U_n$

Khi đó:

$S_n = \frac{U_1(1-q^n)}{1-q}$ $(q \neq 1)$.

$(\,với\ q = 1\ thì\ S_n = U_1 + U_1 + ...U_1 = n.U_1)$.

Bài 11 (trang 178 SGK Đại số 11): Dãy số U_n thỏa mãn điều kiện gì thì được gọi là có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực?

Lời giải:

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.
Kí hiệu : $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi n $\to +\infty$.

Bài 12 (trang 178 SGK Đại số 11): Viết công thức tính tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.

Lời giải:

Cho cấp số nhân (U_n) (là một dãy số vô hạn).

- Nếu |q| < 1 thì ta nói cấp số nhân (U_n) là lùi vô hạn.
- Đặt $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

$\lim S_n = \frac{U_1}{1-q}$ ($do\ |q| < 1$).

Định nghĩa: Số $S = U_1 + U_2 + \cdots + U_n + \cdots = \frac{U_1}{1-q}$,

được gọi là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (U_n).

Bài 13 (trang 178 SGK Đại số 11): Định nghĩa hàm số có giới hạn + ∞ khi x -> -∞

Lời giải:

Định nghĩa hàm số có giới hạn là $+\infty$

nếu với dãy số x_n bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có:

$f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu $\lim\limits_{x \to -x} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \to +\infty\ khi\ x \to -\infty$.

Ví dụ: Hàm số $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x+1} \to +\infty\ khi\ x \to -\infty$.

Bài 14 (trang 178 SGK Đại số 11): Nêu các giới hạn đặc biệt của dãy số.

Lời giải:

Một số giới hạn đặc biệt của dãy số:

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0, \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$ (k là số nguyên dương)

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} C = C$ nếu C là hằng số, $u_n = C$, $\forall n$

d) $\lim n^k = +\infty$ (k là số nguyên dương)

e) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Một số giới hạn đặc biệt của hàm số:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$, k nguyên dương

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ nếu k lẻ, là $+\infty$ nếu k chẵn.

Bài 15 (trang 178 SGK Đại số 11): Nêu định nghĩa hàm liên túc tại một điểm, trên một khoảng. Nêu nhận xét về đồ thị của một hàm số liên tục trên một khoảng.

Lời giải:

+ Hàm số liên tục tại một điểm

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng K có chứa điểm x_0.

Hàm số f(x) được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số f(x) không liên tục tại x_0 gọi là gián đoạn tại điểm đó.

+ Hàm số liên tục trên một khoảng

- Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

- Hàm số y = f(x) được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng (a;b) và

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.

Bài 16 (trang 178 SGK Đại số 11): Phát biểu định nghĩa đạo hàm của hàm số y=f(x)tại $x=x_0$.

Lời giải:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số y = f(x) tại x_0, kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$,

tức là $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đặt : $\Delta x = x - x_0$ là số gia của đối số tại x_0

$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ là số gia tương ứng của hàm số thì: $y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Bài 17 (trang 178 SGK Đại số 11): Viết tất cả các quy tắc tính đạo hàm đã học

Lời giải:

a) Ta có $\forall n \in N, n > 1$ và $\forall x \in R: (x)' = nx^{x-1}$.

b) Với mọi x dương, ta có: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) Giả sử u(x), v(x) là các đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định, ta có:

(u + v)'=u'+v'

(u - v)'=u'-v'

(u.v)'=u'v+u.v';

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v+uv''}{v^2}$ $v = v(x) \neq 0$.

Chú ý: $(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm u_3' \pm \cdots \pm u_n{}'$

Nếu k là hằng số thì (ku)'=k.u'.

$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}; v = v(x) \neq 0$.

d) Nếu hàm số u= g(x) có đạo hàm tại là $u_x{}'$ và hàm số y = f(x) có đạo hàm tại u là $y_u{}'$ thì hàm hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là $y_x' = y_u'.u_x{}'$.

Bài 18 (trang 178 SGK Đại số 11): Giả sử hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x_o. Hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số g = f(x) có đạo hàm tại x_o. Hãy viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số g = f(x) tại M_o (x_o;f(x_o)).

Lời giải:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số y = f(x) tại điểm M_o (x_o;f(x_o)) có dạng : y - y_o = f'(x_o)(x - x_o), trong đó y_o = f(x_o).