Bài 1 : Viết năm số hạng đầu của dãy số có số hạng tổng quát un cho bởi công thức:

a. $u_n = \frac{n}{2^n - 1}$ b. $u_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1}$

c. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ d. $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

Lời giải:

a. $u_1 = \frac{1}{2-1} = 1$; $u_2 = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3}$;

$u_3 = \frac{3}{8-1} = \frac{3}{7}$;

$u_4 = \frac{4}{16-1} = \frac{4}{15}$; $u_5 = \frac{5}{32-1} = \frac{5}{31}$;

b. $u_1 = \frac{2^1 - 1}{2^1 + 1} = \frac{1}{3}$; $u_2 = \frac{2^2 - 1}{2^2 + 1} = \frac{3}{5}$;

$u_3 = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} = \frac{7}{9}$;

$u_4 = \frac{2^4 - 1}{2^4 + 1} = \frac{15}{17}$; $u_5 = \frac{2^5 - 1}{2^5 + 1} = \frac{31}{33}$;

c. $u_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2$; $u_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$;

$u_3 = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{64}{27}$;

$u_4 = \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4 = \frac{625}{256}$; $u_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = \frac{7776}{3125}$;

d. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $u_2 = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$u_3 = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$;

$u_4 = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $u_5 = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$;

Bài 2 : Cho dãy số (un), biết u1 = - 1, un+ 1 = un + 3 với n ≥ 1.

a. Viết năm số hạng đầu của dãy số;

b. Chứng minh bằng phương pháp quy nạp: $u_n = 3n – 4$

Lời giải:

a. $u_1 = - 1$, $u_{n+1} = u_n + 3$ với $n > 1$

$u_1 = - 1$; $u_2 = u_1 + 3 = - 1 + 3 = 2$

Ta có: $u_3 = u_2 + 3 = 2 + 3 = 5$

$u_4 = u_3 + 3 = 5 + 3 = 8$

$u_5 = u_4 + 3 = 8 + 3 = 11$

b. Chứng minh phương pháp quy nạp: $u_n = 3n – 4$ (1)

Khi n = 1 thì $u_1 = 3.1 - 4 = - 1$, vậy (1) đúng với n = 1.

Giả sử công thức (1) đúng với n = k > 1 tức là $u_k = 3k – 4$ (2)

Ta phải chứng minh (1) đúng với n = k + 1, tức là $u_{k+1} = 3(k + 1) – 4 = 3k – 1$

Theo giả thiết: $u_{k+1} = u_k + 3$

(2) $u_{k+1} = 3k – 4 + 3 = 3 (k + 1) – 4$

(1) đúng với n = k + 1

Vậy (1) đúng với $n \in N^*$

Bài 3 : Dãy số (un) cho bởi u1 = 3, un+1 = √(1+un2) , n > 1

a. Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b. Dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải:

a. Năm số hạng đầu của dãy số

$u_1 = 3;$

$u_2 = \sqrt{1+u_1^2} = \sqrt{1+3^2} = \sqrt{10}\,;$

$u_3 = \sqrt{1+u_2^2} = \sqrt{1+(\sqrt{10})^2} = \sqrt{11}\,;$

$u_4 = \sqrt{1+u_3^2} = \sqrt{1+(\sqrt{11})^2} = \sqrt{12}\,;$

$u_5 = \sqrt{1+u_4^2} = \sqrt{1+(\sqrt{12})^2} = \sqrt{13}\,;$

b. Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số:

$u_n = \sqrt{(n+8)}$ (1)

Rõ ràng (1) đúng với n = 1

Giả sử (1) đúng với n = k, nghĩa là $u_k = \sqrt{(k+8)}$

Ta có: $u_{k+1} = \sqrt{1+u_k^2} = \sqrt{1+(\sqrt{k+8})^2} = \sqrt{(1+k)+8}$

Vậy (1) đúng với n = k + 1, do đó đúng với mọi n ∈ N*.

Bài 4 : Xét tính tăng, giảm của các dãy số (un), biết:

a. $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$ b. $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

c. $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$ d. $u_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$

Lời giải:

a. $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} - 2$

$\forall n \in N^*, n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq n$

$\Rightarrow \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} - 2 < \dfrac{1}{n} - 2$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n \quad \forall n \in N^*$

(Dãy số đã cho là dãy số giảm)

b. $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{n+1-1}{n+1+1} = \dfrac{n}{n+2}$

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{n}{n+2} - \dfrac{n-1}{n+1}$

xét: $= \dfrac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \dfrac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$

$\forall n \in N^*$, $n \geq 1 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số tăng

c. $u_n = (-1)^n(2^n + 1)$

Nhận xét:

{$(-1)^n > 0$ nếu n chẵn {$u_n > 0$ nếu n chẵn

{$(-1)^n < 0$ nếu n lẽ {$u_n < 0$ nếu n lẻ

Và $2^n + 1 > 0$ $\forall$ n $\in$ N*

$\Rightarrow u_1 < 0$, $u_2 > 0$, $u_3 < 0$, $u_4 > 0$,…

$\Rightarrow u_1 < u_2$, $u_2 > u_3$, $u_3 < u_4$,…

=>dãy số (u_n) không tăng, không giảm.

d. $u_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$, $u_{n+1} = \dfrac{2n+3}{5n+7}$

với $n \in N^*$, $n \geq 1$

Xét : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n+3}{5n+7} - \dfrac{2n+1}{5n+2}$

$$= \frac{(5n+2)(2n+3)-(2n+1)(5n+7)}{(5n+7)(5n+2)}$$

$$= \frac{-1}{(5n+7)(5n+2)} < 0 \quad \forall n \in N^*$$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$

Vậy (u_n) là dãy số giảm

Bài 5 : Trong các dãy số (un) sau, dãy nào bị chặn dưới, bị chặn trên và bị chặn?

a. $u_n = 2n^2 - 1$

b. $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$

c. $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1}$

d. $u_n = \sin n + \cos n$

Lời giải:

a. $u_n = 2n^2 - 1$

Ta có: $n \geq 1$

$\Leftrightarrow n^2 \geq 1 \Leftrightarrow 2n^2 \geq 2 \Leftrightarrow 2n^2 - 1 \geq 1$

Hay $u_n \leq 1$

=> dãy (u_n) bị chặn dưới $\forall n \in N^*$.

Nhưng (u_n) không bị chặn trên vì không có số M nào thỏa:

$u_n = 2n^2 - 1 \leq M\ \forall n \in N^*$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn dưới và không bị chặn trên nên không bị chặn.

b. $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$

Ta có: $u_n = \dfrac{1}{n(n+2)} > 0,\ \forall n \in N^*$.

Mặc khác $n(n+2) \geq 3\ \ \forall n \in N^*$.

$\Rightarrow u_n = \dfrac{1}{n(n+2)} \leq \dfrac{1}{3}\ \ \forall n \in N^*$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn

c. $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1}$

Ta có: $u_n = \dfrac{1}{2n^2 - 1} > 0,\ \forall n \in N^*$.

Mà $n \geq 1 \Rightarrow n^2 \geq 1\ \forall n \in N^*$

$\Rightarrow 2n^2 \geq 2\ \ \forall n \in N^*$

$\Rightarrow 2n^2 - 1 \geq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2n^2 - 1} \leq 1\ \ \forall n \in N^*$

Vậy dãy số vừa bị chặn dưới vừa bị chặn trên, do đó bị chặn.

d. $u_n = \sin n + \cos n$

$$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos n + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin n\right) = \sqrt{2}\sin\left(n + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow |u_n| \le \sqrt{2}$$

Vậy dãy số (u_n) bị chặn $n \in N^*$