

Bài 1 : Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF.

- Qua phép tịnh tiến theo vector \overrightarrow{AB}
- Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE.
- Qua phép quay tâm O góc quay 120° .

Lời giải:

Ảnh của tam giác AOF:

- Qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AB}}$ là tam giác BCO vì :

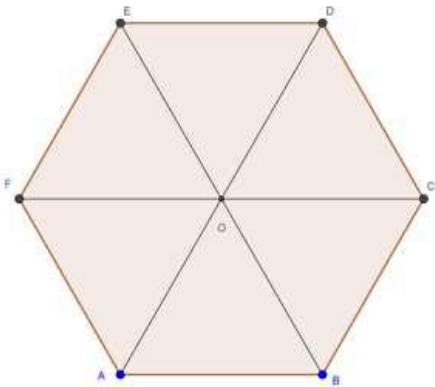
$$AB=OC=FO$$

- Qua phép đối xứng trục \mathcal{D}_{BE} là tam giác COD vì :

- A và C đối xứng nhau qua đường thẳng BE ;
- O bất biến tròn phép đối xứng trục \mathcal{D}_{BE} .
- F và D đối xứng nhau qua đường thẳng BE.

- Qua phép quay $Q_{(O;120^\circ)}$ là tam giác EOD vì: $Q_{(O;120^\circ)}$, biến:

- A thành E do $\begin{cases} OE= OA \\ (OA, OE) = 120^\circ \end{cases}$
- O thành O
- F thành D do $\begin{cases} OD = OF \\ (OF, OD) = 120^\circ \end{cases}$



Bài 2 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(-1; 2) và đường thẳng d có phương trình $3x + y + 1 = 0$. Tìm ảnh của A và d.

- Qua phép tịnh tiến theo vector $\mathbf{v} = (2; 1)$;

- b. Qua phép đối xứng trục Oy;
- c. Qua phép đối xứng qua gốc tọa độ;
- d. Qua phép quay tâm O góc 90° .

Lời giải:

Gọi A' , d' là ảnh của A và d qua các phép biến hình.

a. Qua phép tịnh tiến T_v

$$\begin{cases} x_{A'} = x_A + x_v = -1 + 2 = 1 \\ y_{A'} = y_A + y_v = 2 + 1 = 3 \end{cases}$$

Vậy $A'(1 ; 3)$

$d' // d$ nên phương trình d' có dạng :

$$3x + y + C = 0 \Rightarrow C = -6.$$

Vậy phương trình d' là $3x + y - 6 = 0$

b. Ta thấy d qua A và B (0 ; -1)

Đ_{Oy} biến A thành $A'(1 ; 2)$, biến B thành $B(0 ; -1)$

Vậy d' là đường thẳng $A'B'$ có phương trình :

c. Đ_o biến A thành $A'(1 ; -2)$, biến B thành $B'(0 ; 1)$

Vậy d' là đường thẳng $A'B'$ có phương trình :

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+2}{1+2} \Leftrightarrow 3x - y - 1 = 0$$

d. Gọi M(-1 ; 0) và N(0 ; 2) lần lượt là hình chiếu của A(-1 ; 2) trên Ox, Oy.

$Q_{(O;90^\circ)}$ biến N thành $N'(-2 ; 0)$, biến A thành A' , biến M thành $B(0 ; -1)$.

Vậy $Q_{(O;90^\circ)}$ biến hình chữ nhật ONAM thành hình chữ nhật ON'A'B. Do đó $A'(-2 ; -1)$ đi qua A và B, $Q_{(O;90^\circ)}$ biến A thành $A'(-2 ; -1)$ biến B thành $B'(1 ; 0)$

Vậy $Q_{(O;90^\circ)}$ biến d thành d' qua hai điểm A' , B'

Do đó phương trình d' là :

$$\frac{x+2}{1+2} = \frac{y+1}{0+1} \Leftrightarrow x - 3y - 1 = 0$$

Bài 3 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm I(3 ; -2), bán kính 3.

- Viết phương trình của đường tròn đó.
- Viết phương trình ảnh của đường tròn (I ; 3) qua phép tịnh tiến theo vector $v = (-2 ; 1)$.
- Viết phương trình ảnh của đường tròn (I ; 3) qua phép đối xứng trục Ox.
- Viết phương trình ảnh của đường tròn (I ; 3) qua phép đối xứng qua gốc tọa độ.

Lời giải:

- Phương trình đường tròn : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
- Trong phép tịnh tiến theo vector $v = (-2 ; 1)$ thì điểm I biến thành I' có tọa độ :

$$\begin{cases} x = 3 - 2 = 1 \\ y = -2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow I'(1 ; -1)$$

Vậy phương trình đường tròn ảnh của đường tròn (I ; 3) trong phép tịnh tiến theo vector $v = (-2 ; 1)$ là $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$

c. Qua phép đối xứng trục Ox, điểm I(3 ; -2) biến thành điểm I'(3 ; 2). Vậy phương trình đường tròn cần tìm là : $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$.

d. Qua phép đối xứng qua gốc tọa độ, điểm I(3 ; -2) biến thành điểm I'(-3 ; 2) nên phương trình đường tròn cần tìm là :

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9.$$

Bài 4 : Cho vector v , đường thẳng d vuông góc với v . Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vector $v/2$. Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo vector v là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua các đường thẳng d và d' .

Hướng dẫn. Dùng định nghĩa phép tịnh tiến và phép đối xứng trục.

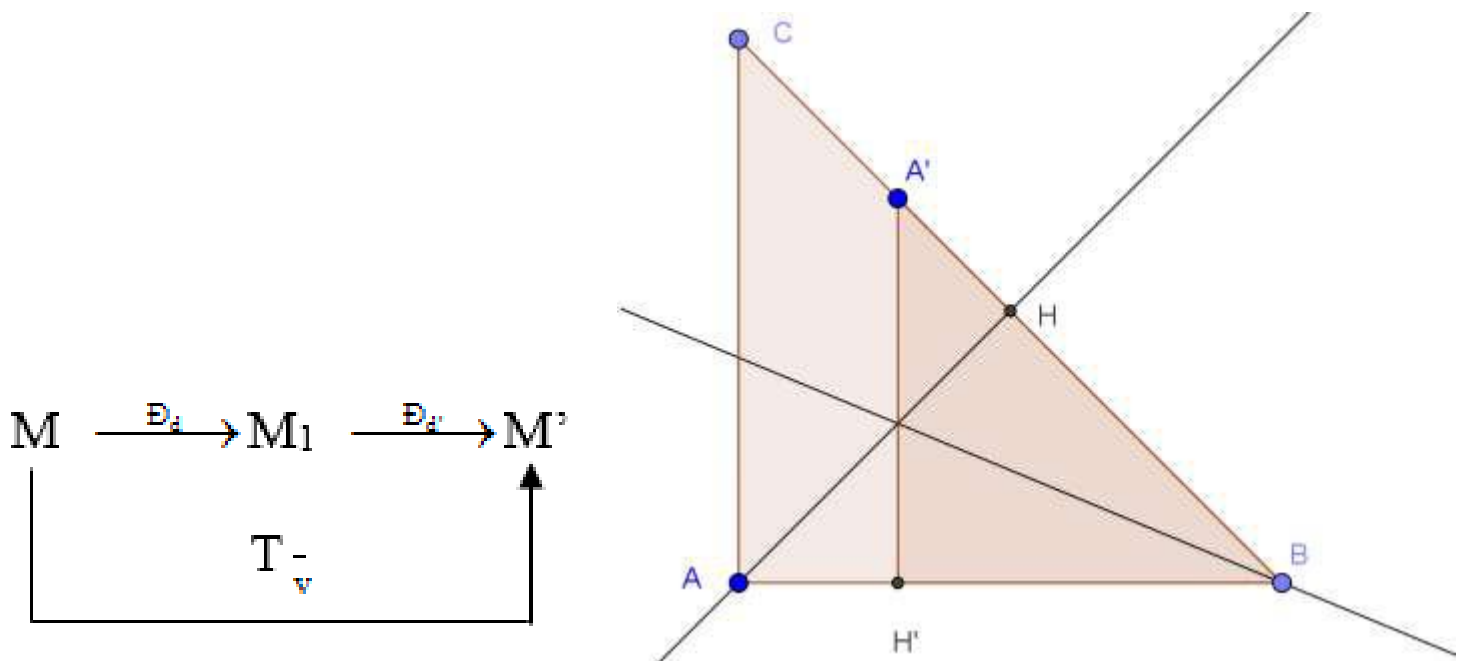
Lời giải:

- $M \xrightarrow{\mathcal{D}_d} M_1$, ta có : $\begin{cases} \overline{MM_1} = 2\overline{HM_1} \\ \overline{MM_1} \perp d \end{cases}$
- $M_1 \xrightarrow{\mathcal{D}_{d'}} M'$, ta có : $\begin{cases} \overline{M_1M'} = 2\overline{M_1K} \\ \overline{M_1K} \perp d' \end{cases}$

$$\text{Ta có : } \overline{MM_1} + \overline{M_1M'} = 2\overline{HM_1} + 2\overline{M_1K} = 2(\overline{HM_1} + \overline{M_1K})$$

$$= 2\overline{HK} = 2 \cdot \frac{1}{2} \vec{v} = \vec{v} \quad (\text{vì } \overline{HK} = \frac{1}{2} \vec{v})$$

Vậy phép tịnh tiến T_v là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng trục \mathcal{D}_d và $\mathcal{D}_{d'}$, nghĩa là :



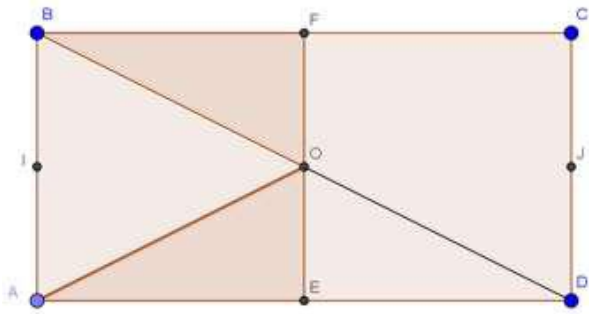
Bài 5 : Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

Lời giải:

\mathcal{D}_{IJ} biến A thành B, E thành F ; O thành O nên biến $\triangle AEO$ thành

$\triangle BFO$, $V(B, 2)$ biến B thành C, biến F thành C, biến O thành D nên biến

ΔBFO thành ΔBCD . Vậy phép đồng dạng có được biến ΔAEO thành ΔBCD .



Bài 6 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm $I(1; -3)$, bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn $(I; 2)$ qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

Lời giải:

- $I(1; -3) \xrightarrow{V_{(0;3)}} J$, ta có $\overline{OJ} = 3\overline{OI}$

Vậy $J(3; -9)$

=> Phép vị tự $V(0; 3)$ biến đường tròn $(I; 2)$ thành đường tròn tâm J, bán kính $R' = 3R = 3 \cdot 2 = 6$.

- $J(3; -9) \xrightarrow{Đ_{Ox}} J_1(3; 9)$

=> Phép đối xứng trục $Đ_{Ox}$ biến đường tròn $(J; 6)$ thành đường tròn $(J_1; 6)$

*Phương trình của đường tròn $(J_1; 6)$ là: $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 36$

Bài 7 : Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O) dựng hình bình hành MABN. Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.

Lời giải:

MABN là hình bình hành .

Vậy phép tịnh tiến T_{AB} biến M thành N.

Do đó khi M di động trên (O) thì N di động trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến T_{AB} .