Bài 1 : Áp dụng Quy tắc 1, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$; b) $y = x^4 + 2x^2 - 3$;

c) $y = x + \frac{1}{x}$; d) $y = x^3(1-x)^2$;

e) $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Lời giải:

a) TXĐ: D = R

$y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$

$y' = 0 \Rightarrow x = -3$ hoặc $x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	71	↘	-54	↗	$+\infty$

Vậy đồ thị của hàm số có điểm cực đại là (-3; 71) và điểm cực tiểu là (2; -54).

b) TXĐ: D = R

$y' = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) = 0$; $y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$+\infty$

Vậy hàm số có điểm cực tiểu là (0; -3).

c) TXĐ: D = R \ {0}

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

y' = 0 => x = ±1

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y		↗	$y(-1)$	↘	‖	↘	$y(1)$	↗	

Vậy hàm số có điểm cực đại là $x_{CĐ} = -1$ và điểm cực tiểu là $x_{CT} = 1$.

d) TXĐ: D = R

$y' = 3x^2(1 - x)^2 - 2x^3(1 - x) = x^2(5x^2 – 8x + 3)$

y' = 0 => x = 0; x = 1 hoặc x = 3/5

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
y'		+	0	+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		↗	$y\left(\frac{3}{5}\right)$	↘	$y(1)$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số cực đại $x_{CĐ} = 3/5$ và điểm cực tiểu $x_{CT} = 1$

(**Lưu ý:** x= 0 không phải là cực trị vì tại điểm đó đạo hàm bằng 0 nhưng đạo hàm không đổi dấu khi đi qua x = 0.)

e) Ta có:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \forall\ x \in R.$$

Do đó, với mọi x ∈ R thì $\sqrt{x^2 - x + 1}$ luôn xác định.

Vậy D = R.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$y(\frac{1}{2})$	↗	$+\infty$

Vậy hàm số có điểm cực tiểu $x_{CT} = 1/2$.

Bài 2 : Áp dụng Quy tắc 2, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$;   b) y = sin2x – x

c) y = sinx + cosx ;   d) y = x^5 - x^3 - 2x + 1

Lời giải:

a) TXĐ: D = R.

y' = $4x^3$ - 4x

y'= 0 => x = 0; x = ±1.

y'' = $12x^2$ - 4

y''(0) = -1 < 0 => x = 0 là điểm cực đại của hàm số.

y''(±1) = 8 > 0 > x = -1 và x = 1 là điểm cực tiểu của hàm số.

b) TXĐ: D = R

y' = 2cos2x – 1;

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \ \ (k \in Z)$$

$$y'' = -4\sin 2x$$

$$y''\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4\sin\frac{\pi}{3} < 0 \Rightarrow x_{CĐ} = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in Z)$$

$$y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4\sin\frac{\pi}{3} > 0 \Rightarrow x_{CT} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in Z)$$

c) TXĐ: D = R

y= sinx + cosx => $y = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

y'= $\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right); y' = 0 \Leftrightarrow$ x= $\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$

y"= $-\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

y"$\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -\sqrt{2}\ \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \begin{cases} -\sqrt{2}\text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ \sqrt{2}\text{ nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

x= $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ là các điểm cực đại của hàm số.

x= $\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\ (\forall k \in Z)$ là các điểm cực tiểu của hàm số.

d) TXĐ: D = R

y'= $5x^4 - 3x^2 - 2$

y' = 0 => x ±1.

y" = $20x^3 - 6x$

y"(-1) = -20 + 6 = -14 < 0 => x = -1 là điểm cực đại của hàm số.

y"(1) = 20 – 6 = 14 > 0 => x = 1 là điểm cực tiểu của hàm số.

Bài 3 : Chứng minh hàm số y = √|x| không có đạo hàm tại x = 0 nhưng vẫn đạt được cực tiểu tại điểm đó.

Lời giải:

Tính theo **định nghĩa đạo hàm** tại $x_o = 0$ ta có:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|0+\Delta x|}-\sqrt{0}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x\sqrt{|\Delta x|}} = \begin{cases} -\infty \text{ với } \Delta x < 0 \\ +\infty \text{ với } \Delta x < 0 \end{cases}$$

Nghĩa là hàm số y = √|x| không có đạo hàm tại x = 0. (1)

Mặt khác ta có: √|x| ≥ 0 ∀ x. Dấu "=" xảy ra khi x = 0.

Do đó hàm số y = √|x| đạt cực tiểu tại x = 0. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4 : Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một cực đại và một điểm cực tiểu.

Lời giải:

Xét hàm số $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$ ta có:

TXĐ: D = R

$y' = 3x^2 - 2mx - 2$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2+6}}{3}\ ;\ x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2+6}}{3}$$

Với mọi giá trị của m ta đều có $x_1 < 0 < x_2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$y(x_1)$	↘	$y(x_2)$	↗	$+\infty$

Từ bảng trên ta thấy hàm số luôn có một điểm cực đại $x_{CĐ} = x_1$ và một điểm cực tiểu $x_{CT} = x_2$ với mọi giá trị của m (đpcm).

Bài 5 : Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

đều là nhưng số dương và $x_o = -5/9$ là điểm cực đại.

Lời giải:

- Nếu a = 0 thì y = –9x + b. Vậy hàm số không có cực trị.

- Nếu a ≠ 0. Ta có: y'= $5a^2x^2 + 2ax - 9$

y'= 0 => x = 1/a hoặc x = -9/5a

+ **Với a > 0** ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{9}{5a}$		$\frac{1}{a}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Vì x_o = -5/9 là điểm cực đại nên

$$-\frac{9}{5a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow a = \frac{81}{25}$$

Theo đề bài thì y_{CT} dương nên với a = 81/25 thì khi đó:

$$y_{CT} = y\left(\frac{25}{81}\right) = \frac{5}{3}.\left(\frac{81}{25}\right)^2\left(\frac{25}{81}\right)^3 + 2\left(\frac{81}{25}\right)\left(\frac{25}{81}\right)^2 - 9\left(\frac{25}{81}\right) + b$$

$$= -\frac{400}{243} + b > 0 \Rightarrow b > \frac{400}{243}.$$

+ **Với a < 0** ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{a}$		$-\frac{9}{5a}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Vì x_o = -5/9 là điểm cực đại nên

$\frac{1}{a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow a = \frac{-9}{5}$

Theo đề bài thì y_{CT} dương nên với a = -9/5 thì khi đó:

$$y_{CT} = \frac{5}{3}.\left(-\frac{9}{5}\right)^2 + 2.\left(-\frac{9}{5}\right) - 9 + b = -\frac{36}{5} + b > 0 \Rightarrow b > \frac{36}{5}$$

Vậy các giá trị a, b cần tìm là:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{9}{5} \\ b > \dfrac{36}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \dfrac{81}{25} \\ b > \dfrac{400}{243} \end{cases}$$

Bài 6 : Xác định giá trị của tham số m để hàm số m để hàm số

$$y = \frac{x^2+mx+1}{x+m}$$

đạt giá trị cực đại tại x = 2.

Lời giải:

TXĐ: D = R \ {-m}

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$$

y' = 0 => x_1 = -m - 1; x_2 = -m + 1

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-m-1$		$-m$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y		$\nearrow$	y(-1)	$\searrow$	||	$\searrow$	y(1)	$\nearrow$	

Hàm số đạt cực đại tại x = 2 ⇔ - m – 1 = 2 => **m = –3**.