Bài 1 :

Khi nào thì cấp số cộng là dãy số tăng, dãy số giảm?

Lời giải:

Ta có: $u_{n+1} – u_n = q$ => (u_n) là dãy số tăng nếu công sai $q > 0$, dãy số giảm nếu công sai $q < 0$.

Bài 2 Cho cấp số nhân có u1 < 0 và công bội q. Hỏi các số hạng khác sẽ mang dấu gì trong các trường hợp sau:

a.q > 0

b.q < 0

Lời giải:

a.Ta có: $u_n = u_1.q^{n-1}$ $\forall n > 1$, $q > 0$, $u1 < 0$ => $un < 0$ $\forall$ $n > 1$

b.Nếu $q < 0$, $u1 < 0$, ta có:

$u_n = u_1.q^{n-1} = (-1)^n .|u_1|.|q^{n-1}|$ $\forall$ $n > 1$

$u_n > 0$ nếu n chẵn, và $u_n < 0$ nếu n lẻ.

Bài 3 : Cho hai cấp số cộng có cùng các số hạng. Tổng các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số cộng không? Vì sao? Cho một ví dụ minh họa.

Lời giải:

Giả sử có hai cấp số cộng (u_n), (v_n) có công sai lần lượt là d^1, d^2 cùng các số hạng bằng nhau, nghĩa là:

$u_1, u_2, \dots, u_n$ (1) và $v_1, v_2,\dots, v_n$ (2)

Xét dãy số (a_n) với $a_n = u_n + v_n$, $n \in N^*$

$a_1 = u_1 + v_1$

$a_2 = u_2 + v_2 = u_1 + d_1 + v_1 + d_2 = (u_1 + v_1) + (d_1 + d_2)$

$a_n = u_n + v_n = u_1 + (n – 1)d_1 + v_1 + (n – 1)d_2$

$= (u_1 + v_1) + (n – 1)(d_1 + d_2)$

Điều đó cho thấy dãy số mà mỗi số hạng là tổng các số hạng tương ứng của hai cấp số cộng (1) và (2) cũng là một cấp số cộng với công sai bằng tổng các công sai của hai cấp số cộng kia.

Ví dụ: 1, 4, 7, 10, 13, 16 công sai: $d_1 = 3$

20, 18, 16, 14, 12, 10 công sai: $d_2 = - 2$

Dãy tổng các số hạng tương ứng là: 21, 22, 23, 24, 25, 26 là cấp số cộng có công sai

$d = d_1 + d_2 = 3 + (-2) = 1$.

Bài 4 : Cho hai cấp số nhân có cùng các số hạng. Tích các số hạng tương ứng của chúng có lập thành cấp số nhân không? Vì sao? Cho một ví dụ minh họa.

Lời giải:

Giả sử có hai cấp số nhân (u_n), (v_n) với công bội tương ứng q_1 và q_2.

Xét dãy số (a_n) với $a_n = u_n.v_n$

Ta có: $u_n = u_1.q_1n-1$ $v_n = v_1.q_2^{n-1}$

$a_n = u_n.v_n = (u_1v_1).(q_1q_2)^{n-1}$

vậy dãy số (a_n) là cấp số nhân với công bội $q = q_1q_2$.

Bài 5 : Chứng minh với mọi n ∈ N*, ta có:

a. $13^n – 1$ chia hết cho 6

b. $3n^3 + 15$ chia hết cho 9

Lời giải:

a. Xét $u_n = 13^n – 1$

ta có: với n = 1 thì u1 = 13 – 1 = 12 chia hết 6

giả sử: $u_k = 13^k – 1$ chia hết cho 6

Ta có: $u_{k+1} = 13^{k+1} – 1 = 13^{k+1} + 13^k – 13^k – 1$

$= 13^k(13 – 1) + 13^k – 1$

$= 12.13^k + u^k$

=> u^{k+1} là tổng hai số hạng, mỗi số hạng chia hết cho 6.

Vậy u^{k+1} chia hết số 6

Như vậy, mỗi số hạng của dãy số (u^n) đều chia hết cho 6 ∀n ∈ N*

b. $3n^3 + 15n$ chia hết cho 9

Đặt $u_n = 3n^3 + 15n$

+ Với n = 1 => $u_1 = 18$ chia hết 9

+ giả sử với n = k ≥ 1 ta có:

$u_k = (3k^2 + 15k)$ chia hết 9 (giả thiết quy nạp)

+ Ta chứng minh: u_{k+1} chia hết 9

Thật vậy, ta có:

$u_{k+1} = 3(k + 1)^3 + 15(k + 1\ ) = 3(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 15k + 15$

$= (3k^3 + 15k) + 9k^2 + 9k + 18 = (3k^3 + 15) + 9(k^2 + k + 2)$

$= u_k + 9(k^2 + k + 2)$

Theo giả thiết u_k chia hết 9, hơn nữa $9(k^2 + k + 2)$ chia hết 9 k ≥ 1

Do đó u_{k+1} cũng chia hết cho 9.

Vậy $u_n = 3n^3 + 15n$ chia hết cho 9 ∀n ∈ ∈ N*

Bài 6 : Cho dãy số (un) biết u1 = 2, un+ 1 = 2un – 1 (với n ≥ 1)

a.Viết năm số hạng đầu của dãy.

b.Chứng minh $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp.

Lời giải:

a. 5 số hạng đầu dãy là:

$u_1 = 2$; $u_2 = 2u_1 – 1 = 3$; $u_3 = 2u_2 – 1 = 5$;

$u_4 = 2u_3 – 1 = 9$ $u_5 = 2u_4 – 1 = 17$

b. Chứng minh: $u_n = 2^{n-1} + 1$ bằng phương pháp quy nạp:

Với n = 1 => $u_1 = 2^{1-1} + 1 = 2$ (đúng).

Giả sử (u_n) đúng với $n = k \ge 1$

Tức là $u_k = 2^{k-1} + 1$ (1)

Ta phải chứng minh phương trình đã cho đúng với n = k + 1 nghĩa là:

$u_{k+1} = 2^{k+1}-1 + 1 = 2^k + 1$

Theo giả thiết: $u_{k+1} = 2u_{k-1}$

(1) $u_{k+1} = 2(2^{k-1} + 1) – 1 = 2.2^k.2^{-1} + 2 – 1 = 2_k + 1$

Biểu thức đã cho đúng với n = k + 1, vậy nó đúng với $n \in N^*$

Bài 7 : Xét tính tăng, giảm và bị chặn của các dãy số (un), biết:

a. $u_n = n + \dfrac{1}{n}$ b. $u_n = (-1)^{n-1} \sin\dfrac{1}{n}$

c. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Lời giải:

a. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n} = n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1}$

xét: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(n+1)^2+1}{n+1} - \dfrac{n^2+1}{n} = 1 - \dfrac{1}{n(n+1)} > 0 \forall n \in N^*$

$\Rightarrow u_{n+1} > u_n$. Vậy u_n là dãy tăng.

$u_n = n + \dfrac{1}{n} \Rightarrow u_1 = 1 + \dfrac{1}{1} = 2$

vì là dãy tăng nên $u_1 = 2 < u_2 < u_3 < … < u_n \ \forall n \in N^*$

=> $u_n > 2$ => (u_n) bị chặn dưới.

Vì $u_n = n + 1 > n \ \forall n \in N^*$

=> (u_n) không bị chặn trên. Vậy u_n không bị chặn.

b. Nhận xét: $0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{\pi}{2} \ \forall n \in N^*$

$\Rightarrow \sin\dfrac{1}{n} > 0$ nên $\begin{cases} u_n < 0 \ (\text{nếu } n \text{ chẵn}) \\ u_n > 0 \ (\text{nếu } n \text{ lẻ}) \end{cases}$

=> $u_1 > 0$; $u_2 > 0$; $u_3 > 0$; $u_4 > 0$

Và $u_1 > u_2$; $u_2 > u_3$; $u_3 > u_4$; …

Vậy dãy số (u_n) không tăng, không giảm => (u_n) không đơn điệu.

Vì $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \sin\frac{1}{n} < 1$ ($\forall n \in N^*$)

$\Leftrightarrow -1 < (-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n} < 1 \Leftrightarrow -1 < u_n < 1$ ($\forall n \in N^*$)

Vậy u_n bị chặn

c. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Ta có: $u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$. Vậy dãy số ($u_n$) giảm

Mặt khác $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < 1$

Nên dãy số (u_n) bị chặn.

Bài 8 : Tìm số hạng đầu u1 và công sai d của các cấp số cộng (un), biết:

a. $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$

Lời giải:

a. $\begin{cases} 5u_1 + 10u_5 = 0 \\ S_4 = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u_1 + 10(u_1 + 4d) = 0 \\ 4u_1 + \dfrac{4.3}{2}d = 14 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 15u_1 + 40d = 0 \\ 8u_1 + 12d = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 6d + u_1 + 14d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 20d = 60 \\ (u_1 + 3d)^2 + (u_1 + 11d)^2 = 1170 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 - 10d \\ (30 - 7d)^2 + (30 + d)^2 = 1170 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 0, d = 3 \\ u_1 = -12, d = \dfrac{21}{5} \end{cases}$

Bài 9 : Tìm số hạng dầu u1 và công bội q của các cấp số nhân (un), biết:

a. $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_4 = 384 \end{cases}$ b. $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$

c. $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases}$

Lời giải:

Dùng công thức: $u_n = u_1.q^{n-1}$ với n > 2

a. $\begin{cases} u_6 = 192 \\ u_4 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^5 = 192 \\ u_1.q^6 = 384 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 6 \end{cases}$

b. $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q^3 - u_1.q = 72 \\ u_1.q^4 - u_1.q^2 = 144 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(q^2-1) = 72 \\ u_1.q^2(q^2-1) = 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 12 \end{cases}$$

c. $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_4 = 10 \\ u_3 + u_6 - u_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q + u_1.q^4 - u_1.q^3 = 10 \\ u_1.q^2 + u_1.q^5 - u_1.q^4 = 20 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1.q(1+q^3-q^2) = 10 \\ u_1.q^2(1+q^3-q^2) = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

Bài 10 : Tứ giác ABCD có số đo của các góc lập thành một cấp số cộng theo thứ tự A, B, C, D. Biết rằng góc C gấp 4 lần góc A. Tính các góc của tứ giác.

Lời giải:

Kí hiệu: ∠ : góc

Các góc của tứ giác là ∠A, ∠B, ∠C, ∠D (∠A > 0) tạo thành cấp số cộng:

Vậy ∠B=∠A + d, ∠C=∠A + 2d, ∠D= ∠A+3d.

Theo giả thiết ta có:∠ C =5∠A => ∠A + 2d = 5∠A <=> <=> 2d = 4∠A

Mặt khác ∠A + B ∠ + C ∠ + ∠D =360^o

=> ∠A + ∠A +d + ∠A +2d + ∠A +3d = 360^o

<=> 4∠A + 12∠A = 360^o <=> 16∠A = 360^o <=> ∠A= $22^o30'$, d=45^o

Vậy ∠B = $67^o30'$; ∠C = $112^o30'$; ∠D = $157^o30'$

Bài 11 : Biết rằng ba x, y, z lập thành một cấp số nhân và ba số x, 2y, 3z lập thành một cấp số cộng. Tìm công bội của cấp số nhân.

Lời giải:

Cấp số nhân (u_n) có công bội q có thể viết dưới dạng:

$u_1, u_1q, u_1q^2, \dots, u_1q^{n-1}$

vì x, y, z lập thành cấp số nhân nên: $y = x.q$, $z = x.q^2$ (1)

Mặt khác x, 2y, 3z lập thành cấp số cộng nên (x+3z)/2= 2y (2)

Thay (1) và (2) ta được: $\frac{x+3(x.q^2)}{2} = 2.x.q$

$$\Leftrightarrow 1+3q^2 = 4q \Leftrightarrow 3q^2 - 4q + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = 1 \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Bài 12 : Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng một bằng nữa diện tích đế tháp. Biết diện tích mặt đế tháp là 12.288m2. Tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải:

Gọi S là diện tích mặt đáy của tháp

$S = 12.288\ m^2$

Gọi $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{11}$ là diện tích bề mặt của mỗi tầng.

Diện tích của tầng một bằng nửa diện tích của đáy tháp

$$\Rightarrow S_1 = \frac{S}{2}$$

Mặt khác theo giả thuyết:

$$S_2 = \frac{S_1}{2} = \frac{S}{4};\ S_3 = \frac{S_2}{2} = \frac{S}{8}; \ldots \Rightarrow S_n = \frac{S}{2^n}$$

Vậy diện tích mặt trên cùng chính là diện tích tầng tháp thứ 11 nên:

$$S_{11} = \frac{S}{2^{11}} = \frac{12.288}{2^{11}} \approx 6(m^2)$$

Bài 13 : Chứng minh rằng nếu các số a2, b2, c2 lập thành một cấp số cộng (a, b, c ≠ 0) thì các số 1/(b+c), 1/(c+a), 1/(a+b) cũng lập thành một cấp số cộng.

Lời giải:

Để chứng minh các số $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$

lập thành cấp số cộng ta chứng minh: $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+c}$

Ta có: $\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = \frac{2}{a+c}$

$\Leftrightarrow (a+c)(a+c+2b) = 2(a+b)(b+c)$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2b^2 \qquad (1)$

Đẳng thức (1) thỏa khi a^2, b^2, c^2 là cấp số cộng.

Vậy $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ lập thành cấp số cộng.

Bài 14 : Cho dãy số (un), biết un = 3n. Hãy chọn phương án đúng:

a. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. $3^n + 1$

B. $3^n + 3$.

C. $3^n.3$

D. 3(n+1)

b. Số hạng u_{2n} bằng:

A. 2.3^n

B. 9^n

C. $3^n + 3$

D. 6^n

c. Số hạng un-1 bằng:

A. $3^n – 1$

B. $3^n/3$

C. $3^n – 3$

D. 3n – 1

d. Số hạng u_{2n-1} bằng:

A. $3^2.3^n - 1$

B. $3^n.3^{n-1}$

C. $3^{2n} - 1$

D. $3^{2(n-1)}$

Lời giải:

a. $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3^n.3$.

Chọn đáp án C

b. $U_n = 3^n = (3^2)^n = 9^n$.

Chọn đáp án B.

c. $u_{n-1} = {}^{n-1} = 3^n.3^{-1} = 3^n/3$.

Chọn đáp án B.

d. $u_{2n-1} = 3^{2n-1} = 3^{2n}.3^{-1} = 3^n.3^{n-1}$.

Chọn đáp án B

Bài 15 : Hãy cho biết dãy số (un) nào dưới đây là dãy số tăng, nếu biết công thức số hạng tổng quát un của nó là:

A. $(-1)^{n+1}.\sin\dfrac{\pi}{n}$

B. $(-1)^{2n}(5^n + 1)$

C. $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+n}$

D. $\dfrac{n}{n^2+1}$

Lời giải:

Lập hiệu $u_{n+1} - u_n$ ta thấy : $(-1)^{2(n+1)}(5^{n+1} + 1) - (-1)^{2n}(5^n + 1)\ 4.5^n > 0$

Vậy dãy $(-1)^{2n}(5^n + 1)$ là dãy số tăng. Chọn đáp án B.

Bài 16 : Cho cấp số cộng – 2, x, 6, y. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

A. x = - 6, y = - 2

B. x = 1, y = 7

C.x = 2, y = 8

D. x = 2, y = 10

Lời giải:

Vì -2, x, 6, y lập cấp số cộng nên:

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2+6}{2} \\ \dfrac{x+y}{2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 10 \end{cases}$$

Chọn đáp án D.

Bài 17 : Cho cấp số nhân – 4, x, - 9. Hãy họn kết quả đúng trong kết quả sau:

A. x = 36

B. x = -6, 5

C. x = 6

D. x = -36

Lời giải:

Ta có: $-9 = -4.q^2 \Rightarrow q^2 = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow q = \pm\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow x = -4 . \left(-\dfrac{3}{2}\right) = 6$. Chọn đáp án C

Bài 18 : Cho cấp số cộng (un). Hãy chọn hệ thức đúng trong các hệ thức sau:

A. $\dfrac{u_{10}+u_{20}}{2} = u_5 + u_{10}$ B. $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$

C. $u_{10}.u_{30} = u_{20}$ D. $\dfrac{u_{10}.u_{30}}{2} = u_{20}$

Lời giải:

Ta có: u_n là cấp số cộng số hạng đầu u_1, công sai d thì:

$u_{90} + u_{210} = u_1 + 89d + u_1 + 209d = 2u_1 + 298d = 2(u_1 + 149d)$

Vậy $u_{90} + u_{210} = 2u_{150}$.

Chọn đáp án B.

Bài 19 : Trong các dãy số cho bởi các công thức truy hồi sau, hãy chọn các dãy số là cấp số nhân:

A. $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$

C. $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$

D. $7, 77, 777, \ldots, \underbrace{777\ldots7}_{n \text{ chữ số } 7}$

Lời giải:

(u_n) là cấp số nhân với công bội q, ta có công thức truy hồi;

$u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in N^*$

Ta có: $u_{n+1} = 3u_n$ công bội q = 3 và $u_n = u_1.q^{n-1}$

=> $u^1 = u^1.q^{1-1} = -1$ => $u_1 = -1$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ là cấp số nhân.

Chọn đáp án B.