Bài 1 : Hãy nêu định nghĩa của sinα , cosα và giải thích vì sao ta có :

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \; ; k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \; ; k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Trên đường tròn lượng giác trong mặt phẳng Oxy, lấy điểm A (1;0)

điểm M (x ; y) với $\overset{\frown}{AM} = \alpha$

* $y = \sin \overset{\frown}{AM} \Rightarrow y = \sin\alpha$
* $x = \cos \overset{\frown}{AM} \Rightarrow x = \cos\alpha$

Mà $\overset{\frown}{AM} = \alpha + k.2\pi \quad (k \in Z)$

Nên $\sin(\alpha + k.2\pi) = \sin\alpha \quad (k \in Z);$

$\cos(\alpha + k.2\pi) = \cos\alpha \quad (k \in Z)$

Bài 2 (): Nêu định nghĩa của tanα , cotα và giải thích vì sao ta có :

tan(α + kπ) = tanα, k ∈Z;

cot(α + kπ) = cotα, k ∈Z;

Lời giải

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ và } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Suy ra, $\tan(\alpha + k\pi) = \dfrac{\sin(\alpha + k\pi)}{\cos(\alpha + k\pi)}$

Mà • $\sin(\alpha + k.\pi) = \sin\alpha$

• $\cos(\alpha + k.\pi) = \cos\alpha$

nếu k chẵn

và • $\sin(\alpha + k.\pi) = -\sin\alpha$

• $\cos(\alpha + k\pi) = -\cos\alpha$

nếu k lẻ

nên $\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha$ (xem 3), trang 147)

Bài 3 : Tính:

a. $\sin\alpha$, nếu $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

b. $\cos\alpha$ nếu $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

c. $\tan\alpha$ Nếu $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

d. $\cot\alpha$ nếu $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Lời giải

a. Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\sin\alpha > 0$

ta có: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

b. nếu $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ thì $\cos\alpha < 0$

Ta có: $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1+8}} = -\frac{1}{3}$

c. Nếu $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ thì $\tan\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$

ta có: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \left(-\frac{3}{2}\right) : \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d. Nếu $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ thì $\cot\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$

ta có: $\cot\alpha = \left(-\frac{1}{4}\right) : \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

Bài 4 : Rút gọn biểu thức :

a. $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$

b. $\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)$

c. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

d. $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha}$

Lời giải

c. $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$

$$=\frac{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}\right)-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)}$$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{-\sqrt{2}\sin\alpha}=-\cot\alpha$$

d. $\dfrac{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{2\cos 4\alpha} = \dfrac{2\cos 4\alpha\sin\alpha}{2\cos 4\alpha} = \sin\alpha$

a. $\dfrac{2\sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}$

$= \dfrac{2\sin 2\alpha - 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)}{2\sin 2\alpha(1+\cos 2\alpha)}$

$= \dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \dfrac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$

b. $\tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)$

$= \tan\alpha\left(\dfrac{1+\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin\alpha}\right) = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha$

Bài 5 (): Tính :

a. $\cos\dfrac{22\pi}{3}$

b. $\sin\dfrac{23\pi}{4}$

c. $\sin\dfrac{25\pi}{3} - \tan\dfrac{10\pi}{3}$

d. $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \sin^2\dfrac{\pi}{8}$

Lời giải

a. $\cos\frac{22\pi}{3}$

$$= \cos\left(8\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

b. $\sin\frac{23\pi}{4}$

$$= \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c. $\sin\frac{25\pi}{3} - \tan\frac{10\pi}{3}$

$$= \sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

d. $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 7 (): Chứng minh các đồng nhất thức sau đây:

a. $\frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \cot x$

b. $\frac{\sin x + \sin\frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$

c. $\frac{2\cos 2x - \sin 4x}{2\cos 2x + \sin 4x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

d. $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x.\sin y}$

Lời giải

a. $\dfrac{1-\cos x+\cos 2x}{\sin 2x-\sin x}=\dfrac{1-\cos x+\cos 2x}{2\sin x\cos x-\sin x}=\dfrac{\cos x(2\cos x-1)}{\sin x(2\cos x-1)}=\cot x$

b. $\dfrac{\sin x+\sin\dfrac{x}{2}}{1+\cos x+\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}{2\cos^2\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2}+1\right)}{\cos\dfrac{x}{2}\left(2\cos\dfrac{x}{2}+1\right)}=\tan\dfrac{x}{2}$

c. $\dfrac{2\cos 2x-\sin 4x}{2\cos 2x+\sin 4x}=\dfrac{2\cos 2x-2\sin 2x\cos 2x}{2\cos 2x+2\sin 2x\cos 2x}=\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$

$$=\dfrac{1-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)}{1+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-2x\right)}=\dfrac{2\sin^2 x\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}{2\cos^2 x\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$$

d. $\tan x-\tan y=\dfrac{\sin x}{\cos x}-\dfrac{\sin y}{\cos y}=\dfrac{\sin x.\cos x-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$

Bài 8 (): Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x

a. A= $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$

b. B = $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

c. C = $\sin^2 x+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)$

d. D = $\dfrac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x}.\cot x$

Lời giải

a. Ta có: A= $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x-\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\sin x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x+\sin x-\cos x-\sin x)=0$$

vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.

b. Ta có: B = $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$

$$=\cos\frac{\pi}{6}\cos x+\sin\frac{\pi}{6}\sin x-\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x$$

$$=\cos x\left(\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\right)+\sin x\left(\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=0\cos x+0\sin x=0$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x

c. Ta có:

$$C=\sin^2 x+\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x+\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right]\left[\cos\frac{\pi}{3}\cos x-\sin\frac{\pi}{3}\sin x\right]$$

$$=\sin^2 x+\cos^2 x\frac{\pi}{3}\cos^2 x-\sin^2 x\frac{\pi}{3}\sin^2 x$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=\frac{1}{4}.$$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x

d. Ta có: D = $\frac{2\sin^2 x+2\sin x\cos x}{2\cos^2 x+2\sin x\cos x}.\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{\cos x}{\sin x}=1.$

Vậy biểu thức không phụ thuộc vào x.