Bài 1 : Dùng định nghĩa xét tính liên tục của hàm số f(x)=x3+2x-1 tại x0=3.

Lời giải:

Ta có: $f(x) = x^3 + 2x - 1\ tại\ x_0 = 3$

*Khi đó: $f(x_0) = f(3) = 3^3 + 2.3 - 1$

*Xét dãy số bất kì x_a với $x_a \neq 3\ và \lim\limits_{a \to +\infty} x_n = 3$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty}(x_n^3 + 2x_n - 1) = 3^3 + 2.3 - 1 = f(3)$

Vậy theo định nghĩa, f(x) liên tục tại $x_0 = 3$.

Bài 2 :

a. Xét tính liên tục của hàm số y = g(X) tại $x_0 = 2$. Biết:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}\ (nếu\ x \neq 2 \\ 5\ (nếu = 2) \end{cases}$$

b.Trong biểu thức g(x) ở trên, cần thay số 5 bởi số nào đó để hàm số liên tục tại x_0=2.

Lời giải:

a. với $x \neq 2 => g(x) = \frac{x^3-8}{x-2} = \frac{x^3-2^3}{x-2}$

$$= \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2 + 2x + 4$$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 2x + 4) = 2^2 + 2.2 + 4 = 12$$

Với x = 2 => g(2) = 5 => $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 12 \neq g(2) = 5$

Vậy hàm số đã cho không liên tục tại điểm x = 2.

b. Nếu hàm số g(x) xác định như sau:

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}\ (nếu\ x \neq 2\ ) \\ 12\ (nếu = 2) \end{cases}$ khi đó g(x) liên tục tại x =2

Vậy khi thay số 5 bởi số 12 thì hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Bài 3 (trang 141 SGK Đại số 11):

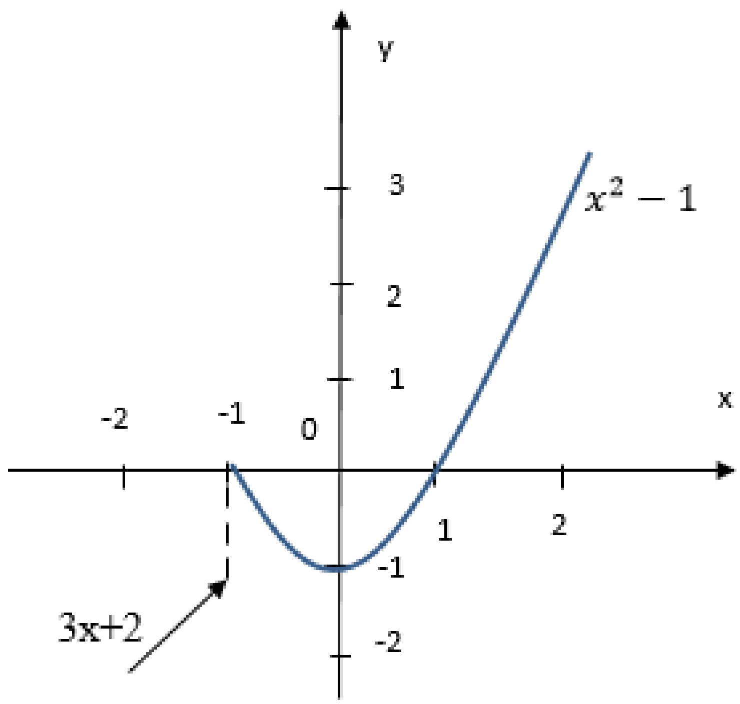
Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 \ (nếu < -1) \\ x^2 - 1 (nếu\ x \geq -1) \end{cases}$

a. Vẽ đồ thị hàm số y= f(x). Từ đó nêu nhận xét vê tính liên tục của hàm sso trên tập xác định của nó.

b. Khẳng định nhận xét trên bằng 1 chứng minh.

Lời giải:

a. Đồ thị hàm số (hình bên). Từ đồ thị ta thấy số gián đoạn tại x = -1.



b) Ta có: $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (3x+2) = 3.(-1) + 2 = 1$

$$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x^2 - 1) = 0$$

⇨ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$.

Bài 4 (trang 141 SGK Đại số 11):

Cho các hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$ và $g(x) = tanx + sinx$.

Với mỗi hàm số hãy xác định các khoảng trên đó hàm liên tục

Lời giải:

*Đặt $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-6}$

Hàm số xác định khi : $x^2 + x - 6 \neq 0$

⇔ $x \neq -3$ và $x \neq -2$

Vậy hàm số không xác định tại $x = -3$ và $x = -2$.

f(x) là hàm phân thức liên tục tại mọi điểm thuộc tập xác định.

⇨ Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; -3); (-3; 2)$ và $(2; +\infty)$

*Với $g(x) = tanx + sinx = \frac{sinx}{cosx} + sinx$

Điều kiện g(x) có nghĩa: $cosx \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

vậy hàm số không liên tục tại điểm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k∈ Z)

vì g(x) là hàm số lượng giác liên tục tại mọi x và tại đó g(x) xác định.

Do đó g(x) liên tục trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi \quad , \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in Z$.

Bài 5 : Ý kiến sau đúng hay sai?

"Nếu hàm số y = f(x) liên tục tại điểm x_0 và hàm số y = g(x) không liên tục tại x_0, thì y = f(x) + g(x) là một hàm số không liên tục tại x_0".

Lời giải:

Ý kiến trên đúng, vì y = h(x) = f(x) + g(x) liên tục tại x_0 thì h(x) – f(x) = g(x) liên tục tại x_0 (theo định lý 2 về hàm số liên tục) trái với giả thiết g(x) không liên tục tại x_0.

Bài 6 : Chứng minh rằng phương trình:

a. $2x^3 – 6x + 1 = 0$ có ít nhất hai nghiệm.

b. cos x = x có nghiệm

Lời giải:

a. Đặt $f(x) = 2x^3 – 6x + 1$

TXĐ: D = R

Ta có: $f(-2) = 2.(-2)^3– 6(-2) + 1 = - 3 < 0$

$f(-1) = - 2 + 6 + 1 = 5 > 0$

$f(-2).f(-1) < 0$

Mà f(x) là hàm đa thức xác định trên R nên liên tục trên tập R. Do đó f(x) liên tục trên (-2; -1).

Phương trình f(x) = 0 có ít nhất một nghiệm $x_0 \in(-2; -1)$.

Tương tự ta có:

$f(-1) = 2(-1)^3 – 6(-1) + 1 = 5$

$f(1) = 2 - 6 + 1 = -3$

$f(-1).f(1) < 0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (-1;1)$.

Vì các đoạn (-2; -1) và (-1; 1) rời nhau nên các nghiệm nói trên không thể trùng nhau. Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm.

b.Xét hàm số g(x) = x – cos x liên tục trên R, do đó liên tục trên đoạn [- π; π] ta có:

$g(- \pi) = - \pi – \cos (- \pi) = - \pi + 1 < 0$

$g(\pi) = \pi - \cos \pi = \pi - (-1) = \pi + 1 > 0$

$g(-\pi).\ g(\pi) < 0$

Theo định lí 3, phương trình $x - \cos x = 0$ có nghiệm trong $(-\pi; \pi)$ tức là $\cos x = x$ có nghiệm.