Bài 1 : Dùng định nghĩa tìm các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+1}{3x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty} = \dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$

Lời giải:

a. Đặt $f(x) = \dfrac{x+1}{3x-2}$, TXĐ: $D = R \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$

Xét dãy số (x_n), $x_n \in R \setminus \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 4$

Xét giới hạn của dãy số: $(f(x_n))$ nếu có:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{x_n+1}{3x_n-2} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+1)}{\lim\limits_{n\to+\infty}(3x_n-2)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \lim\limits_{n\to+\infty} 1}{\lim\limits_{n\to+\infty} 3x_n - \lim\limits_{n\to+\infty} 2} = \frac{4+1}{12-2} = \frac{1}{2}$$

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{x+1}{3x-2} = \frac{1}{2}$$

b. Tương tự a:

Đặt $f(x) = \dfrac{2-5x^2}{x^2+3}$, TXĐ: $D = R$

Xét dãy số (x_n), $x_n \in (a; +\infty)$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

Ta có: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2-5x_n^2}{x_n^2+3} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n^2\left(\dfrac{2}{x_n^2}-5\right)}{x_n^2\left(1+\dfrac{3}{x_n^2}\right)}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{2}{x_n^2}-5\right)}{\left(1+\frac{3}{x_n^2}\right)} = \frac{\lim\left(\frac{2}{x_n^2}-5\right)}{\lim\left(1+\frac{3}{x_n^2}\right)} = \frac{\frac{2}{+\infty}-5}{1+\frac{3}{+\infty}} = -5$$

Vậy theo định nghĩa ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2-5x_n^2}{x_n^2+3} = -5$$

Bài 2 :

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 \ (\text{nếu } x \ \geq 0) \\ 2x \ (\text{nếu } x \ < 0) \end{cases}$

và các dãy số (u_n) *với* $u_n = \frac{1}{n}$ *với* $v_n = -\frac{1}{n}$.

Tính $\lim u_n$, $\lim v_n$, $\lim f(u_n)$, $\lim f(v_n)$.

Từ đó có kết luận gì về giới hạn của hàm số đã cho khi $x \to 0$?

Lời giải:

Ta có: $\lim u_n = \lim \frac{1}{n} = 0$;

$\lim v_n = \lim\left(-\frac{1}{n}\right) = -\lim \frac{1}{n} = 0$

Vì: $\frac{1}{n} > 0$ nên $f\left(\frac{1}{n}\right) = \sqrt{\frac{1}{n}} + 1;$

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+1\right) = 1$$

Và $-\frac{1}{n} < 0$ nên:

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim_{n\to+\infty} f\left(-\frac{2}{n}\right) = 0$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ và

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 1 \neq \lim_{n\to+\infty}(v_n) = 0$$

Bài 3 (trang 132 SGK Đại số 11): Tính các giới hạn sau:

a. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4-x^2}{x+2}$

c. $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}$

d. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-6}{4-x}$

e. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{17}{x^2+1}$

f. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{-2x^2+x-1}{3+x}$

Lời giải:

a. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-1}{x+1}=\dfrac{(-3)^2-1}{-3+1}=\dfrac{9-1}{-2}=-4$

b. Đặt $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x+2}$, TXĐ: $D=R\setminus\{-2\}$

$$f(x)=\frac{4-x^2}{x+2}=\frac{(2-x)(2+x)}{x+2}=2-x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{4-x^2}{x+2}=\lim_{x\to -2}(2-x)=2+2=4$$

c. Với $\forall x\neq 6$, ta có :

$$\frac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\frac{\left(\sqrt{(x+3)}-3\right)\left(\sqrt{x+3}+3\right)}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}$$

$$=\frac{(x+3)-3^2}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\frac{(x+3)-3^2}{(x-6)(\sqrt{x+3}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+3}$$

Vậy $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x+3}-3}{x-6}=\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+3}=\dfrac{1}{\sqrt{6+3}+3}=\dfrac{1}{6}$

d. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x-6}{4-x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{6}{x}\right)}{x\left(\dfrac{4}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2-\dfrac{6}{x}}{\dfrac{4}{x}-1}=-2$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{17}{x^2+1}=\frac{\lim 17}{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)}=0$$

f. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2+x-1}{3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{3}{x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{3}{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x.\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{3}{x}+1}=+\infty.(-2)=-\infty$$

Bài 4 : Tìm các giới hạn sau :

a. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-5}{(x-2)^2}$

b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-7}{x-1}$

c. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-7}{x-1}$

Lời giải:

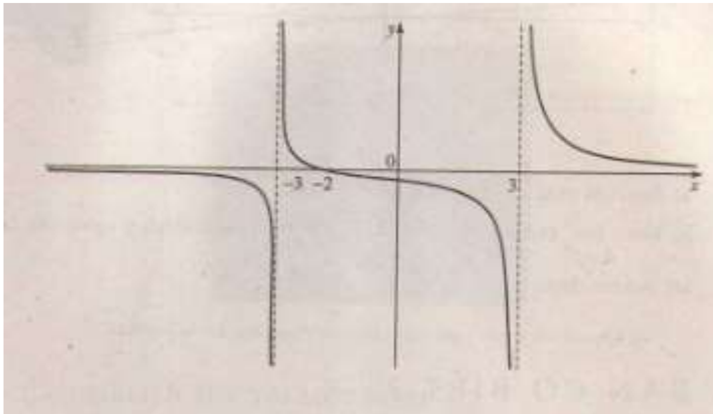
a. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-5}{(x-2)^2}=\frac{3.2-5}{(2-2)^2}=\frac{1}{0}=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-7}{x-1}=\frac{-5}{0}=+\infty$ (vì khi $x\to 1^-$ thì $x-1<0$)

c. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-7}{x-1}=-\frac{5}{0}=-\infty$ (vì $x\to 1^+$ thì $x-1>0$

Bài 5 : Cho hàm số f(x) = ...

Cho hàm số $f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$ có độ thị như trên hình dưới:



Hình 53

a. Quan sát đồ thị và nêu nhận xét về giá trị hàm số cho khi:

$x \to -\infty, x \to 3^-, x \to -3^+$

b. Kiểm tra các nhận xét trên bằng cách tính các giới hạn sau:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng $(-\infty; -3)$;
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng (-3; 3);
- $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$ với f(x) được xét trên khoảng (-3; 3).

Lời giải:

a) Từ đồ thị thấy:

- f(x)→ $0\ k\square i\ x \to -\infty$
- $f(x) \to -\infty\ k\square i\ x \to 3^-$;
- $f(x) \to +\infty\ k\square i\ x \to -3^+$

b.) Ta có: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+2}{x^2-9}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x \to -\infty}\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \frac{x+2}{x^2-9} \left(= \frac{3+2}{3^2-9}\right) = -\infty$

(vì trên (-3; 3) thì $x^2 - 9 < 0$)

$\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \frac{x+2}{x^2-9} = \frac{-3+2}{(-3)^2-9} = +\infty \left(= -\frac{1}{0}\right)$

(vì trên đoạn (-3; 3) , $x^2 - 9 < 0$).

Bài 6 (trang 133 SGK Đại số 11): Tính:

a. $\lim_{x\to+\infty}(x^4 - x^2 + x - 1)$

b. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3 + 3x^2 - 5)$

c. $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2 - 2x + 5}$

d. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x}$

Lời giải:

a. $$\lim_{x\to+\infty}(x^4 - x^2 + x - 1) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^4 . \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}\right) = +\infty . 1 = +\infty$$

b. $$\lim_{x\to-\infty}(-2x^3 + 3x^2 - 5) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x^3 . \lim_{x\to-\infty}\left(-2 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}\right) = -\infty(-2) = +\infty$$

c. $$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2 - 2x + 5}$$

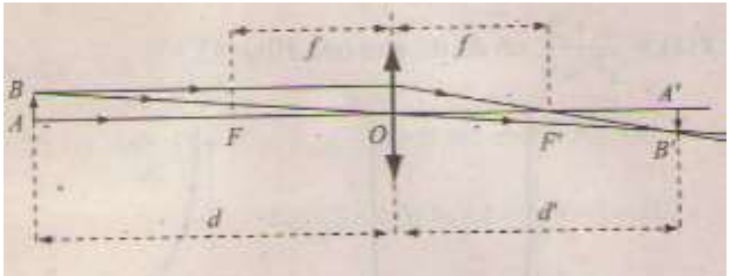
$$= \lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}|x| \lim_{x\to-\infty}\sqrt{\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} = +\infty . 1 = +\infty$$

d. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{5-2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+x\right)}}{x(\frac{5}{x}-2)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+1}}{x\left(\frac{5}{x}-2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+1}}{\frac{5}{x}-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Bài 7 : Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và ảnh A'B' của nó tới quang tâm O của thấu kính (hình dưới).



Hình 54

a. Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

b. Tìm $\lim_{d \to f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \to f^-} \varphi(d)$, $\lim_{d \to +\infty} \varphi(d)$.

Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Lời giải:

a. Ta có: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f} \Leftrightarrow \frac{1}{d} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d'} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d-f} = g(d)$

b. Tính:

$$\lim_{d \to f^+} g(d) = \lim_{d \to f^+} \frac{df}{d-f} = \frac{f^2}{0} = +\infty$$

$(vì\ d - f > 0\ khi\ d \to f^+)$

- Ý nghĩa: Khi vật dẫn đến tiêu điểm nhưng lơn hơn tiêu điểm thì có ảnh ở ∞.
- $\lim_{x->f^-} \varphi(d) = \lim_{x \to f^-} \frac{fd}{d-f} = -\infty$
- $(vì\ d - f < 0\ khi\ d - f^-)$

- Ý nghĩa: khi vật dẫn đến tiêu điểm nhưng lớn hơn tiêu điểm thì ảnh ở ∞.

$$\lim_{d \to +\infty} \varphi(d) = \lim_{d \to +\infty} \frac{fd}{d-f} = \lim_{d \to +\infty} \frac{f}{1-\frac{f}{d}} = f$$