

Bài 1 (trang 89 SGK Hình học 12): Viết phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $M(5; 4; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a} = (2; -3; 1)$

b) d đi qua điểm $A(2; -1; 3)$ và vuông góc với mặt phẳng (α)

có phương trình: $x + y - z + 5 = 0$.

c) d đi qua điểm $B(2; 0; -3)$ và song song với đường thẳng:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 3t \\ z = 4t \end{cases}$$

d) d đi qua hai điểm $P(1; 2; 3)$, $Q(5; 4; 4)$

Lời giải:

a) Ta có:
$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

b) Đường thẳng d vuông góc với $mp(\alpha)$ $x + y - z + 5 = 0$

nên đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n} = (1; 1; -1)$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

c) Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{a} = (2; 3; 4)$ (vì $d \parallel \Delta$).

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$$

d) Vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{PQ} = (4; 2; 1)$

(vì d đi qua hai điểm $P(1; 2; 3)$, $Q(5; 4; 4)$)

vậy phương trình tham số của đường thẳng d là:
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Bài 2 (trang 89 SGK Hình học 12): Viết phương trình tham số của đường thẳng là hình chiếu vuông góc của đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ lần lượt trên các mặt phẳng:}$$

a)Oxy

b)Oyz

Lời giải:

a) Từ phương trình đường thẳng d ta suy ra

$M(2; -3; 1)$ và $N(3; -1; 4)$ thuộc d

Gọi M' và N' theo thứ tự là hình chiếu

vuông góc của M và N trên mp(Oxy)

Ta có: $M'(2; -3; 0)$ và $N'(3; -1; 0)$, $\vec{M'N'} = (1; 2; 0)$

Suy ra đường thẳng $M'N'$ là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mp(Oxy).

Vậy đường thẳng $M'N'$ có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = 0 \end{cases}$$

b) Tương tự như trên, phương trình tham số của hình

$$\text{chiếu vuông góc của d lên mp(Oyz) là: } \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Bài 3 (trang 90 SGK Hình học 12): Xét vị trí tương đối các cặp đường thẳng d và d' cho bởi các phương trình sau:

$$a) d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \quad d': \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$$

$$c) d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad d': \begin{cases} x = 1 + 2t' \\ y = -1 + 2t' \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$

Lời giải:

$$\text{a)Ta có hệ: } \begin{cases} -3 + 2t = 5 + t' & (1) \\ -2 + 3t = -1 - 4t' & (2) \\ 6 + 4t = 20 + t' & (3) \end{cases}$$

giải hệ phương trình với hai phương trình (1) và (2),

ta được $t = 3, t' = 2$. Thay vào (3) ta thấy (3) đúng.

vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là: $(x; y; z) = (3; 7; 8)$

Vậy d và d' cắt nhau tại $A(3; 7; 8)$

$$\text{b)Ta có: } d \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (1; 1; -1) \quad (4)$$

$$d' \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a}' = (2; 2; -1) \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \vec{a} \text{ và } \vec{a}' \text{ cùng phương} \quad (6)$$

$$\text{Ta lại có } A(1; 2; 3) \in d \text{ nhưng } A \notin d' \quad (7)$$

Từ (6) và (7) suy ra $d \parallel d'$

Bài 4 (trang 90 SGK Hình học 12): Tìm a để hai đường thẳng sau đây cắt nhau:

$$d: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$d': \begin{cases} x = 1 - t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

Lời giải:

Để hai đường thẳng d và d' cắt nhau thì hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 + at = 1 - t' & (1) \\ t = 2 + 2t' & (2) \text{ phải có một nghiệm duy nhất} \\ -1 + 2t = 3 - t' & (3) \end{cases}$$

Giải hệ gồm hai phương trình (2) và (3) ta được $t = 2$ và $t' = 0$

Thay vào (1) ta được: $1 + 2a = 1 - 0 \Leftrightarrow a = 0$

Vậy d cắt d' khi $a = 0$.

Bài 5 (trang 90 SGK Hình học 12): Xét vị trí tương đối của đường thẳng d với mặt phẳng (α) trong các trường hợp sau:

$$\text{a)d: } \begin{cases} x = 12 + 4t \\ y = 9 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (\alpha): 3x + 5y - z - 2 = 0$$

$$\text{b)d: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (\alpha): x + 3y + z + 1 = 0$$

$$\text{c)d: } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \quad (\alpha): x + y + z - 4 = 0$$

Lời giải:

a) Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (4; 3; 1)$

và mp(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 5; -1)$

vậy $\vec{a} \cdot \vec{n} = 12 + 15 - 1 \neq 0$, suy ra \vec{a} và \vec{n} không vuông góc nhau hay d cắt (α).

b) Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 2; 1) và có

vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -1; -2)$, mp(α) có

vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 3; 1)$

ta có: $\vec{a} \cdot \vec{n} = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow d // (\alpha)$ hoặc $d \subset (\alpha)$ (1)

mặt khác: $M \in d$ nhưng $M \notin (\alpha)$ (2)

từ (1) và (2) suy ra d và (α) song song nhau

c) Đường thẳng d đi qua điểm M(1; 1; 2) và có vectơ

chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; 3)$, mặt phẳng (α) có

vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$

ta có: $\vec{a} \cdot \vec{n} = 1 + 2 + 2 = 0 \Rightarrow d // (\alpha)$ hoặc $d \subset (\alpha)$ (3)

mặt khác: $M \in d$ nhưng $M \in (\alpha)$ (4)

từ (3) và (4) suy ra $d \subset (\alpha)$

Bài 7 (trang 91 SGK Hình học 12): Cho điểm A(1; 0; 0) và đường thẳng ...

$$\text{Cho điểm A(1; 0; 0) và đường thẳng } \Delta: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên đường thẳng Δ .

b) Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ .

Lời giải:

a) Cho $H(2 + t; 1 + 2t; t) \in \Delta$. Ta có: $\overrightarrow{AH} = (1 + t; 1 + 2t; t)$

đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; 1)$

Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên Δ nên $AH \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{a} = 0$

$$\Leftrightarrow 1+t+2(1+2t)+t=0$$

$$\Leftrightarrow 6t+3=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$$

b) Vì A' là điểm đối xứng của A qua Δ nên H là trung điểm của AA'

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 0 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -1 \end{cases}$$

Vậy $A'(2; 0; -1)$

Bài 8 (trang 91 SGK Hình học 12): Cho điểm $M(1; 4; 2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$

a) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mặt phẳng (α) .

b) Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α) .

c) Tính khoảng cách từ M đến mp(α).

Lời giải:

a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên mp(α).

Phương trình tham số của đường thẳng MH là:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Thay x, y, z trong phương trình tham số của đường thẳng MH vào phương trình của mp(α), ta có:

$$(1 + t) + (4 + t) + (2 + t) - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Vậy H(-1; 2; 0)

b) Vì M' là điểm đối xứng của M qua mp(α) nên $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$

$$\text{ta có H là trung điểm của MM'}. \text{ Khi đó M' } \begin{cases} x = 2x_H - x_M = -3 \\ y = 2y_H - y_M = 0 \\ z = 2z_H - z_M = -2 \end{cases}$$

vậy M'(-3; 0; -2)

$$\text{c) Ta có: } d = d(M, \text{mp}(\alpha)) = \sqrt{4 + 4 + 4} = 2\sqrt{3}$$

Bài 9 (trang 91 SGK Hình học 12): Cho hai đường thẳng d:

$$\text{Cho hai đường thẳng d: } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3t \end{cases} \text{ và d': } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

Chứng minh d và d' chéo nhau.

Lời giải:

Ta có vector chỉ phương của d là $\vec{a} = (-1; 2; 3)$ và

vector chỉ phương của d' là $\vec{a'} = (1; -2; 0)$.

Từ hai vector chỉ phương ta thấy \vec{a} và $\vec{a'}$ không cùng phương

$$\text{Đồng thời hệ phương trình } \begin{cases} 1 - t = 1 + t \\ 2 + 2t = 3 - 2t \\ 3t = 1 \end{cases} \text{ vô nghiệm}$$

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.