Bài 1 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc ba sau:

a) $y = 2 + 3x - x^3$; b) $y = x^3 + 4x^2 + 4x$

c) $y = x^3 + x^2 + 9x$; d) $y = -2x^3 + 5$

Lời giải:

a)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 3 - 3x^2$

$y' = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = +\infty; \lim_{x\to+\infty} y = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng (1; 1).

Hàm số nghịch biến trên các khoảng (-∞; -1) và (1; +∞).

+ Cực trị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là: (1; 0).

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (1; 4).

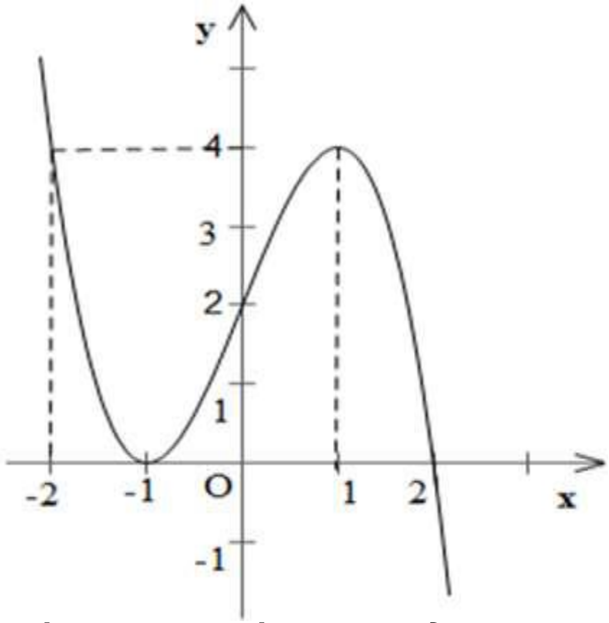
- Đồ thị:

Ta có $x^3 + 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4x + 4) = 0$

$\Rightarrow x(x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 0; x = -2$

+ Giao với Ox: (0; 0) và (-2; 0)

+ Giao với Oy: (0; 0) (vì y(0) = 0)



(Đồ thị hàm số nhận điểm (0; 2) làm tâm đối xứng.)

b)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 8x + 4$

$y' = 0 \Rightarrow x = -2$ hoặc $x = -2/3$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = +\infty; \lim_{x\to+\infty} y = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\frac{32}{27}$	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-2; -\frac{2}{3}\right)$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$.

+ Cực trị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là: $\left(-\frac{2}{3};-\frac{32}{27}\right)$.

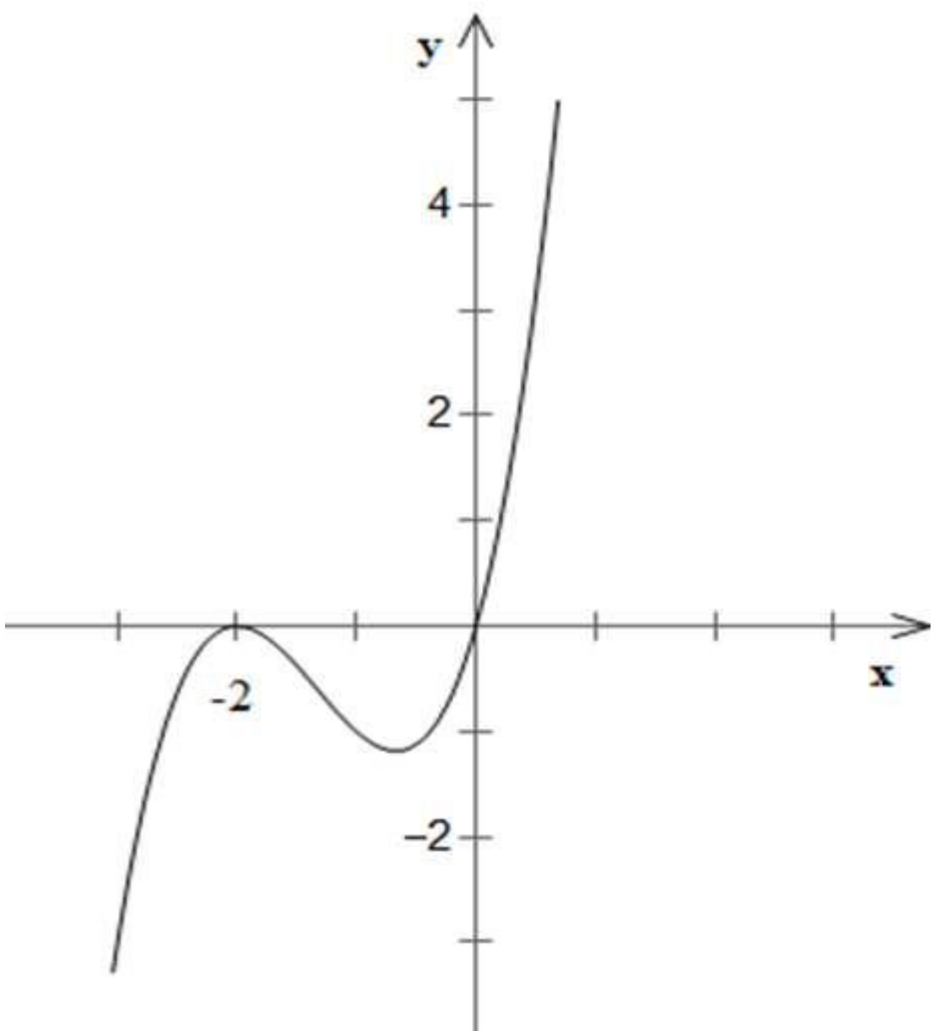
Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (-2; 0).

- Đồ thị:

Ta có $2 + 3x - x^3 = 0 \Rightarrow x = -1$; $x = 2$

+ Giao với Ox: (-1; 0) và (2; 0)

+ Giao với Oy: (0; 2) (vì y(0) = 2)



c)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 2x + 9 > 0 \ \forall x \in R$

=> Hàm số luôn đồng biến trên R và không có điểm cực trị.

+ Giới hạn:

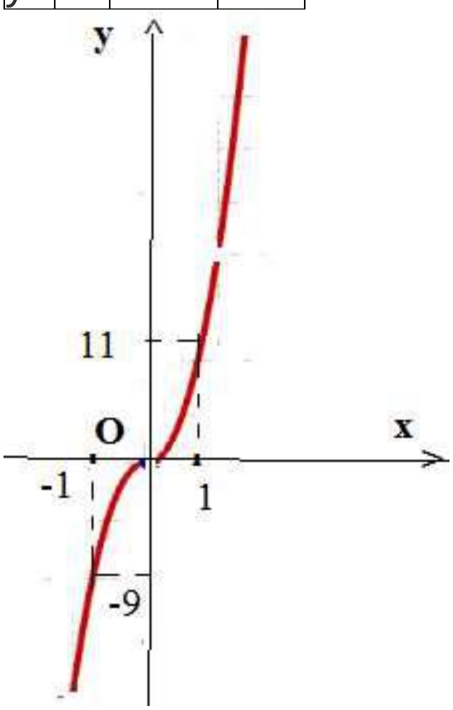
$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty; \lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- Đồ thị:

x	0	1	-1
y	0	11	-9



d)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = -6x^2 \le 0 \ \forall x \in R$

=> Hàm số luôn nghịch biến trên R và không có điểm cực trị.

+ Giới hạn:

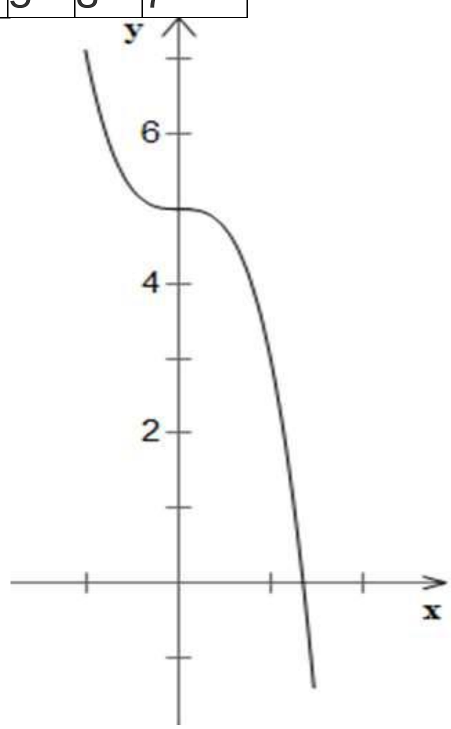
$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty; \lim_{x \to +\infty} y = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	-	
y	$+\infty$	↘			$-\infty$

- Đồ thị:

x	0	1	-1
y	5	3	7



Bài 2 : Khảo sát tự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số bậc bốn sau:

a) $y = -x^4 + 8x^2 - 1$;   b) $y = x^4 - 2x^2 + 2$

c) $y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}$;   d) $-2x^2 - x^4 + 3$

Lời giải:

a)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = -4x^3 + 16x = -4x(x^2 - 4)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = \pm 2$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \left[x^4 \left(-1 + \frac{8}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) \right] = -\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	0	−	
y	$-\infty$	↗	15	↘	-1	↗	15	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

+ Cực trị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là: $(0; -1)$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực đại là: $(-2; 15)$ và $(2; 15)$.

- Đồ thị:

Hàm số đã cho là hàm số chẵn, vì:

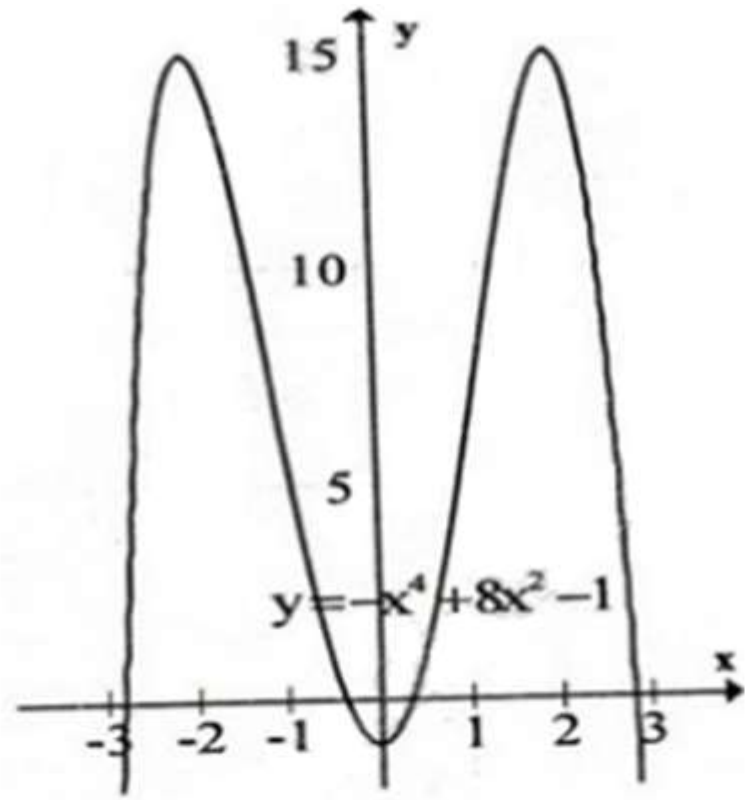
$y(-x) = -(-x)^4 + 8(-x)^2 - 1 = -x^4 + 8x^2 - 1 = y(x)$

Do đó đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

Ta có: $-x^4 + 8x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 + \sqrt{15}}$; $x = \pm\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

+ Giao với Ox: tại 4 điểm

+ Giao với Oy: (0; -1) (vì y(0) = -1)



b)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = \pm 1$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty; \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	2	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			1				1		

Hàm số đồng biến trên khoảng (-1; 0) và (1; +∞).

Hàm số nghịch biến trên các khoảng (-∞; -1) và (0; 1).

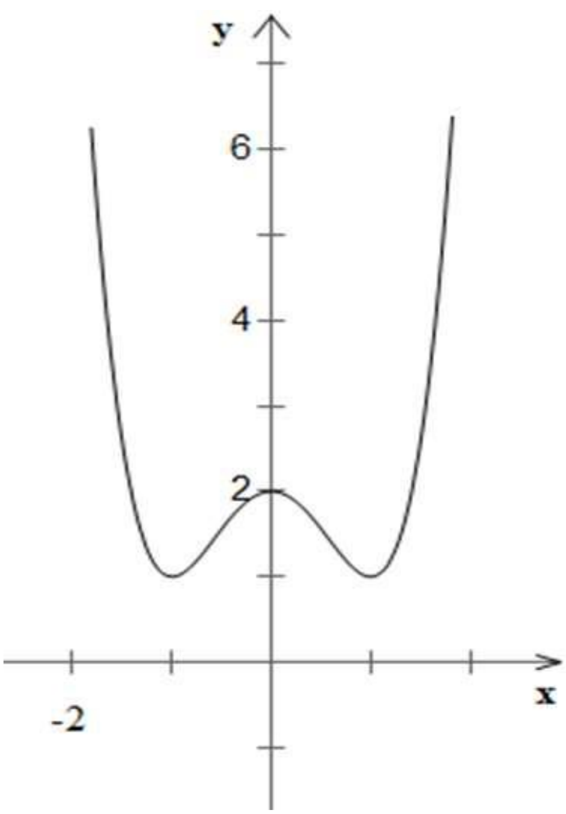
+ Cực trị:

Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là: (-1; 1) và (1; 1).

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (0; 2).

- Đồ thị:

Xác định tương tự như a) ta có đồ thị:



c)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 2x^3 + 2x = 2x(x^2 + 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = +\infty; \lim_{x\to+\infty} y = +\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

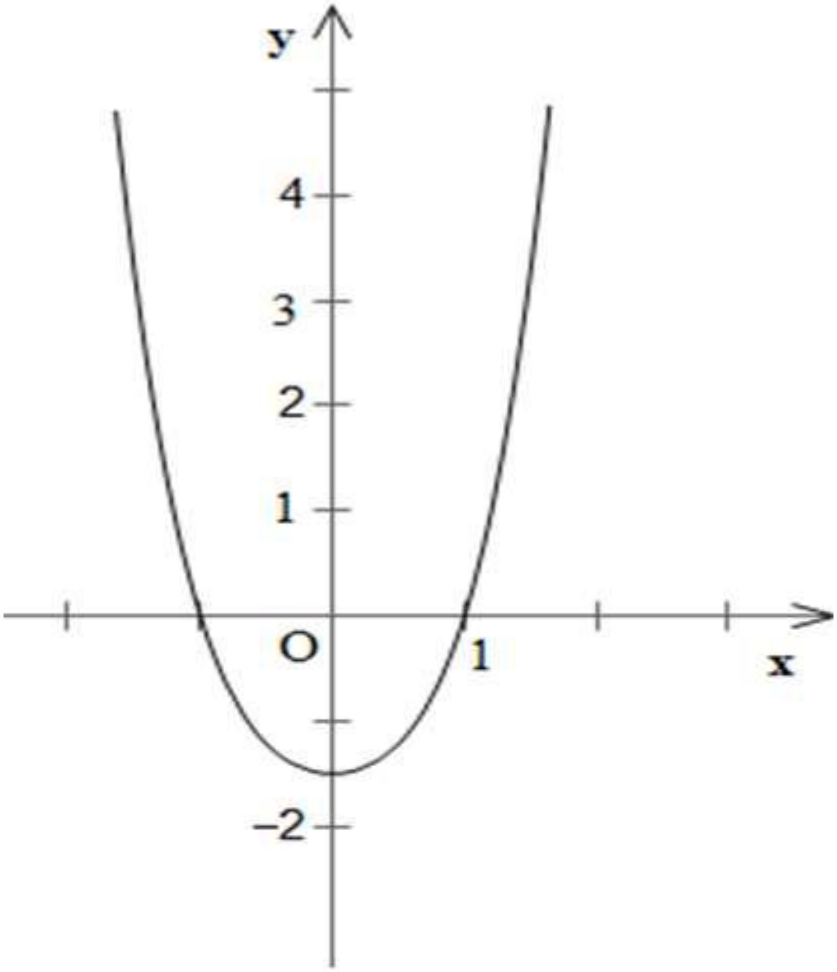
Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$.

+ Cực trị:

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: $(0; -3/2)$.

- Đồ thị:

Xác định tương tự như a) ta có đồ thị:



d)

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = -4x - 4x^3 = -4x(1 + x^2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -4x(1 + x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty; \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		-	
y		↗	3	↘	
	$-\infty$				$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng (-∞; 0).

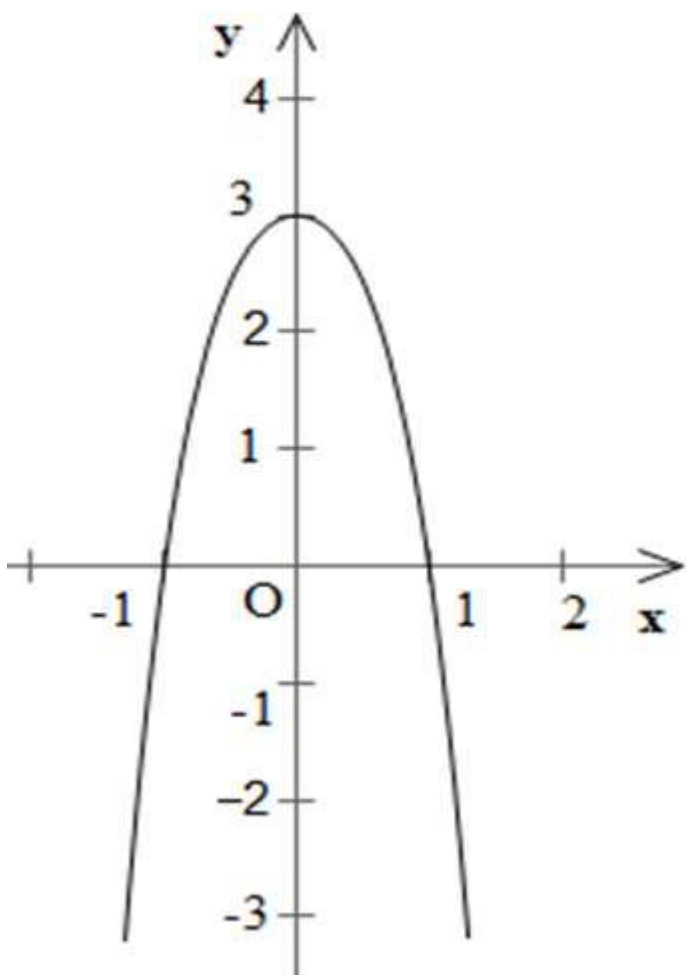
Hàm số nghịch biến trên các khoảng (0; +∞).

+ Cực trị:

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (0; 3).

- Đồ thị:

Xác định tương tự như a) ta có đồ thị:



Bài 3 : Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số phân thức:

a) $y=\dfrac{x+3}{x-1}$; b) $y=\dfrac{1-2x}{2x-4}$; c) $y=\dfrac{-x+2}{2x+1}$

Lời giải:

a)

- Tập xác định: D = R \ {1}

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y'=\frac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2}=-\frac{4}{(x-1)^2}<0\ \forall x\in D$$

=> Hàm số nghịch biến trên (-∞; 1) và (1; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 1^-} y=-\infty;\ \lim_{x\to 1^+} y=+\infty$$

Vậy x = 1 là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1$$

Vậy y = 1 là tiệm cận ngang.

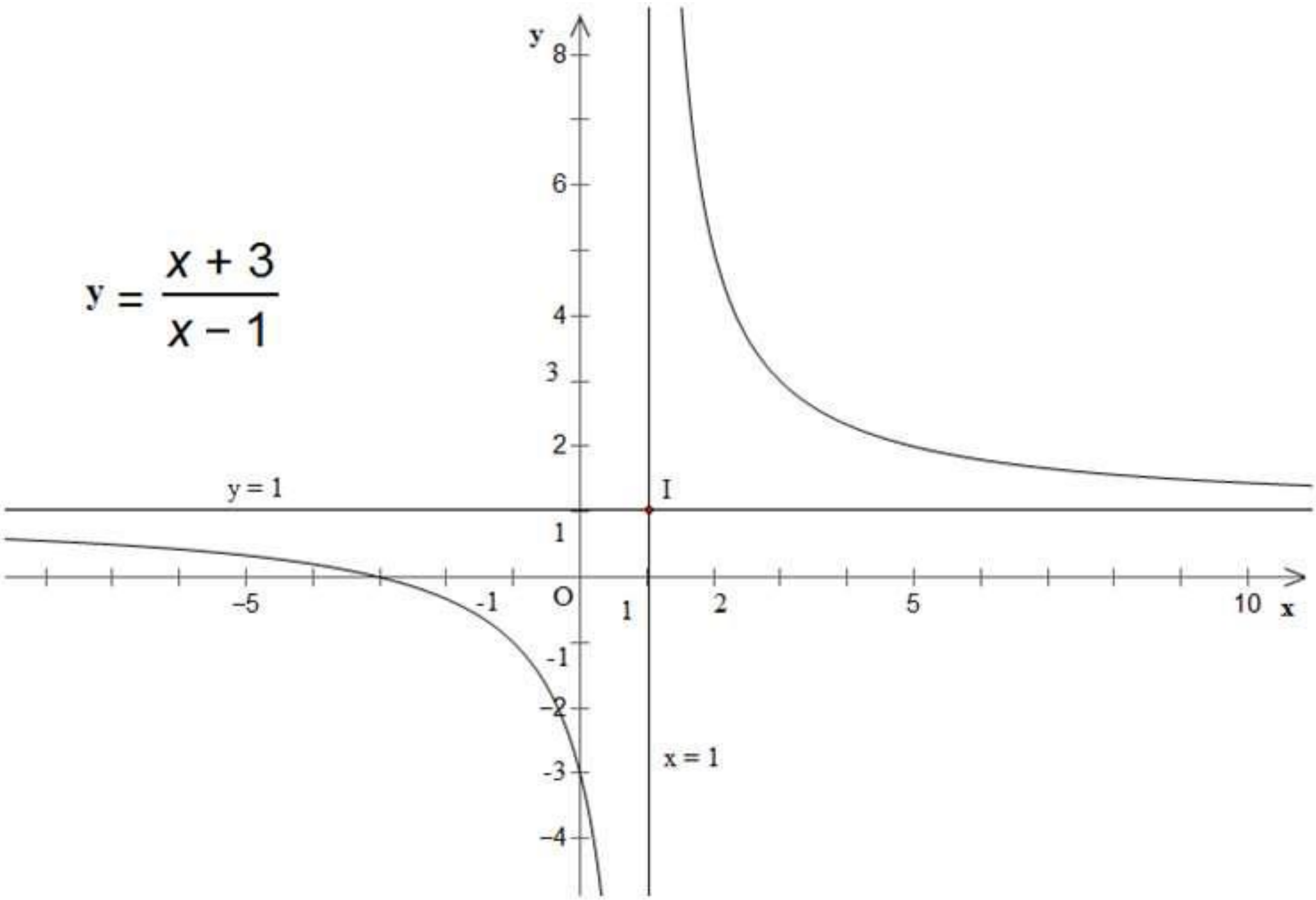
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

- Đồ thị:

  + Giao với Oy: (0; -3)

  + Giao với Ox: (-3; 0)



b)

- Tập xác định: D = R \ {2}

- Sự biến thiên:

  + Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{6}{(2x-4)^2} > 0\ \forall x\ \in D$$

=> Hàm số đồng biến trên (-∞; 2) và (2; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 2^-} y = +\infty\,;\ \lim_{x\to 2^+} y = -\infty$$

Vậy x = 2 là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = -1$$

Vậy y = -1 là tiệm cận ngang.

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		+	||	+	
y	-1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

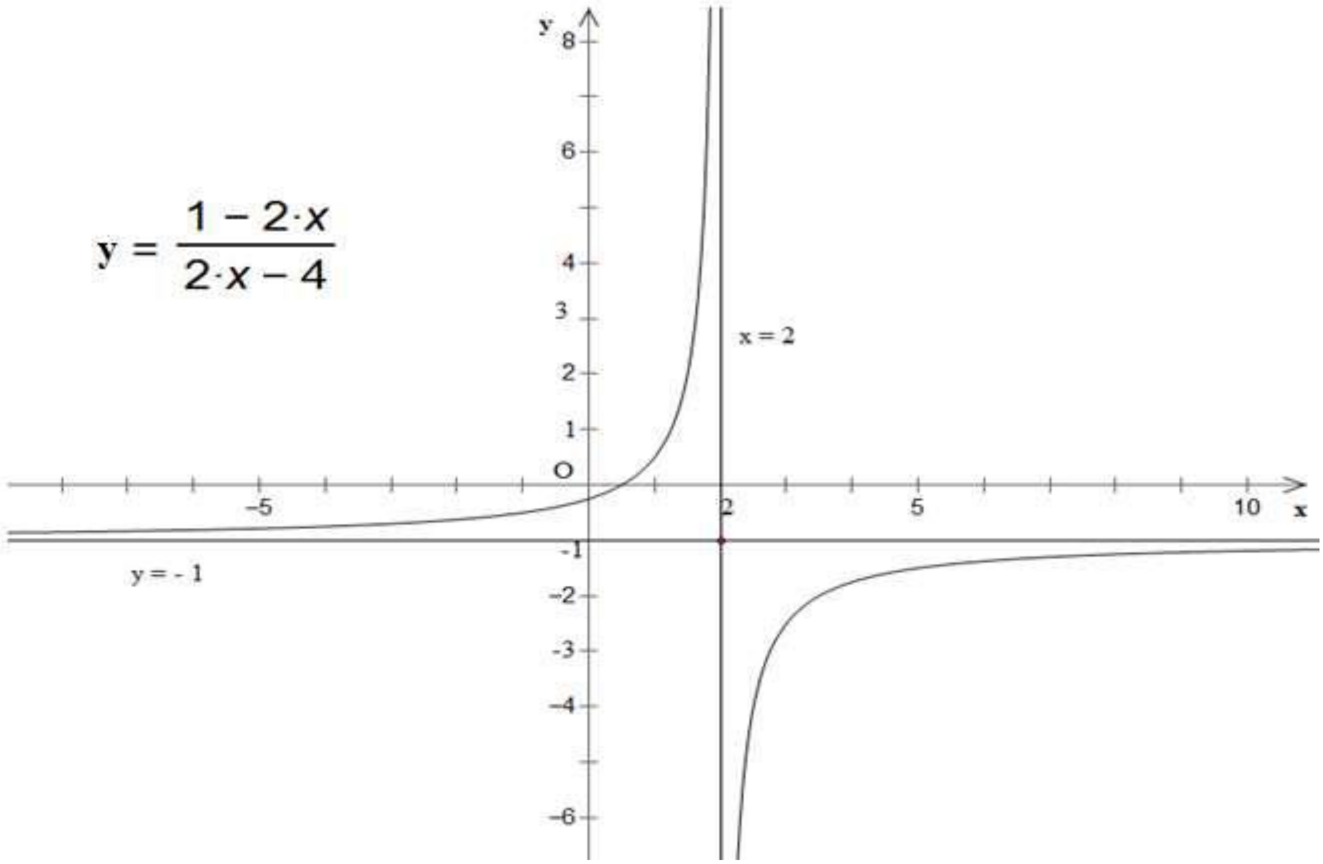
- Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; -1/4)

+ Giao với Ox: (1/2; 0)

Xác định một số điểm khác:

$\left(1; \frac{1}{2}\right); \left(3; -\frac{5}{2}\right); \left(4; -\frac{4}{7}\right)$



c)

- Tập xác định: D = R \ {-1/2}

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = -\frac{5}{(2x+1)^2} < 0 \ \forall x \ \in D$$

=> Hàm số nghịch biến trên (-∞; -1/2) và (-1/2; +∞).

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} y = -\infty; \ \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} y = +\infty$$

Vậy x = -1/2 là tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = -\frac{1}{2}$$

Vậy y = -1/2 là tiệm cận ngang.

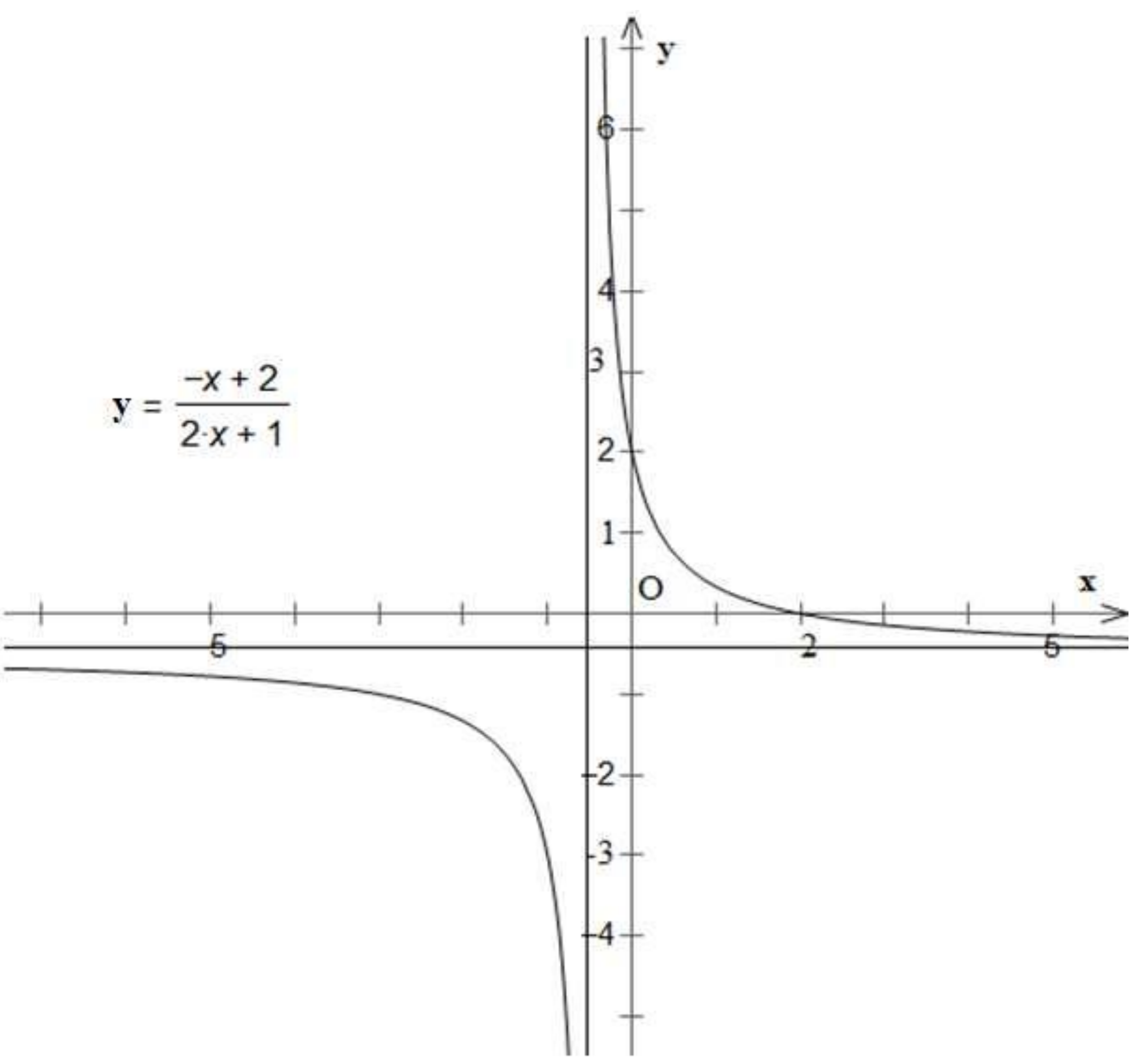
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	$-\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$

- Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; 2)

+ Giao với Ox: (2; 0)



Bài 4 : Bằng cách khảo sát hàm số, hãy tìm số nghiệm của các phương trình sau:

a) $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$;

b) $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$;

c) $2x^2 - x^4 = -1$

Lời giải:

a) $x^3 - 3x^2 + 5 = 0$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ và trục hoành ($y = 0$).

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ ta có:

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = 2$

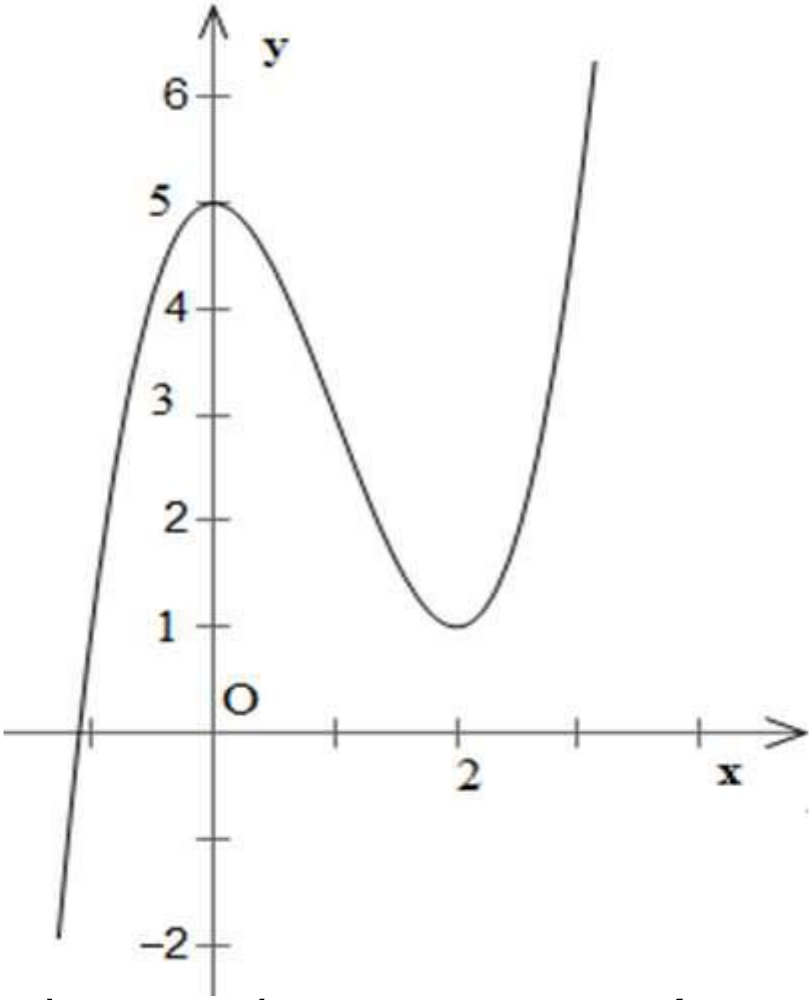
+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty \; ; \; \lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y		↗	5	↘		↗	$+\infty$
	$-\infty$				1		

- Đồ thị:



Đồ thị hàm số y = x^3 - $3x^2$ + 5 **chỉ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất**. Từ đó suy ra phương trình x^3 - $3x^2$ + 5 = 0 chỉ có 1 nghiệm.

b) -$2x^3$ + $3x^2$ - 2 = 0

⇔ $2x^3$ - $3x^2$ = -2 (2)

Số nghiệm của phương trình (2) là số giao điểm của đồ thị hàm số y = $2x^3$ - $3x^2$ và đường thẳng y = -2.

Xét hàm số y = $2x^3$ - $3x^2$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: y' = $6x^2$ - 6x = 6x(x - 1)

y' = 0 => x = 0 ; x = 1

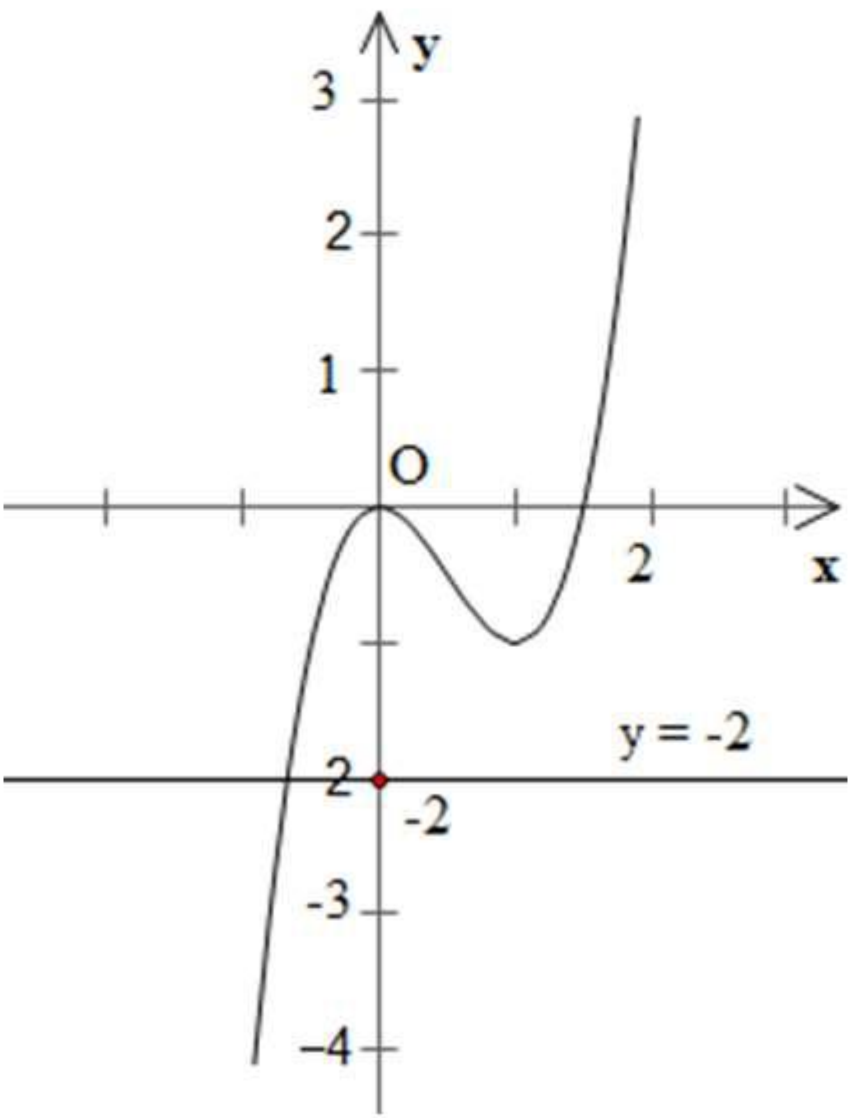
+ Giới hạn:

$$\lim_{x\to-\infty} y = -\infty; \lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	-1	↗	$+\infty$

- Đồ thị:



Đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2$ **chỉ cắt đường thẳng y = -2 tại 1 điểm duy nhất**. Từ đó suy ra phương trình $2x^3 - 3x^2 = -2$ chỉ có 1 nghiệm.

Vậy phương trình $-2x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ chỉ có một nghiệm.

c) $2x^2 - x^4 = -1$ (3)

Số nghiệm của phương trình (3) là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x^4$ và đường thẳng $y = -1$.

Xét hàm số $y = 2x^2 - x^4$ ta có:

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 4x - 4x^3 = 4x(1 - x^2)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$; $x = \pm 1$

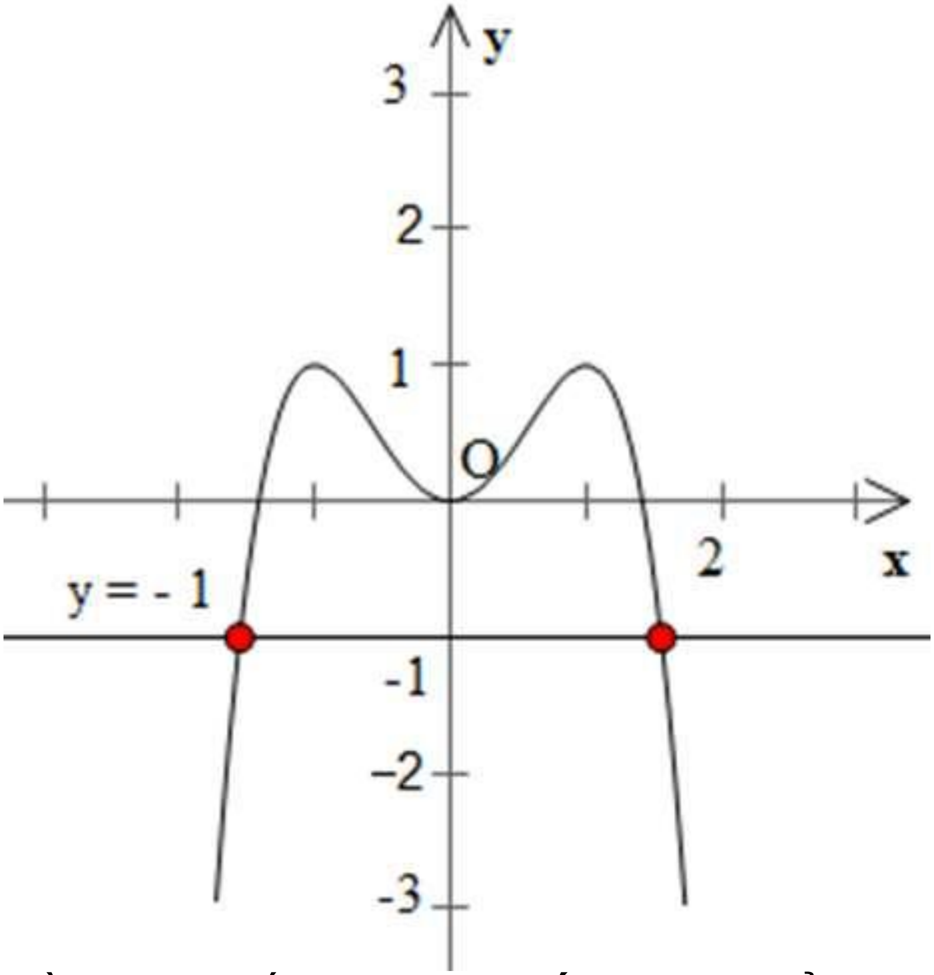
+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y			1				1		
		↗		↘		↗		↘	
	$-\infty$				0				$+\infty$

- Đồ thị:



Đồ thị hàm số $y = 2x^2 - x^4$ **cắt đường thẳng y = -1 tại hai điểm**. Từ đó suy ra phương trình $2x^2 - x^4 = -1$ có hai nghiệm phân biệt.

Bài 5 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$$y = -x^3 + 3x + 1$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận về số nghiệm của phương trình sau theo tham số m:

$$x^3 - 3x + m = 0$$

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$

- Tập xác định: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = -3x^2 + 3 = -3(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow -3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} y = +\infty; \lim_{x \to +\infty} y = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng (-1; 1).

Hàm số nghịch biến trên các khoảng (-∞; -1) và (1; +∞).

+ Cực trị:

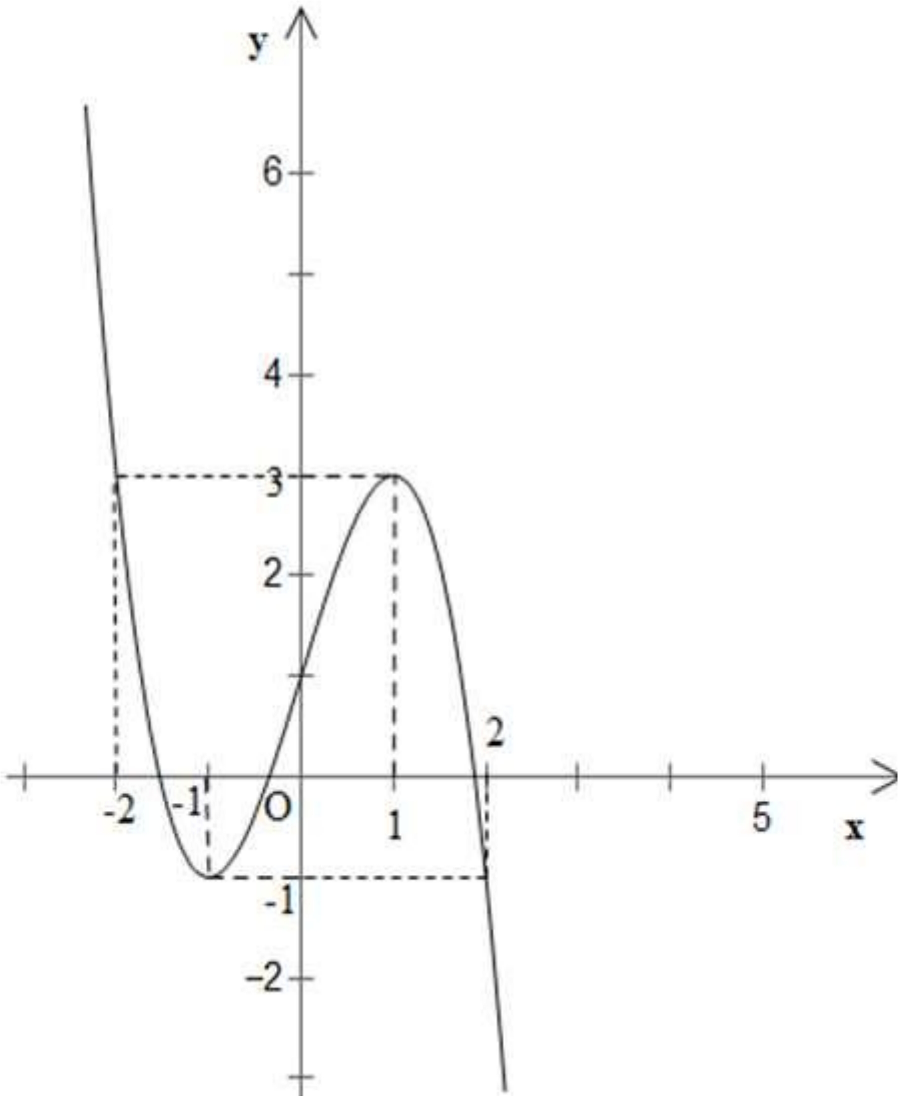
Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là: (-1; -1).

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là: (1; 3).

- Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; 1).

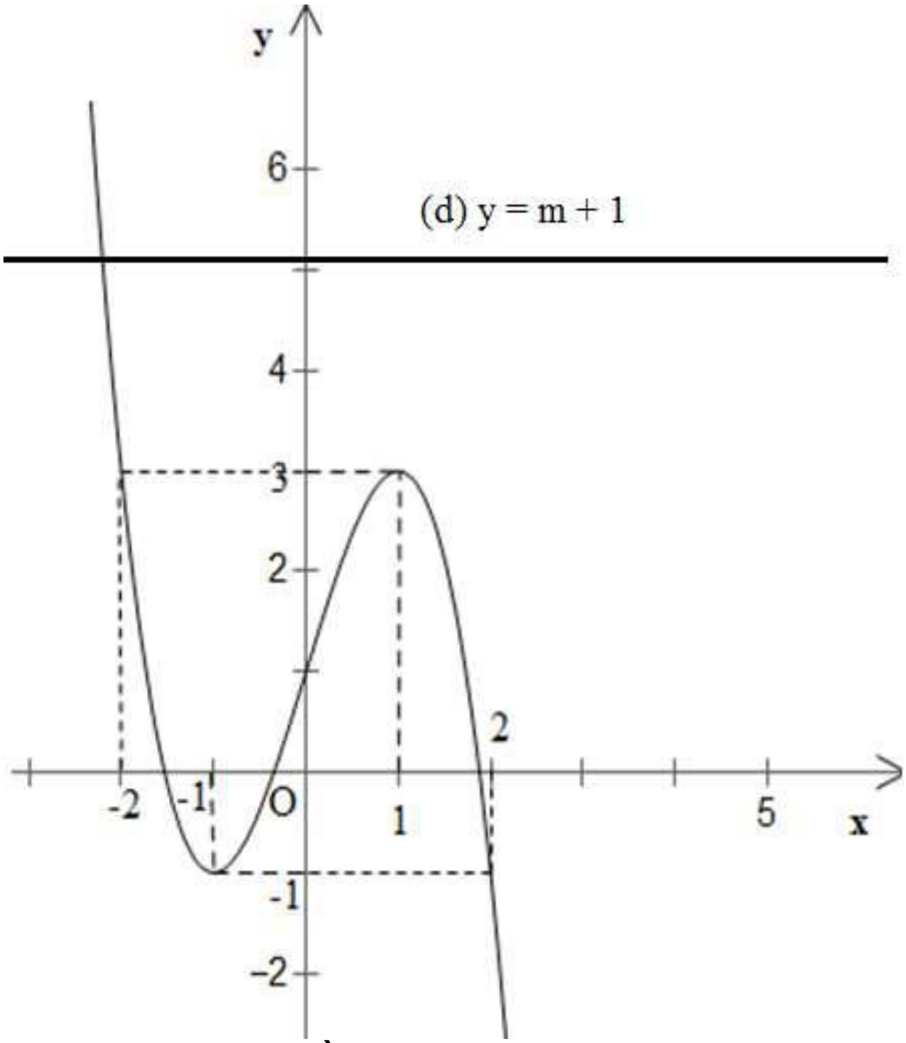
+ Đồ thị (C) đi qua điểm (-2; 3), (2;-1).



b) Ta có: $x^3 - 3x + m = 0$ (*) ⇔ $-x^3 + 3x = m$

⇔ $-x^3 + 3x + 1 = m + 1$

Số nghiệm của phương trình (*) chính bằng số giao điểm của đồ thị hàm số (C) với đường thẳng (d): $y = m + 1$.



Biện luận: Từ đồ thị ta có:

+ Nếu m + 1 < –1 ⇔ m < –2 thì (C) cắt (d) tại 1 điểm.

+ Nếu m + 1 = –1 ⇔ m = –2 thì (C) cắt (d) tại 2 điểm.

+ Nếu –1 < m + 1 < 3 ⇔ –2 < m < 2 thì (C) cắt (d) tại 3 điểm.

+ Nếu m + 1 = 3 ⇔ m = 2 thì (C) cắt (d) tại 2 điểm.

+ Nếu m + 1 > 3 ⇔ m > 2 thì (C) cắt (d) tại 1 điểm.

Từ đó suy ra số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m = 0$ phụ thuộc tham số m như sau:

+ Phương trình có 1 nghiệm nếu m < -2 hoặc m > 2.

+ Phương trình có 2 nghiệm nếu m = -2 hoặc m = 2.

+ Phương trình có 3 nghiệm nếu: -2 < m < 2.

Bài 6 : Cho hàm số

$$y = \frac{mx-1}{2x+m}$$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên khoảng xác định của nó.

b) Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua A(-1, √2).

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi m = 2.

Lời giải:

a) Ta có:

TXĐ: $D = \left(-\infty; -\frac{m}{2}\right) \cup \left(-\frac{m}{2}; +\infty\right)$

$$y' = \frac{m^2+1}{(2x+m)^2} > 0 \ \forall m \text{ và } \forall x \in D.$$

Vậy hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Ta có:

$$\lim_{x \to -\frac{m}{2}} y = +\infty$$

=> đồ thị có tiệm cận đứng là $x = -\frac{m}{2}$.

Điểm $A\left(-1; \sqrt{2}\right)$ thuộc đường $x = -\frac{m}{2}$ khi và chỉ khi:

$$-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy với m = 2 thì tiệm cận đứng của đồ thị đi qua A(-1, √2)

c) Với m = 2 ta được hàm số:

$$y = \frac{2x-1}{2x+2}$$

Xét hàm số trên ta có:

- TXĐ: D = R \ {-1}

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = \frac{6}{(2x+2)^2} > 0 \ \forall x \in D$$

=> Hàm số đồng biến trên D.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x \to -1^-} y = +\infty \,; \lim_{x \to -1^+} y = -\infty$$

=> đồ thị có tiệm cận đứng là x = -1.

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = 1$$

=> đồ thị có tiệm cận ngang là y = 1.

+ Bảng biến thiên:

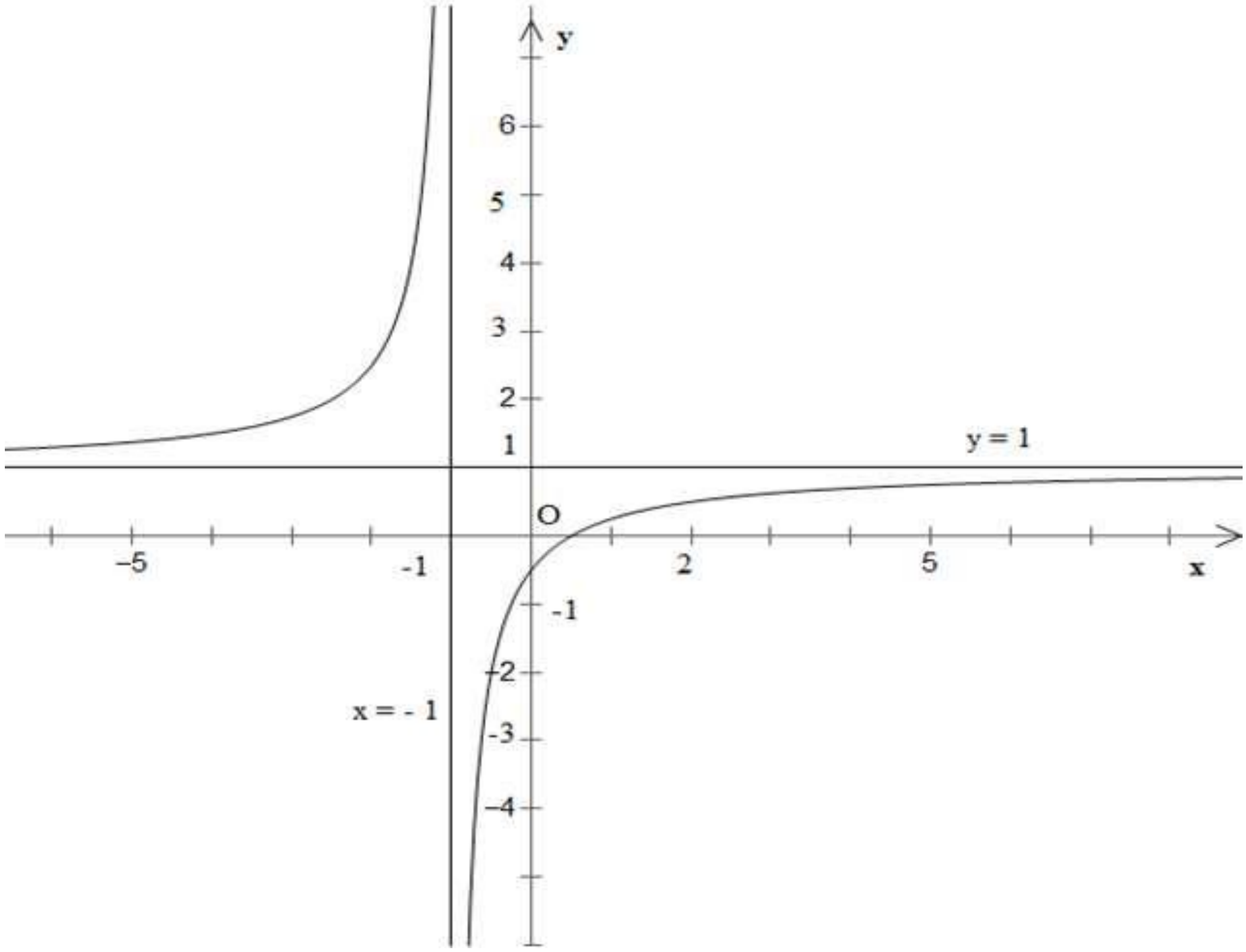
x	$-\infty$		-1			$+\infty$
y'		$+$	||		$+$	
y			$+\infty$ ||			1
		↗	||		↗	
	1		|| $-\infty$			

Hàm số không có cực trị.

- Đồ thị:

Một số điểm thuộc đồ thị:

$$\left(0;\frac{1}{2}\right);\left(\frac{1}{2};0\right).\left(1;\frac{1}{4}\right);\left(\frac{1}{2};0\right);(-3;\frac{7}{4})$$



Bài 7: Cho hàm số

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + m$$

a) Với giá trị nào của tham số m, đồ thị của hàm đi qua điểm (-1; 1) ?

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi m = 1.

c) Viết phương trình tiếp tuyến (C) tại điểm có tung độ bằng 7/4.

Lời giải:

a) Đồ thị hàm số qua điểm (-1; 1) khi và chỉ khi:

$$1 = \frac{1}{4}(-1)^4 + \frac{1}{2}(-1)^2 + m \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

b) Với m = 1, ta có:

$$y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 1$$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: y' = x^3 + x = x(x^2 + 1)

y' = 0 ⇔ x(x^2 + 1) ⇔ x = 0

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = +\infty$$

+ Bảng biến thiên:

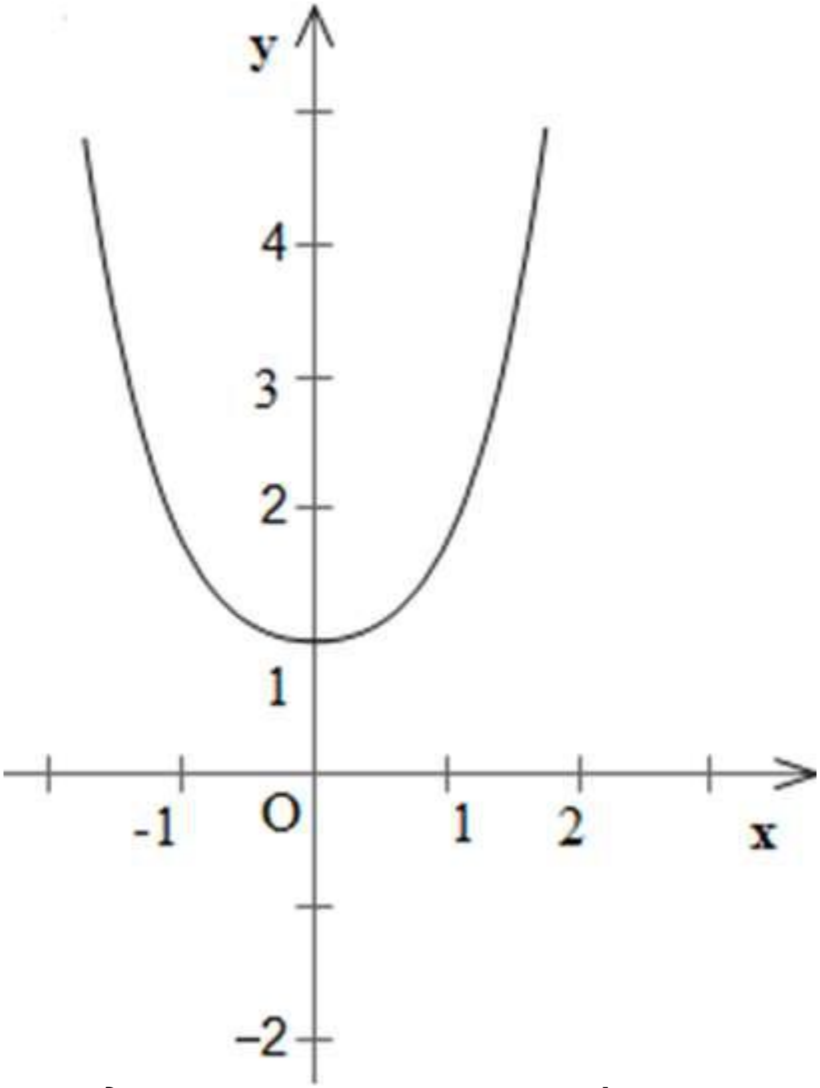
x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên (0; +∞) và nghịch biến trên (-∞; 0)

+ Cực trị:

Hàm số có điểm cực tiểu là (0; 1).

- Đồ thị:



c) Điểm thuộc (C) có tung độ bằng 7/4 nên hoành độ của điểm đó là nghiệm của phương trình:

$$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+1=\frac{7}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t-\frac{3}{4}=0\\ \text{Đặt } t=x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\ t=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\pm 1$$

=> tọa độ hai điểm có tung độ bằng $\frac{7}{4}$ là $(-1;\frac{7}{4})$ và $(1;\frac{7}{4})$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(-1;\frac{7}{4})$ là:

$$y=y'_{(-1)}.(x+1)+\frac{7}{4}\Leftrightarrow y=-2x-\frac{1}{4}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(1;\frac{7}{4})$ là:

$$y=y'_{(1)}.(x-1)+\frac{7}{4}\Leftrightarrow y=2x-\frac{1}{4}.$$

Bài 8 : Cho hàm số:

$$y = x^3 + (m + 3)x^2 + 1 - m \text{ (m là tham số)}$$

có đồ thị (C_m).

a) Xác định m để hàm số có điểm cực đại là x = -1.

b) Xác định m để đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại x = -2.

Lời giải:

a) Ta có: $y' = 3x^2 + 2(m + 3)x = x[3x + 2(m + 3)]$

$y' = 0 \Leftrightarrow x[3x + 2(m + 3)] = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = [-2(m + 3)]/3 = -2/3\ m - 2$

- Nếu $x_1 = x_2$ => -2/3 m - 2 = 0 => m = -3

Khi đó $y' = 3x^2 \geq 0$ hay hàm số luôn đồng biến trên R nên không có cực trị (loại).

Do đó để hàm số có cực trị thì m ≠ -3.

- Nếu $x_1 < x_2 \Leftrightarrow m = -3$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$-\frac{2}{3}m-2$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Loại vì dựa vào bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại là x = 0.

- Nếu $x_1 > x_2 \Leftrightarrow m < -3$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}m-2$		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại là x = -2/3 m - 2.

Để điểm cực đại là x = -1 thì:

$$-\frac{2}{3}m-2=-1 \Leftrightarrow m=\frac{-3}{2}$$

b) Đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại x = -2 suy ra:

$(-2)^3 + (m + 3)(-2)^2 + 1 - m = 0$ (*)

=> -8 + 4(m + 3) + 1 - m = 0

=> 3m + 5 = 0 => **m = -5/3**

(**Giải thích** *: Cắt trục hoành tại x = -2 nên tọa độ giao điểm là (-2; 0). Thay tọa độ giao điểm vào phương trình hàm số ta được (*).)

Bài 9 : Cho hàm số

$$y=\frac{(m+1)x-2m+1}{x-1}\ \text{(m là tham số)}$$

có đồ thị (G).

a) Xác định m để đồ thị (G) đi qua điểm (0; -1).

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với m tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.

Lời giải:

a) Đồ thị (G) đi qua điểm (0; -1) khi và chỉ khi:

$$\frac{(m+1).0-2m+1}{0-1}=-1\Leftrightarrow m=0$$

b) Với m = 0 ta được hàm số:

$$y=\frac{x+1}{x-1}$$

- TXĐ: D = R \ {1}

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D.$$

Hàm số nghịch biến trên D.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x\to 1^-} y=-\infty;\ \lim_{x\to -1^+} y=+\infty$$

Đồ thị có tiệm cận đứng là x = 1.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y=1$$

Đồ thị có tiệm cận ngang là y = 1.

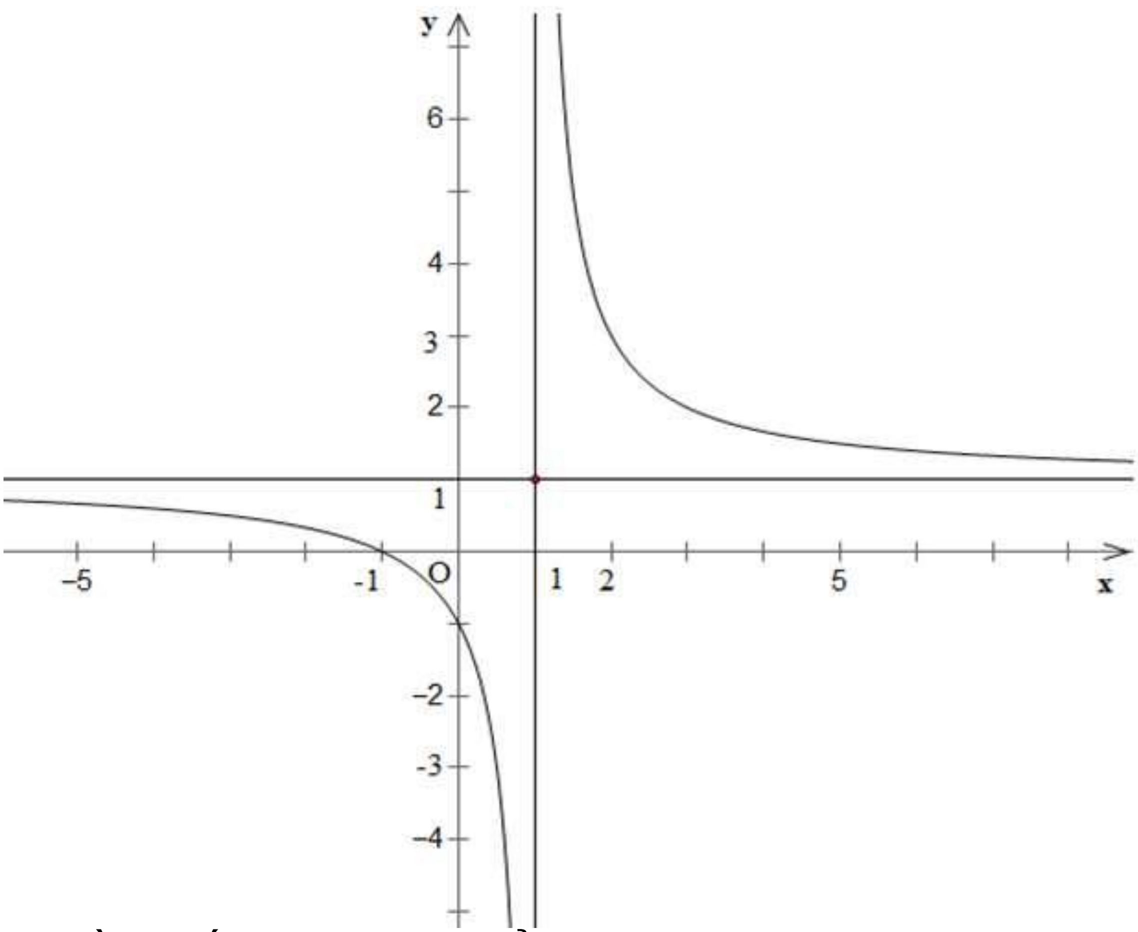
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	1 ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1

- Đồ thị:

+ Giao điểm với Ox: (-1; 0)

+ Giao điểm với Oy: (0; -1)



c) Đồ thị cắt trục tung tại điểm P(0;-1), khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm P(0; -1) là:

$y = y'(0).(x - 0) - 1 \Rightarrow y = -2x - 1$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2x - 1$