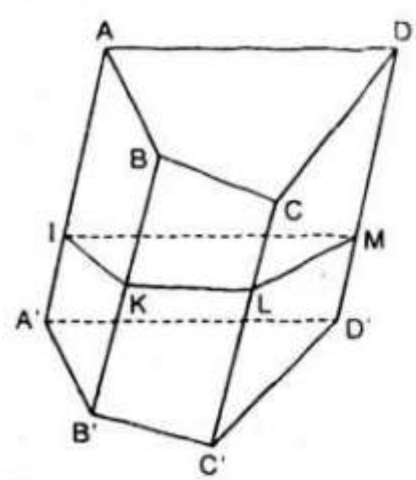
Bài 1 Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt taih I, K, L, M. Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm I, K, L, M và có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy chỉ ra các vectơ:

a) Cùng phương với $\overrightarrow{IA}$.

b) Cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$.

c) Ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.

Lời giải:



a) Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD'}, \overrightarrow{IA'}$.

b) Các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{MD}$.

c) Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD'}$ và $\overrightarrow{IA}$.

Bài 2 : Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$;

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$

Lời giải:

a) Ta có:

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'}$ (1)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (2)

Mặt khác: $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra đpcm.

b) Ta có :

$-\overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{DD'}$

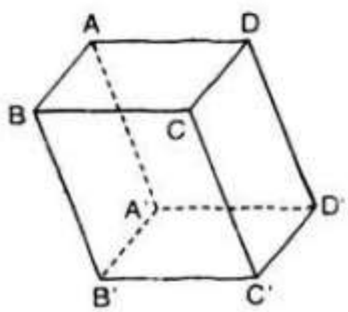
$-\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{D'B'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'}$

Ta có : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA'}$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{A''C'}$

Kết hợp với $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$ suy ra đpcm.



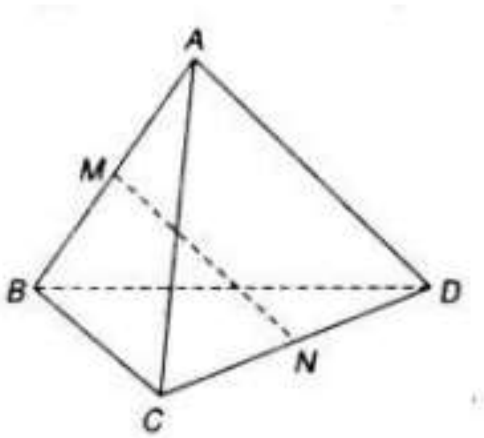
Bài 4 : Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của AB và CD.

Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$

Lời giải:



a) Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (1)

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế với vế, ta có:

$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN})$

M là trung điểm của AB nên

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

N là trung điểm của CD nên

$\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

Suy ra: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ (đpcm)

b) Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$

Và lí luận như câu a) ta có đpcm.

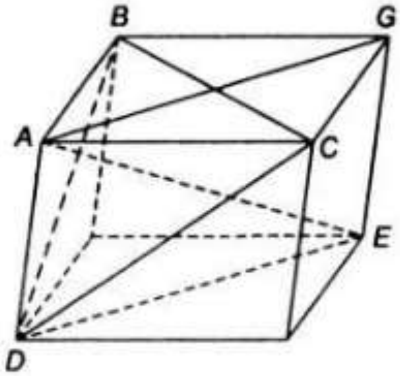
Chú ý : Có thể chứng minh : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

và kết hợp với câu a) để suy ra câu b)

Bài 5 (trang 92 SGK Hình học 11): Cho hình tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E, F sao cho :

a) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Lời giải:



a) Ta có $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

mà $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$

với G là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABGC vì $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$ với E là đỉnh thứ tư của hình bình hành AGED.

Do đó AE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD.

b) Ta có $\overrightarrow{AF} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DG}$.

Vậy F là đỉnh thứ tư của hình bình hành ADGF.

Bài 6 : Cho tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$

Lời giải:

- Theo quy tắc ba điểm, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC} \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$ (1)

Mà G là trọng tâm của tam giác ABC nên :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ (2)

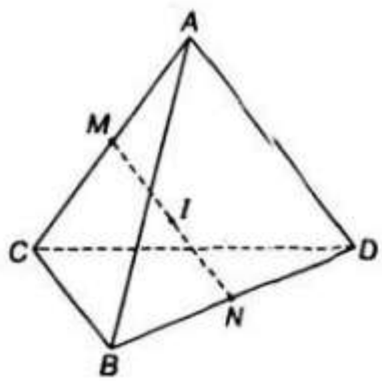
*(1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$ (đpcm)

Bài 7 : Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{PI}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$

Lời giải:



a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$

Ta có : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}$

$=2\overrightarrow{IM}+2\overrightarrow{IN}$ (tính chất trung điểm)

$=2(\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN})=\vec{0}$ (vì I là trung điểm MN)

b) $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PI}+\underbrace{(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID})}_{\vec{0}}=4\overrightarrow{PI}$

Bài 8 : Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có ...

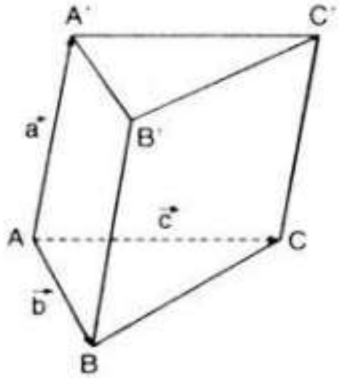
Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'

có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB'}=\vec{b}, \overrightarrow{AC'}=\vec{c}$. Hãy phân tích

(hay biểu thị) các vectơ $\overrightarrow{B'C}, \overrightarrow{BC'}$

qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Lời giải:



Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

* $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB'}$

$=\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'})=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA'}$

Vậy $\overrightarrow{B'C}=\vec{c}-\vec{b}-\vec{a}$

* $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}$

(Qui tắc hình bình hành ACC'A')

Vậy $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$

Bài 9 : Cho tam giác ABC. Lấy một điểm S ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho ...

Cho tam giác ABC. Lấy một điểm S ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$.

Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Lời giải:

Ta biểu diễn một trong ba vectơ

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{SC}$ theo hai vectơ còn lại,

chẳng hạn biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{SC}$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN}$ (1)

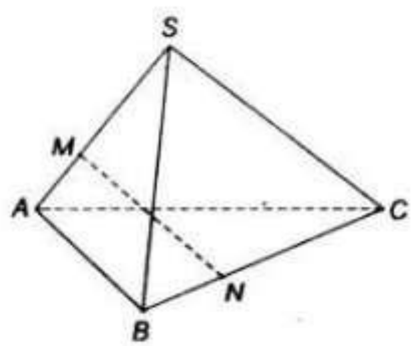
$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ (2)

Nhân hai vế của đẳng thức (2) với 2 :

$2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (3)

Cộng (1) và (3) vế với vế ta có:

$3\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN})$



Kết hợp giả thiết $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$ suy ra:

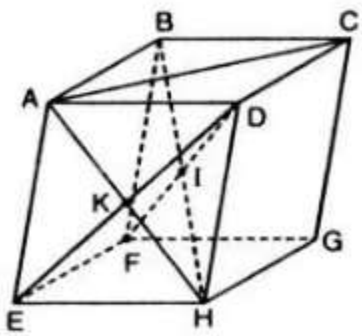
$3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Bài 10 (trang 92 SGK Hình học 11):

Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của DF và BH.

Chứng minh rằng ba vectơ $\overline{AC}$, $\overline{KI}$ và $\overline{FG}$ đồng phẳng.

Lời giải:



Ta có KI // EF // AB nên KI // mp (ABC),

FG // BC và AC $\subset$ mp (ABC).

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AC}$ có giá cùng song song với một mặt phẳng (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC). Vậy ba vectơ $\overrightarrow{KI}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.