Bài 1 :

a) Phát biểu định nghĩa nguyên hàm của hàm số f(x) trên một khoảng.

b) Nêu phương pháp tính nguyên hàm từng phần. Cho ví dụ minh họa.

Lời giải:

a) Cho hàm số f(x) xác định trên K (k là nửa khoảng hay đoạn của trục số). Hàm số F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm số f(x) trên K nếu F'(x)=f(x) với mọi x thuộc K.

Định lý: Nếu F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K thì:

- Với mỗi hằng số C, F(x) + C cũng là một nguyên hàm của hàm số trên f(x) trên K.

- G(x) cũng là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên K thì tồn tại một hằng số C sao cho G(x) = F (x) +C

b)

*Đổi biên số:

Nếu ∫f(u)du=F(u)+C va u(x) là hàm số có đạo hàm liên tục thì:

∫f(ux) u'(x)dx=F(u(x))+C

*Tính nguyên hàm từng phần:

Nếu hai hàm số u= u(x) và v = v(x) có đạo hàm liên tục trên K thì:

∫u(x) v'(x)dx=u(x)v(x)- ∫v(x) u'(x)dx

Hay ∫udv=uv- ∫vdv.

Ví dụ:

Tính $I = \int (2x+1)e^x dx$

Đặt $\begin{cases} u = 2x+1 \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2dx \\ v = e^x \end{cases}$

$$I = (2x+1)e^x - 2\int e^x dx$$

$$= (2x+1)e^x - 2e^x + C = (2x-1)e^x + C$$

Bài 2 :

a) Phát biểu định nghĩa tích phân của hàm số f(x) trên một đoạn.

b) Nêu các tính chất của tích phân. Cho ví dụ minh họa.

Lời giải:

a) Cho hàm số y= f(x) liên tục trên [a; b] , F(x) là một nguyên hàm của f(x) trên [a; b]. Hiệu số F(b) – F(a) được gọi là tích phân từ a đến b của hàm số f(x), kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$.

Ta có: $\int_a^b f(x)dx=F(x)_a^b=F(b)-F(a)$

Ta gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân, a là cận dưới, b là cận trên, f(x)dx biểu thức dưới dấu tích phân, f(x) là hàm số dưới dấu tích phân.

b) Các tính chất

1. $\int_a^a f(x)dx=0$

2. $\int_a^b f(x)dx=- \int_b^a f(x)dx$

3. $\int_b^a kf(x)dx=k. \int_b^a f(x)dx$ (k là hằng số)

4. $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]dx= \int_a^b f(x)dx\pm \int_a^b g(x)dx$

5. $\int_a^b f(x)dx= \int_a^c f(x)dx+ \int_a^b f(x)dx(a<c<b)$

Bài 3 : Tìm nguyên hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = (x-1)(1-2x)(1-3x)$

b) $f(x) = sin4xcos^2 2x$

c) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$

d) $f(x) = (e^x - 1)^3$

Lời giải:

a) Ta có: $f(x) = (x-1)(6x^2 - 5x + 1)$

$= 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$

Vậy $\int f(x)dx = \frac{3x^4}{2} - \frac{11}{3}x^3 + 3x^2 - C$

b) Ta có: $f(x) = sin4xcos^2 2x = 2sin2xcos^3 2x.$

Vậy $\int f(x)dx = \int 2sin2xcos^3 2xdx$

$= -\int \cos^3 2x(cos2x)'dx$

$= -\frac{1}{4}\cos^4 2x + C$

c) Ta có: $f(x) = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$

Vậy $f(x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C$

d) Ta có: $\int (e^x - 1)^3 dx = \int (e^{3x} - 3e^{2x} + 3e^x - 1)dx$

$= \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{3}{2}e^{2x} + 3e^x - x + C$

Bài 4 : Tính:

a) $\int (2-x)sin\, xdx$ b) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$ d) $\int \frac{1}{(sinx+cosx)^2}dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}dx$ f) $\int \frac{1}{(1+x)(2-x)}dx$

Lời giải:

a) Đặt $u = 2 - x; sinxdx = dv \Leftrightarrow du = -dx; v = -cosx$

$\int (2-x)sinxdx = (x-2)cosx - \int cosxdx$

$= (x-2)cosx - sinx + C$

b) Đặt $u = (x+1)^2; dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$=> du = 2(x+1)dx; v = 2\sqrt{x}$

$$\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} = 2(x+1)^2\sqrt{x} - 4\int (x+1)\sqrt{xdx}$$

$$= 2(x+1)^2\sqrt{x} - \frac{8}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

c) Ta có:

$$e^{3x} + 1 = (e^x)^3 + 1^3 = (e^x+1)(e^{2x} - e^x + 1)$$

Vậy $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int (e^{2x} - e^x + 1)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$

d) Ta có: $cosx + sinx = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Vậy $\int \frac{1}{(sinx+cosx)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos^2(x-\frac{\pi}{4})}dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2(x - \frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + C$$

e) Ta có: $\int \frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}dx = \int \left(\sqrt{1+x}\right) - \sqrt{x})dx$

$$= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

f) Ta có: $\frac{1}{3}[(1+x) + (2-x)] = 1$

Vậy $\int \frac{1}{(1+x)(2-x)}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{2-x}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}dx$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{3}\ln|2-x| = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+x}{2-x}\right| + C$$

Bài 5 Tính:

a) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

b) $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

c) $\int_0^2 x^2 e^{3x} dx$

đ) $\int_0^{\pi} \sqrt{1 + sin2x} dx$

Lời giải:

a) Đặt $1 + x = u => x = u - 1;$

$x = 0 => u = 1$

$x = 3 => u = 4$; $du = dx$

Vậy $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx = \int_1^4 \frac{u-1}{u^{\frac{1}{2}}} dx = \left(\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^4$

$= \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$

b) Ta có: $\int_1^{64} \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_1^{64} (x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{6}} dx = \left(\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}}\right)\Big|_1^{64}$

$= \left(24 + \frac{6.128}{7}\right) - \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{7}\right) = \frac{1872}{14} - \frac{33}{14} = \frac{1839}{14}$

c) Ta có: $\int_0^2 x^2e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int x^2 d(e^{3x}) = \frac{1}{3}x^2e^{3x}\Big|_0^2 - \frac{2}{3}\int_0^2 xe^{3x}dx$

$$= \frac{4}{3}e^6 - \frac{2}{9}\int_0^2 xd(e^{3x}) = \frac{4}{3}e^6 - \frac{2}{9}\left(xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x}\right)\Big|_0^2 = \frac{26e^6 - 2}{27}$$

d) Ta có: $\int_0^{\pi}\sqrt{1+sin2x}dx = \int_0^{\pi}\sqrt{(\sin^2 x + \cos^2 x + 2sinxcosx)}\,dx$

$$= \int_0^{\pi}|sinx + cosx|dx = \sqrt{2}\int_0^{\pi}|\cos(x - \frac{\pi}{4})|dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{3\frac{\pi}{4}}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx - \sqrt{2}\int_{3\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)dx$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} - \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\Big|_{3\frac{\pi}{4}}^{\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Bài 6 (trang 127 SGK Giải tích 12): Tính:

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xsin^2xdx$

b) $\int_{-1}^{1}|2^x - 2^{-x}|dx$

c) $\int_1^2 \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2}dx$

d) $\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x-3}dx$

e $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx + cosx)^2dx)$

g) $\int_0^{\pi}(x + sinx)^2dx$

Lời giải:

a) Ta có:

$$cos2xsin^2x = \frac{\cos 2x\,(1-\cos 2x)}{2} = \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos^2 2x}{2}$$
$$= \frac{\cos 2x}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\cos 4x}{4}$$

Vậy $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xsin^2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos4xdx - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$

$$= (\frac{1}{4}sin2x - \frac{1}{16}sin4x - \frac{1}{4}x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{8}$$

b) Ta có: $|2^x - 2^{-x}| = \begin{cases} 2^x - 2^{-x} \text{ với } x > 0 \\ 2^{-x} - 2^x \text{ với } x < 0 \end{cases}$

Vậy $\int_{-1}^{1} |2^x - 2^{-x}|dx = -\int_{-1}^{0}(2^x - 2^{-x})dx + \int_0^1 (2^x - 2^{-x})\,dx$

$$= \left(-\frac{1}{ln2}(2^x - 2^{-x}\right)\Big|_{-1}^{0} + (\frac{1}{ln2}\left(-\frac{1}{ln2}(2^x - 2^{-x}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{ln2}$$

c) Ta có: $\int_1^2 \frac{(x+1)(x+2)(x+3)}{x^2}dx = \int_1^2 \left(x + \frac{11}{x} + \frac{6}{x^2} + 6\right)dx$

$$\left(\frac{x^2}{2} + 11lnx - \frac{6}{x} + 6x\right)\Big|_1^2 = \frac{21}{2} + 11ln2$$

d) Ta có: $\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{4}[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}]$

Vậy $\int_0^2 \frac{1}{x^2-2x-3}dx = \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4}\int_0^2 \frac{1}{x+1}dx$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x+1}\right|\right|\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}ln3$$

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx + cosx)^2dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 + sin2x)dx$$
$$= (x - \frac{1}{2}cos2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} + 1$$

e) Ta có: $\int_0^{\pi}(x + sinx)^2dx = \int$ _0^$\pi(x^2 + 2xsinx + \sin^2 x)dx$

$$= (\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} - 2xcosx + 2sinx - \frac{1}{4}sin2x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} + 5\frac{\pi}{2}$$

Bài 7 : Xét hình phẳng D giới hạn bởi y=2√(1-x2) và y=2(1-x)

a) Tính diện tích hình D

b) Quay hình D xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay được tạo thành.

Lời giải:

a) Ta có: $2\sqrt{1-x^2} = 2(1-x) \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

Vậy diện tích hình D là:

$S = \int_0^1 [2\sqrt{1-x^2} - 2(1-x)]dx$

$\Leftrightarrow S = 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - 2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1$

$\Leftrightarrow S = 2\int_0^1 \sqrt{(1-x^2)}dx - 1$

Đặt $I = 2\int \sqrt{1-x^2}dx$, ta có: S = I -1

*Tính I:

Đặt $x = sint => dx = costdt$

Ta có: $x = 0 => t = 0$

$x = 1 => t = \frac{\pi}{2}$

Vậy $I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\, costdt$

$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2tdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos2t)dt = (t + \frac{1}{2}sin2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

Vậy $S = I - 1 => S = \frac{\pi}{2} - 1(đvdt)$

b) Ta có: $2\sqrt{1-x^2} = 2(1-x) \Leftrightarrow x = 0 \ v\ x = 1$

*Gọi V_1 là thể tích sinh ra bởi hình D_1 giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = 2\sqrt{1-x^2} \\ x = 0; x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ta có: $V_1 = \pi \int_0^1 \left(2\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx = 4\pi \int_0^1 (1-x^2)dx$

$$= 4\pi\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 8\frac{\pi}{3}$$

*Gọi V_2 là thể tích sinh ra bởi D_2 giới hạn bởi: $\begin{cases} y = 2(1-x) \\ x = 0; x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Ta có:

$V_2 = \pi \int_0^1 [2(1-x)]^2 dx$

$4x \int_0^1 (1 - x^2 - 2x)dx = 4\pi\left(x + \frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_0^1 = 4\frac{\pi}{3}$

Vậy thể tích hình tròn xoay cần tìm là :

$$V_D = V_1 - V_2 = 8\frac{\pi}{3} - 4\frac{\pi}{3} = 4\frac{\pi}{3}\ (đvdt)$$

Bài tập trắc nghiệm

Bài 1 : Tính ...

Tính $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$, kết quả là:

(A). $\frac{C}{\sqrt{1-x}}$ (B). $C\sqrt{1-x}$

(C). $-2\sqrt{1-x} + C$ (D). $\frac{2}{\sqrt{1-x}} + C$

Lời giải:

Chọn đáp án C.

Đặt $1 - x = u \Leftrightarrow du = -dx$

Vậy $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, = -\int u^{-\frac{1}{2}} du$

$= -2u^{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{1-x} + C$

Bài 2 : Tính

Tính $\int \frac{2^{\sqrt{x}} ln2}{\sqrt{x}} dx$, *kết quả sai là*:

(A). $2^{\sqrt{x}+1} + C$ (B). $2\left(2^{\sqrt{x}} - 1\right) + C$

(C).$2\left(2^{\sqrt{x}} + 1\right) + C$ (D). $2^{\sqrt{x}} + C$

Lời giải:

Ta có: $\int \frac{2^{\sqrt{x}} ln2}{\sqrt{x}} dx = \int 2^{\sqrt{x}+1} \frac{ln2}{2\sqrt{x}} dx$

$= 2\int \left(2^{\sqrt{x}} \ln 2\right) d\left(\sqrt{x}\right)$

$= 2\int d\left(2^{\sqrt{x}}\right) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

$= 2\left(2^{\sqrt{x}} + 1\right) + C - 2$

$= 2\left(2^{\sqrt{x}+1} - 1\right) + C + 2$

Bài 3 : Tích phân

Tích phân $\int_0^{\pi} \cos^2 x sinxdx$ bằng:

(A). $-\frac{2}{3}$ (B). $.\frac{2}{3}$

(C). $\frac{3}{2}$ (D). 0

Lời giải:

Chọn đáp án B.

Ta có: $\int_0^{\pi} \cos^2 x sinxdx = -\int_0^{\pi} \cos^2 x d(cosx)$

$= -\frac{1}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Bài 4 : Cho hai tích phân

Cho hai tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$ và $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$,

Hãy chỉ ra khẳng định đúng:

(A). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

(B). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

(C). $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

(D). Không so sánh được.

Lời giải:

Chọn đáp án C

Ta có:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1 - cos2x)dx = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}sin2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - cos2x)dx = (\frac{x}{2} + \frac{1}{4}sin2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Bài 5 : Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong:

a) $y = x^3$ và $y = x^5$ bằng:

(A). 0 (B).-4

(C). $\frac{1}{6}$ (D). 2

b) $y = x + sinx$ và $y = x$ $(0 < x \leq 2\pi)$ bằng:

(A).-4 (B). 4

(C).0 (D). 1

Lời giải:

a) Chọn đáp án C.

Ta có: $x^3 = x^5 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$

Vậy $S = \int_{-1}^{0}(x^5 - x^3)dx + \int_{0}^{1}(x^3 - x^5)dx$

$$= \left(\frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

b) Chọn đáp án B.

Ta có: $S = \int_{0}^{2\pi}|(x + sinx) - x|dx$

$$= \int_{0}^{\pi} sinxdx - \int_{\pi}^{2\pi} sinxdx$$

$$= -cosx|_{0}^{\pi} + cosx|_{\pi}^{2\pi} = 4$$

Bài 6 : Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường y=√x và y=x quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

(A). 0

(B). –π

(C). π

(D). π/6

Lời giải:

Chọn đáp án D.

Ta có: $x = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 0 \ v \ x = \pm 1$

$$V = \pi \int_{0}^{1}\left(\sqrt{x}\right)^2 dx - \pi \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$