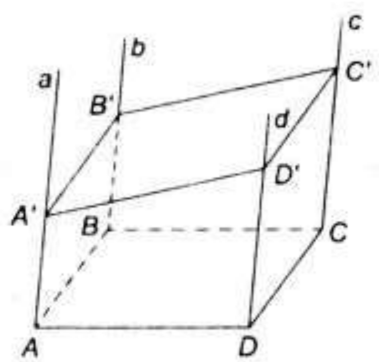
Bài 1 : Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α). Trên a, b và c lần lượt lấy ba điểm A’, B’ và C’ tùy ý.

a) Hãy xác định giao điểm D’ của đường thẳng d với mặt phẳng (A’B’C’).

b) Chứng minh A’B’C’D’ là hình bình hành.



Lời giải:

a) Xác định giao điểm D’ của d với mp(A’B’C’)

*Ta có $\begin{cases} AB//CD \\ BB'//CC' \end{cases}$

=>mp(ABB’A’) // mp(CDD’C’) mà mp(A’B’C’) cắt mp(ABB’A’), cắt mp(CDD’C’) theo giao tuyến C’D’ // A’B’.

Vậy mp(A’B’C’) cắt d tại D’ sao cho C’D’ // A’B’ (1)

b) Chứng minh A’B’C’D’ là hình bình hành

Chứng minh tương tự, ta có B’C’ // A’D’ (2)

*Từ (1) và (2)=>A’B’C’D’ là hình bình hành (đpcm).

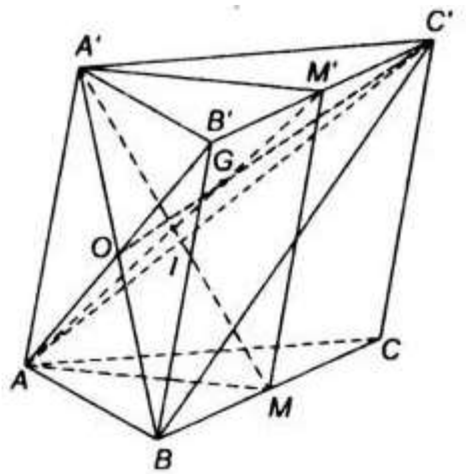
Bài 2 : Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A’B’C’. Gọi M và M’ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B’C’.

a) Chứng minh rằng AM song song với A’M’.

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (A’B’C’) với đường thẳng A’M.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB’C’) và (BA’C’).

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mp(AMA’). Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB’C’.



Lời giải:

a) Ta có MM', BB', AA' song song và bằng nhau nên AA'M'M là hình bình hành, từ đó ta có AM // A'M'.

b) Gọi I = A'M ∩ AM', ta có :

$$\begin{cases} I \in AM' \\ AM' \subset (AB'C') \end{cases} \Rightarrow I \in (AB'C')$$

Vậy I = A'M ∩ (AB'C')

c) Gọi O = AB' ∩ BA', ta có :

$$\begin{cases} O \in AB' \Rightarrow O \in (AB'C') \\ O \in BA' \Rightarrow O \in (BA'C') \end{cases}$$

=> O ∈(AB'C')∩(BA'C') nên giao tuyến d chính là OC'.

d) Trong mp(AB'C') : C'O ∩ AM' = G, ta có:

$$\begin{cases} G \in C'O \Rightarrow G \in d \\ G \in AM' \Rightarrow G \in (AMM') \end{cases} \Rightarrow G \in d \cap (AMM')$$

ΔAB'C' có hai trung tuyến C'O và AM' cắt nhau tại G nên G là trọng tâm của ΔAB'C'

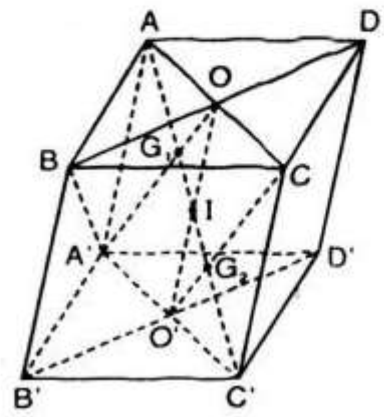
Bài 3 : Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 lần lượt của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Gọi O và I lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và ΔA'C'C. Xác định thiết diện của mặt phẳng (A'IO) với hình hộp đã cho.



Lời giải:

A'B // D'C và D'C ⊂ (B'D'C) => A'B // (B'D'C) (1)

BD // B'D' và B'D' ⊂ (B'D'C) => BD // (B'D'C) (2)

A'B ⊂ (BDA') và BD ⊂ (BDA') (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra : (BDA') // (B'D'C).

b) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC, BD của hình bình bình hành ABCD, ta có A'O ⊂ (A'ACC'). Trong mặt phẳng (A'ACC') hai đường thẳng A'O và AC' cắt nhau tại điểm G_1, G_1 ∈ A'O và A'O ⊂ (BDA')=> G_1 ∈ (BDA'),G_1 ∈ AC'

Vậy G_1 ∈ AC' ∩ (BDA')

Tứ giác ACC'A' là hình bình hành, giao điểm I của hai đường chéo A'C và AC' là trung điểm của mỗi đường.

Xét tam giác AA'C, các trung tuyến A'O và AI cắt nhau tại G_1. Vậy G_1 là trọng tâm của ΔAA'C cho ta $OG_1/OA' = 1/3$, A'O cũng là trung tuyến của ΔBDA' nên tỉ số $OG_1/OA' = 1/3$ chứng tỏ G1 là trọng tâm của tam giác BDA'.

Chứng minh tương tự đối với điểm G_2.

c) *Vì G_1 là trọng tâm của ΔAA'C nên $AG_1/AI = 2/3$.

Vì I là trung điểm của AC' nên AI = 1/2.AC'

Từ các kết quả này, ta có : AG_1 = 1/3.AC'

*Chứng minh tương tự ta có : $C'G_2$ = 1/3.AC'

Suy ra : $AG_1 = GG_2 = G_2C'$ = 1/3.AC'.

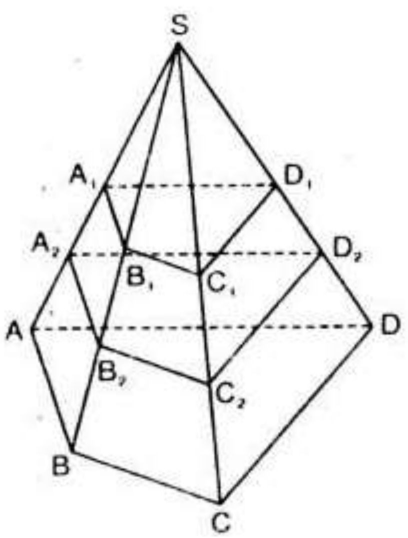
d) Thiết diện chính là hình bình hành AA'C'C.

Bài 4 : Cho hình chóp S. ABCD. Gọi A1 là trung điểm của cạnh SA và A2 là trung điểm của đoạn AA1. Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABCD) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1 . Mặt phẳng (β) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2. Chứng minh:

a) B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD.

b) $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C_2C$, $D1D_2 = D_2D$.

c) Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác ABCD.



Lời giải:

a) Chứng minh B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD

Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)//(ABCD)\\(SAB)\cap(\alpha)=A_1B_1\\(SAB)\cap(ABCD)=AB\end{array}\right\}\Rightarrow A_1B_1//AB$$

=>A_1B_1 là đường trung bình của tam giác SAB.

=> B_1 là trung điểm của SB (đpcm)

*Chứng minh tương tự ta cũng được:

• C_1 là trung điểm của SC.

• D_1 là trung điểm của SD.

b) Chứng minh $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C2C$, $D_1D_2 = D_2D$.

$$\left.\begin{array}{r}(\alpha)//(\beta)\text{ (vì cùng song song với mp(ABCD))}\\ (SAB)\cap(\alpha)=A_1B_1\\ (SAB)\cap(\beta)=A_2B_2\end{array}\right\}\Rightarrow A_1B_1 // A_2B_2$$

=>A_2B_2 là đường trung bình của hình thang A_1B_1BA

=> B_2 là trung điểm của B_1B

=> $B_1B_2 = B_2B$ (đpcm)

*Chứng minh tương tự ta cũng được:

- C_2 là trung điểm của C_1C_2 => $C_1C_2 = C_2C$
- D_2 là trung điểm của D_1D_2 => $D_1D_2 = D_2D$.

c) Các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác ABCD, đó là : $A_1B_1C_1D_1$.ABCD và $A_2B_2C_2D_2$.ABCD