Bài 1 : Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ), những mệnh đề nào sau đây đúng?

a) Nếu (α) ⊥ (β) và (α) // (γ) thì (β) ⊥ (γ).

b) Nếu (α) ⊥ (β) và (α) ⊥ (γ) thì (β) // (γ).

Lời giải:

a) Đúng, vì nếu gọi m là đường thẳng vuông góc với β và n là đường thẳng vuông góc với hai mặt phẳng song song α, γ thì góc (m, n) = (β, α) = (β, γ), mà β ⊥ α nên β ⊥ γ.

b) Sai, vì hai mặt phẳng (β), (γ) cùng vuông góc với mp(α) có thể song song hoặc cắt nhau.

Bài 2 : Cho hai mặt phẳng (α), (β) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho AB = 8cm. Gọi C là một điểm trên (α) và D là một điểm trên (β) sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến Δ và AC = 6cm, BD = 24cm. Tính độ dài đoạn CD.

Lời giải:

Nối AD, CD ta có:

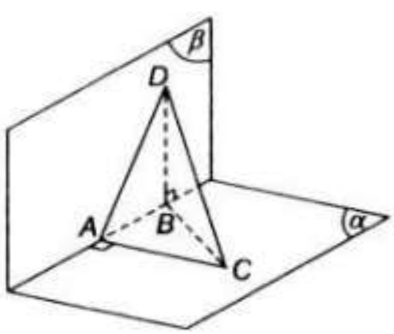
- $DB \perp (\Delta)$ nên ΔABD vuông cho ta:

$AD^2 = AB^2 + BD^2$

- $\left.\begin{array}{l}(\alpha) \perp (\beta) \text{theo giao tuyến } \Delta \\ AC \subset (\beta) \text{và } AC \perp \Delta\end{array}\right\}$

$\Rightarrow AC \perp (\beta)$

Vậy $AC \perp AD$ nên ΔACD vuông cho ta:



$CD^2 = AC^2 + AD^2$

$= AC^2 + (AB^2 + BD^2) = 6^2 + 8^2 + 24^2 = 676$

Vậy CD = 26 cm

Bài 3 : Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

a) (ABD) là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC)

b) HK // BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mp(P) đi qua A và vuông góc với DB.

Lời giải:

a) Chứng minh ABD là góc giữa hai

mặt phẳng (ABC) và (DBC)

Ta có:

- $(ABC) \cap (DBC) = BC$ (1)
- $AB \perp BC$ $(AB \subset (ABC))$ (2)
- $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (tam giác vuông ở B)} \\ BC \perp DA \text{ (vì } DA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp DB$ hay $DB \perp BC$ $(DB \subset (DBC))$ (3)

*(1), (2), (3) $\Rightarrow \widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) (đpcm)

Chú ý: $\widehat{ABD} < 90°$ vì tam giác ABD vuông ở A.

b) Chứng minh $(ABD) \perp (BCD)$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ABD)$

$\Rightarrow (BCD) \perp (ABD)$ (đpcm)

c) Chứng minh HK // BC

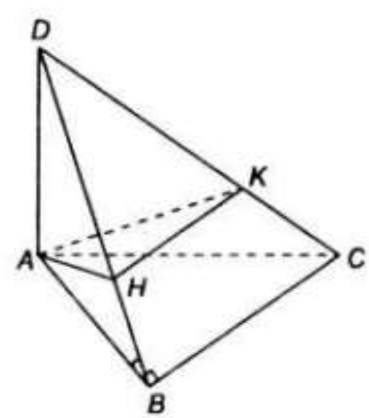
- mp(P) ≡ mp(AHK)

*Theo giả thiết, ta có $mp(AHK) \perp DB \Rightarrow HK \perp DB$ (4)

*Theo chứng minh ở câu a, ta có $BC \perp DB$ (5)

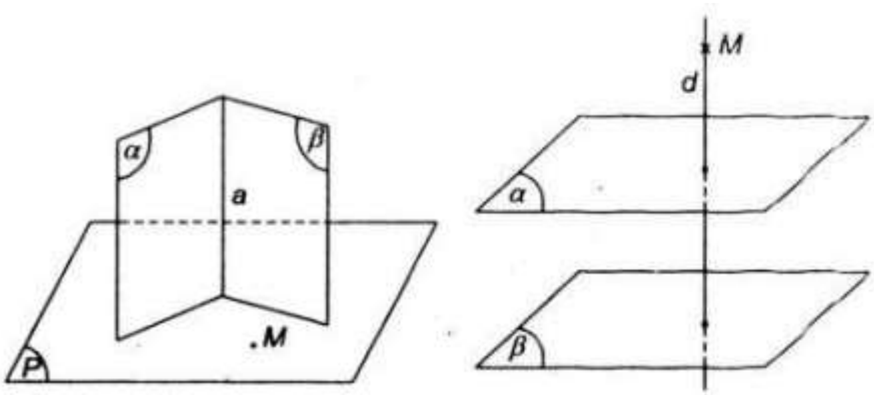
*HK, BC, DB cùng ở trong mp(DBC) (6)

- (4), (5), (6) $\Rightarrow$ HK // BC (đpcm)



Bài 4 : Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) // (β) thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào?

Lời giải:



Từ M kẻ MH ⊥ (α) và MK ⊥ (β)

Gọi Δ là giao tuyến của (α) và (β)

$$\left.\begin{matrix} MH \perp \alpha \\ \Delta \subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow MH \perp \Delta \qquad (1)$$

Tường tự ta có: MK ⊥ Δ (2)

Từ (1) và (2) suy ra Δ ⊥ (MHK)

$$\left.\begin{matrix} \Delta \perp (MHK) \\ \Delta \subset (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (MHK) \perp (\alpha)$$

Chứng minh tương tự, ta có (MHK) ⊥ (β)

Vậy (MHK) chính là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với (α) và (β).

Kết quả: Mặt phẳng (P) cần dựng (tức mp(MHK)) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với Δ.

Vì qua một điểm chỉ có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước nên (P) là duy nhất.

Nếu (α) // (β) thì qua M ta chỉ có thể vẽ một đường thẳng Δ vuông góc với (α) và (β). Bất kì mặt phẳng (P) nào chứa Δ cũng đều vuông góc với (α), (β). Trường hợp này, qua M có vô số mặt phẳng vuông góc với (α), (β).

Bài 5 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (AB'C'D) vuông góc với (BCD'A')

b) Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD)

Lời giải:

a) Chứng minh $(AB'C'D) \perp (BCD'A')$

- $ABB'A'$ là hình vuông

$\Rightarrow AB \perp A'B$ (1)

- $(AA'B'B) \perp BC$

$\Rightarrow AB' \perp BC$ (2)

*(1) và (2) $\Rightarrow AB' \perp (BCD'A')$

Mà $(AB'C'D) \supset AB'$,

nên $(AB'C'D) \perp (BCD'A')$ (đpcm).

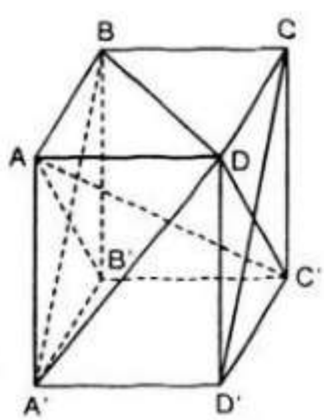
b) Chứng minh $AC' \perp (A'BD)$

Ta có:

$$\left.\begin{matrix} A'B \perp AB' (\text{hình vuông } AA'B'B) \\ A'B \perp AD (\text{vì } AD \perp (AA'B'B)) \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow A'B \perp (AB'C'D)$

$\Rightarrow A'B \perp AC'$ (3)



$$\left.\begin{matrix} BD \perp AC (\text{hình vuông } ABCD) \\ BD \perp AA' (AA' \perp (ABCD)) \end{matrix}\right\}$$

$\Rightarrow BD \perp (ACC'A')$

$\Rightarrow BD \perp AC'$ (4)

(3) và (4) $\Rightarrow AC' \perp (A'BD)$ (đpcm)

Bài 6 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a và có SA = SB = SC = a. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b) Tam giác SBD là tam giác vuông.

Lời giải:

a) Chứng minh (ABCD) ⊥ (SBD)

$$\begin{cases} \text{Gọi } O = AC \cap BD. \text{ Ta có:} \\ SO \perp AC \text{ (SO là trung tuyến tam giác cân ở SAC} \\ BD \perp AC \text{ (đường chéo hình thoi)} \\ SO, BD \text{ cắt nhau trong (SBD)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \Rightarrow AC \perp (SBD) \\ \text{mà } AC \subset (ABCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$$

b) Chứng minh ΔSBD vuông:

Đặt $AO = x$

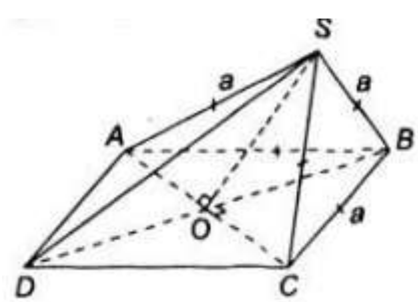
- ΔAOB vuông tại O nên:

$OB^2 = AB^2 - AO^2 = a^2 - x^2$.

- ΔSOA vuông tại O nên:

$SO^2 = SA^2 - AO^2 = a^2 - x^2$.

Vậy $OD = OB = OS = a^2 - x^2$.



ΔSBD có trung tuyến SO= $\frac{1}{2}$BD nên:

ΔSBD tam giác vuông tại S.

Bài 7 : Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'. Có AB = a, BC= b, CC'= c.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (ADC'B') vuông góc với mặt phẳng (ABB'A').

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b và c.

Lời giải:

a)Ta có: BC' ⊥ (BB'C'C)

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} B'C' \perp BB' \\ B'C' \perp A'B' \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'C' \perp (ABB'A')$$

mà B'C' ⊂ (ADC'B')

Suy ra (ABB'A') ⊥ (ADC'B')

b) B'C' ⊥ (ABB'A') ⇒ B'C' ⊥ AB'

● Trong tam giác vuông AB'C', ta có :

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

● Trong tam giác AA'B' ta lại có :

$AB^2 = AA'^2 + A'B^2$

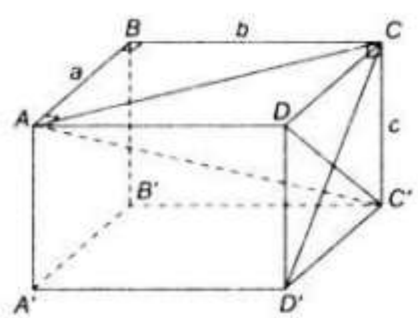
Suy ra $AC^2 = AA'^2 + A'B^2 + B'C^2$

Suy ra $AC^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

*Chú ý : Có thể tính như sau

Ta có :

$$\overrightarrow{AC''} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}^2 = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C})^2$$



$$\Rightarrow \begin{matrix} \overrightarrow{AC'}^2 = \overrightarrow{AA'}^2 + \overrightarrow{A'B'}^2 + \overrightarrow{B'C'}^2 \\ + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B'} + 2\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'} + 2\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{B'C'} \end{matrix}$$

Vì AA' ⊥ A'B' ⇒ $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{A'B'} = 0$

A'B' ⊥ B'C' ⇒ $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{B'C'} = 0$

AA' ⊥ B'C' ⇒ $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{B'C'} = 0$.

Bài 8 : Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a.

Lời giải:

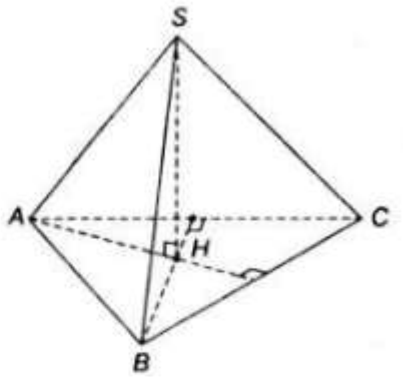
*Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có :

a = b = c nên :

đường chéo $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$

Bài 9 : Cho hình hộp tam giác đều S.ABC có SH là đường cao. Chứng minh SA vuông góc với BC và SB vuông góc với AC.

Lời giải:



Hình chóp tam giác đều S.ABC có đáy là tam giác đều ABC và chân đường cao trùng với tâm của đáy. H là tâm của tam giác đều ABC

Ta có: AH ⊥ BC

Mà AH là hình chiếu của SA trên (ABC)

⇒ BC ⊥SA.

Tương tự AC ⊥ BH.

BH là hình chiếu của SB trên (ABC)

⇒ AC ⊥ SB.

Bài 10 (trang 114 SGK Hình học 11): Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

a) Tính độ dài đoạn SO.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

c) Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Lời giải:

a)Theo giả thiết, S.ABCD là hình chóp đều nên

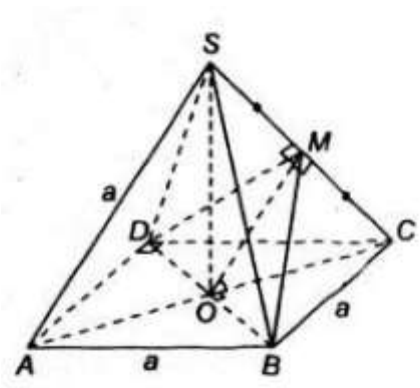
$SO \perp (ABCD)$

Đáy ABCD là hình vuông cạnh a,

đường chéo $AC = a\sqrt{2}$; $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Từ tam giác vuông SOA ta có:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 \Rightarrow SO^2 = a^2 - \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



$$\Rightarrow SO^2 = \frac{2a^2}{4} \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

b) $SO \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} SO \perp DB \\ AC \perp DB \end{matrix}\right\} \Rightarrow DB \perp (SAC)$$

mà $BD \subset (MBD)$ nên $(SAC) \perp (MBD)$

c) Ta có : $SO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $OC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow SO = OC$

$\Rightarrow$ Tam giác SOC là vuông cân đỉnh O,

OM là trung tuyến ứng với cạnh huyền,

cho ta : $OM = \dfrac{SC}{2} \Rightarrow OC = \dfrac{a}{2}$

Hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) giao nhau

theo giao tuyến BD vì $BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow OM \perp BD$ và $OC \perp BD$.

Suy ra $\widehat{MOC}$ là :

góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Từ đây dễ thấy $\widehat{MOC} = 45°$ vì tam giác SOC vuông cân

$\Rightarrow$ góc giữa hai mặt phẳng (NBD) và (ABCD) là 45°.