Bài 1 : Giải phương trình: sin2x – sin x = 0

Lời giải:

$\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

Bài 2 : Giải các phương trình sau:

a. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

b. $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

Lời giải:

a. $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ (1)

đặt t = cos x, điều kiện $-1 \le t \le 1$

(1) $2t^2 - 3t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \text{(thỏa điều kiện)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

b. $2\sin 2x + \sqrt{2}\sin 4x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x + \sqrt{2}.2\sin 2x.\cos 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x(1 + \sqrt{2}.\cos 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ \cos 2x = \cos\dfrac{3\pi}{4} \end{array}\right. \quad \left(\text{Vì}\cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ 2x = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{3\pi}{8} + k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z$$

Bài 3 : Giải các phương trình sau:

a.$\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$

b.$8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$

c.$2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$

d. $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$

Lời giải:

a. $\sin^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$

với $\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x}{2} + 2\cos\frac{x}{2} - 3 = 0$$

Đặt $\cos\frac{x}{2} = t$ với điều kiện $-1 \le t \le 1$, ta có:

$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t_1 = -3$ (loại), $t_2 = 1$ (nhận)

Với $t_2 = 1$ ta có:

$$\cos\frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = k2\pi \Leftrightarrow x = k4\pi\ (k \in Z)$$

b.$8\cos^2 x + 2\sin x - 7 = 0$ (1)

vì $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ nên (1)<=>$8(1-\sin^2 x) + 2\sin x - 7 = 0$

<=> $8\sin^2 x - 2\sin x - 1 = 0$

Đặt $t = \sin x$ với điều kiện $-1 \le t \le 1$, ta có:

$8t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2}$ (nhận), $t_2 = -\frac{1}{4}$ (nhận)

*Với $t_1 = \frac{1}{2}$ ta có:

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. k \in Z$$

*Với $t_2 = -\frac{1}{4}$ ta có:

$$\mathrm{Sin}x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{4}\right) + k2\pi \end{array}\right. k \in Z$$

c. $2\tan^2 x + 3\tan x + 1 = 0$ (3)

Đặt t = tanx, $t \in R$, ta có:

$$(3) \Leftrightarrow 2t^2 + 3t + 1 = 0 \Rightarrow t_1 = -1,\ t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \tan x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\frac{1}{2}\right) + k\pi \end{array}\right. k \in Z$$

d. $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \tan^2 x + \tan x - 2 = 0$ (với $\tan x \neq 0$)

Đặt t = tanx, t ∈ R, ta có:

$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t_1 = -2,\ t_2 = 1$

Ta có: $\left[\begin{array}{l} t_1 = -2 \\ t_2 = 1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -2 \\ \tan x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arctan(-2) + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z$$

Bài 4 : Giải các phương trình sau:

a. $2\sin^2 x + \sin x.\cos x - 3\cos^2 x = 0$

b. $3\sin^2 x - 4\sin x.\cos x + 5\cos^2 x = 2$

c. $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = 1/2$

d. $2\cos^2 x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2 x = -4$

Lời giải:

a. $2\sin^2 x + \sin x.\cos x - 3\cos^2 x = 0$ (1)

nhận xét: nếu cosx = 0 thì $x = \pi/2 + k\pi$ không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy chia 2 vế cho $\cos^2 x$ ($\cos^2 x \neq 0$)

Khi đó (1) <=> $2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0$ (2)

Đặt t = tanx, t ∈ R. Ta có:

(2) <=> $2t^2 + t - 3 = 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right) + k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z$$

b.3$\sin^2 x$ – 4sinx.cosx + 5$\cos^2 x$ = 2

<=> 3$\sin^2 x$ – 4sinx.cosx + 5$\cos^2 x$ = 2($\sin^2 x$ + $\cos^2 x$)

<=>$\sin^2 x$ – 4sinx.cosx + 3 $\cos^2 x$ = 0 (1)

*Nhận xét: cosx = 0<=>x = π/2 + kπ không là nghiệm của phương trình (1).

Chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ($\cos^2 x \neq 0$)

(1) <=> $\tan^2 x$ – 4tanx + 3 = 0 (2)

Đặt t = tan x, t ∈ R, ta có:

(2) <=> t^2 – 4t + 3 = 0

$$\text{c) } \sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x.\cos x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x.\cos x - \frac{5}{2}\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 4\sin x.\cos x - 5\cos^2 x = 0 \qquad (1)$$

*Nhận xét: cosx = 0<=>x = π/2 + kπ không là nghiệm của phương trình (1). Chia 2 vế của phương trình cho cos2x (cos2x ≠ 0). Ta có:

(1)<=>$\tan^2 x$ + 4tanx – 5 = 0 (2)

Đặt t = tan x, khi đó:

(2)<=>t^2 + 4t – 5 = 0

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-5) + k\pi \end{array}\right. \quad k \in Z$$

d) $2\cos^2x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2x = -4$

$\Leftrightarrow 2\cos^2x - 3\sqrt{3}\sin 2x - 4\sin^2x = -4(\sin^2x + \cos^2x)$

$\Leftrightarrow 6\cos^2x - 6\sqrt{3}\sin x.\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x - \sqrt{3}\sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

Bài 5 : Giải các phương trình sau:

a. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

b. $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$

c. $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

d. $5\cos 2x + 12\sin 2x - 13 = 0$

Lời giải:

a. $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ (1)

chia 2 vế của (1) cho 2 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{3}.\cos x - \sin\frac{\pi}{3}.\sin x = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\dfrac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

b. $3\sin 3x - 4\cos 3x = 5$ (1)

Chia 2 vế của (1) cho 5 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin 3x - \frac{4}{5}\cos 3x = 1 \quad (2)$$

Đặt $\frac{3}{5} = \cos\alpha$; $\frac{4}{5} = \sin\alpha$, khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \cos\alpha.\sin 3x - \sin\alpha.\cos 3x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(3x - \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 3x - \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in Z)$$

c. $2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x + 2\cos x = \sqrt{2} \quad (1)$$

Chia 2 vế của (1) cho $2\sqrt{2}$ ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}.\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}.\sin x + \sin\frac{\pi}{4}.\cos x = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. (k \in Z)$$

d. 5cos2x+12sin2x – 13 = 0

<=>5cos2x + 12 sin2x = 13 (1)

Chia cả 2 vế của phương trình (1) cho 13 ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5}{13}\cos 2x + \frac{12}{13}\sin 2x = 1 \qquad (2)$$

Đặt $\frac{5}{13} = \sin\alpha; \frac{12}{13} = \cos\alpha$

$$(2) \Leftrightarrow \sin\alpha.\cos 2x + \cos\alpha.\sin 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow 2x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$$

Bài 6 : Giải các phương trình sau:

a. tan(2x + 1).tan(3x – 1) = 1

b. tanx + tan (x+π/4) = 1

Lời giải:

a. tan(2x + 1).tan(3x – 1) = 1

$$\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = \frac{1}{\tan(3x - 1)} = \cot(3x - 1)$$

(Vì $\tan(3x - 1).\cot(3x - 1) = 1$)

$$\Leftrightarrow \tan(2x + 1) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = \frac{\pi}{2} - 3x + 1 + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \ (k \in Z)$$

$$b.\tan x+\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \tan x+\frac{\tan x+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan x.\tan\frac{\pi}{4}}=1$$

$$\Leftrightarrow \tan x+\frac{\tan x+1}{1-\tan x}=1$$

(điều kiện: $\tan x\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \frac{\pi}{4}+k\pi$)

<=> tanx(1 - tanx) + tanx + 1 = 1 - tanx

<=> tanx - tan^{2}x + 2tanx = 0

<=> tan^{2}x - 3tanx = 0

<=> tanx(tanx - 3) = 0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\arctan 3+k\pi\end{array}\right.(k\in Z)$$

-