Bài 1 : Phát biểu các điều kiện đồng biến và nghịch biến của hàm số. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số

$$y = -x^3 + 2x^2 - x - 7;$$

$$y = \frac{x-5}{1-x}$$

Lời giải:

- Điều kiện đồng biến, nghịch biến của hàm số:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên K, hàm số f(x):

+ Đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

+ Nghịch biến (giảm) trên K $\forall x_1, x_2 \in K$: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- Xét hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x - 7$, ta có:

D = R

$y' = -3x^2 + 4x - 1$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$; $x = 1/3$

$y' > 0$ với $x \in (1/3; 1)$ và $y' < 0$ với $x \in (-\infty; 1/3) \cup (1; +\infty)$

Vậy hàm số đồng biến trên (1/3; 1) và nghịch biến trên $(-\infty; 1/3) \cup (1; +\infty)$.

Lưu ý: Bạn nên kẻ bảng biến thiên để thấy sự đơn điệu rõ ràng hơn.

- Xét hàm số

$$y = \frac{x-5}{1-x}$$

Ta có: D = R \ {1}

$$y' = \frac{-4}{(1-x)^2} < 0 \ \forall x \in D$$

=> Hàm số luôn nghịch biến trên từng khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +-\infty)$

Bài 2 : Nêu cách tìm cực đại, cực tiểu của hàm số nhờ đạo hàm. Tìm các cực trị của hàm số:

$$y = x^4 - 2x^2 + 2$$

Lời giải:

- Cách tìm cực đại, cực tiểu của hàm số nhờ đạo hàm:

Quy tắc 1:

1. Tìm tập xác định.

2. Tính f'(x). Tìm các điểm tại đó f'(x) bằng 0 hoặc f'(x) không xác định.

3. Lập bảng biến thiên.

4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

Quy tắc 2:

1. Tìm tập xác định.

2. Tính f'(x). Giải phương trình f'(x) = 0 và kí hiệu x_i (i = 1, 2, 3, ...) là các nghiệm của nó.

3. Tính f''(x) và f''(x_i)

4. Nếu f''(x_i) > 0 thì x_i là điểm cực tiểu.

Nếu f''(x_i) < 0 thì x_i là điểm cực đại.

- Xét hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$, ta có:

$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm 1$

$y'' = 12x^2 - 4$

Dựa vào Quy tắc 2, ta có:

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow x = 0$ là điểm cực đại.

$y''(-1) = y''(1) = 8 > 0 \Rightarrow x = \pm 1$ là hai điểm cực tiểu.

Bài 3 : Nêu cách tìm ra tiệm cận ngang và tiệm cận dứng của đồ thị hàm số. Áp dụng để tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số:

$$y = \frac{2x+3}{2-x}$$

Lời giải:

- Cách tìm tiệm cận ngang:

Đường thẳng $y = y_o$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số y = f(x) nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = y_o, \lim_{x \to -\infty} f(x) = y_o$$

- Cách tìm tiệm cận đứng:

Đường thẳng $x = x_o$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số y = f(x) nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to x_o^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to x_o^-} f(x) = +\infty$$

- Xét hàm số

$$y = \frac{2x+3}{2-x}:$$

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \to x_o^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_o^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \to x_o^-} f(x) = +\infty$$

$$y = \frac{2x+3}{2-x}$$

Ta có:

$$\lim_{x \to 2^-} y = +\infty, \lim_{x \to 2^+} y = -\infty$$

=> Đồ thị có tiệm cận đứng là x = 2.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}-1} = -2$$

=> Đồ thị có tiệm cận ngang là y = -2.

Bài 4 Nhắc lại sơ đồ khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Lời giải:

Hàm số y = f(x)

Các bước khảo sát hàm số:

1. Tìm tập xác định của hàm số

2. Sự biến thiên

- Xét chiều biến thiên:

  + Tính đạo hàm y'

  + Tìm các điểm tại đó y' bằng 0 hoặc không xác định

  + Xét dấu của đạo hàm y' và suy ra chiều biến thiên của hàm số.

- Tìm cực trị

- Tìm các giới hạn tại vô cực, các giới hạn vô cực và tìm tiệm cận (nếu có)

- Lập bảng biến thiên.

3. Vẽ đồ thị của hàm số

Dựa vào bảng biến thiên và các yếu tố xác định ở trên để vẽ đồ thị.

Bài 5 : Cho hàm số y = 2x2 + 2mx + m - 1 có đồ thị là (Cm), m là tham số.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi m = -1

b) Xác định m để hàm số:

  i) Đồng biến trên khoảng (-1; +∞)

  ii) Có cực trị trên khoảng (-1; +∞)

c) Chứng minh rằng (C_m) luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt với mọi m.

Lời giải:

a) Với m = -1 ta được hàm số: $y = 2x^2 + 2x$

- TXĐ: D = R, hàm số không có tiệm cận.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: y' = 4x + 2

y' = 0 => x = -1/2

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trên (-∞; -1/2), đồng biến trên (-1/2; +∞).

+ Cực trị: Hàm số có điểm cực tiểu là (-1/2; 3/2)

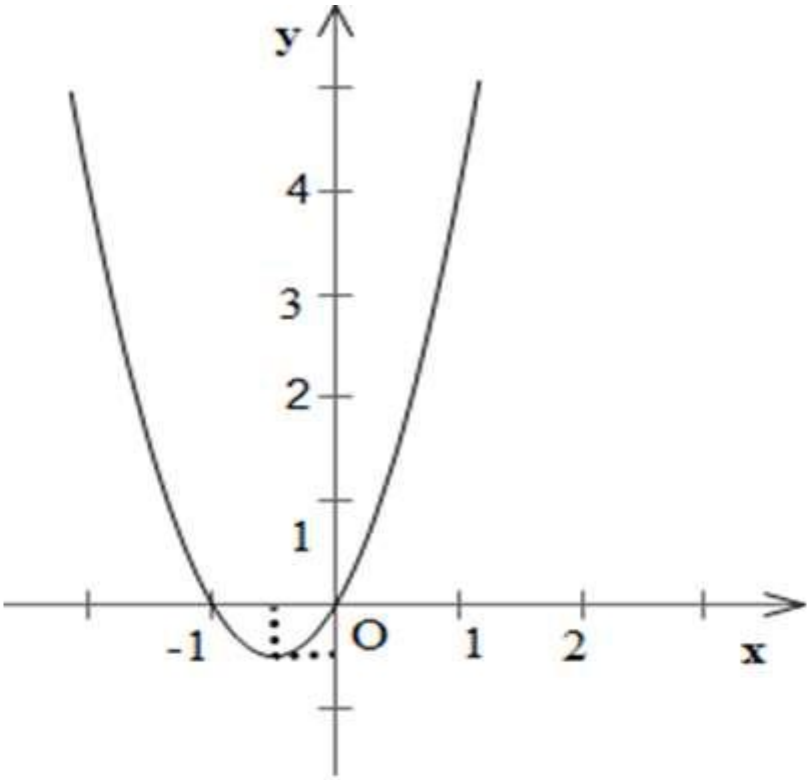
- Đồ thị:

Ta có: $2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x + 1) = 0$

=> x = 0; x = -1

+ Giao với Ox: (0; 0); (-1; 0)

+ Giao với Oy: (0; 0)



b) Xét hàm số $y = 2x^2 + 2mx + m - 1$

$y' = 4x + 2m = 2(2x + m)$

$y' = 0 \Rightarrow x = -m/2$

Ta có bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		$-\frac{m}{2}$		$+\infty$
y'		-	0	+	

=> hàm số có cực trị tại $x = -m/2$

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow -\frac{m}{2} \le -1 \Leftrightarrow m \ge 2.$$

- Hàm số có cực trị trên khoảng $(-1; +\infty)$ thì:

$$-\frac{m}{2} > -1 \Leftrightarrow m < 2.$$

c) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) và trục Ox là:

$2x^2 + 2mx + m - 1 = 0$ (1)

$\Delta' = m^2 - 2(m - 1) = m^2 - 2m + 2$

$= (m + 1)^2 + 1 > 0 \ \forall \ m \in R$

=> Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là đồ thị luôn cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt với mọi m (đpcm).

Bài 6 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$$

b) Giải phương trình f'(x - 1) > 0.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0, biết rằng $f'(x_0) = -6$.

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 2$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 3$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	29	↘	$-\infty$

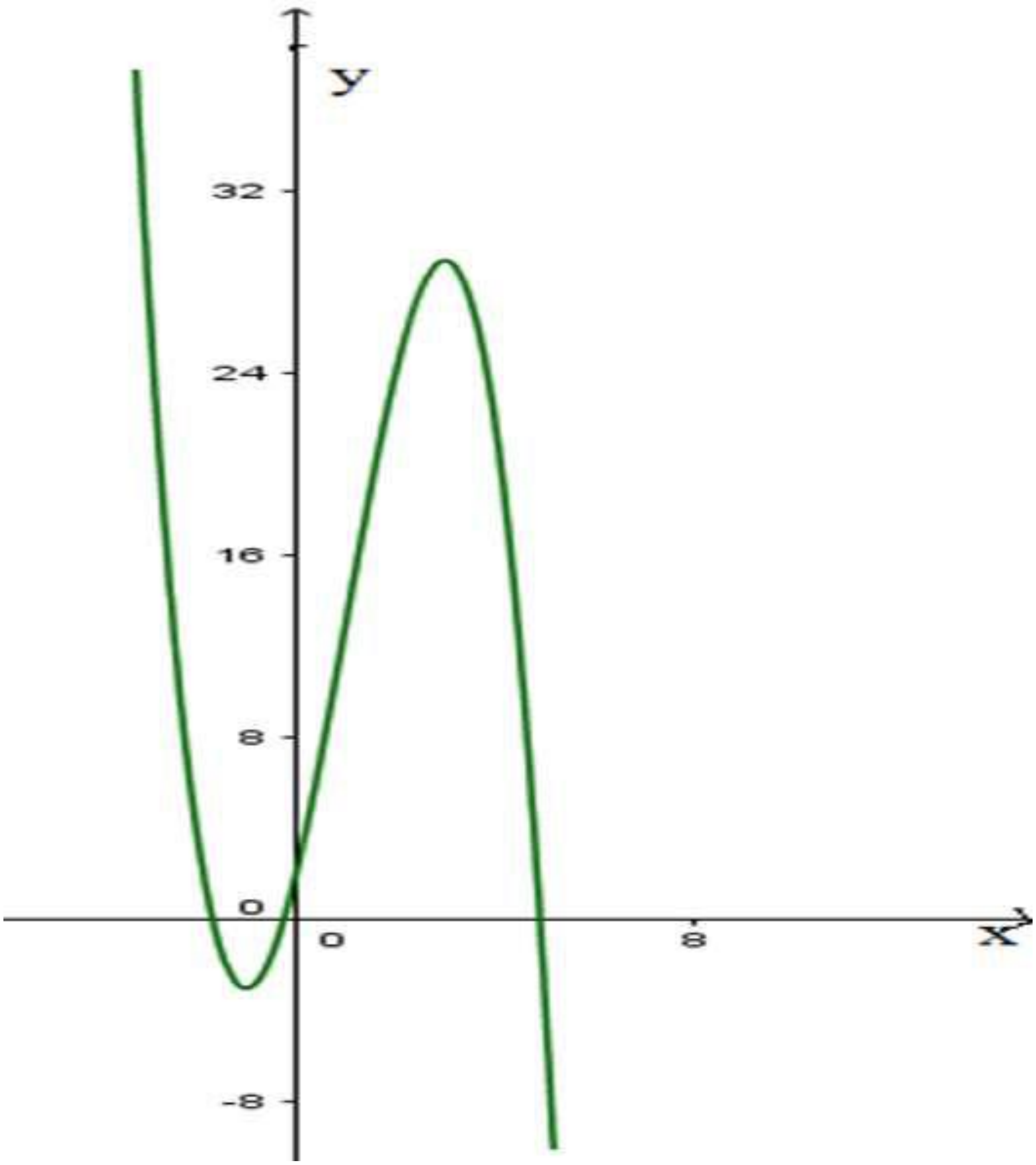
Hàm số đồng biến trên (-1; 3) và nghịch biến trên (-∞; -1) và (3; +∞).

+ Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại (3; 29);

Hàm số đạt cực tiểu tại (-1; -3);

- Đồ thị:



b) Ta có: f'(x - 1) > 0

⇔ $-3(x - 1)^2 + 6(x - 1) + 9 > 0$

⇔ $-3(x^2 - 2x + 1) + 6x - 6 + 9 > 0$

⇔ $-3x^2 + 6x - 3 + 6x - 6 + 9 > 0$

⇔ $-3x^2 + 12x > 0$ ⇔ $-x^2 + 4x > 0$

⇔ $x(4 - x) > 0$ ⇔ $0 < x < 4$

c) Ta có: $f''(x) = -6x + 6$

Theo bài: $f''(x_o) = -6 \Rightarrow -6x_o + 6 = -6 \Rightarrow x_o = 2$

Vậy phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $x_o = 2$ là:

$y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$y = (-3.2^2 + 6.2 + 9)(x - 2) + (-2^3 + 3.2^2 + 9.2 + 2)$

$y = 9(x - 2) + 24 =$ **$9x + 6$**

Bài 7 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số:

$$y = x^3 + 3x^2 + 1$$

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm phương trình sau theo m:

$$x^3 + 3x^2 + 1 = m/2$$

c) Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị (C).

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ; \; x = -2$

+ Giới hạn:

$$\lim_{x \to -\infty} y = -\infty; \lim_{x \to +\infty} y = +\infty.$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$		5		1		$+\infty$

Hàm số đồng biến trên các khoảng (-∞; -2) và (0; +∞).

Hàm số nghịch biến trên khoảng (-2; 0).

+ Cực trị:

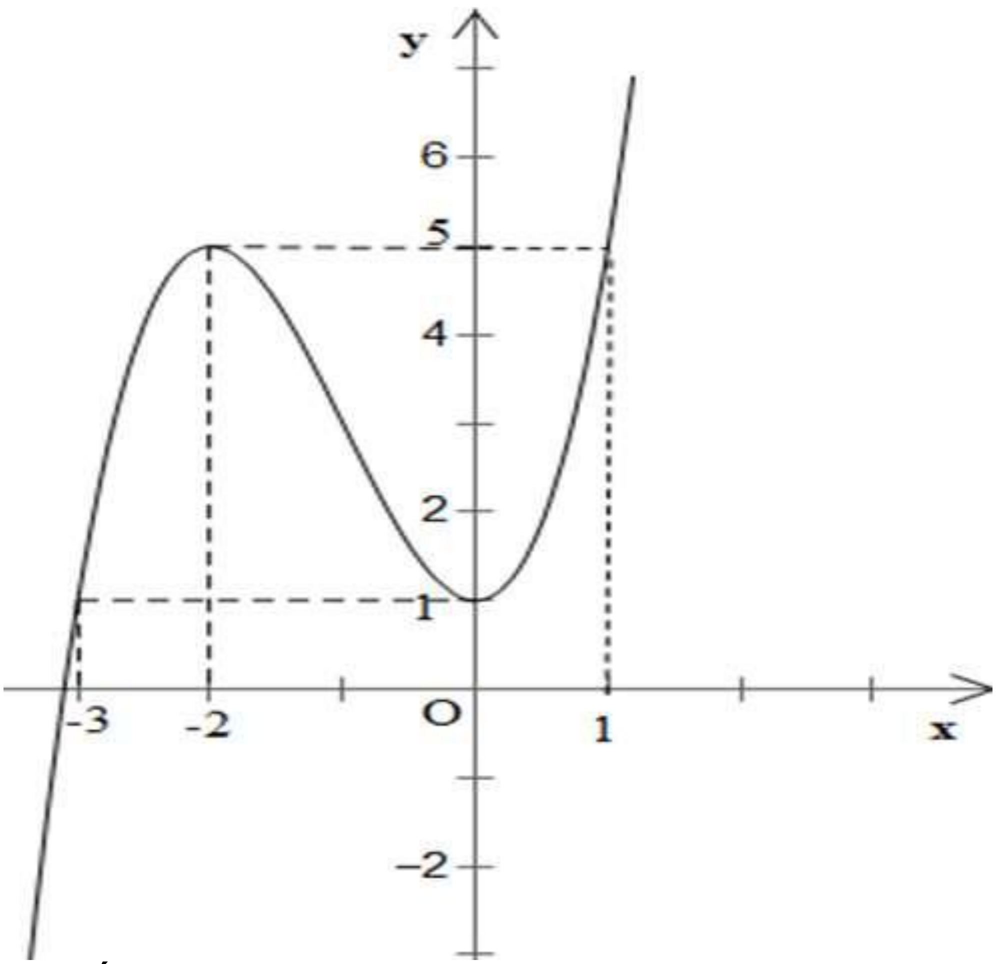
Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là (0; 1).

Đồ thị hàm số có điểm cực đại là (-2; 5).

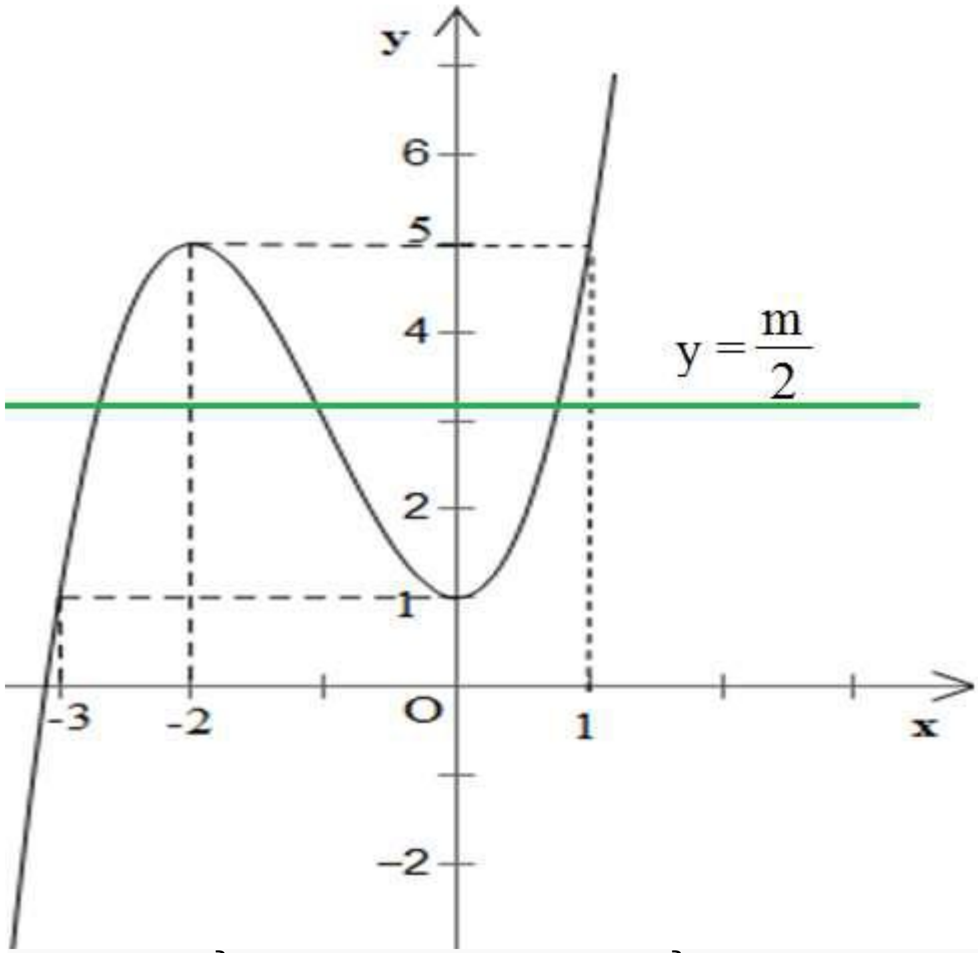
- Đồ thị:

+ Giao với Oy: (0; 1).

+ Đồ thị (C) đi qua điểm (–3; 1), (1; 5).



b) Số nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 + 1 = m/2$ bằng số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = m/2$.



(Đường thẳng y = m/2 là đường thẳng song song với trục Ox cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng m/2)

Cách làm: Dịch chuyển song song đường thẳng (d) với trục Ox từ trên xuống dưới (hoặc từ dưới lên trên) là dựa vào số giao điểm của (d) và (C) để biện luận.

Ngoài ra, trong khi làm bài, bạn không cần vẽ lại hình, chỉ cần vẽ (d) lên trên đồ thị vừa vẽ là được.

Biện luận: Từ đồ thị ta có:

+ $m/2 < 1 \Leftrightarrow m < 2$: phương trình có 1 nghiệm.

+ $m/2 = 1 \Leftrightarrow m = 2$: Phương trình có 2 nghiệm.

+ $1 < m/2 < 5 \Leftrightarrow 1 < m < 10$: phương trình có 3 nghiệm.

+ $m/2 > 5 \Leftrightarrow m > 10$: phương trình có 1 nghiệm số.

Vậy:

+ Nếu $m < 2$ hoặc $m > 10$ thì phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

+ Nếu $2 < m < 10$ phương trình có 3 nghiệm.

+ Nếu $m = 2$ hoặc $m= 10$ thì phương trình có 2 nghiệm.

c) Điểm cực đại A(-2; 5) và điểm cực tiểu B(0; 1).

$\overrightarrow{AB} = (2;-4) \Rightarrow \vec{n} = (2;1)$ là VTPT của đường thẳng AB.

Phương trình đường thẳng AB là:

2.(x - 0) + 1.(y - 1) = 0 (lấy tọa độ B)

=> y = -2x + 1

Vậy phương trình đường thẳng đi qua điểm cực đại và cực tiểu là: **y = -2x + 1**

Bài 8 : Cho hàm số:

$$f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1 \text{ (m là tham số).}$$

a) Xác định m để hàm số đồng biến trên tập xác định.

b) Với giá trị nào của tham số m thì hàm số có một cực đại và một cực tiểu?

c) Xác định m để f''(x) > 6x.

Lời giải:

a) TXĐ: D = R

$f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1) = 0$ (1)

$\Delta' = (-3m)^2 - 3.3(2m - 1) = 9(m^2 - 2m + 1)$

$= 9(m - 1)^2$

Để hàm số đồng biến trên D thì $f'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 9(m - 1)^2 \leq 0$ => **m = 1**

b) Hàm số có một cực đại và một cực tiểu khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9(m - 1)^2 > 0$ => **m ≠ 1**

c) Ta có: f''(x) = 6x - 6m

$f''(x) > 6x \Leftrightarrow 6x - 6m > 6x$

$\Leftrightarrow -6m > 0 \Leftrightarrow$ **m < 0**

Bài 9 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$$

b) Viết phương tình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình f"(x) = 0.

c) Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 6x^2 + 3 = m$.

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$$

- TXĐ: D = R

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên: $f'(x) = 2x^3 - 6x = 2x(x^2 - 3)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm\sqrt{3}$

+ Giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$$

+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$.

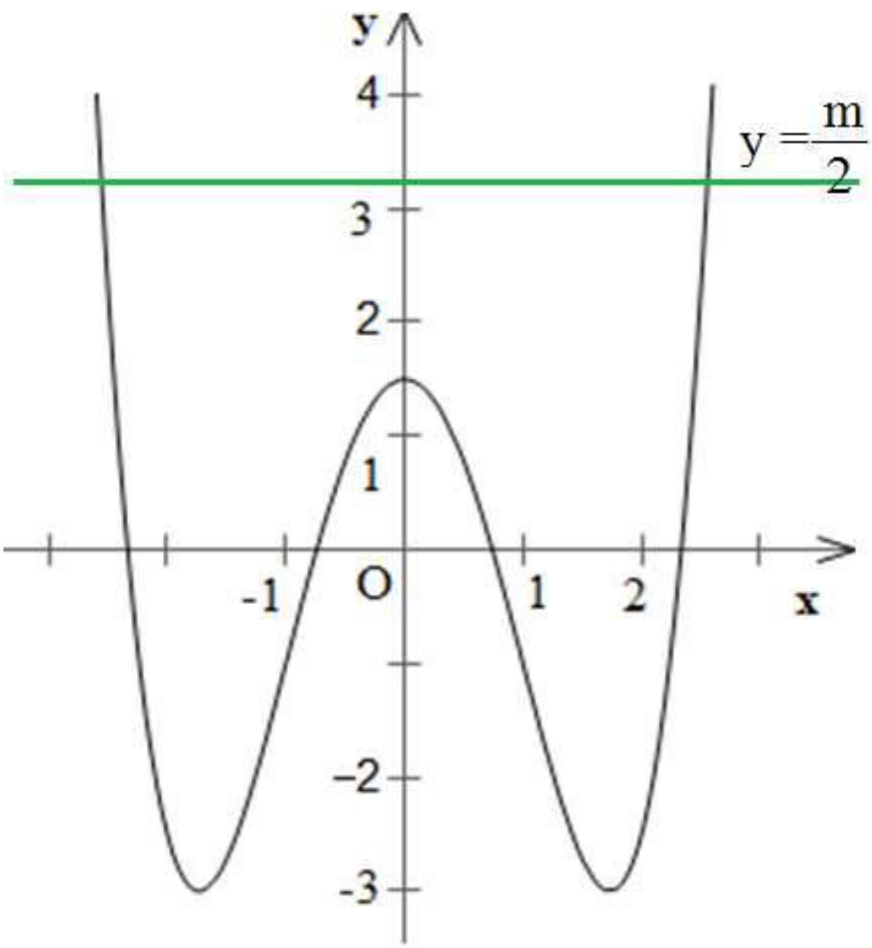
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$.

+ Cực trị:

Đồ thị hàm số đạt cực đại tại (0; 3/2)

Đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại (-√3; -3) và (√3; -3)

- Đồ thị:



b) Ta có: f''(x) = $6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$

f''(x) = 0 ⇔ $6(x^2 - 1)$ ⇔ x = ±1 => y = -1

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại (-1; -1) là:

y = f'(-1)(x + 1) - 1 => **y = 4x + 3**

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại (1; -1) là:

y = f'(1)(x - 1) - 1 => **y = -4x + 3**

c) Ta có: $x^4 - 6x^2 + 3 = m$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} = \frac{m}{2} \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) chính bằng số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng y = m/2.

Biện luận: Từ đồ thị:

+ m/2 < - 3 ⇔ m < -6: phương trình vô nghiệm.

+ m/2 = -3 ⇔ m = -6 : phương trình có 2 ngiệm.

+ -3 < m/2 < 3/2 ⇔ -6 < m < 3: phương trình có 4 nghiệm.

+ m/2 = 3/2 ⇔ m = 3: phương trình có 3 nghiệm.

+ m/2 > 3/2 ⇔ m > 3: phương trình có 2 nghiệm.

Vậy:

+) m < - 6 thì phương trình vô nghiệm.

+) m = - 6 hoặc m > 3 thì PT có 2 nghiệm.

+) m = 3 thì PT có 3 nghiệm.

+) – 6 < m < 3 thì PT có 4 nghiệm.

Bài 10 : Cho hàm số

$$y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 \text{ (m tham số)}$$

có đồ thị là (C_m).

a) Biện luận theo m số cực trị của hàm số.

d) Với giá trị nào của m thì (C_m) cắt trục hoành?

c) Xác định để (C_m) có cực đại, cực tiểu.

Lời giải:

a) $y' = -4x^3 + 4mx = 4x(m - x^2)$

$y' = 0$ (**1**) ⇔ $4x(m - x^2) = 0 \Rightarrow x = 0; x^2 = m$

- Nếu m ≤ 0 thì phương trình (1) có 1 nghiệm => hàm số không có cực trị.

- Nếu m > 0 thì phương trình (2) có 3 nghiệm => hàm số có 3 cực trị.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) với trục hoành:

$-x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 = 0$ (2)

Đặt $x^2 = t$ ($t \geq 0$) khi đó phương trình (2) tương đương với:

$-t^2 + 2mt - 2m + 1 = 0$ (3)

(C_m) cắt trục hoành khi phương trình (2) có nghiệm. Điều này tương đương với phương trình (3) có nghiệm không âm. Có hai trường hợp:

- TH1: Phương trình (3) có 2 nghiệm trái dấu:

$$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{-2m+1}{-1} < 0 \Leftrightarrow -2m+1 > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$$

- TH2: Phương trình (3) có 2 nghiệm đều không âm:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 1 \geq 0 \\ m \geq 0 \\ 2m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -1 - \sqrt{2} \\ m \geq -1 + \sqrt{2} \end{array}\right. \\ m \geq 0 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$$

Kết hợp TH1 và TH2 ta có với mọi m thì đồ thị (C_m) luôn cắt trục hoành.

c) (C_m) có cực đại, cực tiểu khi phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 = m$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ **m > 0**

Bài 11 : a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số

$$y = \frac{x+3}{x+1}$$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của đường thẳng $y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt M và N.

c) Xác định m sao cho độ dài MN nhỏ nhất.

d) Tiếp tuyến tại một điểm S bất kì của C cắt hai tiệm cận của C tại P và Q. Chứng minh rằng S là trung điểm của PQ.

Lời giải:

a) Khảo sát hàm số:

- TXĐ: D = R \ (-1)

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

$$y' = -\frac{2}{(x+1)^2} < 0\ \forall x \in\ \mathrm{D}$$

Hàm số luôn nghịch biến trên D.

+ Cực trị: Hàm số không có cực trị.

+ Tiệm cận:

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x+3}{x+1} = -\infty,\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x+3}{x+1} = +\infty.$$

=> Đồ thị có tiệm cận đứng là x = -1.

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x+3}{x+1} = 1$$

=> Đồ thị có tiệm cận ngang là y = 1.

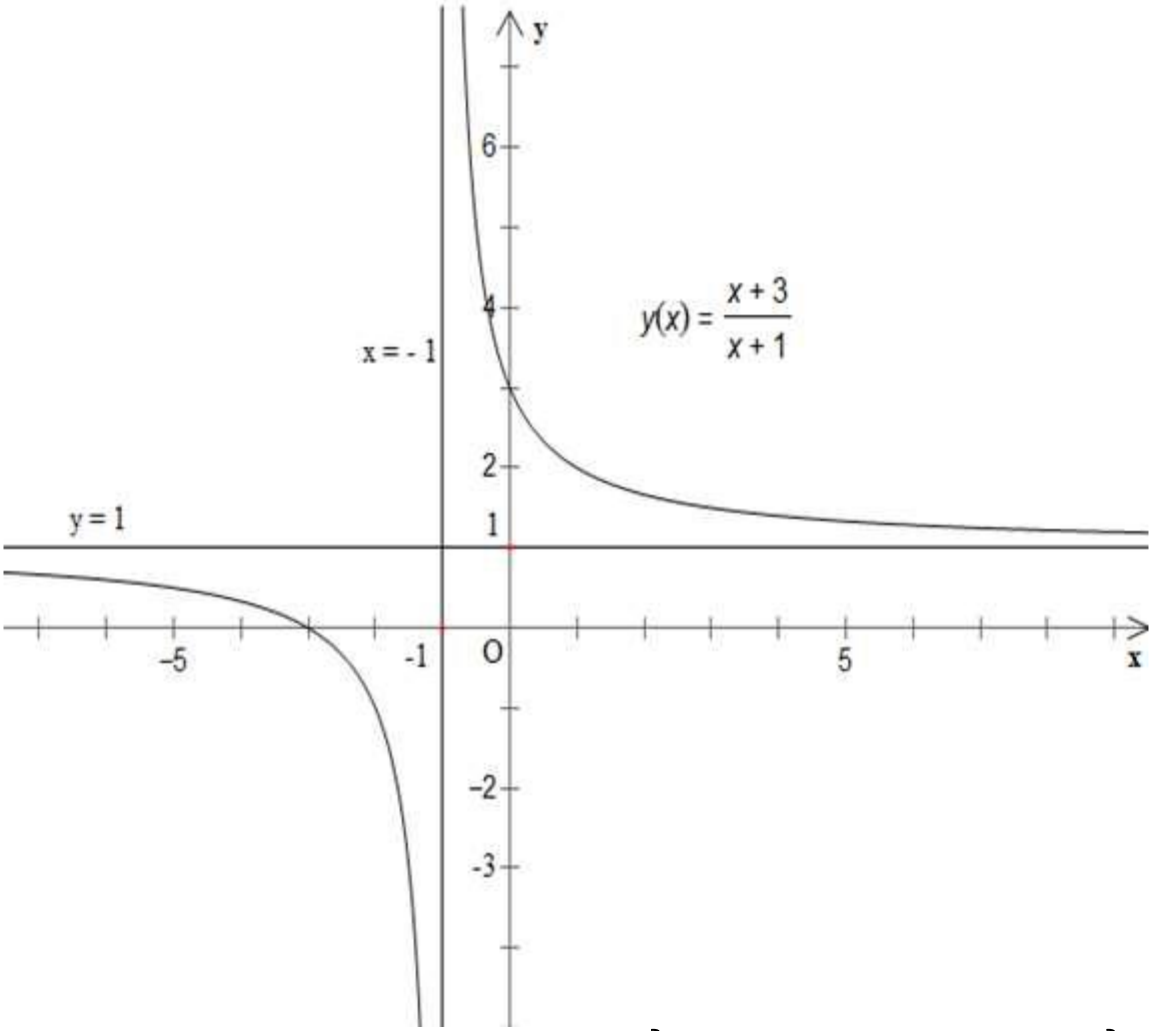
+ Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

- Đồ thị:

+ Giao với Ox: (-3; 0)

+ Giao với Oy: (0; 3)



b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng y = 2x + m là:

$$\frac{x+3}{x+1} = 2x + m \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + (m+1)x + m - 3 = 0 \ (1) \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Dễ thấy x = -1 không là nghiệm của phương trình (1).

Ta có: $\Delta = (m + 1)^2 - 8(m - 3) = m^2 - 6m + 25$

$\Delta = (m - 3)^2 + 16 > 0 \ \forall m$

=> Phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

Vậy đường thẳng y = 2x + m luôn cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M và N.

c) Giả sử $M(x_1; y_1)$, $N(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) và $y_1 = 2x_1 + m$, $y_2 = 2x_2 + m$.

Theo hệ thức vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{m+1}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-3}{2} \end{cases}$

$$\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (\mathrm{x}_2 - x_1; 2x_2 - 2x_1)$$

$$\mathrm{MN}^2 = 5(x_2 - x_1)^2 = 5(x_1 + x_2)^2 - 20x_1x_2$$

$$= \frac{5}{4}.(m+1)^2 - 10(m-3) = \frac{5}{4}m^2 - \frac{15}{2}m + \frac{125}{4}$$

$$= \frac{5}{4}\left(m^2 - 6m + 25\right) = \frac{5}{4}\left[\left(m-3\right)^2 + 16\right]$$

$$= \frac{5}{4}\left(m-3\right)^2 + 20 \geq 20 \forall m$$

MN nhỏ nhất ⇔ MN^2 nhỏ nhất bằng 20.

Dấu "=" xảy ra ⇔ m - 3 = 0 ⇔ m = 3

Khi đó độ dài MN nhỏ nhất = $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

d) Gọi $S(x_o; y_o) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại S là:

$$y = \frac{-2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + y_0 = \frac{-2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0+3}{x_0+1}$$

- Giao điểm của (d) với tiệm cận đứng x = -1 là:

$$P\left(-1; \frac{x_0+5}{x_0+1}\right)$$

- Giao điểm của (d) với tiệm cận ngang y = 1 là: $Q(2x_o + 1; 1)$.

- Trung điểm của PQ là $I(x_1; y_1)$ có tọa độ là:

$$x_1 = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{-1 + 2x_0 + 1}{2} = x_0$$

$$y_1 = \frac{y_P - y_Q}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{x_0 + 5}{x_0 + 1} + 1\right] = \frac{x_0 + 3}{x_0 + 1} = y_0$$

Suy ra $S(x_o; y_o)$ chính là trung điểm của PQ (đpcm).

Bài 12 : Cho hàm số

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$

a) Giải phương trình f'(sin x) = 0.

b) Giải phương trình f''(cos x) = 0.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình f''(x) = 0.

Lời giải:

a) Ta có: $f'(x) = x^2 - x - 4$

=> $f'(\sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x - 4 = 0$

Vì $\sin^2 x \leq 1; -\sin x \geq 1\ \forall x \in R$

=> $\sin^2 x - \sin x \leq 2$

=> $\sin^2 x - \sin x - 4 \leq -2\ \forall x \in R$

Do đó phương trình f'(sinx) = 0 vô nghiệm.

b) Ta có: $f''(x) = 2x - 1$

=> $f''(\cos x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\ (k \in Z)$$

c) f''(x) = 0

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{47}{12}; \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}.$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại x = 1/2 là:

$$y = -\frac{17}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{47}{12} = -\frac{17}{4}x + \frac{145}{24}.$$

BT TRẮC NGHIỆM

Bài 1 : Số điểm cực trị của hàm số y = - 1/3 x3 - x + 7 là:

(A) 1 ; (B) 0 ; (C) 3 ; (D) 2

Lời giải:

- Chọn đáp án **B**

- Ta có: $y' = -x^2 - 1 < 0\ \forall x \in R$

Hàm số luôn nghịch biến trên tập xác định nên không có cực trị.

Bài 2 : Số điểm cực đại của hàm số y = x4 + 100 là:

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) 2 ; (D) 3

Lời giải:

- Chọn đáp án **A**

- Ta có: $y' = 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Hàm số nghịch biến trên (-∞; 0) và đồng biến trên (0; +∞) => hàm số chỉ có cực tiểu chứ không có cực đại.

(Bạn có thể vẽ bảng biến thiên để thấy rõ hơn.)

Bài 3 : Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số

$$y = \frac{1-x}{1+x}$$

là: (A) 1 ; (B) 2 ; (C) 3 ; (D) 0

Lời giải:

- Chọn đáp án **B**

- Ta có: 1 + x =0 ⇔ x = -1

$$\lim_{x\to -1^-} y = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} y = -\infty$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng x = -1.

$$\lim_{x\to \pm\infty} y = -1$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang y = -1.

=> Đồ thị hàm số có **2** đường tiệm cận.

Bài 4 Hàm số

$$y = \frac{2x+5}{x+3}$$

đồng biến trên: (A) R ; (B) (-∞;3) ; (C) (-3; +∞) ; (D) R \ {-3}

Lời giải:

- Chọn đáp án **D**

- TXĐ: D = R \ {-3}

$$y' = \frac{11}{(x+3)^2} > 0 \ \forall x \in D.$$

=> Hàm số đồng biến trên D = R \ {-3}.

Bài 5 : Tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của đồ thị hàm số:

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$$

(A) Song song với đường thẳng x = 1;

(B) Song song với trục hoành;

(C) Có hệ số góc dương;

(D) Có hệ số gọc bằng -1.

Lời giải:

- Chọn đáp án **B**

- Ta có: $y' = x^2 - 4x + 3$

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 ; x = 3$

$y'' = 2x - 4$

Ta có: $y''(3) = 2 > 0$

=> hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$ (Quy tắc 2).

Mặt khác, phương trình tiếp tuyến tại điểm cực tiểu có hệ số góc là $y'(3) = 0$. Do đó tiếp tuyến song song với trục hoành.