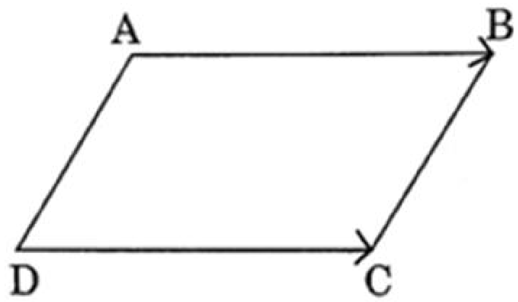
Bài 1 : Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$$

Lời giải:



Ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ABCD là hình bình hành)

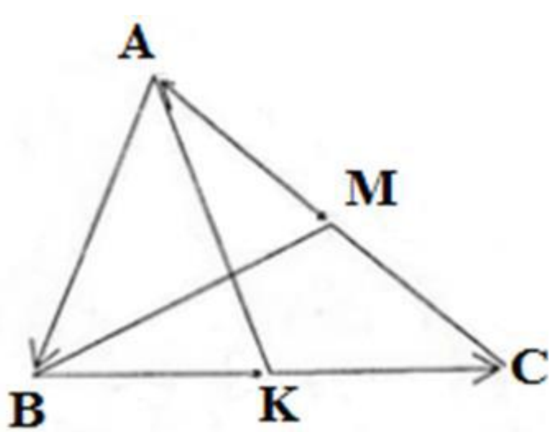
Suy ra:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AC}$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$$

Bài 2 : Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy phân tích các vectơ

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ theo hai vector $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$

Lời giải:



Vì AK là trung tuyến của ΔABC nên K là trung điểm của BC.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK}$ (1)

Vì BM là trung tuyến của ΔABC nên M là trung điểm của AC.

$$=> \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BM} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = 2(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{BM})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ Mà $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}$

Nên: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AK} - 2\overrightarrow{AB}$

$$= 2\vec{u} - 2\left(\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}\right) = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{4}{3}\vec{v}$$

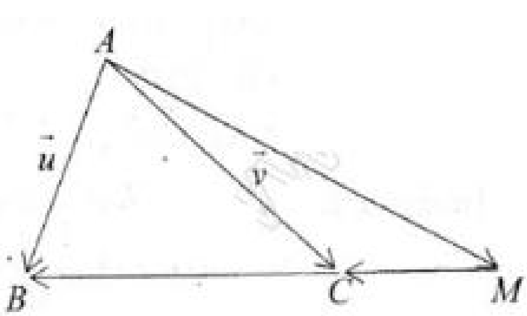
Ta có: $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} + 2\vec{v})$

$$= -\frac{2}{3}(2\vec{u} + \vec{v}).$$

Bài 3 : Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho

$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Hãy phân tích theo vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

Lời giải:



Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \ (*)$$

Theo giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

Do đó từ (*) suy ra:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

Vậy $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(-\vec{u} + 3\vec{v})$.

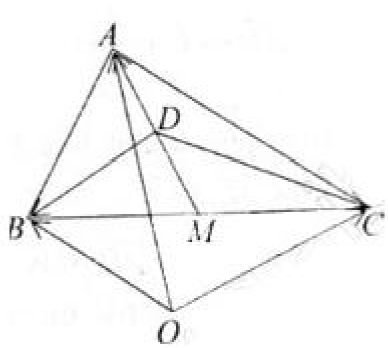
Bài 4 : Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của đoạn AM.

Chứng minh rằng:

a) $2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

b) $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$, với O là điểm tùy ý

Lời giải:



a) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AD} \text{ (D là trung điểm của AM)} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AM} \text{ (M là trung điểm của BC) (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} = \vec{0} \text{ (đpcm)}$$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} \text{ (M là trung điểm của BC)} \quad (3)$$

$$\text{và } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OD} \text{ (D là trung điểm của AM)} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

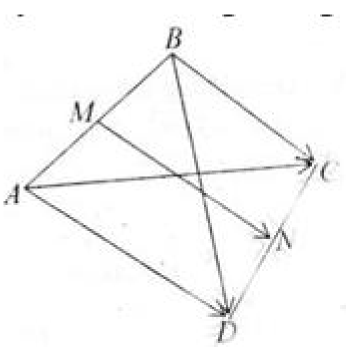
$$2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}) = 4\overrightarrow{OD}$$

Bài 5 : Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD của tứ giác ABCD.

Chứng minh rằng:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$$

Lời giải:



Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$$

và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$

Mà $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{CN}$

Nên $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$

Suy ra: $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ (1)

Tương tự $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} \text{ (đpcm)}$$

Bài 6 : Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm K sao cho

$$3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$$

Lời giải:

$$3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{KA}$$

=> $\overrightarrow{KA}$ và $\overrightarrow{KB}$ là hai vectơ ngược hướng

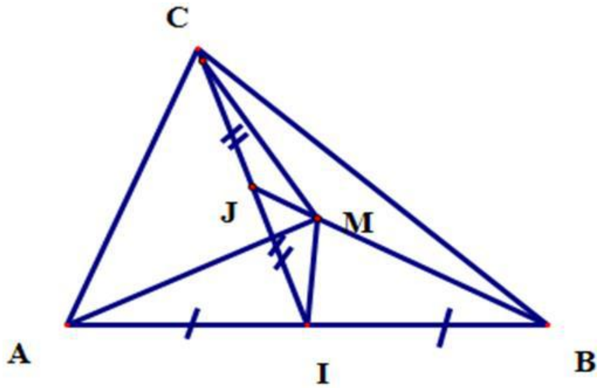
Vậy K trên đoạn thẳng AB sao cho

$$KB = \frac{3}{2}KA$$

Bài 7 : Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Lời giải:



Gọi I là trung điểm của AB, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$$

Gọi J là trung điểm của CI, ta có:

$$\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$$

Theo giả thiết ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

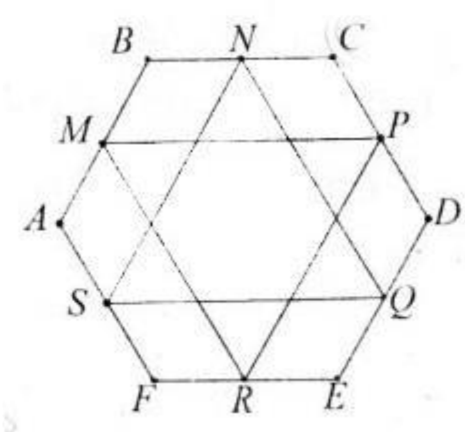
$$\Rightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MJ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv J$$

Vậy M là trung điểm của trung tuyến CI.

Bài 8 : Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

Lời giải:



Giả sử G là trọng tâm của ΔMPR.

Khi đó:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR} = \vec{0} \ (*)$$

Mà $2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}$

$$2\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$$

$$2\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$$

Nên $2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GR}) = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$

Kết hợp với (*) suy ra:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$$

Do đó: $(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GF}) + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE}) = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GS} + 2\overrightarrow{GN} + 2\overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0}$$

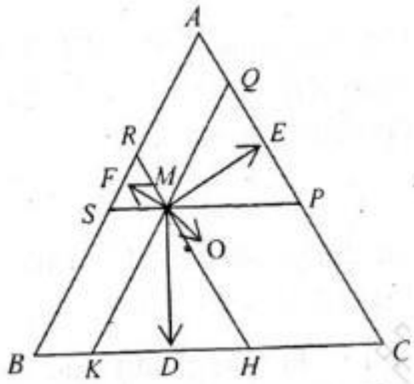
Vậy G cũng đồng thời là trọng tâm của ΔSNQ, nghĩa là hai tam giác MPR và SNQ có cùng trọng tâm.

Bài 9 : Cho tam giác đều ABC có O là trọng tâm và M là một điểm tùy ý trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, AC, AB.

Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Lời giải:



Từ M kẻ SP // BC, QK // AB, RH // AC.

Ta có:

ΔMKH đều: MD là đường trung tuyến

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MH}$$

ΔMPQ đều: ME là đường trung tuyến

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}$$

ΔMRS đều: MF là đường trung tuyến

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS}$$

$$\Rightarrow 2\left(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}\right) = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MR}$$

$$= \left(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}\right) + \left(\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MK}\right) + \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MP}\right)$$

$$= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

(Vì các tứ giác MHCP, MQAR, MSBK là các hình bình hành)

Vì O là trọng tâm ΔABC nên

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MO}$$

Từ đó: $2(\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}) = 3\overrightarrow{MO} \Rightarrow \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$