

Bài 1 : Xét dấu các tam thức bậc hai:

a) $5x^2 - 3x + 1$; b) $-2x^2 + 3x + 5$ c) $x^2 + 12x + 36$; d) $(2x - 3)(x + 5)$

Lời giải

a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1$ có $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$ và có hệ số $a = 5 > 0$ nên $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$ có $\Delta = 9 + 40 = 49$

Tam thức có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -1$; $x_2 = 5/2$

Ta có bảng xét dấu:

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 5/2)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $x = 5/2$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (5/2; +\infty)$

x	$-\infty$	-1	$\frac{5}{2}$	$+\infty$	
f(x)	-	0	+	0	-

c) $f(x) = x^2 + 12x + 36$ có $\Delta = 0$ nên có một nghiệm là $x = -6$

Ta có bảng xét dấu:

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq -6$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -6$

(hoặc có thể phân tích $f(x) = (x + 6)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

d) $f(x) = (2x - 3)(x + 5)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 3/2$; $x_2 = -5$

Ta có bảng xét dấu:

Vậy $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -5$; $x = 3/2$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-5; 3/2)$

x	$-\infty$	-5	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Bài 2 : Lập bảng xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

b) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1)$

c) $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 30)(2x + 9)$

d) $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

Lời giải

a) $f(x) = (3x^2 - 10x + 3)(4x - 5)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{4}$	3	$+\infty$		
$3x^2 - 10x + 3$	+	0	-	-	0	+	
$4x - 5$	-		-	0	+	+	
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Vậy: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1/3; 5/4) \cup x \in (3; +\infty)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1/3; 5/4; 3$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1/3) \cup x \in (5/4; 3)$

b) $f(x) = (3x^2 - 4x)(2x^2 - x - 1) = x(3x - 4)(2x^2 - x - 1)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$			
x	-	-	0	+	+	+			
$3x - 4$	-	-	-	-	0	+			
$2x^2 - x - 1$	+	0	-	-	0	+			
f(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Vậy: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1/2) \cup x \in (0; 1) \cup x \in (4/3; +\infty)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1/2; 0; 1; 4/3$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1/2; 0) \cup x \in (1; 4/3)$

c) $f(x) = (4x^2 - 1)(-8x^2 + x - 30)(2x + 9)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$		
$4x^2 - 1$	+		+	0	-	0	+
$-8x^2 + x - 3$	-		-		-		-
$2x + 9$	-	0	+		+		+
f(x)	+	0	-	0	+	0	-

Vậy: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -9/2) \cup x \in (-1/2; 1/2)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -9/2; -1/2; 1/2$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-9/2; -1/2) \cup x \in (1/2; +\infty)$

d) $f(x) = \frac{(3x^2 - x)(3 - x^2)}{4x^2 + x - 3}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
x	-	-	-	0	+	+	+	+	
$3x - 1$	-	-	-	-	0	+	+	+	
$3 - x^2$	-	0	+	+	+	+	+	0	-
$4x^2 + x - 3$	+	+	0	-	-	-	0	+	+
f(x)	-	0	+	-	0	+	0	-	+

Vậy: $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3}; -1) \cup x \in (0; 1/3) \cup x \in (3/4; \sqrt{3})$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}; 0; 1/3$

$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup x \in (-1; 0) \cup x \in (1/3; 3/4) \cup x \in (\sqrt{3}; +\infty)$

Bài 3 : Giải các bất phương trình sau

a) $4x^2 - x + 1 < 0$

b) $-3x^2 + x + 4 \geq 0$

c) $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$

d) $x^2 - x - 6 \leq 0$

Lời giải

a) $4x^2 - x + 1 < 0$

Xét $f(x) = 4x^2 - x + 1$ có: $\Delta = 1 - 16 = -15 < 0$ và $a = 4 > 0$ nên $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy bất phương trình đã cho vô nghiệm.

(Hoặc ta có: $4x^2 - x + 1 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1/4 + 1/16 + 15/16 = (2x - 1/4)^2 + 15/16 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$)

b) $-3x^2 + x + 4 \geq 0$

Xét $f(x) = -3x^2 + x + 4$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -1$; $x_2 = 4/3$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	$\frac{4}{3}$	$+\infty$	
f(x)	-	0	+	0	-

Nên $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1; 4/3)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 4/3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = [-1; 4/3]$

c) $\frac{1}{x^2 - 4} < \frac{3}{3x^2 + x - 4}$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 + x - 4 - 3x^2 + 12}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)} < 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x + 8}{(x^2 - 4)(3x^2 + x - 4)} < 0$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-8	-2	$-\frac{4}{3}$	1	2	$+\infty$				
$x + 8$	-	0	+	+	+	+	+				
$x^2 - 4$	+		+	0	-	-	0	+			
$3x^2 + x - 4$	+		+		+	0	-	0	+	+	
$f(x)$	-	0	+		-		+		-		+

Nên $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -8) \cup (-2; 4/3) \cup (1; 2)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (-\infty; -8) \cup (-2; 4/3) \cup (1; 2)$

d) $x^2 - x - 6 \leq 0$

Xét $f(x) = x^2 - x - 6$ có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = -2$; $x_2 = 3$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

Nên $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2; 3)$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $x = 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = [-2; 3]$

Bài 4 :Tìm các giá trị của tham số m để các phương trình sau vô nghiệm

a) $(m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6 = 0$

b) $(3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2 = 0$

Lời giải

a) Đặt $f(x) = (m - 2)x^2 + 2(2m - 3)x + 5m - 6$

- Nếu $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ khi đó phương trình $f(x) = 0$ trở thành:

$2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ hay phương trình có một nghiệm

Do đó $m = 2$ không phải là giá trị cần tìm.

- Nếu $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ ta có:

$$\begin{aligned}\Delta' &= (2m - 3)^2 - (m - 2)(5m - 6) \\ &= 4m^2 - 12m + 9 - 5m^2 + 6m + 10m - 12 \\ &= -m^2 + 4m - 3 = (-m + 3)(m - 1)\end{aligned}$$

Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow (-m + 3)(m - 1) < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$$

Vậy với $m \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$ thì phương trình vô nghiệm.

b) Đặt $f(x) = (3 - m)x^2 - 2(m + 3)x + m + 2$

- Nếu $3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$ khi đó phương trình $f(x) = 0$ trở thành:

$$-6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5/6 \text{ là nghiệm của phương trình.}$$

Do đó $m = 3$ không phải là giá trị cần tìm.

- Nếu $3 - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 3$ ta có:

$$\begin{aligned}\Delta' &= (m + 3)^2 - (3 - m)(m + 2) \\ &= m^2 + 6m + 9 - 3m - 6 + m^2 + 2m \\ &= 2m^2 + 5m + 3 = (2m + 2)(m + 3/2)\end{aligned}$$

Phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$$\Leftrightarrow (2m + 2)(m + 3/2) < 0 \Leftrightarrow m \in (-3/2; -1)$$

Vậy với $m \in (-3/2; -1)$ thì phương trình vô nghiệm.