# Bài 1 : Áp dụng Quy tắc 1, hãy tìm các điểm cực trị của các hàm số sau:

a) 
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 36x - 10$$
; b)  $y = x^4 + 2x^2 - 3$ ;

c) 
$$y = x + \frac{1}{x}$$
;

d) 
$$y = x^3(1-x)^2$$
;

e) 
$$y = \sqrt{x^2 - x + 1}$$
.

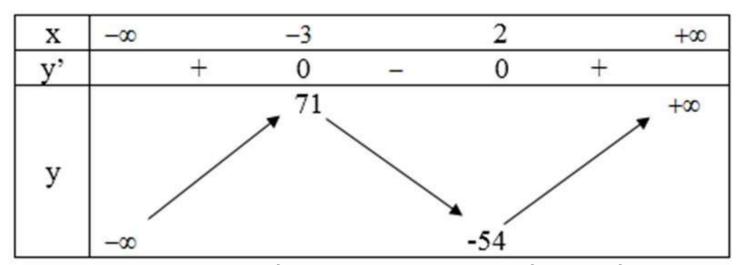
Lời giải:

a) 
$$TXD: D = R$$

$$y' = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$$

$$y' = 0 => x = -3 \text{ hoặc } x = 2$$

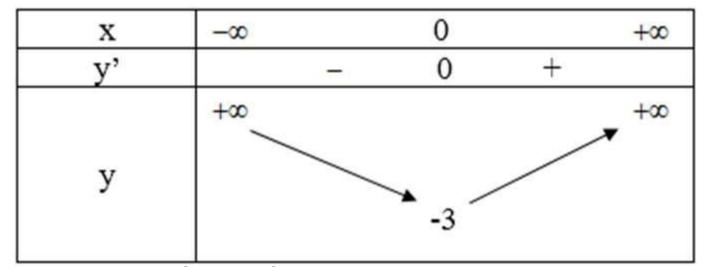
Bảng biến thiên:



Vậy đồ thị của hàm số có điểm cực đại là (-3; 71) và điểm cực tiểu là (2; -54).

$$y'= 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1) = 0$$
;  $y' = 0 => x = 0$ 

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số có điểm cực tiểu là (0; -3).

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$y' = 0 => x = \pm 1$$

Bảng biến thiên:

X	-∞	-1		0		1		+∞
y'	+	0	•		•	0	+	
у		<b>y</b> (-1)				y(1)	/	<b>,</b>

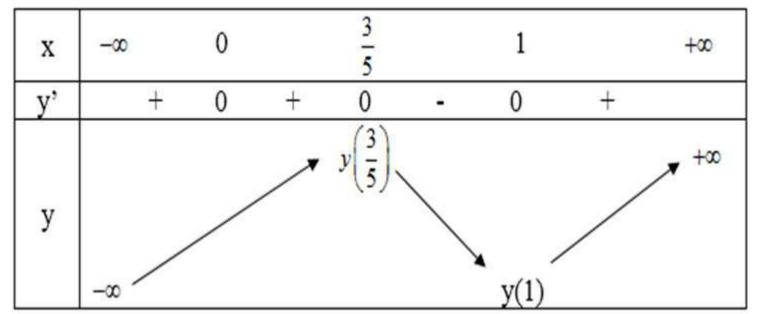
Vậy hàm số có điểm cực đại là  $x_{CD} = -1$  và điểm cực tiểu là  $x_{CT} = 1$ .

d) 
$$TXD: D = R$$

$$y'=3x^2(1-x)^2-2x^3(1-x)=x^2(5x^2-8x+3)$$

$$y' = 0 => x = 0; x = 1 hoặc x = 3/5$$

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số cực đại  $x_{CD} = 3/5$  và điểm cực tiểu  $x_{CT} = 1$ 

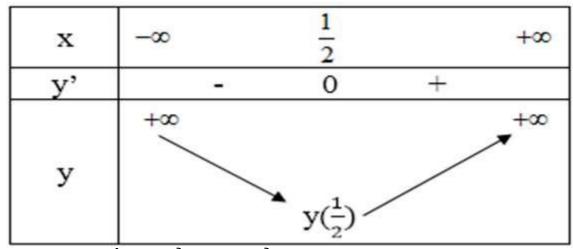
(Lưu ý: x= 0 không phải là cực trị vì tại điểm đó đạo hàm bằng 0 nhưng đạo hàm không đổi dấu khi đi qua x = 0.)

e) Ta có:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \,\forall \, x \in \mathbb{R}.$$

Do đó, với mọi  $x \in R$  thì  $\sqrt{x^2 - x + 1}$  luôn xác định. Vậy D = R.

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số có điểm cực tiểu  $x_{CT} = 1/2$ .

## Bài 2 : Áp dụng Quy tắc 2, hãy tìm các điểm cực trị của hàm số sau:

a) 
$$y = x^4 - 2x^2 + 1$$
; b)  $y = \sin 2x - x$ 

b) 
$$y = \sin 2x - x$$

c)  $y = \sin x + \cos x$ ; d)  $y = x^5 - x^3 - 2x + 1$ 

Lời giải:

a) TXD: D = R.

$$y' = 4x^3 - 4x$$

 $y'=0 \Rightarrow x=0; x=\pm 1.$ 

$$y'' = 12x^2 - 4$$

 $y''(0) = -1 < 0 \Rightarrow x = 0$  là điểm cực đại của hàm số.

 $y''(\pm 1) = 8 > 0 > x = -1$  và x = 1 là điểm cực tiểu của hàm số.

**b)** TXĐ: D = R

$$y' = 2\cos 2x - 1;$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$
$$y'' = -4\sin 2x$$

$$y''(\frac{\pi}{6} + k\pi) = -4\sin\frac{\pi}{3} < 0 = >x_{CD} = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in Z)$$

$$y''\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -4\sin\frac{\pi}{3} > 0 = 2x_{CT} = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$y = \sin x + \cos x = y = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y' = \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right); y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$y'' = -\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = -\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \begin{cases} -\sqrt{2} \, \text{n\'e} \, u \, k \, \text{ch\'an} \\ \sqrt{2} \, \text{n\'e} \, u \, k \, \text{l\'e} \end{cases}$$

 $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  là các điểm cực đại của hàm số.

 $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \ (\forall k \in Z)$  là các điểm cực tiểu của hàm sốt d) TXĐ: D = R

$$v' = 5x^4 - 3x^2 - 2$$

$$y' = 0 => x \pm 1.$$

$$y'' = 20x^3 - 6x$$

y''(-1) = -20 + 6 = -14 < 0 => x = -1 là điểm cực đại của hàm số.

y''(1) = 20 - 6 = 14 > 0 => x = 1 là điểm cực tiểu của hàm số.

Bài 3 : Chứng minh hàm số  $y = \sqrt{|x|}$  không có đạo hàm tại x = 0 nhưng vẫn đạt được cực tiểu tại điểm đó.

#### Lời giải:

Tính theo **định nghĩa đạo hàm** tại  $x_0 = 0$  ta có:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|0 + \Delta x|} - \sqrt{0}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x \sqrt{|\Delta x|}} = \begin{cases} -\infty \ v \circ i \ \Delta x < 0 \\ +\infty \ v \circ i \ \Delta x < 0 \end{cases}$$

Nghĩa là hàm số  $y = \sqrt{|x|}$  không có đạo hàm tại x = 0. (1)

Mặt khác ta có:  $\sqrt{|x|} \ge 0 \ \forall \ x$ . Dấu "=" xảy ra khi x = 0.

Do đó hàm số  $y = \sqrt{|x|}$  đạt cực tiểu tại x = 0. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

## Bài 4 : Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số

$$y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$$

luôn luôn có một cực đại và một điểm cực tiểu.

#### Lời giải:

Xét hàm số  $y = x^3 - mx^2 - 2x + 1$  ta có:

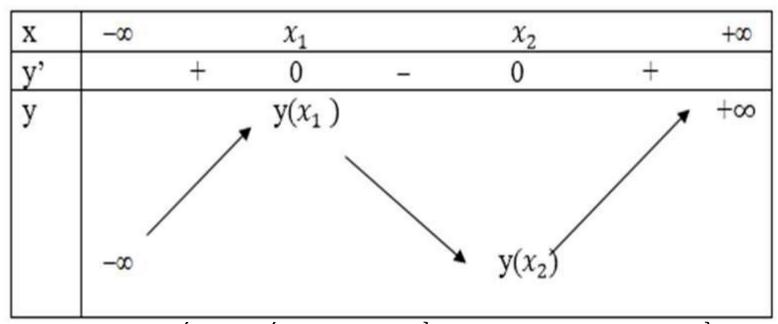
TXD: D = R

$$y' = 3x^2 - 2mx - 2$$

$$y' = 0 = > x_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 6}}{3}$$
;  $x_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 6}}{3}$ 

Với mọi giá trị của m ta đều có  $x_1 < 0 < x_2$ .

Bảng biến thiên:



Từ bảng trên ta thấy hàm số luôn có một điểm cực đại  $x_{CD} = x_1$  và một điểm cực tiểu  $x_{CT} = x_2$  với mọi giá trị của m (đpcm).

## Bài 5: Tìm a và b để các cực trị của hàm số

$$y = \frac{5}{3}a^2x^3 + 2ax^2 - 9x + b$$

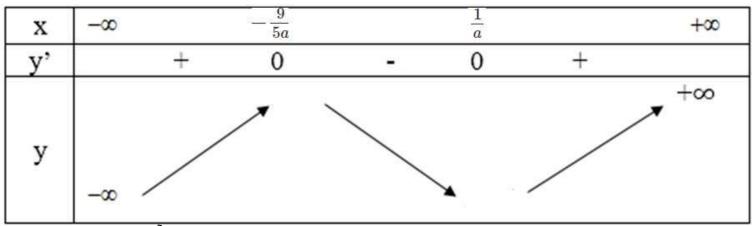
đều là nhưng số dương và  $x_0 = -5/9$  là điểm cực đại.

#### Lời giải:

- Nếu a = 0 thì y = -9x + b. Vậy hàm số không có cực trị.
- Nếu a  $\neq$  0. Ta có: y'=  $5a^2x^2 + 2ax 9$

$$y'= 0 => x = 1/a hoặc x = -9/5a$$

+ Với a > 0 ta có bảng biến thiên:



Vì  $x_0 = -5/9$  là điểm cực đại nên

$$-\frac{9}{5a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow a = \frac{81}{25}$$

Theo đề bài thì y<sub>CT</sub> dương nên với a = 81/25 thì khi đó:

$$y_{CT} = y \left(\frac{25}{81}\right) = \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{81}{25}\right)^2 \left(\frac{25}{81}\right)^3 + 2\left(\frac{81}{25}\right) \left(\frac{25}{81}\right)^2 - 9\left(\frac{25}{81}\right) + b$$

$$=-\frac{400}{243}+b>0 \Rightarrow b>\frac{400}{243}$$
.

+ Với a < 0 ta có bảng biến thiên:

X	-∞		$\frac{1}{a}$		$-\frac{9}{5a}$		+∞
y'		+	0	-	0	+	
у					`*		+∞

Vì  $x_0 = -5/9$  là điểm cực đại nên

$$\frac{1}{a} = -\frac{5}{9} \Leftrightarrow a = -\frac{9}{5}$$

Theo đề bài thì  $y_{CT}$  dương nên với a = -9/5 thì khi đó:

$$y_{CT} = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{9}{5}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{9}{5}\right) - 9 + b = -\frac{36}{5} + b > 0 \Rightarrow b > \frac{36}{5}$$

Vậy các giá trị a, b cần tìm là:

$$\begin{cases} a = -\frac{9}{5} \\ b > \frac{36}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \frac{81}{25} \\ b > \frac{400}{243} \end{cases}$$

Bài 6 : Xác định giá trị của tham số m để hàm số m để hàm số

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$$

đạt giá trị cực đại tại x = 2.

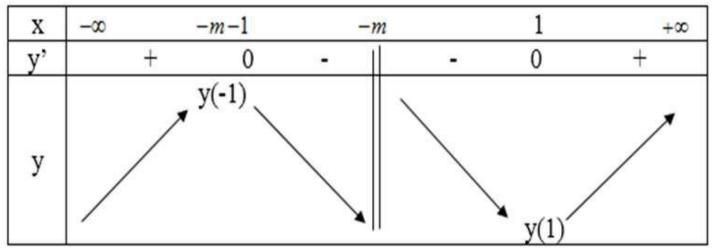
Lời giải:

TXĐ:  $D = R \setminus \{-m\}$ 

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x_1 = -m - 1; x_2 = -m + 1$$

Bảng biến thiên:



Hàm số đạt cực đại tại  $x = 2 \Leftrightarrow -m-1 = 2 \Rightarrow m = -3$ .