Bài 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm A (1;1), B(0;3), C(2;4) .Xác định ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình sau.

(a)Phép tịnh tiến theo vector v = (2;1).

(b)Phép đối xứng qua trục Ox

(c)Phép đối xứng qua tâm I(2;1).

(d)Phép quay tâm O góc 90^o.

(e)Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trụ Oy và phép vị tự tâm O tỉ số k = -2

Lời giải:

Gọi tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua phép biến hình trên.

a) Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = 1 + y \end{cases}$

Ảnh của A, B, C qua $T_{\vec{v}}$ lần lượt là $A'(3; 2)$, $B'(2; 4)$, $C'(4; 5)$.

b) Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

$A'(1; -1)$, $B'(0; -3)$, $C'(2; -4)$.

c) Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$

$A'(3; 1)$, $B'(4; -1)$, $C'(2; -2)$.

d) Vẽ hình ta được $A'(-1; 1)$, $B'(-3; 0)$, $C'(-4; 2)$.

e) Vẽ hình ta được $A'(2; -2)$, $B'(0; -6)$, $C'(4; -8)$.

Bài 2 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G và H tương ứng là trọng tâm và trực tâm của tam giác, các điểm A', B',C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

(a) Tìm phép vị tự F biến A, B, C tương tứng thành A', B',C'

(b) Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng.

(c) Tìm ảnh của O qua phép vị tự F

(d) Gọi A'', B'',C'' lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH; A_1, B_1,C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các tia AH, BH, CH với đường tròn (O); A'_1, B'_1,C'_1 tương ứng là chân các đường cao đi qua A, B, C. Tìm ảnh của A, B, C,A_1, B_1,C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số 1/2.

(e) Chứng minh chín điểm A', B',C',A'', B'',C'',A'_1, B'_1,C'_1 cùng thuộc một đường tròn (đường tròn này gọi là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC)

Lời giải:

(a) F là phép vị tự tâm G, tỉ số 1/2.

(b) Để ý rằng O là trực tâm của tam giác $A'B'C'$

(c) F(O) = O_1 là trung điểm của OH.

(d) Ảnh của A, B, C , A_1, B_1,C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số 1/2 tương ứng là A'', B'',C'',A'_1, B'_1,C'_1.

(e) Chứng minh A'', B'',C'',A'_1, B'_1,C'_1 cùng thuộc đường tròn (O_1). Sau đó chứng minh $A'B'C'$ cũng thuộc đường tròn (O_1) . Chẳng hạn , chứng minh $O_1A'_1 = O_1A'$

Bài 3 : Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, E là giao điểm của hai cạnh của hình thang ABCD và G là trọng tâm của tam giác ECD.

(a) Chứng minh rằng bốn điểm S, E, M, G cùng thuộc một mặt phẳng (α) và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) theo cùng một giao tuyến d.

(b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

(c) Lấy một điểm K trên đoạn SE và gọi $C' = SC \cap KB$, $D' = SD \cap KA$. Chứng minh rằng hai giao điểm của AC' và BD' thuộc đường thẳng d nói trên.

Lời giải:

a) Gọi N là giao điểm của EM và CD.

Vì M là trung điểm của AB nên N là trung điểm của CD (do ABCD là hình thang)

$\Rightarrow$ EN đi qua G

$\Rightarrow S, E, M, G \in (\alpha) = (SEM)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $(\alpha) \cap (SAC) = SO$

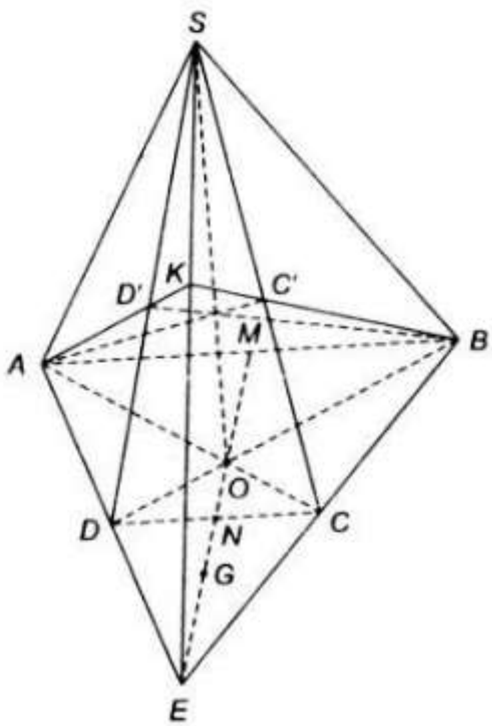
và $(\alpha) \cap (SBD) = SO = d$

b) Ta có $(SAD) \cap (SBC) = SE$.

c) Gọi $O' = AC' \cap BD'$.

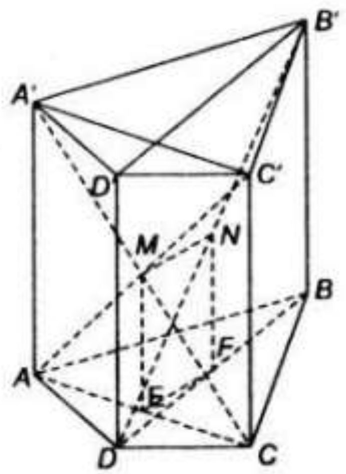
Ta có $AC' \subset (SAC)$, $BD' \subset (SBD)$

$\Rightarrow O' \in SO = d = (SAC) \cap (SBD)$.



Bài 4 : Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D' có E, F, M và N lần lượt là trung điểm của AC, BD, AC' và BD'. Chứng minh MN = EF.

Lời giải:



Tứ giác ACC'A' là hình bình hành nên AC' và AC cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường.

Ta có:

$$\begin{cases} ME // CC' \\ ME = \frac{1}{2}CC' \text{ (}ME\text{ là đường trung bình của tam giác ACC').} \end{cases}$$

Tương tự, trong tam giác DBB', ta có:

$$\begin{cases} NF // BB' \\ NF = \frac{1}{2}BB'. \end{cases}$$

Tứ giác MNFE là hình bình hành nên MN = EF.

Bài 5 (): Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và Đ'. Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh B'C'

Lời giải:

Gọi $\mathscr{S}$ là hình lập phương.

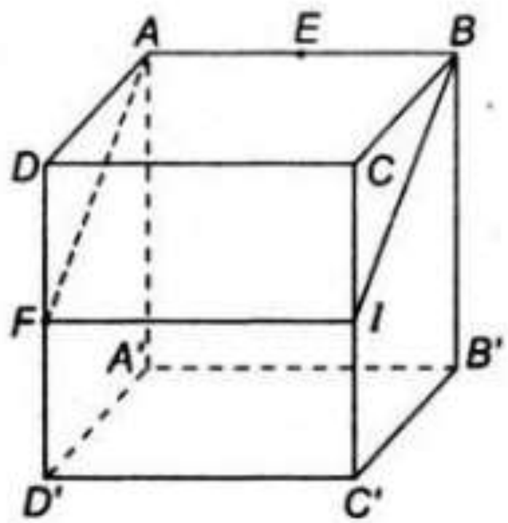
(EFB) $\cap$ $\mathscr{S}$ = ABIF với FI // AB (hình a)

(EFC) $\cap$ $\mathscr{S}$ = ECFH với CF // EH (hình b).

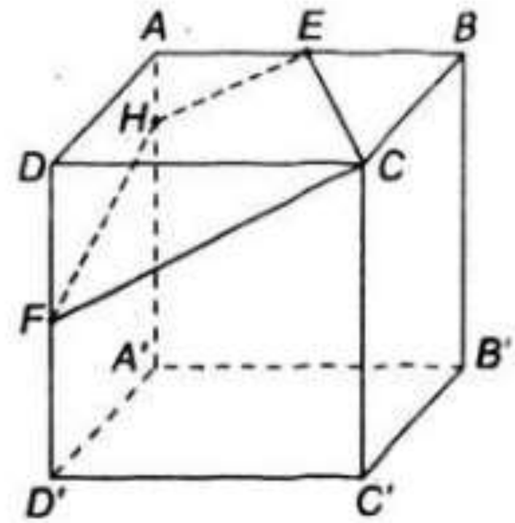
(EFC') $\cap$ $\mathscr{S}$ = EMC'FL với EM // FC' và FL // C'M (hình c)

Gọi E' là hình chiếu vuông góc của E trên mặt phẳng (A'B'C'D').

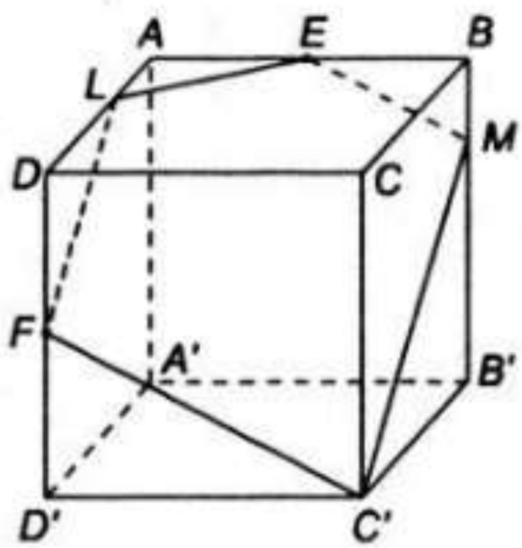
Gọi N = EF $\cap$ E'D', P = NK $\cap$ C'D'. Vẽ ER // KP, EQ // FP, ta có thiết diện là hình lục giác đều ERFPKQ (hình d)



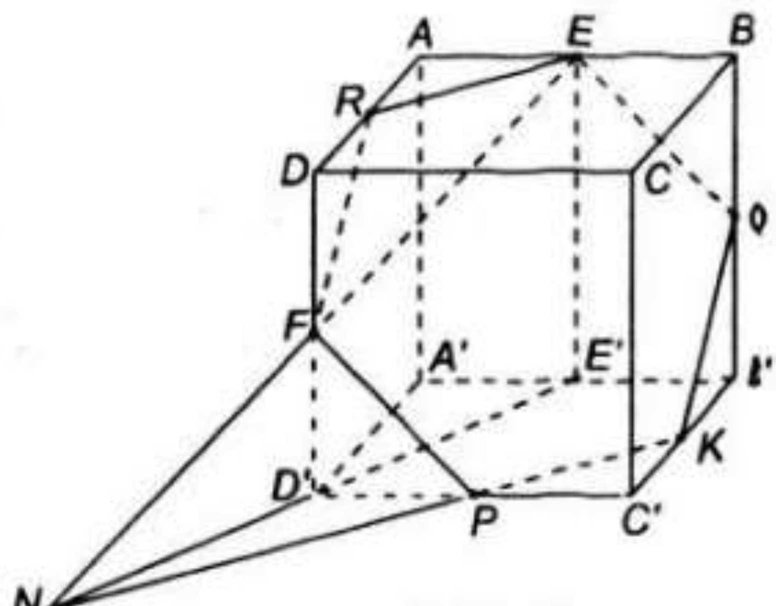
(Hình a)



(Hình b)



(Hình c)



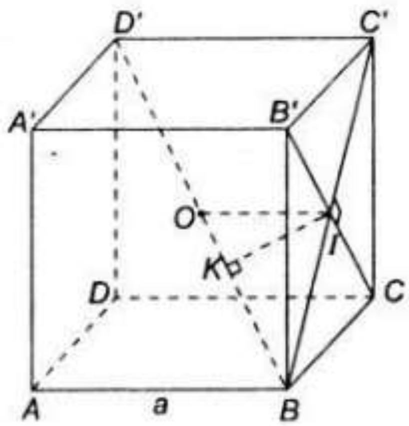
(Hình d)

Bài 6 : Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BD' và B'C.

b) Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và B'C

Lời giải:



a) Ta có $\left.\begin{matrix} B'C \perp BC' \\ B'C \perp D'C' \end{matrix}\right\} \Rightarrow B'C \perp (D'C'B)$.

Gọi I là tâm hình vuông BCC'B'.

Trong mặt phẳng (BC'D') vẽ IK ⊥ BD' tại K.

Ta có IK là đường vuông góc chung của BD' và B'C.

b) Gọi O là trung điểm của BD'.

Vì ΔIOB vuông tại I nên :

$$\frac{1}{KI^2} = \frac{1}{IO^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2}$$

$$\Rightarrow KI = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

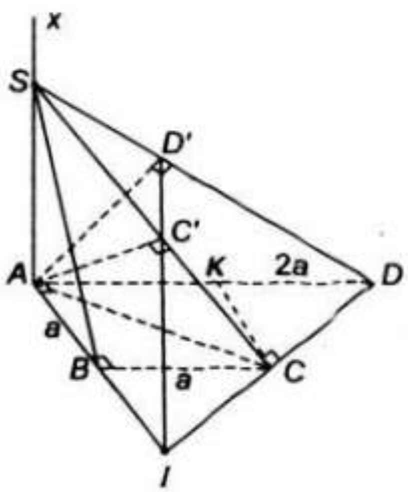
Bài 7 : Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, có AD = 2a, AB = BC = a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy một điểm S. Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc ucar A trên SC và SD . Chứng minh rằng :

a) $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.

b) AD', AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng.

c) Chứng minh rằng đường thẳng C'D' luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên tia Ax.

Lời giải:



a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{SBC} = 90^\circ$.

Gọi K là trung điểm của AD ta có $CK = AB = \frac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$$\Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \widehat{SCD} = 90^o$$

b) Trong mặt phẳng (SAC) vẽ $AC' \perp SC$ và trong mặt phẳng (SAD) vẽ $AD' \perp SD$.

Ta có $AC' \perp CD$ (vì $CD \perp (SAC)$)

và $AC' \perp SC$ nên suy ra $AC' \perp (SCD)$

$$\Rightarrow AC' \perp SD.$$

Ta lại có $AB \perp AD$ và $AB \perp SA$

nên $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$.

Ba đường thẳng AD', AC' và AB cùng đi qua điểm A và vuông góc với SD nên cùng nằm trong mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SD.

c) Ta có C'D' là giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SCD). Do đó khi S di động trên tia Ax thì C'D' luôn luôn đi qua điểm I cố định là giao điểm của AB và CD.

$$(AB \subset (\alpha), CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SCD) = C'D').$$