Bài 1 : Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35$ trên các đoạn [-4; 4] và [0; 5]

b) $y = x^4 - 3x^2 + 2$ trên các đoạn [0; 3] và [2; 5]

c) $y = \frac{2-x}{1-x}$ trên các đoạn [2; 4] và [-3; -2]

d) $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn [-1; 1]

Lời giải:

a) TXĐ: D = R.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Rightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.

- Xét hàm số trên đoạn [-4; 4]

Vì -1 và 3 đều thuộc đoạn [-4; 4] nên ta tính các giá trị của hàm tại các điểm -4; 4; -1; 3.

Ta có: y(-4) = -41; y(4)= 15; y(-1) = 40; y(3)= 8

Vậy, giá trị lớn nhất của hàm số trên [-4; 4] là:

$$\max_{[-4;4]} y = \max_{[-4;4]} \{-41, 8, 15, 40\} = 40$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [-4; 4] là:

$$\min_{[-4;4]} y = \min_{[-4;4]} \{-41, 8, 15, 40\} = -41$$

- Trên đoạn [0; 5]: ta thấy y' = 0 tại $x = 3 \in [0; 5]$

Ta có: y(0) = 35; y(5)= 40; y(3)= 8

Vậy, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên [0; 5] là:

$$\min_{[0;5]} y = \min_{[0;5]} \{35, 8, 40\} = 8$$

Giá trị lớn nhất của hàm số trên [0; 5] là:

$$\max_{[0;5]} y = \max_{[0;5]} \{35, 8, 40\} = 40$$

(Các phần b, c, d) dưới đây trình bày theo một cách khác, ngắn gọn hơn, nhưng vẫn bám sát theo cấu trúc trên.

b) TXĐ: D = R

y' = $4x^3$ - 6x

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\min_{[0;3]} y = \min\left\{y(0), y(3), y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right\} = \min\left\{2; 56; -\frac{1}{4}\right\} = -\frac{1}{4}$$

$$\max_{[0;3]} y = \max\left\{2; 56; -\frac{1}{4}\right\} = 56.$$

Do $\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \notin [2;5]$ nên:

$$\min_{[2;5]} y = \min\{y(2), y(5)\} = \min\{6; 552\} = 6.$$

$$\max_{[2;5]} y = \max\{6; 552\} = 552.$$

c) TXĐ: D = $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

$$y' = \frac{1}{(x-1)^2} > 0\ (\forall x \neq 1)$$

=> Hàm số đồng biến trên D.

+ Trên đoạn [2; 4]:

$$\Rightarrow \min_{[2;4]} y = \min\{y(2), y(4)\} = \min\left\{0, \frac{2}{3}\right\} = 0.$$

$$\max_{[2;4]} y = \max\{y(2), y(4)\} = \max\left\{0, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}.$$

+ Trên đoạn [-3; -2]

$$\Rightarrow \min_{[-3;-2]} y = \min\{y(-3), y(-2)\} = \min\left\{\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right\} = \frac{5}{4}.$$

$$\max_{[-3;-2]} y = \max\{y(-3), y(-2)\} = \max\left\{\frac{5}{4}, \frac{4}{3}\right\} = \frac{4}{3}.$$

d) TXĐ: D = (-∞; 5/4]

$$y' = -\frac{2}{\sqrt{5-4x}} < 0 \, \forall x \in D$$

=> Hàm số nghịch biến trên D.

Khi đó trên đoạn [-1; 1]:

$$\min_{[-1;1]} y = \min\{y(-1), y(1)\} = \min\{1; 3\} = 1.$$

$$\max_{[-1;1]} y = \max\{1; 3\} = 3.$$

Bài 2 : Trong số các hình chữ nhật có cùng chu vi 16cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.

Lời giải:

Nửa chu vi hình chữ nhật là: 16:2 = 8cm

Gọi chiều dài hình chữ nhật là x (cm) thì cạnh kia có độ dài là (8 - x) (cm) (với x ∈ [0; 8]).

Diện tích của hình chữ nhật là:

$y = S(x) = x(8 - x) = -x^2 + 8x$

Xét hàm số trên ta có: D = [0; 8]

$y' = -2x + 8 = -2(x - 4)$

$y' = 0 \Rightarrow x = 4$

$$\Rightarrow \max_{[0;8]} y = \max\{S(0), S(8), S(4)\} = \max\{0, 0, 16\} = 16$$

Hàm số đạt giá trị cực đại tại x = 4 (=> cạnh còn lại là 8 - 4 = 4) hay trong số các hình chữ nhật có chu vi 16cm thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

(**Lưu ý:** Thay vì xét max, min như trên, bạn cũng có thể sử dụng Bất đẳng thức Cô-si với hai số x và x - 8 để suy ra kết quả tương tự.)

Bài 3 : Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích 48 m2, hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.

Lời giải:

Gọi độ dài một cạnh của hình chữ nhật là x (m) thì độ dài cạnh còn lại là 48/x (m) (điều kiện: x > 0).

Khi đó chu vi hình chữ nhật là:

$$y = P(x) = 2\left(x + \frac{48}{x}\right) = 2x + \frac{96}{x}$$

Xét hàm số trên (0; +∞):

$$y' = 2 - \frac{96}{x^2};\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}\ (\text{loại } x = -4\sqrt{3})$$

Bảng biến thiên:

x	0		$4\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		y_{CT}		$+\infty$

Suy ra $\min_D y = y\left(4\sqrt{3}\right) = 16\sqrt{3}.$

Hàm số đạt cực tiểu tại x = 4√3 hay trong các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 m^2 thì hình vuông cạnh 4√3 m là hình có chu vi nhỏ nhất.

Bài 4 : Tính giá trị lớn nhất của các hàm số sau:

$$a)\ y = \frac{4}{1+x^2} \quad ; \qquad b)\ y = 4x^3 - 3x^4$$

Lời giải:

a) D = R

Ta thấy: 1 + x^2 ≥ 1

$$\Rightarrow 0 < y = \frac{4}{1+x^2} \le 4$$

=> Hàm số có giá trị lớn nhất là 4 khi 1 + x^2 = 1 => x = 0

Vậy:

$$\max_D y = 4$$

(Cách khác: tính đạo hàm và lập bảng biến thiên)

b) D = R

y' = $12x^2$ - $12x^3$ = $12x^2$(x - 1)

y' = 0 => x = 0 ; x = 1

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	+	0	–	
y					y(1)		

Từ bảng biến thiên suy ra: max y = y(1) = 1

$$\max_D y = y(1) = 1$$

Bài 5 : Tính giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$a)\ y = |x| \quad ; \qquad b)\ y = x + \frac{4}{x}\ (x > 0).$$

Lời giải:

a)

- Cách 1:

Ta có: y = |x| ≥ 0 ∀ x

=> Hàm số có giá trị nhỏ nhất là min y = 0 khi x = 0.

- Cách 2:

$$y = |x| = \begin{cases} -x \; với \; x \in (-\infty; 0) \\ x \; với \; x \in (0; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: min y = 0

b) D = (0; +∞)

$$y' = 1 - \frac{4}{x^2}$$

y' = 0 => x = 2 (loại x = -2 vì ∉ (0; +∞))

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		‖	$-$	0	$+$	
y		‖ $+\infty$	↘	$y(2)$	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra: min y = y(2) = 4