Bài 1 : Chứng minh rằng với n ∈ N*, ta có các đẳng thức:

$$\text{a. } 2+5+8+\ldots+3n-1=\frac{n(3n+1)}{2} \qquad (1)$$

$$\text{b. } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^{n-2}}{2^n} \qquad (2)$$

$$\text{c. } 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3)$$

Lời giải:

a.Với n = 1, ta có:

VT = 3 – 1 = 2

VP = (3 + 1)/2

Vậy VT = VP (1) đúng với n = 1

Giả thiết (1) đúng với n = k ≥ 1 nghĩa là:

2 + 5 + 8 + …+3k – 1 = k(3k+1)/2 (1a)

Ta chứng minh (1a) đúng với n = k + 1 nghĩa là chứng minh:

$$2+5+8+\ldots+3k-1+3(k+1)-1$$
$$=\frac{(k+1)\left[3(k+1)+1\right]}{2}=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

$$(1a) \Leftrightarrow 2+5+8+\ldots+3k-1+3(k+1)-1$$
$$=\frac{k(3k+1)}{2}+3(k+1)-1$$
$$=\frac{3k^2+7k+4}{2}=\frac{(k+1)(3k+4)}{2}$$

$\Rightarrow$ (1) đúng với $n = k + 1$, vậy (1a) đúng với $n \in N$.

$$\text{b. } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{2^n-1}{2^2}$$

$$\text{với } n=1 \text{ thì } \left.\begin{array}{l} VT=\dfrac{1}{2} \\ VP=\dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow VT=VP$$

Vậy (2) đúng với n = 1

Giả sử đẳng thức đúng với n = k, tức là:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}=\frac{2^k-1}{2^k}$$

Khi đó, ta có:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...+\frac{1}{2^k}=\frac{2^k-1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=\frac{2^{k+1}.2^k-2^{k+1}+2^k}{2^k(2^{k+1})}=\frac{2^k\left[2^{k+1}-1\right]}{2^k(2^{k+1})}=\frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}}$$

(2) đúng với n = k + 1. Vậy nó đúng với mọi n ∈ N*

$$c.1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (3)$$

Khi n = 1, vế trái bằng 1

$$VP=\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=1\Rightarrow VT=VP$$

Vậy (3) đúng với n = 1

*giả sử đẳng thức (3) đúng với n = k nghĩa là:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad (3a)$$

Ta phải chứng minh (3a) đúng khi n = k + 1

+ Ta cộng 2 vế của (3) cho $(k + 1)^2$

$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$

$$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)}{6}[\,k(2k+1) + 6(k+1)]$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

Vậy đẳng thức đúng với n = k + 1. Do đó, đẳng thức đúng với mọi $n \in N^*$

Bài 2 : Chứng minh rằng với n ∈ N*

a. $n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3.

b. $4^n + 15n – 1$ chia hết cho 9

c. $n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Lời giải:

Đặt $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n$

+Ta có: với n = 1

$A_1 = 1 + 3 + 5 = 9$ chia hết 3

+giả sử với n = k ≥ 1 ta có:

$A_k = (k^3 + 3k^2 + 5k)$ chia hết 3 (giả thiết quy nạp)

+Ta chứng minh $A_k + 1$ chia hết 3

Thật vậy, ta có:

$A(k+1) = (k+1)^3 + 3(k+1)^2 + 5(k+1)$

$= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 3k^2 + 6k + 3 + 5k + 5$

$= (k^3 + 3k^2 + 5k) + 3k^2 + 9k + 9$

Theo giả thiết quy nạp A_k chia hết 3, hơn nữa 9(k + 1) chia hết 3

Nên $A_n = n^3 + 3n^2 + 5n$ chia hết cho 3 với mọi $\forall n \in N^*$

b.$4^n + 15n – 1$ chia hết cho 9

đặt $A_n = 4^n + 15n – 1$

với n = 1 => $A_1 = 4 + 15 – 1 = 18$ chia hết 9

+ giả sử với n = k ≥ 1 ta có:

$A_k = (4^k + 15k – 1)$ chia hết 9 (giả thiết quy nạp)

+Ta chứng minh: A_{k+1} chia hết 9

Thật vậy, ta có:

$A_{k+1} = (4^{k+1} + 15(k + 1) – 1) = 4^k.4^1 + 15k + 15 – 1$

$= (4^k + 15k – 1) + (3.4^k + 15) = A_k + 3(4^k + 5)$

Theo giả thiết quy nạp A_k chia hết 9, hơn nữa:

$3(4^k + 5)$ chia hết 9 (chứng minh tương tự) ∀k≥ 1 nên A_{k+1} chia hết 9

Vậy $A_n = 4^n + 15n – 1$ chia hết cho 9 $\forall n \in N^*$

c.$n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

Đặt $U_n = n^3 + 11n$

+Với n = 1 => $U_1 = 12$ chia hết 6

+giả sử với n = k ≥ 1 ta có:

$U_k = (k^3 + 11k)$ chia hết 6 (giả thiết quy nạp)

Ta chứng minh: U_{k+1} chia hết 6

Thật vậy ta có:

$U_{k+1} = (k + 1)^3 + 11(k +1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 11k + 11$

$= (k^3 + 11k) + 3k^2 + 3k + 12 = U_k + 3(k^2 + k + 4)$

+Theo giả thiết quy nạp thì:

U_k chia hết 6, hơn nữa $3(k^2 + k + 4)=3(k(k+1)+4)$ chia hết 6 $\forall k \geq 1$ (2 số liên tiếp nhân với nhau chia hết cho 2)

Do đó: U_{k+1} chia hết 6

Vậy: $U_n = n^3 + 11n$ chia hết cho 6 $\forall n \in N^*$

Bài 3 (): Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ≥ 2, ta có các bất đẳng thức:

a. $3^n > 3n + 1$

b. $2^{n+1} > 2n + 3$

Lời giải:

a. $3n > 3n + 1$ (1)

+ Với n = 2 thì (1) <=> 8 > 7

Luôn luôn đúng khi x = 2

+ giả thiết mệnh đề (1) đúng khi

$n = k \geq 2$, nghĩa là $3^k > 3k + 1$

Ta sẽ chứng minh (1) đúng khi n = k + 1 nghĩa là chứng minh:

$3^{k+1} = 3.3^k > 3(3k + 1)$ (theo giả thiết)

$3(3k + 1) = 9k + 3 = 3(k +1) + 6k > 3(k + 1)$ (vì k > 2)

Vậy $3^{k+1} >3(k + 1) + 1$

Mệnh đề đúng với n = k + 1, do đó đúng với mọi n ≥ 2

b. $2^{k+1} > 2n + 3$

+Với n = 2, ta có: $2^3 = 8 > 2.2 + 3 = 7$

Vậy mệnh đề đúng khi x = 2.

+giả thiết mệnh đề đúng khi $n = k \geq 2$, nghĩa là $2^{k+1} > 2k + 3$ (2)

+ Ta sẽ chứng minh (1) đúng khi n = k + 1, nghĩa là chứng minh:

$2^{[(k+1)+1]} > 2(k + 1) + 3$ hay $2^{k+2} > 2k + 5$

Nhân hai vế của (2) cho 2, ta được:

$2^{k+1}.2 = 2^{k+1} > 2(2k + 3) = 4k + 6 = 2k + (2k + 6)$ (3)

Mà $k \geq 2 \Rightarrow 2k + 6 = 2.2 + 6 = 10 > 5$

(3) => $2^{k+1} > 2k + 5$ (2)

Mệnh đề đúng với n = k + 1 nên cũng đúng ∀ n ∈ N*.

Bài 4 (trang 83 SGK Đại số 11):

Cho tổng $S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$ với $n \in N^*$

a.Tính S_1, S_2, S_3

b.Dự đoán công thức tính tổng S^n và chứng minh bằng quy nạp.

Lời giải:

$$a.S_1 = \frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2+1}$$

$$S_3 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{3+1}$$

b.Dự đoán:

$$S_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad (1)$$

Ta chứng minh đẳng thức (1) bằng quy nạp

Với n = 1 thì (1) đúng

Giả sử (1) đúng với n = k, ta có:

$$S_k = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

Khi đó với n = k + 1 thì tổng vế trái của (1) là:

$$S_{k+1} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{(k+1)+1}$$

Vậy (1) đúng với n = k + 1, do đó đúng với mọi n ∈ N*

Bài 5 : Chứng minh rằng số đường chéo của một đa giác lồi n cạnh là n(n-3)/2

Lời giải:

Số đoạn thẳng (cả cạnh và đường chéo) trong một đa giác lồi n cạnh là C_{n2} đoạn thẳng. Suy ra số đường chéo của đa giác lồi có n cạnh là:

$$C_n^2 - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!} - n$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2} \text{ (đpcm)}$$