Методы оптимизации

13 февраля 2024 г.

Содержание

Литература.

1. *Васильев — Численные методы решения экстремальных задач*. Функциональный анализ, сжато, сложно, математично.

1 Основные понятия

Терминология.

1. Целевая функция — функция, у которой мы ищем экстремум.

2. Объект оптимизации — то, что мы оптимизируем.

3. Параметры оптимизации — параметры, от которых зависит целевая функция (аргументы).

4. Ограничения — равенства и неравенства, наложенные на параметры.

Пример 1. Спроектировать бак горючего в виде прямого кругового цилиндра с заданным объёмом V, на изготовление которого будет потрачено наименьшее количество листовой стали, то есть он должен иметь *наименьшую площадь поверхности*.

Решение. Параметры оптимизации: R и H. Целевая функция — функция площади поверхности, $S = 2\pi R^2 + 2\pi RH = 2\pi R(R+H) \to \min$. Ограничения: $\pi R^2 H = V$ $(V > 0)$; R, $H > 0$. По известной формуле

$$H = \frac{V}{\pi R^2}.$$

Тогда

$$S = 2\pi R\left(\frac{V}{\pi R^2} + R\right) = \frac{2\pi RV}{\pi R^2} + 2\pi R^2 =$$
$$= \frac{2V}{R} + 2\pi R^2 = \frac{V}{R} + \frac{V}{R} + 2\pi R^2 \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{V}{R}\frac{V}{R}2\pi R^2} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}. = S_{\min}.$$

Здесь было использовано неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим. Есть способ проще (через производные). Тогда $S = S_{\min}$ при $V/R = 2\pi R^2$, то есть $V = 2\pi R^3$ и $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, а

$$H = \frac{V}{\pi R^2} = \frac{V\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi\sqrt[3]{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}.$$

Отсюда

$$2R = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8^4 V}{2\pi}} = H.$$

□

Линейное программирование придумали в России (см. Канторович).

Пример 2 (линейное программирование). Предприятие выпускает m наименований продукции, используя n видов ресурсов. Обозначим a_{ij} — затраты i-го вида ресурса на производство j-го вида продукции; x_j — планируемый объём выпуска продукции; d_j — цена единицы продукции j-го вида; а $(x_1, \ldots, x_n)$ — оптимальный план. Через b_i обозначим общий запас ресурса вида i.

Тогда целевая функция имеет вид

$$S = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \max,$$

а ограничения будут следующими: $a_j \leqslant x_j \leqslant A_j$; $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i$. Нишевые продукты тоже должны производиться. Аналогично, в транспортной задаче, задаче коммивояжёра и пр.

2 Интерполяция

1. Имеется набор значений функции где можно считать, что $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ (во всяком случае, все они попарно различны). Тогда существует единственный многочлен f степени $\deg f \leqslant n$, такой что $f(x_i) = y_i$, где $i = 0, \ldots, n$.

Запишем многочлен в виде

$$f = a_0 + a_1 x_+ \ldots + a_n x^n,$$
$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0, \\ \ldots, \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Здесь $(n+1)$ уравнение и столько же переменных. Определитель СЛАУ есть определитель Вандермонда, он не равен нулю, поскольку все точки x_i попарно различны. Поэтому система имеет и единственное решение. Эту систему можно просто решить. Можно поступить хитрее.

Второй способ.

По теореме Безу g_0 $x_1, \ldots, x_n$ — корни, откуда $g \vdots (x - x_1), \ldots, (x - x_n)$. $g_0(x) = c_0(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, $c_0 \in \mathbb{R}$. $1 = g_0(x_0) = c_0(x_0 - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_0 - x_n)$, поэтому

$$g_0(x) = \frac{(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \ldots (x_0 - x_n)} = \frac{\prod_{i=1}^n (x - x_i)}{\prod_{i=1}^n (x_0 - x_1)}.$$

Тогда

$$f(x) = y_0 g_0(x) + y_1 g_1(x) + \ldots + y_n g_n(x),$$
$$f(x_0) = y_0 g_0(x_0) + y_1 g_1(x_0) + \ldots + y_n g_n(x_0) \ldots,$$

где на второй строчке $g_0(x_0) = 1$, $g_1(x_0) = 0$, $g_n(x_0) = 0$.

Интерполяционный полином Лагранжа. Получили формулу

$$f(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod\limits_{j=0,\ldots,n; j \neq i} (x - x_j)}{\prod\limits_{j=0,\ldots,n; j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Третий способ.

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= y_0, \\
(f_1 - f_0)(x_0) = 0 \implies (x - x_0) \mid f_1 - f_0 &\implies = q_1(x - x_0), \\
f_1 &= f_0 + q_1(x - x_0), \quad y_1 = f_1(x_1) = f_0(y_1) + q_1(x_1 - x_0), \\
q_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad f_1 = y_0 + \frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_0}(x - x_0), \\
f_i - f_{i-1} &= q_i(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1}), \\
y_i &= f_i(x_i) = f_{i-1}(x_i) + q_i(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1}), \\
a_i &= \frac{y_i - f_{i-1}(x_i)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})}.
\end{aligned}$$

Интерполяция помогает и удобный инструмент, когда точек мало. Когда точек много, точная интерполяция сложна и бессмысленна.

2. Приближённая интерполяция. Когда точек много и точки известны приблизительно, используют приближённую интерполяцию. *Метод наименьших квадратов.*

Ищем многочлен f степени $\deg f = m < n$. Так называемая *«невязка»* $y_k - f(x_k)$. Как минимизировать невязки? Самый популярный способ — минимизировать сумму квадратов невязок. Тогда

$$\Phi(a_0, \ldots, a_m) = \sum_{k=0}^{n} (a_0 + a_1 x_k + \ldots + a_m x_k^m - y_k)^2 \to \min .$$