## 1.1. SƠ LƯỢC VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ

### 1.1.1. Mệnh đề

Lôgích mệnh đề là một hệ thống lôgích đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các *mệnh đề* mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định ta dùng các chữ cái $p$, $q$, $r$ … và gọi chúng là các *biến mệnh đề*.

Nếu mệnh đề $p$ đúng ta cho $p$ nhận giá trị 1 và $p$ sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là *thể hiện* của $p$.

*Mệnh đề phức hợp* được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản hơn bằng các phép liên kết lôgích mệnh đề



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

### 1.1.2. Các phép liên kết lôgích mệnh đề

**1. Phép phủ định** (negation)

Phủ định của mệnh đề $p$ là mệnh đề được ký hiệu $\overline{p}$ đọc là không $p$

Mệnh đề $\overline{p}$ đúng khi p sai và $\overline{p}$ sai khi p đúng

**2. Phép hội** (conjunction)

Hội của hai mệnh đề $p, q$ là mệnh đề được ký hiệu $p\wedge q$ (đọc là $p$ và $q$)

Mệnh đề $p\wedge q$ chỉ đúng khi $p$ và $q$ cùng đúng

**3. Phép tuyển** (disjunction)

Tuyển của hai mệnh đề $p, q$ là mệnh đề được ký hiệu $p\vee q$ ($p$ hoặc $q$)

Mệnh đề $p\vee q$ chỉ sai khi $p$ và $q$ cùng sai



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

**4. Phép kéo theo** (implication)

Mệnh đề $p$ kéo theo $q$, ký hiệu $p\Rightarrow q$, (đọc $p$ kéo theo $q$, $p$ suy ra $q$)

Mệnh đề $p$ kéo theo $q$ chỉ sai khi $p$ đúng $q$ sai

**5. Phép tương đương** (equivalence)

Mệnh đề $p$ tương đương $q$, $p\Leftrightarrow q$, là mệnh đề $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$

Mệnh đề $p\Leftrightarrow q$ đúng khi cả hai mệnh đề $p$ và $q$ cùng đúng hoặc cùng sai và mệnh đề $p\Leftrightarrow q$ sai trong trường hợp ngược lại

Một công thức gồm các biến mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề được gọi là một *công thức mệnh đề*

Bảng liệt kê các thể hiện của công thức mệnh đề được gọi là *bảng chân trị*



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

Một công thức mệnh đề được gọi là hằng đúng nếu nó luôn nhận giá trị 1 trong mọi thể hiện của các biến mệnh đề có trong công thức.

Ta ký hiệu mệnh đề tương đương hằng đúng là "≡" thay cho "⇔"

| $p$ | $\overline{p}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ | $p\vee q$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

| $p$ | $q$ | $p\Rightarrow q$ | $q\Rightarrow p$ | $p\Leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

### 1.1.3. Các tính chất

Dùng bảng chân trị ta dễ dàng kiểm chứng các mệnh đề hằng đúng

1) $\overline{\overline{p}}\equiv p$ *luật phủ định kép*

2) $(p\Rightarrow q)\equiv(\overline{p}\vee q)$

3) $p\wedge q\equiv q\wedge p$, $p\vee q\equiv q\vee p$ *luật giao hoán*

4) $p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$
$p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r$ *luật kết hợp*

5) $\left[p\wedge(q\vee r)\right]\equiv\left[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\right]$
$\left[p\vee(q\wedge r)\right]\equiv\left[(p\vee q)\wedge(p\vee r)\right]$ *luật phân phối*

6) Mệnh đề $p\vee\overline{p}$ luôn đúng *luật bài trung*
$p\wedge\overline{p}$ luôn sai *luật mâu thuẫn*

7) $\overline{p\vee q}\equiv\overline{p}\wedge\overline{q}$; $\overline{p\wedge q}\equiv\overline{p}\vee\overline{q}$ *luật De Morgan*



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

## 1.2. TẬP HỢP

### 1.2.1. Khái niệm tập hợp

Khái niệm tập hợp và phần tử là khái niệm cơ bản của toán học, không thể định nghĩa qua các khái niệm đã biết

Các khái niệm "tập hợp", "phần tử" xét trong mối quan hệ phần tử của tập hợp trong lý thuyết tập hợp là giống với khái niệm "đường thẳng", "điểm" và quan hệ điểm thuộc đường thẳng được xét trong hình học

Tập hợp được đặc trưng tính chất rằng một phần tử bất kỳ chỉ có thể hoặc thuộc hoặc không thuộc tập hợp

Nếu phần tử $x$ thuộc $A$ ta ký hiệu $x\in A$

$x$ không thuộc $A$ ta ký hiệu $x\notin A$

Có thể biểu diễn tập hợp theo hai cách sau

**a**) Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp trong dấu ngoặc nhọn

**Ví dụ 1.1**: *Tập các số tự nhiên lẻ nhỏ hơn 10 là* $\{1,3,5,7,9\}$

*Tập hợp các nghiệm của phương trình* $x^2-1=0$ *là* $\{-1,1\}$

**b**) Nêu đặc trưng tính chất của các phần tử tạo thành tập hợp

**Ví dụ 1.2**: Tập hợp các số tự nhiên chẵn $P=\{n\in\mathbb{N} \mid n=2m,\ m\in\mathbb{N}\}$.

Tập hợp có thể được biểu diễn bằng cách đặc trưng tính chất của phần tử thông qua khái niệm *hàm mệnh đề*

Hàm mệnh đề xác định trong tập hợp $D$ là một mệnh đề $S(x)$ phụ thuộc vào biến $x\in D$. Khi cho biến $x$ một giá trị cụ thể thì ta được mệnh đề lôgích (mệnh đề chỉ nhận một trong hai giá trị hoặc đúng hoặc sai)

Tập hợp các phần tử $x\in D$ sao cho $S(x)$ đúng là miền đúng của hàm mệnh đề $S(x)$ và ký hiệu $\{x\in D \mid S(x)\}$





### 1.2.3. Một số tập hợp số thường gặp

- Tập các số tự nhiên $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, ...\}$.
- Tập các số nguyên $\mathbb{Z}=\{0, \pm1, \pm2, ...\}$.
- Tập các số hữu tỉ $\mathbb{Q}=\{p/q \mid q\neq 0,\ p,q\in\mathbb{Z}\}$.
- Tập các số thực $\mathbb{R}$ (gồm các số hữu tỉ và vô tỉ).
- Tập các số phức $\mathbb{C}=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R};\ i^2=-1\}$.





### 1.2.4. Tập con

Tập $A$ được gọi là tập con của $B$ nếu mọi phần tử của $A$ đều là phần tử của $B$, khi đó ta ký hiệu $A\subset B$ hay $B\supset A$

$$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

Hai tập $A,B$ bằng nhau, ký hiệu $A=B$ khi và chỉ khi $A\subset B$ và $B\subset A$

Để chứng minh $A\subset B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Rightarrow x\in B$

Để chứng minh $A=B$ ta chỉ cần chứng minh $x\in A\Leftrightarrow x\in B$

***Tập rỗng*** là tập không chứa phần tử nào, ký hiệu $\varnothing$

Một cách hình thức ta có thể xem tập rỗng là tập con của mọi tập hợp





***Tập hợp tất cả các tập con*** của $X$ được ký hiệu $\mathscr{P}(X)$

Vậy $A\in\mathscr{P}(X)$ khi và chỉ khi $A\subset X$

Tập $X$ là tập con của chính nó nên là phần tử lớn nhất

$\varnothing$ là phần tử bé nhất trong $\mathscr{P}(X)$

**Ví dụ 1.5**: $X=\{a,b,c\}$

$$\mathscr{P}(X)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},X\}$$

Nếu $X$ có $n$ phần tử thì $\mathscr{P}(X)$ có $2^n$ phần tử





### 1.2.5 Các phép toán trên các tập hợp

**1. Phép hợp**

Hợp của hai tập $A$ và $B$, ký hiệu $A\cup B$, là tập gồm các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập $A$, $B$

$$(x\in A\cup B)\Leftrightarrow((x\in A)\vee(x\in B))$$

**2. Phép giao**

Giao của hai tập $A$ và $B$, ký hiệu $A\cap B$, là tập gồm các phần tử thuộc đồng thời cả hai tập $A$, $B$

$$(x\in A\cap B)\Leftrightarrow((x\in A)\wedge(x\in B))$$

**3. Hiệu của hai tập**

Hiệu của hai tập $A$ và $B$, ký hiệu $A\backslash B$, là tập gồm các phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$

$$(x\in A\setminus B)\Leftrightarrow((x\in A)\wedge(x\notin B))$$





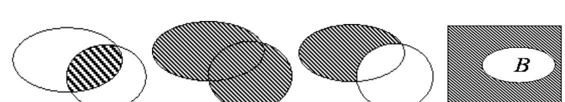
Thông thường giả thiết tất cả các tập được xét là các tập con của một tập cố định gọi là *tập phổ dụng* $U$. Tập $U\backslash B$ được gọi là phần bù của $B$ trong $U$ và được ký hiệu là $C_U^B$ hoặc $\overline{B}$

**Ví dụ 1.5**

Xét các tập $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,d,e,f\}$, $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f\},\ A\cap B=\{b,d\},\ A\setminus B=\{a,c\}$$

$$C_U^A=\{e,f,g,h\},\ C_U^B=\{a,c,g,h\}$$




$A\cap B$ $A\cup B$ $A\setminus B$ $C_U^B$

**Ví dụ 1.6:**

Chứng minh rằng nếu $A\cup C\subset A\cup B,\ A\cap C\subset A\cap B$ thì $C\subset B$

**Tính chất**

1. $A\cup B=B\cup A,\ \ A\cap B=B\cap A$ *tính giao hoán*
2. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ *tính kết hợp*
3. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
   $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ *tính phân bố*
4. $\overline{\overline{A}}=A;\ A\cup\varnothing=A;\ A\cap U=A$
5. $A\cup\overline{A}=U;\ A\cap\overline{A}=\varnothing$
6. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ *luật De Morgan*
7. $A\setminus B=A\cap\overline{B}=A\cap\left(\overline{A\cap B}\right)=A\setminus(A\cap B)=C_A^{A\cap B}$
8. $A\cup A=A,\ A\cap A=A$ *tính lũy đẳng*



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

### 1.2.7 Lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại

Giả sử $S(x)$ là một hàm mệnh đề xác định trên tập $D$ có miền đúng $D_{S(x)}=\{x\in D | S(x)\}$

**a)** Mệnh đề $\forall x\in D, S(x)$ (đọc là với mọi $x\in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)}=D$ và sai trong trường hợp ngược lại

Ký hiệu ∀(đọc là với mọi) được gọi là ***lượng từ phổ biến***

Khi $D$ đã xác định thì ta thường viết tắt $\forall x, S(x)$ hay $(\forall x), S(x)$

**b)** Mệnh đề $\exists x\in D, S(x)$ (đọc là tồn tại $x\in D, S(x)$) là một mệnh đề đúng nếu $D_{S(x)}\neq\varnothing$ và sai trong trường hợp ngược lại

Ký hiệu ∃(đọc là tồn tại) được gọi là ***lượng từ tồn tại***

Mở rộng khái niệm lượng từ tồn tại với ký hiệu $\exists! x\in D, S(x)$ (đọc là tồn tại duy nhất $x\in D, S(x)$) nếu $D_{S(x)}$ có đúng một phần tử



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

**Phép phủ định lượng từ**

$$\overline{\forall x\in D, S(x)}\Leftrightarrow\left(\exists x\in D, \overline{S(x)}\right)$$
$$\overline{\exists x\in D, S(x)}\Leftrightarrow\left(\forall x\in D, \overline{S(x)}\right)$$

**Ví dụ 1.7**

Theo định nghĩa của giới hạn

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0; \forall x:\ \ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$$

Sử dụng mệnh đề hằng đúng $(p\Rightarrow q)\equiv(\overline{p}\vee q)$

ta có $0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon$ tương đương với

$$\overline{\left(|x-a|<\delta\right)}\vee\left(|f(x)-L|<\varepsilon\right)$$

Vậy phủ định của $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ là

$$\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0; \exists x:\ \left(0<|x-a|<\delta\right)\wedge\left(|f(x)-L|\geq\varepsilon\right)$$



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

## 1.3. Tích Descartes và Quan hệ

### 1.3.1 Tích Descartes của các tập hợp

Tích Descartes của hai tập $X$, $Y$ là tập, ký hiệu $X\times Y$, gồm các phần tử có dạng $(x,y)$ trong đó $x\in X$ và $y\in Y$

$$X\times Y=\{(x,y) | x\in X \text{ và } y\in Y\}$$

**Ví dụ 1.9** $X=\{a,b,c\},\quad Y=\{1,2\}$

$$X\times Y=\{(a,1),(b,1),(c,1),(a,2),(b,2),(c,2)\}$$

Có thể chứng minh được rằng nếu $X$ có $n$ phần tử, $Y$ có $m$ phần tử thì $X\times Y$ có $n\times m$ phần tử

Tích Descartes của $n$ tập hợp $X_1, X_2, ..., X_n$

$$X_1\times X_2\times...\times X_n=\{(x_1,x_2,...,x_n) | x_i\in X_i, i=1,2,...,n\}$$



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

**Nhận xét 1.1**

1. Với mọi $(x_1,...,x_n)\in X_1\times...\times X_n; (x'_1,...,x'_n)\in X_1\times...\times X_n$
   ta có $(x_1,...,x_n)=(x'_1,...,x'_n)\Leftrightarrow x_i=x'_i, \forall i=1,...,n$
2. Tích Descartes $X_1\times X_2\times...\times X_n$ còn được ký hiệu $\prod_{i\in I} X_i$
3. Tích Descartes của các tập hợp không có tính giao hoán
4. Khi $X_1=...=X_n=X$ ta ký hiệu $X^n$ thay cho $\underbrace{X\times...\times X}_{n\ lan}$

Chẳng hạn $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n) | x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}\}$

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y) | x,y\in\mathbb{R}\}\qquad \mathbb{R}^3=\{(x,y,z) | x,y,z\in\mathbb{R}\}$$



MỞ ĐẦU VỀ LÔGÍCH MỆNH ĐỀ, TẬP HỢP, ÁNH XẠ

## 1.4. ÁNH XẠ

### 1.4.1. Định nghĩa và ví dụ

Một ánh xạ từ tập $X$ vào tập $Y$ là một quy luật cho tương ứng mỗi một phần tử $x\in X$ với một phần tử duy nhất $y=f(x)$ của $Y$ thỏa mãn hai điều kiện sau:

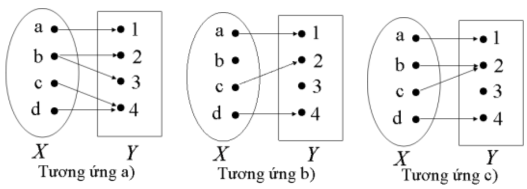
1. Mọi $x\in X$ đều có ảnh tương ứng $y=f(x)\in Y$
2. Với mỗi $x\in X$ ảnh $y=f(x)$ là duy nhất

Ta ký hiệu $f: X\longrightarrow Y$, $x\mapsto y=f(x)$ hay $X\xrightarrow{f} Y$, $x\mapsto y=f(x)$

$X$ được gọi là tập nguồn, $Y$ được gọi là tập đích

Mỗi hàm số $y=f(x)$ bất kỳ có thể được xem là ánh xạ từ tập xác định $D$ vào $\mathbb{R}$

**Ví dụ 1.17**




Tương ứng a) không thỏa mãn điều kiện thứ 2

Tương ứng b) không thỏa mãn điều kiện 1

Chỉ có tương ứng c) xác định một ánh xạ từ $X$ vào $Y$





Hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: X \to Y$ được gọi là bằng nhau, ký hiệu $f = g$, nếu $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in X$

Xét ánh xạ $f: X \to Y$

- Cho $A \subset X$, ta ký hiệu và gọi tập sau là ảnh của $A$ qua ánh xạ $f$

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

Nói riêng $f(X) = \operatorname{Im} f$ được gọi là tập ảnh hay tập giá trị của $f$

- Cho $B \subset Y$, ta gọi tập sau là nghịch ảnh của $B$ qua ánh xạ $f$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \,|\, f(x) \in B\}$$

Ta viết $f^{-1}(y)$ thay cho $f^{-1}(\{y\})$

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \,|\, y = f(x)\}$$





## 1.4.2. Phân loại các ánh xạ

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là *đơn ánh* nếu ảnh của hai phần tử phân biệt là hai phần tử phân biệt

$$\forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

hoặc một cách tương đương

$$\forall x_1, x_2 \in X; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ánh xạ $f: X \to Y$ được gọi là *toàn ánh* nếu mọi phần tử của $Y$ là ảnh của phần tử nào đó của $X$

$$\forall y \in Y, \exists x \in X \text{ sao cho } y = f(x)$$

Ánh xạ vừa đơn ánh vừa toàn ánh được gọi là *song ánh*

Vậy $f$ là một song ánh khi thỏa mãn điều kiện sau:

$$\forall y \in Y, \exists! x \in X \text{ sao cho } y = f(x)$$





Khi ánh xạ $f: X \to Y$ được cho dưới dạng công thức xác định ảnh $y = f(x)$ thì ta có thể xác định tính chất đơn ánh, toàn ánh của ánh xạ $f$ bằng cách giải phương trình:

$$f(x) = y, \; y \in Y$$

trong đó ta xem $x$ là ẩn và $y$ là tham biến

- Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình luôn có nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ $f$ là toàn ánh.
- Nếu với mỗi $y \in Y$ phương trình có không quá 1 nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ $f$ là đơn ánh.
- Nếu với mọi $y \in Y$ phương trình luôn có duy nhất nghiệm $x \in X$ thì ánh xạ $f$ là song ánh.





**Ví dụ 1.20**

Cho ánh xạ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$x \mapsto y = f(x) = x(x+1)$$

Xét phương trình $y = f(x) = x(x+1) = x^2 + x$ hay $x^2 + x - y = 0$

Biệt số $\Delta = 1 + 4y > 0$ (vì $y \in \mathbb{N}$)

Phương trình luôn có 2 nghiệm thực

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}, \; x_2 = \frac{-1-\sqrt{1+4y}}{2}$$

Vì $x_2 < 0$ nên phương trình có không quá 1 nghiệm trong $\mathbb{N}$.

Vậy $f$ là đơn ánh

Mặt khác tồn tại $y \in \mathbb{N}$ mà nghiệm $x_1 \notin \mathbb{N}$ (chẳng hạn $y = 1$), nghĩa là phương trình trên vô nghiệm trong $\mathbb{N}$. Vậy $f$ không toàn ánh





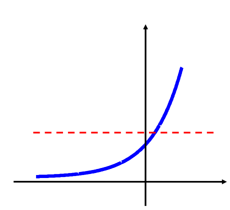
**Ví dụ 1.21** Các hàm số đơn điệu chặt:

- Đồng biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Nghịch biến chặt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

là các song ánh từ tập xác định lên miền giá trị của nó

Hàm số $f(x) = 2^x$ có đạo hàm $f'(x) = 2^x \ln 2 > 0$ do đó hàm số luôn đồng biến, hàm số chỉ nhận giá trị dương. Vậy $f$ là đơn ánh nhưng không toàn ánh.

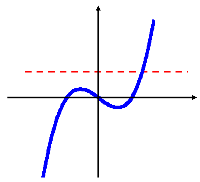
Có thể nhận thấy rằng đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị không quá 1 điểm do đó phương trình $f(x) = y, \; y \in Y$ có không quá 1 nghiệm.



Hàm số $g(x) = x^3 - 3x$ không luôn đồng biến và nhận mọi giá trị

Đường thẳng song song với trục hoành cắt đồ thị tại 1 hoặc 3 điểm do đó phương trình (1.29) luôn có 1 hoặc 3 nghiệm

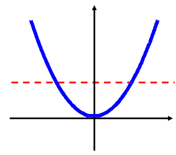
Vậy $g$ là toàn ánh nhưng không đơn ánh



Hàm số $h(x) = x^2$ không luôn đồng biến và chỉ nhận giá trị $\geq 0$.

Đường thẳng song song với trục hoành luôn cắt đồ thị tại 2 điểm khi ở trên trục hoành và không cắt đồ thị khi ở dưới trục hoành do đó phương trình có 2 nghiệm khi $y > 0$ và vô nghiệm khi $y < 0$.

Vậy $h$ là không toàn ánh và không đơn ánh.







## 1.4.3. Ánh xạ ngược của một song ánh

Giả sử $f: X \to Y$ là một song ánh

$\exists! x \in X \longrightarrow \forall y \in Y$

Như vậy ta có thể xác định một ánh xạ từ $Y$ vào $X$ bằng cách cho ứng mỗi phần tử $y \in Y$ với phần tử duy nhất $x \in X$ sao cho $y = f(x)$

Ánh xạ này được gọi là ánh xạ ngược của $f$ và được ký hiệu $f^{-1}$

$$f^{-1}: Y \to X \qquad f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

$f^{-1}$ cũng là một song ánh

**Ví dụ 1.20** Hàm mũ $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$

là một song ánh (vì hàm mũ đơn điệu chặt) có hàm ngược là hàm lôgarit

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$





**Ví dụ 1.21** Xét hàm $\sin: [-\pi/2; \pi/2] \to [-1;1]$

$$x \mapsto \sin x$$

đơn điệu tăng chặt và toàn ánh nên nó là một song ánh

Hàm ngược được ký hiệu $\arcsin: [-1;1] \to [-\pi/2; \pi/2]$

$$y \mapsto \arcsin y$$

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow y = \sin x,\ \forall x \in [-\pi/2; \pi/2], y \in [-1;1]$$

Tương tự

$$x = \arccos y \Leftrightarrow y = \cos x,\ \forall x \in [0; \pi], y \in [-1;1]$$

$$x = \arctan y \Leftrightarrow y = \tan x,\ \forall x \in (-\pi/2; \pi/2), y \in (-\infty; \infty)$$

$$x = \operatorname{arccot} y \Leftrightarrow y = \cot x,\ \forall x \in (0; \pi), y \in (-\infty; \infty)$$





## 1.4.4. Hợp của hai ánh xạ

Với hai ánh xạ $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$

thì tương ứng $x \mapsto g(f(x))$ xác định một ánh xạ từ $X$ vào $Z$ được gọi là hợp của hai ánh xạ $f$ và $g$, ký hiệu $g \circ f$

Vậy $g \circ f: X \to Z$ có công thức xác định ảnh $g \circ f(x) = g(f(x))$

**Ví dụ 1.26**

Xét hai hàm số $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ với công thức xác định ảnh $f(x) = \sin x,\ g(x) = 2x^2 + 4.$

Ta có thể thiết lập hai hàm hợp từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$

$$f \circ g(x) = \sin(2x^2 + 4),\ g \circ f(x) = 2\sin^2 x + 4$$

Qua ví dụ trên ta thấy nói chung $g \circ f \neq f \circ g$

nghĩa là phép hợp ánh xạ không có tính giao hoán





## 1.4.5. Lực lượng của một tập hợp

Khái niệm lực lượng của tập hợp có thể xem như là sự mở rộng khái niệm số phần tử của tập hợp

Tập $X$ có $n$ phần tử nếu có thể liệt kê dạng $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

Vậy $X$ có $n$ phần tử khi tồn tại song ánh từ tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ lên $X$

Hai tập hợp $X$, $Y$ được gọi là *cùng lực lượng* nếu tồn tại song ánh từ $X$ lên $Y$

Tập có lực lượng $n$ hoặc $0$ được gọi là các *tập hữu hạn*

Tập không hữu hạn được gọi là *tập vô hạn*

Tập có cùng lực lượng với tập các số tự nhiên $\mathbb{N}$ hay hữu hạn được gọi là *tập đếm được*