CHUYỂN NƯỚC

Các bé học sinh trường mầm non SuperKids tỏ ra say mê với các trò chơi đòi hỏi tư duy thuật toán chuyên nghiệp. Nhân dịp đến thăm trường, giáo sư X bày ra một trò chơi cho các bạn nhỏ tại đây.

Ban đầu, người chơi được cho n thùng nước đánh số từ 1 tới n. Thùng thứ i có a_i lít nước. Người chơi được quyền múc một lượng nước bất kỳ từ một thùng chuyển sang thùng liền sau (chuyển từ thùng i sang thùng $i+1$ với i tùy chọn thỏa mãn $1 \le i < n$). Năng lượng tiêu tốn cho thao tác này đúng bằng lượng nước được chuyển (có thể không phải là số nguyên)

Nhiệm vụ của người chơi là phải làm cho lượng nước trong các thùng sắp xếp thứ tự không giảm, tức là:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$$

Yêu cầu: Hãy tìm phương án chơi sao cho tổng năng lượng tiêu tốn là ít nhất

Dữ liệu: Vào từ file văn bản WATERMOV.INP

- Dòng 1 chứa số nguyên dương $n \le 10^6$
- Dòng 2 chứa n số nguyên không âm $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(\forall i: a_i \le 10^6)$ cách nhau bởi dấu cách

Kết quả: Ghi ra file văn bản WATERMOV.OUT một số thực duy nhất với 1 chữ số sau dấu chấm thập phân là tổng năng lượng tiêu tốn nếu các bé chơi theo phương án của bạn

Ví dụ

WATERMOV.INP	WATERMOV.OUT
6 1 3 0 0 3 0	4.5

Giải thích:

Ta sẽ chuyển nước để được lượng nước trong các thùng là 1.0,1.0,1.0,1.0,1.5,1.5

Chuyển 2 lít từ thùng 2 sang thùng 3

Chuyển 1 lít từ thùng 3 sang thùng 4

Chuyển 1.5 lít từ thùng 5 sang thùng 6

Thuật toán

Xây dựng dãy B là tổng tích lũy trên dãy A: $b[i] = a[1] + a[2] + \cdots + a[i]$. Dãy B tính theo công thức

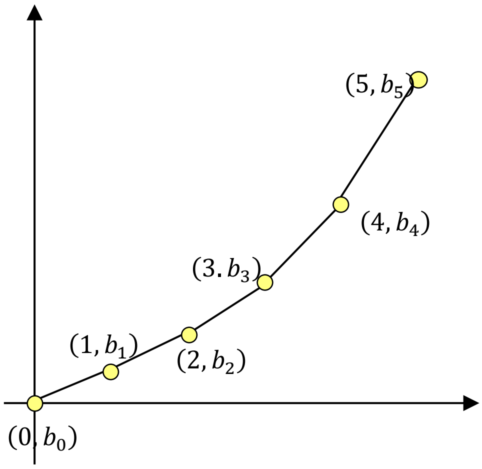
$$b[0] := 0$$
$$b[i] := b[i-1] + a[i], \forall i > 0$$

Nhận xét 1: Nếu A là dãy không giảm: $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ thì dãy các điểm (i, b_i) trên mặt phẳng:

$$(0, b_0); (1, b_1); (2, b_2); \ldots; (n, b_n)$$

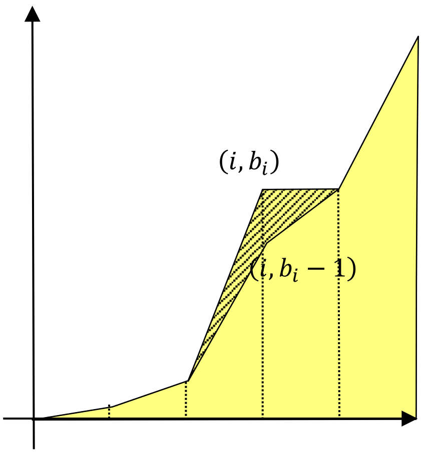
tạo ra một đường lồi.

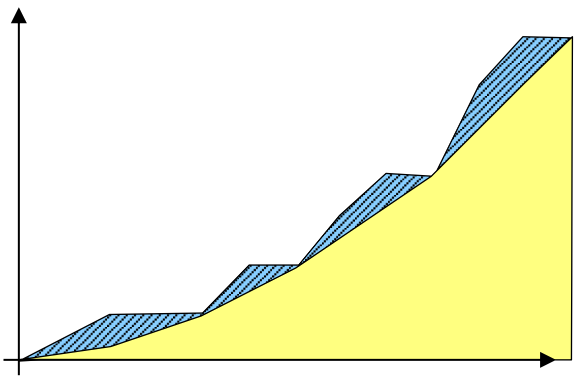
Điều này có thể coi là dễ thấy với hs đã biết về đạo hàm khi dãy A (ứng với đạo hàm của B) là dãy tăng. Tuy nhiên cũng có thể kiểm chứng bằng cách đi dọc theo đường gấp khúc $(0, b_0); (1; b_1); \ldots.; (n, b_n)$ thì sẽ không có chỗ nào ta phải rẽ phải. (Xem hình vẽ)



Nhận xét 2: Đổ Δ lít nước từ thùng i sang thùng $i+1$ tương ứng với việc giảm a_i đi Δ và tăng a_{i+1} lên Δ. Vì $b_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$ nên để đồng bộ với dãy B mới thì việc đổ nước này tương ứng với việc **giảm b_i đi đúng Δ đơn vị, các giá trị $b[.]$ khác không đổi.**

Nhận xét 3: Xét đường gấp khúc qua dãy các điểm (i, b_i) và diện tích nằm phía dưới phần đường này. Nếu ta giảm b_i đi 1 đơn vị thì diện tích đó cũng giảm đi 1 đơn vị vuông (phần gạch chéo trên hình bên trái có thể tách ra thành 2 tam giác và mỗi tam giác có diện tích 0.5 đơn vị vuông).





Mục đích của chúng ta là cực tiểu hóa phần diện tích bị giảm đi khi giảm các b_i nhằm ép các điểm (i, b_i) trên một đường lồi. (phần gạch chéo trong hình trên bên phải). Vì thế ta sẽ tìm bao lồi của tập hợp điểm $(0, b_0); (1; b_1); \dots; (n, b_n)$. Đo diện tích của phần bao lồi chiếu lên trục hoàng (Q), Đo diện tích của đường gấp khúc ban đầu chiếu lên trục hoành (P) và đưa ra kết quả là $P - Q$.

- Tìm bao lồi dùng stack mất thời gian $O(n)$ vì thứ tự các điểm đã được sắp xếp từ trái qua phải.
- Việc tính diện tích được thực hiện dễ dàng bằng cách tách phần diện tích cần đo ra thành các hình thang (như hình trên bên trái). Mất $O(n)$

Độ phức tạp $O(n)$. Chú ý là các diện tích được tính trên các điểm tọa độ nguyên nên ta có thể nhân 2 diện tích trong quá trình tính toán để xử lý hoàn toàn trên số nguyên, tránh xử lý số thực.