II. Phương pháp tọa độ trong không gian :

1. Tích có hướng hai vectơ :

a. Định nghĩa : $\vec{u} = (x; y; z)$ và $\vec{v} = (x'; y'; z')$

$$\boxed{\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right) = (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')}$$

b. Các ứng dụng :

- $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{u},\vec{v}\right] = \vec{0}$
- $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w} = 0$
- $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ABCD là tứ diện $\Leftrightarrow$ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} = m \neq 0$; $V_{ABCD} = \dfrac{1}{6}|m|$

2. Mặt phẳng :

a. Phương trình mặt phẳng (α):

- Phương trình tổng quát : $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$

$\vec{n} = (A; B; C)$, $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

- Phương trình đoạn chắn : $\boxed{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1}$

((α) qua $A(a;0;0)$; $B(0;b;0)$; $C(0;0;c)$)

b. Góc giữa hai mặt phẳng :

(α) : $Ax + By + Cz + D = 0$

(β) : $A'x + B'y + C'z + D' = 0$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|\vec{n}.\vec{n'}|}{|\vec{n}|.|\vec{n'}|} = \frac{|AA' + BB' + CC'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}}$$

c. Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng (α) :

$$\boxed{d(M,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

3. Đường thẳng :

a. Ba dạng phương trình của đường thẳng :

- Phương trình tham số của Δ qua $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và

  có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$: $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}}$ $(t \in R)$

- Phương trình chính tắc : $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}}$

- Phương trình tổng quát : $\boxed{\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}}$

  (với $A : B : C \neq A' : B' : C'$)

b. Góc giữa hai đường thẳng :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\left|\vec{u}.\vec{u}'\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}'\right|} = \frac{\left|aa' + bb' + cc'\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}}$$

c. Khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ (Δ có vtcp $\vec{u}$ và qua M) :

$$\boxed{d(A, \Delta) = \frac{\left|\left[\vec{u}, \overrightarrow{MA}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}}$$

d. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau :

Δ có vtcp $\vec{u}$ và qua M ; Δ' có vtcp $\vec{v}$ và qua M'

$$\boxed{d(\Delta, \Delta') = \frac{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{u}, \vec{v}\right]\right|}}$$

e. Góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (α) :

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\left|\vec{n}.\vec{u}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|Aa + Bb + Cc\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

4. Mặt cầu :

a. Phương trình mặt cầu :

- *Dạng 1* : Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R

$$\boxed{(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = R^2}$$

- *Dạng 2* : Phương trình có dạng :

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0}$$

với điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

b. Sự tương giao giữa mặt cầu và mặt phẳng :

- $d(I,(\alpha)) < R \Leftrightarrow (\alpha)$ giao (S) theo đường tròn (C)

  - Phương trình (C) : $\boxed{\begin{cases} (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2 = R^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}}$

  - Tâm H của (C) là hình chiếu của tâm $I(a;b;c)$ lên mặt phẳng (α)

  - Bán kính của (C) : $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$

- $d(I,(\alpha)) = R \Leftrightarrow (\alpha)$ tiếp xúc với (S)

- $d(I,(\alpha)) > R \Leftrightarrow (\alpha) \cap (S) = \phi$