KENNETH H. ROSEN

# TOÁN HỌC RỜI RẠC
# ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC

*Người dịch:* ***Phạm Văn Thiều***
***Đặng Hữu Thịnh***



NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT
HÀ NỘI

*Dịch từ*

**Discrete Mathematics and Its Applications**

**McGraw - Hill, 1994**

$\frac{5\text{-}519}{\text{KHKT-2003}}$ 111-29-02

# *Lời giới thiệu*

*Toán học rời rạc không phải là một chủ đề mới nhưng giáo trình hay về toán học rời rạc và ứng dụng của nó thì không có nhiều. Mà hay đến mức được tái bản nhiều lần và được sử dụng trong hơn 300 trường học như quyển sách của Giáo sư Kenneth H. Rosen thì lại càng hiếm, nếu không muốn nói là chưa hề thấy. Chất lượng của một giáo trình được thể hiện ở sự súc tích của nội dung và tính sư phạm của cấu trúc và cách trình bày nội dung đó. Điều này đòi hỏi tác giả phải thấu hiểu sâu sắc chủ đề, có bề dày thực nghiệm sư phạm và dĩ nhiên có sở trường viết lách. K.H.Rosen đúng là một người như vậy : là một tiến sĩ toán học, đã giảng dạy nhiều năm ở các đại học Mỹ, đã tham gia nghiên cứu toán ứng dụng cho tin học và các ngành kỹ thuật khác, và đã viết nhiều cuốn sách khoa học được xếp vào hàng "best seller". Đọc cuốn sách này, chúng ta sẽ bị hấp dẫn bởi nhiều điều độc đáo của nó. Nhưng có lẽ điều làm kinh ngạc và thán phục nhất là khối lượng đồ sộ các ví dụ, câu hỏi, bài tập, đề tài ứng dụng tin học ... giúp cho người đọc dễ dàng hiểu và biết ứng dụng có hiệu quả các kiến thức đa dạng không chỉ thuần tuý về toán học rời rạc.*

*Giáo trình tuyệt diệu này có thể sử dụng cho nhiều đối tượng khác nhau, nhưng trước hết là cho thầy và trò ở các trường đại học khoa học tự nhiên và công nghệ – đặc biệt là công nghệ thông tin. Cấu trúc lôgic và độc đáo của cuốn sách cùng những ví dụ, bài tập, đề tài tiếp cận từ góc độ tin học đã làm cho người đọc luôn*

*luôn có thể tìm thấy cách đọc thích hợp với mình, tiếp thu đầy đủ và nhanh chóng những kiến thức mong muốn.*

*Điều cuối cùng, nhưng rất quan trọng đối với chất lượng của một cuốn sách dịch đó là dịch giả. Anh Phạm Văn Thiều (chủ biên dịch cuốn sách này) là nhà vật lý lý thuyết, đã giảng dạy đại học nhiều năm và đã từng dịch nhiều sách nước ngoài, kể cả về văn học. Cuốn sách dịch gần đây của anh (cùng với Cao Chi), "Lược sử thời gian" của nhà vật lý nổi tiếng thế giới S.W. Hawking..., đã được bạn đọc và đồng nghiệp đánh giá rất cao.*

*Xin trân trọng giới thiệu cuốn sách **TOÁN HỌC RỜI RẠC ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC** này với bạn đọc.*

**GS.TS. NGUYỄN THÚC HẢI**

TRƯỞNG KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI.

*CHƯƠNG 1*

# CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ : LOGIC, TẬP HỢP VÀ HÀM

Chương này ôn lại những cơ sở của toán học rời rạc. Ba chủ đề sẽ được đề cập tới, đó là logic, tập hợp và hàm. Các qui tắc của logic xác định ý nghĩa chính xác của các mệnh đề toán học. Ví dụ, những qui tắc đó cho chúng ta ý nghĩa của các mệnh đề như : "Tồn tại một số nguyên lớn hơn 100 là luỹ thừa của 2" và "Đối với mọi số nguyên $n$, tổng các số nguyên dương không lớn hơn $n$ bằng $\frac{n(n+1)}{2}$". Logic là cơ sở của mọi suy luận toán học và có nhiều ứng dụng thực tiễn trong việc thiết kế các máy tính.

Có rất nhiều môn toán học rời rạc chuyên nghiên cứu các cấu trúc rời rạc, tức là những cấu trúc được dùng để biểu diễn các đối tượng rời rạc. Tất cả các cấu trúc này đều được dựng lên từ tập hợp các đối tượng vật. Những ví dụ về các cấu trúc rời rạc được dựng lên từ các tập hợp bao gồm : tổ hợp – đó là tập hợp không sắp thứ tự của các đối tượng được dùng rộng rãi trong phép đếm ; quan hệ – đó là tập hợp các cặp sắp thứ tự biểu diễn mối quan hệ giữa các vật ; đồ thị – đó là tập hợp các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh ; và các máy trạng thái hữu hạn – đó là các máy được dùng để mô hình hóa các máy tính.

Hàm là một khái niệm cực kỳ quan trọng trong toán học rời rạc. Hàm gán cho mỗi phần tử của một tập hợp một phần tử xác định của một tập hợp. Các cấu trúc tiện ích như dãy và xâu là những loại hàm đặc biệt. Các hàm cũng được dùng để biểu diễn số các bước của một thủ tục dùng để giải một bài toán. Sự phân tích các thuật toán thường dùng các thuật ngữ và khái niệm có liên quan đến độ tăng của các hàm. Các hàm đệ qui, tức là các hàm được định nghĩa bằng cách cho các giá trị của chúng ở các số nguyên dương qua các giá trị của chúng ở các số nguyên dương nhỏ hơn – đã được dùng để giải nhiều bài toán đếm.

# 1.1. LOGIC

## MỞ ĐẦU

Các qui tắc của logic cho ý nghĩa chính xác của các mệnh đề. Các qui tắc này được sử dụng để phân biệt giữa các lập luận toán học đúng và không đúng. Vì mục đích chủ yếu của cuốn sách này là dạy cho độc giả hiểu và xây dựng được những lập luận toán học đúng đắn, nên chúng ta sẽ bắt đầu việc nghiên cứu toán học rời rạc từ một nhập môn vào logic học.

Cùng với tầm quan trọng của nó trong việc hiểu sự suy luận toán học, logic học còn có nhiều ứng dụng trong tin học. Các qui tắc của logic được dùng để thiết kế các mạng trong máy tính, để xây dựng các chương trình của máy tính, để kiểm tra tính đúng đắn của các chương trình và nhiều ứng dụng khác. Chúng ta sẽ xem xét các ứng dụng đó trong các chương sau.

## MỆNH ĐỀ

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc xem xét những viên gạch cơ sở xây dựng nên môn logic – đó là các mệnh đề. Một **mệnh đề** là một câu đúng hoặc sai, chứ không thể vừa đúng vừa sai.

**Ví dụ 1.** Tất cả các câu sau đều là các mệnh đề.

1. Washington D.C. là thủ đô của Hoa Kỳ.
2. Toronto là thủ đô của Canada
3. $1 + 1 = 2$,
4. $2 + 2 = 3$.

Các mệnh đề 1 và 3 là đúng, trong khi các mệnh đề 2 và 4 là sai.

■

Có những câu không phải là mệnh đề được cho trong các ví dụ dưới đây.

**Ví dụ 2.** Xét các câu sau :

1. Bây giờ là mấy giờ?
2. Hãy đọc cái này cho kỹ lưỡng.
3. $x + 1 = 2$,
4. $x + y = z$

Các câu 1 và 2 không phải là mệnh đề vì chúng không phải là câu trần thuật. Còn các câu 3 và 4 không phải là mệnh đề vì chúng chẳng đúng cũng chẳng sai bởi các biến trong những câu đó còn chưa được gán cho giá trị cụ thể nào. Các cách khác nhau để tạo thành các mệnh đề từ những câu loại như thế này sẽ được thảo luận trong Tiết 3 của chương này. ■

Các chữ cái sẽ được dùng để ký hiệu các mệnh đề, cũng như để ký hiệu các biến. Những chữ cái qui ước được dùng vào mục đích này là *p, q, r, s*... **Giá trị chân lý** của một mệnh đề là đúng và sẽ được ký hiệu là $T$ nếu đó là một mệnh đề đúng, và là sai, được ký hiệu là $F$, nếu đó là một mệnh đề sai.

Bây giờ chúng ta xem xét các phương pháp tạo ra các mệnh đề mới từ các mệnh đề chúng ta đã có. Các phương pháp này đã được nghiên cứu bởi nhà toán học người Anh Geogre Boole, và được trình bày trong cuốn sách "*Các định luật của tư duy*" xuất bản năm 1854 của ông. Rất nhiều mệnh đề toán học được xây dựng bằng cách tổ hợp một hoặc nhiều mệnh đề. Các mệnh đề mới được gọi là **các mệnh đề phức hợp**, chúng được tạo ra từ các mệnh đề hiện có bằng cách dùng các toán tử logic.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Giả sử $p$ là một mệnh đề.

Câu "không phải là $p$"

là một mệnh đề khác, được gọi là *phủ định* của $p$. Phủ định của $p$ được ký hiệu là $\neg p$ (trong nhiều sách được ký hiệu là $\overline{p}$ – ND).

**BẢNG 1. Bảng giá trị chân lý đối với phủ định của một mệnh đề**

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| T | F |
| F | T |

**Ví dụ 3.** Tìm phủ định của mệnh đề :

"Hôm nay là thứ sáu"

*Giải* : Phủ định của mệnh đề trên là :

"Hôm nay không phải là thứ sáu" ■

Một **bảng giá trị chân lý** trình bày mối quan hệ giữa các giá trị chân lý của các mệnh đề. Bảng giá trị chân lý đặc biệt có ý nghĩa trong việc xác định giá trị chân lý của các mệnh đề được tạo ra từ các mệnh đề đơn giản hơn. Bảng 1 trình bày các giá trị chân lý của một mệnh đề và phủ định của nó.

Phủ định của một mệnh đề cũng có thể được xem như là kết quả tác dụng của **toán tử phủ định** lên một mệnh đề. Toán tử phủ định xây dựng một mệnh đề mới từ một mệnh đề đơn hiện có. Bây giờ chúng ta sẽ đưa vào các toán tử logic được dùng để tạo ra các mệnh đề mới từ hai hoặc nhiều hơn các mệnh đề hiện có.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Giả sử $p$ và $q$ là hai mệnh đề. Mệnh đề "$p$ và $q$", được ký hiệu bởi $p \wedge q$, là đúng khi cả $p$ và $q$ đều đúng, còn sai trong các trường hợp còn lại. Mệnh đề $p \wedge q$ được gọi là *hội* của $p$ và $q$.

**BẢNG 2. Bảng giá trị chân lý đối với hội của hai mệnh đề**

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | F |

Bảng chân lý đối với $p \wedge q$ được cho trong Bảng 2. Chú ý rằng, trong bảng chân lý này có bốn dòng, mỗi dòng là một tổ hợp khả dĩ các giá trị chân lý của các mệnh đề $p$ và $q$.

**Ví dụ 4**. Tìm hội của các mệnh đề $p$ và $q$, trong đó $p$ là mệnh đề "Hôm nay là thứ sáu" và $q$ là mệnh đề "Hôm nay trời mưa".

*Giải* : Hội của hai mệnh đề đó $p \wedge q$ là mệnh đề "Hôm nay thứ sáu và trời mưa". Mệnh đề này là đúng vào hôm thứ sáu trời mưa và là sai vào bất kỳ ngày nào không phải thứ sáu và vào ngày thứ sáu nhưng trời lại không mưa.

■

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Cho $p$ và $q$ là hai mệnh đề. Mệnh đề : "$p$ hoặc $q$", được ký hiệu là $p \vee q$, là mệnh đề sai khi cả $p$ và $q$ đều sai, và đúng trong các trường hợp còn lại. Mệnh đề $p \vee q$ được gọi là *tuyển* của $p$ và $q$.

Bảng giá trị chân lý đối với $p \vee q$ được cho trong Bảng 3.

Việc dùng liên từ "hoặc" trong phép tuyển tương ứng với một trong hai sắc thái nghĩa của từ "or" trong tiếng Anh (từ hoặc tiếng Việt cũng thế – ND) – đó là sắc thái nghĩa có tính bao hàm. Một phép tuyển là đúng khi một trong hai mệnh đề là đúng hoặc cả hai mệnh đề đều đúng. Ví dụ từ "hoặc" có sắc thái nghĩa bao hàm được dùng trong câu sau :

**BẢNG 3. Bảng giá trị chân lý đối với tuyển của hai mệnh đề**

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

"Các sinh viên đã học giải tích hoặc tin học có thể theo lớp này".

Ở đây, người ta muốn nói rằng các sinh viên đã học cả giải tích lẫn tin học, cũng như các sinh viên chỉ đã học một trong hai môn trên đều có thể theo lớp này.

Trái lại, chúng ta dùng từ hoặc với sắc thái nghĩa loại trừ, khi ta nói :

"Các sinh viên đã học giải tích hoặc tin học,
nhưng không phải cả hai môn, đều có thể theo lớp này".

Ở đây, người ta muốn nói rằng các sinh viên đã học cả giải tích lẫn tin học thì không được theo lớp này. Chỉ những người đã học chính xác một trong hai môn trên mới được vào lớp đó.

Tương tự, khi thực đơn trong một nhà hàng ghi "Món khai vị : súp hoặc xa lat" thì nhà hàng đó hầu như đều muốn nói rằng khách hàng có thể ăn súp hoặc xa lát chứ không phải cả hai. Ở đây từ "hoặc" có sắc thái nghĩa loại trừ chứ không phải bao hàm.

**Ví dụ 5**. Lập tuyển của hai mệnh đề $p$ và $q$ với $p$ và $q$ là những mệnh đề như ở Ví dụ 4

*Giải* : Tuyển của $p$ và $q$, tức $p \vee q$, là mệnh đề :

"Hôm nay là thứ sáu hoặc hôm nay trời mưa".

Mệnh đề này đúng vào bất kỳ ngày nào là thứ sáu hoặc ngày có mưa (kể cả ngày thứ sáu có mưa). Nó chỉ sai vào ngày không phải là thứ sáu và ngày đó trời không mưa.

■

Như chúng ta đã nhận xét ở trên, việc dùng liên từ "hoặc" trong phép tuyển tương ứng với một trong hai sắc thái nghĩa của từ đó, cụ thể ở đây là theo sắc thái nghĩa bao hàm. Như vậy, phép tuyển là đúng khi một trong hai mệnh đề là đúng hoặc khi cả hai mệnh đề đều đúng. Đôi khi, chúng ta cũng dùng từ *hoặc* theo sắc thái nghĩa loại trừ. Khi dùng từ hoặc có sắc thái nghĩa loại trừ để liên kết hai mệnh đề $p$ và $q$, ta nhận được mệnh đề "$p$ hoặc $q$ (nhưng không cả hai)".

Mệnh đề này đúng khi $p$ đúng và $q$ sai hoặc ngược lại và nó sai khi cả $p$ và $q$ đều sai và khi cả $p$ và $q$ đều đúng.

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Cho $p$ và $q$ là hai mệnh đề.

Mệnh đề *tuyển loại* của $p$ và $q$, được ký hiệu là $p \oplus q$, là một mệnh đề chỉ đúng khi một trong $p$ và $q$ là đúng và sai trong mọi trường hợp còn lại.

**BẢNG 4. Bảng giá trị chân lý đối với phép tuyển loại của hai mệnh đề**

| $p$ | $q$ | $p \oplus q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

Bảng giá trị chân lý của phép tuyển loại của hai mệnh đề được cho trong Bảng 4.

Bây giờ chúng ta sẽ xem xét một số phương pháp quan trọng khác có thể tạo nên các mệnh đề.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Cho $p$ và $q$ là hai mệnh đề.

Mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$ là một mệnh đề chỉ sai khi $p$ đúng và $q$ sai, còn đúng trong mọi trường hợp còn lại.

Trong phép kéo theo nói trên $p$ được gọi là *giả thiết* còn $q$ được gọi là *kết luận*.

**BẢNG 5. Bảng giá trị chân lý đối với phép kéo theo $p \rightarrow q$**

| $p$ | $q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | T |

Bảng giá trị chân lý đối với mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$ được cho trong Bảng 5.

Vì phép kéo theo xuất hiện ở nhiều chỗ trong các suy luận toán học, nên có rất nhiều thuật ngữ được dùng để biểu đạt $p \to q$. Dưới đây là một số ví dụ thường gặp nhất :

- "Nếu $p$ thì $q$"
- "$p$ kéo theo $q$"
- "$p$ là điều kiện đủ của $q$"
- "$q$ là điều kiện cần của $p$".

Chú ý rằng $p \to q$ chỉ sai trong trường hợp $p$ đúng và $q$ sai, sao cho nó đúng khi cả $p$ và $q$ đều đúng và khi $p$ sai (bất kể $q$ đúng hay sai).

Cách mà chúng ta định nghĩa phép kéo theo là tổng quát hơn ý nghĩa gắn liền với từ kéo theo trong ngôn ngữ thông thường. Ví dụ phép kéo theo

"Nếu hôm nay trời nắng, chúng tôi sẽ đi ra bãi biển"

là một phép kéo theo được dùng trong ngôn ngữ thông thường, vì ở đây có mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận. Hơn nữa, phép kéo theo này được xem là đúng trừ phi hôm nay trời thực sự nắng, nhưng chúng tôi không đi ra bãi biển. Trái lại, phép kéo theo

"Nếu hôm nay là thứ sáu, thì $2 + 3 = 5$"

là đúng theo định nghĩa của phép kéo theo, vì kết luận là đúng (khi đó giá trị chân lý của giả thiết là không quan trọng). Phép kéo theo

"Nếu hôm nay là thứ sáu, thì $2 + 3 = 6$"

là đúng với mọi ngày trừ thứ sáu, thậm chí mặc dù $2 + 3 = 6$ là sai.

Trong ngôn ngữ tự nhiên chúng ta thường không dùng hai phép kéo theo sau trong ba ví dụ nêu ở trên, vì không có mối quan hệ giữa giả thiết và kết luận trong hai phép kéo theo đó. Trong suy luận toán học chúng ta xét các phép kéo theo thuộc loại tổng quát hơn trong ngôn ngữ thông thường. Khái niệm toán học về phép kéo theo độc lập với mối quan hệ nhân – quả giữa giả thiết và kết luận.

Không may, cấu trúc nếu – thì được dùng trong nhiều ngôn ngữ lập trình lại khác với cấu trúc được dùng trong logic học. Đa số các ngôn nhữ lập trình chứa những câu lệnh như **nếu** $p$ **thì** $S$ (**if** $p$ **then** $S$) trong đó $p$ là một mệnh đề còn $S$ là một đoạn chương trình (gồm một hoặc nhiều lệnh cần phải thực hiện). Khi thực hiện một chương trình gặp những cấu trúc như vậy, $S$ sẽ được thực hiện nếu $p$ là đúng, trong khi đó $S$ sẽ không được thực hiện nếu $p$ là sai. Điều này được minh hoạ trong ví dụ sau :

**Ví dụ 6.** Xác định giá trị của biến $x$ sau câu lệnh :

$$\textbf{if } 2 + 2 = 4 \textbf{ then } x := x + 1$$

nếu trước câu lệnh đó $x = 0$? (Ở đây ký hiệu := là chỉ phép gán. Câu lệnh $x := x + 1$ có nghĩa là gán giá trị $x + 1$ cho biến $x$).

*Giải* : Vì $2 + 2 = 4$ là đúng nên câu lệnh gán $x := x + 1$ được thực hiện. Vì thế $x$ sẽ có giá trị $0 + 1 = 1$ sau khi gặp câu lệnh này.

■

Chúng ta cũng có thể tạo các mệnh đề phức hợp bằng cách dùng toán tử phủ định và các liên từ khác nhau đã được định nghĩa ở trên. Các dấu ngoặc sẽ được dùng để chỉ định trật tự thực hiện các toán tử logic khác nhau trong một mệnh đề phức hợp. Đặc biệt, các toán tử logic nằm ở dấu ngoặc trong cùng sẽ được thực hiện trước tiên. Ví dụ, $(p \vee q) \wedge (\neg r)$ là hội của $p \vee q$ và $\neg r$. Để giảm bớt số các dấu ngoặc cần dùng, ta qui ước toán tử phủ định sẽ được thực hiện trước tất cả các toán tử logic khác. Điều này có nghĩa là $\neg p \vee q$ là hợp của $\neg p$ và $q$, tức là $(\neg p) \wedge q$, chứ không phải là phủ định của phép hợp của $p$ và $q$, tức là $\neg(p \wedge q)$.

Có một số phép kéo theo liên quan có thể được tạo từ $p \rightarrow q$. Mệnh đề $q \rightarrow p$ được gọi là mệnh **đề đảo** của $p \rightarrow q$ và mệnh đề **phản đảo** của $p \rightarrow q$ là mệnh đề $\neg q \rightarrow \neg p$.

**Ví dụ 7:** Tìm các mệnh đề đảo và phản đảo của phép kéo theo

"Nếu hôm nay là thứ năm, thì hôm nay tôi có cuộc trắc nghiệm"

*Giải* : Mệnh đề đảo là :

"Nếu hôm nay tôi có cuộc trắc nghiệm,
thì hôm nay là thứ năm".

Và mệnh đề phản đảo là :

"Nếu hôm nay tôi không có cuộc trắc nghiệm
thì hôm nay không phải là thứ năm".

■

Bây giờ chúng tôi giới thiệu một cách nữa để tổ hợp các mệnh đề.

**ĐỊNH NGHĨA 6.** Cho $p$ và $q$ là hai mệnh đề. Mệnh đề *tương dương* $p \leftrightarrow q$ là mệnh đề chỉ đúng khi $p$ và $q$ có cùng giá trị chân lý và sai trong mọi trường hợp còn lại.

**BẢNG 6. Bảng giá trị chân lý đối với mệnh đề tương đương $p \leftrightarrow q$**

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

Bảng giá trị chân lý đối với $p \leftrightarrow q$ được cho trong Bảng 6. Chú ý rằng mệnh đề tương đương $p \leftrightarrow q$ là đúng chỉ khi hai mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$ và $q \rightarrow p$ đều đúng. Vì thế thuật ngữ :

"$p$ nếu và chỉ nếu $q$"

là được dùng để chỉ phép tương đương này. Một số cách diễn đạt thường dùng nhất của mệnh đề $p \leftrightarrow q$ là "$p$ là cần và đủ đối với $q$" và "nếu $p$ thì $q$ và ngược lại".

## DỊCH NHỮNG CÂU THÔNG THƯỜNG

Có nhiều lý do để phải dịch những câu thông thường thành những biểu thức liên quan đến các biến mệnh đề và các liên từ logic. Tiếng Anh (cũng như tất cả các thứ tiếng khác của loài người) đều thường không rõ ràng. Dịch một câu thông thường ra các biểu thức logic là làm mất đi tính không rõ ràng đó. Chú ý rằng điều này có thể dẫn đến phải làm một tập hợp các giả thiết hợp lí dựa trên ý nghĩa hàm định của câu đó. Hơn nữa, một khi đã dịch những câu thông thường thành các biểu thức logic, chúng ta có thể phân tích các biểu thức logic đó để xác định các giá trị chân lý của chúng, có thể thao tác với chúng và chúng ta cũng có thể sử dụng những qui tắc suy diễn (sẽ được xét ở Chương 3) để suy luận về chúng.

Để minh hoạ quá trình dịch một câu thông thường thành các biểu thức logic, ta hãy xét ví dụ sau :

**Ví dụ 8**. Làm thế nào có thể dịch câu thông thường sau ra biểu thức logic ?

"Bạn không được lái xe máy nếu bạn cao dưới 1,5m
trừ phi bạn trên 18 tuổi".

*Giải :* Có nhiều cách để dịch câu này thành một biểu thức logic. Cách đơn giản nhất, nhưng lại kém ích lợi nhất là biểu diễn câu đó đơn giản chỉ là một biến mệnh đề đơn, ví dụ, $p$. Mặc dù điều này không sai, nhưng làm như vậy chẳng giúp ích gì cho ta, khi ta thử phân tích nó hoặc dùng nó để suy luận. Thích hợp hơn là nên dùng các biến mệnh đề để biểu diễn các bộ phận của câu đó và quyết định dùng các liên từ logic nào cho thích hợp để liên kết chúng. Đặc biệt, chúng ta cho $q$, $r$ và $s$ biểu diễn "Bạn được lái xe máy", "Bạn cao dưới 1,5m" và "Bạn trên 18 tuổi", tương ứng. Khi đó câu trên có thể được dịch thành :

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q.$$

Tất nhiên, có nhiều cách khác để biểu diễn câu trên như một biểu thức logic, nhưng cách mà chúng tôi vừa đưa ra có lẽ đáp ứng được yêu cầu của chúng ta.

■

## CÁC PHÉP TOÁN LOGIC VÀ CÁC PHÉP TOÁN BIT

Các máy tính dùng các bit để biểu diễn thông tin. Một **bit** có hai giá trị khả dĩ là 0 và 1. Ý nghĩa của từ này bắt nguồn từ hai từ tiếng Anh ***bi**nary digi**t*** (số nhị phân) vì các số 0 và 1 là các số được dùng trong biểu diễn nhị phân của các số. Thuật ngữ này do nhà thống kế học nổi tiếng John Tukey đưa ra vào năm 1946. Bit cũng có thể được dùng để biểu diễn giá trị chân lý, vì giá trị chân lý cũng chỉ có hai giá trị là *đúng* và *sai*. Như người ta thường làm, chúng ta sẽ dùng bit 1 để biểu diễn giá trị đúng và bit 0 để biểu diễn giá trị sai. Một biến được gọi là **biến Boole** (Boolean variable) nếu giá trị của nó hoặc là đúng hoặc là sai. Do đó, cũng có thể dùng bit để biểu diễn một biến Boole.

Các **phép toán bit** trong máy tính tương ứng với các liên từ logic. Bằng cách thay đúng bằng 1 và sai bằng 0 trong các bảng giá trị chân lý đối với các toán tử $\wedge$, $\vee$ và $\oplus$, ta sẽ nhận được các phép toán bit tương ứng trong các bảng cho trong Bảng 7. Chúng ta sẽ dùng các ký hiệu OR, AND và XOR thay cho các toán tử $\vee$, $\wedge$ và $\oplus$ như thường được làm trong các ngôn ngữ lập trình khác nhau.

Thông tin thường được biểu diễn bằng cách dùng các xâu bit, đó là dãy các số 0 và 1. Khi đã làm như thế, các phép toán trên các xâu bit cũng có thể được dùng để thao tác thông tin đó

**BẢNG 7. Bảng cho các toán tử bit OR, AND và XOR**

| $\vee$ | 0 | 1 | $\wedge$ | 0 | 1 | $\oplus$ | 0 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

**ĐỊNH NGHĨA 7.** Một *xâu bit* (hoặc xâu nhị phân) là dãy không hoặc nhiều bit. *Chiều dài* của xâu là số các bit trong xâu đó.

**Ví dụ 9**. 101010011 là một xâu bit có chiều dài là 9.

■

Chúng ta có thể mở rộng các phép toán bit tới các xâu bit. Chúng ta định nghĩa các **OR bit, AND bit** và **XOR bit** đối với hai xâu bit có cùng chiều dài là các xâu có các bit của chúng là các OR, AND và XOR của các bit tương ứng trong hai xâu tương ứng. Chúng ta cũng dùng các ký hiệu $\vee$, $\wedge$ và $\oplus$ để biểu diễn các phép toán bit OR, AND và XOR, tương ứng. Chúng ta sẽ minh hoạ các phép toán bit trên các xâu bit bằng ví dụ sau :

**Ví dụ 10**. Tìm OR bit, AND bit và XOR bit đối với hai xâu 01101 10110 và 11000 11101 (ở đây và trong suốt cuốn sách này, các xâu bit sẽ được tách thành các khối, mỗi khối có 5 bit cho dễ đọc).

*Giải* : OR bit, AND bit và XOR bit của hai xâu này nhận được bằng cách lấy OR, AND và XOR của các bit tương ứng của hai xâu đó, cụ thể là :

```
01101 10110
11000 11101
-----------
11101 11111     ∨ OR bit
01000 10100     ∧ AND bit
10101 01011     ⊕ XOR bit.
```

■

## BÀI TẬP

1. Trong các câu dưới đây câu nào là một mệnh đề?

   a) Boston là thủ phủ của bang Massachusetts.

   b) Miami là thủ phủ của bang Florida.

   c) $2 + 3 = 5$

   d) $5 + 7 = 10$

   e) $x + 2 = 11$

   f) Hãy trả lời câu hỏi này.

   g) $x + y = y + x$ với mọi cặp số thực $x$ và $y$.

2. Trong các câu sau đây câu nào là một mệnh đề? Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề đó?

   a) Không được đi qua.

   b) Bây giờ là mấy giờ?

   c) Không có ruồi đen ở Maine.

   d) $4 + x = 5$.

   e) $x + 1 = 5$ nếu $x = 1$.

   f) $x + y = y + z$ nếu $x = z$.

3. Tìm phủ định của các mệnh đề sau :

   a) Hôm nay là thứ năm.

   b) Không có ô nhiễm ở New Jersey.

   c) $2 + 1 = 3$.

   d) Mùa hè ở Maine nóng và nắng.

4. Cho $p$ và $q$ là hai mệnh đề.

   $p$ : Tôi đã mua vé xổ số tuần này.
   $q$ : Tôi đã trúng giải độc đắc 1 triệu đô la vào hôm thứ sáu.
   Diễn đạt các mệnh đề sau bằng các câu thông thường :

   a) $\neg p$ b) $p \vee q$

   c) $p \rightarrow q$ d) $p \wedge q$

   e) $p \leftrightarrow q$ f) $\neg p \rightarrow \neg q$

g) $\neg p \wedge \neg q$ h) $\neg p \vee (p \wedge q)$.

**5.** Cho $p$ và $q$ là hai mệnh đề.

$p$ : Nhiệt độ dưới không.

$q$ : Tuyết rơi..

Dùng $p$ và $q$ và các liên từ logic viết các mệnh đề sau :

a) Nhiệt độ dưới không và tuyết rơi.

h) Nhiệt độ dưới không nhưng không có tuyết rơi.

c) Nhiệt độ không dưới không và không có tuyết rơi.

d) Có tuyết rơi hoặc nhiệt độ dưới không (hoặc cả hai).

e) Nếu nhiệt độ dưới không thì cũng có tuyết rơi.

f) Hoặc nhiệt độ dưới không hoặc có tuyết rơi nhưng sẽ không có tuyết rơi nếu nhiệt độ dưới không.

g) Nhiệt độ dưới không là điều kiện cần và đủ để có tuyết rơi.

**6.** Cho $p$, $q$ và $r$ là những mệnh đề :

$p$ : Bạn bị cúm.

$q$ : Bạn thi trượt kỳ thi cuối khoá.

$r$ : Bạn được lên lớp.

Hãy diễn đạt những mệnh đề sau thành những câu thông thường.

a) $p \rightarrow q$ b) $\neg q \leftrightarrow r$

c) $q \rightarrow \neg r$ d) $p \vee q \vee r$

e) $(p \rightarrow \neg r) \vee (q \rightarrow \neg r)$ f) $(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r)$.

**7.** Cho $p$ và $q$ là hai mệnh đề

$p$ : Bạn lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h.

$q$ : Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

Hãy viết các mệnh đề sau bằng cách dùng $p$ và $q$ và các liên từ logic.

a) Bạn không lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h.

h) Bạn lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h, nhưng bạn không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

c) Bạn sẽ bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nếu bạn lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h.

d) Nếu bạn không lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h thì bạn sẽ không bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

e) Lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h là đủ để bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép.

f) Bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép nhưng bạn không lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h.

g) Mỗi lần bạn bị phạt vì vượt quá tốc độ cho phép là bạn đã lái xe với tốc độ trên 65 dặm/h.

**8.** Cho $p$, $q$ và $r$ là các mệnh đề

$p$ : Bạn nhận được điểm giỏi trong kỳ thi cuối khoá.

$q$ : Bạn làm hết các bài tập trong quyển sách này.

$r$ : Bạn sẽ được công nhận là giỏi ở lớp này.

Hãy dùng $p,q$ và $r$ cùng với các liên từ logic để viết các mệnh đề sau:

a) Bạn được công nhận là giỏi ở lớp này, nhưng bạn không làm hết các bài tập ở quyển sách này.

b) Bạn nhận được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khoá, bạn làm hết các bài tập trong quyển sách này và bạn được công nhận là giỏi ở lớp này.

c) Để được công nhận là giỏi ở lớp này bạn cần phải được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khoá.

d) Bạn nhận được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khoá, nhưng bạn không làm hết các bài tập ở quyển sách này, tuy nhiên bạn vẫn được công nhận là giỏi ở lớp này.

e) Nhận được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khoá và làm hết những bài tập ở quyển sách này là đủ để bạn được công nhận là giỏi ở lớp này.

f) Bạn sẽ được công nhận là giỏi ở lớp này, nếu và chỉ nếu bạn làm hết các bài tập trong quyển sách này hoặc nhận được điểm giỏi ở kỳ thi cuối khoá.

**9.** Đối với các câu sau đây, hãy cho biết các câu đó sẽ có ý nghĩa nào nếu liên từ hoặc ở đây sắc thái nghĩa bao hàm (tức là tuyển) so với liên từ hoặc có sắc thái nghĩa loại trừ? Theo bạn trong hai nghĩa đó, nghĩa nào là nghĩa hàm định?

a) Để theo học môn toán học rời rạc, bạn cần phải đã học giải tích hoặc một khoá tin học.

b) Khi bạn mua một chiếc xe mới của hãng Acme Motor bạn sẽ được bớt lại 2000 USD tiền mặt hoặc được nợ 2% giá trị chiếc xe.

c) Bữa ăn tối gồm hai món ở cột A hoặc ba món ở cột B.

d) Trường sẽ đóng cửa nếu tuyết rơi dày hơn 2m hoặc gió lạnh dưới -100.

10. Một nhà thám hiểm bị một nhóm người ăn thịt người bắt cóc. Có hai loại người ăn thịt người : loại luôn luôn nói thật và loại luôn luôn nói dối. Họ sẽ nướng sống nhà thám hiểm nếu ông không xác định được một người nào đó trong họ là luôn luôn nói dối hay nói thật. Ông được phép hỏi người đó chỉ một câu hỏi.

a) Hãy giải thích tại sao câu hỏi "Anh là người nói dối?" không mang lại kết quả?

b) Tìm câu hỏi mà nhà thám hiểm đã dùng để xác định người ăn thịt người đó là luôn luôn nói dối hay nói thật.

11. Hãy viết những câu sau dưới dạng "nếu $p$ thì $q$"
(*Gợi ý* : Tham khảo các cách thường dùng để diễn đạt phép kéo theo đã được liệt kê trong Tiết này.

a) Có tuyết rơi mỗi khi có gió Đông Bắc.

b) Các cây táo sẽ nở hoa nếu trời ấm kéo dài một tuần.

c) Việc đội Pistons dành chức vô địch ngụ ý rằng họ đã đánh bại đội Lakers.

d) Cần phải đi 8 dặm nữa mới tới được đỉnh núi Long.

e) Để được phong giáo sư, nổi tiếng thế giới là đủ.

f) Nếu bạn cho xe chạy hơn 400 dặm, bạn sẽ cần phải mua xăng.

g) Giấy bảo hành của bạn còn hiệu lực nếu bạn đã mua chiếc đầu CD của bạn ít hơn 90 ngày trước đây.

12. Viết các mệnh đề sau dưới dạng "$p$ nếu và chỉ nếu $q$" trong ngôn ngữ thông thường.

a) Để nhận được điểm giỏi trong khoá học này cần và đủ là phải học giải được các bài tập của toán học rời rạc.

b) Nếu bạn đọc báo mỗi ngày bạn sẽ thạo tin tức và ngược lại.

c) Trời mưa nếu là ngày cuối tuần và là ngày cuối tuần nếu trời mưa.

d) Bạn có thể nhìn thấy lão phù thuỷ nếu lão không ở trong đó và lão phù thuỷ không ở trong đó nếu bạn nhìn thấy lão.

**13.** Phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo của các mệnh đề kéo theo sau :

a) Nếu hôm nay tuyết rơi, ngày mai tôi sẽ đi trượt tuyết.

b) Tôi tới lớp mỗi khi sắp có kỳ thi.

c) Một số nguyên dương là số nguyên tố nếu nó không có một ước số nào khác 1 và chính nó.

**14.** Phát biểu mệnh đề đảo và phản đảo của các mệnh đề kéo theo sau :

a) Nếu đêm nay có tuyết rơi, tôi sẽ ở nhà.

b) Tôi đều đi ra bãi tắm bất cứ ngày nào trời nắng.

c) Khi tôi ở lại muộn, cần phải để tôi ngủ đến trưa.

**15.** Lập bảng giá trị chân lý đối với các mệnh đề phức hợp sau :

a) $p \wedge \neg p$ b) $p \vee \neg p$

c) $(p \vee \neg q) \rightarrow q$ d) $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

e) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ f) $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

**16.** Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau :

a) $p \oplus q$ b) $p \oplus \neg p$

c) $p \oplus \neg q$ d) $\neg p \oplus \neg q$

e) $(p \oplus q) \vee (p \oplus \neg q)$ f) $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$

**17.** Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau

a) $p \rightarrow \neg q$ h) $\neg p \leftrightarrow q$

c) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow q)$ d) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)$

e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$ f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

**18.** Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau :

a) $(p \vee q) \vee r$ b) $(p \vee q) \wedge r$

c) $(p \wedge q) \vee r$ d) $(p \wedge q) \wedge r$

e) $(p \vee q) \wedge \neg r$ f) $(p \wedge q) \vee \neg r$

**19.** Lập bảng giá trị chân lý cho các mệnh đề phức hợp sau :

a) $p \rightarrow (\neg q \vee r)$ h) $\neg p \rightarrow (q \rightarrow r)$

c) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r)$ d) $(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$

e) $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$ f) $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$

**20.** Xác định giá trị của $x$ sau mỗi khi gặp câu lệnh dưới đây trong một chương trình máy tính, nếu trước khi tới câu lệnh đó $x = 1$.

a) **if** 1 + 2 = 3 **then** x := x + 1.

b) **if** (1 + 1 = 3) OR (2 + 2 = 3) **then** $x := x + 1$.

c) if (2 + 3 = 5) AND (3 + 4 = 7) **then** $x := x + 1$.

d) **if** (1 + 1 = 2) XOR (1 + 2 = 3) **then** $x := x + 1$.

e) **if** $x < 2$ **then** $x := x + 1$.

**21.** Tìm các OR bit, AND bit và XOR bit của các cặp xâu bit sau :

a) 10 11110 ; 01 00001

b) 111 10000 ; 101 01010

c) 00011 10001 ; 10010 01000

d) 11111 11111 ; 00000 00000

**22.** Xác định các biểu thức sau :

a) $11000 \wedge (01011 \vee 11011)$

b) $(01111 \wedge 10101) \vee 01000$

c) $(01010 \oplus 11011) \oplus 01000$

d) $(11011 \vee 01010) \wedge (10001 \vee 11011)$

**Logic mờ** *được sử dụng trong trí tuệ nhân tạo. Trong logic mờ, giá trị chân lý của một mệnh đề là một số nằm giữa 0 và 1. Một mệnh đề với giá trị chân lý 0 là sai, và giá trị chân lý 1 là đúng. Còn giá trị chân lý nằm giữa 0 và 1 chỉ ra mức độ thay đổi của chân lý. Ví dụ, giá trị chân lý 0,8 có thể được gán cho mệnh đề "Fred hạnh phúc" vì phần lớn thời gian Fred sống hạnh phúc, giá trị chân lý 0,4 có thể được gán cho mệnh đề "John hạnh phúc" vì John hạnh phúc gần một nửa thời gian.*

**23.** Giá trị chân lý của phủ định một mệnh đề trong logic mờ là hiệu của 1 và giá trị chân lý của mệnh đề đó. Hãy xác định giá trị chân lý của mệnh đề "Fred không hạnh phúc" và "John không hạnh phúc".

**24.** Giá trị chân lý của hợp hai mệnh đề trong logic mờ là giá trị chân lý nhỏ nhất của hai mệnh đề đó. Hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau "Fred và John đều hạnh phúc" và "Cả Fred và John đều không hạnh phúc".

**25.** Giá trị chân lý của tuyển hai mệnh đề trong logic mờ là giá trị chân lý lớn nhất của hai mệnh đề đó. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau : "Fred hạnh phúc hoặc John hạnh phúc" và "Fred không hạnh phúc hoặc John không hạnh phúc".

**26.** Khẳng định "Mệnh đề này sai" có là một mệnh đề không?

*Một tập hợp các biểu thức mệnh đề được gọi là phi mâu thuẫn (hay nhất quán) nếu có một sự gán các giá trị chân lý cho các biến trong những biểu thức đó làm cho mỗi biểu thức đó đều đúng. Khi cho những đặc điểm của một hệ thống thì điều quan trọng là những đặc điểm đó phải phi mâu thuẫn.*

**27.** Các đặc điểm sau có phi mâu thuẫn không?
"Hệ thống ở trạng thái nhiều người dùng nếu và chỉ nếu nó hoạt động bình thường. Nếu một hệ thống hoạt động bình thường thì hạt nhân của nó cũng hoạt động. Hạt nhân không hoạt động hoặc hệ thống ở mode ngắt. Nếu hệ thống không ở trạng thái nhiều người dùng thì nó là ở mode ngắt. Hệ thống không ở mode ngắt".

**28.** Các đặc điểm sau có phi mâu thuẫn không? "Nếu hệ thống tệp không bị khóa thì các thông báo mới sẽ phải xếp hàng (chờ đợi). Nếu hệ thống tệp không bị khóa thì hệ thống đó sẽ hoạt động bình thường và ngược lại. Nếu các thông báo mới không phải xếp hàng (chờ đợi) thì chúng sẽ được gửi tới bộ đệm thông báo. Nếu hệ thống tệp không bị khóa, thì các thông báo mới sẽ được gửi tới bộ đệm thông báo. Các thông báo mới sẽ không được gửi tới bộ đệm thông báo.

## 1.2. SỰ TƯƠNG ĐƯƠNG CỦA CÁC MỆNH ĐỀ

### MỞ ĐẦU

Một bước quan trọng được dùng trong lập luận toán học là thay một mệnh đề này bằng một mệnh đề khác có cùng giá trị chân lý. Vì thế, các phương pháp tạo ra các mệnh đề có cùng giá trị chân lý với một mệnh đề phức hợp đã cho được dùng rất rộng rãi trong việc xây dựng các lập luận toán học.

Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc phân loại các mệnh đề phức hợp theo các giá trị chân lý khả dĩ của chúng.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Một mệnh đề phức hợp mà luôn luôn đúng bất kể các giá trị chân lý của các mệnh đề thành phần của nó được gọi là *hằng đúng* (tautology). Một mệnh đề mà luôn luôn sai được gọi là *mâu thuẫn*. Cuối cùng, một mệnh đề không phải là hằng đúng, cũng không phải là mâu thuẫn được gọi là *tiếp liên* (contingency).

Hằng đúng và mâu thuẫn thường là quan trọng trong các suy luận toán học. Các ví dụ dưới đây minh họa cho các loại mệnh đề trên.

**Ví dụ 1**. Chúng ta có thể xây dựng các ví dụ về các mệnh đề hằng đúng và mâu thuẫn bằng cách chỉ dùng một mệnh đề. Hãy xét bảng giá trị chân lý của $p \vee \neg p$ và $p \wedge \neg p$ cho trong Bảng 1. Vì $p \vee \neg p$ là luôn luôn đúng vậy nó là hằng đúng. Vì $p \wedge \neg p$ là luôn luôn sai, nên nó là mâu thuẫn.

■

**BẢNG 1. Ví dụ về mệnh đề hằng đúng và mệnh đề mâu thuẫn**

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|---|
| T | F | T | F |
| F | T | T | F |

## TƯƠNG ĐƯƠNG LOGIC

Các mệnh đề phức hợp luôn luôn có cùng giá trị chân lý được gọi là **tương đương logic**. Ta có thể định nghĩa khái niệm này như sau.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Các mệnh đề $p$ và $q$ được gọi là *tương đương logic* nếu $p \leftrightarrow q$ là hằng đúng.

Ký hiệu $p \Leftrightarrow q$ để chỉ $p$ và $q$ là tương đương logic.

Một cách để xác định hai mệnh đề có tương đương hay không là dùng bảng giá trị chân lý. Đặc biệt, các mệnh đề $p$ và $q$ là tương đương nếu và chỉ nếu các cột cho giá trị chân lý của chúng phù hợp với nhau. Ví dụ sau đây minh họa phương pháp này.

**BẢNG 2. Bảng chân lý đối với $\neg(p \vee q)$ và $\neg p \wedge \neg q$**

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $\neg(p \vee q)$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $\neg p \wedge \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | F | F |
| T | F | T | F | F | T | F |
| F | T | T | F | T | F | F |
| F | F | F | T | T | T | T |

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng $\neg(p \vee q)$ và $\neg p \wedge \neg q$ là tương đương logic. Sự tương đương này là một trong số các luật De Morgan đối với các mệnh đề, các luật này được gọi theo tên nhà toán học Anh Augustus De Morgan, giữa thế kỷ 19.

*Giải* : Bảng giá trị chân lý đối với các mệnh đề này được cho trong Bảng 2. Vì bảng giá trị chân lý của các mệnh đề $\neg(p \vee q)$ và $\neg p \wedge \neg q$ phù hợp với nhau đối với mọi tổ hợp khả dĩ các giá trị chân lý của $p$ và $q$, suy ra hai mệnh đề này là tương đương logic.

■

**BẢNG 3. Bảng giá trị chân lý đối với $\neg p \vee q$ và $p \rightarrow q$**

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg p \vee q$ | $p \rightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | F | F |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |

**Ví dụ 3.** Chứng minh rằng $p \rightarrow q$ và $\neg p \vee q$ là tương đương logic.

*Giải* : Chúng ta lập bảng chân lý cho các mệnh đề này trong Bảng 3. Vì các giá trị chân lý của $\neg p \vee q$ và $p \rightarrow q$ phù hợp nhau, nên các mệnh đề này là tương đương logic.

■

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng các mệnh đề $p \vee (q \wedge r)$ và $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ là tương đương logic. Đây là luật phân bố của phép tuyển đối với phép hợp.

*Giải* : Bảng giá trị chân lý của các mệnh đề đó cho trong Bảng 4. Vì giá trị chân lý của các mệnh đề $p \vee (q \wedge r)$ và $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ là phù hợp nhau nên chúng là tương đương logic.

■

**BẢNG 4. Một cách chứng minh $p \vee (q \wedge r)$ và $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ là tương đương logic**

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \wedge r$ | $p \vee (q \wedge r)$ | $p \vee q$ | $p \vee r$ | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | F | T | T | T | T |
| T | F | T | F | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | T | T | T |
| F | T | T | T | T | T | T | T |
| F | T | F | F | F | T | F | F |
| F | F | T | F | F | F | T | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

*Chú ý* : Bảng chân lý của một mệnh đề phức hợp gồm ba mệnh đề thành phần khác nhau đòi hỏi phải có 8 hàng, mỗi hàng cho một tổ hợp khả dĩ các giá trị chân lý của ba mệnh đề đó. Nói chung, một mệnh đề phức hợp gồm $n$ mệnh đề thành phần khác nhau đòi hỏi phải có $2^n$ hàng.

Bảng 5 cho một số tương đương logic quan trọng. Trong các tương đương đó, **T** là ký hiệu mệnh đề bất kỳ là đúng và **F**– ký hiệu mệnh đề sai. Yêu cầu độc giả kiểm tra lại các tương đương đó trong những bài tập ở cuối Tiết này.

Luật kết hợp đối với phép tuyển chứng tỏ rằng biểu thức $p \vee q \vee r$ là hoàn toàn xác định, theo nghĩa là kết quả sẽ không thay đổi bất kể trước hết ta lấy tuyển giữa $p$ và $q$ rồi sau đó lấy tuyển của $p \vee q$ và $r$ hay trước hết ta lấy tuyển của $q$ và $r$ rồi sau đó mới lấy tuyển $p$ và $q \vee r$. Tương tự, biểu thức $p \wedge q \wedge r$ cũng hoàn toàn xác định. Mở rộng suy luận trên, ta suy ra rằng $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$ và $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ là hoàn toàn xác định nếu $p_1, p_2 \ldots p_n$ là các mệnh đề. Hơn nữa, chú ý rằng luật De Morgan cũng được mở rộng thành :

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n)$$

và

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Leftrightarrow (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \ldots \vee \neg p_n).$$

(Các phương pháp chứng minh những đẳng thức này sẽ được trình bày trong Chương 3).

Các tương đương logic cho trong Bảng 5, cũng như các tương đương khác đã được thiết lập (như được cho trong Bảng 6) lại có thể được dùng để lập các tương đương logic bổ sung. Bởi vì một mệnh đề trong một mệnh đề phức hợp có thể được thay thế bằng một mệnh đề khác tương đương với nó mà không làm thay đổi giá trị chân lý của mệnh đề phức hợp đang xét. Kỹ thuật này sẽ được minh họa trong Ví dụ 5 và 6 ở đó chúng ta cũng dùng tính chất nói rằng nếu $p$ và $q$ là tương đương logic và $q$ và $r$ là tương đương logic thì $p$ và $r$ cũng là tương đương logic (xem Bài tập 40).

**BẢNG 5. Các tương đương logic**

| TƯƠNG ĐƯƠNG | TÊN GỌI |
|---|---|
| $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$<br>$p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$ | Luật đồng nhất |
| $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$<br>$p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$ | Luật nuốt |
| $p \vee p \Leftrightarrow p$<br>$p \wedge p \Leftrightarrow p$ | Luật lũy đẳng |
| $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ | Luật phủ định kép |
| $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$<br>$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ | Luật giao hoán |
| $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$<br>$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ | Luật kết hợp |
| $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$<br>$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | Luật phân phối |
| $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$<br>$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ | Luật De Morgan |

| **BẢNG 6. Một số tương đương tiện ích** |
|---|
| $p \vee \neg p \Leftrightarrow \mathbf{T}$ |
| $p \wedge \neg p \Leftrightarrow \mathbf{F}$ |
| $(p \to q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$ |

**Ví dụ 5**. Chứng minh rằng $\neg(p \vee(\neg p \wedge q))$ và $\neg p \wedge \neg q$ là tương đương logic.

*Giải* : Chúng ta có thể dùng bảng chân lý để chứng minh sự tương đương của các mệnh đề trên. Tuy nhiên, thay vì thế, ta sẽ phát triển một chuỗi các tương đương logic, mỗi lần dùng một tương đương cho trong Bảng 5, bắt đầu với $\neg(p \vee (\neg q \wedge q))$ và kết thúc với $\neg p \wedge \neg q$. Ta có các tương đương sau :

$\neg(p \vee(\neg p \wedge q)) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$ theo Luật De Morgan thứ hai

$\Leftrightarrow \neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$ theo Luật De Morgan thứ nhất

$\Leftrightarrow \neg p \wedge [p \vee \neg q]$ theo Luật phủ định kép.

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ theo Luật phân phối.

$\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q)$ Vì $\neg p \wedge p \Leftrightarrow \mathbf{F}$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F}$ theo Luật giao hoán đối với phép tuyển

$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ theo Luật đồng nhất đối với **F**

Vậy $\neg(p \vee(\neg p \wedge q))$ và $\neg p \wedge \neg q$ là tương đương logic.

■

**Ví dụ 6.** Chứng minh rằng $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ là hằng đúng.

*Giải :* Để chứng minh một mệnh đề là hằng đúng, ta sẽ dùng các tương đương logic để chứng tỏ rằng nó tương đương logic với **T** (*Chú ý* : Điều này cũng có thể làm được bằng cách lập bảng chân lý).

$(p \wedge q) \to (p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ theo Ví dụ 3

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$ theo Luật De Morgan thứ nhất

$\Leftrightarrow (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$ theo Luật kết hợp và giao hoán đối với phép tuyển

$\Leftrightarrow \mathbf{T} \vee \mathbf{T}$ theo Ví dụ 1 và Luật giao hoán đối với phép tuyển

$\Leftrightarrow \mathbf{T}$ theo Luật nuốt.

## BÀI TẬP

**1**. Dùng bảng chân lý để chứng minh các tương đương sau :

a) $p \wedge \mathbf{T} \Leftrightarrow p$

b) $p \vee \mathbf{F} \Leftrightarrow p$

c) $p \wedge \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F}$

d) $p \vee \mathbf{T} \Leftrightarrow \mathbf{T}$

e) $p \vee p \Leftrightarrow p$

f) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

**2**. Chứng minh rằng $\neg(\neg p)$ và $p$ là tương đương logic.

**3**. Dùng bảng chân lý để chứng minh luật giao hoán :

a) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

b) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

**4**. Dùng bảng chân lý để chứng minh luật kết hợp :

a) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

b) $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

**5**. Dùng bảng chân lý để chứng minh luật phân phối :

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

**6**. Dùng bảng chân lý để chứng minh tương đương :

$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

**7**. Dùng bảng chân lý chứng minh các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng :

a) $(p \wedge q) \rightarrow p$

b) $p \rightarrow (p \vee q)$

c) $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$

d) $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

e) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow p$

f) $\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q$

**8**. Bằng cách dùng bảng chân lý chứng minh rằng các mệnh đề kéo theo sau là hằng đúng :

a) $[\neg p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$

b) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

c) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$

d) $[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$

**9.** Làm lại Bài tập 7 nhưng không dùng các bảng chân lý.

**10.** Làm lại Bài tập 8 nhưng không dùng các bảng chân lý.

**11.** Chứng minh các tương đương được gọi là **luật hấp thụ** sau :

a) $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$

b) $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$.

**12.** Xác định xem $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$ có phải là hằng đúng không?

**13.** Cũng hỏi như trên với mệnh đề $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$

**14.** Chứng minh rằng $p \leftrightarrow q$ và $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ là tương đương.

**15.** Chứng minh rằng $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ và $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ là không tương đương.

**16.** Chứng minh rằng $p \rightarrow q$ và $\neg q \rightarrow \neg p$ là tương đương.

**17.** Chứng minh rằng $\neg p \leftrightarrow q$ và $p \leftrightarrow \neg q$ là tương đương.

**18.** Chứng minh rằng $\neg(p \oplus q)$ và $p \leftrightarrow q$ là tương đương.

**19.** Chứng minh rằng $\neg(p \leftrightarrow q)$ và $\neg p \leftrightarrow q$ là tương đương.

**Đối ngẫu** *của một mệnh đề phức hợp chỉ chứa các toán tử logic* $\vee$, $\wedge$ *và* $\neg$ *là một mệnh đề nhận được bằng cách thay mỗi* $\vee$ *bằng* $\wedge$, *mỗi* $\wedge$ *bằng* $\vee$, *mỗi* **T** *bằng* **F** *và mỗi* **F** *bằng* **T**. *Đối ngẫu của s được ký hiệu là* $s^*$.

**20.** Tìm đối ngẫu của các mệnh đề sau :

a) $p \wedge \neg q \wedge \neg r$

b) $(p \wedge q \wedge r) \vee s$

c) $(p \vee \mathbf{F}) \wedge (q \vee \mathbf{T})$

**21.** Chứng minh rằng $(s^*)^* = s$.

**22.** Chứng minh rằng các tương đương logic trong Bảng 5, trừ luật phủ định kép, đều đi từng cặp, mỗi cặp chứa hai mệnh đề là đối ngẫu của nhau.

**23**.** Tại sao đối ngẫu của hai mệnh đề phức hợp tương đương cũng là tương đương, nếu các mệnh đề phức hợp đó chỉ chứa các toán tử $\vee$, $\wedge$ và $\neg$ ?

**24.** Lập mệnh đề phức hợp gồm các mệnh đề $p$, $q$ và $r$ sao cho nó đúng khi $p$ và $q$ là đúng và $r$ là sai, nhưng là sai trong mọi trường hợp còn lại (*Gợi ý* : Dùng hợp của mỗi mệnh đề hoặc phủ định của nó).

**25.** Lập mệnh đề phức hợp gồm các mệnh đề $p$, $q$ và $r$ sao cho nó đúng chỉ khi hai trong ba mệnh đề $p$, $q$, và $r$ là đúng và sai trong mọi trường hợp còn lại. (*Gợi ý* : Lập tuyển các hội. Đối với mỗi tổ hợp các giá trị sao cho mệnh đề là đúng, ta đưa vào một hội. Mỗi một hội này lại chứa ba mệnh đề $p$, $q$, $r$ hoặc phủ định của chúng).

**26.** Giả sử rằng bảng chân lý với $n$ biến mệnh đề đã được cho trước đầy đủ các giá trị chân lý. Chứng minh rằng một mệnh đề phức hợp tương ứng với bảng giá trị chân lý đó có thể tạo thành bằng cách lấy tuyển các hội của các biến hoặc phủ định của chúng. Đối với mỗi tổ hợp các giá trị sao cho mệnh đề phức hợp là đúng ta đưa vào một hội. Mệnh đề kết quả tạo thành được gọi là có **dạng tuyển chuẩn tắc.**

*Một tập hợp các toán tử logic được gọi là* **đầy đủ**, *nếu mỗi mệnh đề phức hợp đều tương đương logic với một mệnh đề chỉ chứa các toán tử logic đó.*

**27.** Chứng minh rằng $\vee$, $\wedge$ và $\neg$ tạo thành một tập hợp đầy đủ các toán tử logic. (*Gợi ý* : Dùng sự thật là mỗi mệnh đề đều tương đương logic với một mệnh đề ở dạng tuyển chuẩn tắc như đã được chứng minh trong Bài tập 26).

**28*.** Chứng minh rằng $\wedge$ và $\neg$ tạo nên một tập đầy đủ các toán tử logic (*Gợi ý* : Trước hết dùng luật De Morgan để chứng minh rằng $p \vee q$ tương đương với $\neg(\neg p \wedge \neg q)$.

**29*.** Chứng minh rằng $\neg$ và $\vee$ cũng tạo nên một tập đầy đủ các toán tử logic.

*Các bài tập dưới dây liên quan dến các toán tử logic NAND và NOR. Mệnh dề p NAND q là dúng khi p hoặc q hoặc cả hai đều sai ; và nó là sai khi cả p và q đều dúng. Mệnh dề p NOR q là dúng khi cả p và q đều sai ; và sai trong các trường hợp còn lại. Các mệnh dề p NAND q và p NOR q dược ký hiệu tương ứng là* $p \mid q$ *và* $p \downarrow q$.

**30.** Lập bảng giá trị chân lý cho toán tử logic NAND.

**31.** Chứng minh rằng $p \mid q$ là tương đương logic với $\neg(p \wedge q)$.

**32.** Lập bảng giá trị chân lý của toán tử logic NOR.

**33.** Chứng minh rằng $p \downarrow p$ là tương đương logic với $\neg(p \vee q)$.

**34.** Trong bài tập này ta sẽ chứng minh rằng $\{\downarrow\}$ là một tập đầy đủ của các toán tử logic.

a) Chứng minh rằng $p \downarrow p$ là tương đương logic với $\neg p$

b) Chứng minh rằng $(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$ tương đương logic với $p \vee q$.

c) Từ phần a, b và Bài tập 29 kết luận rằng $\{\downarrow\}$ là một tập hợp đầy đủ các toán tử logic.

**35*.** Tìm mệnh đề tương đương với $p \rightarrow q$ bằng cách chỉ dùng toán tử $\downarrow$.

**36.** Chứng minh rằng $\{\mid\}$ cũng là một tập đầy đủ các toán tử logic.

**37.** Chứng minh rằng $p \mid q$ và $q \mid p$ là tương đương.

**38.** Chứng minh rằng $p \mid (q \mid r)$ và $(p \mid q) \mid r$ là không tương đương, suy ra phép toán $\mid$ không có tính chất kết hợp.

**39*.** Có bao nhiêu bảng giá trị chân lý khác nhau của các mệnh đề phức hợp chứa hai mệnh đề $p$ và $q$ ?

**40.** Chứng minh rằng nếu $p$, $q$ và $r$ là những mệnh đề phức hợp sao cho $p$ tương đương logic với $q$ và $q$ tương đương logic với $r$, thì $p$ và $r$ cũng tương đương logic.

**41.** Câu sau được trích từ bản ghi đặc điểm kỹ thuật của một hệ điện thoại : "Nếu cơ sở dữ liệu danh bạ được mở, thì monitor được đặt ở trạng thái đúng, nếu hệ không ở trạng thái ban đầu của nó". Câu này đọc thật khó hiểu vì nó liên quan tới hai phép kéo theo. Tìm một mệnh đề tương đương dễ hiểu hơn liên quan chỉ với các phép tuyển và phủ định, chứ không chứa phép kéo theo.

# 1.3. VỊ NGỮ VÀ LƯỢNG TỪ

## MỞ ĐẦU

Các câu có liên quan đến các biến như :

$$"x > 3" \; ; \quad "x = y + 3" \quad \text{và} \quad "x + y = z"$$

rất thường gặp trong các khẳng định toán học và trong các chương trình máy tính. Các câu này không đúng cũng không sai chừng nào các biến còn chưa được cho những giá trị xác định. Trong tiết này chúng ta sẽ xem xét các cách tạo ra những mệnh đề từ những câu như vậy.

Câu "$x$ lớn hơn 3" có hai bộ phận. Bộ phận thứ nhất, tức là biến $x$, là chủ ngữ của câu. Bộ phận thứ hai "lớn hơn 3" - **là vị ngữ**, nó cho biết một tính chất mà chủ ngữ có thể có. Chúng ta có thể ký hiệu câu "$x$ lớn hơn 3" là $P(x)$, với $P$ ký hiệu vị ngữ "lớn hơn 3" và $x$ là biến. Người ta cũng nói câu $P(x)$ là giá trị của **hàm mệnh đề** $P$ tại $x$. Một khi biến $x$ được gán cho một giá trị, thì câu $P(x)$ sẽ có giá trị chân lý. Ta hãy xét các ví dụ sau.

**Ví dụ 1.** Cho $P(x)$ là ký hiệu của câu "$x > 3$". Xác định giá trị chân lý của $P(4)$ và $P(2)$.

*Giải* : Mệnh đề $P(4)$ nhận được khi thay $x = 4$ vào câu "$x > 3$". Do đó $P(4)$ – tức là câu "$4 > 3$" – là đúng. Tuy nhiên $P(2)$ – tức là câu "$2 > 3$" – lại là sai.

■

Chúng ta cũng thường gặp những câu có nhiều biến hơn. Ví dụ, xét câu "$x = y + 3$". Chúng ta sẽ ký hiệu câu này là $Q(x, y)$, trong đó $x$, $y$ là các biến và $Q$ là vị ngữ. Khi các biến $x$ và $y$ được gán cho một giá trị xác định, câu $Q(x,y)$ sẽ có giá trị chân lý.

**Ví dụ 2.** Cho $Q(x,y)$ là ký hiệu của câu "$x = y + 3$". Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề $Q(1,2)$ và $Q(3,0)$.

*Giải* : Để nhận được $Q(1,2)$ ta đặt $x = 1$ và $y = 2$ vào câu $Q(x,y)$. Do đó, $Q(1,2)$ là mệnh đề "$1 = 2 + 3$", nó là sai. Câu $Q(3,0)$ là mệnh đề "$3 = 0 + 3$", nó là đúng.

■

Tương tự, ta có thể ký hiệu câu "$x + y = z$" là $R(x,y,z)$. Khi ta gán cho $x$, $y$, $z$ các giá trị xác định, câu đó sẽ có giá trị chân lý.

**Ví dụ 3.** Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề $R(1,2,3)$ và $R(0,0,1)$.

*Giải* : Mệnh đề $R(1,2,3)$ nhận được bằng cách đặt $x = 1$, $y = 2$ và $z = 3$ vào câu $R(x,y,z)$.

Ta thấy rằng $R(1,2,3)$ chính là mệnh đề "$1 + 2 = 3$", nó là đúng. Trong khi đó, $R(0,0,1)$ là mệnh đề "$0 + 0 = 1$", là sai.

■

Nói chung, câu có nhiều biến $x_1$, $x_2$ ..., $x_n$ có thể được ký hiệu bởi :

$$P(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$$

Câu có dạng $P(x_1, x_2 ..., x_n)$ được gọi là giá trị của **hàm mệnh đề** $P$ tại $(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $P$ cũng được gọi là *vị ngữ*.

Các hàm mệnh đề rất thường gặp trong máy tính, như ví dụ dưới đây.

**Ví dụ 4.** Xét câu :

**if** $x > 0$ **then** $x := x + 1$

Khi gặp câu này trong chương trình, giá trị của biến $x$ ở điểm đó trong quá trình thực hiện chương trình sẽ được đặt vào $P(x)$, tức là đặt vào câu "$x > 0$". Nếu $P(x)$ là đúng đối với giá trị này của $x$, thì lệnh gán $x := x + 1$ sẽ được thực hiện và giá trị của $x$ sẽ tăng lên 1. Nếu $P(x)$ là sai đối với giá trị đó của $x$, thì lệnh gán sẽ không được thực hiện và giá trị $x$ không thay đổi.

## LƯỢNG TỪ

Khi tất cả các biến trong một hàm mệnh đề đều được gán cho giá trị xác định, thì mệnh đề tạo thành sẽ có giá trị chân lý. Tuy nhiên, còn có một cách quan trọng khác để biến các hàm mệnh đề thành các mệnh đề, mà người ta gọi là **sự lượng hóa**. Ta sẽ xét ở đây hai loại lượng hóa (còn gọi là các lượng từ – ND), đó là lượng từ phổ dụng (cũng quen gọi là lượng từ "với mọi" – ND) và lượng từ tồn tại.

Có nhiều phát biểu toán học khẳng định rằng một tính chất nào đó đúng với mọi giá trị của biến trong một miền đặc biệt nào đó. Miền này được gọi là **không gian** hay **vũ trụ biện luận** (dưới đây ta sẽ gọi tắt là không gian – ND). Một câu như vậy sẽ được diễn đạt bằng lượng từ "với mọi". Lượng từ "với mọi" của một mệnh đề tạo nên một mệnh đề, mệnh đề này là đúng nếu và chỉ nếu $P(x)$ là đúng với mọi giá trị của $x$ trong không gian. Không gian sẽ chỉ rõ các giá trị khả dĩ của biến $x$.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** *Lượng từ "với mọi"* của $P(x)$ là mệnh đề "$P(x)$ đúng với mọi giá trị của $x$ trong không gian".

Lượng từ "với mọi" của $P(x)$ được ký hiệu là : $\forall x\ P(x)$

Mệnh đề $\forall x\ P(x)$ cũng được diễn đạt như :

"Đối với mọi $x$ $P(x)$"

**Ví dụ 5.** Diễn đạt câu

"Tất cả sinh viên ở lớp này đều đã học giải tích"

như một lượng từ "với mọi".

*Giải :* Cho $P(x)$ là ký hiệu của câu :

"$x$ đã học giải tích"

Khi đó câu "Tất cả sinh viên ở lớp này đều đã học giải tích" có thể được viết như $\forall x\ P(x)$, ở đây không gian gồm tất cả các sinh viên trong lớp đó.

Câu trên cũng có thể được diễn đạt như sau :

$$\forall x\ (S(x) \longrightarrow P(x))$$

ở đây $S(x)$ là câu :

"$x$ ở lớp này".

$P(x)$ vẫn như trước và không gian bây giờ là tập hợp tất cả sinh viên.

■

Ví dụ 5 cho thấy thường có nhiều cách để thể hiện một lượng từ.

**Ví dụ 6.** Cho $P(x)$ là hàm mệnh đề "$x + 1 > x$". Xác định giá trị chân lý của lượng từ $\forall x\ P(x)$, ở đây không gian là tập hợp các số thực.

*Giải :* Vì $P(x)$ đúng với mọi số thực $x$, nên lượng từ $\forall x\ P(x)$ là đúng.

■

**Ví dụ 7.** Cho $Q(x)$ là câu "$x < 2$". Xác định giá trị chân lý của lượng từ $\forall x\ P(x)$ với không gian là tập hợp các số thực.

*Giải* : $Q(x)$ là không đúng với mọi số thực $x$, vì, ví dụ, $Q(3)$ là sai. Do đó, $\forall x\ Q(x)$ là sai.

■

Khi tất cả các phần tử của không gian có thể được liệt kê ra, chẳng hạn như $x_1$, $x_2$ ... $x_n$, thì lượng từ "với mọi" giống hệt như phép hội

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)$$

vì phép hội này là đúng nếu và chỉ nếu $P(x_1)$, $P(x_2)$, ... $P(x_n)$ đều là đúng.

**Ví dụ 8.** Xác định giá trị của $\forall x\ P(x)$, với $P(x)$ là câu "$x^2 < 10$" và không gian bao gồm các số nguyên dương không vượt quá 4.

*Giải* : Câu $\forall x\ P(x)$ giống như là phép hội

$$P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$

vì không gian ở đây gồm các số nguyên 1,2,3 và 4.

Vì P(4) – tức là mệnh đề "$4^2 < 10$" – là sai, suy ra $\forall x\ P(x)$ là sai.

■

Có nhiều phát biểu toán học khẳng định rằng có tồn tại một phần tử có một tính chất nào đó. Những câu như vậy được diễn đạt bằng cách dùng lượng từ tồn tại. Bằng lượng từ tồn tại, chúng ta lập được một mệnh đề, mệnh đề này là đúng nếu và chỉ nếu $P(x)$ là đúng ít nhất ở một giá trị của $x$ trong không gian.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** *Lượng từ tồn tại* của $P(x)$ là mệnh đề "Tồn tại một phần tử $x$ trong không gian sao cho $P(x)$ là đúng ".

Lượng từ tồn tại của $P(x)$ được ký hiệu là : $\exists x\ P(x)$

Lượng từ tồn tại $\exists x\ P(x)$ cũng được diễn đạt như sau :

"Tồn tại một $x$ sao cho $P(x)$"

"Tồn tại ít nhất một $x$ sao cho $P(x)$"

hay "Đối với một $x$ nào đó $P(x)$".

**Ví dụ 9.** Cho $P(x)$ là câu "$x > 3$". Tìm giá trị chân lý của $\exists x\ P(x)$ với không gian là tập hợp các số thực.

*Giải :* Vì "$x > 3$" là đúng, chẳng hạn với $x = 4$, nên lượng từ tồn tại của $P(x)$, $\exists x\ P(x)$, là đúng.

■

**Ví dụ 10.** Cho $Q(x)$ là câu "$x = x + 1$". Tìm giá trị chân lý của lượng từ $\exists x\ P(x)$, với không gian là tập hợp các số thực.

*Giải* : Vì $Q(x)$ là sai đối với mọi số thực $x$, nên lượng từ tồn tại của $Q(x)$, $\exists x\ Q(x)$, là sai.

**BẢNG 1. Các lượng từ**

| MỆNH ĐỀ | KHI NÀO ĐÚNG ? | KHI NÀO SAI? |
|---|---|---|
| $\forall x\ P(x)$ | $P(x)$ đúng với mọi $x$ | Có một giá trị của $x$ để $P(x)$ sai |
| $\exists x\ P(x)$ | Có một giá trị của $x$ để $P(x)$ đúng | $P(x)$ sai với mọi $x$ |

Khi tất cả các phần tử của không gian có thể được liệt kê ra, chẳng hạn $x_1$, $x_2$, ... $x_n$, thì lượng từ tồn tại $\exists x\ P(x)$ giống hệt như phép tuyển :

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)$$

vì phép tuyển này là đúng nếu và chỉ nếu có ít nhất một trong các $P(x_1)$, $P(x_2)$, ... $P(x_n)$ là đúng.

**Ví dụ 11.** Xác định giá trị chân lý của $\exists x\ P(x)$, với $P(x)$ là câu "$x^2 > 10$" và không gian gồm các số nguyên dương không lớn hơn 4.

*Giải :* Vì không gian là $\{1, 2, 3, 4\}$, mệnh đề $\exists x\ P(x)$ giống hệt như phép tuyển :

$$P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

Vì $P(4)$ – tức là câu "$4^2 > 10$" – là đúng nên suy ra $\exists x\ P(x)$ là đúng.

■

Bảng 1 cho tóm tắt ý nghĩa của các lượng từ tồn tại và phổ dụng (tức "với mọi").

Khi xác định giá trị chân lý của một lượng từ, đôi khi sẽ rất hữu ích nếu chúng ta suy nghĩ lướt qua tất cả một vòng và tìm kiếm. Giả sử rằng ta có $n$ phần tử trong không gian của biến $x$. Để xác định $\forall x\ P(x)$ có đúng không ta có thể lướt một vòng qua tất cả $n$ giá trị đó của biến $x$ để xem $P(x)$ có luôn luôn đúng không. Nếu chúng ta gặp một giá trị của $x$ sao cho $P(x)$ là sai, thì chúng ta đã chứng minh được rằng

$\forall x\ P(x)$ là sai. Ngược lại, $\forall x\ P(x)$ là đúng. Để xem $\exists x\ P(x)$ có đúng không, chúng ta có thể lướt một vòng qua tất cả $n$ giá trị của $x$ và tìm kiếm một giá trị của $x$ sao cho $P(x)$ đúng. Nếu tìm được một giá trị như vậy, thì $\exists x\ P(x)$ là đúng. Nếu không tìm được một giá trị nào như vậy của $x$ thì chúng ta đã xác định được rằng $\exists x\ P(x)$ là sai. (Chú ý rằng quá trình tìm kiếm này sẽ không áp dụng được nếu không gian có vô số các giá trị. Tuy nhiên, đây vẫn còn là một cách suy nghĩ hữu ích về giá trị chân lý của các lượng từ).

## DỊCH CÁC CÂU THÔNG THƯỜNG THÀNH CÁC BIỂU THỨC LOGIC

Trong Tiết 1.1 chúng ta đã mô tả quá trình dịch các câu thông thường thành các biểu thức logic chứa nhiều mệnh đề và các liên từ logic. Đến đây, sau khi đã thảo luận về các lượng từ, chúng ta có thể biểu diễn được một tập hợp rộng lớn hơn các câu thông thường thành các biểu thức logic. Làm như vậy cốt là để loại đi những điều mù mờ, chưa rõ ràng và làm cho ta có thể dùng các câu đó để suy luận được. (Tiết 3.1 sẽ trình bày các qui tắc suy luận đối với các biểu thức logic)

Các ví dụ sau đây cho thấy các toán tử logic và các lượng từ được dùng để diễn đạt các câu thông thường, tương tự như loại câu thường gặp trong các phát biểu toán học, trong việc lập trình logic và trí tuệ nhân tạo, như thế nào.

**Ví dụ 12.** Biểu diễn câu "Mọi người đều có chính xác một người bạn tốt nhất" thành một biểu thức logic.

*Giải:* Giả sử $B(x,y)$ là câu "$y$ là bạn tốt nhất của $x$". Để dịch câu trong ví dụ, cần chú ý câu $B(x,y)$ muốn nói rằng đối với mỗi một cá nhân $x$ có một cá nhân khác là $y$ sao cho $y$ là bạn tốt nhất của $x$, và nếu $z$ là một cá nhân khác $y$ thì $z$ không phải là bạn tốt nhất của $x$. Do đó, câu trong ví dụ có thể dịch thành :

$$\forall x\ \exists y\ \forall z\ [B(x,y) \land ((z \neq y) \to \neg B(x,z))]$$

■

**Ví dụ 13.** Biểu diễn câu : "Nếu một người nào đó là phụ nữ và đã sinh đẻ, thì người đó sẽ là mẹ của một người nào đó" thành một biểu thức logic.

*Giải :* Giả sử $F(x)$ là câu "$x$ là phụ nữ" ; $P(x)$ là câu "$x$ đã sinh đẻ" và $M(x,y)$ là câu "$x$ là mẹ của $y$". Vì câu trong ví dụ áp dụng cho tất cả mọi người, nên ta có thể viết nó thành biểu thức sau :

$$\forall x\ ((F(x) \wedge P(x)) \rightarrow \exists y\ M(x,y))$$

■

## CÁC VÍ DỤ CỦA LEWIS CARROLL (Tùy chọn)

Lewis Carroll (bút danh của C.L. Dodgson) là tác giả của cuốn truyện *Alice trong đất nước kỳ lạ* nổi tiếng thế giới, nhưng ông cũng là tác giả của một số công trình về logic ký hiệu. Các cuốn sách của ông chứa nhiều ví dụ về sự suy luận bằng cách dùng các lượng từ. Hai ví dụ ngay dưới đây lấy từ cuốn sách *Logic ký hiệu* của ông ; một ví dụ khác lấy từ cuốn sách đó được cho trong phần bài tập ở cuối tiết này. Các ví dụ này minh họa các lượng từ đã được sử dụng để diễn đạt các loại câu khác nhau như thế nào.

**Ví dụ 14.** Xét các câu sau. Hai câu đầu được gọi là *tiền đề* và câu thứ ba được gọi là *kết luận*. Toàn bộ tập hợp ba câu này được gọi là một *suy lí*

"Tất cả sư tử đều hung dữ"

"Một số sư tử không uống cà phê"

"Một số sinh vật hung dữ không uống cà phê".

(Trong Tiết 3.1 chúng ta sẽ bàn tới vấn đề xác định kết luận có là hệ quả đúng của các tiền đề hay không. Trong thí dụ này, thì có). Gọi $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ là các câu "$x$ là sư tử", "$x$ hung dữ" và "$x$ uống cà phê", tương ứng. Giả sử rằng không gian là tập hợp toàn bộ các sinh vật, hãy diễn đạt các câu trong suy lý trên bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và các lượng từ.

*Giải* : Ta có thể biểu diễn các câu đó như sau :

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\exists x\ (P(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$$

Chú ý rằng câu thứ hai không thể viết là $\exists x\ (P(x) \rightarrow \neg R(x))$, bởi vì $P(x) \rightarrow \neg R(x)$ là đúng bất cứ khi nào $x$ không phải là sư tử, do đó $\exists x$

$(P(x) \rightarrow \neg R(x))$ là đúng chừng nào còn có ít nhất một sinh vật không phải là sư tử, thậm chí mặc dù tất cả các sư tử đều uống cà phê. Tương tự, câu thứ ba không thể được viết là :

$$\exists x \ (Q(x) \rightarrow \neg R(x))$$

**Ví dụ 15.** Xét các câu sau, trong đó ba câu đầu là tiền đề và câu thứ tư là kết luận đúng.

"Tất cả chim ruồi đều có màu sặc sỡ"

"Không có con chim lớn nào sống bằng mật ong"

"Các chim không sống bằng mật ong đều có màu xám"

"Chim ruồi là nhỏ".

Gọi $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ là các câu "$x$ là chim ruồi" ; "$x$ là lớn", "$x$ sống bằng mật ong", và "$x$ có màu sặc sỡ", tương ứng. Giả sử rằng không gian là tất cả các loại chim, hãy diễn đạt các câu trong suy lí trên bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ và các lượng từ.

*Giải :* Ta có thể biểu diễn các câu trong suy lí trên như sau :

$\forall x \ (P(x) \rightarrow S(x))$

$\neg \exists x \ (Q(x) \wedge R(x))$

$\forall x \ (\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$

$\forall x \ (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ ■

(Chú ý ở đây chúng ta đã cho rằng "nhỏ" tức là "không lớn", và "màu xám" tức là "không có màu sặc sỡ". Để chứng tỏ câu thứ tư là một kết luận đúng của ba câu đầu tiên, chúng ta cần phải dùng các qui tắc suy luận sẽ được trình bày ở Tiết 3.1).

## CÁC BIẾN BỊ RÀNG BUỘC

Khi một lượng từ được dùng đối với biến $x$ hoặc khi chúng ta gán một giá trị cho biến đó, chúng ta nói rằng sự thâm nhập này của biến là **bị ràng buộc**. Sự thâm nhập của một biến không bị ràng buộc hoặc không được đặt bằng một giá trị đặc biệt nào đó được gọi là **tự do**. Tất cả các biến thâm nhập trong các hàm mệnh đề đều phải bị ràng buộc để biến nó thành một mệnh đề. Điều này được làm bằng cách dùng các lượng từ phổ dụng và tồn tại kết hợp với việc gán giá trị.

Nhiều phát biểu toán học chứa nhiều các lượng từ của các hàm mệnh đề và các hàm mệnh đề này lại chứa nhiều biến. Điều cần phải lưu ý là trật tự của các lượng từ này là rất quan trọng nếu tất cả các lượng từ không cùng là lượng từ phổ dụng hoặc cùng là lượng từ tồn tại. Điều này sẽ được minh hoạ trong các Ví dụ 16, 17 và 18. Trong các ví dụ đó, không gian của mỗi biến đều là tập hợp các số thực.

**Ví dụ 16.** Cho $P(x,y)$ là câu "$x + y = y + x$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$.

***Giải*** : Lượng từ

$$\forall x \forall y\ P(x,y)$$

là ký hiệu của mệnh đề :

"Với mọi số thực $x$ và với mọi số thực $y$,
$x + y = y + x$ là đúng".

Vì $P(x,y)$ đúng với mọi số thực $x$ và $y$, nên mệnh đề $\forall x \forall y\ P(x,y)$ là đúng

■

**Ví dụ 17.** Cho $Q(x,y)$ là câu "$x + y = 0$". Xác định giá trị chân lý của các lượng từ $\exists y\ \forall x\ Q(x,y)$ và $\forall x \exists y\ Q(x,y)$.

***Giải*** : Lượng từ

$$\exists y \forall x\ Q(x,y)$$

là ký hiệu của mệnh đề :

"Tồn tại một số thực $y$ sao cho với mọi số thực $x$,
$Q(x,y)$ là đúng".

Bất kể số $y$ được chọn là bao nhiêu, chỉ có một giá trị của $x$ thoả mãn $x + y = 0$. Vì không có một số thực $y$ sao cho $x + y = 0$ đúng với mọi số thực $x$, nên mệnb đề $\exists y \forall x\ Q(x,y)$ là sai.

Lượng từ

$$\forall x \exists y\ Q(x,y)$$

là ký hiệu của câu

"Với mọi số thực $x$, tồn tại một số thực $y$ sao cho $Q(x,y)$ là đúng".

Với số thực $x$ đã cho, luôn có một số thực $y$ sao cho $x + y = 0$, cụ thể là $y = -x$. Từ đó suy ra mệnh đề $\forall x \exists y\ Q(x,y)$ là đúng.

■

Ví dụ 17 cho thấy rằng thứ tự xuất hiện khác nhau của các lượng từ có thể dẫn đến các kết quả khác nhau. Các mệnh đề $\exists x\ \forall y\ P(x\ ,y)$ và $\forall y\ \exists x\ P(x\ ,y)$ không phải là tương đương logic. Mệnh đề $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ là đúng nếu và chỉ nếu có một $x$ làm cho $P(x,y)$ đúng với mọi $y$. Vì vậy để cho mệnh đề này đúng, cần phải có một giá trị đặc biệt của $x$ để cho $P(x,y)$ là đúng bất kể chọn $y$ bằng bao nhiêu. Mặt khác, mệnh đề $\forall y\ \exists x\ P(x,y)$ là đúng nếu và chỉ nếu với mọi giá trị của $y$ có một giá trị của $x$ sao cho $P(x,\ y)$ là đúng. Vì vậy, để cho mệnh đề này là đúng, bất kể giá trị của $y$ được chọn như thế nào, cần phải có một giá trị của $x$ (có thể phụ thuộc vào giá trị đã chọn của $y$) để $P(x,y)$ là đúng. Nói một cách khác, trong trường hợp thứ hai, $y$ có thể phụ thuộc vào $x$, trong khi ở trường hợp thứ nhất $x$ là hằng số độc lập với $y$.

Từ những nhận xét trên, suy ra rằng nếu $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ là đúng, thì $\forall y\ \exists x\ P(x,y)$ cũng cần phải đúng. Tuy nhiên, nếu $\forall y\ \exists x\ P(x,\ y)$ đúng thì không nhất thiết $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ phải là đúng. (Xem các Bài tập bổ sung 8 và 10 ở cuối chương này).

Khi làm việc với các lượng từ có nhiều biến, đôi khi sẽ rất hữu ích nếu chúng ta suy nghĩ bằng cách đi qua các vòng kín theo từng nhóm. (Tất nhiên, nếu đối với một biến nào đó mà không gian của nó có vô số phần tử, thì chúng ta không thể thực sự đi qua một vòng hết các phần tử đó được. Tuy nhiên, đây vẫn là cách suy nghĩ rất hữu ích để hiểu các lượng từ theo từng nhóm). Ví dụ, để xem $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ có đúng không, ta đi vòng hết các giá trị của $x$, rồi đối với mỗi một $x$, ta lại đi vòng hết các giá trị của $y$. Nếu ta thấy $P(x,y)$ đúng với mọi giá trị của $x$ và $y$, là ta đã xác định được rằng $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ là đúng. Còn nếu chúng ta vấp phải một giá trị của $y$ sao cho $P(x,\ y)$ là sai, thì như vậy chúng ta đã chứng minh được rằng $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ là sai.

Tương tự, để xác định xem $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ có đúng không, ta đi một vòng qua các giá trị của $x$. Đối với mỗi $x$, ta lại đi một vòng qua tất cả các giá trị của $y$, cho đến khi ta tìm được một $y$ sao cho $P(x,\ y)$ là đúng. Nếu đối với mọi $x$ chúng ta đều tìm được một $y$ có tính chất đó, thì $\forall x\ \exists y\ P(x,\ y)$ là đúng. Còn nếu đối với một $x$ nào đó chúng ta không tìm được một $y$ như vậy thì $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ là sai.

Để xem $\exists x\ \forall y\ P(x,\ y)$ có đúng không, chúng ta đi một vòng hết các giá trị của $x$ cho đến khi tìm được một $x$ sao cho $P(x,y)$ luôn luôn đúng khi ta đi hết một vòng qua tất cả các giá trị của $y$. Nếu tìm được một $x$

có tính chất đó, thì ta biết được rằng $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ là đúng. Còn nếu không tìm được một $x$ như vậy, thì $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ là sai.

**BẢNG 2. Các lượng từ hai biến**

| MỆNH ĐỀ | KHI NÀO ĐÚNG? | KHI NÀO SAI ? |
|---|---|---|
| $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$<br>$\forall y\ \forall x\ P(x,y)$ | $P(x,y)$ đúng với mọi cặp $(x,y)$ | Có một cặp $(x,y)$ đối với nó $P(x,y)$ là sai |
| $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$ | Với mọi x, có một $y$ sao cho $P(x,y)$ là đúng | Có một $x$ sao cho $P(x,y)$ là sai với mọi $y$ |
| $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ | Có một x sao cho $P(x,y)$ đúng với mọi $y$ | Với mọi x có một $y$ sao cho $P(x,y)$ là sai |
| $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$<br>$\exists y\ \exists x\ P(x,y)$ | Có một cặp $(x, y)$ sao cho $P(x,y)$ là đúng | $P(x,y)$ là sai đối với mọi cặp $(x,y)$ |

Cuối cùng, để xem $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$ có đúng không, ta đi một vòng qua tất cả các giá trị của $x$, rồi đối với mỗi một $x$ ta lại đi một vòng qua tất cả các giá trị của $y$ cho đến khi tìm được một $x$, ở đó ta lại tìm được một $y$ sao cho $P(x,y)$ là đúng. Mệnh đề $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$ là sai nếu chúng ta không tìm được một $x$ nào, ở đó tìm được một $y$ sao cho $P(x,y)$ là đúng.

Bảng 2 tóm tắt ý nghĩa của các lượng từ hai biến khả dĩ.

Người ta cũng thường gặp các lượng từ có hơn hai hiến, như Ví dụ 18 dưới đây.

**Ví dụ 18.** Cho $Q(x,y,z)$ là câu "$x + y = z$". Xác định giá trị chân lý của $\forall x\ \forall y\ \exists z\ Q(x,y,z)$ và $\exists z\ \forall x\ \forall y\ Q(x,y,z)$.

***Giải :*** Giả sử $x,y$ đã được gán giá trị. Khi đó tồn tại một giá trị $z$ sao cho $x + y = z$. Vì vậy, lượng từ :

$$\forall x\ \forall y\ \exists z\ Q(x,y,z)$$

là ký hiệu của câu :

> "Đối với mọi số thực $x$ và mọi số thực $y$, tồn tại một số thực $z$ sao cho $x + y = z$" là đúng. Thứ tự của các lượng từ ở đây là quan trọng, vì lượng từ :

$$\exists z \ \forall x \ \forall y \ Q(x,y,z)$$

là ký hiệu của câu :

> "Có một số thực $z$ sao cho với mọi số thực $x$ và mọi số thực $y$ đẳng thức $x + y = z$ là đúng" lại là một mệnh đề sai, vì không có một giá trị nào của $z$ lại thoả mãn phương trình $x + y = z$ với mọi giá trị của $x$ và $y$.

■

Ví dụ dưới đây minh hoạ các lượng từ có thể được dùng để diễn đạt các câu có nhiều biến như thế nào. Như ví dụ sẽ cho thấy, thường có nhiều cách để làm việc này.

**Ví dụ 19.** Dùng các lượng từ để diễn đạt câu :

"Có một phụ nữ đã bay một lần tất cả các tuyến bay trên thế giới".

***Giải*** : Cho $P(w,f)$ là câu "$w$ đã bay chuyến bay $f$" và $Q(f,a)$ là câu "$f$ là chuyến bay trên tuyến $a$".

Ta có thể diễn đạt câu trong đầu bài như sau :

$$\exists w \ \forall a \ \exists f \quad (P(w,f) \land Q(f, a))$$

Ở đây không gian của $w$, $f$ và $a$ bao gồm tất cả phụ nữ trên thế giới, tất cả các chuyến bay và tất cả các tuyến bay, tương ứng.

Câu trên cũng có thể diễn đạt như sau :

$$\exists w \ \forall a \ \exists f \quad R(w, f, a)$$

Ở đây $R(w, f, a)$ là câu

"$w$ đã đi chuyến bay $f$ trên tuyến bay $a$".

Mặc dù, xem ra gọn hơn, nhưng nó vẫn có gì đó làm cho mối quan hệ giữa các biến thiếu rõ ràng. Do đó, cách thứ nhất vẫn được ưa dùng hơn.

Các lượng từ cũng thường được dùng để định nghĩa các khái niệm toán học. Một ví dụ khá quen thuộc với chúng ta, đó là khái niệm giới hạn, một khái niệm quan trọng của giải tích.

**Ví dụ 20.** Diễn đạt định nghĩa giới hạn bằng cách dùng các lượng từ.

***Giải*** : Ta hãy nhớ lại rằng, định nghĩa của giới hạn :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

là : "Với mọi số thực $\varepsilon > 0$ tồn tại một số thực $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - L| < \varepsilon$ khi $0 < |x - a| < \delta$" .

Định nghĩa này của giới hạn có thể được diễn đạt bằng cách dùng các lượng từ như sau :

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x\ (0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

ở đây không gian đối với các biến $\delta$ và $\varepsilon$ là tập các số thực dương, còn đối với $x$ là tập các số thực.

■

Chúng ta cũng thường muốn xem xét phủ định của các biểu thức có chứa các lượng từ. Ví dụ, hãy xét phủ định của câu sau :

"Tất cả các sinh viên trong lớp đều đã học môn giải tích".

Câu này chính là một lượng từ phổ dụng, cụ thể là :

$$\forall x\ P(x)$$

ở đây $P(x)$ là câu "$x$ đã học môn giải tích".

Phủ định của câu này là "Không phải tất cả các sinh viên ở lớp này đều đã học môn giải tích". Điều này tương đương với : "Có một sinh viên ở lớp này chưa học môn giải tích". Và đây đơn giản là lượng từ tồn tại của phủ định hàm mệnh đề ban đầu, cụ thể là :

$$\exists x\ \neg P(x)$$

Ví dụ này minh hoạ phép tương đương sau :

$$\neg \forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x)$$

Giả sử chúng ta muốn lấy phủ định một lượng từ tồn tại. Ví dụ, xét câu" Có một sinh viên trong lớp đã học môn giải tích". Đây là lượng từ tồn tại

$$\exists x\ Q(x)$$

Với $Q(x)$ là câu "$x$ đã học môn giải tích". Phủ định của câu này là mệnh đề : "Không có một sinh viên nào ở lớp này đã học môn giải tích". Điều này tương đương với "Mọi sinh viên ở lớp này đều chưa học môn giải tích". Đây chính là lượng từ phổ dụng của phủ định hàm mệnh đề ban đầu, hay viết theo ngôn ngữ các lượng từ :

$$\forall x \ \neg Q(x)$$

Ví dụ này minh hoạ sự tương đương

$$\neg \exists x \ Q(x) \Leftrightarrow \forall x \ \neg Q(x)$$

Phép phủ định các lượng từ được tóm tắt trong Bảng 3

**BẢNG 3. Phủ định các lượng từ**

| PHỦ ĐỊNH | MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG | KHI NÀO PHỦ ĐỊNH LÀ ĐÚNG? | KHI NÀO SAI? |
|---|---|---|---|
| $\neg \exists x \ P(x)$ | $\forall x \ \neg P(x)$ | $P(x)$ sai với mọi $x$ | Có một $x$ để $P(x)$ là đúng. |
| $\neg \forall x \ P(x)$ | $\exists x \ \neg P(x)$ | Có một $x$ để $P(x)$ là sai | $P(x)$ đúng với mọi $x$ |

## *BÀI TẬP*

1. Cho $P(x)$ là câu "$x \leq 4$". Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau:
   a) $P(0)$ ; b) $P(4)$ ; c) $P(6)$
2. Cho $P(x)$ là câu "từ $x$ chứa chữ cái $a$". Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau :
   a) $P$(orange) b) $P$(lemon)
   c) $P$(true) d) $P$(false)
3. Cho $Q(x,y)$ là câu "$x$ là thủ phủ của $y$". Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau :
   a) $Q$ (Denver, Colorado)
   b) $Q$ (Detroit, Michigan)
   c) $Q$ (Massachusetts, Boston)
   d) $Q$ (New York, New York)
4. Cho biết giá trị của $x$ sau khi lệnh **if** $P(x)$ **then** $x := 1$ được thực hiện, biết rằng $P(x)$ là câu "$x > 1$" và giá trị của $x$ khi tới câu lệnh này là :
   a) $x = 0$ b) $x = 1$ c) $x = 2$
5. Cho $P(x)$ là câu "$x$ học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần", ở đây không gian là tập hợp các sinh viên. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường :

a) $\exists x\ P(x)$ b) $\forall x\ P(x)$

c) $\exists x\ \neg P(x)$ d) $\forall x\ \neg P(x)$

**6.** Cho $P(x,y)$ là câu "$x$ đã học môn $y$", với không gian của $x$ là tập hợp tất cả sinh viên trong lớp bạn, và không gian của $y$ là tập hợp tất cả các môn tin học ở trường bạn. Hãy diễn đạt các lượng từ sau thành câu thông thường :

a) $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$, b) $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$

c) $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$, d) $\exists y\ \forall x\ P(x,y)$

e) $\forall y\ \exists x\ P(x,y)$, f) $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$.

**7.** Cho $P(x)$ là câu "$x$ nói được tiếng Nga" và $Q(x)$ là câu "$x$ biết ngôn ngữ $C^{++}$". Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $P(x)$, $Q(x)$, các lượng từ và các liên từ logic. Cho không gian đối với các lượng từ là tập hợp tất cả sinh viên ở trường bạn.

a) Có một sinh viên ở trường bạn nói được tiếng Nga và biết $C^{++}$.

b) Có một sinh viên ở trường bạn nói được tiếng Nga nhưng không biết $C^{++}$.

c) Mọi sinh viên ở trường bạn đều nói được tiếng Nga hoặc biết $C^{++}$.

d) Không có một sinh viên nào ở trường bạn nói được tiếng Nga hoặc biết $C^{++}$.

**8.** Cho $Q(x,y)$ là câu "$x$ đã là người tham gia cuộc thi $y$". Hãy diễn đạt các câu sau bằng cách dùng $Q(x,y)$, các lượng từ và các liên từ logic. Cho không gian của $x$ là tập hợp tất cả sinh viên ở trường bạn, còn không gian của $y$ là tập hợp tất cả các cuộc thi trên truyền hình.

a) Có một sinh viên ở trường bạn đã tham gia một cuộc thi trên truyền hình.

b) Không có một sinh viên nào ở trường bạn đã tham gia cuộc thi trên truyền hình.

c) Có một sinh viên ở trường bạn đã tham gia cuộc thi *Jeopardy* và *Wheel of Fortune* trên truyền hình.

d) Mọi cuộc thi trên truyền hình đều có một sinh viên ở trường bạn tham gia.

e) Ít nhất có hai sinh viên ở trường bạn đã tham gia cuộc thi *Jeopardy* trên truyền hình.

**9.** Cho $L(x, y)$ là câu "$x$ yêu $y$", với không gian của cả $x$ và $y$ là tập hợp mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau :

a) Mọi người đều yêu Jerry

b) Mọi người đều yêu một ai đó.

c) Có một người mà tất cả mọi người đều yêu.

d) Không có ai yêu tất cả mọi người.

e) Có một người mà Lydia không yêu.

f) Có một người mà không ai yêu.

g) Có đúng một người mà tất cả mọi người đều yêu.

h) Có đúng hai người mà Lynn yêu.

i) Mọi người đều yêu chính mình.

f) Có một người nào đó không yêu ai ngoài chính mình.

**10.** Cho $F(x,y)$ là câu "$x$ có thể lừa gạt $y$", với không gian là tập hợp mọi người trên thế giới. Hãy dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau:

a) Mọi người đều có thể lừa gạt Fred.

b) Evelyn có thể lừa gạt được mọi người.

c) Mọi người đều có thể lừa gạt được ai đó.

d) Không có ai có thể lừa gạt được tất cả mọi người.

e) Mọi người đều có thể bị lừa gạt bởi ai đó.

f) Không ai có thể lừa gạt được cả Fred lẫn Jerry.

g) Nancy có thể lừa được chính xác hai người.

h) Có chính xác một người mà ai cũng lừa gạt được.

i) Không ai có thể lừa gạt được chính mình.

j) Có một người nào đó có thể lừa gạt được chính xác một người trừ bản thân mình.

**11.** Dùng các lượng từ để diễn đạt các câu sau :

a) Tất cả các sinh viên tin học đều cần phải học môn toán học rời rạc.

b) Có một sinh viên ở lớp này đã có máy vi tính.

c) Tất cả các sinh viên ở lớp này đã học ít nhất một môn tin học.

d) Có một sinh viên ở lớp này đã học ít nhất một môn tin học.

e) Mỗi sinh viên ở lớp này ở một nhà trong ký túc xá.

f) Có một sinh viên ở lớp này đã ở tất cả các phòng của ít nhất một nhà trong ký túc xá.

g) Tất cả các sinh viên ở lớp này ít nhất đã ở một phòng trong tất cả các nhà của ký túc xá.

**12.** Lớp toán học rời rạc có một sinh viên ngành toán năm thứ nhất, 12 sinh viên ngành toán năm thứ hai, 15 sinh viên tin học năm thứ hai, hai sinh viên toán năm thứ ba, hai sinh viên tin học năm thứ ba và một sinh viên tin học năm thứ tư (năm cuối cùng). Diễn đạt các câu sau bằng cách dùng các lượng từ rồi sau đó xác định giá trị chân lý của chúng.

a) Có một sinh viên trong lớp là sinh viên năm thứ ba.

b) Mọi sinh viên trong lớp đều là sinh viên ngành tin học.

c) Có một sinh viên trong lớp không phải là sinh viên ngành toán và cũng không phải sinh viên năm thứ ba.

d) Mọi sinh viên trong lớp hoặc là sinh viên năm thứ hai hoặc là sinh viên ngành tin.

e) Có một ngành học sao cho mỗi khóa học có một sinh viên ở lớp này học ngành đó.

**13.** Cho $P(x)$ là câu "$x = x^2$". Nếu không gian là tập hợp các số nguyên, thì giá trị chân lý của các mệnh đề sau là như thế nào?

a) $P(0)$ ,  b) $P(1)$ ,

c) $P(2)$ ,  d) $P(-1)$ ,

e) $\exists x\ P(x)$ ,  f) $\forall x\ P(x)$

**14.** Cho $Q(x,y)$ là câu "$x + y = x - y$". Nếu không gian của hai biến là tập hợp các số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau :

a) $Q(1,1)$  b) $Q(2,0)$

c) $\forall y\ Q(1,y)$  d) $\exists x\ Q(x,2)$

e) $\exists x\ \exists y\ Q(x,y)$ f) $\forall x\ \exists y\ Q(x,y)$

g) $\exists y\ \forall x\ Q(x,y)$ h) $\forall y\ \exists x\ Q(x,y)$

i) $\forall x\ \forall y\ Q(x,y)$

**15.** Giả sử không gian của hàm mệnh đề $P(x,y)$ gồm các cặp số $x$ và $y$ với $x$ là 1,2 hoặc 3 và $y$ là 1, 2 hoặc 3. Dùng các phép hội và tuyển viết các mệnh đề sau :

a) $\exists x\ P(x,3)$ b) $\forall y\ P(1,y)$

c) $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ d) $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$

e) $\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ f) $\forall y\ \exists x\ P(x,y)$

**16.** Dùng các lượng từ diễn đạt phủ định của các mệnh đề sau, rồi dịch các phủ định đó ra các câu thông thường.

a) Mọi sinh viên ở lớp này đều thích môn toán.

b) Có một sinh viên trong lớp này chưa hề bao giờ nhìn thấy một chiếc máy tính.

c) Có một sinh viên ở lớp này đã học tất cả các môn toán được dạy ở trường này.

d) Có một sinh viên ở lớp này đã ở ít nhất một phòng trong tất cả các toà nhà ở ký túc xá.

*Các Bài tập 17 – 20 dựa trên các câu hỏi lấy từ cuốn sách Logic ký hiệu của Lewis Carroll.*

**17.** Cho $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ là các câu "$x$ là giáo sư", "$x$ là kẻ ngu dốt" và "$x$ là kẻ vô tích sự", tương ứng. Bằng cách dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ diễn đạt các câu sau với không gian là tập hợp toàn thể loài người.

a) Không có giáo sư nào là kẻ ngu dốt.

b) Mọi kẻ ngu dốt đều là vô tích sự.

c) Không có giáo sư nào là vô tích sự.

*d) (c) có thể suy ra từ (a) và (b) không? Nếu không, liệu có một kết luận đúng nào không?

**18.** Cho $P(x)$, $Q(x)$ và $R(x)$ tương ứng là các câu "$x$ là lời giải thích rõ ràng", "$x$ là thoả đáng" và "$x$ là một lý do". Giả sử không gian của biến $x$ là tập hợp toàn bộ văn bản. Dùng các lượng từ, các liên từ logic, cùng với $R(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ diễn đạt các câu sau :

a) Tất cả các giải thích rõ ràng đều là thoả đáng.

b) Một số lý do là không thoả đáng.

c) Một số lý do không phải là giải thích rõ ràng.

*d) (c) có thể suy ra từ (a) và (b) không? Nếu không, thì liệu có một kết luận đúng không?

**19**. Cho $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$và $S(x)$ tương ứng là các câu "$x$ là một đứa bé". "$x$ là logic", "$x$ có khả năng cai quản một con cá sấu" và "$x$ bị coi thường". Giả sử rằng không gian là tập hợp tất cả mọi người. Hãy dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ để diễn đạt các câu sau :

a) Những đứa bé là không logic.

b) Không ai bị coi thường nếu cai quản được cá sấu.

c) Những người không logic bị coi thường.

d) Những đứa bé không cai quản được cá sấu.

*e) (d) có suy ra được từ (a), (b) và (c) không? Nếu không, thì liệu có một kết luận đúng không?

**20.** Cho $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ tương ứng là các câu sau : "$x$ là một con vịt", "$x$ là một trong số gia cầm của tôi", "$x$ là một viên sĩ quan" và "$x$ sẵn lòng khiêu vũ". Dùng các lượng từ, các liên từ logic cùng với $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ và $S(x)$ để diễn đạt các câu sau :

a) Không có con vịt nào sẵn lòng khiêu vũ cả.

b) Không có viên sĩ quan nào từ chối khiêu vũ.

c) Toàn bộ đàn gia cầm của tôi đều là vịt.

d) Đàn gia cầm của tôi không phải là các sĩ quan.

*e) (d) có thể suy ra từ (a), (b) và (c) không? Nếu không, thì liệu có một kết luận đúng không?

**21.** Chứng tỏ rằng các câu $\neg\exists x\ \forall y\ P(x,y)$ và $\forall x\ \exists y\ \neg P(x,y)$ có cùng giá trị chân lý.

**22.** Chứng tỏ rằng $\forall x\ (P(x) \land Q(x))$ và $\forall x\ P(x) \land \forall x\ Q(x)$ có cùng giá trị chân lý.

**23.** Chứng tỏ rằng $\exists x\ (P(x) \lor Q(x))$ và $\exists x\ P(x) \lor \exists x\ Q(x)$ có cùng giá trị chân lý.

**24.** Xác lập các tương đương logic sau, trong đó $A$ là một mệnh đề không có chứa các lượng từ.

a) $(\forall x\ P(x)) \vee A \Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \vee A)$

b) $(\exists x\ P(x)) \vee A \Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \vee A)$

**25.** Xác lập các tương đương logic sau, trong đó $A$ là mệnh đề không có liên quan với lượng từ nào :

a) $(\forall x\ P(x)) \wedge A \Leftrightarrow \forall x\ (P(x) \wedge A)$

b) $(\exists x\ P(x)) \wedge A \Leftrightarrow \exists x\ (P(x) \wedge A)$

**26.** Chứng minh rằng $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$ và $\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$ là không tương đương logic.

**27.** Chứng minh rằng $\exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ và $\exists x\ (P(x) \wedge Q(x))$ là không tương đương logic.

**28*.** Chứng minh rằng $\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$ và $\forall x\ \forall y\ (P(x) \vee Q(y))$ là tương đương logic. (Biến mới $y$ được dùng để kết hợp một cách đúng đắn các lượng từ).

**29*.** a) Chứng tỏ rằng $\forall x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$ và $\forall x\ \exists y\ (P(x) \wedge Q(y))$ là tương đương logic.

b) Chứng tỏ rằng $\forall x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$ và $\forall x\ \exists y\ (P(x) \vee Q(y))$ là tương đương logic.

**30.** $\exists! x\ P(x)$ là ký hiệu của mệnh đề "Tồn tại duy nhất một $x$ sao cho $P(x)$ là đúng". Nếu không gian là tập các số nguyên, hãy xác định giá trị chân lý của các lượng từ sau :

a) $\exists! x\ (x > 1)$ h) $\exists! x\ (x^2 = 1)$

c) $\exists! x\ (x + 3 = 2x)$ d) $\exists! x\ (x = x + 1)$

**31.** Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau :

a) $\exists! x\ P(x) \rightarrow \exists x\ P(x)$

b) $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists! x\ P(x)$

c) $\exists! x\ \neg P(x) \rightarrow \neg \forall x\ P(x)$

**32.** Biểu diễn lượng từ $\exists! x\ P(x)$ qua các phủ định, các phép hội và tuyển với không gian gồm các số nguyên 1, 2 và 3.

**33*.** Biểu diễn lượng từ $\exists!x\ P(x)$ qua lượng từ phổ dụng, lượng từ tồn tại và các toán tử logic.

*Một câu được gọi là ở dạng tiền lượng chuẩn tắc (prenex normal form – viết tắt là PNF) nếu và chỉ nếu nó có dạng :*

$$Q_1x_1Q_2x_2\ \dots\ Q_kx_kP(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$$

*Ở đây $Q_i$ với $i = 1, 2, \dots k$ hoặc là lượng từ tồn tại hoặc là lượng từ phổ dụng và $P(x_1, x_2 \dots x_n)$ là hàm mệnh đề không có liên quan đến các lượng từ nào.*

*Ví dụ, $\exists x\ \forall y\ (P(x,y) \wedge Q(y))$ là ở dạng tiền lượng chuẩn tắc, trong khi $\exists x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$ không phải ở dạng đó (vì các lượng từ không xuất hiện trước hết).*

*Tất cả các câu được tạo từ các biến mệnh đề, từ các hàm mệnh đề, từ* **T** *và* **F** *bằng cách dùng các liên từ logic và các lượng từ đều tương đương với một câu ở dạng tiền lượng chuẩn tắc. Bài tập 35 yêu cầu chứng minh khẳng định này.*

**34*.** Đặt các câu sau ở dạng tiền lượng chuẩn tắc (*Gợi ý* : Dùng tương đương logic ở các Bảng 5 và 6 trong Tiết 1.2 ; Bảng 2 trong Tiết này cùng các Bài tập 22 – 25 và 28 – 29 ở Tiết này).

a) $\exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x) \vee A$ , ở đây $A$ là một mệnh đề không có liên quan gì với các lượng từ.

b) $\neg(\forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x))$

c) $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$

**35**.** Hãy chỉ rõ cách làm thế nào để biến đổi được một câu bất kỳ thành một câu ở dạng tiền lượng chuẩn tắc tương ứng với câu đã cho.

# 1.4. TẬP HỢP

## MỞ ĐẦU

Trong cuốn sách này chúng ta sẽ nghiên cứu một lớp rộng lớn các cấu trúc rời rạc. Chúng bao gồm : các quan hệ – đó là các cặp phần tử sắp thứ tự ; các tổ hợp – đó là những tập hợp không sắp thứ tự của các phần tử ; và các đồ thị – đó là tập hợp các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó. Hơn nữa, chúng ta cũng sẽ minh hoạ các cấu trúc rời rạc này hay khác đã được sử dụng như thế nào để mô hình hoá hoặc để giải các bài toán. Đặc biệt, nhiều ví dụ về việc dùng các cấu trúc rời rạc trong lưu trữ, truyền thông và thao tác dữ liệu cũng sẽ được mô tả trong quyển sách này. Trong tiết này, chúng ta sẽ nghiên cứu một cấu trúc rời rạc cơ bản từ đó dựng lên tất cả các cấu trúc khác, đó là tập hợp.

Các tập hợp được dùng để nhóm các đối tượng lại với nhau. Thường thường, các đối tượng trong một tập hợp có các tính chất tương tự nhau. Ví dụ, tất cả các sinh viên vừa mới nhập trường lập nên một tập hợp. Tương tự như vậy, tất cả các sinh viên đang học môn toán rời rạc ở trường trên cũng tạo nên một tập hợp. Thêm vào đó, những sinh viên vừa tựu trường và đang theo học môn toán rời rạc tạo nên một tập hợp có thể nhận được bằng cách lấy các phần tử chung của hai tập hợp đầu. Ngôn ngữ tập hợp là phương tiện để nghiên cứu các tập hợp như vậy một cách có tổ chức.

Chú ý rằng thuật ngữ *đối tượng* được dùng ở đây không có chỉ rõ là đối tượng cụ thể nào. Sự mô tả một tập hợp các đối tượng dựa trên khái niệm trực giác về một đối tượng nào đó đã được nhà toán học người Đức Georg Cantor đưa ra lần đầu tiên vào năm 1895. Lý thuyết hình thành từ định nghĩa trực giác đó của tập hợp đã dẫn đến những nghịch lý hoặc các mâu thuẫn logic như nhà triết học người Anh Bertrand Russell đã chỉ ra năm 1902. (xem Bài tập 24 trong đó có mô tả một trong số các nghịch lý đó). Những mâu thuẫn logic đó có thể tránh được bằng cách xây dựng một lý thuyết tập hợp xuất phát từ những giả thiết cơ bản, gọi là các **tiên đề**. Tuy nhiên, chúng ta sẽ dùng phiên bản ban đầu của Cantor – được gọi là **lý thuyết tập hợp ngây thơ,** chứ không phát triển phiên bản tiên đề của lý thuyết này, bởi vì tất cả các tập hợp được xem xét trong cuốn cách này đều có thể được xử lý phi mâu thuẫn bằng cách dùng lý thuyết ban đầu của Cantor.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Các đối tượng trong một tập hợp cũng được gọi là các phần tử của tập hợp đó. Tập hợp được nói là *chứa* các phần tử của nó.

Có nhiều cách mô tả một tập hợp. Một trong số những cách đó là liệt kê hết các phần tử của một tập hợp, khi có thể. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu trong đó tất cả các phần tử của một tập hợp được liệt kê ở giữa hai dấu móc. Ví dụ ký hiệu $\{a, b, c, d\}$ biểu diễn một tập hợp có bốn phần tử là $a$, $b$, $c$ và $d$. (Sau này để cho gọn có chỗ "tập hợp" sẽ được gọi tắt là "tập" – ND).

**Ví dụ 1.** Tập $V$ của tất cả các nguyên âm trong bảng chữ cái tiếng Anh có thể được viết như $V = \{a, e, i, o, u\}$.

■

**Ví dụ 2.** Tập $O$ của các số nguyên, dương, lẻ nhỏ hơn 10 có thể được biểu diễn bởi $O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

■

**Ví dụ 3.** Mặc dù, các tập hợp thường dùng để nhóm các phần tử có các tính chất chung lại với nhau, nhưng cũng không có gì ngăn cản một tập hợp chứa các phần tử dường như chẳng có liên quan gì với nhau. Ví dụ, $\{a$, 2, Fred, New Jersey$\}$ là một tập hợp có bốn phần tử là $a$, 2, Fred và New Jersey.

■

Người ta thường dùng các chữ hoa để ký hiệu các tập hợp. Các chữ **N**, **Z**, và **R** in đậm sẽ được dùng để ký hiệu tập hợp các số tự nhiên $\{0, 1, 2, 3...\}$, tập hợp các số nguyên $\{... -2, -1, 0, 1, 2 ...\}$ và tập hợp các số thực, tương ứng. Đôi khi chúng ta cũng dùng $\mathbf{Z}^+$ để ký hiệu tập hợp các số nguyên dương.

Đôi khi ký hiệu dấu móc cũng được dùng để mô tả một tập hợp không thể liệt kê hết các phần tử của nó. Khi ấy một số phần tử sẽ được liệt kê và sau đó sẽ dùng các dấu chấm chấm (...).

■

**Ví dụ 4.** Tập hợp các số nguyên dương bé hơn 100 có thể được ký hiệu bởi $\{1, 2, 3, ..., 99\}$.

■

Vì có nhiều phát biểu toán học khẳng định rằng hai tập hợp các đối tượng được mô tả khác nhau, nhưng thực sự chỉ là một tập hợp, nên ta cần phải hiểu thế nào là hai tập hợp bằng nhau.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Hai tập hợp là *bằng nhau* nếu và chỉ nếu chúng có cùng các phần tử.

**Ví dụ 5.** Các tập $\{1, 3, 5\}$ và $\{3, 5, 1\}$ là bằng nhau vì chúng có cùng các phần tử. Chú ý rằng trật tự trong đó các phần tử được liệt kê là hoàn toàn không quan trọng. Cũng cần chú ý rằng, việc cùng một phần tử được liệt kê nhiều lần cũng không quan trọng, vì thế $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5\}$ cũng chính là tập hợp $\{1, 3, 5\}$, vì chúng có cùng các phần tử.

■

Một cách khác để mô tả các tập hợp là *chỉ rõ các thuộc tính đặc trưng* của các phần tử của tập hợp đó. Chúng ta sẽ nêu nét đặc trưng của tất cả các phần tử có trong tập hợp bằng cách chỉ ra một hoặc nhiều tính chất mà chúng cần phải có để trở thành phần tử của tập hợp đang xét. Ví dụ, tập $O$ của tất cả các số nguyên dương, lẻ và nhỏ hơn 10 có thể viết như sau :

$$O = \{x \mid x \text{ là số nguyên dương lẻ nhỏ hơn } 10\}.$$

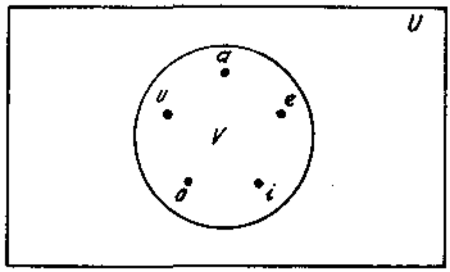
Chúng ta thường dùng cách chỉ rõ thuộc tính đặc trưng này để mô tả các tập hợp khi không thể liệt kê hết tất cả các phần tử của tập hợp đó. Ví dụ, tập hợp tất cả các số thực được viết như sau

$$\mathbf{R} = \{x \mid x \text{ là số thực}\}.$$

Các tập hợp cũng có thể được minh hoạ bằng hình vẽ nhờ dùng các giản đồ Venn, do nhà toán học người Anh John Venn lần đầu tiên đưa ra vào năm 1881. Trong các giản đồ Venn, **tập hợp vũ trụ** U – tập hợp chứa tất cả các đối tượng đang xét – được biểu diễn bằng một hình chữ nhật. Bên trong hình chữ nhật này, những hình tròn hoặc những hình hình học khác được dùng để biểu diễn các tập hợp. Đôi khi các điểm được dùng để biểu diễn các phần tử đặc biệt của tập hợp. Các giản đồ Venn thường được dùng để chỉ ra mối quan hệ giữa các tập hợp. Trong ví dụ dưới đây, bạn có thể thấy các giản đồ Venn đã được sử dụng như thế nào.

**Ví dụ 6.** Vẽ giản đồ Venn biểu diễn tập $V$ các nguyên âm trong tiếng Anh.

*Giải* : Ta vẽ một hình chữ nhật để chỉ tập hợp Vũ trụ $U$ – đây là tập hợp gồm 26 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh. Trong hình chữ nhật đó ta vẽ một vòng tròn để biểu diễn tập $V$. Trong vòng tròn này ta dùng các điểm để chỉ các phần tử của $V$ (xem hình 1).




*Hình 1.* Giản đồ Venn của tập hợp các nguyên âm.

Bây giờ chúng ta đưa ra ký hiệu để chỉ một đối tượng là phần tử của một tập hợp. Ta viết $a \in A$ để chỉ $a$ là phần tử của tập $A$. Ký hiệu $a \notin A$ ký hiệu $a$ không phải là phần tử thuộc tập $A$. Chú ý rằng các chữ viết thường thường được dùng để ký hiệu các phần tử của một tập hợp.

Có một tập hợp đặc hiệt không chứa một phần tử nào. Tập hợp đó được gọi là **tập rỗng** và được lý hiệu là $\varnothing$. Tập rỗng cũng có thể được ký hiệu là $\{\}$. Thường xảy ra, tập hợp của các phần tử có các tính chất nào đó hoá ra lại là một tập rỗng. Ví dụ, tập hợp các số nguyên dương lớn hơn hình phương của nó là một tập rỗng.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Tập $A$ được gọi là một *tập con* của $B$ nếu và chỉ nếu mỗi phần tử của $A$ đều là một phần tử của $B$. Chúng ta dùng ký hiệu $A \subseteq B$ để chỉ $A$ là một tập con của tập $B$.

Chúng ta thấy rằng $A \subseteq B$ nếu và chỉ nếu lượng từ

$$\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

là đúng.

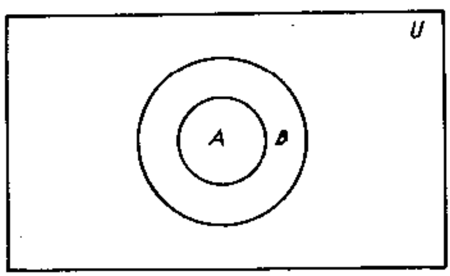
Ví dụ, tập tất cả các số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 10 là một tập con của tập tất cả các số nguyên dương nhỏ hơn 10. Tập hợp tất cả các sinh viên học ngành tin học ở trường bạn là một tập con của tập hợp toàn thể học sinh của trường bạn.

Tập rỗng là tập con của mọi tập hợp, tức là

$$\varnothing \subseteq S$$

với $S$ là tập hợp bất kỳ. Để xác lập tập rỗng là tập con của $S$, chúng ta cần phải chứng minh rằng mọi phần tử của $\varnothing$ cũng là phần tử của $S$. Nói một cách khác, chúng ta cần phải chứng minh rằng mệnh đề kéo theo "nếu $x \in \varnothing$, thì $x \in S$" là luôn luôn đúng. Chúng ta chỉ cần chú ý rằng giả thiết của mệnh đề kéo theo này – cụ thể là giả thiết "$x \in \varnothing$" – là luôn luôn sai nên mệnh đề kéo theo này là luôn luôn đúng. Vì vậy, tập rỗng là tập con của mọi tập hợp. Hơn nữa, cũng lưu ý rằng mọi tập hợp đều là một tập con của chính nó (độc giả nên tự chứng minh lấy khẳng định này). Do đó, nếu $P$ là một tập hợp thì ta biết chắc rằng $\varnothing \subseteq P$ và $P \subseteq P$.

Khi chúng ta muốn nhấn mạnh rằng tập $A$ là tập con của $B$ nhưng $A \neq B$, ta viết $A \subset B$ và nói rằng $A$ là một **tập con thực sự** của $B$. Chúng ta hãy vẽ tập vũ trụ $U$ như một hình chữ nhật. Trong hình chữ nhật này, ta vẽ một vòng tròn biểu diễn tập $B$. Vì $A$ là tập con của $B$, chúng ta vẽ một vòng tròn biểu diễn $A$ bên trong vòng tròn biểu diễn $B$. Mối quan hệ này được biểu diễn trên hình 2.




***Hình** 2.* Giản đồ Venn biểu diễn $A$ là tập con của $B$.

Một cách để chứng minh hai tập hợp có cùng các phần tử là chứng minh tập này là tập con của tập kia và ngược lại. Nói một cách khác, chúng ta có thể chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các tập hợp với $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$ thì $A = B$. Đây thực sự là cách rất tiện ích để chứng minh hai tập bằng nhau.

Các tập cũng có thể có các phần tử là các tập hợp khác. Ví dụ, ta có các tập hợp :

$$\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\}$$

và

$$\{x \mid x \text{ là tập con của tập } \{a,\ b\}\}$$

Chú ý rằng hai tập ở trên là bằng nhau.

Các tập được dùng rộng rãi trong các bài toán đếm, và đối với các ứng dụng như vậy chúng ta cần phải bàn về "kích thước" của các tập hợp.

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Cho $S$ là một tập hợp. Nếu có chính xác $n$ phần tử phân biệt trong $S$, với $n$ là số nguyên không âm, thì ta nói rằng $S$ là một *tập hữu hạn* và $n$ là bản số của $S$. Bản số của $S$ được ký hiệu là $|S|$.

**Ví dụ 7.** Cho $A$ là tập hợp các số nguyên dương lẻ nhỏ hơn 10. Khi đó $|A| = 5$.

■

**Ví dụ 8.** Cho $S$ là tập hợp các chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh. Khi đó $|S| = 26$.

■

**Ví dụ 9.** Vì tập rỗng không chứa phần tử nào, suy ra $|\varnothing| = 0$.

■

Chúng ta cũng sẽ quan tâm cả tới những tập hợp không phải là hữu hạn.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Một tập được nói là *vô hạn*, nếu nó không phải là hữu hạn.

**Ví dụ 10.** Tập hợp các số nguyên dương là một tập vô hạn.

■

Người ta cũng có thể phát triển một lý thuyết về bản số đối với các tập vô hạn. Điều này sẽ được bàn tới trong Tiết 1.7.

## TẬP HỢP LUỸ THỪA

Nhiều bài toán liên quan đến việc trắc nghiệm những tổ hợp của các phần tử thuộc một tập để xem chúng có thoả mãn một tính chất nào đó hay không. Để xét tất cả những tổ hợp của các phần tử thuộc tập $S$ nào đó, chúng ta xây dựng một tập mới có các phần tử là tất cả các tập con của $S$.

**ĐỊNH NGHĨA 6.** Cho tập $S$, *tập luỹ thừa* của $S$ là tập của tất cả các tập con của $S$. Tập luỹ thừa của $S$ được ký hiệu là $P(S)$.

**Ví dụ 11.** Xác định tập luỹ thừa của tập $\{0, 1, 2\}$.

*Giải :* Tập luỹ thừa $P(\{0, 1, 2\})$ là tập hợp tất cả các tập con của $\{0, 1, 2\}$. Từ đó , ta có :

$P(\{0, 1, 2\}) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

Chú ý rằng tập rỗng và chính tập $S$ cũng là các phần tử của $P(S)$.

■

**Ví dụ 12.** Tìm tập luỹ thừa của tập rỗng và tập luỹ thừa của tập $\{\varnothing\}$.

*Giải :* Tập rỗng chỉ có chính xác một tập con, đó là chính tập đó.

Do đó $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

Tập $\{\varnothing\}$ có chính xác hai tập con, cụ thể là $\varnothing$ và chính $\{\varnothing\}$. Do đó

$$P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

■

Nếu một tập có $n$ phần tử, thì tập luỹ thừa của nó có $2^n$ phần tử. Chúng ta sẽ chứng minh điều này bằng nhiều cách ở các tiết tiếp sau.

## TÍCH ĐỀ CÁC (DESCARTES)

Thứ tự của các phần tử trong một tập hợp thường là rất quan trọng. Vì các tập là không sắp thứ tự, nên cần phải có một cấu trúc khác để biểu diễn các tập được sắp thứ tự. Điều này được cho bởi các **dãy sắp thứ tự**.

**ĐỊNH NGHĨA 7.** Dãy sắp thứ tự $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ là một tập hợp sắp thứ tự, có $a_1$ là phần tử thứ nhất, $a_2$ là phần tử thứ 2, ... và $a_n$ là phần tử thứ $n$.

Chúng ta nói rằng hai dãy sắp thứ tự là bằng nhau, nếu và chỉ nếu các phần tử tương ứng của chúng bằng nhau. Nói cách khác, $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nếu và chỉ nếu $a_i = b_i$ đối với $i = 1, 2, \ldots n$. Đặc biệt, dãy có hai phần tử được gọi là **cặp sắp thứ tự** (hay thường gọi đơn giản là **cặp** – ND). Các cặp $(a, b)$ và $(c, d)$ là bằng nhau nếu và chỉ nếu $a = c$ và $b = d$. Chú ý rằng $(a, b)$ và $(b, a)$ không bằng nhau nếu $a \neq b$.

Rất nhiều các cấu trúc rời rạc mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong các chương sau đều dựa trên khái niệm về *tích Đề các* của các tập hợp (gọi theo tên nhà toán học Pháp René Descartes). Trước hết chúng ta hãy định nghĩa tích Đề các của hai tập hợp.

**ĐỊNH NGHĨA 8.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp. *Tích Đề cạc* của $A$ và $B$, được ký hiệu là $A \times B$, là tập hợp của tất cả các cặp $(a, b)$ với $a \in A$ và $b \in B$. Từ đó,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

**Ví dụ 13.** Cho $A$ là tập hợp tất cả các sinh viên ở một trường đại học, và $B$ là tập hợp tất cả các môn học được dạy ở đây. Hãy xác định tích Đề các $A \times B$.

*Giải* : Tích Đề các $A \times B$ gồm tất cả các cặp có dạng $(a, b)$ với $a$ là một sinh viên của trường và $b$ là một môn học được dạy ở trường. Tập $A \times B$ có thể được dùng để biểu diễn tất cả các khả năng đăng ký theo học các môn được dạy ở trường của các sinh viên.

■

**Ví dụ 14.** Xác định tích Đề các của $A = \{1, 2\}$ *và* $B = \{a, b, c\}$.

*Giải* : Tích Đề các $A \times B$ là :

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

■

Các tích Đề các $A \times B$ và $B \times A$ là không bằng nhau nếu không có $A = \varnothing$ hoặc $B = \varnothing$ (vì khi đó $A \times B = \varnothing$) hoặc nếu $A \neq B$ (xem Bài tập 22 ở cuối tiết này). Điều này được minh hoạ trong ví dụ sau :

**Ví dụ 15.** Chứng minh rằng tích Đề các $B \times A$ không bằng tích Đề các $A \times B$, với $A$ và $B$ như trong Ví dụ 14.

*Giải* : Tích Đề các $B \times A$ là :

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

Nó không bằng $A \times B$ đã được xác định trong Ví dụ 14.

■

Người ta cũng có thể định nghĩa tích Đề các cho số các tập hợp lớn hơn hai.

**ĐỊNH NGHĨA 9.** *Tích Đề các* của các tập $A_1, A_2, ..., A_n$, được ký hiệu bởi $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ là tập hợp của các dãy sắp thứ tự $(a_1, a_2, ..., a_n)$ trong đó $a_i \in A_i$ với $i = 1, 2, ..., n$. Nói một cách khác

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i \text{ với } i = 1, 2, ... n\}$$

**Ví dụ 16.** Xác định tích Đề các $A \times B \times C$, ở đây $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$ và $C = \{0, 1, 2\}$.

*Giải* : Tích Đề các $A \times B \times C$ gồm tất cả các dãy ba phần tử sắp thứ tự $(a, b, c)$ với $a \in A$, $b \in B$ và $c \in C$. Từ đó,

$$A \times B \times C = \{(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2)\}$$

## BÀI TẬP

1. Liệt kê các phần tử của các tập hợp sau :

   a) $\{x \mid x$ là số thực sao cho $x^2 = 1\}$

   b) $\{x \mid x$ là số nguyên dương nhỏ hơn $12\}$

   c) $\{x \mid x$ là bình phương của một số nguyên và $x < 100\}$

   d) $\{x \mid x$ là số nguyên sao cho $x^2 = 2\}$

2. Dừng cách chỉ rõ các thuộc tính đặc trưng mô tả các tập hợp sau :

   a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$

   b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   c) $\{m, n, o, p\}$

3. Xác định xem mỗi cặp tập hợp sau đây có bằng nhau không?

   a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$ và $\{5, 3, 1\}$

   b) $\{\{1\}\}$ và $\{1, \{1\}\}$

   c) $\varnothing$ và $\{\varnothing\}$

4. Giả sử rằng $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 6\}$, $C = \{4, 6\}$ và $D = \{4, 6, 8\}$. Hãy xác định các tập nào là những tập con của tập nào?

5. Xác định xem các mệnh đề sau đúng hay sai :

   a) $x \in \{x\}$ b) $\{x\} \subseteq \{x\}$

c) $\{x\} \in \{x\}$ d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$

e) $\varnothing \subseteq \{x\}$ f) $\varnothing \in \{x\}$.

**6.** Dùng giản đồ Venn minh hoạ mối quan hệ

$$A \subseteq B \quad \text{và } B \subseteq C$$

**7.** Giả sử $A$, $B$ và $C$ là các tập sao cho $A \subseteq B$ và $B \subseteq C$. Chứng minh rằng $A \subseteq C$.

**8.** Tìm hai tập $A$ và $B$ sao cho $A \in$ B và $A \subseteq B$.

**9.** Xác định bản số của các tập hợp sau :

a) $\{a\}$ b) $\{\{a\}\}$

b) $\{a, \{a\}\}$ d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

**10.** Xác định bản số của các tập hợp sau

a) $\varnothing$ b) $\{\varnothing\}$

c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ d) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

**11.** Tìm tập hợp luỹ thừa của mỗi tập hợp sau :

a) $\{a\}$ b) $\{a, b\}$

c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

**12.** Có thể kết luận rằng $A = B$ nếu $A$ và $B$ là hai tập có tập luỹ thừa như nhau không?

**13.** Mỗi tập sau có bao nhiêu phần tử

a) $P(\{a, b, \{a, b\}\})$ b) $P(\{\varnothing, a, \{a\}, \{\{a\}\}\})$

c) $P(P(\varnothing))$.

**14.** Xác định xem mỗi tập dưới đây có là tập luỹ thừa của một tập nào đó không?

a) $\varnothing$ b) $\{\varnothing, \{a\}\}$

c) $\{\varnothing, \{a\}, \{\varnothing, a\}\}$ d) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

**15.** Cho $A = \{a, b, c, d\}$ và $B = \{y, z\}$. Tìm

a) $A \times B$ b) $B \times A$

**16.** Nêu định nghĩa của tích Đề các $A \times B$, trong đó $A$ là tập hợp các môn học được dạy bởi khoa toán của một trường đại học và $B$ là tập hợp các giáo sư toán ở trường đại học đó.

**17.** Nêu ý nghĩa của tích Đề các $A \times B \times C$ trong đó $A$ là tập hợp tất cả các tuyến bay, $B$ và $C$ là hai tập hợp tất cả các thành phố ở Mỹ.

**18.** Cho $A \times B = \varnothing$ với $A$ và $B$ là hai tập hợp. Bạn có thể rút ra kết luận gì?

**19.** Cho tập hợp $A$. Chứng minh rằng $\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$

**20.** Cho $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y\}$ và $C = \{0, 1\}$

Tìm :

a) $A \times B \times C$ b) $C \times B \times A$

c) $C \times A \times B$ d) $B \times B \times B$

**21.** Có bao nhiêu phần tử khác nhau trong $A \times B$, nếu $A$ có $m$ phần tử và $B$ có $n$ phần tử?

**22.** Chứng minh rằng $A \times B \neq B \times A$ khi $A$, $B$ là các tập không rỗng và $A \neq$ B.

**23*.** Chứng minh rằng cặp sắp thứ tự $(a, b)$ có thể được định nghĩa qua các tập như $\{\{a\}, \{a, b\}\}$. (Gợi ý : trước hết hãy chứng minh $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ nếu và chỉ nếu $a = c$ và $b = d$).

**24*.** Bài tập này giới thiệu **Nghịch lý Russell.**
Cho $S$ là một tập hợp chứa tập $x$, nếu tập $x$ không thuộc chính nó, tức $S = \{x \mid x \notin x\}$

a) Chứng minh rằng giả thiết $S$ là một phần tử của $S$ sẽ dẫn tới mâu thuẫn.

b) Chứng minh rằng giả thiết $S$ không phải là phần tử của nó cũng dẫn tới mâu thuẫn.

Từ a) và b) suy ra rằng tập $S$ không thể được định nghĩa như ta đã làm. Nghịch lý này có thể tránh được bằng cách hạn chế các loại phần tử mà các tập hợp có thể có.

# 1.5. CÁC PHÉP TOÁN TẬP HỢP

## MỞ ĐẦU

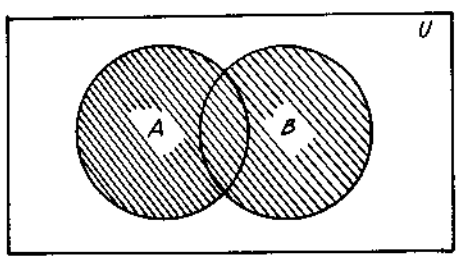
Hai tập hợp có thể được tổ hợp với nhau theo nhiều cách. Ví dụ, khi bắt đầu với tập hợp các sinh viên ngành toán và tập hợp các sinh viên ngành tin học ở trường bạn, chúng ta có thể tạo ra tập gồm các sinh viên học chuyên ngành toán hoặc chuyên ngành tin học, tập hợp các sinh viên không theo ngành toán, v.v...

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp. *Hợp* của hai tập $A$ và $B$, được ký hiệu là $A \cup B$, là tập chứa tất cả các phần tử hoặc thuộc $A$, hoặc thuộc $B$ hoặc thuộc cả hai.

Một phần tử $x$ thuộc hợp của tập $A$ và tập $B$ nếu và chỉ nếu $x$ thuộc $A$ hoặc $x$ thuộc $B$. Tức là,

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Gián đồ Venn cho trên hình 1 biểu diễn hợp của hai tập $A$ và $B$. Phần tô sẫm bên trong hình tròn biểu diễn $A$ hoạc hình tròn biểu diễn $B$ là vùng biểu diễn hợp của $A$ và $B$.




**Hình 1.** Giản đồ Venn biểu diễn hợp của $A$ và $B$. $A \cup B$ được gạch chéo.

Dưới đây là một số ví dụ về hợp của các tập hợp.

**Ví dụ 1.** Hợp của các tập $\{1, 3, 5\}$ và $\{1, 2, 3\}$ là tập $\{1, 2, 3, 5\}$; tức là $\{1, 3, 5\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\}$.

■

**Ví dụ 2.** Hợp của tập hợp tất cả các sinh viên ngành tin học ở trường bạn và tập hợp tất cả các sinh viên ngành toán của trường bạn là tập hợp tất cả các sinh viên học ngành toán hoặc học ngành tin (hoặc học cả hai ngành).

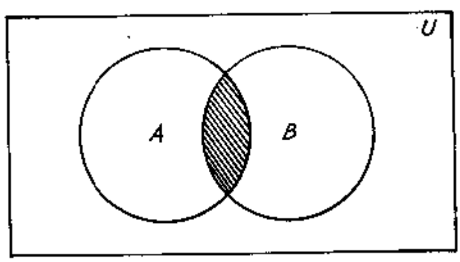
■

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Cho hai tập hợp $A$ và $B$. *Giao* của hai tập hợp $A$ và $B$, được ký hiệu là $A \cap B$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc cả $A$ và $B$.

Một phần tử $x$ thuộc giao của hai tập $A$ và $B$ nếu và chỉ nếu $x$ thuộc $A$ và $x$ thuộc $B$, tức là

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Giản đồ Venn trên hình 2 biểu diễn giao của hai tập $A$ và $B$. Vùng tô sẫm ở trong hai vòng tròn biểu diễn các tập $A$ và $B$ chính là vùng biểu diễn giao của $A$ và $B$.




**Hình 2.** Giản đồ Venn biểu diễn giao của $A$ và $B$
$A \cap B$ được gạch chéo.

Dưới đây là một số ví dụ về giao của các tập hợp.

**Ví dụ 3.** Giao của các tập $\{1, 3, 5\}$ và $\{1, 2, 3\}$ là tập $\{1, 3\}$, tức là $\{1, 3, 5\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$.

■

**Ví dụ 4.** Giao của tập hợp tất cả các sinh viên ngành tin học ở trường bạn và tập hợp tất cả các sinh viên ngành toán là tập hợp tất cả các sinh viên đồng thời theo học hai ngành trên.

■

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Hai tập được gọi là *rời nhau* nếu giao của chúng là tập rỗng.

**Ví dụ 5.** Cho $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ và $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Vì $A \cap B = \varnothing$, $A$ và $B$ là hai tập rời nhau.

■

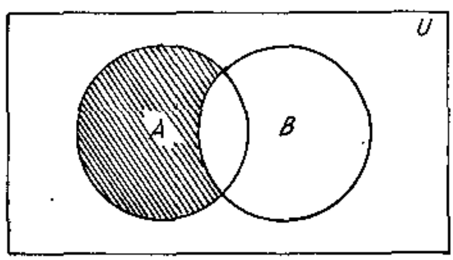
Chúng ta thường phải quan tâm đến việc tìm bản số của hợp các tập hợp. Để tìm số các phần tử trong hợp của hai tập hợp hữu hạn $A$ và $B$, cần chú ý rằng $|A| + |B|$ sẽ đếm mỗi phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$ hoặc thuộc $B$ nhưng không thuộc $A$ chính xác một lần, và các phần tử thuộc cả $A$ lẫn $B$ chính xác hai lần. Như vậy nếu lấy $|A|+|B|$ trừ đi số phần tử thuộc cả $A$ lẫn $B$, thì các phần tử thuộc $A \cap B$ sẽ chỉ còn được đếm một lần. Từ đó, ta có :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Sự tổng quát hoá kết quả này cho hợp của một số tuỳ ý các tập được gọi là *nguyên lý bù trừ*. Nguyên lý này là một kỹ thuật quan trọng được dùng trong nghệ thuật đếm. Chúng ta sẽ bàn tới nguyên lý này và các kỹ thuật đếm khác chi tiết hơn trong các Chương 4 và 5.

Còn có một cách quan trọng khác để tổ hợp các tập hợp.

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp. *Hiệu* của $A$ và $B$, được ký hiệu là $A - B$, là tập hợp chứa các phần tử thuộc $A$ nhưng không thuộc $B$. Hiệu của $A$ và $B$ cũng được gọi là *phần bù của $B$ đối với $A$*.




*Hình 3.* Giản đồ Venn biểu diễn hiệu của $A$ và $B$. $A - B$ được tô gạch chéo.

Một phần tử $x$ thuộc hiệu của $A$ và $B$ nếu và chỉ nếu $x \in A$ và $x \notin B$; tức là :

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Giản đồ Venn trên hình 3 biểu diễn hiệu của tập $A$ và tập $B$. Vùng tô sẫm bên trong vòng tròn biểu diễn tập $A$ và ở bên ngoài vòng tròn biểu diễn tập $B$ là vùng biểu diễn $A - B$.

Dưới đây là một số ví dụ về hiệu của các tập.

**Ví dụ 6.** Hiệu của $\{1, 3, 5\}$ và $\{1, 2, 3\}$ là tập $\{5\}$, tức là $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$. Hiệu này khác với hiệu của $\{1, 2, 3\}$ và $\{1, 3, 5\}$, nó là tập $\{2\}$.

■

**Ví dụ 7.** Hiệu của tập hợp các sinh viên ngành tin và tập hợp các sinh viên ngành toán của trường bạn là tập hợp tất cả các sinh viên ngành tin ở trường bạn không đồng thời theo học ngành toán.

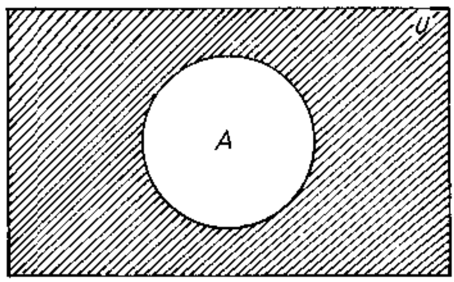
■

Một khi tập vũ trụ $U$ đã được chỉ rõ, ta có thể định nghĩa được **phần bù** của một tập hợp.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Cho $U$ là tập vũ trụ. Phần bù của tập $A$, được ký hiệu là $\overline{A}$, là phần bù của $A$ đối với $U$. Nói một cách khác phần bù của $A$ chính là $U - A$.

Một phần tử $x$ thuộc $\overline{A}$ nếu và chỉ nếu $x \notin A$, tức là,

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$




**Hình 4.** Giản đồ Venn biểu diễn phần bù của tập $A$. $\overline{A}$ được gạch chéo.

Vùng tô đậm trên hình 4 ở ngoài vòng tròn biểu diễn tập $A$ là vùng biểu diễn $\overline{A}$.

Dưới đây là một số ví dụ về phần bù của một tập.

**Ví dụ 8.** Cho $A = \{a, e, i, o, u\}$ (ở đây tập vũ trụ là tập các chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh). Khi đó

$$\overline{A} = \{b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t, v, w, x, y, z\}$$

■

**Ví dụ 9.** Cho $A$ là tập hợp các số nguyên dương lớn hơn 10 (với tập vũ trụ là tập tất cả các số nguyên dương). Khi đó

$$\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

## CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC TẬP HỢP

Bảng 1 liệt kê các hằng đẳng thức tập hợp quan trọng nhất. Chúng ta sẽ chứng minh ở đây chỉ một số các hằng đẳng thức đó bằng cách dùng các phương pháp khác nhau, để chứng tỏ rằng thường có nhiều cách tiếp cận để giải một bài toán. Việc chứng minh các hằng đẳng thức còn lại sẽ được đưa vào các bài tập. Độc giả nên chú ý sự tương tự giữa các hằng đẳng thức tập hợp này với các tương đương logic được xét trong Tiết 1.2. Thực tế, các hằng đẳng thức đã cho đều có thể chứng minh trực tiếp từ các tương đương logic tương ứng. Hơn thế nữa, cả hai đều là những trường hợp đặc biệt của các hằng đẳng thức trong đại số Boole (sẽ được nghiên cứu ở Chương 9).

**BẢNG 1. Một số Hằng đẳng thức tập hợp**

| HẰNG ĐẲNG THỨC | TÊN GỌI |
|---|---|
| $A \cup \varnothing = A$<br>$A \cap U = A$ | Luật đồng nhất |
| $A \cup U = U$<br>$A \cap \varnothing = \varnothing$ | Luật nuốt |
| $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ | Luật luỹ đẳng |
| $\overline{(\overline{A})} = A$ | Luật bù |
| $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ | Luật giao hoán |
| $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ | Luật kết hợp |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$<br>$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Luật phân phối |
| $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$<br>$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | Luật De Morgan |

Một trong những cách để chứng minh hai tập hợp bằng nhau là chứng minh tập này là tập con của tập kia và ngược lại. Chúng ta sẽ minh hoạ phương pháp chứng minh này bằng cách thiết lập luật De Morgan thứ hai.

**Ví dụ 10.** Chứng minh $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ bằng cách chứng tỏ tập này là tập con của tập kia.

*Giải :* Trước hết, giả sử rằng $x \in \overline{A \cap B}$. Từ đó suy ra $x \notin A \cap B$. Điều này kéo theo $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Do đó $x \in \overline{A}$ hoặc $x \notin \overline{B}$ , tức là $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Điều này chứng tỏ rằng $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.

Bây giờ ta lại giả sử rằng $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.. Khi đó $x \in \overline{A}$ hoặc $x \in \overline{B}$. Từ đó suy ra $x \notin A$ hoặc $x \notin B$. Do đó, $x \notin A \cap B$, hay $x \in \overline{A \cap B}$. Điều này chứng minh rằng mỗi tập trên đều là tập con của nhau, vậy hai tập này phải hằng nhau và hằng đẳng thức được chứng minh.

■

Một cách khác để chứng minh các hằng đẳng thức tập hợp là dùng cách chỉ rõ các thuộc tính đặc trưng và các qui tắc logic. Hãy xét chứng minh sau của luật De Morgan thứ hai.

**Ví dụ 11.** Dùng cách chỉ rõ các thuộc tính đặc trưng và các tương đương logic để chứng minh rằng $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

*Giải :* Dãy các đẳng thức sau cho phép chứng minh hằng đẳng thức trên :

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap B} &= \{x \mid x \notin A \cap B\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in (A \cap B))\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid x \notin A \vee x \notin B\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}\} \\
&= \{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\}
\end{aligned}$$

Chú ý rằng luật De Morgan thứ hai đối với các tương đương logic cũng đã được dùng ở đẳng thức thứ 4 trong dãy này.

Các hằng đẳng thức cũng có thể được chứng minh bằng cách dùng **bảng tính thuộc** (một tập hợp). Để chỉ một phần tử thuộc một tập hợp ta dùng số 1 ; để chỉ một phần tử không thuộc tập hợp ta dùng số 0. Ta sẽ xét mỗi tổ hợp của các tập mà một phần tử có thể được chứa trong đó và chứng minh rằng các phần tử trong chính các tổ hợp của các tập hợp đó thuộc về cả hai tập ở hai vế của hằng đẳng thức. {Bạn đọc nên lưu ý sự tương tự giữa bảng tính thuộc và bảng giá trị chân lý}

**Ví dụ 12.** Dùng bảng tính thuộc chứng minh rằng

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

*Giải* : Bảng tính thuộc cho các tổ hợp của các tập hợp được cho trong Bảng 2. Bảng này có 8 dòng. Vì cột $A \cap (B \cup C)$ và $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ giống hệt nhau, chứng tỏ hằng đẳng thức là đúng.

**BẢNG 2. Bảng tính thuộc đối với tính chất phân phối**

| $A$ | $B$ | $C$ | $B \cup C$ | $A \cap (B \cup C)$ | $A \cap B$ | $A \cap C$ | $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**Ví dụ 13.** Cho $A$, $B$ và $C$ là các tập hợp. Chứng minh rằng :

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$$

*Giải* : Ta có

$\overline{A \cup (B \cap C)} = \overline{A} \cap \overline{(B \cap C)}$ theo Luật De Morgan thứ nhất

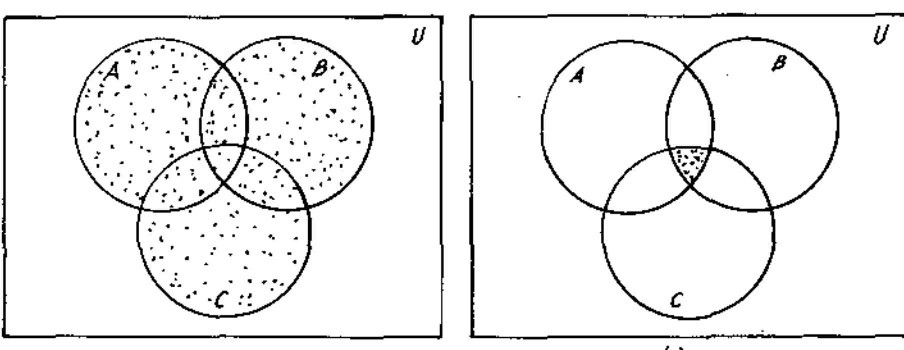
$= \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$ theo Luật De Morgan thứ hai

$= (\overline{B} \cup \overline{C}) \cap \overline{A}$ theo Luật giao hoán đối với phép giao

$= (\overline{C} \cup \overline{B}) \cap \overline{A}$ theo Luật giao hoán đối với phép hợp.

## HỢP VÀ GIAO TỔNG QUÁT

Vì hợp và giao của các tập hợp thỏa mãn định luật phân phối, nên các tập $A \cup B \cup C$ và $A \cap B \cap C$ là hoàn toàn xác định, khi $A$, $B$, $C$




***Hình 5***

a) $A \cup B \cup C$ được chấm chấm; b) $A \cap B \cap C$ được chấm chấm.
Hợp và Giao của $A$, $B$ và $C$.

là các tập hợp. Chú ý rằng $A \cup B \cup C$ chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong số các tập $A, B, C$ và $A \cap B \cap C$ chứa tất cả các phần tử thuộc cả ba tập đó. Những tổ hợp của ba tập $A, B, C$ được minh họa trên hình 5.

**Ví dụ 14.** Cho $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ , $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và $C = \{0, 3, 6, 9\}$. Xác định $A \cup B \cup C$ và $A \cap B \cap C$.

*Giải :* Tập hợp $A \cup B \cup C$ chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong ba tập hợp $A, B, C$. Từ đó :

$$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$$

Tập hợp $A \cap B \cap C$ chứa các phần tử thuộc cả ba tập $A, B$ và $C$, do đó

$$A \cap B \cap C = \{0\}.$$

■

Chúng ta cũng có thể xét giao và hợp của một số tuỳ ý các tập hợp. Chúng ta dùng các định nghĩa sau.

**ĐỊNH NGHĨA 6.** *Hợp* của $n$ tập hợp là một tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong số $n$ tập hợp đó.

Chúng ta dùng ký hiệu :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

để chỉ hợp của các tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

**ĐỊNH NGHĨA 7.** *Giao* của $n$ tập hợp là một tập hợp chứa các phần tử thuộc tất cả $n$ tập hợp đó.

Chúng ta ký hiệu :

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

để chỉ giao của các tập hợp.

Các ví dụ sau minh hoạ hợp và giao tổng quát.

**Ví dụ 15.** Cho $A_i = \{i, i + 1, i + 2, ...\}$. Khi đó :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i + 1, i + 2, ...\} = \{1, 2, 3, ...\}$$

và $$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i + 1, i + 2, ...\} = \{n, n + 1, n + 2, ...\}$$

■

## BIỂU DIỄN CÁC TẬP HỢP TRÊN MÁY TÍNH

Có nhiều cách để biểu diễn các tập hợp trên máy tính. Một phương pháp là lưu trữ các phần tử của tập hợp theo cách không sắp thứ tự. Tuy nhiên, nếu điều đó đã làm được, thì việc tính giao, hợp hoặc hiệu của hai tập hợp sẽ rất mất thời gian, vì mỗi phép tính đó đòi hỏi một lượng tìm kiếm rất lớn đối với các phần tử. Chúng tôi sẽ giới thiệu ở đây một phương pháp lưu trữ các phần tử bằng cách dùng sự sắp tuỳ ý các phần tử của tập vũ trụ. Phương pháp biểu diễn tập hợp này sẽ làm cho việc tính những tổ hợp của các tập hợp trở nên dễ dàng hơn.

Giả sử rằng tập vũ trụ $U$ là hữu hạn (và có kích thước hợp lý để số phần tử của $U$ không lớn hơn dung lượng bộ nhớ của máy tính mà bạn đang dùng). Trước hết, hãy chỉ rõ sự sắp tuỳ ý các phần tử của $U$, ví dụ $a_1, a_2, ..., a_n$, sau đó biểu diễn tập con $A$ của $U$ bằng một xâu bit có chiều dài $n$, trong đó bit thứ $i$ ở xâu này là 1 nếu $a_i$ thuộc $A$ và là 0 nếu $a_i$ không thuộc $A$. Ví dụ sau sẽ minh hoạ kỹ thuật này.

**Ví dụ 16.** Cho $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ và sự sắp các phần tử trong $U$ theo thứ tự tăng dần ; tức là $a_i = i$. Xác định xâu bit biểu diễn tập con các số nguyên lẻ trong $U$, tập con các số nguyên chẵn trong $U$ và tập con các số nguyên không vượt quá 5 trong $U$.

*Giải :* Xâu bit biểu diễn tập hợp các số nguyên lẻ trong $U$, cụ thể là tập $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, có bit 1 ở các vị trí thứ nhất, thứ ba, thứ năm, thứ bảy và thứ chín, và bit 0 ở các vị trí còn lại. Đó là,

10101 01010

(Ở đây chúng ta đã tách xâu có chiều dài là 10 này thành hai khối, mỗi khối có chiều dài là 5 để dễ đọc vì các xâu bit dài rất khó đọc). Tương tự, chúng ta biểu diễn tập con tất cả các số nguyên chẵn trong $U$, cụ thể là tập {2, 4, 6, 8, 10}, bằng xâu

01010 10101

Tập con tất cả các số nguyên trong $U$ không vượt quá 5, cụ thể là tập {1, 2, 3, 4, 5} được biểu diễn bởi xâu :

11111 00000

Bằng cách dùng các xâu bit để biểu diễn các tập hợp, ta dễ dàng tìm được phần bù của các tập hợp, cũng như hợp, giao và hiệu của chúng. Để tìm xâu bit cho phần bù của một tập hợp từ xâu bit của tập hợp đó ta chỉ việc thay mỗi 1 thành 0 và thay mỗi 0 thành 1, vì $x \in A$ nếu và chỉ nếu $x \notin \overline{A}$. Chú ý rằng phép toán này tương ứng với việc lấy phủ định của mỗi bit khi ta gắn một bit với một giá trị chân lý : 1 ứng với đúng và 0 ứng với sai.

■

**Ví dụ 17.** Chúng ta đã thấy rằng xâu bit đối với tập hợp {1, 3, 5, 7, 9} (với tập hợp vũ trụ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}) là

10101 01010

Xác định xâu bit đối với phần bù của tập này.

*Giải :* Xâu bit đối với phần bù của tập này sẽ nhận được bằng cách thay các số 0 thành 1 và ngược lại. Sau khi làm như vậy, ta được xâu :

01010 10101

tương ứng với tập {2, 4, 6, 8, 10}.

■

Để nhận được các xâu bit cho các hợp và giao của hai tập hợp, chúng ta sẽ thực hiện các phép toán Boole trên các xâu bit biểu diễn hai tập hợp đó. Bit ở vị trí $i$ trong xâu bit của hợp là 1 nếu một trong các bit ở vị trí thứ $i$ trong hai xâu là 1 (hoặc cả hai là 1) và là 0 khi cả hai bit đó là 0. Từ đó ta suy ra rằng xâu bit đối với hợp là OR bit của hai xâu hit tương ứng với hai tập số. Còn bit ở vị trí thứ $i$ trong xâu bit của giao sẽ là 1 khi các bit ở vị trí tương ứng trong hai xâu bit đều bằng 1 và bằng 0 khi hoặc một trong hai bit bằng 0 (hoặc cả hai bằng 0). Từ đó suy ra rằng xâu bit đối với giao là một AND bit của hai xâu bit biểu diễn hai tập đã cho.

**Ví dụ 18.** Xâu bit đối với các tập hợp {1, 2, 3, 4, 5} và {1, 3, 5, 7, 9} là 11111 00000 và 10101 01010. Dùng các xâu bit để tìm hợp và giao của hai tập trên.

*Giải :* Xâu bit đối với hợp của hai tập là :

$$11111\ 00000 \vee 10101\ 01010 = 11111\ 01010$$

và xâu này tương ứng với tập {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9}

Xâu bit đối với giao của hai tập này là :

$$11111\ 00000 \wedge 10101\ 01010 = 10101\ 00000$$

và xâu này tương ứng với tập {1, 3, 5}.

■

## *BÀI TẬP*

**1.** Cho $A$ là tập hợp các sinh viên sống cách xa trường trong vòng bán kính một dặm, và $B$ là tập hợp các sinh viên đang trên đường tới lớp. Hãy mô tả các sinh viên thuộc một trong các tập hợp sau :

a) $A \cap B$ b) $A \cup B$

c) $A - B$ d) $B - A$.

**2.** Giả sử rằng $A$ là tập hợp các sinh viên năm thứ hai ở trường bạn và $B$ là tập hợp các sinh viên đang học môn toán rời rạc ở trường bạn. Hãy biểu diễn các tập sau đây qua $A$ và $B$.

a) Tập hợp các sinh viên năm thứ hai học toán rời rạc ở trường bạn.

b) Tập hợp sinh viên năm thứ hai ở trường bạn không học toán rời rạc.

c) Tập hợp các sinh viên ở trường bạn hoặc là năm thứ hai, hoặc đang học toán rời rạc.

d) Tập hợp các sinh viên ở trường bạn, hoặc không là sinh viên năm thứ hai, hoặc không học toán rời rạc.

**3.** Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $B = \{0, 3, 6\}$. Tìm

a) $A \cup B$ h) $A \cap B$

c) $A - B$ d) $B - A$

**4.** Cho $A = \{a, b, c, d, e\}$ và $B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

Tìm: a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

c) $A - B$ d) $B - A$

**5.** Cho $A$ là một tập hợp, chứng minh rằng $\overline{\overline{A}} = A$

**6.** Cho $A$ là một tập hợp, chứng minh rằng :

a) $A \cup \varnothing = A$ b) $A \cap \varnothing = \varnothing$

c) $A \cup A = A$ d) $A \cap A = A$

e) $A - \varnothing = A$ f) $A \cup U = U$

g) $A \cap U = A$ h) $\varnothing - A = \varnothing$

**7.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp. Chứng minh rằng :

a) $A \cup B = B \cup A$ b) $A \cap B = B \cap A$

**8.** Tìm các tập $A$ và $B$ nếu $A - B = \{1, 5, 7, 8\}$,

$B - A = \{2, 10\}$ và $A \cap B = \{3, 6, 9\}$

**9.** Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là hai tập hợp, thì

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

a) bằng cách chứng minh mỗi vế là tập con của vế kia.

b) bằng cách dùng bảng tính thuộc.

**10.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp. Chứng minh rằng :

a) $(A \cap B) \subseteq A$ b) $A \subseteq (A \cup B)$

c) $A - B \subseteq A$ d) $A \cap (B - A) = \varnothing$

e) $A \cup (B - A) = A \cup B$.

**11.** Chứng minh rằng nếu $A$, $B$ và $C$ là các tập hợp thì

$$\overline{A \cap B \cap C} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$$

a) bằng cách chứng tỏ vế này là tập con của vế kia.

b) dùng bảng tính thuộc.

**12.** Cho $A$, $B$ và $C$ là các tập hợp, chứng minh rằng :

a) $(A \cup B) \subseteq (A \cup B \cup C)$

b) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$

c) $(A - B) - C \subseteq A - C$

d) $(A - C) \cap (C - B) = \varnothing$

e) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$.

**13.** Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các tập hợp, thì

$A - B = A \cap \overline{B}$

**14.** Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các tập hợp, thì

$(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.

**15.** Cho $A$, $B$, $C$ là các tập hợp. Chứng minh rằng :

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**16.** Cho $A$, $B$, $C$ là tập hợp. Chứng minh rằng :

$(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$

**17.** Cho $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ; $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ và $C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Tìm :

a) $A \cap B \cap C$ b) $A \cup B \cup C$

c) $(A \cup B) \cap C$ d) $(A \cap B) \cup C$

**18.** Vẽ giản đồ Venn đối với các tổ hợp sau của các tập $A$, $B$ và $C$.

a) $A \cap (B \cup C)$ b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$

**19.** Bạn có thể nói gì về các tập $A$ và $B$ nếu các đẳng thức sau là đúng?

a) $A \cup B = A$ b) $A \cap B = A$

b) $A - B = A$ c) $A \cap B = B \cap A$

e) $A - B = B - A$

**20.** Liệu có thể kết luận $A = B$ nếu $A$, $B$ và $C$ là các tập thỏa mãn

a) $A \cup C = B \cup C$ ? b) $A \cap C = B \cap C$ ?

**21.** Cho $A$ và $B$ là hai tập con của tập vũ trụ $U$. Chứng minh rằng $A \subseteq B$ nếu và chỉ nếu $\overline{B} \subseteq \overline{A}$.

**Hiệu đối xứng** *của $A$ và $B$, được ký hiệu là $A \oplus B$, là tập chứa các phần tử hoặc thuộc $A$ hoặc thuộc $B$ chứ không thuộc cả $A$ và $B$.*

**22.** Tìm hiệu đối xứng của {1, 3, 5} và {1, 2, 3}

**23.** Tìm hiệu đối xứng của tập hợp các sinh viên ngành tin của một trường và tập các sinh viên ngành toán của trường đó.

**24.** Vẽ giản đồ Venn cho hiệu đối xứng của hai tập $A$ và $B$.

**25.** Chứng minh rằng $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

**26.** Chứng minh rằng $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$.

**27.** Chứng minh rằng nếu $A$ là tập con của tập vũ trụ $U$, thì

a) $A \oplus A = \varnothing$ b) $A \oplus \varnothing = A$

c) $A \oplus U = \overline{A}$ c) $A \oplus \overline{A} = U$

**28.** Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các tập hợp, thì

a) $A \oplus B = B \oplus A$ b) $(A \oplus B) \oplus B = A$

**29.** Có thể nói gì về các tập $A$ và $B$ nếu $A \oplus B = A$.

**30***. Xác định xem hiệu đối xứng có tính kết hợp không, tức là nếu $A$, $B$, $C$ là các tập hợp, liệu có suy ra :

$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$ không?

**31***. Giả sử $A$, $B$, $C$ là các tập hợp sao cho $A \oplus C = B \oplus C$. Liệu có cần phải có $A = B$ không ?

**32***. Nếu $A$, $B$, $C$ và $D$ là các tập hợp, liệu cơ suy ra

$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus C) \oplus (B \oplus D)$ không?

**33.** Nếu $A$, $B$, $C$ và $D$ là các tập hợp, liệu có suy ra

$$(A \oplus B) \oplus (C \oplus D) = (A \oplus D) \oplus (B \oplus C) \text{ không?}$$

**34***. Chứng minh rằng nếu $A$, $B$, và $C$ là các tập hợp, thì :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

(Đây là trường hợp đặc biệt của nguyên lý bù trừ sẽ được nghiên cứu chi tiết trong Chương 5).

**35**. Cho $A_i = \{1, 2, 3, ..., i\}$ với $i = 1, 2, 3$ ... Tìm

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

**36.** Cho $A_i = \{i, i + 1, i + 2, ...\}$. Tìm

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

**37.** Cho $A_i$ là tập tất cả các xâu bit không rỗng có chiều dài không vượt quá $i$. Tìm

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

**38.** Giả sử rằng tập vũ trụ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Biểu diễn các tập dưới đây bằng các xâu bit với bit thứ $i$ trong xâu là 1 nếu $i$ thuộc tập đó, và bằng 0 trong trường hợp ngược lại.

a) $\{3, 4, 5\}$ b) $\{1, 3, 6, 10\}$

c) $\{2, 3, 4, 7, 8, 9\}$

**39.** Dùng tập vũ trụ như bài tập trên, tìm các tập được biểu diễn bởi các xâu sau :

a) 11110 01111 b) 01011 11000

c) 10000 00001

**40.** Các tập con nào của một tập vũ trụ hữu hạn được biểu diễn bởi các xâu bit sau :

a) Xâu gồm toàn các số 0.

b) Xâu gồm toàn các số 1.

**41.** Xác định xâu bit tương ứng với hiệu của hai tập hợp.

**42.** Xác định xâu bit ứng với hiệu đối xứng của hai tập hợp.

**43.** Hãy chỉ rõ các phép toán trên các xâu bit được thực hiện như thế nào để tìm các tổ hợp sau của các tập
$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c, d, g, p, t, v\}$
$C = \{c, e, i, o ,u, x, y, z)$ và $D = \{d, e, h, i, n, o, t, u, x, y\}$

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

c) $(A \cup D) \cap (B \cup C)$ d) $A \cup B \cup C \cup D$.

**44.** Làm thế nào dùng các xâu bit để tìm được giao và hợp của $n$ tập hợp, biết rằng $n$ tập này đều là các tập con của tập vũ trụ?

**45.** Tập $A \cup \{A\}$ được gọi là **người kế thừa** của tập $A$. Tìm những người kế thừa của các tập sau :

a) $\{1, 2, 3\}$ b) $\varnothing$

c) $\{\varnothing\}$ d) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

**46.** Xác định số phần tử của tập người kế thừa của một tập với $n$ phần tử.

*Đôi khi số lần mà một phần tử được gặp trong một tập không sắp thứ tự có ý nghĩa quan trọng.* **Đa tập** *là tập hợp không sắp thứ tự của các phần tử trong đó một phần tử có thể gặp nhiều lần. Ký hiệu $\{m_1.a_1, m_2.a_2, ..., m_r.a\}$ để chỉ một đa tập có phần tử $a_1$ xuất hiện $m_1$ lần, phần tử $a_2$ xuất $m_2$ lần, v.v... Các số $m_i$, $i = 1, 2, ..., r$ được gọi là* **bội** *của phần tử $a_i$, $i = 1, 2, ..., r$.*

*Giả sử P và Q là hai đa tập.* **Hợp** *của các đa tập P và Q cũng là một đa tập trong đó bội của một phần tử là số lớn nhất trong hai bội của nó ở P và Q.* **Giao** *của P và Q cũng là một đa tập trong đó bội của một phần tử là số bé nhất trong hai bội của nó ở P và Q.* **Hiệu** *của P và Q là một đa tập trong đó bội của một phần tử là hiệu của bội của phần tử đó trong P và bội của phần tử đó trong Q, nếu hiệu này không âm ; còn ngược lại bội của phần tử trong đa tập bằng 0.* **Tổng** *của P và Q là một đa tập, trong đó bội của một phần tử là tổng bội của phần tử đó trong P và Q. Hợp, giao và hiệu của P và Q được ký hiệu là $P \cup Q$, $P \cap Q$ và $P - Q$, tương ứng (các phép toán ở đây không nên lẫn lộn với các phép toán đối với các tập hợp). Tổng của P và Q được ký hiệu là $P \oplus Q$.*

**47.** Cho $A$ và $B$ là các đa tập {3.a, 2.b, 1.c} và {2.a, 3.b, 4.d}, tương ứng. Tìm :

a) $A \cup B$ b) $A \cap B$

c) $A - B$ d) $B - A$

e) $A + B$

**48.** Giả sử $A$ là một đa tập có các phần tử là những loại thiết bị tin học mà một khoa ở một trường đại học cần có với bội là số lượng mỗi loại thiết bị cần phải có. Cho $B$ là một đa tập tương tự cho một khoa khác ở trường đó. Ví dụ, $A$ có thể là đa tập {107 máy vi tính, 44. môđem, 6. máy tính mini} và $B$ có thể là đa tập {14. máy vi tính, 6. môđem, 2. máy tính lớn}

a) Tổ hợp nào của $A$ và $B$ sẽ biểu diễn các thiết bị mà trường đó sẽ mua khi cho rằng cả hai khoa sẽ dùng chung các thiết bị đó.

b) Tổ hợp nào của $A$ và $B$ sẽ biểu diễn số thiết bị sẽ được dùng bởi cả hai khoa nếu cả hai khoa cùng dùng chung số thiết bị đó.

c) Tổ hợp nào của $A$ và $B$ biểu diễn các thiết bị mà khoa thứ hai dùng nhưng khoa thứ nhất không dùng, nếu cả hai đều cùng dùng chung các loại thiết bị đó.

d) Tổ hợp nào của $A$ và $B$ biểu diễn các thiết bị mà trường đó sẽ mua nếu khoa này không cho khoa kia dùng chung thiết bị của mình.

*Các* **Tập mờ** *được dùng trong trí tuệ nhân tạo. Mỗi một phần tử trong tập vũ trụ U có một* **độ thuộc nào đó** *đối với tập mờ S, đó là một số thực nằm giữa 0 và 1 (kể cả 0 và 1). Tập mờ S được ký hiệu bằng cách liệt kê tất cả phần tử cùng với độ thuộc tập đó của nó (các phần tử với độ thuộc bằng 0 sẽ không được kê ra), Ví dụ, ta viết {0,6 Alice, 9,0 Brain, 0,4 Fred, 0,1 Oscar, 0,5 Rita} cho tập F (của những người nổi tiếng) để chỉ ra rằng Alice có độ thuộc trong F là 0,6, Brain là 0,9, Fred là 0,4, Oscar là 0,1 và Rita là 0,5 (như vậy Brian là người nổi tiếng nhất, và Oscar là người kém nổi tiếng nhất trong số người đó). Cũng giả sử rằng R là tập những người giàu với R = {0,4 Alice, 0,8 Brian, 0,2 Fred, 0,9 Oscar, 0,7 Rita}.*

**49.** **Phần bù** của tập mờ $S$ là tập $\overline{S}$, với độ thuộc của một phần tử trong $\overline{S}$ bằng 1 trừ đi độ thuộc của phần tử đó trong $S$. Hãy tìm $\overline{F}$ (tập mờ của những người không nổi tiếng) và $\overline{R}$ (tập mờ của những người không giàu).

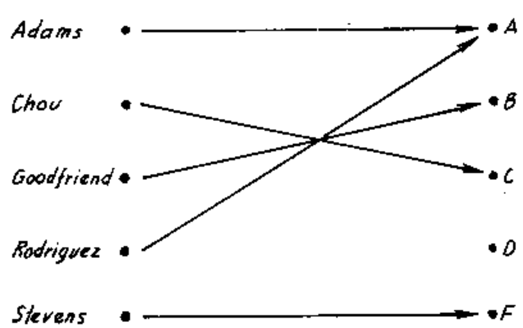
**50.** **Hợp** của hai tập mờ $S$ và $T$ là tập mờ $S \cup T$, trong đó độ thuộc của một phần tử trong $S \cup T$ là số lớn nhất trong hai độ thuộc của phần tử đó trong $S$ và trong $T$. Hãy tìm tập mờ $F \cup R$ của người giàu hoặc nổi tiếng.

**51.** **Giao** của hai tập mờ $S$ và $T$ là tập mờ $S \cap T$ trong đó độ thuộc của một phần tử thuộc $S \cap T$ là số nhỏ nhất trong hai độ thuộc của phần tử đó trong $S$ và $T$. Hãy tìm tập mờ $F \cap R$ những người giàu và nổi tiếng.

# 1.6. HÀM

## MỞ ĐẦU

Ở rất nhiều chỗ, chúng ta đã gán cho mỗi phần tử của một tập hợp một phần tử đặc biệt nào đó của một tập thứ hai (tập này cũng có thể là chính tập hợp thứ nhất). Ví dụ, giả sử rằng mỗi sinh viên ở lớp toán rời rạc được gán cho một điểm chữ lấy từ tập hợp $\{A, B, C, D, F\}$. Và giả sử rằng các điểm là : $A$ cho Adams, $C$ cho Chou, $B$ cho Goodfriend, $A$ cho Rodriguez và $F$ cho Stevens. Sự gán các điểm này được minh hoạ trên hình 1.




***Hình 1.*** Sự gán các điểm trong lớp toán rời rạc.

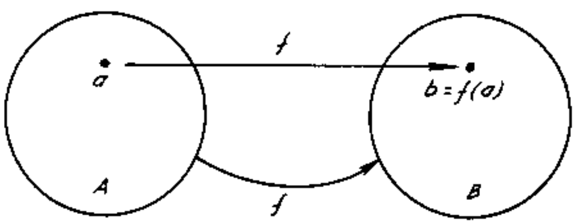
Sự gán này là một ví dụ về hàm. Hàm là một khái niệm cực kỳ quan trọng trong toán học rời rạc. Các hàm được dùng để định nghĩa các cấu trúc rời rạc như các dãy, các xâu. Hàm cũng dùng để biểu diễn thời gian một máy tính phải mất để giải một bài toán có qui mô đã cho. Các hàm đệ qui, tức là các hàm được định nghĩa qua chính chúng, được dùng xuyên suốt trong tin học và chúng sẽ được nghiên cứu trong Chương 3. Tiết này chúng ta sẽ ôn lại một số khái niệm cơ bản liên quan đến các hàm cần thiết trong toán học rời rạc.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp. Một *hàm* $f$ từ $A$ đến $B$ là sự gán chính xác một phần tử của $B$ cho mỗi phần tử của $A$. Ta viết $f(a) = b$ nếu $b$ là phần tử duy nhất của $B$ được gán bởi hàm $f$ cho phần tử $a$ của $A$. Nếu $f$ là hàm từ $A$ đến $B$, ta viết $f : A \rightarrow B$.

Các hàm được cho bằng nhiều cách. Đôi khi ta phát biểu một cách tường minh sự gán đó. Thường thì chúng ta cho một công thức , chẳng hạn như $f(x) = x + 1$ để định nghĩa hàm. Cũng có trường hợp ta dùng một trình máy tính để cho một hàm.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Nếu $f$ là một hàm từ $A$ đến $B$ thì $A$ được gọi là *miền xác định* của $f$ và $B$ là *miền giá trị* của $f$. Nếu $f(a) = b$ ta nói $b$ là *ảnh* của $a$ và $a$ là một *nghịch ảnh* của $b$. Tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử thuộc $A$ được gọi là ảnh của $A$ qua hàm $f$. Nếu $f$ là một hàm từ $A$ đến $B$, ta cũng nói rằng $f$ *ánh xạ* từ $A$ đến $B$.

Hình 2 biểu diễn một hàm $f$ từ $A$ đến $B$.




***Hình** 2.* Hàm $f$ ánh xạ từ $A$ đến $B$.

Ta hãy xét ví dụ nêu ở đầu tiết này. Cho $G$ là hàm gán điểm cho mỗi sinh viên trong lớp toán rời rạc của chúng ta. Miền xác định của $G$ là tập hợp {Adams, Chou, Goodfriend, Rodriguez, Stevens} và miền giá trị của nó là tập $\{A, B, C, D, F\}$. Ảnh của miền xác định qua hàm $G$ là tập $\{A, B, C, F\}$.

Ta cũng xét các ví dụ sau :

**Ví dụ 1.** Cho $f$ là hàm gán hai bit cuối cùng của một xâu bit chiều dài hai hoặc lớn hơn tới xâu đó. Khi đó miền xác định của $f$ là tập tất cả các xâu bit có chiều dài là 2 hoặc lớn hơn còn miền giá trị của $f$ là tập {00, 01, 10, 11}.

■

**Ví dụ 2.** Giả sử $f$ là hàm từ **Z** đến **Z** gán bình phương của một số nguyên cho số nguyên đó. Khi đó $f(x) = x^2$, ở đây miền xác định của $f$ là tập hợp các số nguyên, miền giá trị của $f$ cũng có thể được chọn là tập tất cả các số nguyên và ảnh của miền xác định là tập hợp tất cả các số nguyên không âm là số chính phương, cụ thể là $\{0, 1, 4, 9, ...\}$

■

**Ví dụ 3.** (Dùng cho các sinh viên đã làm quen với ngôn ngữ Pascal)

Miền xác định và miền giá trị thường được chỉ rõ trong các ngôn ngữ lập trình. Ví dụ, câu lệnh Pascal.

```
function floor (x : real) : integer
```

nói lên rằng miền xác định của hàm floor là tập các số thực, còn miền giá trị là tập các số nguyên.

■

Hai hàm có giá trị thực với cùng miền xác định có thể cộng hoặc nhân với nhau.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Cho $f_1$ và $f_2$ là hai hàm từ $A$ đến **R**. Khi đó $f_1 + f_2$ và $f_1f_2$ cũng là các hàm từ $A$ đến **R** được định nghĩa bởi :

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$
$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$$

Chú ý rằng các hàm $f_1 + f_2$ và $f_1f_2$ đã được định nghĩa bằng cách chỉ ra các giá trị của chúng tại $x$ thông qua các giá trị của $f_1$ và $f_2$ tại $x$.

**Ví dụ 4.** Cho $f_1$ và $f_2$ là các hàm từ **R** đến **R** sao cho $f_1(x) = x^2$ và $f_2(x) = x - x^2$. Xác định các hàm $f_1 + f_2$ và $f_1f_2$ ?

*Giải.* Từ định nghĩa của tổng và tích hai hàm, suy ra rằng :

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$$

và

$$(f_1f_2)(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4$$

Khi $f$ là một hàm từ tập $A$ đến tập $B$, thì ảnh của một tập con của $A$ cũng có thể định nghĩa.

■

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Giả sử $f$ là một hàm từ tập $A$ đến tập $B$ và $S$ là một tập con của $A$. Ảnh của $S$ là một tập con của $B$ gồm ảnh của các phần tử thuộc $S$. Ta ký hiệu ảnh của $S$ bởi $f(S)$, khi đó :

$$f(S) = \{f(s) \mid s \in S\}$$

**Ví dụ 5.** Cho $A = \{a, b, c, d, e\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$ với $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ và $f(e) = 1$. Ảnh của tập con $S = \{b, c, d\}$ là tập $f(S) = \{1, 4\}$.

■

## CÁC HÀM ĐƠN ÁNH VÀ TOÀN ÁNH

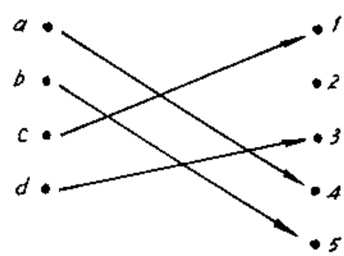
Một số hàm có ảnh phân biệt tại những phần tử phân biệt của miền xác định. Những hàm đó được gọi là **đơn ánh** hay hàm **một – một**.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Một hàm $f$ được gọi là *đơn ánh* hay *một – một* nếu và chỉ nếu $f(x) = f(y)$ kéo theo $x = y$ đối với mọi $x$ và $y$ trong miền xác định của hàm $f$.

*Chú ý* : Một hàm là đơn ánh nếu và chỉ nếu $f(x) \neq f(y)$ với mỗi $x \neq y$. Cách định nghĩa này nhận được bằng cách lấy phần đảo của mệnh đề kéo theo trong định nghĩa.

Chúng ta sẽ minh hoạ khái niệm này bằng cách cho các ví dụ về các hàm đơn ánh và các hàm không đơn ánh.

**Ví dụ 6.** Xác định xem hàm $f$ từ {a, b, c, d} đến {1, 2, 3, 4, 5} với $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ và $f(d) = 3$ có là hàm đơn ánh không?




***Hình 3.*** Hàm đơn ánh

*Giải* : Hàm $f$ là đơn ánh vì $f$ nhận các giá trị khác nhau tại bốn phần tử của miền xác định. Điều này được minh hoạ trên hình 3.

■

**Ví dụ 7.** Xác định xem hàm $f(x) = x^2$ từ tập các số nguyên đến tập các số nguyên có phải là đơn ánh không?

*Giải* : Hàm $f(x) = x^2$ không phải là đơn ánh vì, ví dụ, $f(1) = f(-1) = 1$ mà $1 \neq -1$.

**Ví dụ 8.** Xác định xem hàm $f(x) = x + 1$ có phải là đơn ánh không?

*Giải* : Hàm $f(x) = x + 1$ là hàm đơn ánh. Để chứng minh điều này, chú ý rằng $x + 1 \neq y + 1$ khi $x \neq y$.

■

Bây giờ chúng ta sẽ cho một số điều kiện để đảm bảo rằng một hàm là đơn ánh

**ĐỊNH NGHĨA 6.** Một hàm $f$ có miền xác định và miền giá trị đều là các tập con của tập các số thực được gọi là *thực sự tăng* nếu $f(x) < f(y)$ khi $x < y$ với $x$ và $y$ thuộc miền xác định của $f$. Tương tự $f$ được gọi là *thực sự giảm* nếu $f(x) > f(y)$ khi $x < y$ với $x$ và $y$ thuộc miền xác định của $f$.

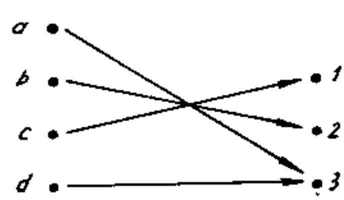
Từ những định nghĩa này ta thấy rằng các hàm hoặc thực sự tăng hoặc thực sự giảm đều là các hàm đơn ánh.

Đối với một số hàm miền giá trị và ảnh của miền xác định bằng nhau. Tức là mọi phần tử của miền giá trị đều là ảnh của một phần tử nào đó thuộc miền xác định. Những hàm có tính chất này được gọi là các **hàm toàn ánh**.

**ĐỊNH NGHĨA 7.** Hàm $f$ từ $A$ đến $B$ được gọi là *toàn ánh* nếu và chỉ nếu đối với mọi phần tử $b \in B$ tồn tại một phần tử $a \in A$ với $f(a) = b$.

Bây giờ chúng ta sẽ cho những ví dụ về các hàm toàn ánh và các hàm không toàn ánh.

**Ví dụ 9.** Cho $f$ là hàm từ {a, b, c, d} đến {1, 2, 3} được định nghĩa bởi $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ và $f(d) = 3$. Hàm này có là toàn ánh không?




***Hình 4.*** Một hàm toàn ánh

*Giải :* Vì tất cả ba phần tử của miền giá trị đều là ảnh của các phần tử trong miền xác định, nên $f$ là một toàn ánh. Điều này được minh hoạ trên hình 4.

■

**Ví dụ 10.** Hàm $f(x) = x^2$ từ tập các số nguyên đến tập các số nguyên có phải là một toàn ánh không?

*Giải :* Hàm này không phải là toàn ánh, vì, chẳng hạn, không có một số nguyên nào cho $x^2 = -1$ cả.

**Ví dụ 11.** Hàm $f(x) = x + 1$ từ tập số nguyên tới tập số nguyên có phải là toàn ánh không?

*Giải :* Hàm này là toàn ánh, vì với mọi số nguyên $y$ tồn tại một số nguyên $x$ sao cho $f(x) = y$. Để thấy điều này, chú ý rằng $f(x) = y$ nếu và chỉ nếu $x + 1 = y$ và điều này đúng nếu và chỉ nếu $x = y - 1$. ■

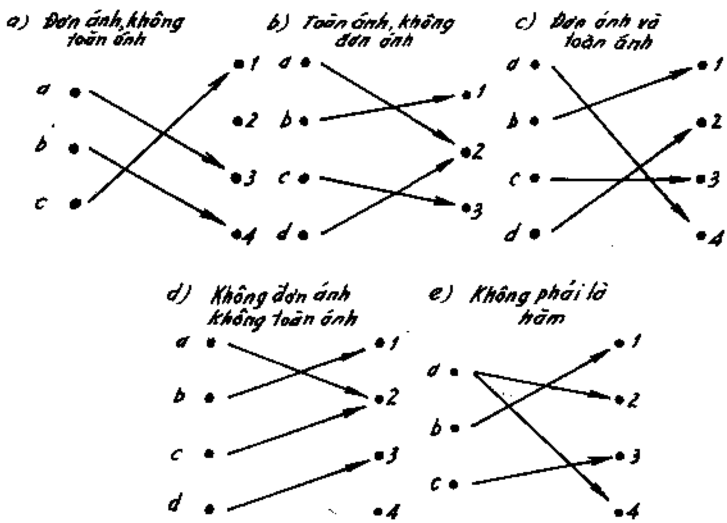
**ĐỊNH NGHĨA 8.** Hàm $f$ là một *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh (một – một) vừa là toàn ánh.

Các ví dụ sau minh hoạ khái niệm song ánh.

**Ví dụ 12.** Cho $f$ là một hàm từ $\{a, b, c, d\}$ tới $\{1, 2, 3, 4\}$ với $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ và $f(d) = 3$. Hàm $f$ có phải là một song ánh không?

*Giải :* Hàm $f$ là đơn ánh và toàn ánh. Nó là đơn ánh vì luôn nhận các giá trị phân biệt. Nó là toàn ánh vì bốn phần tử của miền giá trị đều là ảnh của các phần tử thuộc miền xác định. Từ đó, $f$ là một song ánh. ■

Hình 5 minh hoạ bốn hàm, trong đó hàm đầu tiên là đơn ánh, nhưng không phải toàn ánh, hàm thứ hai là toàn ánh nhưng không phải đơn ánh, hàm thứ ba là đơn ánh và là toàn ánh, và hàm thứ tư không là đơn ánh cũng không là toàn ánh, tương ứng thứ năm không phải là một hàm, vì nó cho tương ứng một phần tử với hai phần tử khác nhau.




*Hình 5.* Ví dụ về các loại tương ứng khác nhau.

Giả sử $f$ là một hàm từ $A$ đến chính nó. Nếu $A$ là hữu hạn, thì $f$ sẽ là đơn ánh nếu và chỉ nếu nó là toàn ánh (Điều nàu suy ra từ kết quả của Bài tập 38 ở cuối chương này). Tuy nhiên, điều này không nhất thiết trong trường hợp $A$ là tập vô hạn (như sẽ được chứng minh trong Tiết 1.7).

**Ví dụ 13**. Cho $A$ là một tập hợp. *Hàm đồng nhất* trên $A$ là hàm

$$i_A : A \rightarrow A, \text{ ở đây } i_A(x) = x \text{ với } x \in A.$$

Nói một cách khác, hàm đồng nhất $i_A$ là hàm gán mỗi một phần tử cho chính nó. Hàm $i_A$ là đơn ánh và toàn ánh, do đó là song ánh.

■

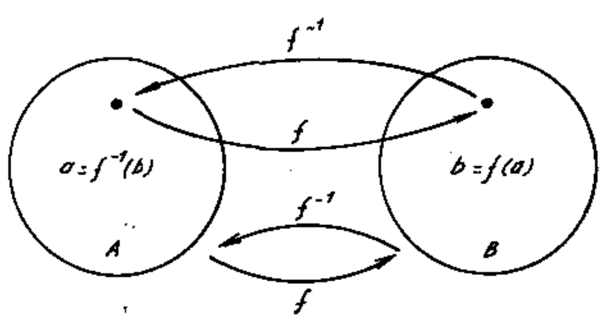
## HÀM NGƯỢC VÀ HỢP THÀNH CỦA CÁC HÀM

Bây giờ ta sẽ xét một song ánh từ tập $A$ đến tập $B$. Vì $f$ là một toàn ánh, nên mỗi phần tử của $B$ đều là ảnh của một phần tử nào đó của $A$. Hơn nữa, vì $f$ là một đơn ánh, nên mọi phần tử của $B$ là ảnh của một phần tử *duy nhất* thuộc $A$. Do đó, chúng ta có thể định nghĩa được một hàm mới từ $B$ đến $A$, ngược với tương ứng được cho bởi hàm $f$. Điều này dẫn tới định nghĩa sau.

**ĐỊNH NGHĨA 9.** Cho $f$ là một song ánh từ tập $A$ đến tập $B$. *Hàm ngược* của $f$ là một hàm gán cho mỗi phần tử $b$ thuộc $B$ một phần tử duy nhất $a$ thuộc $A$ sao cho $f(a) = b$. Hàm ngược của $f$ được ký hiệu là $f^{-1}$. Từ đó, $f^{-1}(b) = a$ khi $f(a) = b$.

Hình 6 minh hoạ cho khái niệm hàm ngược.

Nếu $f$ không phải là một hàm song ánh, thì ta không thể định nghĩa được khái niệm hàm ngược. Khi $f$ không phải là song ánh,




***Hình 6.*** Hàm $f^{-1}$ là hàm ngược của hàm $f$.

thì hoặc là nó không phải là đơn ánh hoặc không phải toàn ánh. Mà nếu không phải là đơn ánh thì một phần tử $b$ nào đó thuộc miền giá trị sẽ là ảnh của hơn một phần tử trong miền xác định. Còn nếu nó không phải là toàn ánh thì đối với một phần tử $b$ nào đó trong miền giá trị sẽ không có phần tử $a$ nào trong miền xác định sao cho $f(a) = b$. Do đó, nếu $f$ không phải là song ánh, thì chúng ta không thể gán cho mỗi phần tử $b$ thuộc miền giá trị một phần tử $a$ duy nhất trong miền xác định sao cho $f(a) = b$ (vì đối với một $b$ nào đó có thể có nhiều hơn một phần tử $a$ như vậy hoặc không có phần tử $a$ nào).

Hàm song ánh còn được gọi là hàm **khả nghịch**, vì chúng ta có thể xác định được hàm ngược của hàm đó. Một hàm là **không khả nghịch** nếu nó không phải là một song ánh, vì hàm ngược của nó không tồn tại.

**Ví dụ 14.** Cho $f$ là hàm từ $\{a, b, c\}$ đến $\{1, 2, 3\}$ sao cho $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ và $f(c) = 1$. Hàm $f$ có khả nghịch không? Nếu có, hãy tìm hàm ngược đó.

*Giải :* Hàm $f$ là khả nghịch, vì nó là một song ánh. Hàm ngược $f^{-1}$ giữ nguyên sự tương ứng cho bởi hàm $f$, sao cho $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$ và $f^{-1}(3) = b$.

■

**Ví dụ 15.** Cho $f$ là hàm từ tập các số nguyên đến tập các số nguyên sao cho $f(x) = x + 1$. Hàm $f$ có khả nghịch không? Nếu có, hãy xác định hàm ngược.

*Giải :* Hàm $f$ là khả nghịch, vì nó là một song ánh, như đã biết ở trên. Để giữ nguyên sự tương ứng, ta giả sử rằng $y$ là ảnh của $x$, sao cho $y = x + 1$. Khi đó $x = y - 1$. Điều này có nghĩa là $y - 1$ là phần tử duy nhất của $\mathbf{Z}$ tương ứng với $y$ qua $f$. Do đó $f^{-1}(y) = y - 1$.

■

**Ví dụ 16**. Cho $f$ là một hàm từ $\mathbf{Z}$ đến $\mathbf{Z}$ với $f = x^2$. $f$ có khả nghịch không?

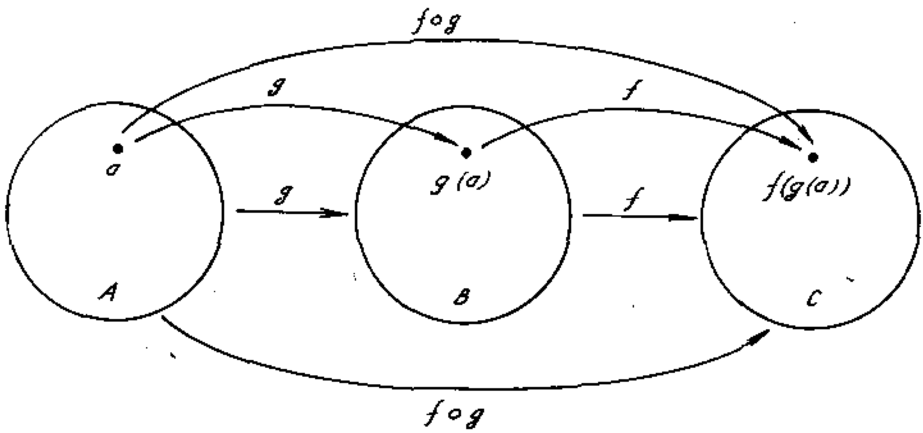
*Giải :* Vì $f(-1) = f(1) = 1$, nên $f$ không phải là một đơn ánh. Nếu định nghĩa một hàm ngược, ta sẽ cần phải gán hai phần tử cho 1. Do đó, $f$ là không khả nghịch.

■

**ĐỊNH NGHĨA 10.** Cho $g$ là hàm từ tập $A$ đến tập $B$ và $f$ là hàm từ tập $B$ đến tập $C$. *Hợp thành* của các hàm $f$ và $g$, được ký hiệu là $fog$, được định nghĩa bởi :

$$(fog)(a) = f(g(a))$$

Nói một cách khác, hàm đó gán cho mỗi phần tử $a$ trong $A$ một phần tử được gán bởi hàm $f$ cho $g(a)$. Chú ý rằng, hợp thành $f_{\circ}g$ sẽ không thể định nghĩa được, nếu ảnh miền xác định của $g$ không phải là một tập con của miền xác định của $f$. Hình 7 minh hoạ hợp thành của các hàm.




***Hình** 7.* Hợp thành của hàm $f$ và hàm $g$.

**Ví dụ 17.** Cho $g$ là hàm từ tập $\{a, b, c\}$ đến chính nó, sao cho $g(a) = b$, $g(b) = c$ và $g(c) = a$. Cho $f$ là hàm từ tập $\{a, b, c\}$ đến tập $\{1, 2, 3\}$ sao cho $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ và $f(c) = 1$. Xác định hợp thành của $f$ và $g$ và của $g$ và $f$.

***Giải*** : Hợp thành $f_{\circ}g$ được xác định bởi $(f_{\circ}g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$ ; $(f_{\circ}g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$ và $f_{\circ}g(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$.

■

Chú ý rằng $g_{\circ}f$ không xác định, vì ảnh miền giá trị của $f$ không phải là tập con của miền xác định của $g$.

■

**Ví dụ 18.** Cho $f$ và $g$ là hai hàm từ tập các số nguyên đến tập các số nguyên được cho bởi : $f(x) = 2x + 3$ và $g(x) = 3x + 2$. Xác định hợp thành $f_{\circ}g$ và $g_{\circ}f$?

***Giải*** : Cả hai hợp thành $f_{\circ}g$ và $g_{\circ}f$ đều xác định. Hơn nữa :

$$(f_{\circ}g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

và : $(g_{\circ}f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11$

■

*Chú ý* : Chú ý rằng mặc dù thậm chí $f \circ g$ và $g \circ f$ đều tồn tại đối với các hàm $f$ và $g$ nhưng chúng không bằng nhau. Nói cách khác, luật giao hoán không đúng đối với hợp thành của các hàm.

Khi hợp thành của một hàm và hàm ngược của nó được tạo thành, theo một thứ tự nào đó , ta sẽ nhận được hàm đồng nhất. Để thấy điều này, giả sử $f$ là một hàm song ánh từ tập $A$ đến tập $B$. Hàm ngược của nó vẫn giữ nguyên tương ứng này, tức là $f^{-1}(b) = a$ khi $f(a) = b$ và $f(a) = b$ khi $f^{-1}(b) = a$.

Do đó : $$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

và $$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$$

Do đó $f^{-1} \circ f = i_A$ và $f \circ f^{-1} = i_B$, ở đây $i_A$ và $i_B$ tương ứng là các hàm đồng nhất trên tập $A$ và tập $B$. Như vậy : $(f^{-1})^{-1} = f$.

## ĐỒ THỊ CỦA HÀM

Chúng ta có thể liên kết một tập các cặp trong $A \times B$ với mỗi một hàm từ $A$ đến $B$. Tập các cặp này được gọi là **đồ thị** của hàm đó và thường được biểu diễn bằng hình vẽ để giúp ta hiểu rõ hơn dáng điệu của hàm ấy.

**ĐỊNH NGHĨA 11.** Cho $f$ là một hàm từ tập $A$ đến tập $B$. *Đồ thị* của hàm $f$ là tập các cặp sắp thứ tự $\{(a, b) \mid a \in A \text{ và } f(a) = b\}$.

Từ định nghĩa ta thấy đồ thị của một hàm $f$ từ $A$ đến $B$ là một tập con của $A \times B$ chứa các cặp sắp thứ tự với phần tử thứ hai bằng phần tử thuộc $B$ được gán cho phần tử thứ nhất bởi hàm $f$.

**Ví dụ 19.** Vẽ đồ thị của hàm $f(n) = 2n + 1$ từ tập các số nguyên tới tập các số nguyên.

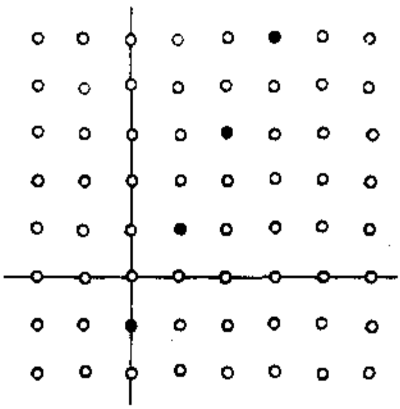
***Giải*** : Đồ thị của $f$ là tập các cặp sắp thứ tự có dạng $(n, 2n + 1)$, với $n$ là một số nguyên. Đồ thị này được cho trên hình 8.

■

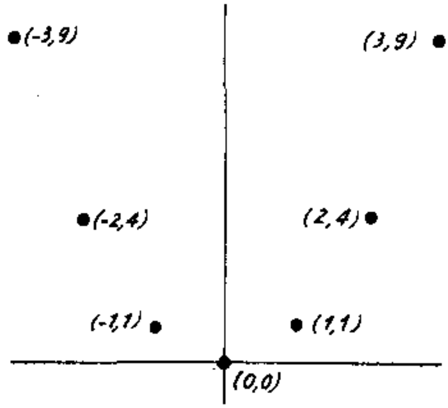
**Ví dụ 20.** Vẽ đồ thị của hàm $f(x) = x^2$ từ tập các số nguyên đến tập các số nguyên.

***Giải*** : Đồ thị của $f$ là tập các cặp sắp thứ tự có dạng $(x, f(x)) = (x, x^2)$, với $x$ là một số nguyên. Đồ thị này được cho trên hình 9.

■



*Hình 8.* Đồ thị của hàm $f(n) = 2n + 1$ từ **Z** đến **Z**.




*Hình 9.* Đồ thị của hàm $f(x) = x^2$ từ **Z** đến **Z**.

## MỘT SỐ HÀM QUAN TRỌNG

Tiếp theo, chúng tôi sẽ giới thiệu hai hàm quan trọng trong toán học rời rạc, đó là hàm sàn và hàm trần. Cho $x$ là một số thực. Hàm sàn làm tròn số $x$ xuống thành một số nguyên gần nhất nhỏ hơn hoặc bằng nó ; còn hàm trần làm tròn số $x$ lên thành một số nguyên gần nhất lớn hơn hoặc bằng nó. Các hàm này thường được dùng khi đếm các vật. Chúng đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích số các bước được dùng bởi các thủ tục để giải các bài toán có qui mô đặc biệt nào đó.

**ĐỊNH NGHĨA 12.** *Hàm sàn* gán cho số thực $x$ số nguyên lớn nhất có giá trị nhỏ hơn hoặc bằng $x$. Giá trị của hàm sàn được ký hiệu là $\lfloor x \rfloor$. *Hàm trần* gán cho số thực $x$ số nguyên bé nhất có giá trị lớn hơn hoặc bằng $x$. Giá trị của hàm trần được ký hiệu là $\lceil x \rceil$.

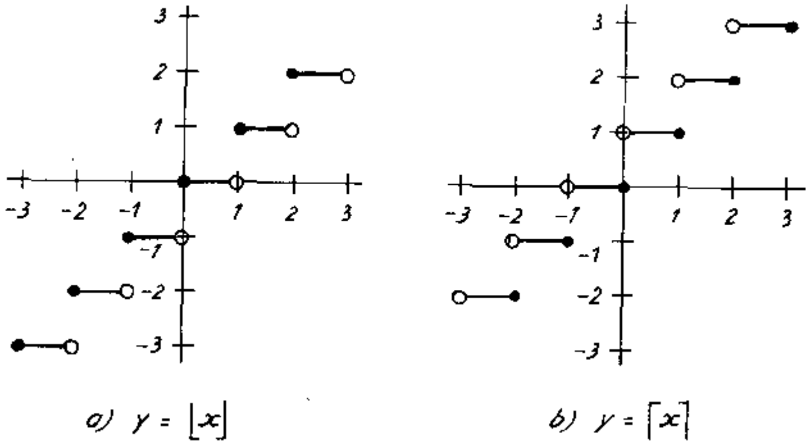
*Chú ý* : Hàm sàn còn được gọi là *hàm phần nguyên* và thường được ký hiệu là $[x]$.

**Ví dụ 21.** Dưới đây là một số giá trị của hàm sàn và hàm trần :

$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, $\lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$, $\lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1$, $\lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0$ , $\lfloor 3{,}1 \rfloor = 3$, $\lceil 3{,}1 \rceil = 4$, $\lfloor 7 \rfloor = 7$, $\lceil 7 \rceil = 7$.

■

Đồ thị của hàm sàn và hàm trần được cho trên hình 10.




***Hình 10.*** Đồ thị của Hàm sàn (a) và Hàm trần (b).

Còn có một số loại hàm sẽ được dùng suốt trong cuốn sách này. Đó là các hàm đa thức, lôgarit và hàm e mũ. Trong cuốn sách này, ký hiệu $\log x$ được hiểu là log cơ số 2 của $x$. Khi cần dùng cơ số khác, ví dụ cơ số $b (b > 1)$ ta viết $\log_b x$.

## BÀI TẬP

1. Tại sao $f$ trong các phương trình sau không phải là một hàm từ **R** đến **R**?

   a) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

   c) $f(x) = \pm\sqrt{(x^2 + 1)}$

**2.** Xác định xem $f$ có phải là một hàm từ **Z** đến **R** không, nếu :

   a) $f(n) = \pm n$ b) $f(n) = \sqrt{n^2 + 1}$

   c) $f(n) = \dfrac{1}{n^2 - 4}$

**3.** Xác định xem $f$ có là một hàm từ tập tất cả các xâu bit đến tập các số nguyên không, nếu :

a) $f(S)$ là vị trí của một bit 0 trong $S$.

b) $f(S)$ là số các bit 1 trong $S$.

c) $f(S)$ là số nguyên nhỏ nhất $i$ sao cho bit thứ $i$ trong $S$ là 1 và $f(S) = 0$ *khi* $S$ là một xâu rỗng, tức là xâu không có bit nào.

**4.** Tìm miền xác định, ảnh của miền các định của các hàm sau :

a) hàm gán cho mỗi số nguyên không âm chữ số cuối cùng của nó.

b) hàm gán cho mỗi số nguyên dương số nguyên lớn nhất tiếp sau.

c) hàm gán cho mỗi xâu bit số các bit 1 trong xâu đó.

d) hàm gán cho mỗi xâu bit số các bit trong xâu đó.

**5.** Tìm các giá trị sau :

a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil$ b) $\lfloor \frac{7}{8} \rfloor$ c) $\lceil -\frac{3}{4} \rceil$

d) $\lfloor -\frac{7}{8} \rfloor$ e) $\lceil 3 \rceil$ f) $\lfloor -1 \rfloor$

**6.** Xác định xem các hàm từ $\{a, b, c, d\}$ đến chính nó cho dưới đây có phải đơn ánh không?

a) $f(a) = b$, $f(b) = a$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

b) $f(a) = b$, $f(b) = b$, $f(c) = d$, $f(d) = c$

c) $f(a) = d$, $f(b) = b$, $f(c) = c$, $f(d) = d$

**7.** Hàm nào trong Bài tập 6 là toàn ánh?

8. Xác định xem các hàm từ **Z** đến **Z** cho dưới đây có là đơn ánh không?

a) $f(n) = n - 1$ b) $f(n) = n^2 + 1$

c) $f(n) = n^3$ d) $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

**9**. Hàm nào trong Bài tập 8 là toàn ánh?

**10.** Cho một ví dụ về hàm từ **N** đến **N** là

a) đơn ánh nhưng không toàn ánh.

b) toàn ánh nhưng không đơn ánh.

c) vừa toàn ánh vừa đơn ánh (nhưng khác hàm đồng nhất).

d) không đơn ánh cũng không toàn ánh.

**11.** Xác định xem các hàm từ **R** đến **R** cho dưới đây có là song ánh không?

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 + 1$

c) $f(x) = x^3$ d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$

**12.** Cho $S = \{-1, 0, 2, 4, 7\}$. Tìm $f(S)$ nếu :

a) $f(x) = 1$ b) $f(x) = 2x + 1$

c) $f(x) = \lceil \dfrac{x}{5} \rceil$ d) $f(x) = \lfloor \dfrac{x^2 + 1}{3} \rfloor$

**13.** Cho $f(x) = \lfloor \dfrac{x^2}{3} \rfloor$. Tìm $f(S)$ nếu :

a) $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) $S = \{1, 5, 7, 11\}$ d) $S = \{2, 6, 10, 14\}$

**14.** Cho $f(x) = 2x$. Tìm

a) $f(\mathbf{Z})$ b) $f(\mathbf{N})$ c) $f(\mathbf{R})$

**15.** Cho $g$ là một hàm từ $A$ đến $B$ và $f$ là một hàm từ $B$ đến $C$.

a) Chứng minh rằng nếu cả $f$ lẫn $g$ là các hàm đơn ánh thì $f_{\circ}g$ cũng là hàm đơn ánh.

b) Chứng minh rằng nếu $f$, g đều là toàn ánh, thì $f_{\circ}g$ cũng là toàn ánh.

**16*.** Nếu $f$ và $f_{\circ}g$ là đơn ánh, có suy ra $g$ cũng là đơn ánh không? Giải thích.

**17*.** Nếu $f$ và $f_{\circ}g$ là toàn ánh, có suy ra được $g$ cũng toàn ánh không? Giải thích.

**18.** Tìm $f_{\circ}g$ và $g_{\circ}f$ với $f(x) = x^2 + 1$ và $g(x) = x + 2$ là các hàm từ **R** đến **R**.

**19.** Tìm $f + g$ và $fg$ đối với các hàm $f$ và $g$ trong Bài tập **18**.

**20.** Cho $f(x) = ax + b$ và $g(x) = cx + d$ với $a, b, c, d$ là các hằng số. Hãy xác định $a, b, c, d$ để $f_{\circ}g = g_{\circ}f$.

**21.** Chứng tỏ rằng hàm $f(x) = ax + b$ từ **R** đến **R** là khả nghịch với $a$ và $b$ là const và $a \neq 0$. Tìm hàm ngược của $f$.

**22.** Cho $f$ là một hàm từ tập $A$ đến tập $B$. Cho $S$ và $T$ là hai tập con của $A$. Chứng minh rằng :

a) $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$ b) $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$

**23.** Cho một ví dụ chứng tỏ rằng bao hàm trong phần b của Bài tập **22** là bao hàm thực sự.

*Cho $f$ là một hàm từ tập $A$ đến tập $B$. Cho $S$ là một tập con của $B$. Ta định nghĩa tập* **nghịch ảnh** *của $S$ là tập con của $A$ chứa tất cả các nghịch ảnh của các phần tử của $S$. Chúng ta ký hiệu nghịch ảnh của $S$ là $f^{-1}(S)$, sao cho $f^{-1}(S) = \{a \in A \mid f(a) \in S\}$.*

**24.** Cho $f$ là một hàm từ $\mathbf{R}$ đến $\mathbf{R}$ được định nghĩa bởi : $f(x) = x^2$. Tìm :

a) $f^{-1}(\{1\})$ b) $f^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$

**25.** Cho $g(x) = \lfloor x \rfloor$. Tìm :

a) $g^{-1}(\{0\})$ b) $g^{-1}(\{-1, 0, 1\})$

c) $g^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$

**26.** Cho $f$ là một hàm từ tập $A$ đến tập $B$. Giả sử $T$ và $S$ là hai tập con của $B$. Chứng minh rằng :

a) $f^{-1}(S \cup T) = f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$ b) $f^{-1}(S \cap T) = f^{-1}(S) \cap f^{-1}(T)$

**27.** Cho $f$ là một hàm từ $A$ đến $B$ và $S$ là một tập con của $B$. Chứng minh rằng :

$$f^{-1}(\overline{S}) = \overline{f^{-1}(S)}$$

**28.** Chứng minh rằng $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.

**29.** Cho $x$ là một số thực. Chứng minh rằng

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$$

**30.** Vẽ đồ thị của hàm $f(n) = 1 - n^2$ từ $\mathbf{Z}$ đến $\mathbf{Z}$.

**31.** Vẽ đồ thị của hàm $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$ từ $\mathbf{R}$ đến $\mathbf{R}$.

**32.** Vẽ đồ thị của hàm $f(x) = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ từ $\mathbf{R}$ đến $\mathbf{R}$.

**33.** Vẽ đồ thị của hàm $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ từ **R** đến **R**.

**34.** Vẽ đồ thị của hàm $f(x) = \lceil x \rceil + \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ từ **R** đến **R**.

**35.** Tìm hàm ngược của $f(x) = x^3 + 1$.

**36.** Giả sử $f$ là một hàm khả nghịch từ $Y$ đến $Z$ và $g$ là hàm khả nghịch từ $X$ đến $Y$. Chứng minh rằng hàm ngược của hợp thành $f \circ g$ được cho bởi :

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

**37.** Cho $S$ là một tập con của tập vũ trụ $U$. **Hàm đặc trưng** $f_S$ của $S$ là hàm từ $U$ đến tập $\{0, 1\}$ sao cho $f_S(x) = 1$ nếu $x \in S$ và $f_S(x) = 0$ nếu $x \notin S$. Cho $A$ và $B$ là hai tập. Chứng tỏ rằng với mọi $x$

a) $f_{A \cap B}(x) = f_A(x).f_B(x)$

b) $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x).f_B(x)$.

c) $f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x)$.

d) $f_{A \oplus B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) f_B(x)$

**38.** Giả sử $f$ là hàm từ $A$ đến $B$, trong đó $A$ và $B$ là hai tập hữu hạn có $|A| = |B|$. Chứng minh rằng $f$ là đơn ánh nếu và chỉ nếu nó là toàn ánh.

*Một chương trình được thiết kế để tính giá trị của một hàm có thể không tạo ra được giá trị đúng của hàm đó đối với mọi phần tử thuộc miền xác định của hàm ấy. Ví dụ, một chương trình không tạo ra được giá trị đúng do quá trình tính dẫn tới một vòng lặp vô hạn hoặc bị tràn bộ nhớ.*

*Để nghiên cứu những tình huống này, chúng ta sử dụng khái niệm hàm bộ phận.* **Hàm bộ phận** *f từ tập A đến tập B là sự gán cho mỗi phần tử a trong một tập con của A, được gọi là* **miền xác định** *của f, một phần tử duy nhất b thuộc B. A được gọi là miền, B được gọi là* **miền giá trị** *của f. Chúng ta nói rằng f* **không xác định** *đối với các phần tử thuộc A nhưng không thuộc miền xác định của f. Ta viết $f : A \to B$ để ký hiệu f là hàm bộ phận từ A đến B. (Chính ký hiệu này cũng được dùng cho các hàm. Vì vậy tuỳ theo bối cảnh cụ thể mà ta xem f là hàm bộ phận hay hàm toàn phần). Khi ta nói miền xác định của f bằng A, ta muốn nói rằng f là một* **hàm toàn bộ**.

**39.** Đối với các hàm bộ phận sau, hãy xác định miền, miền giá trị, miền xác định và tập hợp các giá trị mà $f$ không xác định :

a) $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$ , $\quad f(n) = \dfrac{1}{n}$

b) $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , $\quad f(n) = \lceil \dfrac{n}{2} \rceil$

c) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q}$ , $\quad f(m, n) = \dfrac{m}{n}$

d) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , $\quad f(m, n) = mn$

e) $f : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ , $\quad f(m, n) = m - n$ nếu $m > n$.

**40.** a) Chứng minh rằng một hàm bộ phận từ $A$ đến $B$ có thể được xem như một hàm $f^*$ từ $A$ đến $B \cup \{u\}$, ở đây $u$ không phải là phần tử của $B$ và :

$$f^*(a) = \begin{cases} f(a) \text{ nếu } a \text{ thuộc miền xác định của } f \\ u \text{ nếu } f \text{ không xác định tại } a \end{cases}$$

b) Dùng cách xây dựng trong *(a)*, tìm hàm $f^*$ tương ứng với các hàm bộ phận trong bài tập 39.

# 1.7. DÃY VÀ PHÉP TÍNH TỔNG

## MỞ ĐẦU

Dãy thường được dùng để biểu diễn bảng liệt kê các phần tử được sắp thứ tự. Trong toán học rời rạc các dãy được dùng theo nhiều cách. Chúng ta có thể dùng chúng để biểu diễn lời giải của một số bài toán đếm, như chúng ta sẽ thấy trong Chương 5. Chúng cũng là một cơ sở dữ liệu quan trọng trong tin học. Tiết này sẽ ôn lại khái niệm hàm, cũng như ký hiệu dùng để biểu diễn các dãy và ký hiệu lấy tổng các số hạng của dãy.

Khi các phần tử của một tập vô hạn có thể được liệt kê, tập đó sẽ được gọi là đếm được. Trong tiết này chúng ta sẽ xét cả các tập đếm được cũng như không đếm được.

## DÃY

Một dãy là một cấu trúc rời rạc được dùng để biểu diễn một bảng liệt kê sắp thứ tự.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Một *dãy* là một hàm từ một tập con của tập các số nguyên (thường là tập $\{0, 1, 2, ...\}$ hoặc $\{1, 2, 3, ...\}$) tới một tập $S$. Chúng ta dùng ký hiệu $a_n$ để chỉ ảnh của số nguyên $n$. $a_n$ được gọi là *số hạng* của dãy. Ta dùng ký hiệu $\{a_n\}$ để mô tả một dãy. (Chú ý rằng $a_n$ biểu diễn một số hạng của dãy $\{a_n\}$. Cũng chú ý rằng ký hiệu $\{a_n\}$ đối với dãy dễ lẫn với ký hiệu của một tập hợp. Tuy nhiên, tuỳ thuộc bối cảnh sử dụng các ký hiệu đó mà ta dễ dàng phân biệt khi nào nó dùng để biểu diễn một tập hợp, khi nào để biểu diễn một dãy).

Chúng ta mô tả một dãy bằng cách liệt kê các số hạng của nó theo thứ tự chỉ số dưới tăng dần.

**Ví dụ 1.** Xét dãy $\{a_n\}$, trong đó

$$a_n = \frac{1}{n}$$

Bảng liệt kê các số hạng của dãy này từ $a_1$, tức là $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ ...,

bắt đầu với : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

■

**Ví dụ 2.** Xét dãy $\{b_n\}$ với $b_n = (-1)^n$. Bảng liệt kê các số hạng của dãy này : $b_0$, $b_1$, $b_2$, ..., bắt đầu với 1, −1, 1, −1, 1, ...

■

**Ví dụ 3.** Xét dãy $c_n = 5^n$. Bảng liệt kê các số hạng của dãy này : $C_0$, $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$ ... bắt đầu với : 1, 5, 25, 125, 625, 3125, ...

■

Các dãy có dạng : $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ thường được dùng trong tin học. Các dãy hữu hạn này cũng được gọi là các **xâu** và được ký hiệu là $a_1$, $a_2$ ... $a_n$. (Hãy nhớ lại xâu bit. Đó là các dãy bit hữu hạn đã được đưa vào ở Tiết 1.1). **Chiều dài** của xâu $S$ là số các hạng trong xâu đó. **Xâu rỗng** là xâu không có số hạng nào. Xâu rỗng có chiều dài là zêro.

**Ví dụ 4.** Xâu *abcd* là xâu có chiều dài là 4.

■

## PHÉP TÍNH TỔNG

Tiếp theo, ta đưa vào **ký hiệu tổng**, tức là ký hiệu dùng để biểu diễn tổng các số hạng.

$$a_m, a_{m+1}, \dots a_n$$

của dãy $\{a_n\}$. Ta dùng ký hiệu : $\sum_{j=m}^{n} a_j$

để biểu diễn tổng : $a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$

Ở đây biến $j$ được gọi là **chỉ số lấy tổng** và việc chọn chữ $j$ là hoàn toàn tuỳ ý, điều này có nghĩa là, ta có thể dùng một chữ khác, như $i$ hoặc $k$, chẳng hạn. Hay dưới dạng ký hiệu,

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{k=m}^{n} a_k$$

Ở đây, chỉ số lấy tổng chạy qua tất cả các số nguyên bắt đầu từ **giới hạn dưới** $m$ và kết thúc ở **giới hạn trên** $n$. Chữ cái Hy lạp hoa $\sum$ (đọc là sigma) được dùng để ký hiệu phép lấy tổng. Dưới đây là một số ví dụ về ký hiệu lấy tổng.

**Ví dụ 5.** Biểu diễn tổng của 100 số hạng đầu tiên của dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \frac{1}{n}$ và $n = 1, 2, 3, \dots$

*Giải :* Giới hạn dưới của chỉ số lấy tổng là 1 và giới hạn trên là 100. Như vậy, tổng đó có thể viết như sau :

$$\sum_{j=1}^{100} \left(\frac{1}{j}\right)$$

■

**Ví dụ 6**. Xác định giá trị của $\sum_{j=1}^{5} j^2$

*Giải :* Ta có : $\sum_{j=1}^{5} j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55.$$

■

**Ví dụ 7.** Tính giá trị của $\sum_{k=4}^{8} (-1)^k$

*Giải :* Ta có :

$$\sum_{k=4}^{8} (-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8$$
$$= 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1.$$

■

**Ví dụ 8.** *Cấp số nhân* là dãy có dạng : $a, ar, ar^2, ar^3, \dots ar^k$, ở đây $a$ là số hạng đầu, $r$ được gọi là công bội, cả hai đều là số thực. Bây giờ chúng ta sẽ tìm công thức tính tổng $S$ của $n + 1$ số hạng đầu tiên của một cấp số nhân với số hạng đầu là $a$ và công bội $r$, tức là tính :

$$S = \sum_{j=0}^{n} ar^j$$

Để tính $S$, ta nhân hai vế phương trình trên với $r$, rồi biến đổi tổng nhận được như sau :

$$rS = r\sum_{j=0}^{n} ar^j = \sum_{j=0}^{n} ar^{j+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} ar^k$$ (đẳng thức này nhận được bằng cách dịch chỉ số lấy tổng khi đặt $k = j + 1$)

$$= \sum_{k=0}^{n} ar^k + (ar^{n+1} - a) = S + (ar^{n+1} - a)$$

Từ các đẳng thức trên ta thấy rằng : $rS = S + (ar^{n+1} - a)$

Giải phương trình trên cho $S$, ta được :

$$S = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

Nếu $r = 1$, thì hiển nhiên tổng này bằng $(n + 1)a$.

■

**Ví dụ 9.** Tổng kép cũng thường gặp trong nhiều bài toán. Một ví dụ về tổng kép là :

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij$$

Để tính tổng kép này, trước hết hãy khai triển tổng trong rồi sau đó mới triển khai tính tổng ngoài :

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4} (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i$$
$$= 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

■

Chúng ta cũng có thể dùng ký hiệu lấy tổng để cộng tất cả các giá trị của một hàm hoặc các số hạng của một tập có chỉ số, ở đây chỉ số lấy tổng chạy qua tất cả các giá trị trong tập. Tức là, ta có thể viết :

$$\sum_{s \in S} f(s)$$

để biểu diễn tổng các giá trị $f(s)$ đối với mọi phần tử $s$ của $S$.

**Ví dụ 10**. Xác định giá trị của $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$ ?

*Giải* : Vì $\sum_{s \in \{0,2,4\}} s$ hiểu diễn tổng các giá trị của $s$ đối với mọi phần tử của tập $\{0, 2, 4\}$, từ đó suy ra

$$\sum_{s \in \{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

■

## BẢN SỐ (Tuỳ chọn)

Hãy nhớ lại rằng, trong Tiết 1.4, bản số của một tập hữu hạn được định nghĩa là số phần tử của tập đó. Ta có thể mở rộng khái niệm bản số cho tất cả các tập, hữu hạn cũng như vô hạn, hằng định nghĩa sau :

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Hai tập $A$ và $B$ có cùng *bản số* nếu và chỉ nếu có một hàm song ánh từ $A$ đến $B$.

Để thấy rõ định nghĩa này phù hợp với định nghĩa trước của bản số của các tập hữu hạn, ta lưu ý rằng luôn luôn có một hàm song ánh giữa hai tập hữu hạn có cùng $n$ phần tử, ở đây $n$ là một số nguyên không âm.

Chúng ta phân các tập vô hạn thành hai nhóm, nhóm có cùng bản số với tập hợp các số tự nhiên và nhóm có bản số khác.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Các tập hoặc hữu hạn hoặc có cùng bản số với tập hợp các số tự nhiên được gọi là tập *đếm được*. Các tập còn lại được gọi là *không đếm được*.

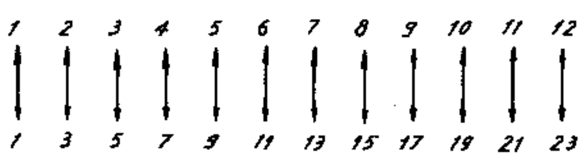
Dưới đây là ví dụ của các tập đếm được và không đếm được.

**Ví dụ 11.** Chứng tỏ rằng tập các số nguyên dương lẻ là đếm được.

*Giải :* Để chứng tỏ tập các số nguyên dương lẻ là đếm được, ta phải chỉ ra một hàm song ánh giữa tập này và tập các số tự nhiên. Hãy xét hàm : $f(n) = 2n - 1$ từ **N** đến tập các số nguyên dương lẻ.

Chúng ta sẽ chứng minh hàm $f$ là song ánh bằng cách chứng tỏ rằng nó là một hàm vừa đơn ánh vừa toàn ánh. Để chứng minh $f$ là đơn ánh, ta giả sử rằng $f(n) = f(m)$. Khi đó, $2n - 1 = 2m - 1$, suy ra $n = m$. Để thấy $f$ là toàn ánh, ta giả sử $t$ là một số nguyên dương lẻ, khi đó nó nhỏ hơn một số chẵn $2k$ nào đó, với $k$ là một số tự nhiên. Từ đó $t = 2k - 1 = f(k)$. Hàm song ánh trên được minh hoạ trên hình 1.

■




***Hình 1.*** Hàm song ánh giữa N và tập các số nguyên dương lẻ.

Một tập vô hạn là đếm được nếu và chỉ nếu có thể liệt kê được các phần tử của tập đó thành một dãy (với chỉ số là các số tự nhiên). Lý do là ở chỗ hàm song ánh $f$ từ tập các số tự nhiên đến tập $S$ có thể được biểu diễn qua các số hạng của dãy $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ở đây $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2), ..., a_n = f(n), ...$ Ví dụ, tập các số nguyên dương lẻ có thể được liệt kê thành dãy $a_1, a_2, ... a_n, ...$ với $a_n = 2n - 1$.

Bây giờ chúng ta sẽ cho ví dụ về một tập không đếm được.

**Ví dụ 12.** Chứng minh rằng tập các số thực là không đếm được.

Giải : Để chứng minh tập các số thực là không đếm được, ta giả sử rằng nó là đếm được và sẽ đi tới mâu thuẫn. Như vậy, khi đó tập con tất cả các số thực nằm trong khoảng 0 và 1 cũng sẽ là đếm được (vì tập con của một tập đếm được cũng là đếm được, xem Bài tập 20 ở cuối Tiết này). Với giả thiết đó, các số thực trong khoảng 0, 1 có thể được liệt kê theo một thứ tự nào đó, ví dụ $r_1$, $r_2$, $r_3$ ... Giả sử biểu diễn thập phân của các số đó là :

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,\ d_{11}\ d_{12}\ d_{13}\ d_{14} \quad \ldots \\ r_2 &= 0,\ d_{21}\ d_{22}\ d_{23}\ d_{24} \quad \ldots \\ r_3 &= 0,\ d_{31}\ d_{32}\ d_{33}\ d_{34} \quad \ldots \\ r_4 &= 0,\ d_{41}\ d_{42}\ d_{43}\ d_{44} \quad \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ở đây $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (Ví dụ, nếu $r_1 = 0,23794102...$, chúng ta có $d_{11} = 2$, $d_{12} = 3$, $d_{13} = 7$, v.v.). Sau đó, ta lập một số thực mới với biểu diễn thập phân $r = 0,\ d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ ...$, với các chữ số thập phân được xác định theo qui tắc sau :

$$d_i = \begin{cases} 4 \text{ nếu } d_{ii} \neq 4 \\ 5 \text{ nếu } d_{ii} = 4 \end{cases}$$

(Ví dụ , giả sử rằng $r_1 = 0,23794102\ ...$, $r_2 = 0,44590138\ ...$, $r_3 = 0,09118764\ ...$, $r_4 = 0,80553900\ ...$ v.v ... Khi đó ta có $r = 0,d_1d_2d_3d_4\ ... = 0,4544...$ ở đây $d_1 = 4$ vì $d_{11} \neq 4$ ; $d_2 = 5$ vì $d_{22} = 4$ ; $d_3 = 4$ *vì* $d_{33} \neq 4$ ; $d_4 = 4$ vì $d_{44} \neq 4$ v.v...).

Mỗi một số thực đều có phần thập phân xác định duy nhất. Khi đó số thực $r$ sẽ không bằng bất cứ số nào trong dãy $r_1$, $r_2$, $r_3$ ... vì phần thập phân của $r$ khác với phần thập phân của $r_i$ ở vị trí thứ $i$ bên phải dấu thập phân, đối với mọi $i$.

Vì có một số thực $r$ nằm trong khoảng giữa 0 và 1 không có mặt trong bảng liệt kê, nên giả thiết rằng tập hợp tất cả các số thực giữa 0 và 1 có thể liệt kê được là sai. Do đó, tập hợp các số thực nằm giữa 0 và 1 là không thể liệt kê được, do đó tập các số thực nằm trong khoảng giữa 0 và 1 là không đếm được. Bất kỳ tập nào có tập con không đếm được cũng sẽ là không đếm được (xem Bài tập 23 ở cuối tiết này). Từ đó suy ra các số thực là không đếm được.

## BÀI TẬP

**1.** Tìm các số hạng sau của dãy $\{a_n\}$, ở đây $a_n = 2.(-3)^n + 5^n$

a) $a_0$ b) $a_1$

c) $a_4$ d) $a_5$

**2.** Xác định số hạng $a_8$ của dãy $\{a_n\}$ nếu $a_n$ bằng :

a) $2^{n-1}$ b) $7$

c) $1 + (-1)^n$ d) $-(-2)^n$

**3.** Xác định các số hạng $a_0$, $a_1$, $a_2$ và $a_3$ của dãy $\{a_n\}$ với $a_n$ bằng

a) $2^n + 1$ b) $(n + 1)^{n+1}$

c) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ d) $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil$

**4.** Xác định $a_0$, $a_1$, $a_2$ và $a_3$ của dãy $\{a_n\}$ với $a_n$ bằng :

a) $(-2)^n$ b) $3$

c) $7 + 4^n$ d) $2^n + (-2)^n$

**5.** Tính các tổng sau :

a) $\sum_{k=1}^{5} (k + 1)$ b) $\sum_{j=0}^{4} (-2)^j$

c) $\sum_{i=1}^{10} 3$ d) $\sum_{j=0}^{8} (2^{j+1} - 2^j)$

**6.** Tính giá trị của các tổng sau, ở đây $S = \{1, 3, 5, 7\}$

a) $\sum_{j \in S} j$ b) $\sum_{j \in S} j^2$

c) $\sum_{j \in S} \frac{1}{j}$ d) $\sum_{j \in S} 1$

**7.** Tính tổng của các cấp số nhân sau :

a) $\sum_{j=0}^{8} 3.2^j$ b) $\sum_{j=1}^{8} 2^j$

c) $\sum_{j=2}^{8} (-3)^j$ d) $\sum_{j=0}^{8} 2.(-3)^j$

**8.** Tìm giá trị các tổng sau :

a) $\sum_{j=0}^{8} (1 + (-1)^j)$ b) $\sum_{j=0}^{8} (3^j - 2^j)$

c) $\sum_{j=0}^{8} (2.3^j + 3.2^j)$ d) $\sum_{j=0}^{8} (2^{j+1} - 2^j)$

**9.** Tính các tổng kép sau :

a) $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (i + j)$ b) $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} (2i + 3j)$

c) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{2} i$ d) $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=1}^{3} ij$

**10.** Tính các tổng kép sau :

a) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} (i - j)$ b) $\sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{2} (3i + 2j)$

c) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=0}^{2} j$ d) $\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{3} i^2 j^3$

**11.** Chứng minh rằng $\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_o$, ở đây $a_o$, $a_1$, ... $a_n$ là dãy các số thực. Loại tổng này được gọi là **viễn vọng.**

**12.** Dùng hằng đẳng thức $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ và Bài tập 11, tính tổng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

**13.** Lấy tổng hai vế hằng đẳng thức $k^2 - (k - 1)^2 = 2k - 1$ từ $k = 1$ đến $k = n$ và dùng Bài tập 11 để tìm :

a) công thức tính $\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$ (tổng $n$ số lẻ đầu tiên)

b) công thức tính $\sum_{k=1}^{n} k$ .

**14*.** Dùng kỹ thuật cho trong Bài tập 11, cùng với kết quả Bài tập 13b, tìm công thức tính $\sum_{k=1}^{n} k^2$ .

*Cũng có một ký hiệu đặc biệt cho tích. Tích $a_m a_{m+1} \dots a_n$ được ký hiệu bởi :*

$$\prod_{j=m}^{n} a_j$$

**15.** Xác định giá trị các tích sau :

a) $\prod_{i=0}^{10} i$ b) $\prod_{i=5}^{8} i$

c) $\prod_{i=1}^{100} (-1)^i$ d) $\prod_{i=1}^{10} 2$

*Giá trị của* **hàm giai thừa** *tại số nguyên dương n, được ký hiệu là n!, là tích của n số nguyên dương liên tiếp từ 1 đến n. Ta cũng qui ước rằng 0! = 1.*

**16.** Dùng ký hiệu tích để biểu diễn $n!$

**17.** Tính $\sum_{j=0}^{4} j!$

**18.** Tính $\prod_{i=0}^{4} j\,!$

**19.** Xác định xem các tập cho sau đây là đếm được hay không đếm được. Đối với các tập hợp đếm được hãy chỉ ra một hàm song ánh từ tập các số tự nhiên đến tập đó.

a) tập các số nguyên âm.

b) tập các số chẵn.

c) tập các số thực nằm giữa 0 và 1/2.

d) tập các số nguyên là bội của 7.

**20*.** Xác định xem các tập sau là đếm được hay không đếm được. Trong trường hợp đếm được, hãy chỉ ra một hàm song ánh từ tập các số tự nhiên đến tập đó.

a) tập các số nguyên không chia hết cho 3.

b) tập các số nguyên chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 7.

c) tập các số thực trong biểu diễn thập phân chỉ gồm các số 1.

d) tập các số thực trong biểu diễn thập phân chỉ gồm các số 1 hoặc số 9.

**21.** Nếu $A$ là tập không đếm được và $B$ là tập đếm được, $A - B$ có nhất thiết phải là không đếm được không?

**22.** Chứng minh rằng tập con của một tập đếm được cũng là đếm được.

**23.** Chứng minh rằng nếu $A$ là tập không đếm được và $A \subseteq B$ thì $B$ cũng là tập không đếm được.

**24*.** Chứng minh rằng hợp của hai tập đếm được cũng là đếm được.

**25**.** Chứng minh rằng hợp của một số đếm được các tập đếm được cũng là đếm được.

**26*.** Một số thực được gọi là **hữu tỉ** nếu nó có thể được viết dưới dạng thương số của hai số nguyên. Chứng minh rằng tập các số hữu tỷ nằm giữa 0 và 1 là đếm được. (Gợi ý : Liệt kê các phần tử của tập hợp này theo thứ tự tăng của $p + q$, ở đây $p$ là tử số và $q$ là mẫu số của phân số $p/q$ ở dạng tối giản)

**27*.** Chứng tỏ rằng tập tất cả các xâu bit là đếm được.

**28*.** Chứng tỏ rằng tập hợp các số thực là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên, là đếm được.

**29*.** Chứng tỏ rằng tập hợp tất cả các chương trình máy tính trong một ngôn ngữ lập trình đặc biệt nào đó là đếm được. (Gợi ý : Một chương trình được viết trong một ngôn ngữ lập trình nào đó có thể được xem như một xâu ký tự lấy từ một bảng chữ cái hữu hạn).

**30*.** Chứng minh rằng tập các hàm từ các số nguyên dương tới tập {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} là không đếm được. (Gợi ý : bước đầu tiên là lập một hàm song ánh giữa tập các số thực nằm giữa 0 và 1 và một tập con các hàm đó, ví dụ bằng cách gán cho số thực $0, d_1d_2 d_3 \ldots d_n \ldots$ hàm $f$ với $f(n) = d_n$).

**31*.** Ta nói rằng một hàm là **tính được** nếu có một chương trình máy tính cho phép tìm được các giá trị của hàm đó. Dùng Bài tập 29 và 30 chứng minh rằng có các hàm là không tính được.

# 1.8. ĐỘ TĂNG CỦA HÀM

## MỞ ĐẦU

Giả sử rằng một chương trình máy tính sắp thứ tự lại một bảng liệt kê những số nguyên trong đó các số nguyên được xếp theo thứ tự tăng dần. Một vấn đề quan trọng liên quan đến tính thực tiễn của chương trình này là máy tính phải mất bao lâu mới giải xong bài toán này. Sự phân tích cho thấy rằng thời gian được dùng để sắp lại một bảng liệt kê những số nguyên ( những số này nhỏ hơn một cỡ nào đó đã được chỉ rõ) là nhỏ hơn $f(n)$ micro giây, với $f(n) = 100n\log n + 25n + 9$. Để phân tích tính thực tiễn của chương trình này, chúng ta cần phải hiểu hàm này tăng nhanh như thế nào khi $n$ tăng. Trong tiết này chúng ta sẽ ôn lại một số phương pháp quan trọng được dùng để đánh giá độ tăng của các hàm số. Chúng ta sẽ đưa vào một khái niệm được dùng hết sức rộng rãi trong việc phân tích độ tăng của các hàm, đó là khái niệm $O$ (tiếng Anh là big $O$ – nghĩa là chữ $O$ lớn). Chúng ta cũng sẽ đưa ra một số kết quả tiện ích về độ tăng của các hàm khi dùng khái niệm này.

## KHÁI NIỆM O (big-O)

Độ tăng của các hàm thường được mô tả bằng cách dùng một khái niệm đặc biệt được định nghĩa như sau :

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Cho $f$ và $g$ là hai hàm từ tập các số nguyên hoặc số thực đến tập các số thực. Ta nói $f(x)$ là $O(g(x))$ nếu tồn tại hai hằng số $C$ và $k$ sao cho :

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

với mọi $x > k$.

*Chú ý* : Để chứng minh $f(x)$ là $O(g(x))$, ta chỉ cần tìm *một* cặp hằng số $C$ và $k$ sao cho $|f(x)| \leq C|g(x)|$ nếu $x > k$. Tuy nhiên một cặp $C$ và

$k$ thoả mãn điều kiện đó *không bao giờ* là duy nhất. Hơn thế nữa, nếu đã có một cặp như vậy tồn tại, thì sẽ có *vô số* các cặp như thế. Một cách đơn giản để thấy điều này là lưu ý rằng nếu $C$, $k$ là một cặp như vậy thì cặp $C'$, $k'$ với $C < C'$ và $k < k'$ cũng sẽ thoả mãn định nghĩa trên, vì $|f(x)| \leq C|g(x)| \leq C'|g(x)|$ với mọi $x > k' > k$.

**Ví dụ 1.** Chứng minh rằng $f(x) = x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$

***Giải*** : Vì $\quad 0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$

với mọi $x > 1$, từ đó suy ra $f(x)$ là $O(x^2)$.

(Để áp dụng định nghĩa 1 ở trên, ở đây ta lấy $C = 4$ và $k = 1$. Ta cũng không cần phải sử dụng ở đây dấu giá trị tuyệt đối, vì tất cả các hàm trong các đẳng thức này đều là dương khi $x$ dương).

Một cách giải khác là lưu ý rằng khi $x > 2$, suy ra $2 \leq x^2$. Do đó, nếu $x > 2$, ta có :

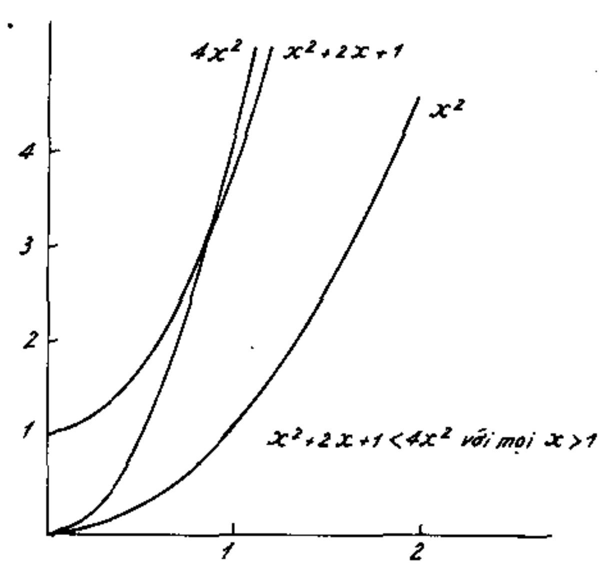
$$0 \leq x^2 + 2x + 1 \leq x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$$

(Chúng ta áp dụng định nghĩa ở đây với $C = 3$ và $k = 2$).

Cần thấy rằng trong mối quan hệ $f(x)$ là $O(x^2)$, $x^2$ có thể thay bằng một hàm có giá trị lớn hơn $x^2$, ví dụ $f(x)$ là $O(x^3)$, $f(x)$ là $O(x^2 + 2x + 7)$, v.v... Mặt khác, ta cũng có $x^2$ là $O(x^2 + 2x + 1)$, vì $x^2 < x^2 + 2x + 1$ với mọi $x \geq 1$.

Hình 1 minh hoạ

$x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$. ■




***Hình 1.*** Hàm $x^2 + 2x + 1$ là $O(x^2)$

Chú ý rằng trong Ví dụ 1 ta có hai hàm, $f(x) = x^2 + 2x + 1$ và $g(x) = x^2$ sao cho $f(x)$ là $O(g(x))$ và

$g(x)$ là $O(f(x))$ (điều này suy ra từ bất đẳng thức $x^2 \leqslant x^2 + 2x + 1$, bất đẳng thức này đúng với mọi $x$ không âm). Ta nói hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ thoả mãn cả hai quan hệ big – $O$ nói ở trên là có *cùng bậc* (xem các Bài tập 22 – 25).

Khái niệm big–$O$ đã được dùng trong toán học đã gần một thế kỷ nay. Trong tin học, nó được sử dụng rộng rãi để phân tích các thuật toán, như chúng ta sẽ thấy ở Chương 2. Nhà toán học người Đức Paul Bachmann là người đầu tiên đưa ra khái niệm big–$O$ vào năm 1892 trong một cuốn sách nổi tiếng về lý thuyết số. Ký hiệu big–$O$ đôi khi còn gọi là **ký hiệu Landau**, theo tên của nhà toán học Đức Edmund Landau, người đã dùng ký hiệu này trong suốt các công trình của mình.

Khi $f(x)$ là $O(g(x))$ và $h(x)$ là hàm có giá trị tuyệt đối lớn hơn $g(x)$ đối với các giá trị đủ lớn của $x$, ta suy ra rằng $f(x)$ là $O(h(x))$. Nói cách khác, hàm $g(x)$ trong quan hệ $f(x)$ là $O(g(x))$ có thể được thay bằng một hàm có giá trị tuyệt đối lớn hơn. Để thấy điều đó, chú ý rằng, nếu

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)| \qquad \text{với mọi } x > k$$

và nếu

$$|h(x)| > |g(x)| \qquad \text{với mọi } x > k, \text{ thì :}$$

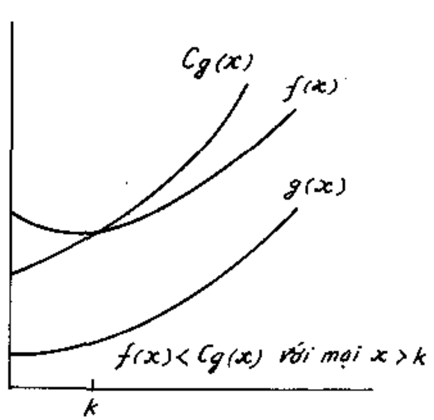
$$|f(x)| \leqslant C|h(x)| \qquad \text{với mọi } x > k.$$

Từ đó, $f(x)$ là $O(h(x))$.

Khi dùng khái niệm big–$O$, hàm $g$ trong quan hệ $f(x)$ là $O(g(x))$ được chọn là nhỏ nhất có thể được (đôi khi lấy từ tập các hàm sơ cấp, như các hàm có dạng $x^n$ với $n$ là một số nguyên dương).

Trong những thảo luận dưới đây, ta sẽ đề cập chủ yếu tới các hàm chỉ nhận giá trị dương, nên ta sẽ bỏ các dấu giá trị tuyệt đối trong các biểu thức liên quan việc đánh giá big-$O$ của các hàm. Hình 2 minh hoạ mối quan hệ $f(x)$ là $O(g(x))$.

Ví dụ sau đây minh hoạ khái niệm big-$O$ được dùng để đánh giá độ tăng của các hàm như thế nào.




***Hình 2.*** Hàm $f(x)$ là $O(g(x))$

**Ví dụ 2.** Chứng minh rằng $7x^2$ là $O(x^3)$.

*Giải* : Bất đẳng thức $7x^2 < x^3$ đúng với mọi $x > 7$. (Để thấy điều này chỉ cần chia hai vế bất đẳng thức đó cho $x^2$). Do đó, $7x^2$ là $O(x^3)$, khi lấy $C = 1$ và $k = 7$ trong định nghĩa của khái niệm big-$O$.

■

**Ví dụ 3.** Ví dụ 2 chứng tỏ rằng $7x^2$ là $O(x^3)$. Liệu có thể $x^3$ là $O(7x^2)$ không?

*Giải :* Để xác định xem $x^3$ có là $O(7x^2)$ không, cần phải xem có tồn tại các hằng số $C$ và $k$ sao cho $x^3 \leq C(7x^2)$ với mọi $x > k$ hay không. Bất đẳng thức trên tương đương với bất đẳng thức $x \leq 7C$ (điều này nhận được khi chia 2 vế của bất đẳng thức cho $x^2$). Không thể tồn tại một hằng số $C$ nào như vậy vì $x$ có thể lớn tuỳ ý. Vậy $x^3$ không là $O(7x^2)$.

Các đa thức thường được dùng để đánh giá độ tăng của các hàm. Thay vì phải phân tích độ tăng của các đa thức mỗi khi cần thiết, ta muốn có một kết quả có thể dùng được ngay để đánh giá độ tăng của một đa thức. Định lý sau cho phép làm được điều đó.

**Định lý 1.** Cho $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, ở đây $a_0$, $a_1, \ldots, a_n$ là các số thực. Khi đó $f(x)$ là $O(x^n)$.

***Chứng minh*** : Dùng bất đẳng thức tam giác, nếu $x > 1$, ta có

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0| \\
&\leq |a_n|x^n + |a_{n-1}|x^{n-1} + \ldots + |a_1|x + |a_0| \\
&= x^n\left(|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x} + \ldots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n}\right) \\
&\leq x^n(|a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|)
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng

$$|f(x)| \leq Cx^n$$

ở đây $C = |a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|$, với mọi $x > 1$. Từ đó suy ra $f(x)$ là $O(x^n)$.

Dưới đây là một số ví dụ về các hàm có miền xác định là tập hợp các số nguyên dương.

là một số ví dụ về các hàm có miền xác định là tập hợp các số nguyên dương.

**Ví dụ 4.** Dùng khái niệm hig-$O$ dánh giá tổng $n$ số nguyên dương đầu tiên.

*Giải :* Vì mỗi số nguyên trong tổng $n$ số nguyên dương đầu tiên đều không vượt quá $n$, suy ra :

$$1 + 2 + ... + n \leq n + n + ... + n = n^2$$

Từ bất đẳng thức này suy ra 1 + 2 + ... + n là $O(n^2)$, khi lấy $C = 1$, $k = 1$ trong định nghĩa của khái niệm big-$O$ (Chú ý rằng hàm trong quan hệ big − $O$ ở đây có miền xác định là tập các số nguyên dương).

■

Những ví dụ sau đây liên quan đến hàm giai thừa và hàm logarit. Việc đánh giá hig-$O$ của các hàm này có vai trò quan trọng trong việc phân tích số các hước được dùng trong các thủ tục sắp xếp (sorting).

**Ví dụ 5**. Cho ước lượng hig-$O$ của hàm giai thừa và hàm logarit của hàm giai thừa.

Chú ý hàm giai thừa tăng rất nhanh, ví dụ :

$$1! = 1 \ , \ 2! = 1.2 = 2 \ , \ 3! = 1.2.3 = 6$$

$$4! = 1.2.3.4 = 24 \ , \text{ nhưng } 20! = 2.432.902.008.176.640.000)$$

*Giải :* Vì mỗi số hạng trong tích của $n$ ! đều không vượt quá $n$, ta có :

$$n! = 1.2.3...\ n \leq n.n.n\ ...\ n = n^n$$

Bất đẳng thức này chứng tỏ $n!$ là $O(n^n)$. Lấy logarit hai vế bất đẳng thức vừa tìm được ở trên, ta nhận được :

$$\log n! \leq \log n^n = n\log n$$

Suy ra $\log n!$ là $O(n\log n)$.

■

**Ví dụ 6.** Trong Tiết 3.2, ta sẽ chứng minh rằng : $n < 2^n$

với mọi $n$ nguyên dương. Dùng bất đẳng thức đó chúng ta có thể kết luận rằng $n$ là $O(2^n)$ (lấy $k = C = 1$ trong định nghĩa của khái niệm hig-$O$). Vì hàm logarit (cơ số 2) đồng biến, nên lấy logarit hai vế bất đẳng thức trên, ta có : $\log n < n$. Từ đó suy ra : $\log n$ là $O(n)$ (lại lấy $C = k = 1$ trong định nghĩa của big-$O$).

Nếu chúng ta dùng logarit cơ số $b$, với $b$ khác 2, ta cũng có : $\log_b n$ là $O(n)$, vì :

$$\log_b n = \frac{\log n}{\log b} < \frac{n}{\log b}$$

với mọi $n$ nguyên dương.

## ĐỘ TĂNG CỦA TỔ HỢP CÁC HÀM

Nhiều thuật toán được tạo bởi hai hoặc nhiều thủ tục con tách rời nhau. Số các bước mà máy tính sử dụng để giải một bài toán với đầu vào (input) có qui mô xác định theo các thuật toán đó là tổng số bước cần thiết, vì vậy cần phải tìm những đánh giá big-$O$ đối với số bước mà mỗi thủ tục con đã sử dụng, rồi sau đó tổ hợp các đánh giá đó lại.

Những đánh giá big-$O$ đối với tổ hợp của các hàm có thể nhận được nếu ta lưu ý khi các đánh giá big-$O$ khác nhau được tổ hợp với nhau. Đặc biệt, cần phải đánh giá độ tăng của tổng và tích của các hàm. Cụ thể, ta có thể nói gì nếu các đánh giá big-$O$ của mỗi hàm đều đã biết? Giả sử $f_1(x)$ là $O(g(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$. Theo định nghĩa của khái niệm big-$O$, khi đó tồn tại các hằng số $C_1$, $C_2$, $k_1$ và $k_2$ sao cho,

$$|f_1(x)| \leq C_1|g_1(x)| \quad \text{với mọi } x > k_1$$

và

$$|f_2(x)| \leq C_2|g_2(x)| \quad \text{với mọi } x > k_2$$

Để đánh giá tổng của $f_1(x)$ và $f_2(x)$, chú ý rằng :

$$|(f_1 + f_2)(x)| = |f_1(x) + f_2(x)| \leq |f_1(x)| + |f_2(x)|$$

(ở đây chúng ta đã dùng bất đẳng thức tam giác $|a + b| \leq |a| + |b|$).

Khi $x$ lớn hơn cả $k_1$ lẫn $k_2$, ta suy ra các bất đẳng thức cho tổng của $|f_1(x)|$ và $|f_2(x)|$ như sau :

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| \leq C_1|g_1(x)| + C_2|(g_2(x)|$$

$$\leq C_1|g(x)| + C_2|g(x)| = (C_1 + C_2)|g(x)| = C|g(x)|$$

ở đây $C = C_1 + C_2$ và $g(x) = \max(|g_1(x)|, |g_2(x)|\}$, $\max(a, b)$ ký hiệu số lớn nhất trong hai số đó).

Bất đẳng thức trên chứng tỏ rằng $|(f_1 + f_2)(x)| \leq C|g(x)|$ với mọi $x > k$ ở đây $k = \max(k_1, k_2)$. Kết quả tiện ích này được phát biểu thành định lý sau :

**Định lý 2.** Cho $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$. Khi đó $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(\max(g_1(x),\ g_2(x)))$.

Thường chúng ta có những đánh giá big-$O$ của $f_1$ và $f_2$ qua một hàm $g(x)$. Trong tình hình đó, Định lý 2 có thể được dùng để chứng minh rằng $(f_1 + f_2)(x)$ cũng là $O(g(x))$ vì max $(g_1(x),\ g_2(x)) = g(x)$. Kết quả trên cho hệ quả sau :

**Hệ quả 1.** Cho $f_1(x)$ và $f_2(x)$, cả hai đều là $O(g(x))$. Khi đó $(f_1 + f_2)(x)$ là $O(g(x))$.

Theo cách tương tự ta có thể dẫn ra những đánh giá big-$O$ đối với tích của hai hàm $f_1$ và $f_2$. Khi $x$ lớn hơn max $(k_1,\ k_2)$, suy ra :

$$\begin{aligned} |(f_1f_2)(x)| &= |f_1(x)||f_2(x)| \leq C_1|g_1(x)|C_2|g_2(x)| \\ &\leq C_1C_2|(g_1g_2)(x)| \leq C|(g_1g_2)(x)| \end{aligned}$$

Ở đây $C = C_1C_2$. Từ bất đẳng thức trên, suy ra $f_1(x)f_2(x)$ là $O(g_1g_2)$, vì tồn tại các hằng số $C$ và $k$, cụ thể là $C = C_1C_2$ và $k = \max(k_1,\ k_2)$ sao cho $|(f_1f_2)(x)| \leq C|g_1(x)g_2(x)|$ với mọi $x > k$. Kết quả này được phát biểu thành định lý sau :

**Định lý 3.** Cho $f_1(x)$ là $O(g_1(x))$ và $f_2(x)$ là $O(g_2(x))$. Khi đó $(f_1f_2)(x)$ là $O(g_1(x)\ g_2(x))$.

Mục đích trong việc dùng khái niệm hig-$O$ để đánh giá các hàm là chọn hàm $g$ tăng tương đối chậm với $f(x)$ là $O(g(x))$. Ví dụ sau minh hoạ ta có thể dùng các Định lý 2 và 3 để làm điều đó như thế nào. Loại phân tích được cho trong các ví dụ này thường được dùng để phân tích thời gian giải các bài toán bằng các chương trình máy tính.

**Ví dụ 7.** Cho một đánh giá big-$O$ đối với hàm

$f(x) = 3n\log(n!) + (n^2 + 3)\log n$ với $n$ là số nguyên dương.

*Giải :* Trước hết, ta đánh giá tích $3n$ log $(n\ !)$. Từ Ví dụ 5 ta biết rằng log $(n\ !)$ là $O(n\log n)$. Dùng đánh giá này và lưu ý rằng $3n$ là $O(n)$, Định lý 3 sẽ cho ta $3n\log(n!)$ là $O(n^2\log n)$.

Tiếp theo, ta đánh giá tích $(n^2 + 3)\log n$. Vì $n^2 + 3 < 2n^2$ khi n > 2, suy ra $(n^2 + 3)$ là $O(n^2)$. Do đó, từ Định lý 3 suy ra : $(n^2 + 3)\log n$ là $O(n^2\log n)$. Dùng Định lý 2 kết hợp với hai đánh giá big-$O$ vừa tìm được ở trên, ta được :

$$f(n) = 3n\log(n!) + n^2\log n \text{ là } O(n^2\log n)$$

■

**Ví dụ 8.** Cho một đánh giá big–$O$ đối với

$$f(x) = (x + 1)\log(x^2 + 1) + 3x^2.$$

*Giải :* Trước hết, ta hãy đánh giá tích $(x + 1)\log(x^2 + 1)$.

Chú ý rằng $(x + 1)$ là $O(x)$. Hơn nữa, $x^2 + 1 \leq 2x^2$ khi $x > 1$. Từ đó,

$$\log(x^2 + 1) \leq \log(2x^2) = \log 2 + \log x^2$$

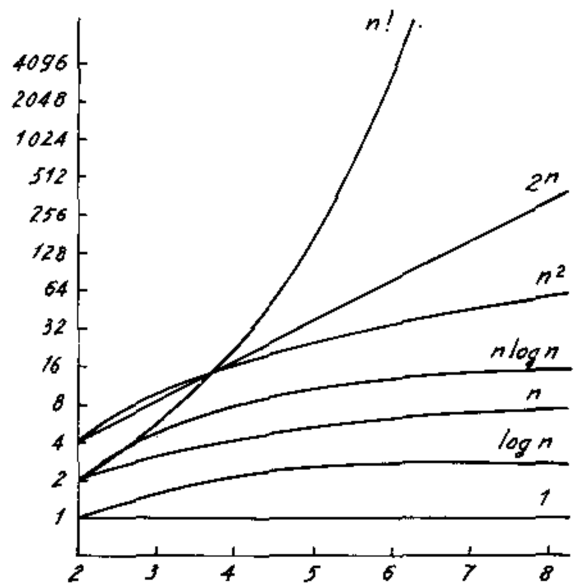
$$= \log 2 + 2\log x \leq 3\log x.$$

nếu $x > 2$. Điều này chứng tỏ rằng : $\log(x^2 + 1)$ là $O(\log x)$.

Từ Định lý 3 suy ra rằng $(x + 1)\log(x^2 + 1)$ là $O(x\log x)$. Vì $3x^2$ là $O(x^2)$, Định lý 2 cho ta $f(x)$ là $O(\max(x\log x, x^2))$. Vì $x\log x \leq x^2$ với mọi $x > 1$, suy ra $f(x)$ là $O(x^2)$.

Như đã nói ở trên, khái niệm big–$O$ được dùng để đánh giá số các công đoạn cần thiết để giải một bài toán hằng một thủ tục hoặc một thuật toán xác định nào đó. Các hàm thường được dùng trong các đánh giá này là : $1$, $\log n$, $n$, $n\log n$, $n^2$, $2^n$ và $n!$.

Dùng giải tích ta có thể chứng minh rằng mỗi hàm trong bảng liệt kê trên đều nhỏ hơn hàm đứng tiếp sau nó. Nhỏ hơn ở đây hiểu theo nghĩa tỷ số của một hàm và hàm đứng sau nó tiến tới 0 khi $x \to \infty$. Hình 3 cho đồ thị của các hàm kể ở trên. (Chú ý ở đây thang đối với giá trị của các hàm tăng gấp đôi đối với mỗi vạch kế tiếp trên đồ thị).




*Hình 3.* Biểu diễn độ tăng của các hàm thường được dùng trong đánh giá big–$O$.

## BÀI TẬP

1. Các hàm sau có là $O(x)$ không?

   a) $f(x) = 10$ b) $f(x) = 3x + 7$

   c) $f(x) = x^2 + x + 1$ d) $f(x) = 5\log x$

   e) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ f) $f(x) = \lceil \frac{x}{2} \rceil$

2. Các hàm sau có là $O(x^2)$ không?

   a) $f(x) = 17x + 11$ b) $f(x) = x^2 + 1000$

   c) $f(x) = x\log x$ d) $f(x) = \frac{x^4}{2}$

   e) $f(x) = 2^x$ f) $f(x) = \lfloor x \rfloor \lceil x \rceil$

3. Dùng định nghĩa, chứng minh rằng $x^4 + 9x^3 + 4x + 7$ là $O(x^4)$

4. Dùng định nghĩa chứng minh rằng $2^x + 17$ là $O(3^x)$.

5. Chứng minh rằng $\frac{x^2 + 1}{x + 1}$ là $O(x)$

6. Chứng minh rằng $\frac{x^3 + 2x}{2x + 1}$ là $O(x^2)$

7. Tìm một số nguyên $n$ nhỏ nhất sao cho $f(x)$ là $O(x^n)$ đối với các hàm $f(x)$ sau :

   a) $f(x) = 2x^3 + x^2\log x$ b) $f(x) = 2x^3 + (\log x)^4$

   c) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^3 + 1}$ d) $f(x) = \frac{x^5 + 5\log x}{x^4 + 1}$

8. Cũng hỏi như Bài tập 7 cho các hàm $f(x)$ sau :

   a) $f(x) = 2x^2 + x^3\log x$ b) $f(x) = 3x^5 + (\log x)^4$

   c) $f(x) = \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4 + 1}$ d) $f(x) = \frac{x^3 + 5\log x}{x^4 + 1}$

9. Chứng minh $x^2 + 4x + 17$ là $O(x^3)$, nhưng $x^3$ không là $O(x^2 + 4x + 17)$.

10. Chứng minh $x^3$ là $O(x^4)$, nhưng $x^4$ không là $O(x^3)$.

**11.** Chứng minh rằng $3x^4 + 1$ là $O(x^4/2)$ và $x^4/2$ là $O(3x^4 + 1)$.

**12.** Chứng minh rằng $x\log x$ là $O(x^2)$, nhưng $x^2$ không là $O(x\log x)$

**13.** Chứng minh rằng $2^n$ là $O(3^n)$, nhưng $3^n$ không là $O(2^n)$.

**14.** Với các hàm $g(x)$ cho dưới đây, $x^3$ có là $O(g(x))$ không?

a) $g(x) = x^2$ b) $g(x) = x^3$

c) $g(x) = x^2 + x^3$ d) $g(x) = x^2 + x^4$

e) $g(x) = 3^x$ f) $g(x) = \frac{x^3}{2}$

**15.** Giải thích ý nghĩa của điều là : $f(x)$ là $O(1)$.

**16.** Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(x)$ thì $f(x)$ là $O(x^2)$.

17. Cho $f(x)$, $g(x)$ và $h(x)$ là các hàm sao cho $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(h(x))$. Chứng minh rằng $f(x)$ là $O(h(x))$.

18. Cho $k$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $1^k + 2^k + ... + n^k$ là $O(n^{k+1})$.

**19.** Hãy cho một đánh giá big–$O$ tốt nhất có thể được đối với các hàm sau :

a) $(n^2 + 8)(n + 1)$ b) $(n\log n + n^2)(n^3 + 2)$

c) $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2 + 1))$.

**20.** Cho một đánh giá big–$O$ đối với các hàm cho dưới đây. Đối với các hàm $g(x)$ trong đánh giá $f(x)$ là $O(g(x))$. Hãy chọn các hàm đơn giản có bậc thấp nhất.

a) $(n^3 + n^2\log n)(\log n + 1) + (17\log n + 19)(n^3 + 2)$

h) $(2^n + n^2)(n^3 + 3^n)$

c) $(n^n + n\,2^n + 5^n)(n! + 5^n)$.

**21.** Cho một đánh giá big–$O$ đối với các hàm cho dưới đây. Đối với hàm $g(x)$ trong đánh giá $f(x)$ là $O(g(x))$ hãy chọn hàm đơn giản có bậc thấp nhất.

a) $n\log(n^2 + 1) + n^2\log n$

b) $(n\log n + 1)^2 + (\log n + 1)(n^2 + 1)$

c) $n^{2^n} + n^{n^2}$.

*Cho f(x) và g(x) là các hàm từ tập các số thực hoặc tập các số nguyên dương đến tập các số thực. Ta viết f(x) là* $\Theta(g(x))$ *khi tồn tại các số thực dương* $C_1$ *và* $C_2$ *và một số nguyên dương k sao cho :*

$$C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$$

*với mọi* $x > k$.

**22.** a) Chứng minh rằng : $3x + 7$ là $\theta(\xi)$

b) Chứng minh rằng : $2x^2 + x - 7$ là $\theta(x^2)$

c) Chứng minh rằng : $\lfloor x + 1/2 \rfloor$ là $\theta(x)$

d) Chứng minh rằng : $\log(x^2 + 1)$ là $\theta(\log_2 x)$

e) Chứng minh rằng : $\log_{10}x$ là $\theta(\log_2 x)$

**23.** Chứng minh rằng $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ nếu và chỉ nếu $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(f(x))$.

**24.** a) Chứng minh rằng $3x^2 + x + 1$ là $\theta(3x^2)$

b) Biểu diễn bằng hình vẽ mối quan hệ ở câu a), bằng cách dựng đồ thị của các hàm $3x^2 + x + 1$, $C_1.3x^2$ và $C_2.3x^2$ ; chỉ vị trí của $k$ trên trục $x$ với $C_1$, $C_2$ và $k$ đã tìm được ở câu *a)*.

**25.** Biểu diễn mối quan hệ $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ bằng hình vẽ. Cho đồ thị của các hàm $f(x)$, $C_1|g(x)|$ và $C_2|g(x)|$ cũng như hằng số $k$ trên trục $x$.

**26.** Cho một đánh giá big–$O$ đối với tích $n$ số nguyên dương lẻ đầu tiên.

**27.** Chứng minh rằng nếu $f$ và $g$ là các hàm có giá trị thực sao cho $f(x)$ là $O(g(x))$, thì $f^k(x)$ là $O(g^k(x))$.
(Chú ý rằng $f^k(x) = f(x)^k$)

**28.** Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là $O(\log_b x)$ với $b > 1$ thì $f(x)$ là $O(\log_a x)$ với $a > 1$.

**29.** Cho $f(x)$ là $O(g(x))$ với $f$ và $g$ là các hàm đơn điệu tăng và không giới nội. Chứng minh rằng $|f(x)|$ là $O(\log|g(x)|)$.

**30.** Cho $f(x)$ là $O(g(x))$. Từ đó có thể suy ra $2^{f(x)}$ là $O(2^{g(x)})$ không?

*Các bài tập sau liên quan đến một loại khái niệm tiệm cận khác, được gọi là khái niệm* **little–o** (chữ o nhỏ). *Vì khái niệm little–o dựa trên khái niệm giới hạn, nên để giải các bài tập này cần có kiến thức về giải tích. Ta nói f(x) là o(g(x)), khi :*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

**31.** Chứng minh rằng

a) $x^2$ là $o(x^3)$ b) $x\log x$ là $o(x^2)$

c) $x^2$ là $o(2^x)$ d) $x^2 + x + 1$ không là $o(x^2)$

**32.** a) Chứng minh rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm sao cho $f(x)$ là $o(g(x))$ và $c$ là một hằng số, thì $cf(x)$ là $o(g(x))$.

b) Chứng minh rằng nếu $f_1(x)$, $f_2(x)$ và $g(x)$ là các hàm sao cho $f_1(x)$ là $o(g(x))$ và $f_2(x)$ là $o(g(x))$, thì $(f_1 + f_2)(x)$ là $o(g(x))$, với $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.

**33.** Biểu diễn trên hình vẽ quan hệ $x\log x$ là $o(x^2)$ bằng cách vẽ đồ thị các hàm $x\log x$, $x^2$ và $x\log x/x^2$. Hãy giải thích xem bằng cách nào hình vẽ đó cho thấy $x\log x$ là $o(x^2)$.

**34.** Biểu diễn mối quan hệ $f(x)$ là $o(g(x))$ bằng hình vẽ. Vẽ phác đồ thị của các hàm $f(x)$, $g(x)$ và $f(x)/g(x)$.

**35*.** Cho $f(x)$ là $o(g(x))$. Từ đây có suy ra $2^{f(x)}$ là $o(x^{g(x)})$ không?

**36*.** Cho $f(x)$ là $o(g(x))$, liệu từ đó có suy ta $\log|f(x)|$ là $o(\log|g(x)|)$ không?

**37.** Hai câu của Bài tập này mô tả mối quan hệ giữa khái niệm big−$O$ và little−$o$.

a) Chứng minh rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm sao cho $f(x)$ là $o(g(x))$, thì $f(x)$ là $O(g(x))$.

b) Chứng tỏ rằng nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm sao cho $f(x)$ là $O(g(x))$, thì không nhất thiết suy ra $f(x)$ là $O(g(x))$.

**38.** Chứng minh rằng nếu $f(x)$ là một đa thức bậc $n$ vả $g(x)$ là một đa thức bậc $m$, với $m > n$) thì $f(x)$ là $o(g(x))$.

**39.** Chứng minh rằng nếu $f_1(x)$ là $O(g(x))$ và $f_2(x)$ là $o(g(x))$ thì $f_1(x) + f_2(x)$ là $O(g(x))$.

**40.** Cho $H_n$ là **số điều hoà** thứ $n$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

Chứng minh rằng $H_n$ là $O(\log n)$. (*Gợi ý* : Trước hết chứng minh bất đẳng thức : $\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} < \int_1^n \frac{1}{x}dx$ bằng cách chứng tỏ rằng tổng diện tích các hình chữ nhật có chiều cao $1/j$, chiều rộng từ $j - 1$ đến $j$ với $j = 2, 3, \ldots n$ nhỏ hơn diện tích nằm dưới đường cong $1/x$ từ $x = 2$ đến $x = n$).

**41***. Chứng minh rằng $n \log n$ là $O(\log n!)$.

**42.** Xác định xem $\log(n!)$ có là $O(n\log n)$ không? Giải thích.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

**1.** a) Định nghĩa phủ định của một mệnh đề.

b) Tìm phủ định của mệnh đề "Đây là một khoá học buồn".

**2.** a) (Dùng bảng giá trị chân lý) định nghĩa các phép tuyển, hội, tuyển loại, kéo theo và tương đương của hai mệnh đề $p$ và $q$.

b) Xác định mệnh đề tuyển, hội, tuyển loại, kéo theo và tương đương của hai mệnh đề "Tôi sẽ đi xem phim tối nay" và "Tôi sẽ làm hết các bài tập toán rời rạc".

**3.** a) Nêu ít nhất năm cách viết khác nhau ra ngôn ngữ thông thường của mệnh đề kéo theo $p \rightarrow q$.

b) Định nghĩa mệnh đề đảo và phản đảo của mệnh đề kéo theo.

c) Phát biểu mệnh đề phản đảo của mệnh đề "Nếu ngày mai trời nắng, tôi sẽ đi chơi trong rừng".

**4.** a) Thế nào là hai mệnh đề tương đương logic?

b) Nêu các cách để chứng minh hai mệnh đề phức hợp là tương đương logic.

c) Chứng minh ít nhất bằng hai cách hai mệnh đề phức hợp $\neg p \vee (r \rightarrow \neg q)$ và $\neg p \vee \neg q \vee \neg r$ là tương đương logic.

**5.** (Xem lại các Bài tập ở tiết 1.2)

a) Cho một bảng giá trị chân lý, hãy giải thích xem làm thế nào dùng dạng tuyển chính tắc lập được mệnh đề phức hợp có bảng giá trị chân lý đó.

b) Hãy giải thích tại sao câu $a$ chứng tỏ các toán tử $\wedge$, $\vee$ và $\neg$ là đầy đủ.

c) Liệu có một toán tử sao cho tập hợp chỉ chứa toán tử đó là đầy đủ không?

**6.** Lượng từ tồn tại và phổ dụng của hàm mệnh đề $P(x)$ là gì? Xác định phủ định của chúng.

**7.** a) Cái gì là khác nhau giữa lượng từ $\exists x \forall y\ P(x, y)$ và $\forall y \exists x\ P(x, y)$, với $P(x, y)$ là một hàm mệnh đề?

b) Cho một ví dụ về hàm mệnh đề $P(x,y)$ sao cho $\exists x \forall y\ P(x,y)$ và $\forall y \exists x\ P(x, y)$ có các giá trị chân lý khác nhau.

**8.** a) Định nghĩa hợp, giao, hiệu, hiệu đối xứng của hai tập hợp.

b) Xác định hợp, giao, hiệu, hiệu đối xứng của tập các số nguyên dương và tập các số nguyên lẻ.

**9.** a) Thế nào là hai tập bằng nhau?

b) Nêu các cách để chứng minh hai tập bằng nhau.

c) Chứng minh ít nhất bằng hai cách khác nhau rằng tập $A - (B \cap C)$ và tập $(A - B) \cup (A - C)$ bằng nhau.

**10.** Giải thích mối liên hệ giữa tương đương logic và các hằng đẳng thức tập hợp.

**11.** a) Định nghĩa bản số $|S|$ của một tập $S$.

b) Cho công thức tính $|A \cup B|$, trong đó $A$ và $B$ là hai tập hợp.

**12.** a) Định nghĩa tập lũy thừa của một tập $S$.

b) Khi nào tập rỗng thuộc tập lũy thừa của $S$.

c) Tập luỹ thừa của một tập $S$ với $n$ phần tử có bao nhiêu phần tử?

**13.** a) Định nghĩa miền xác định, miền giá trị và tập hợp ảnh của hàm $f$.

b) Cho $f(n)$ là một hàm từ tập các số nguyên đến tập các số nguyên sao cho $f(n) = n^2 + 1$. Tìm miền xác định, miền giá trị và tập hợp ảnh của hàm đó.

**14.** a) Thế nào là một hàm đơn ánh từ tập các số nguyên dương đến tập các số nguyên dương.

b) Thế nào là một hàm toàn ánh từ tập các số nguyên dương đến tập các số nguyên dương.

c) Cho một ví dụ về hàm vừa đơn ánh và toàn ánh từ tập các số nguyên dương đến tập các số nguyên dương.

d) Cho một ví dụ về hàm đơn ánh nhưng không toàn ánh từ tập các số nguyên dương đến tập các số nguyên dương.

e) Cho một ví dụ về hàm toàn ánh nhưng không đơn ánh từ tập các số nguyên dương đến tập các số nguyên dương.

f) Cho một ví dụ về hàm không đơn ánh, cũng không toàn ánh từ tập các số nguyên dương đến tập các số nguyên dương.

**15.** a) Định nghĩa hàm ngược của một hàm.

b) Khi nào một hàm có hàm ngược.

c) Hàm $f(n) = 10 - n$ từ tập các số nguyên đến tập các số nguyên có hàm ngược không? Nếu có, tìm hàm ngược đó.

**16.** a) Định nghĩa các hàm sàn và hàm trần từ tập các số thực đến tập các số nguyên.

b) Đối với số thực $x$ nào $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ ?

**17.** a) Dùng ký hiệu lấy tổng biểu diễn tổng các luỹ thừa của 2 từ $2^0$ đến $2^n$.

b) Tính giá trị của tổng ở câu a)

**18.** a) Thế nào là một tập đếm được? Cho một định nghĩa chính xác.

b) Tập các số nguyên âm có là đếm được không? Tại sao?

c) Tập các số hữu tỉ với mẫu số lớn hơn 3 có là đếm được không? Tại sao?

d) Tập các số thực nằm trong khoảng giữa 2 và 3 có là đếm được không? Tại sao?

**19.** a) Phát biểu định nghĩa quan hệ $f(n)$ là $O(g(n))$, với $f(n)$ và $g(n)$ là hai hàm từ tập các số nguyên dương tới tập các số thực.

b) Dùng định nghĩa chứng minh hoặc bác bỏ khẳng định sau :

$$"n^2 + 18n + 107 \text{ là } O(n^3)".$$

c) Cũng hỏi như trên đối với :

$$"n^3 \text{ là } O(n^2 + 18n + 107)"$$

**20.** a) Làm thế nào cho một đánh giá big-$O$ đối với một hàm là tổng nhiều số hạng, mỗi số hạng lại là tích của một vài hàm?

b) Cho một đánh giá big-$O$ đối với hàm

$$f(n) = (n! + 1)(2^n + 1) + (n^{n-2} + 8.n^{n-3})(n^3 + 2^n).$$

Đối với hàm $g(x)$ trong đánh giá $f(x)$ là $O(g(x))$ của bạn, hãy dùng một hàm đơn giản có bậc nhỏ nhất có thể được.

$2^0 + 2^1 + 2^2 \dots$



## BÀI TẬP BỔ SUNG

**1.** Cho $p$ là mệnh đề "Tôi sẽ làm hết các bài tập trong cuốn sách này" và $q$ là mệnh đề "Tôi sẽ nhận được điểm $A$ trong khoá học này". Hãy biểu diễn các mệnh đề sau qua $p$ và $q$.

a) Tôi sẽ nhận được điểm $A$ trong khoá học này chỉ nếu tôi làm hết các bài tập trong cuốn sách này.

b) Tôi sẽ nhận được điểm $A$ trong khoá học này và tôi sẽ làm hết bài tập trong cuốn sách này.

c) Hoặc là tôi không nhận được điểm $A$ trong khoá học này hoặc là tôi sẽ không làm hết bài tập trong cuốn sách này.

d) Để tôi nhận được điểm $A$ trong khoá học này, cần và đủ là tôi phải làm hết các bài tập trong cuốn sách này.

**2.** Tìm bảng giá trị chân lý của mệnh đề :

$$(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg r)$$

**3.** Chứng minh rằng các mệnh đề sau là hằng đúng :

a) $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$ b) $((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$

**4.** Tìm mệnh đề đảo và phản đảo của các mệnh đề kéo theo sau :

a) Nếu hôm nay trời mưa tôi sẽ lái xe đi làm.

b) Nếu $|x| = x$, thì $x \geqslant 0$

c) Nếu $n$ lớn hơn 3 thì $n^2$ lớn hơn 9.

**5.** Tìm mệnh đề phức hợp chứa các hiến mệnh đề $p$, $q$, $r$ và $s$. Biết rằng mệnh đề phức hợp này là đúng khi chính xác ba trong số bốn biến mệnh đề trên là đúng và sai trong các trường hợp còn lại.

**6.** Cho $P(x)$ là câu : "sinh viên $x$ biết giải tích" và $Q(y)$ là câu " lớp y có một sinh viên biết giải tích". Hãy biểu diễn các câu sau như các lượng từ của $P(x)$ và $Q(x)$ :

a) Một số sinh viên hiết giải tích.

b) Không có sinh viên nào biết giải tích.

c) Tất cả các lớp đều có một sinh viên biết giải tích.

d) Tất cả sinh viên trong tất cả các lớp đều biết giải tích.

e) Có ít nhất một lớp không có một sinh viên nào biết giải tích.

**7.** Cho $P(m,n)$ là câu "$n$ chia hết cho $m$", ở đây không gian của cả hai biến là tập hợp các số nguyên. Xác định giá trị chân lý của các mệnh đề sau :

a) $P(4,5)$ b) $P(2,4)$

c) $\forall m \forall n \ P(m,n)$ d) $\exists m \forall n \ P(m,n)$

e) $\exists n \forall m \ P(m,n)$ f) $\forall n \ P(1,n)$.

**8.** Cho $P(x,y)$ là một hàm mệnh đề. Chứng tỏ rằng mệnh đề kéo theo

$$\exists x \forall y \ P(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \ P(x,y) \text{ là hằng đúng.}$$

**9.** Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là các hàm mệnh đề. Chứng tỏ

$$\exists x \ (P(x) \rightarrow Q(x)) \text{ và } \forall x \ P(x) \rightarrow \exists x \ Q(x)$$

luôn luôn có cùng giá trị chân lý.

**10.** Nếu $\forall y \exists x \ P(x,y)$ là đúng thì có nhất thiết suy ra $\exists x \forall y \ P(x,y)$ cũng là đúng không?

**11.** Nếu $\forall x \exists y \ P(x,y)$ là đúng thì có nhất thiết suy ra $\exists x \forall y \ P(x,y)$ là đúng không ?

**12.** Tìm phủ định của các mệnh đề sau :

a) Nếu hôm nay tuyết rơi, ngày mai tôi sẽ đi trượt tuyết.

b) Mọi người trong lớp đều hiểu phép qui nạp toán học.

c) Một số sinh viên lớp này không thích môn toán học rời rạc.

d) Trong tất cả các lớp học toán đều có một học sinh ngủ gật trong giờ học.

**13.** Dùng các lượng từ diễn đạt các câu sau : "Tất cả các sinh viên lớp này đều đã học một môn nào đó ở tất cả các khoa của Trường toán học".

**14.** Dùng các lượng từ diễn đạt câu sau : "Có một toà nhà ở khu ký túc xá của một trường đại học nào đó ở Mỹ trong đó các phòng đều quét sơn trắng"?

**15.** Cho $A$ là tập hợp các từ tiếng Anh có chứa chữ cái $x$ và cho $B$ là tập hợp các từ tiếng Anh có chứa chữ cái $q$. Biểu diễn các tập sau như các tổ hợp của $A$ và $B$.

a) Tập các từ tiếng Anh không chứa chữ cái $x$.

b) Tập các từ tiếng Anh chứa cả $x$ lẫn $q$.

c) Tập các từ tiếng Anh chứa $x$ nhưng không chứa $q$.

d) Tập các từ tiếng Anh không chứa $x$ hoặc $q$.

e) Tập các từ tiếng Anh chứa $x$ hoặc $q$ nhưng không cả hai.

**16.** Chứng minh rằng nếu $A$ là một tập con của $B$ thì tập luỹ thừa của $A$ cũng là tập con của tập luỹ thừa của $B$.

**17.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp sao cho tập luỹ thừa của $A$ là tập con của tập luỹ thừa của $B$. Từ đó có suy ra $A$ là tập con của $B$ không?

**18.** Cho $\mathbf{E}$ là tập các số chẵn và $\mathbf{O}$ là tập các số lẻ. Như thường lệ, $\mathbf{Z}$ – là tập hợp tất cả các số nguyên. Xác định các tập hợp sau :

a) $\mathbf{E} \cup \mathbf{O}$ b) $\mathbf{E} \cap \mathbf{O}$

c) $\mathbf{Z} - \mathbf{E}$ d) $\mathbf{Z} - \mathbf{O}$

**19.** Chứng minh rằng nếu $A$ là một tập hợp nào đó và $U$ là tập vũ trụ thì :

a) $A \cap \overline{A} = \varnothing$ b) $A \cup \overline{A} = U$

**20.** Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là hai tập hợp thì :

a) $A = A \cap (A \cup B)$ b) $A = A \cup (A \cap B)$

**21.** Chứng minh rằng, nếu $A$ và $B$ là hai tập hợp thì :

$$A - (A - B) = A \cap B$$

**22.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp. Chứng minh rằng $A \subseteq B$ nếu và chỉ nếu $A \cap B = A$.

**23.** Cho $A$, $B$, và $C$ là các tập hợp. Chứng minh rằng $(A - B) - C$ không nhất thiết phải bằng $A - (B - C)$.

**24.** Cho $A$, $B$ và $C$ là các tập hợp. Đẳng thức

$(A - B) - C = (A - C) - B$ là đúng hay sai? Tại sao?

**25.** Cho $A$, $B$, $C$ và $D$ là các tập hợp, đẳng thức :
$(A - B) - (C - D) = (A - C) - (B - D)$ là đúng hay sai? Tại sao?

**26.** Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là các tập hữu hạn, thì

$$|A \cap B| \leq |A \cup B|.$$

Khi nào có dấu bằng?

**27.** Cho $A$ và $B$ là hai tập hợp trong tập hợp vũ trụ hữu hạn $U$. Liệt kê các tập sau theo thứ tự tăng dần của bản số :

a) $|A|$, $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|U|$, $|\varnothing|$

b) $|A - B|$, $|A \oplus B|$, $|A| + |B|$, $|A \cup B|$, $|\varnothing|$

**28.** Cho $A$ và $B$ là các tập con của tập vũ trụ hữu hạn $U$.

Chứng minh rằng :

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |U| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

**29.** Cho $f$ và $g$ là hàm từ $\{1, 2, 3, 4\}$ đến $\{a, b, c, d\}$ và từ $\{a, b, c, d\}$ đến $\{1, 2, 3, 4\}$ tương ứng, sao cho $f(1) = d$, $f(2) = c$, $f(3) = a$ và $f(4) = b$ và $g(a) = 2$, $g(b) = 1$, $g(c) = 3$, $g(d) = 2$.

a) $f$ có phải đơn ánh không? $g$ có đơn ánh không?

b) $f$ có toàn ánh không? $g$ có toàn ánh không?

c) $f$ hoặc $g$ có hàm ngược không? Nếu có, tìm hàm ngược đó.

**30.** Cho $f$ là một hàm đơn ánh từ $A$ đến $B$. Giả sử $S$ và $T$ là hai tập con của $A$. Chứng minh rằng : $f(S \cap T) = f(S) \cap f(T)$.

**31.** Cho một ví dụ cho thấy đẳng thức trong Bài tập 30 là không đúng nếu $f$ không phải là một đơn ánh.

**32.** Chứng minh rằng $\lceil x + 1 \rceil = \lceil x \rceil + 1$ với mọi $x$ là số thực.

**33.** Tính giá trị các đại lượng sau :

a) $\displaystyle\sum_{i=0}^{3}\left(\sum_{j=0}^{4} ij\right)$ b) $\displaystyle\prod_{j=1}^{4}\left(\sum_{i=0}^{3} j\right)$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\left(\sum_{j=0}^{i} 1\right)$ d) $\displaystyle\prod_{i=1}^{3}\left(\prod_{j=0}^{i} j\right)$

**34.** Tập hợp các số vô tỷ nằm giữa 0 và 1 có đếm được không? Giải thích.

**35**.** Một số thực được gọi là **số đại số** nếu nó là nghiệm của một đa thức với hệ số nguyên. Chứng minh rằng tập hợp các số đại số là đếm được. (Gợi ý : dùng tính chất đa thức bậc $n$ có nhiều nhất $n$ nghiệm phân biệt).

**36.** Chứng minh rằng $8x^3 + 12x + 100\log x$ là $O(x^3)$.

**37.** Cho một đánh giá big–$O$ đối với hàm $(x^2 + x(\log x)^3)(2^x + x^3)$

**38.** Tìm đánh giá big–$O$ của $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)$

***39**. Chứng minh rằng $n!$ không là $O(2^n)$

***40.** Chứng minh rằng $n^n$ không là $O\ (n!)$

## BÀI TẬP TRÊN MÁY TÍNH

***Viết chương trình với Input và Output cho dưới đây***

**1.** Cho bảng chân lý của các mệnh đề $p$ và $q$. Tìm bảng giá trị chân lý của hội, tuyển, tuyển loại, kéo theo, và tương đương của các mệnh đề đó.

**2.** Cho hai xâu bit có chiều dài $n$, tìm AND bit, OR bit và XOR bit của hai xâu đó.

**3.** Cho giá trị chân lý của các mệnh đề $p$ và $q$ trong logic mờ, tìm giá trị chân lý của tuyển và hợp của hai mệnh đề đó (xem các Bài tập 23 – 25 trong tiết 1.1).

**4.** Cho hai tập con $A$, $B$ của một tập hợp có $n$ phần tử, dùng các xâu bit để tìm $\overline{A}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ và $A \oplus B$.

**5.** Cho hai đa tập $A$ và $B$ từ cùng một tập vũ trụ. Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$ và $A \oplus B$. (Xem phần chú thích ở trước Bài tập 47 của Tiết 1.5).

**6.** Cho các tập mờ $A$ và $B$, tìm $\overline{A}$, $A \cup B$, và $A \cap B$ (Xem phần chú thích ở trước Bài tập 49 của Tiết 1.5).

**7.** Cho hàm $f$ từ $\{1, 2, \dots n\}$ đến tập các số nguyên, xác định xem $f$ có phải là đơn ánh không?

**8.** Cho hàm $f$ từ $\{1, 2, \dots n\}$ đến chính nó, xác định xem $f$ có phải là toàn ánh không?

**9**. Cho một song ánh từ $\{1, 2, \dots n\}$ là chính nó, xác định $f^{-1}$.

**10**. Cho các số hạng của một dãy $a_1, a_2, \dots a_n$, tính :

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad \text{và} \prod_{j=1}^{n} a_j$$

## TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

***Dùng các chương trình mà bạn đã viết, giải các bài tập sau :***

**1.** Xác định số $n$ lớn nhất sao cho $n!$ có ít hơn 100 chữ số thập phân? Ít hơn 1000 chữ số thập phân ?

**2.** Trong biểu diễn thập phân, $n!$ tận cùng bằng bao nhiêu số không, với $n$ từ 1 đến 25? Bạn có thể đưa ra một công thức cho phép tính được số các số không tận cùng của $n!$ trong biểu diễn thập phân của nó không? (xem Tiết 2.3).

**3.** Tính số hàm đơn ánh từ một tập $S$ đến tập $T$, với $S$ và $T$ là hai tập hữu hạn có bản số khác nhau. Bạn có thể đưa ra một công thức cho phép tính được số các hàm đó không? (Ta sẽ tìm được công thức này ở Chương 4).

**4.** Tính số hàm toàn ánh từ một tập $S$ đến tập $T$ với $S$ và $T$ là hai tập hữu hạn, có bản số khác nhau. Bạn có thể đưa ra một công thức tính số các hàm đó không? (Chúng ta sẽ tìm được một công thức như vậy ở Chương 5).

**5.** Biết rằng $n^b$ là $O(d^n)$ với $b$ và $d$ là hai số dương và $d \geqslant 2$. Xác định các giá trị của các hằng số $C$ và $k$ sao cho $n^b \leqslant Cd^n$ với mọi $x > k$ đối với mỗi tập các giá trị sau : $b = 10$, $d = 2$ ; $b = 20$, $d = 3$ ; $b = 1000$, $d = 7$.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này, viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau :***

**1.** Hãy mô tả logic mờ được áp dụng như thế nào cho những ứng dụng thực tế. Hãy tham khảo một vài cuốn sách phổ biến mới xuất bản gần đây về logic mờ.

**2.** Hãy đọc một số tác phẩm của Lews Carroll về logic ký hiệu. Mô tả chi tiết một số mô hình mà ông đã dùng để biểu diễn các suy lý logic.

3. Lý thuyết tiên đề của tập hợp có thể được phát triển để tránh nghịch lý của Russell (xem Bài tập 24 của Tiết 1.4). Hãy bàn về vấn đề này.

4. Hãy tìm xem khái niệm hàm lần đầu tiên xuất hiện ở đâu và mô tả xem khái niệm này lần đầu tiên được dùng như thế nào?

5. Hãy giải thích xem tại sao sẽ rất tiện ích nếu ta có một bảng liệt kê đầy đủ các dãy đặc biệt các số nguyên. Nếu bạn tìm được một bảng liệt kê như vậy, thì các dãy được tổ chức như thế nào?

6. Mô tả khái niệm bản số được mở rộng tới các tập vô hạn như thế nào?

7. Tìm một định nghĩa về số siêu việt. Hãy giải thích rõ làm thế nào chứng minh được sự tồn tại của các số này và làm thế nào lập được các số đó. Các số nổi tiếng nào mà bạn đã biết là số siêu việt?

8. Tìm cách dẫn ra đầu tiên về khái niệm big-$O$ của Bachmann. Giải thích xem ông và những người khác đã dùng khái niệm này như thế nào.

CHƯƠNG 2

# NHỮNG KIẾN THỨC CƠ BẢN : THUẬT TOÁN, CÁC SỐ NGUYÊN VÀ MA TRẬN

Nhiều bài toán có thể được giải khi xem chúng như các trường hợp đặc biệt của một bài toán tổng quát. Ví dụ, xét bài toán xác định vị trí của số nguyên lớn nhất trong dãy 101, 12, 144, 212, 98. Đây là một trường hợp đặc biệt của bài toán xác định số nguyên lớn nhất trong một dãy các số nguyên. Để giải bài toán tổng quát này, ta cần phải cho một thuật toán chỉ rõ dãy các bước được sử dụng để giải bài toán tổng quát đó. Trong cuốn sách này, chúng ta sẽ nghiên cứu các thuật toán để giải nhiều loại bài toán khác nhau. Ví dụ, thuật toán để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên, để làm phát sinh mọi kiểu sắp thứ tự của một tập hữu hạn, để tìm một bảng liệt kê, và để tìm con đường ngắn nhất giữa hai đỉnh của một mạng. Một vấn đề quan trọng liên quan đến thuật toán là độ phức tạp tính toán của nó. Tức là, những tài nguyên nào của máy tính cần phải có khi dùng một thuật toán để giữ một bài toán có qui mô xác định. Trong chương này chúng ta sẽ minh họa sự phân tích độ phức tạp của các thuật toán.

Tập hợp các số nguyên đóng một vai trò cơ bản trong toán học rời rạc. Đặc biệt, khái niệm chia hết của các số nguyên là hết sức cơ bản đối với số học của máy tính. Trong chương này, chúng tôi cũng sẽ ôn lại một cách ngắn gọn một số khái niệm quan trọng của lý thuyết số – khoa học về các số nguyên và tính chất của chúng. Một số các thuật toán quan trọng liên quan đến các số nguyên cũng sẽ được nghiên cứu, kể cả thuật toán của Euclide dùng để xác định ước số chung lớn nhất đã được mô tả lần đầu tiên khoảng hàng ngàn năm trước đây. Các số nguyên có thể được biểu diễn bằng cách dùng một số nguyên lớn hơn 1 làm cơ số. Các khai triển nhị phân được dùng xuyên suốt trong tin học, chính là biểu diễn cơ số 2. Trong chương này, chúng ta cũng sẽ bàn về biểu diễn cơ số *b* của các số nguyên và cho một thuật toán để tìm chúng. Các thuật toán cho số học các số nguyên – những thủ tục đầu tiên được gọi là thuật toán – cũng sẽ được bàn đến. Chương này cũng giới thiệu một số ứng dụng quan trọng của lý thuyết số như mã hóa thư từ, tạo các số giả ngẫu nhiên, và gán các vị trí của bộ nhớ cho các file máy tính.

Các ma trận được dùng trong toán học rời rạc để biểu diễn rất nhiều các cấu trúc rời rạc. Chương này cũng sẽ ôn lại một số kiến thức cơ bản về ma trận, số học của chúng cần thiết để biểu diễn các quan hệ và đồ thị. Số học các ma trận cũng sẽ được dùng trong rất nhiều thuật toán liên quan đến các cấu trúc này.

# 2.1. THUẬT TOÁN

## MỞ ĐẦU

Có nhiều lớp bài toán tổng quát xuất hiện trong toán học rời rạc. Ví dụ : cho một dãy các số nguyên, tìm số lớn nhất ; cho tập hợp, liệt kê hết các tập con của nó; cho tập các số nguyên, xếp chúng theo thứ tự tăng dần; cho một mạng, tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của nó. Khi được giao cho một bài toán như vậy, thì việc đầu tiên phải làm là xây dựng một mô hình dịch bài toán đó thành ngữ cảnh toán học. Các cấu trúc rời rạc được dùng trong các mô hình này là tập hợp, dãy, và hàm – các cấu trúc đã được xét ở chương 1, cùng với các cấu trúc khác như hoán vị, quan hệ, đồ thị, cây, mạng và các máy hữu hạn trạng thái – những khái niệm sẽ được nghiên cứu ở các chương sau.

Lập được một mô hình toán học thích hợp chỉ là một phần của quá trình giải. Để hoàn tất quá trình giải, còn cần phải có một phương pháp dùng mô hình để giải bài toán tổng quát. Nói một cách lý tưởng, cái được đòi hỏi là một thủ tục, đó là dãy các bước dẫn tới đáp số mong muốn. Một dãy các bước như vậy, được gọi là một **thuật toán**.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Thuật toán* là một thủ tục xác định dùng một số bước hữu hạn để giải một bài toán. Thuật ngữ "*Algorithm*" (thuật toán) là biến tướng của tên nhà toán học Ả rập *al-Khowarizmi*, người đã viết cuốn sách về các chữ số Hindu – cơ sở của ký hiệu số thập phân hiện đại. Ban đầu, từ *algorism* được dùng để chỉ các qui tắc thực hiện các phép tính số học trên các số thập phân. Sau đó, *algorism* tiến hóa thành *algorithm* vào thế kỷ 19. Với sự quan tâm ngày càng tăng đối với các máy tính, khái niệm thuật toán đã được cho một ý nghĩa chung hơn, bao hàm cả các thủ tục xác định để giải các bài toán, chứ không phải chỉ là thủ tục để thực hiện các phép tính số học. (Chúng ta sẽ bàn về các thuật toán để thực hiện những phép tính số học đối với các số nguyên ở Tiết 2.4).

Trong cuốn sách này chúng ta sẽ xét các thuật toán để giải rất nhiều bài toán. Ở tiết này ta sẽ dùng thuật toán tìm số nguyên lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên để minh họa một thuật toán và các tính chất của nó. Chúng ta cũng sẽ mô tả các thuật toán dùng để xác định vị trí của một phần tử đặc biệt nào đó trong một tập hợp hữu hạn. Trong các tiết sau, chúng ta sẽ xét tới các thủ tục tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên, tìm đường đi ngắn nhất giữa hai điểm trong một mạng, cũng như phép nhân các ma trận v.v...

**Ví dụ 1.** Mô tả thuật toán tìm phần tử lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên.

Mặc dù bài toán tìm phần tử lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên tương đối tầm thường, nhưng nó cho ta một minh họa tốt cho khái niệm thuật toán. Hơn nữa, trong nhiều trường hợp cá biệt vẫn có nhu cầu phải xác định số nguyên lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên. Ví dụ, một trường thường xuyên cần phải tìm điểm số cao nhất trong các cuộc thi đều có hàng ngàn sinh viên tham gia. Hoặc một tổ chức thể thao hàng tháng đều muốn biết hội viên có thành tích cao nhất của họ. Và chúng ta muốn xây dựng một thuật toán có thể được dùng bất cứ khi nào bài toán tìm phần tử lớn nhất trong dãy hữu hạn các số nguyên được đặt ra.

Chúng ta có thể chỉ rõ thủ tục để giải bài toán này bằng vài cách. Một cách đơn giản là dùng ngôn ngữ thông thường để mô tả các bước cần phải thực hiện. Dưới đây là một thủ tục như vậy :

*Lời giải của ví dụ 1* : Chúng ta sẽ thực hiện các bước sau :

1. Đặt giá trị cực đại tạm thời bằng số nguyên đầu tiên trong dãy. (Cực đại tạm thời sẽ là số nguyên lớn nhất đã được kiểm tra ở một giai đoạn nào đó của thủ tục).

2. So sánh số nguyên tiếp sau với giá trị cực đại tạm thời, nếu nó lớn hơn giá trị cực đại tạm thời, thì đặt cực đại tạm thời bằng số nguyên đó.

3. Lặp lại bước trước nếu còn các số nguyên trong dãy.

4. Dừng khi không còn số nguyên nào nữa trong dãy. Cực đại tạm thời ở điểm này chính là số nguyên lớn nhất của dãy.

■

Một thuật toán cũng có thể được mô tả bằng cách dùng một ngôn ngữ máy tính nào đó. Tuy nhiên, một khi đã làm như vậy, thì chỉ những lệnh được phép trong ngôn ngữ đó mới có thể dùng được. Điều này thường làm cho sự mô tả các thuật toán trở nên rối rắm và khó hiểu. Hơn nữa,, vì nhiều ngôn ngữ lập trình đều được dùng rộng rãi, nên chọn một ngôn ngữ đặc biệt nào đó là điều người ta không muốn. Vì vậy, thay vì dùng một ngôn ngữ đặc biệt nào đó để mô tả một thuật toán, trong quyển sách này chúng ta sẽ dùng một dạng **giả mã**. Giả mã tạo ra bước trung gian giữa sự mô tả một thuật toán bằng ngôn ngữ thông thường và sự thực hiện thuật toán đó trong ngôn ngữ lập trình. Các bước của thuật toán được chỉ rõ bằng cách dùng các lệnh giống như trong các ngôn ngữ lập trình. Tuy nhiên, trong giả mã, các lệnh được dùng có thể có cả những phép toán xác định và các mệnh đề. Một chương trình máy tính có thể được tạo ra trong bất kỳ một ngôn ngữ máy tính nào bằng cách dùng mô tả giả mã như một điểm xuất phát.

Giả mã được dùng trong cuốn sách này tựa hở trên ngôn ngữ lập trình Pascal. Tuy nhiên, cú pháp của Pascal cũng như cú pháp của các ngôn ngữ lập trình khác đều không được tuân theo ở đây. Hơn nữa, bất kỳ lệnh xác định nào đều có thể được dùng trong giả mã này.

Mô tả giả mã của thuật toán tìm số lớn nhất trong dãy hữu hạn các số nguyên như sau :

---

ALGORITHM 1. TÌM PHẦN TỬ LỚN NHẤT TRONG DÃY HỮU HẠN

**procedure** max ($a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ : Integers)

max : = $a_1$

**for** i : = 2 **to** $n$

  **if** max < $a_i$ **then** max : = $a_i$

{max là phần tử lớn nhất}

---

Thuật toán này trước hết gán số hạng đầu tiên $a_1$ của dãy cho biến *max*. Vòng lặp "for" được dùng để kiểm tra lần lượt các số hạng của dãy. Nếu một số hạng lớn hơn giá trị hiện thời của max, thì nó được gán làm giá trị mới của max.

Các thuật toán có một số tính chất chung. Sẽ rất hữu ích khi mô tả các thuật toán nếu ta ghi nhớ các tính chất đó trong đầu. Các tính chất đó là :

- *Đầu vào* (Input) : Một thuật toán có các giá trị đầu vào từ một tập đã được chỉ rõ.
- *Đầu ra* (Output) : Từ mỗi tập các giá trị đầu vào, thuật toán sẽ tạo ra các giá trị đầu ra. Các giá trị đầu ra chính là nghiệm của bài toán.
- *Tính xác định* : Các bước của một thuật toán phải được xác định một cách chính xác.
- *Tính hữu hạn* : Một thuật toán cần phải tạo ra các giá trị đầu ra mong muốn sau một số hữu hạn (nhưng có thể rất lớn) các bước đối với mọi tập đầu vào.
- *Tính hiệu quả* : Mỗi bước của thuật toán cần phải thực hiện được một cách chính xác và trong một khoảng thời gian hữu hạn.
- *Tính tổng quát* : Thủ tục cần phải áp dụng được cho mọi bài toán có dạng mong muốn, chứ không phải chỉ cho một tập đặc biệt các giá trị đầu vào.

**Ví dụ 2.** Chứng tỏ rằng Algorithm 1 để tìm phần tử lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên hội đủ những tính chất trên.

*Giải :* Đầu vào của Thuật toán 1 là một dãy các số nguyên. Đầu ra là số lớn nhất trong dãy đó. Mỗi một bước của thuật toán trên đều được xác định một cách chính xác, vì chỉ có phép gán, một vòng lặp hữu hạn và các mệnh đề kéo theo. Thuật toán dùng một số hữu hạn bước vì nó kết thúc sau khi tất cả các số nguyên của dãy đã được kiểm tra. Thuật toán này có thể được thực hiện trong một khoảng thời gian hữu hạn, vì mỗi bước chỉ là sự so sánh hoặc gán. Cuối cùng, Thuật toán 1 là tổng quát vì nó có thể được dùng để tìm số cực đại của dãy các số nguyên hữu hạn bất kỳ.

■

## THUẬT TOÁN TÌM KIẾM

Bài toán xác định vị trí của một phần tử trong một bảng liệt kê sắp thứ tự thường gặp trong nhiều trường hợp khác nhau. Ví dụ, chương trình kiểm tra chính tả của các từ tìm kiếm các từ này trong một cuốn từ điển, mà từ điển chẳng qua cũng là một bảng liệt kê sắp thứ tự của các từ. Các bài toán thuộc loại này được gọi là các **bài toán tìm kiếm**. Trong tiết này ta sẽ xem xét một số thuật toán tìm kiếm. Và ta sẽ nghiên cứu số các bước được dùng bởi mỗi thuật toán đó trong Tiết 2.2.

Bài toán tìm kiếm tổng quát được mô tả như sau : xác định vị trí của phần tử x trong một bảng liệt kê các phần tử phân biệt $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ hoặc xác định rằng nó không có mặt trong bảng liệt kê đó. Lời giải của bài toán trên là vị trí của số hạng của bảng liệt kê có giá trị bằng $x$ (tức là, $i$ sẽ là nghiệm nếu $x = a_i$, và là 0 nếu $x$ không có mặt trong bảng liệt kê).

Thuật toán đầu tiên mà chúng tôi giới thiệu có tên là thuật toán **tìm kiếm tuyến tính** hay **tìm kiếm tuần tự.** Nó bắt đầu bằng việc so sánh $x$ với $a_1$. Khi $x = a_1$, nghiệm là vị trí của $a_1$, tức là 1. Khi $x \neq a_1$, so sánh $x$ với $a_2$. Nếu $x = a_2$, nghiệm là vị trí của $a_2$, tức là 2. Khi $x \neq a_2$ so sánh $x$ với $a_3$. Tiếp tục quá trình này bằng cách tuần tự so sánh $x$ với mỗi một số hạng của bảng liệt kê cho tới khi tìm được số hạng bằng $x$, khi đó nghiệm là vị trí của số hạng đó. Nếu toàn bảng liệt kê đã được kiểm tra mà không xác định được vị trí của $x$, thì nghiệm là 0. Giả mã đối với thuật toán tìm kiếm tuyến tính được cho trong Algorithm 2.

---

ALGORITHM 2. THUẬT TOÁN TÌM KIẾM TUYẾN TÍNH

**procedure** tìm kiếm tuyến tính ($x$ : integer, $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ : các số nguyên phân biệt)

$i$ : = 1

**while** ($i \leq n$ and $x \neq a_i$)

    $i$ : = $i$ + 1

**if** $i \leq n$ **then** location : = $i$

**else** location : = 0

{location là chỉ số dưới của số hạng bằng $x$ hoặc là 0 nếu không tìm được $x$}

---

Bây giờ ta xét một thuật toán tìm kiếm khác. Thuật toán này có thể được dùng khi bảng liệt kê có các số hạng được sắp theo thứ tự tăng dần (ví dụ : nếu các số hạng là các số, thì chúng được sắp từ số nhỏ nhất đến số lớn nhất ; hoặc nếu chúng là các từ thì chúng được sắp theo thứ tự bảng chữ cái v.v...). Thuật toán thứ hai này được gọi là thuật toán **tìm kiếm nhị phân**. Nó được tiến hành bằng cách so sánh phần tử cần xác định vị trí với số hạng ở giữa bảng liệt kê. Sau đó bảng này được tách làm hai bảng kê con nhỏ hơn có kích thước như nhau, hoặc một trong hai bảng con ít hơn bảng con kia một số hạng. Sự tìm kiếm tiếp tục bằng cách hạn chế tìm kiếm ở một bảng kê con thích hợp dựa trên việc so sánh phần tử cần xác định vị trí với số hạng giữa bảng kê. Trong tiết sau, ta sẽ chứng minh rằng thuật toán tìm kiếm nhị phân hiệu quả hơn nhiều so với thuật toán tìm kiếm tuyến tính. Ví dụ dưới đây minh họa sự tìm kiếm nhị phân.

**Ví dụ 3.** Để tìm số 19 trong bảng liệt kê

1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 22

ta tách bảng liệt kê gồm 16 số hạng này thành hai bảng liệt kê nhỏ hơn, mỗi bảng có 8 số hạng, cụ thể là :

1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10 và 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 22.

Sau đó ta so sánh 19 với số hạng cuối cùng của bảng con thứ nhất. Vì $10 < 19$, việc tìm kiếm 19 chỉ giới hạn trong bảng liệt kê con thứ 2 từ số hạng thứ 9 đến thứ 16 trong bảng liệt kê ban đầu. Tiếp theo, ta lại tách bảng kê con gồm 8 số hạng này làm hai bảng con, mỗi bảng có 4 số hạng, cụ thể là

12, 13, 15, 16 và 18, 19, 20, 22.

Vì $16 < 19$ (so 19 với số hạng cuối cùng của bảng con đầu tiên), việc tìm kiếm lại được giới hạn chỉ trong bảng con thứ hai, từ số hạng thứ 13 đến số hạng thứ 16 của bảng liệt kê ban đầu. Bảng liệt kê 18, 19, 20, 22 lại được tách làm hai, cụ thể là :

18, 19 và 20, 22

Vì 19 không lớn hơn số hạng lớn nhất của bảng con thứ nhất – cũng là 19 – nên việc tìm kiếm giới hạn chỉ ở bảng con thứ nhất gồm các số 18, 19, là số hạng thứ 13 và 14 của bảng ban đầu. Tiếp theo, bảng con chứa 2 số hạng này lại được tách làm hai, mỗi bảng có một số hạng 18 và 19. Vì $18 < 19$, sự tìm kiếm giới hạn chỉ trong bảng con thứ 2 – bảng liệt kê chỉ chứa số hạng thứ 14 của bảng liệt kê ban đầu, số hạng đó là số 19. Bây giờ sự tìm kiếm đã thu hẹp về chỉ còn một số hạng, so sánh tiếp cho thấy 19 là số hạng thứ 14 của bảng liệt kê ban đầu. ■

Bây giờ chúng ta có thể chỉ rõ các bước trong thuật toán tìm kiếm nhị phân.

Để tìm số nguyên $x$ trong bảng liệt kê $a_1, a_2, \ldots a_n$, với $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, ta bắt đầu bằng việc so sánh $x$ với số hạng $a_m$ ở giữa của dãy, với $m = \lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$. (Cần nhớ lại rằng $\lfloor x\rfloor$ là số nguyên lớn nhất không quá $x$). Nếu $x > a_m$, việc tìm kiếm $x$ giới hạn ở nửa thứ hai của dãy, gồm $a_{m+1}$, $a_{m+2}$, ... $a_n$.Nếu $x$ không lớn hơn $a_m$, thì sự tìm kiếm giới hạn trong nửa đầu của dãy gồm $a_1, a_2, \ldots a_m$.

Bây giờ sự tìm kiếm chỉ giới hạn trong bảng kê có không hơn $\lceil\frac{n}{2}\rceil$ phần tử. Dùng chính thủ tục này, so sánh $x$ với số hạng ở giữa của bảng liệt kê được hạn chế. Sau đó lại hạn chế việc tìm kiếm ở nửa thứ nhất hoặc nửa thứ hai của bảng liệt kê. Lặp lại quá trình này cho tới khi nhận được một bảng liệt kê chỉ có một số hạng. Sau đó, chỉ còn xác định số hạng này có phải là $x$ hay không. Giả mã cho thuật toán tìm kiếm nhị phân được cho trong Algorithm 3.

---

ALGORITHM 3. THUẬT TOÁN TÌM KIẾM NHỊ PHÂN

**procedure** tìm kiếm nhị phân ($x$ : integer, $a_1, a_2 \ldots a_n$ : integers tăng dần)
$i := 1$ ($i$ là điểm mút trái của khoảng tìm kiếm)
$j := n$ {$j$ là điểm mút phải của khoảng tìm kiếm)
**while** $i < j$
**begin**
  $m := \lfloor\frac{i+j}{2}\rfloor$
  **if** $x > a_m$ **then** $i := m + 1$
  **else** $j := m$
**end**
  **if** $x = a_i$ **then** location : = $i$
  **else** location : = 0.
{location là chỉ số dưới của số hạng bằng $x$ hoặc 0 nếu không tìm thấy $x$}

---

Algorithm 3 tiến hành bằng cách thu hẹp liên tiếp phần cần tìm kiếm của dãy. Ở bất kỳ giai đoạn nào, chỉ có các số hạng bắt đầu với $a_i$ hoặc kết thúc với $a_j$ là được xem xét. Nói cách khác, $i$ và $j$ là các chỉ số nhỏ nhất và lớn nhất của các số hạng còn lại, tương ứng. Algorithm 3 tiếp tục thu hẹp phần của dãy cần phải tìm kiếm cho tới khi chỉ còn lại một phần tử của dãy. Khi đã làm đến đó, sự so sánh sẽ cho thấy số hạng đó có là $x$ hay không.

## BÀI TẬP

**1.** Liệt kê tất cả các bước mà Algorithm 1 đã dùng để tìm số cực đại của bảng liệt kê 1, 8, 12, 9, 11, 2, 14, 5, 10, 4.

**2.** Các thủ tục sau có và thiếu những đặc điểm gì của một thuật toán

a) **procedure** gấp đôi ($n$ : positive integer – nguyên dương)

**while** $n \geq 0$

$n := 2.n$

b) **procedure** chia ($n$ : positive integer)

**while** $n \geq 0$

**begin**

$m := 1/n$

$n := n - 1$

**end**

c) **procedure** tổng ($n$ : positive integer)

sum := 0

**while** $i < 10$

sum := sum + 1

e) **procedure** chọn ($a$, $b$ : integer)

$x$ := hoặc $a$ hoặc $b$.

**3.** Lập một thuật toán tính tổng tất cả các số nguyên trong một bảng.

**4.** Lập thuật toán tính $x^n$ với $x$ là một số thực và $n$ là một số nguyên. (*Gợi ý* : trước hết cho một thủ tục tính $x^n$ với $n$ là một số nguyên không âm bằng cách nhận liên tiếp với $x$, bắt đầu với 1. Sau đó mở rộng thủ tục này và dùng tính chất $x^{-n} = 1/x^n$ để tính $x^n$ với $n$ âm).

**5.** Lập thuật toán trao đổi các giá trị của các biến $x$ và $y$ bằng cách chỉ dùng phép gán. Số tối thiểu các lệnh gán để làm việc đó là bao nhiêu?

**6.** Mô tả thuật toán chỉ dùng lệnh gán để thay bộ ba số $(x, y, z)$ thành $(y, z, x)$. Số lệnh gán tối thiểu cần dùng là bao nhiêu?

**7.** Liệt kê tất cả các bước cần tiến hành để tìm kiếm số 9 trong dãy 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11 khi dùng :

a) thuật toán tìm kiếm tuyến tính .

b) thuật toán tìm kiếm nhị phân.

**8.** Liệt kê tất cả các bước cần tiến hành để tìm số 7 trong dãy cho trong Bài tập 7.

**9.** Mô tả thuật toán chèn một số nguyên $x$ vào vị trí thích hợp trong dãy các số nguyên $a_1, a_2 \dots a_n$ xếp theo thứ tự tăng dần.

**10.** Mô tả thuật toán tìm số nguyên nhỏ nhất trong một dãy hữu hạn các số tự nhiên.

**11.** Tìm thuật toán xác định vị trí gặp đầu tiên của phần tử lớn nhất trong bảng liệt kê các số nguyên, trong đó các số nguyên không nhất thiết phải khác nhau.

**12.** Mô tả thuật toán xác định vị trí gặp cuối cùng của phần tử nhỏ nhất trong một bảng liệt kê các số nguyên, trong đó các số này không nhất thiết phải khác nhau.

**13.** Mô tả thuật toán tìm số cực đại, số trung tâm, số trung bình và số cực tiểu của tập gồm ba số nguyên. (Số **trung tâm** của tập các số nguyên là số ở giữa của bảng liệt kê khi các số nguyên đó được liệt kê theo thứ tự tăng dần. Số **trung bình** của tập các số nguyên là tổng các số nguyên đó chia cho số các số nguyên trong tập).

**14.** Mô tả thuật toán tìm cả số lớn nhất lẫn bé nhất trong dãy hữu hạn các số nguyên

**15.** Mô tả thuật toán xếp ba số hạng đầu tiên của một dãy các số nguyên có chiều dài tùy ý theo thứ tự tăng dần.

**16.** Mô tả thuật toán tìm từ dài nhất trong một câu tiếng Anh, (ở đây từ là một xâu các chữ cái, còn câu là một bảng liệt kê các từ cách nhau một khoảng trống).

**17.** Mô tả thuật toán xác định một hàm từ một tập hữu hạn này đến một tập hữu hạn khác có là toàn ánh hay không?

**18.** Mô tả thuật toán xác định một hàm từ tập hữu hạn này đến tập hữu hạn khác có là đơn ánh hay không ?

**19.** Mô tả thuật toán đếm số các số 1 trong một xâu bit bằng cách kiểm tra mỗi bit của xâu để xác định nó có là bit 1 hay không.

**20.** Thay đổi Algorithm 3 sao cho thủ tục tìm kiếm nhị phân so sánh $x$ với $a_m$ ở mỗi giai đoạn của thuật toán và thuật toán kết thúc nếu $x = a_m$. Phiên bản này của thuật toán đó có ưu điểm gì?

**21.** **Thuật toán tìm kiếm tam phân** xác định vị trí của một phần tử trong một bảng liệt kê các số nguyên theo thứ tự tăng dần bằng cách tách liên tiếp bảng liệt kê đó thành ba bảng liệt kê con có kích thước bằng nhau (hoặc gần bằng nhau nhất có thể được) và giới hạn việc tìm kiếm trong một bảng liệt kê con thích hợp. Chỉ rõ các bước của thuật toán đó.

**22.** Chỉ rõ các bước của một thuật toán xác định vị trí của một phần tử trong một bảng liệt kê các số nguyên sắp theo thứ tự tăng dần bằng cách tách liên tiếp bảng liệt kê thành bốn bảng liệt kê con có chiều dài bằng nhau (hoặc gần bằng nhau nhất có thể được) và giới hạn việc tìm kiếm chỉ trong một bảng liệt kê con thích hợp.

**23.** **Kiểu** (mode) của một bảng liệt kê các số nguyên là phần tử ít nhất xuất hiện thường xuyên như các phần tử khác. Hãy lập một thuật toán tìm kiểu trong một dãy các số nguyên không giảm.

**24.** Lập thuật toán tìm tất cả các kiểu (xem định nghĩa của kiểu trong Bài tập 23) trong một bảng liệt kê các số nguyên không giảm.

**25.** Lập thuật toán tìm trong một dãy các số nguyên số hạng đầu tiên bằng một số hạng nào đó đứng trước nó trong dãy.

**26.** Lập thuật toán tìm trong một dãy các số nguyên tất cả các số hạng lớn hơn tổng tất cả các số hạng đứng trước nó trong dãy.

27. Lập thuật toán tìm trong dãy các số nguyên dương số hạng đầu tiên nhỏ hơn số hạng đứng ngay trước nó trong dãy.

# 2.2. ĐỘ PHỨC TẠP CỦA THUẬT TOÁN

## MỞ ĐẦU

Khi nào một thuật toán cho lời giải thỏa đáng đối với một bài toán ? Trước hết, nó phải luôn cho đáp số đúng. Làm thế nào chứng minh được điều đó? Vấn đề này ta sẽ xem xét ở chương 3. Thứ hai, thuật toán phải hiệu quả. Vấn đề này ta sẽ xét dưới đây.

Hiệu quả của một thuật toán được phân tích như thế nào? Một thước đo hiệu quả đó là thời gian mà máy tính sử dụng để giải bài toán theo thuật toán đang xét, khi các giá trị đầu vào có một kích thước xác định. Một thước đo thứ hai đó là dung lượng bộ nhớ đòi hỏi để thực hiện thuật toán khi các giá trị đầu vào có kích thước xác định.

Các vấn đề như thế liên quan đến độ **phức tạp tính toán** của một thuật toán. Sự phân tích thời gian cần thiết để giải một bài toán có kích thước đặc biệt nào đó liên quan đến **độ phức tạp thời gian** của thuật toán. Sự phân tích bộ nhớ cần thiết của máy tính liên quan với **độ phức tạp không gian** của thuật toán. Việc xem xét độ phức tạp thời gian và không gian của một thuật toán là một vấn đề rất thiết yếu khi các thuật toán được thực hiện. Biết một thuật toán sẽ đưa ra đáp số trong một micrô giây, trong một phút hoặc trong một tỷ năm, hiển nhiên, là điều hết sức quan trọng. Tương tự như vậy, dung lượng bộ nhớ đòi hỏi phải là khả dụng để giải một bài toán, vì vậy độ phức tạp không gian cũng cần phải tính đến.

Sự xem xét độ phức tạp không gian gắn liền với các cấu trúc dữ liệu đặc biệt được dùng để thực hiện thuật toán. Vì các cấu trúc dữ liệu không được xét kỹ trong cuốn sách này, nên độ phức tạp không gian sẽ không được xem xét ở đây. Chúng ta sẽ chỉ tập trung xem xét độ phức tạp thời gian.

Độ phức tạp thời gian của một thuật toán có thể được biểu diễn qua số các phép toán được dùng bởi thuật toán đó khi các giá trị đầu vào có một kích thước xác định. Các phép toán được dùng để đo độ phức tạp thời gian có thể là phép so sánh các số nguyên, các phép cộng, trừ, nhân, chia các số nguyên hoặc bất kỳ một phép tính sơ cấp nào khác. Sở dĩ độ phức tạp thời gian được mô tả thông qua số các phép toán đòi hỏi thay vì thời gian thực của máy tính là bởi vì các máy tính khác nhau thực hiện các phép tính sơ cấp trong những khoảng thời gian khác nhau. Hơn nữa, phân tích tất cả các phép toán thành các phép tính bit sơ cấp mà máy tính sử dụng là điều rất phức tạp. Các máy tính nhanh nhất hiện có có thể thực hiện các phép toán bit sơ cấp (ví dụ cộng, nhân, chia hoặc trao đổi hai bit) chỉ trong $10^{-9}$ giây (1 nano giây), nhưng một máy tính cá nhân có thể đòi hỏi tới $10^{-6}$ giây ($1\mu s$), tức là 1000 lần lâu hơn để cùng làm một phép toán.

Chúng ta sẽ minh họa sự phân tích độ phức tạp thời gian của một thuật toán bằng cách xét Algorithm 1 ở Tiết 2.1.

**Ví dụ 1.** Mô tả độ phức tạp thời gian của Algorithm 1 ở tiết 2.1 – thuật toán tìm phần tử lớn nhất của một tập hợp.

*Giải :* Vì phép so sánh là phép toán sơ cấp được sử dụng trong thuật toán này, nên số các phép so sánh sẽ được dùng làm thước đo độ phức tạp thời gian của thuật toán đó.

Để tìm phần tử lớn nhất của tập hợp $n$ phần tử được liệt kê theo thứ tự tùy ý, giá trị lớn nhất tạm thời trước hết được đặt bằng phần tử đầu tiên của bảng liệt kê đó. Sau đó, sau khi thực hiện một phép so sánh xác định rằng ta còn chưa đạt tới cuối bảng, giá trị lớn nhất tạm thời và số hạng thứ hai của bảng được so sánh, và cập nhật giá trị lớn nhất tạm thời bằng số hạng thứ hai, nếu nó lớn hơn. Thủ tục này cứ tiếp tục như thế : mỗi số hạng của dãy dùng hai phép so sánh, một để xác định ta còn chưa đạt đến cuối bảng và một để xác định có phải cập nhật giá trị lớn nhất tạm thời hay không. Vì hai phép so sánh này được dùng cho mỗi phần tử của bảng từ số hạng thứ hai tới số hạng thứ $n$ và thêm một phép so sánh nữa để ra khỏi vòng lặp lại khi $i = n + 1$, nên ta có chính xác $2(n - 1) + 1 = 2n - 1$ phép so sánh sẽ được dùng mỗi khi thuật toán này được áp dụng. Từ đó, thuật toán tìm phần tử lớn nhất của tập $n$ phần tử có độ phức tạp thời gian là $O(n)$ – được đo theo số các phép so sánh được sử dụng.

■

Tiếp theo ta sẽ phân tích độ phức tạp thời gian của thuật toán tìm kiếm.

**Ví dụ 2.** Mô tả độ phức tạp thời gian của thuật toán tìm kiếm tuyến tính.

*Giải :* Số các phép so sánh được dùng trong thuật toán này cũng sẽ được xem như thước đo độ phức tạp thời gian của nó. Ở mỗi một bước của vòng lặp trong thuật toán, có hai phép so sánh được thực hiện : một để xem đã tới cuối bảng chưa và một để so sánh phần tử $x$ với một số hạng của bảng. Cuối cùng còn một phép so sánh nữa làm ở ngoài vòng lặp. Do đó, nếu $x = a_i$, thì đã có $2i + 1$ phép so sánh được sử dụng. Số phép so sánh nhiều nhất, $2n + 2$, đòi hỏi phải được sử dụng khi phần tử $x$ không có mặt trong bảng. Trong trường hợp đó, $2n$ phép so sánh được dùng để xác định $x$ không phải là $a_i$ đối với $i = 1, 2, ..., n$; một phép so sánh nữa được dùng để ra khỏi vòng lặp và một phép so sánh nữa được làm ở ngoài vòng lặp. Như vậy khi $x$ không có mặt trong bảng, tổng số các phép so sánh đã sử dụng là $2n + 2$. Từ đó, thuật toán tìm kiếm tuyến tính đòi hỏi tối đa là $O(n)$ phép so sánh.

■

Loại phân tích độ phức tạp được dùng trong Ví dụ 2 là sự phân tích **trong trường hợp xấu nhất.** Đó là trường hợp phải dùng tối đa các phép toán để giải bài toán theo thuật toán đang xét với đầu vào có kích thước xác định. Phép phân tích trường hợp xấu nhất cho chúng ta biết thuật toán sẽ cần thực hiện bao nhiêu phép toán để đảm bảo sẽ đưa ra lời giải.

**Ví dụ 3.** Mô tả độ phức tạp thời gian của thuật toán tìm kiếm nhị phân.

*Giải :* Để đơn giản, ta giả sử rằng có $n = 2^k$ phần tử trong bảng liệt kê $a_1, a_2, \dots, a_n$ , với $k$ là một số nguyên không âm. Chú ý rằng $k = \log n$ (Nếu $n$ – số các phần tử của bảng – không phải là lũy thừa của 2, ta có thể xem bảng là một phần của một bảng lớn hơn với $2^{k+1}$ phần tử, trong đó $2^k < n < 2^{k+1}$. Do đó, $2^{k+1}$ là lũy thừa nhỏ nhất của 2 lớn hơn $n$).

Ở mỗi giai đoạn của thuật toán, $i$ và $j$ – vị trí của số hạng đầu tiên và số hạng cuối cùng của bảng con hạn chế tìm kiếm ở giai đoạn đó được so sánh để xem bảng con này còn nhiều hơn một phần tử hay không. Nếu $i < j$, một phép so sánh sẽ được làm để xác định $x$ có lớn hơn số hạng ở giữa của bảng con hạn chế hay không.

Ở giai đoạn đầu tiên, việc tìm kiếm được hạn chế trong một bảng có $2^{k-1}$ số hạng. Cho đến đây, đã dùng hai phép so sánh. Thủ tục này sẽ được tiếp tục, mỗi giai đoạn dùng hai phép so sánh để hạn chế việc tìm kiếm trong một bảng có số hạng chỉ còn một nửa. Nói một cách khác, hai phép so sánh đã được dùng ở giai đoạn đầu tiên của thuật toán, khi bảng liệt kê có $2^k$ phần tử, hai phép so sánh nữa khi sự tìm kiếm được qui về bảng liệt kê có $2^{k-1}$ phần tử ; rồi hai phép so sánh nữa khi sự tìm kiếm được qui về bảng liệt kê có $2^{k-2}$ phần tử, v.v... cho đến khi sự tìm kiếm qui về một bảng liệt kê có $2^1 = 2$ phần tử thì hai phép so sánh nữa sẽ được sử dụng. Cuối cùng, khi trong bảng chỉ còn một phần tử, một phép so sánh sẽ cho chúng ta biết rằng không còn một phần tử nào thêm nữa và một phép so sánh nữa cho biết số hạng đó có phải là $x$ hay không.

Như vậy, cần phải có nhiều nhất $2k + 2 = 2\log n + 2$ phép so sánh để thực hiện phép tìm kiếm nhị phân, khi bảng tìm kiếm có $2^k$ phần tử. (Nếu $n$ không phải là luỹ thừa của 2, bảng gốc sẽ được mở rộng tới bảng có $2^{k+1}$ phần tử, với $k = \lfloor \log n \rfloor$ và sự tìm kiếm đòi hỏi phải thực hiện $2\lceil \log n \rceil + 2$ phép so sánh). Do đó, thuật toán tìm kiếm nhị phân đòi hỏi tối đa O($\log n$) phép so sánh. Từ sự phân tích ở trên suy ra rằng thuật toán tìm kiếm nhị phân, ngay cả trong trường hợp xấu nhất, cũng hiệu quả hơn thuật toán tìm kiếm tuyến tính.

■

Một loại phân tích độ phức tạp quan trọng khác, ngoài sự phân tích trong trường hợp xấu nhất, là sự phân tích được gọi là sự phân tích **trong trường hợp trung bình**. Trong loại phân tích này, ta phải tìm số trung bình các phép toán được dùng để giải bài toán trên toàn bộ các giá trị đầu vào có kích thước đã cho. Sự phân tích độ phức tạp trong trường hợp trung bình thường phức tạp hơn nhiều so với sự phân tích trong trường hợp xấu nhất. Tuy nhiên, sự phân tích trong trường hợp trung bình đối với thuật toán tìm kiếm tuyến tính có thể thực hiện không mấy khó khăn như trong Ví dụ 4 dưới đây.

**Ví dụ 4.** Mô tả sự phân tích trong trường hợp trung bình của thuật toán tìm kiếm tuyến tính, với giả thiết rằng phần tử $x$ có mặt trong bảng liệt kê.

*Giải :* Có $n$ kiểu đầu vào khả dĩ khi biết trước $x$ có mặt trong bảng liệt kê. Nếu $x$ là số hạng đầu tiên của bảng liệt kê, cần phải làm ba phép so sánh : một để xác định đã đến cuối bảng hay chưa, một để so sánh $x$ với số hạng đầu tiên, và một ở ngoài vòng lặp. Nếu $x$ là số hạng thứ hai trong bảng, thì cần phải làm 2 phép so sánh nữa, vì vậy ta đã sử dụng tổng cộng 5 phép so sánh. Nói chung, nếu $x$ là phần tử thứ $i$ của bảng, thì mỗi một bước trong số $i$ bước, ta cần phải dùng 2 phép so sánh và thêm một phép so sánh ở ngoài vòng lặp nữa, sao cho cần phải làm tổng cộng $2i + 1$ phép so sánh. Vì thế, số trung bình các phép so sánh đã được sử dụng là :

$$\frac{3 + 5 + 7 + \ldots + (2n + 1)}{n} = \frac{2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n}{n}$$

Trong Tiết 3.2 ta sẽ chứng minh rằng :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Từ đó, số trung bình các phép so sánh được dùng bởi thuật toán tìm kiếm tuyến tính (khi biết trước $x$ có mặt trong bảng) là :

$$\frac{2\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]}{n} + 1 = n + 2$$

tức là $O(n)$.

*Chú ý.* Trong sự phân tích trình bày ở trên ta đã giả thiết rằng $x$ có mặt trong bảng liệt kê cần tìm kiếm và khả năng nó ở bất kỳ vị trí nào trong bảng là như nhau. Ta cũng có thể tiến hành phân tích trong trường hợp trung bình đối với thuật toán trên khi $x$ có thể không có mặt trong bảng (xem Bài tập 13 ở cuối tiết này).

■

Bảng 1 giới thiệu một số thuật ngữ thường dùng để mô tả độ phức tạp thời gian của một thuật toán. Ví dụ, một thuật toán được nói là có **độ phức tạp hàm mũ**, nếu độ phức tạp thời gian của nó là $O(b^n)$, với $b > 1$, được đo qua một loại phép toán đặc biệt nào đó. Tương tự, một thuật toán có độ phức tạp thời gian là $O(n^b)$ được nói là có **độ phức tạp đa thức**. Thuật toán tìm kiếm tuyến tính có **độ phức tạp tuyến tính** (trong trường hợp xấu nhất hoặc trung bình) và thuật toán tìm kiếm nhị phân có **độ phức tạp logarit** (trong trường hợp xấu nhất), được đo qua các phép so sánh được sử dụng.

Đánh giá big-$O$ của độ phức tạp thời gian của một thuật toán cho biết thời gian đòi hỏi để giải một bài toán thay đổi như thế nào khi kích thước đầu vào tăng. Thực tế, đánh giá tốt nhất (tức là với hàm nhỏ nhất) có thể được chứng minh rằng đã được sử dụng. Tuy nhiên, đánh giá big-O của độ phức tạp thời gian không thể được phiên trực tiếp thành lượng thời gian mà máy tính đã sử dụng. Một nguyên nhân là ở chỗ đánh giá big-O $f(n)$ là $O(g(n))$, với $f(n)$ là độ phức tạp thời gian của thuật toán, có nghĩa là $f(n) \leq C(g(n))$ với mọi $x > k$, ở đây $C$ và $k$ là các hằng số. Vì vậy nếu không biết $C$ và $k$ trong bất đẳng thức trên, sự đánh giá này không thể được dùng để xác định giới hạn trên của số các phép toán được dùng. Hơn nữa, như đã nhận xét ở trên, thời gian đòi hỏi để thực hiện một phép toán còn phụ thuộc vào loại phép toán và máy tính sử dụng.

Tuy nhiên, thời gian đòi hỏi bởi một thuật toán để giải một bài toán có kích thước đã cho có thể xác định được nếu tất cả các phép toán được qui về các phép toán bit được sử dụng bởi máy tính. Bảng 2 cho thấy thời gian cần thiết để giải các bài toán có kích thước khác nhau theo thuật toán dùng số các phép tính bit đã được chỉ ra ở hàng thứ 3 cột hai đến bảy trong bảng. Thời gian lớn hơn $100^{100}$ năm được chỉ bằng các dấu sao (*). Khi lập bảng này, mỗi một phép toán bit được giả sử là mất $10^{-9}$ giây – thời gian đòi hỏi bởi một máy tính nhanh nhất hiện nay. Trong tương lai, thời gian này có thể sẽ giảm, khi những máy tính nhanh hơn được tạo ra.

**BẢNG 1. Các thuật ngữ thường dùng cho độ phức tạp của một thuật toán**

| *Độ phức tạp* | *Thuật ngữ* |
|---|---|
| $O(1)$ | Độ phức tạp hằng số |
| $O(\log n)$ | Độ phức tạp logarit |
| $O(n)$ | Độ phức tạp tuyến tính |
| $O(n\log n)$ | Độ phức tạp $n\log n$ |
| $O(n^b)$ | Độ phức tạp đa thức |
| $O(b^n)$, $b > 1$ | Độ phức tạp hàm mũ |
| $O(n!)$ | Độ phức tạp giai thừa |

Một điều quan trọng cần phải biết là máy tính phải cần bao lâu để giải xong một bài toán. Ví dụ, nếu một thuật toán đòi hỏi 10 giờ, thì có thể còn đáng chi phí thời gian máy tính (và tiền bạc nữa) đòi hỏi để giải bài toán đó. Nhưng nếu một thuật toán đòi hỏi 10 tỷ năm để giải một bài toán, thì thực hiện thuật toán đó sẽ là một điều phi lý. Một trong những hiện tượng lý thú nhất của công nghệ hiện đại là sự tăng ghê gớm của tốc độ và lượng bộ nhớ trong máy tính. Một nhân tố quan trọng khác làm giảm thời gian cần thiết để giải một bài toán là sự **xử lý song song** – đây là kỹ thuật thực hiện đồng thời các dãy phép tính. Do sự tăng tốc độ tính toán, và dung lượng bộ nhớ máy tính, cũng như nhờ việc dùng các thuật toán lợi dụng được ưu thế của kỹ thuật xử lý song

song, các bài toán năm năm trước đây được xem là không thể giải được, thì bây giờ có thể giải bình thường và sau năm năm nữa câu nói này chắc vẫn còn đúng.

**BẢNG 2. Thời gian máy tính được dùng bởi một thuật toán**

| *Kích thước của bài toán* | *Các phép tính bit được sử dụng* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | $\log n$ | $n$ | $n\log n$ | $n^2$ | $2^n$ | $n!$ |
| 10 | $3.10^{-9}$ s | $10^{-8}$ s | $3.10^{-8}$ s | $10^{-7}$ s | $10^{-6}$ s | $3.10^{-3}$ s |
| $10^2$ | $7.10^{-9}$ s | $10^{-7}$ s | $7.10^{-7}$ s | $10^{-5}$ s | $4.10^{13}$năm | * |
| $10^3$ | $1,0.10^{-8}$ s | $10^{-6}$ s | $1.10^{-5}$ s | $10^{-3}$ s | * | * |
| $10^4$ | $1,3.10^{-8}$ s | $10^{-5}$ s | $1.10^{-4}$ s | $10^{-1}$ s | * | * |
| $10^5$ | $1,7.10^{-8}$ s | $10^{-4}$ s | $2.10^{-3}$ s | 10s | * | * |
| $10^6$ | $2.10^{-8}$ s | $10^{-3}$ s | $2.10^{-2}$ s | 17 phút | * | * |

## BÀI TẬP

1. Có bao nhiêu phép so sánh được dùng trong thuật toán trong Bài tập 10, Tiết 2.1 để tìm số tự nhiên nhỏ nhất trong dãy $n$ số tự nhiên?

2. Viết thuật toán sắp 4 số hạng đầu tiên của một dãy có chiều dài tùy ý theo thứ tự tăng dần. Chứng minh rằng thuật toán này có độ phức tạp thời gian là $O(1)$ được tính qua số các phép so sánh được sử dụng.

3. Giả sử một phần tử đã biết có mặt trong số bốn số hạng đầu tiên của một bảng liệt kê gồm 32 số hạng. Hỏi thuật toán tìm kiếm tuyến tính hay thuật toán tìm kiếm nhị phân tìm ra vị trí của phần tử đó nhanh hơn.

4. Xác định số các phép nhân được dùng để tính $x^{2^k}$ bắt đầu với $x$ rồi liên tiếp bình phương (để tìm $x^2$, $x^4$, v.v...). Cách này có hiệu quả hơn cách nhân $x$ với chính nó một số lần thích hợp không?

5. Cho đánh giá big–O đối với số các phép so sánh được dùng bởi một thuật toán để xác định số các số 1 trong một xâu bit bằng cách kiểm tra từng bit của xâu, để xác định nó có là bit 1 không. (Xem Bài tập 19, Tiết 2.1)

**6***. a) Chứng minh rằng thuật toán sau xác định số các bit 1 trong một xâu bit $S$.

```
procedure đếm bit (S : xâu bit)
count : = 0
while S ≠ 0
begin
    count : = count + 1
    S : = S ∧ (S - 1)
end {count là số các số 1 trong S}
```

Ở đây $S - 1$ là xâu bit nhận được bằng cách thay bit 1 ở bên phải cùng thành bit 0 và tất cả các bit 0 ở bên phải nó thành bit 1. (Nhớ rằng $S \wedge (S - 1)$ là AND bit của $S$ và $S - 1$).

b) Cần phải thực hiện bao nhiêu phép AND bit để tìm số các bit 1 trong một xâu bit?

**7.** Thuật toán thông thường để đánh giá một đa thức

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

tại $x = c$ có thể được thể hiện trong giả mã sau :

```
procedure đa thức (c, a_0, a_1 ... a_n : real number)
power : = 1
y : = a_0
for i : = 1 to n
begin
    power : = power * c
    y : = y + a_i * power.
end {y = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + ... + a_1 c + a_0}
```

Ở đây giá trị cuối cùng của $y$ chính là giá trị của đa thức tại $x = c$.

a) Đánh giá $3x^2 + x + 1$ ở $x = 2$ bằng cách thực hiện từng bước của thuật toán trên.

b) Có chính xác bao nhiêu phép nhân và phép cộng đã được sử dụng để đánh giá đa thức bậc $n$ tại $x = c$ ? (không kể các phép cộng được dùng để tăng biến của vòng lặp).

**8.** Có một thuật toán (qua các phép nhân và phép cộng) hiệu quả hơn thuật toán thông thường ở trên dùng để đánh giá một đa thức. Thuật toán đó gọi là **phương pháp Horner**. Giả mã sau cho thấy cách dùng phương pháp đó để xác định giá trị của đa thức

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \text{ tại } x = c.$$

---

**procedure** *Horner* ($c, a_0, a_1, \dots a_n$ : real number)
$y := a_n$
**for** $i := 1$ **to** $n$
$y := y * c + a_{n-i}$
$\{y = a_nc^n + a_{n-1}c^{n-1} + \dots + a_1c + a_0\}$

---

a) Đánh giá $3x^2 + x + 1$ tại $x = 2$ bằng cách thực hiện từng bước của thuật toán trên.

b) Có chính xác bao nhiêu phép nhân và phép cộng đã được sử dụng bởi thuật toán đó để đánh giá một đa thức bậc $n$ ở $x = c$? (không kể các phép cộng được dùng để tăng biến vòng lặp).

**9.** Một bài toán lớn cỡ như thế nào có thể giải trong một giây nếu dùng một thuật toán đòi hỏi phải thực hiện $f(n)$ phép tính bit, với mỗi phép tính bit được thực hiện trong $10^{-9}$s và $f(n)$ có các giá trị sau :

a) $\log n$ ? b) $n$ ? c) $n\log n$ ?

d) $n^2$ ? e) $2^n$ ? f) $n!$ ?

**10**. Một thuật toán cần bao nhiêu thời gian để giải một bài toán có kích thước $n$, nếu thuật toán đó dùng $2n^2 + 2^n$ phép toán bit, mỗi một phép mất $10^{-9}$s, với các giá trị sau của $n$ ?

a) 10 b) 20 c) 50 d) 100.

**11.** Một thuật toán dùng $2^{50}$ phép toán bit sẽ cần bao nhiêu thời gian, nếu mỗi phép toán bit mất một khoảng thời gian sau :

a) $10^{-6}$s b) $10^{-9}$s c) $10^{-12}$s.

**12.** Xác định số phép so sánh ít nhất. (hay hiệu, suất, trong trường hợp tốt nhất).

a) Đòi hỏi để xác định số lớn nhất trong một dãy các số nguyên khi dùng Algorithm 1 của tiết 2.1.

b) Được sử dụng để xác định vị trí của một phần tử trong một dãy $n$ số hạng khi dùng thuật toán tìm kiếm tuyến tính.

c) Được dùng để xác định vị trí một phần tử trong dãy $n$ số hạng khi dùng thuật toán tìm kiếm nhị phân.

**13.** Phân tích độ phức tạp thời gian trong trường hợp trung bình của thuật toán tìm kiếm tuyến tính, nếu biết chính xác một nửa thời gian phần tử $x$ không có mặt trong dãy và khả năng $x$ ở bất cứ vị trí nào trong dãy là như nhau.

**14.** Một thuật toán được gọi là **tối ưu** để giải một bài toán đối với một phép toán xác định, nếu như không có một thuật toán nào khác giải được bài toán ấy mà chỉ dùng số các phép toán đó ít hơn.

a) Chứng minh rằng Algorithm 1 ở Tiết 2.1 là thuật toán tối ưu đối với số các phép so sánh các số nguyên (Chú ý: các phép so sánh được dùng để "kế toán" trong vòng lặp không liên quan gì đến đây).

b) Thuật toán tìm kiếm tuyến tính đối với số các phép so sánh các số nguyên có là tối ưu không? (không kể các phép so sánh được dùng để "kế toán" trong vòng lặp).

**15.** Mô tả độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất được đo qua các phép so sánh của thuật toán tìm kiếm tam phân được cho trong Bài tập 21 của Tiết 2.1.

**16.** Mô tả độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất, được đo qua các phép so sánh của thuật toán tìm kiếm được mô tả trong Bài tập 22 của Tiết 2.1.

**17.** Phân tích độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất của thuật toán mà bạn đã lập ở Bài tập 23 của Tiết 2.1 để xác định kiểu của một bảng liệt kê các số nguyên theo thứ tự không giảm.

**18.** Cũng hỏi như trên đối với thuật toán mà bạn đã lập ở Bài tập 24 của Tiết 2.1.

**19.** Cũng hỏi như trên đối với thuật toán bạn đã lập ở Bài tập 25 của Tiết 2.1.

**20.** Cũng hỏi như trên đối với thuật toán mà bạn đã lập ở Bài tập 26 của Tiết 2.1.

**21.** Cũng hỏi như trên đối với thuật toán mà bạn đã lập ở Bài tập 27 của Tiết 2.1.

# 2.3. CÁC SỐ NGUYÊN VÀ PHÉP CHIA

## MỞ ĐẦU

Phần của toán học rời rạc có liên quan đến các số nguyên và tính chất của chúng thuộc một ngành của toán học có tên là **lý thuyết số**. Tiết này là mở đầu cho phần nhập môn gồm ba tiết của lý thuyết số. Trong tiết này chúng ta sẽ ôn lại một số khái niệm cơ bản của lý thuyết số như : tính chia hết, ước số chung lớn nhất và số học đồng dư. Trong Tiết 2.4 ta sẽ mô tả một số thuật toán quan trọng lấy từ lý thuyết số, liên hệ các tư liệu trong Tiết 2.1 và 2.2 về thuật toán và độ phức tạp của chúng với những khái niệm được đưa vào ở tiết này. Ví dụ, chúng ta sẽ đưa ra thuật toán tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên dương và thuật toán thực hiện số học của máy tính bằng cách dùng khai triển nhị phân.

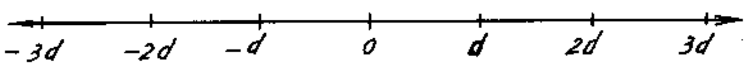
Những ý tưởng mà chúng ta sẽ phát triển trong tiết này đều dựa trên khái niệm về tính chia hết. Và một khái niệm quan trọng dựa trên tính chia hết là khái niệm số nguyên tố. Số nguyên tố là một số nguyên lớn hơn 1 và chỉ chia hết cho 1 và chính nó. Xác định một số nguyên có là nguyên tố hay không là điều rất quan trọng trong những ứng dụng đối với ngành mật mã. Một định lý quan trọng của lý thuyết số – Định lý cơ bản của số học – khẳng định rằng tất cả các số nguyên dương đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố. Việc phân tích các số nguyên ra thừa số nguyên tố có vai trò quan trọng trong mật mã. Phép chia một số nguyên cho một số nguyên dương khác cho thương số và số dư. Làm việc với các số dư sẽ dẫn tới số học đồng dư được dùng xuyên suốt trong tin học. Trong tiết này chúng ta sẽ xét ba ứng dụng của số học đồng dư : sự sinh các số giả ngẫu nhiên, sự gán các vị trí bộ nhớ cho các file và mã và giải mã các thư tín.

## PHÉP CHIA

Khi một số nguyên được chia cho một số nguyên thứ hai khác không, thương số có thể là một số nguyên hoặc không. Ví dụ, 12/3 = 4 là một số nguyên, trong khi 11/4 = 2,75 lại không là một số nguyên. Điều này dẫn tới định nghĩa sau :

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Nếu $a$ và $b$ là hai số nguyên với $a \neq 0$, ta nói $b$ chia hết cho $a$ nếu có một số nguyên $c$ sao cho $b = a.c$. Khi $b$ chia hết cho $a$, ta cũng nói $a$ là một ước số của $b$ và $b$ là bội của $a$. Ký hiệu $a \mid b$ là chỉ $b$ chia hết cho $a$ và $a \nmid b$ để chỉ $b$ không chia hết cho $a$.

Hình 1 cho đường thẳng số chỉ rõ số nguyên chia hết cho số nguyên dương $d$.




*Hình 1.* Các số nguyên chia hết cho số nguyên dương $d$.

**Ví dụ 1.** Xác định xem $3 \mid 7$ và $3 \mid 12$ có đúng không?

*Giải :* Ta có 3  7 vì 7/3 không phải là một số nguyên. Trái lại $3 \mid 12$ vì 12/3 = 4 là một số nguyên.

■

**Ví dụ 2.** Cho $n$ và $d$ là hai số nguyên dương. Có bao nhiêu số nguyên dương không vượt quá $n$ chia hết cho $d$?

*Giải :* Các số nguyên dương chia hết cho $d$ là tất cả các số nguyên dương có dạng $dk$, với $k$ cũng là một số nguyên dương. Do đó, số các số nguyên dương chia hết cho $d$ và không vượt quá $n$ sẽ bằng số các số nguyên $k$ với $0 < kd \leq n$ hay $0 < k \leq \frac{n}{d}$. Vì vậy có $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ số nguyên dương không vượt quá $n$ chia hết cho $d$.

■

Một số tính chất cơ bản của tính chia hết được cho trong Định lý 1.

**Định lý 1.** Cho $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Khi đó :

1) Nếu $a|b$ và $a|c$ thì $a|(b + c)$;

2) Nếu $a|b$ thì $a|bc$ với mọi số nguyên $c$ ;

3) Nếu $a|b$ và $b|c$ thì $a|c$.

*Chứng minh:* Giả sử $a|b$ và $a|c$. Khi đó, theo định nghĩa của tính chia hết, suy ra có tồn tại các số nguyên $s$ và $t$ với $b = as$ và $c = at$.

Do đó, $$b + c = as + at = a(s + t)$$

Vì vậy, $b + c$ chia hết cho $a$. Phần 1 của định lý được chứng minh. việc chứng minh các phần 2 và 3 của định lý xin dành lại cho độc giả như một bài tập.

■

Mọi số nguyên dương lớn hơn một đều chia hết ít nhất cho hai số nguyên, vì mọi số nguyên dương đều chia hết cho 1 và chính nó. Các số nguyên dương chỉ có chính xác hai ước số nguyên dương khác nhau đó được gọi là số **nguyên tố**.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Số nguyên dương $p$ lớn hơn 1 được gọi là số *nguyên tố* nếu nó chỉ có các ước số dương là 1 và $p$. Các số nguyên dương lớn hơn 1 và không phải là số nguyên tố được gọi là *hợp số*.

**Ví dụ 3.** Số 7 là số nguyên tố vì nó chỉ có các ước số dương là 1 và 7, trong khi 9 là một hợp số vì nó chia hết cho 3.

Số nguyên tố là các viên gạch xây nên các số nguyên dương, như định lý cơ bản của số học dưới đây chứng tỏ. Sự chứng minh định lý này sẽ được cho trong Tiết 3.2.

**Định lý 2.** Định lý cơ bản của số học. Mọi số nguyên dương đều có thể được viết duy nhất dưới dạng tích của các số nguyên tố. Trong đó các số nguyên tố được viết theo thứ tự tăng dần.

Ví dụ dưới đây minh họa sự phân tích một số nguyên ra thừa số nguyên tố.

**Ví dụ 4.** Sự phân tích 100, 641, 999 và 1024 ra thừa số nguyên tố cho :

$$100 = 2.2.5.5. = 2^2 5^2$$

$$641 = 641.$$

$$999 = 3.3.3.37 = 3^3.37$$

và $1024 = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^{10}$.

Việc xác định một số đã cho là số nguyên tố thường đóng một vai trò quan trọng. Ví dụ, trong ngành mật mã các số nguyên tố lớn nhất được dùng trong một số phương pháp để mã các bức thư bí mật. Một thủ tục để chứng minh một số nguyên là số nguyên tố được dựa trên nhận xét sau:

**Định lý 3:** Nếu $n$ là một hợp số, thì $n$ có ước số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{n}$.

***Chứng minh:*** Nếu $n$ là một hợp số, nó sẽ có một thừa số $a$ với $1 < a < n$. Do đó, $n = a.b$ với $a$, $b$ đều là các số nguyên dương lớn hơn 1. Ta cũng thấy rằng $a \leq \sqrt{n}$ và $b \leq \sqrt{n}$, vì nếu không $ab > \sqrt{n}.\sqrt{n} = n$. Vì vậy, $n$ có ước số nguyên dương không vượt quá $\sqrt{n}$. Ước số này hoặc là số nguyên tố hoặc theo định lý cơ bản của số học có ước số là số nguyên tố. Trong mọi trường hợp, $n$ có ước số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{n}$.

Từ Định lý 3 suy ra rằng một số nguyên là số nguyên tố nếu nó không chia hết cho một số nguyên tố nào nhỏ hơn hoặc bằng căn bậc hai của nó. Trong ví dụ sau, nhận xét đó đã được sử dụng để chứng minh số 101 là số nguyên tố.

**Ví dụ 5.** Chứng minh rằng số 101 là số nguyên tố. Các số nguyên tố không vượt quá $\sqrt{101}$ có cả thảy là 2, 3, 5 và 7. Vì 101 không chia hết cho 2, 3, 5 và 7 (tức là thương của 101 và các số đó không phải là một số nguyên), từ đó suy ra 101 là một số nguyên tố. ■

Vì tất cả các số nguyên đều có thể phân tích ra các thừa số nguyên tố, nên sẽ rất hữu ích nếu có một thủ tục tìm sự phân tích đó. Ta hãy xét bài toán phân tích số $n$ ra thừa số nguyên tố. Hãy bắt đầu bằng việc chia $n$ cho các số nguyên tố liên tiếp xuất phát từ số nguyên tố nhỏ nhất, tức là 2. Nếu $n$ có một thừa số nguyên tố, thì theo Định lý 3 thừa số nguyên tố $p$ không vượt qua $\sqrt{n}$ sẽ được tìm thấy. Do vậy, nếu không tìm được một thừa số nguyên tố nào không vượt quá $\sqrt{n}$, thì $n$ sẽ là số nguyên tố. Tóm lại, nếu tìm được thừa số nguyên tố $p$, thì hãy tiếp tục phân tích $n/p$. Chú ý rằng $n/p$ không thể có các thừa số nguyên tố nhỏ hơn $p$. Như vậy, nếu $n/p$ không có các thừa số nguyên tố lớn hơn hoặc bằng $p$ và không vượt quá căn bậc hai của nó, thì $n/p$ lại là một số nguyên tố. Trái lại, nếu nó có một thừa số nguyên tố $q$, thì lại tiếp tục phân tích $n(pq)$. Thủ tục này cứ tiếp tục cho tới khi phép phân tích quy về một số nguyên tố. Thủ tục này được minh họa trong ví dụ dưới đây.

**Ví dụ 6:** Phân tích 7007 ra thừa số nguyên tố.

*Giải:* Để phân tích 7007 ra thừa số nguyên tố, trước hết ra hãy thực hiện các phép chia 7007 cho các số nguyên tố liên tiếp, bắt đầu từ 2. Ta thấy 7007 không chia hết cho 2, 3, và 5. Tuy nhiên 7007 chia hết cho 7, với $7007/7 = 1001$. Tiếp sau, là chia 1001 cho các số nguyên tố liên tiếp bắt đầu từ 7. Ta ngay lập tức thấy rằng 1001 cũng lại chia hết cho 7 vì $1001/7 = 143$. Tiếp tục chia cho các số nguyên liên tiếp, bắt đầu từ 7. Mặc dù 143 không chia hết cho 7, nhưng nó chia hết cho 11 và $143/11 = 13$. Vì 13 là số nguyên tố nên thủ tục kết thúc ở đây.

Từ đó: $$7007 = 7.7.11.13 = 7^2.11.13$$

Dùng phép chia tầm thường và Định lý 3 ta đã nhận được các thủ tục để phân tích một số nguyên ra thừa số nguyên tố và kiểm tra tính nguyên tố của một số nguyên. Tuy nhiên, các thủ tục này chưa phải là những thuật toán hiệu quả nhất được biết cho các nhiệm vụ đó. Gần đây việc phân tích ra thừa số nguyên tố và kiểm tra tính nguyên tố của một số trở lên quan trọng trong những ứng dụng của lý thuyết số đối với ngành mật mã. Điều này dẫn tới sự quan tâm rất to lớn đối với việc phát triển các thuật toán hiệu quả cho các nhiệm vụ đó. Độc giả có thể tham khảo thêm về vấn đề này trong các tài liệu được giới thiệu ở cuối quyển sách này.

## THUẬT TOÁN CHIA

Chúng ta thấy rằng một số nguyên có thể chia hết hoặc không chia hết cho một số nguyên khác. Tuy nhiên, khi một số nguyên được chia cho một số nguyên dương, luôn có một thương và một số dư, như thuật toán chia dưới đây cho thấy.

**ĐỊNH LÝ 4. Thuật toán chia.** Cho $a$ là một số nguyên và $d$ là một số nguyên dương. Khi đó tồn tại các số $q$ và $r$ duy nhất, với $0 \leq r < d$, sao cho $a = dq + r$.

*Chú ý* : Định lý 4 không thực sự là một thuật toán. (Tại sao không?). Tuy nhiên, chúng ta vẫn dùng tên truyền thống đó của nó.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Trong đẳng thức được cho trong thuật toán chia, $d$ được gọi là *số chia*, $a$ được gọi là *số bị chia*, $q$ được gọi là *thương số* và $r$ được gọi là *số dư*.

Hai ví dụ sau minh họa cho thuật toán chia.

**Ví dụ 7.** Xác định thương số và số dư khi chia 101 cho 11.

***Giải*** : Ta có : $$101 = 11.9 + 2$$

Vậy, thương số của phép chia 101 cho 11 là 9 và số dư là 2.

■

**Ví dụ 8.** Xác định thương số và số dư của phép chia (−11) cho 3?

***Giải*** : Ta có : $$-11 = 3(-4) + 1$$

Do đó, thương số của phép chia (− 11) cho 3 là − 4 và số dư là 1. Chú ý rằng số dư không thể âm, do đó số dư trong ví dụ trên không thể là (− 2), mặc dù :

$$(-11) = 3(-3) - 2$$

vì $r = -2$ không thỏa mãn $0 < r < 3$.

■

Chú ý rằng số nguyên $a$ chia hết cho số nguyên $d$ nếu và chỉ nếu số dư bằng 0

## ƯỚC SỐ CHUNG LỚN NHẤT, BỘI SỐ CHUNG NHỎ NHẤT

Số nguyên lớn nhất đều được chia hết bởi hai số nguyên được gọi là **ước số chung lớn nhất** của hai số nguyên đó.

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Cho $a$ *và* $b$ là hai số nguyên khác không, số nguyên $d$ lớn nhất sao cho $d \mid a$ và $d \mid b$ được gọi là *ước số chung lớn nhất* của $a$ và $b$. Ước số chung lớn nhất của $a$ và $b$ được ký hiệu là ƯCLN($a$, $b$).

Ước số chung lớn nhất của hai số nguyên khác không tồn tại bởi vì các ước số chung của chúng là hữu hạn. Một cách để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên là tìm tất cả các ước số chung dương của cả hai số rồi chọn lấy ước số chung lớn nhất. Điều này được làm trong các ví dụ dưới đây. Một thuật toán hiệu quả hơn để tìm ước số chung lớn nhất sẽ được cho sau.

**Ví dụ 9.** Tìm ước số chung lớn nhất của 24 và 36.

*Giải* : Các ước số chung dương của 24 và 36 là 1, 2, 3, 4, 6 và 12.

Vậy ƯCLN(24, 36) = 12.

■

**Ví dụ 10.** Tìm ước số chung lớn nhất của 17 và 22?

*Giải* : Các ước số chung của 17 và 22 không có một ước số chung dương nào ngoài 1. Vậy ƯCLN(17, 22) = 1.

■

Vì chỉ ra hai số nguyên không có các ước số chung dương nào ngoài 1 cũng là một điều quan trọng, nên ta có định nghĩa sau.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Các số nguyên $a$ và $b$ được gọi là *nguyên tố cùng nhau* nếu ước số chung lớn nhất của chúng bằng 1.

**Ví dụ 11.** Từ Ví dụ 10 suy ra 17 và 22 là nguyên tố cùng nhau, vì ƯCLN(17, 22) = 1.

■

Vì ta cũng thường cần phải chỉ rõ không có hai số nguyên nào trong tập các số nguyên có ước số chung lớn nhất lớn hơn 1, ta có định nghĩa sau :

**ĐỊNH NGHĨA 6.** Các số nguyên $a_1, a_2, ..., a_n$, được gọi là đôi một nguyên tố cùng nhau nếu ƯCLN($a_i$, $a_j$) = 1 với mọi $1 \leq i, j \leq n$.

**Ví dụ 12.** Hãy xác định xem các số nguyên 10, 17 và 21 có đôi một nguyên tố cùng nhau không? Cũng hỏi như trên đối với 10, 19 và 24.

*Giải* : Vì ƯCLN(10, 17) = 1, ƯCLN(10, 21) = 1 và ƯCLN(17, 21) = 1, nên ta kết luận rằng 10, 17 và 21 là đôi một nguyên tố cùng nhau.

Vì ƯCLN(10, 24) = 2 > 1, ta thấy rằng 10, 19, và 24 không đôi một nguyên tố cùng nhau.

■

Một cách khác để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên là dùng các phân tích của chúng ra thừa số nguyên tố. Giả sử $a$ và $b$ là hai số nguyên khác không, được phân tích ra thừa số nguyên tố như sau :

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n} \text{ và } b = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \dots p_n^{b_n}$$

ở đây mỗi số mũ là số nguyên không âm và tất cả các số nguyên tố xuất hiện trong phép phân tích ra thừa số nguyên tố của $a$ hoặc $b$ đều được đưa vào phép phân tích của $a$ và $b$ với số mũ zero, nếu cần. Khi đó ƯCLN($a$, $b$) được cho bởi :

$$\text{ƯCLN}(a,\ b) = p_1^{\min(a_1,b_1)}\ p_2^{\min(a_2,b_2)} \ldots p_n^{\min(a_n,b_n)}$$

Ở đây min ($x$, $y$) là số nhỏ nhất trong hai số $x$ và $y$. Để chứng minh công thức tính ƯCLN($a$,$b$) ở trên là đúng ta chỉ cần chứng tỏ rằng cả $a$ và $b$ đều chia hết cho số nguyên ở vế phải và không có số nguyên nào lớn hơn có tính chất đó. Thực vậy, $a$ và $b$ đều chia hết cho số nguyên đó vì lũy thừa của mỗi số nguyên tố trong phân tích ra thừa số nguyên tố của nó đều không vượt quá lũy thừa của số nguyên tố đó trong phân tích ra thừa số nguyên tố của $a$ cũng như của $b$. Hơn nữa, $a$ và $b$ không thể chia hết cho số nguyên nào lớn hơn, vì số mũ của các số nguyên tố trong phân tích này không thể tăng và cũng không thể đưa thêm các số nguyên tố khác vào.

**Ví dụ 13.** Vì các phân tích của 120 và 500 ra thừa số nguyên tố là : $120 = 2^3.3.5$ và $500 = 2^2.5^3$, nên ước số chung lớn nhất của chúng là :

$$\text{ƯCLN}(120,\ 500) = 2^{\min(3,2)}\ 3^{\min(1,0)}\ 5^{\min(1,3)} = 2^2.3^0.5^1 = 20.$$

■

Phép phân tích ra thừa số nguyên tố cũng có thể được dùng để tìm **bội số chung nhỏ nhất** của hai số nguyên.

**ĐỊNH NGHĨA 7.** Bội số chung nhỏ nhất của hai số nguyên $a$ và $b$ là số nguyên dương nhỏ nhất chia hết cho cả $a$ lẫn $b$. Bội số chung nhỏ nhất của hai số nguyên $a$, $b$ được ký hiệu là BCNN($a$,$b$).

Bội số chung nhỏ nhất tồn tại vì tập các số nguyên chia hết cho $a$ và $b$ là không rỗng và tất cả các tập không rỗng của các số nguyên dương đều có phần tử nhỏ nhất (điều này sẽ được xét kỹ ở Chương 3). Giả sử rằng phân tích ra thừa số nguyên tố của $a$ và $b$ như cho ở trên. Khi đó bội số chung nhỏ nhất của $a$ và $b$ được cho bởi :

$$\text{BCNN}(a,b) = p_1^{\max(a_1,b_1)}\ p_2^{\max(a_2,b_2)} \ldots p_n^{\max(a_n,b_n)}$$

với max ($x$,$y$) là số lớn nhất trong hai số $x$ và $y$. Công thức này đúng bởi vì một bội số chung của $a$ và $b$ ít nhất phải có max ($a_i$, $b_i$) các thừa số nguyên tố $p_i$ và bội số chung nhỏ nhất không có các thừa số nguyên tố nào khác với các thừa số nguyên tố của $a$ và $b$.

**Ví dụ 4.** Xác định bội số chung nhỏ nhất của $2^3 3^5 7^2$ và $2^4 3^3$.

*Giải*: Ta có :

$$\text{BCNN}(2^3 3^5 7^2,\ 2^4 3^3) = 2^{\max(3,4)}\ 3^{\max(5,3)}\ 7^{\max(2,0)} = 2^4 3^5 . 7^2$$

■

Định lý sau cho mối quan hệ giữa ước số chung lớn nhất và bội số chung nhỏ nhất của hai số nguyên. Nó có thể được chứng minh bằng cách dùng hai công thức đã được dẫn ra ở trên đối với hai đại lượng đó. Phần chứng minh này xin dành lại cho độc giả như một bài tập.

**ĐỊNH LÝ 5.** Cho $a$ và $b$ là hai số nguyên dương. Khi đó

$$ab = \text{ƯCLN}(a,\ b).\text{BCNN}(a,b).$$

## SỐ HỌC ĐỒNG DƯ

Trong một số tình huống, chúng ta chỉ cần quan tâm tới số dư của một số nguyên khi chia nó cho một số nguyên dương xác định nào đó. Ví dụ, khi chúng ta hỏi sau đây 50 giờ nữa sẽ là mấy giờ (theo đồng hồ 24 giờ), là chúng ta chỉ quan tâm tới số dư khi lấy 50 cộng với số giờ hiện thời và chia cho 24. Vì chúng ta thường phải quan tâm chỉ tới số dư như vậy, nên ta có một số ký hiệu đặc biệt cho nó.

**ĐỊNH NGHĨA 8.** Cho $a$ là một số nguyên và $m$ là một số nguyên dương. Khi đó ta ký hiệu $a$ **mod** $m$ là số dư khi chia $a$ cho $m$.

Từ định nghĩa của số dư, ta suy ra rằng $a$ **mod** $m$ là số nguyên $r$ sao cho : $a = qm + r$ và $0 \leq r < m$.

**Ví dụ 15.** Ta thấy

$$17 \textbf{ mod } 5 = 2,\ -133 \textbf{ mod } 9 = 2 \text{ và } 2001 \textbf{ mod } 101 = 82$$

■

Chúng ta cũng có ký hiệu để chỉ ra rằng hai số nguyên $a$ và $b$ có cùng số dư khi chia chúng cho một số nguyên dương $m$.

**ĐỊNH NGHĨA 9.** Nếu $a$ và $b$ là hai số nguyên và $m$ là một số nguyên dương, thì $a$ được gọi là đồng dư với $b$ theo mođun $m$ nếu $a - b$ chia hết cho $m$. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $a \equiv b (\text{mod } m)$ để chỉ rằng $a$ đồng dư với $b$ theo mođun $m$. Nếu $a$ *và* $b$ không đồng dư theo mođun $m$, ta viết $a \not\equiv b\ (\text{mod } m)$.

Chú ý rằng $a \equiv b\ (\text{mod}\, m)$ nếu và chỉ nếu $a$ **mod** $m$ = $b$ **mod** $m$.

**Ví dụ 16.** Xác định xem 17 có đồng dư với 5 theo mođun 6 không? Cũng hỏi như vậy đối với 24 và 14?

***Giải*** : Vì $17 - 5 = 12$ chia hết cho 6, nên $17 \equiv 5 \pmod 6$. Tuy nhiên, vì $24 - 14 = 10$ không chia hết cho 6 nên $24 \not\equiv 14 \pmod 6$.

■

Nhà toán học vĩ đại người Đức Friedrich Gauss đã phát triển khái niệm đồng dư vào cuối thế kỷ 19. Khái niệm đồng dư đóng một vai trò rất quan trọng trong sự phát triển của lý thuyết số. Định lý sau cho một cách rất tiện ích để làm việc với các đồng dư.

**ĐỊNH LÝ 6.** Cho $m$ là một số nguyên dương. Các số nguyên $a$ và $b$ đồng dư theo mođun $m$ nếu và chỉ nếu tồn tại một số nguyên $k$ sao cho $a = b + km$.

***Chứng minh*** : Nếu $a \equiv b \pmod m$, thì $m \mid (a - b)$. Điều này có nghĩa là tồn tại một số nguyên $k$ sao cho $a - b = km$, tức là $a = b + km$. Ngược lại, nếu tồn tại một số nguyên $k$ sao cho $a = b + km$, thì $km = a - b$, tức $(a - b)$ chia hết cho $m$, nghĩa là $a \equiv b \pmod m$.

■

Định lý sau cho các phép cộng và nhân của các đồng dư.

**ĐỊNH LÝ 7.** Cho $m$ là một số nguyên dương. *Nếu* $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ thì :

$$a + c \equiv b + d \pmod m$$

và
$$ac \equiv bd \pmod m$$

***Chứng minh***: Vì $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$, nên tồn tại các số nguyên $s$ và $t$ sao cho $b = a + sm$ và $d = c + tm$. Từ đó,

$$b + d = (a + sm) + (c + tm) = (a + c) + m(s + t)$$

và
$$bd = (a + sm)(c + tm) = ac + m(at + cs + stm)$$

Do đó,

$$a + c \equiv b + d \pmod m$$

và
$$ac \equiv bd \pmod m$$

■

**Ví dụ 17.** Vì $7 \equiv 2 \pmod 5$ và $11 \equiv 1 \pmod 5$, từ Định lý 7 suy ra :

$$18 = 7 + 11 \equiv 2 + 1 = 3 \pmod 5$$

và
$$77 = 7.11 \equiv 2.1 = 2 \pmod 5.$$

■

## CÁC ỨNG DỤNG CỦA ĐỒNG DƯ

Lý thuyết số có những ứng dụng trong rất nhiều lĩnh vực. Trong tiết này ta sẽ giới thiệu ba ứng dụng của nó, đó là việc dùng các đồng dư để gán các vị trí của bộ nhớ cho các file ; sự tạo các số giả ngẫu nhiên và hệ thống mật mã dựa trên số học đồng dư.

**Ví dụ 18.** *Các hàm băm.* Máy tính trung tâm ở trường bạn đều lưu giữ hồ sơ của mỗi sinh viên. Vấn đề đặt ra là các ô nhớ được gán như thế nào để hồ sơ của các sinh viên có thể truy cập được nhanh? Lời giải của bài toán này là cần phải dùng một **hàm băm** được chọn thích hợp. Mỗi hồ sơ được nhận dạng bằng cách dùng một **chìa khóa** tương ứng với một hồ sơ sinh viên duy nhất. Ví dụ, hồ sơ sinh viên thường được nhận đạng hằng cách dùng số của thẻ bảo hiểm xã hội của sinh viên đó như là *chìa khóa*. Hàm băm $h(k)$ gán ô nhớ $h(k)$ cho hồ sơ có chìa khóa là $k$. Thực tế, người ta có thể sử dụng nhiều hàm băm khác nhau. Một trong số các hàm băm thường dùng nhất là hàm :

$$h(k) = k \textbf{ mod } m.$$

Ở đây $m$ là số các ô nhớ khả dụng.

Các hàm băm cần phải dễ dàng đánh giá để các hồ sơ được truy cập nhanh. Hàm băm $h(k) = k$ **mod** $m$ đáp ứng được yêu cầu đó ; để tìm $h(k)$ ta chỉ cần tính số dư trong phép chia $k$ cho $m$. Hơn nữa, hàm băm cần phải là toàn ánh để cho tất cả các ô nhớ đều có thể sử dụng. Hàm $h(k) = k$ **mod** $m$ cũng thoả mãn tính chất này.

Ví dụ, khi $m = 111$, hồ sơ của sinh viên có số thẻ Bảo hiểm xã hội 064212848 sẽ được gán cho ô nhớ 14, vì

$$h(064212848) = 064212848 \textbf{ mod } 111 = 14.$$

Tương tự, vì $h(037149212) = 037149212$ **mod** $111 = 65$,

nên hồ sơ của sinh viên có số thẻ bảo hiểm xã hội là 037149212 sẽ được gán cho ô nhớ 65.

Vì hàm băm không phải là đơn ánh (do chìa khóa khả dĩ nhiều hơn số ô nhớ), nên có thể có hơn một hồ sơ được gán cho một ô nhớ. Khi xảy ra điều này, người ta nói có sự **xung đột**. Một cách để giải quyết xung đột là gán cho ô nhớ còn tự do đầu tiên ngay sau ô nhớ đã được gán trước bởi hàm băm. Ví dụ, ngay sau khi làm hai phép gán cho hai hồ sơ ở trên, chúng ta sẽ gán ô nhớ 15 cho hồ sơ của sinh viên có số thẻ bảo hiểm xã hội là 107 405 723. Để hiểu tại sao, ta hãy chú ý rằng hàm $h(k)$ ánh xạ số thẻ Bảo hiểm này với ô nhớ 14, vì $h(107\ 405\ 723) = 107\ 405\ 723 \textbf{ mod } 111 = 14$, nhưng ô nhớ này đã bị chiếm bởi hồ sơ của sinh viên với số thẻ Bảo hiểm xã hội 064 212 848 rồi. Tuy nhiên, ô nhớ 15, ô nhớ đầu tiên sau ô nhớ 14 còn là tự do.

Còn có nhiều cách phức tạp hơn để giải quyết sự xung đột một cách có hiệu quả hơn phương pháp đơn giản vừa nên ở trên. Các phương pháp đó được bàn tới trong các tài liệu tham khảo về các hàm băm được cho ở cuối cuốn sách này.

**Ví dụ 19.** *Các số giả ngẫu nhiên.* Các số được chọn một cách ngẫu nhiên thường cần thiết cho các mô phỏng trên máy tính. Có nhiều phương pháp để tạo ra các số có những tính chất của các số được chọn ngẫu nhiên. Vì các số được sinh ra bởi các phương pháp có hệ thống không thực sự là ngẫu nhiên, nên chúng được gọi là các **số giả ngẫu nhiên**.

Thủ tục thường dùng nhất để tạo các số giả ngẫu nhiên đó là **phương pháp đồng dư tuyến tính**. Chúng ta chọn 4 số nguyên, đó là **modun** $m$, **nhân tử** $a$, **số gia** $c$ và **số hạt giống** $x_o$, với $2 \leq a \leq m$, $0 \leq c < m$ và $0 \leq x_o < m$. Chúng ta sẽ tạo ra dãy các số giả ngẫu nhiên $\{x_n\}$ với $0 \leq x_n < m$ với mọi $n$ bằng cách dùng liên tiếp phép đồng dư

$$x_{n+1} = (ax_n + c) \textbf{ mod } m.$$

(Đây là một ví dụ về định nghĩa đệ qui sẽ được bàn tới ở Tiết 3.3. Trong tiết đó, chúng ta sẽ chứng minh rằng dãy được định nghĩa như thế là hoàn toàn xác định).

Rất nhiều thực nghiệm trên máy tính đòi hỏi phải tạo các số giả ngẫu nhiên nằm giữa 0 và 1. Để tạo các số như vậy, chúng ta chia các số được tạo ra theo phương pháp đồng dư tuyến tính cho modun $m$, tức là chúng ta dùng các số $x_n/m$.

Ví dụ, dãy các số giả ngẫu nhiên được sinh ra khi chọn $m = 9$, $a = 7$, $c = 4$ và $x_o = 3$ có thể tìm được như sau :

$$x_1 = 7x_o + 4 = 7.3 + 4 = 25 \textbf{ mod } 9 = 7,$$

$$x_2 = 7x_1 + 4 = 7.7 + 4 = 53 \textbf{ mod } 9 = 8,$$
$$x_3 = 7x_2 + 4 = 7.8 + 4 = 60 \textbf{ mod } 9 = 6,$$
$$x_4 = 7x_3 + 4 = 7.6 + 4 = 46 \textbf{ mod } 9 = 1,$$
$$x_5 = 7x_4 + 4 = 7.1 + 4 = 11 \textbf{ mod } 9 = 2,$$
$$x_6 = 7x_5 + 4 = 7.2 + 4 = 18 \textbf{ mod } 9 = 0,$$
$$x_7 = 7x_6 + 4 = 7.0 + 4 = 4 \textbf{ mod } 9 = 4,$$
$$x_8 = 7x_7 + 4 = 7.4 + 4 = 32 \textbf{ mod } 9 = 5,$$
$$x_9 = 7x_8 + 4 = 7.5 + 4 = 39 \textbf{ mod } 9 = 3.$$

Vì $x_9 = x_0$ và vì mỗi một số hạng chỉ phụ thuộc vào số hạng trước nó, nên dãy sau đã được sinh ra :

3, 7, 8, 6, 1, 2, 0, 4, 5, 3, 7, 8, 6, 12, 0, 4, 5, 3 ...

Dãy này chứa 9 phần tử khác nhau trước khi lặp lại. Đa số các máy tính đều dùng phương pháp đồng dư tuyến tính để tạo ra các số giả ngẫu nhiên. Và thường thường phương pháp này được sử dụng với số gia $c = 0$. Một "máy phát" các số giả ngẫu nhiên như vậy được gọi là **máy phát nhân thuần tuý**. Ví dụ, máy phát nhân thuần tuý với môđun $m = 2^{31} - 1$ và nhân tử $a = 7^5 = 16.807$ thường được dùng rất rộng rãi. Với các giá trị này, người ta có thể chứng minh rằng sẽ có $2^{31} - 2$ số được phát ra trước khi bắt đầu lặp lại.

## MẬT MÃ

Đồng dư có nhiều ứng dụng trong toán học rời rạc cũng như trong tin học. Những thảo luận về các ứng dụng này có thể tìm trong các tài liệu tham khảo được giới thiệu ở cuối cuốn sách này. Một trong những ứng dụng của phép đồng dư liên quan đến mật mã học, một lĩnh vực nghiên cứu các thư từ bí mật. Một trong số những người sử dụng mật mã được biết sớm nhất – đó là Julius Caesar (Xê–da). Ông đã làm cho các bức thư trở nên bí mật bằng cách dịch mỗi chữ cái đi ba chữ cái về phía trước trong bảng chữ cái (và ba chữ cái cuối cùng thành ba chữ cái đầu tiên). Ví dụ, theo sơ đồ đó, chữ $B$ được chuyển thành chữ $E$ và chữ $X$ được chuyển thành chữ $A$. Đây là một ví dụ về sự **mã hóa**, tức là quá trình làm cho bức thư trở nên bí mật.

Để biểu diễn quá trình mã hóa của Caesar một cách toán học, trước hết ta thay mỗi chữ cái bằng một số nguyên từ 0 đến 25, dựa vào vị trí của nó trong bảng chữ cái. Ví dụ, thay $A$ bằng 0, $K$ bằng 10, và $Z = 25$. Phương pháp mã hóa của Caesar có thể được biểu diễn bởi hàm $f$, hàm này gán cho số nguyên không âm $p$, $p \leq 25$, số nguyên $f(p)$ trong tập {0, 1, 2, ... 25} sao cho :

$$f(p) = (p + 3) \textbf{ mod } 26.$$

Như vậy, trong phiên bản mã hóa của bức thư, chữ cái được biểu diễn bởi $p$ sẽ được thay bằng chữ cái được biểu diễn bởi $(p + 3)$ **mod** 26

**Ví dụ 20.** Dùng mật mã của Caesar chuyển bức thư "Meet You in the Park" (Gặp em ở công viên) thành bức thư bí mật.

*Giải* : Trước hết, thay các chữ cái trong bức thư gốc thành các số, ta được :

12 4 4 19 24 14 20 8 13 19 7 4 15 0 17 10.

Bây giờ thay các số $p$ đó bằng $f(p) = (p + 3)$ **mod** 26, ta được :

15 7 7 22 1 17 23 11 16 22 10 7 18 3 20 13

Dịch trở lại các chữ cái, ta được bức thư đã mã hóa "PHHW BRX LQ WKH SDUN".

■

Để phục hồi lại bức thư gốc đã được mã hóa theo mật mã của Caesar, ta cần phải dùng hàm ngược $f^{-1}$ của $f$. Chú ý rằng hàm $f^{-1}$ ánh xạ số nguyên $p$ từ tập hợp {0, 1, 2, ... 25} tới $f^{-1}(p) = (p-3)$ **mod** 26. Nói một cách khác, để tìm lại bức thư gốc mỗi một chữ cái lùi lại ba chữ trong bảng chữ cái, với ba chữ cái đầu tiên chuyển thành ba chữ cái cuối cùng tương ứng của bảng chữ cái. Quá trình phục hồi lại bức thư gốc từ bức thư đã được mã hóa được gọi là **giải mã**.

Có nhiều cách để tổng quát hóa mật mã của Caesar. Ví dụ, thay vì dịch mỗi chữ cái đi ba chữ cái, ta có thể dịch mỗi chữ cái đi $k$ chữ cái, tức là

$$f(p) = (p + k) \textbf{ mod } 26$$

Một mật mã như thế được gọi là **mật mã dịch**. Chú ý rằng đối với loại mật mã này, sự giải mã được thực hiện bằng cách dùng :

$$f^{-1}(p) = (p - k) \textbf{ mod } 26.$$

Rõ ràng, phương pháp của Caesar và mật mã dịch không có độ an toàn cao. Có nhiều cách để nâng cao độ an toàn của phương pháp này. Một trong những cách đó, là dùng hàm có dạng :

$$f(p) = (ap + b) \textbf{ mod } 26$$

Ở đây $a$, $b$ là các số nguyên được chọn sao cho $f$ là một song ánh. Điều này sẽ cung cấp cho ta một số các hệ thống mật mã khả dĩ. Ví dụ sau minh họa việc dùng một trong số các hệ thống đó.

**Ví dụ 21**. Chữ cái nào sẽ thay thế cho chữ $K$ khi ta dùng hàm $f(p) = (7p + 3)$ **mod** 26 để mã hóa?

*Giải* . Trước hết, lưu ý rằng 10 biểu diễn chữ cái $K$. Khi đó, dùng hàm mã hóa đã cho, suy ra $f(10) = (7.10 + 3)$ **mod** $26 = 21$. Vì 21 biểu diễn chữ cái $V$, nên $K$ sẽ được thay bằng chữ cái $V$ trong bức thư mã hóa.

Phương pháp mã hóa của Caesar và tổng quát hóa của phương pháp đó tiến hành bằng cách thay mỗi chữ trong bảng chữ cái bằng một chữ cái khác thuộc bảng đó. Các phương pháp mã hóa thuộc loại này đều dễ bị khám phá bằng cách dựa vào tần xuất xuất hiện của các chữ cái trong bức thư. Các phương pháp mã hóa tinh xảo hơn dựa trên việc thay một khối chữ cái này bằng một khối chữ cái khác. Có một số kỹ thuật dựa trên số học đồng dư để mã hóa một khối các chữ cái. Sự thảo luận về các kỹ thuật này bạn đọc có thể tìm thấy trong các sách tham khảo được giới thiệu ở cuối cuốn sách này.

## *BÀI TẬP*

**1.** Các số sau có chia hết cho 17 không

a) 68? b) 84? c) 357? d) 1001?

**2.** Chứng minh rằng nếu $a$ là một số nguyên khác 0, thì

a) $a$ chia hết cho 1 b) 0 chia hết cho $a$

**3.** Chứng minh phần 2 của Định lý 1.

**4.** Chứng minh phần 3 của Định lý 1.

**5.** Chứng minh rằng nếu $a|b$ và $b|a$, với $a$ và $b$ là các số nguyên, thì $a = b$ hoặc $a = -b$.

**6.** Chứng minh rằng nếu $a, b, c, d$ là các số nguyên sao cho $a|c$ và $b|d$, thì $ab \mid cd$.

**7.** Chứng minh rằng nếu $a$, $b$ và $c$ là các số nguyên sao cho $ac|bc$, thì $a|b$.

**8.** Các số nguyên sau có phải là số nguyên tố không?

a) 19 b) 27 c) 93

d) 101 e) 107 f) 113.

**9.** Hãy xác định thương số và số dư trong các trường hợp sau :

a) 19 chia cho 7 b) – 111 chia cho 11

c) 789 chia cho 23 đ) 1001 chia cho 13

e) 0 chia cho 19 f) 3 chia cho 5

g) –1 chia cho 3 h) 4 chia cho 1.

**10.** Phân tích các số dưới đây ra thừa số nguyên tố.

a) 39 b) 81 c) 101

d) 143 e) 289 f) 899

**11.** Phân tích 10! ra thừa số nguyên tố.

***12.** 100! tận cùng bằng bao nhiêu số không?

***13.** Một **số vô tỷ** là một số thực $x$ không thể viết được dưới dạng tỷ số của hai số nguyên. Hãy chứng minh rằng $\log_2 3$ là một số vô tỷ.

**14.** Tìm các số nguyên dương nhỏ hơn 12 nguyên tố cùng nhau với 12?

**15.** Các tập nào cho dưới đây là đôi một nguyên tố cùng nhau?

a) (11, 15, 19) b) (14, 15, 21)

c) (12, 17, 31, 37) d) (7, 8, 9, 11).

**16.** Một số nguyên dương được gọi là **hoàn hảo**, nếu nó bằng tổng các ước số của nó (trừ ước là chính số đó).

b) Chứng minh 6 và 28 là các số hoàn hảo.

b) Chứng minh rằng $2^{p-1}(2^p - 1)$ là một số hoàn **hảo** nếu $(2^p-1)$ là số nguyên tố.

**17.** Cho $m$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $a \equiv b \pmod{m}$ nếu $a$ **mod** $m$ = $b$ **mod** $m$.

**18.** Cho $m$ là một số nguyên dương. Chứng minh rằng $a$ **mod** $m$ = $b$ **mod** $m$ nếu $a \equiv b$ (**mod** $m$).

**19.** Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố, thì $n$ là số nguyên tố (Gợi ý : dùng hằng đẳng thức :

$$2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1)).$$

**20.** Trong các số nguyên cho dưới đây, số nào là số nguyên tố

a) $2^7 - 1$ b) $2^9 - 1$

c) $2^{11} - 1$ d) $2^{13} - 1$.

**21.** Giá trị của **hàm Euler** $\phi$ tại số nguyên dương $n$ được định nghĩa là số các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng $n$ và nguyên tố cùng nhau với $n$. Tìm

$4 = 2^2$ $10 = 2.5$

a) $\phi(4)$ $\phi(4) = 4\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2$ b) $\phi(10) = 10\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4$ c) $\phi(13)$.

**22.** Chứng minh rằng $n$ là số nguyên tố nếu và chỉ nếu $\phi(n) = n - 1$.

**23.** Xác định giá trị của $\phi(p^k)$ với $p$ là số nguyên tố và $k$ là một số nguyên dương.

**24.** Xác định ước số chung lớn nhất của các cặp số nguyên sau :

a) $2^2.3^3.5^5$ và $2^5.3^3.5^2$ b) $2.3.5.7.11.13$ và $2^{11}.3^9.11.17^{14}$.

c) $17$ và $17^{17}$. d) $2^2.7.$ và $5^3.13$.

e) 0 và 5. f) 2.3.5.7 và 2.3.5.7.

***25.** Chứng minh rằng nếu $n$ và $k$ là các số nguyên dương, thì

$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor + 1.$$

**26.** Chứng minh rằng nếu $a$ là một số nguyên và $d$ là số nguyên dương lớn hơn 1, thì thương **và** số dư nhận được trong phép chia $a$ cho $d$ tương ứng là $\left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor$ và $a - d \left\lfloor \frac{a}{d} \right\rfloor$.

**27.** Tính các đại lượng sau :

a) 13 **mod** 3 b) −97 **mod** 11

b) 155 **mod** 19 d) −221 **mod** 23

**28.** Liệt kê năm số nguyên đồng dư với 4 theo môđun 12.

**29.** Các số nguyên nào dưới đây đồng dư với 5 theo môđun 17.

a) 80 ? b) 103 ? c) −29 ? d) −122 ?

**30.** Nếu tích của hai số nguyên là $2^7\ 3^8\ 5^2\ 7^{11}$ và ước số chung lớn nhất của chúng là $2^3\ 3^4\ 5$ thì bội số chung nhỏ nhất của chúng bằng bao nhiêu?

**31.** Chứng minh rằng nếu $a$, $b$ là các số nguyên dương, thì $ab$ = ƯCLN$(a,b)$. BCNN$(a, b)$. (Gợi ý : Dùng phân tích $a,b$ ra thừa số nguyên tố và các công thức tính ƯCLN$(a,b)$ và BCNN$(a, b)$ qua các phân tích đó).

**32.** Chứng minh rằng nếu $a \equiv b \pmod m$ và $c \equiv d \pmod m$ trong đó $a$, $b$, $c$, $d$ và $m$ là các số nguyên với $m \geqslant 2$, thì

$$a - c \equiv b - d \pmod m.$$

**33.** Chứng minh rằng nếu $n|m$ với $n$ và $m$ là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nếu $a \equiv b \pmod m$ trong đó $a$, $b$ là các số nguyên, thì $a \equiv b \pmod n$.

**34.** Chứng minh rằng nếu $a$, $b$, $c$ và $m$ là các số nguyên sao cho $m \geqslant 2$, $c > 0$ và $a \equiv b \pmod m$, thì $ac \equiv bc \pmod{mc}$.

**35.** Chứng minh rằng $ac \equiv bc \pmod m$ trong đó $a$, $b$, $c$ và $m$ là các số nguyên với $m \geqslant 2$, không nhất thiết phải kéo theo $a \equiv b \pmod m$.

**36.** Chứng minh rằng nếu $a$, $b$ và $m$ là các số nguyên sao cho $m \geqslant 2$ và $a \equiv b \pmod m$ thì ƯCLN$(a,m)$ = ƯCLN$(b, m)$.

**37.** Chứng minh rằng nếu $a$, $b$, $k$ và $m$ là các số nguyên sao cho $k \geqslant 1$, $m \geqslant 2$ và $a \equiv b \pmod m$, thì $a^k \equiv b^k \pmod m$ với mọi $k \geqslant 1$.

**38.** Ô nhớ nào sẽ được gán bởi hàm băm $h(k) = k$ **mod** 101 cho hồ sơ của sinh viên có số thẻ Bảo hiểm xã hội là.

a) 104578690 b) 432222187

c) 372201919 d) 501338753

**39.** Một bãi đỗ xe có 31 chỗ dành cho khách. Được đánh số từ 0 đến 30. Các xe của khách được gán cho chỗ đỗ bằng cách dùng một hàm băm $h(k) = k$ **mod** 31 với $k$ là số tạo bởi ba chữ số đầu trên biển đăng ký xe của khách.

a) Xác định chỗ đỗ của xe, nếu ba chữ số đầu trên biển đăng ký của nó là :

317, 918, 007, 100, 111, 310.

b) Mô tả thủ tục mà khách cần phải phải theo để tìm ra chỗ đỗ xe còn trống khi chỗ đỗ theo qui ước của họ đã bị chiếm.

**40.** Xác định dãy các số giả ngẫu nhiên được sinh ra bằng cách dùng "máy phát" đồng dư tuyến tính.

$$x_{n+1} = (4x_n + 1) \textbf{ mod } 7 \text{ với số hạt giống } x_0 = 3.$$

**41.** Cũng hỏi như trên với :

$$x_{n+1} = 3x_n \textbf{ mod } 11 \text{ và số hạt giống } x_0 = 2.$$

**42.** Viết một thuật toán dưới dạng giả mã để tạo ra một dãy các số giả ngẫu nhiên, bằng cách dùng máy phát đồng dư tuyến tính.

**43.** Mã hóa bức thư "DO NOT PASS GO" bằng cách dịch các chữ ra số bằng hàm mã hóa *f(p)* cho dưới đây, rồi sau đó dịch các số đó trở lại thành chữ cái.

a) $f(p) = (p + 3)$ **mod** 26 (mật mã Caesar)

b) $f(p) = (p + 13)$ **mod** 26.

c) $f(p) = (3p + 7)$ **mod** 26.

**44.** Giải mã các bức thư đã được mã hóa bằng mật mã Caesar sau :

a) EOXH MHDQV

b) WHVW WRGDB

C) HDW GLP VXP.

## 2.4. SỐ NGUYÊN VÀ THUẬT TOÁN

### MỞ ĐẦU

Như đã nhắc tới trong Tiết 2.1, thuật ngữ algorithm (thuật toán) ban đầu được dùng để chỉ các thủ tục thực hiện những phép tính số học đối với các số nguyên viết ở biểu diễn thập phân. Các thuật toán đó đã được sửa để dùng cho biểu diễn nhị phân là cơ sở cho số học của máy tính. Chúng cho những minh họa tốt đối với khái niệm thuật toán và độ phức tạp của thuật toán. Vì những lý do ấy mà trong tiết này chúng ta sẽ xét các thuật toán đó.

Ngoài các thuật toán được dùng trong số học, còn có nhiều thuật toán quan trọng liên quan đến các số nguyên. Chúng ta sẽ bắt đầu việc thảo luận về các số nguyên và thuật toán bằng thuật toán Euclid. Đây là một trong những thuật toán tiện ích nhất và có lẽ cũng là lâu đời nhất trong toán học. Chúng ta cũng sẽ mô tả thuật toán tìm khai triển cơ số $b$ của một số nguyên với cơ số $b$ bất kỳ.

## THUẬT TOÁN EUCLID

Phương pháp mô tả trong Tiết 2.3 để tính ước số chung lớn nhất của hai số bằng cách dùng phân tích các số nguyên đó ra thừa số nguyên tố là không hiệu quả. Lý do là ở chỗ thời gian phải tiêu tốn cho sự phân tích đó. Chúng ta sẽ cho dưới đây một phương pháp hiệu quả hơn để tìm ước số chung lớn nhất, phương pháp đó được gọi là **thuật toán Euclid**. Thuật toán này đã được biết từ thời cổ đại. Nó mang tên nhà toán học cổ Hy lạp Euclid, người đã mô tả thuật toán này trong cuốn sách "Những yếu tố" nổi tiếng của ông.

Trược khi mô tả thuật toán Euclid, chúng ta hãy xem nó được sử dụng như thế nào để tìm ƯCLN(91, 287). Trước hết, người ta lấy số lớn, tức 287, chia cho số nhỏ, tức 91, và được :

$$287 = 91.3 + 14.$$

Bất kỳ một ước số chung nào của 287 và 91 cũng là ước số của $287 - 91.3 = 14$. Và cũng như vậy, bất kỳ một ước số chung nào của 91 và 14 cũng là ước số của $287 = 91.3 + 14$. Do đó, ước số chung lớn nhất của 287 và 91 cũng chính là ước số chung lớn nhất của 91 và 14. Điều này có nghĩa là bài toán tìm ƯCLN(287, 91) được qui về bài toán tìm ƯCLN(91, 14). Tiếp theo, chia 91 cho 14, ta được :

$$91 = 14.6 + 7.$$

Vì bất kỳ ước số chung nào của 91 và 14 cũng là ước số của $91 - 14.6 = 7$ và bất kỳ ước số chung nào của 14 và 7 cũng là ước số của 91, suy ra ƯCLN(91, 14) = ƯCLN(14, 7)

Tiếp tục bằng cách chia 14 cho 7, ta được :

$$14 = 7.2$$

Vì 14 chia hết cho 7, suy ra ƯCLN(14, 7) = 7 và vì ƯCLN(287, 91) = ƯCLN(91, 14) = ƯCLN (14,7) = 7, và bài toán ban đầu đặt ra đã giải xong.

Bây giờ chúng ta sẽ mô tả thuật toán Euclid tổng quát. Chúng ta sẽ dùng các phép chia liên tiếp để qui bài toán tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên dương về chính bài toán đó nhưng với hai số nguyên nhỏ hơn, cho tới khi một trong hai số nguyên là zêro.

Thuật toán Euclid dựa trên kết quả sau về các ước số chung lớn nhất và thuật toán chia.

**Bổ đề 1.** Cho $a = bq + r$, trong đó $a$, $b$, $q$ và $r$ là các số nguyên. Khi đó $$\text{ƯCLN}(a, b) = \text{ƯCLN}(b, r).$$

***Chứng minh*** : Nếu chúng ta có thể chứng minh được rằng các ước số chung của cặp $a$ và $b$ cũng chính là các ước số chung của cặp $b$ và $r$, thì tức là ta đã chứng minh được ƯCLN$(a, b)$ = ƯCLN$(b, r)$, vì cả hai cặp này cần phải có *cùng* ước số chung lớn nhất.

Giả sử $d$ là một ước số chung của $a$ và $b$. Từ đó suy ra $a - bq = r$ chia hết cho $d$ (theo Định lý 1, Tiết 2.3). Do đó, mọi ước số chung của $a$ và $b$ đều là ước số chung của $b$ và $r$.

Tương tự, giả sử $d$ là ước số chung của $b$ và $r$. Khi đó $bq + r = a$ cũng chia hết cho $d$. Do đó, mọi ước số chung của $b$ và $r$ cũng là ước số chung của $a$ và $b$

Do đó, $$\text{ƯCLN}(a, b) = \text{ƯCLN}(b, r)$$

■

Giả sử rằng $a$ và $b$ là hai số nguyên dương với $a \geq b$. Giả sử $r_0 = a$ và $r_1 = b$. Bằng cách áp dụng liên tiếp thuật toán chia, ta tìm được :

$$\begin{aligned}
r_0 &= r_1q_1 + r_2 && 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= r_2q_2 + r_3 && 0 \leq r_3 < r_2 \\
&\;\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n && 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= r_nq_n.
\end{aligned}$$

Cuối cùng, số dư zêrô sẽ xuất hiện trong dãy các phép chia liên tiếp, vì dãy các số dư $a = r_0 > r_1 > r_2 > \ldots \geq 0$ không thể chứa quá $a$ số hạng được. Hơn nữa, từ Bổ đề 1 suy ra :

$$\text{ƯCLN}(a,\ b) = \text{ƯCLN}(r_o,\ r_1) = \text{ƯCLN}(r_1,\ r_2) = \ldots$$

$$= \text{ƯCLN}(r_{n-2}\ ,\ r_{n-1}) = \text{ƯCLN}(r_{n-1},\ r_n) = \text{ƯCLN}(r_n,\ 0) = r_n$$

Do đó, ước số chung lớn nhất là số dư khác không cuối cùng trong dãy các phép chia.

**Ví dụ 1.** Dùng thuật toán Euclid tìm ƯCLN(414, 662)

*Giải* : Dùng liên tiếp thuật toán chia, ta được :

$$662 = 414.1 + 248$$
$$414 = 248.1 + 166$$
$$248 = 166.1 + 82$$
$$166 = 82.2 + 2$$
$$82 = 2.41$$

Do đó, ƯCLN(414, 662) = 2, vì 2 là số dư khác không cuối cùng. ■

Thuật toán Euclid được viết dưới dạng giả mã như sau :

---

ALGORITHM 1. THUẬT TOÁN EUCLID

```
procedure ƯCLN (a,b : positive integers)
x := a
y := b
while y ≠ 0
begin
    r := x mod y
    x := y
    y := r
end {ƯCLN (a,b) là x}
```

---

Trong Algorithm 1, các giá trị ban đầu của $x$ và $y$ tương ứng là $a$ và $b$. Ở mỗi giai đoạn của thủ tục, $x$ được thay bằng $y$ và $y$ được thay bằng $x$ **mod** $y$, tức là số dư $r$ trong phép chia của $x$ cho $y$. Quá trình này được lặp lại chừng nào $y \neq 0$. Thuật toán sẽ ngừng khi $y = 0$ và giá trị của $x$ ở điểm này, đó là số dư khác không cuối cùng trong thủ tục, cũng chính là ước số chung lớn nhất của $a$ và $b$.

Chúng ta sẽ nghiên cứu độ phức tạp thời gian của thuật toán Euclid trong Tiết 3.3 của Chương 3 và sẽ chứng tỏ rằng số các phép chia đòi hỏi để tìm ước số chung lớn nhất của $a$ và $b$ với $a \geqslant b$ là $O(\log b)$.

## BIỂU DIỄN CÁC SỐ NGUYÊN

Trong cuộc sống hàng ngày chúng ta dùng ký hiệu thập phân để biểu diễn các số nguyên. Ví dụ, 965 được dùng để ký hiệu : $9.10^2 + 6.10 + 5$. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp việc dùng các cơ số khác 10 sẽ thuận tiện hơn. Đặc biệt, các máy tính thường dùng ký hiệu nhị phân (với cơ số là 2) khi thực hiện các phép tính số học và ký hiệu bát phân (cơ số 8) khi biểu diễn các ký tự như các chữ cái và con số. Thực tế, ta có thể dùng một số nguyên dương bất kỳ lớn hơn 1 làm cơ số để biểu diễn các số nguyên. Điều này được phát biểu trong định lý sau :

**Định lý 1.** Cho $b$ là một số nguyên dương lớn hơn 1. Khi đó nếu $n$ là một số nguyên dương, thì nó có thể được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng :

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0.$$

Ở đây $k$ là một số nguyên không âm, $a_0$, $a_1$, $a_2$ ... $a_k$ là các số nguyên không âm nhỏ hơn $b$ và $a_k \neq 0$.

Bạn đọc có thể tìm chứng minh của định lý trên trong các tài liệu tham khảo được giới thiệu ở cuốn sách này. Biểu diễn của $n$ được cho trong Định lý 1 được gọi là **khai triển cơ số $b$ của $n$**, nó được ký hiệu là $(a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0)_b$. Ví dụ, $(245)_8$ biểu diễn số

$$2.8^2 + 4.8 + 5 = 165.$$

Việc chọn 2 làm cơ số cho ta *khai triển nhị phân* của các số nguyên. Trong ký hiệu nhị phân mỗi số hoặc là 0 hoặc là 1. Nói cách khác, khai triển nhị phân của một số nguyên chính là một xâu bit. Các khai triển nhị phân (và các khai triển có liên quan là biến thể của khai triển nhị phân) được dùng bởi các máy tính để biểu diễn và làm các phép tính số học đối với các số nguyên.

**Ví dụ 2.** Xác định khai triển thập phân của số nguyên có khai triển nhị phân là $(101011111)_2$.

***Giải*** : Ta có

$$(101011111)_2 = 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 351$$

■

Mười sáu là một cơ số khác cũng thường được dùng trong tin học. Khai triển cơ số 16 của một số nguyên được gọi là **khai triển thập lục phân**. Những khai triển này đòi hỏi phải có mười sáu chữ số khác nhau. Thường các chữ số thập lục phân được dùng là : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *A, B, C, D, E và F*, trong đó các chữ cái từ *A* đến *F* là biểu diễn các chữ số tương ứng với các số từ 10 đến 15 (trong ký hiệu thập phân).

**Ví dụ 3.** Xác định khai triển thập phân của số nguyên có khai triển thập lục phân là $(2AE0B)_{16}$ ?

***Giải*** : Ta có :

$$(2AE0B)_{16} = 2.16^4 + 10.16^3 + 14.16^2 + 0.16 + 11 = (175627)_{10}.$$

■

Vì một chữ số thập lục phân được biểu diễn bằng cách dùng bốn bit, nên các **byte** – tức các xâu bit có chiều dài là 8 có thể được biểu diễn bởi hai chữ số thập lục phân. Ví dụ,

$$(11100101)_2 = (E5)_{16} \text{ vì } (1110)_2 = (E)_{16} \text{ và } (0101)_2 = (5)_{16}$$

Bây giờ chúng ta sẽ mô tả thuật toán xây dựng khai triển cơ số *b* của số nguyên *n* bất kỳ. Trước hết ta chia *n* cho *b* để được thương và số dư, tức là :

$$n = bq_0 + a_0 \qquad 0 \leqslant a_0 < b.$$

Số dư $a_0$ chính là chữ số đứng bên phải cùng trong khai triển cơ số *b* của *n*. Tiếp theo chia $q_0$ cho *b*, ta được

$$q_0 = bq_1 + a_1 \qquad 0 \leqslant a_1 < \text{h}$$

Ta thấy $a_1$ chính là chữ số thứ hai tính từ bên phải trong khai triển cơ số *b* của *n*. Tiếp tục quá trình này, bằng cách liên tiếp chia các thương cho *b* ta sẽ được các chữ số tiếp theo trong khai triển cơ số *b* của *n* là các số dư tương ứng. Quá trình này sẽ kết thúc khi ta nhận được một thương bằng 0.

**Ví dụ 4.** Tìm khai triển cơ số 8 của $(12345)_{10}$.

***Giải*** : Trước hết, chia 12345 cho 8 ta được :

$$12345 = 8.1543 + 1.$$

Liên tiếp chia các thương tìm được cho 8, ta có :

$$1543 = 8.192 + 7$$

$$192 = 8.24 + 0$$

$$24 = 8.3 + 0$$

$$3 = 8.0 + 3.$$

Vì các số dư chính là các chữ số của khai triển cơ số 8 của 12345, ta suy ra rằng

$$(12345)_{10} = (30071)_8.$$

Giả mã dưới đây biểu diễn thuật toán tìm khai triển cơ số $b$

$(a_{k-1} \ldots a_1 a_o)_b$ của số nguyên $n$.

---

ALGORITHM 2. XÂY DỰNG KHAI TRIỂN CƠ SỐ *b*.

**procedure** *khai triển cơ số b* (*n* : positive integers)

$q := n$

$k := 0$

**while** $q \neq 0$

**begin**

$a_k := q$ **mod** $b$

$q := \lfloor \frac{q}{b} \rfloor$

$k := k + 1$

**end** {khai triển cơ số $b$ của $n$ là $(a_{k-1} \ldots a_1 a_o)_b$}

---

Trong Algorithm 2, $q$ biểu diễn thương nhận được bởi các phép chia liên tiếp cho $b$, bắt đầu với $q = n$. Các chữ số trong khai triển cơ số $b$ của $n$ là các số dư tương ứng của các phép chia đó và được cho bởi $q$ **mod** $b$. Thuật toán sẽ kết thúc khi $q = 0$.

## THUẬT TOÁN CHO CÁC PHÉP TÍNH SỐ NGUYÊN

Các thuật toán thực hiện các phép tính với những số nguyên khi dùng các khai triển nhị phân của chúng là cực kỳ quan trọng trong số học của máy tính. Chúng ta sẽ mô tả ở đây các thuật toán cộng và nhân hai số nguyên trong biểu diễn nhị phân. Chúng ta cũng sẽ phân tích độ phức tạp tính toán của các thuật toán này thông qua số các phép toán bit thực sự được dùng. Trong suốt mục này, giả sử rằng khai triển nhị phân của $a$ và $b$ là :

$$a = (a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2 \text{ và } b = (b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_1\, b_0)_2,$$

sao cho $a$ và $b$ đều có $n$ bit (đặt các bit 0 ở đầu mỗi khai triển đó, nếu cần).

Xét bài toán cộng hai số nguyên viết ở dạng nhị phân. Thủ tục thực hiện phép cộng có thể dựa trên phương pháp thông thường dùng để cộng các số bằng giấy và bút. Phương pháp này tiến hành bằng cách cộng cặp chữ số nhị phân với nhau, có nhớ, nếu xảy ra, để tính tổng của hai số nguyên. Dưới đây, ta sẽ mô tả chi tiết thủ tục này.

Để cộng $a$ và $b$, trước hết cộng hai bit ở phải cùng của chúng, tức là ;

$$a_0 + b_0 = c_0.2 + s_0.$$

Ở đây $s_0$ là bit phải cùng trong khai triển nhị phân của $a + b$, $c_0$ là số **nhớ**, nó có thể bằng 0 hoặc 1. Sau đó ta cộng hai bit tiếp theo và số nhớ

$$a_1 + b_1 + c_0 = c_1.2 + s_1$$

Ở đây $s_1$ là bit tiếp theo (tính từ bên phải) trong khai triển nhị phân của $a + b$ và $c_1$ là số nhớ. Tiếp tục quá trình này bằng cách cộng các bit tương ứng trong hai khai triển nhị phân và số nhớ để xác định bit tiếp sau tính từ bên phải trong khai triển nhị phân của tổng $a + b$. Ở giai đoạn cuối cùng, cộng $a_{n-1}$, $b_{n-1}$ và $c_{n-2}$ để nhận được $c_{n-1}.2+s_{n-1}$. Bit đứng đầu của tổng là $s_n = c_{n-1}$. Kết quả, thủ tục này tạo ra được khai triển nhị phân của tổng, cụ thể là $a + b = (s_n\, s_{n-1}\, s_{n-2} \ldots s_1\, s_0)_2$.

**Ví dụ 5.** Cộng $a = (1110)_2$ và $b = (1011)_2$.

***Giải :*** Theo thủ tục được chỉ rõ trong thuật toán, trước hết chú ý rằng :

$$a_0 + b_0 = 0 + 1 = 0 . 2 + 1$$

Vì vậy $c_0 = 0$ và $s_0 = 1$.

Sau đó, vì $a_1 + b_1 + c_0 = 1 + 1 + 0 = 1 . 2 + 0$

suy ra $c_1 = 1$, và $s_1 = 0$.

Tiếp theo, $a_2 + b_2 + c_1 = 1 + 0 + 1 = 1 . 2 + 0$,

sao cho $c_2 = 1$ và $s_2 = 0$.

Cuối cùng, vì $a_3 + b_3 + c_2 = 1 + 1 + 1 = 1 . 2 + 1$.

suy ra $c_3 = 1$ và $s_3 = 1$. Điều này có nghĩa là $s_4 = c_3 = 1$. Do đó, $s = a + b = (11001)_2$. Phép cộng này được thể hiện trên Hình 1.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 1110 \\ 1011 \\ \hline 1\,1001 \end{array}$$

***Hình 1.*** Cộng $(1110)_2$ và $(1011)_2$

Thuật toán cộng có thể được mô tả bằng cách dùng giả mã như sau.

ALGORITHM 3. PHÉP CỘNG CÁC SỐ NGUYÊN

**procedure** *cộng* (*a*, *b* : positive integers)
{Khai triển nhị phân của *a* và *b* tương ứng là $(a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_1 a_0)_2$ và $(b_{n-1}\, b_{n-2} \dots b_1\, b_0)_2$}

$c := 0$

**for** $j := 0$ **to** $n-1$

**begin**

$d := \lfloor (a_j + b_j + c)/2 \rfloor$

$s_j := a_j + b_j + c - 2d$

$c := d$

**end**

$s_n := c$

{khai triển nhị phân của tổng là $(s_n s_{n-1} \dots s_1 s_0)_2$

Tiếp theo, chúng ta sẽ phân tích số các phép cộng bit được dùng bởi Algorithm 3

**Ví dụ 6**. Có bao nhiêu phép cộng bit được đòi hỏi để dùng Algorithm 3 tính tổng tổng của hai số nguyên $n$ bit (hoặc nhỏ hơn) trong biểu diễn nhị phân của chúng?

*Giải :* Tổng hai số nguyên được tính bằng cách cộng liên tiếp các cặp bit và khi cần phải cộng cả số nhớ nữa. Cộng một cặp bit và số nhớ đòi ba hoặc ít hơn phép cộng các bít. Như vậy tổng số các phép cộng bit được sử dụng nhỏ hơn ba lần số bit trong khai triển nhị phân. Do đó, số các phép cộng bit được dùng bởi Algorithm 3 để cộng hai số nguyên $n$ bit là $O(n)$.

■

Tiếp theo, ta sẽ xét phép nhân của hai số nguyên $n$ bit $a$ và $b$. Thuật toán thông thường (được dùng khi nhân tay) tiến hành như sau. Dùng định luật phân phối, ta thấy rằng :

$$ab = a\sum_{j=0}^{n-1} b_j\, 2^j = \sum_{j=0}^{n-1} a(b_j\, 2^j)$$

Chúng ta có thể tính $ab$ bằng cách dùng phương trình trên. Trước hết, chúng ta thấy rằng $ab_j = a$ nếu $b_j = 1$ và $ab_j = 0$ **nếu** $b_j = 0$. Mỗi lần chúng ta nhân một số hạng với 2 là chúng ta dịch khai triển nhị phân của nó một chỗ về phía trái bằng cách thêm một số không vào cuối khai triển nhị phân của nó. Do đó, chúng ta có thể nhận được $(ab_j)2^j$ bằng cách **dịch** khai triển nhị phân của $ab_j$ đi $j$ chỗ về phía trái, tức là thêm $j$ số không vào cuối khai triển nhị phân của nó. Cuối cùng, ta sẽ nhận được tích $ab$ bằng cách cộng $n$ số nguyên $ab_j\, 2^j$ với $j = 0, 1, \ldots n - 1$.

Ví dụ dưới đây minh họa cách dùng thuật toán trên.

Ví dụ 7. Tìm tích của $a = (110)_2$ và $b = (101)_2$.

*Giải :* Trước hết chú ý rằng :

$$ab_0.2^0 = (110)_2.1.2^0 = (110)_2.$$

$$ab_1 2^1 = (110)_2.0.2^1 = (0000)_2$$

và $$ab_2.2^2 = (110)_2.1.2^2 = (11000)_2.$$

Để tìm tích, hãy cộng $(110)_2$, $(0000)_2$ và $(11000)_2$. Thực hiện các phép cộng này (dùng Algorithm 3, đưa vào cả các bit 0 ban đầu, nếu cần) cho thấy rằng $ab = (11110)_2$. Phép nhân được thể hiện trên Hình 2.

```
    110
    101
  -----
    110
   0 00
  11 0
  -----
  11 110
```

***Hình 2.*** Nhân $(110)_2$ với $(101)_2$.

■

Thủ tục trên được mô tả bằng giả mã sau:

---

ALGORITHM 4 Nhân các số nguyên.

**procedure** *nhân* ($a$, $b$ : positive integers)

{Khai triển nhị phân của $a$ và $b$ tương ứng là $(a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0)_2$ và $(b_{n-1}\, b_{n-2} \dots b_1b_0)_2$}

**for** $j$ : = 0 **to** $n$ – 1

**begin**

  **if** $b_j$ = 1 **then** $c_j$ : = $a$ được dịch đi $j$ chỗ

  **else** $c_j$ : = 0

**end**

  {$c_0$, $c_1$ ..., $c_{n-1}$ là các tích riêng phần }

  $p$ : = 0

  **for** $j$ : = 0 **to** $n$ – 1

    $p$ : = $p$ + $c_j$

  {$p$ là giá trị của tích $ab$}

---

Tiếp theo, ta sẽ xác định số các phép cộng bit và dịch bit được dùng bởi Algorithm 4 để nhân hai số nguyên.

**Ví dụ 8.** Có bao nhiêu phép cộng bit và dịch bit được dùng để nhân hai số nguyên $a$ và $b$ theo thuật toán Algorithm 4?

*Giải :* Algorithm 4 tính tích của hai số nguyên $a$ và $b$ bằng cách cộng các tính riêng phần $c_0$, $c_1$, $c_2$ ... và $c_{n-1}$. Khi $b_j$ = 1, ta tính tích riêng phần $c_j$ bằng cách dịch khai triển nhị phân của $a$ đi $j$ bit. Khi $b_j$ = 0 thì không cần có dịch chuyển nào vì $c_j$ = 0. Do đó, để tìm tất cả $n$ số nguyên $ab_j\, 2^j$ với $j$ = 0, 1, ... $n$ –1, đòi hỏi tối đa :

$$0 + 1 + 2 + \dots + n - 1$$

phép dịch chỗ. Vì thế, theo Ví dụ 4 ở Tiết 1.8 số các dịch chuyển chỗ đòi hỏi là $O(n^2)$.

Để cộng các số nguyên $ab_j$ từ $j = 0$ đến $n - 1$ đòi hỏi phải cộng một số nguyên $n$ bit, một số nguyên $(n + 1)$ bit, ... và một số nguyên $2n$ bit. Từ Ví dụ 8 ta biết rằng mỗi phép cộng đó đòi hỏi $O(n)$ phép cộng bit. Do đó, có tất cả $O(n^2)$ phép cộng bit được đòi hỏi cho $n$ phép cộng các tích riêng phần.

Điều đáng ngạc nhiên là có những thuật toán hiệu quả hơn thuật toán thông thường nhân hai số nguyên. Một thuật toán như vậy chỉ dùng $O(n^{1,585})$ các phép toán bit để nhân các số $n$ bit sẽ được mô tả ở Chương 5.

## BÀI TẬP

**1.** Dùng thuật toán Euclid tìm

a) ƯCLN (12, 18) b) ƯCLN (111, 201)

c) ƯCLN (1001, 1331) d) ƯCLN (12345, 54321)

**2.** Cũng hỏi như trên :

a) ƯCLN (1,5) b) ƯCLN (100, 101)

c) ƯCLN (123, 277) d) ƯCLN (1529, 14039)

e) ƯCLN(1529, 14038) f) ƯCLN (11111, 111111)

**3.** Để tìm ƯCLN(34, 21) theo thuật toán Euclid, cần phải làm bao nhiêu phép chia?

**4.** Cũng hỏi như trên đối với ƯCLN (34, 55)?

**5.** Chuyển từ biểu diễn thập phân sang biểu diễn nhị phân của các số nguyên sau :

a) 231 b) 4532 c) 97644.

**6.** Cũng hỏi như trên đối với các số nguyên sau :

a) 321 b) 1023 c) 100632.

**7.** Chuyển từ biểu diễn nhị phân sang biểu diễn thập phân của các số nguyên sau :

a) 11111 b) 10000 00001

c) 10101 0101 d) 11010 01000 10000

**8.** Cũng hỏi như trên đối với các số nguyên sau :

a) 11011 b) 10101 10101

c) 11101 11110 d) 11111 00000 11111

**9.** Tìm một phương pháp đơn giản để chuyển từ biểu diễn thập lục phân về biểu diễn nhị phân của các số nguyên.

**10.** Tìm một phương pháp đơn giản để chuyển từ biểu diễn nhị phân về biểu diễn thập phân lục phân.

**11.** Chuyển từ biểu diễn thập lục phân về biểu diễn nhị phân của các số nguyên sau :

a) 80E b) 135AB

c) ABBA d) DEFACED.

**12.** Chuyển từ biểu diễn nhị phân về biểu diễn thập lục phân của các số nguyên sau :

a) 111 10111 b) 10 10101 01010 c) 11101 11011 10111

**13.** Chứng minh rằng tất cả các số nguyên dương đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng các lũy thừa phân biệt của 2 (*Gợi ý* : xét khai triển nhị phân của các số nguyên).

**14.** Có thể chứng minh rằng mọi số nguyên đều có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng

$$l_k 3^k + l_{k-1} 3^{k-1} + \ldots + l_1.3 + l_0$$

với $l_j$ bằng − 1, 0 hoặc 1 và $j = 0, 1, 2 \ldots k$.

Khai triển loại này được gọi là **khai triển tam phân cân bằng**

Hãy tìm khai triển tam phân cân bằng của

a) 5, b) 13 c) 37 d) 79

**15.** Chứng minh rằng một số nguyên dương chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu tổng các chữ số thập phân của nó chia hết 3.

**16.** Chứng minh rằng một số nguyên dương chia hết cho 11 nếu và chỉ nếu hiệu của tổng các chữ số thập phân của nó ở các vị trí chẵn và tổng các chữ số thập phân của nó ở các vị trí lẻ chia hết cho 11.

**17.** Chứng tỏ rằng một số nguyên dương chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu hiệu của tổng các chữ số nhị phân của nó ở vị trí chẵn và tổng các chữ số nhị phân của nó ở vị trí lẻ chia hết cho 3.

*Biểu diễn* **bù đối với một** *của các số nguyên được dùng để đơn giản hóa số học của máy tính. Để biểu diễn các số nguyên dương và âm với giá trị tuyệt đối nhỏ hơn* $2^n$, *cần dùng cả thảy* $n + 1$ *bit. Bit bên trái cùng được dùng để biểu thị dấu. Một bit 0 ở vị trí này được dùng để chỉ số nguyên dương, còn bit 1 ở vị trí này được dùng để chỉ số nguyên âm. Đối với các số nguyên dương các bit còn lại đồng nhất với khai triển nhị phân của số nguyên đó. Đối với các số âm, các bit còn lại nhận được bằng cách trước hết tìm khai triển nhị phân của giá trị tuyệt đối của số nguyên đó, sau đó lấy phần bù của từng bit trong đó với phần bù của 1 là 0 và phần bù của 0 là 1.*

**18.** Tìm biểu diễn bù đối với một của các số nguyên sau bằng cách dùng các xâu bit có chiều dài 6

a) 22 h) 31 c) −7 d) −19

**19.** Các biểu diễn hù đối với một có chiều dài 5 sau đây biểu diễn các số nguyên nào?

a) 11001 b) 01101 c) 10001 d) 11111

**20.** Biểu diễn bù đối với một của số $-m$ nhận được từ biểu diễn bù đối với một của $m$ như thế nào, nếu dùng các xâu bit có chiều dài $n$?

**21.** Làm thế nào nhận được biểu diễn bù đối với một của tổng hai số nguyên từ biểu diễn bù đối với một của từng số nguyên đó ?

**22**. Cũng hỏi như trên đối với hiệu của hai số nguyên.

**23.** Đôi khi các số nguyên được mã hóa bằng cách dùng khai triển nhị phân 4–chữ số để biểu diễn một chữ số thập phân. Điều này tạo ra dạng **thập phân má hóa nhị phân** của các số nguyên. Ví dụ, số 791 được mã hóa theo cách đó trở thành 011110010001. Hỏi phải cần bao nhiêu bit để hiểu diễn một số có $n$ chữ số thập phân khi dùng loại mã hóa này?

**Khai triển Cantor** là tổng có dạng :

$$a_n n! + a_{n-1}(n-1)! + \dots + a_2 2! + a_1 1!$$

*với* $a_i$ *là một số nguyên thoả mãn* $0 \leqslant a_i \leqslant i$ *và* $i = 1, 2, \dots n$.

**24.** Tìm các khai triển Cantor của :

a) 2 b) 7 c) 19

d) 87 e) 1000 f) 1 000 000

**25*.** Mô tả một thuật toán tìm khai triển Cantor của một số nguyên.

**26*.** Mô tả thuật toán cộng hai số nguyên từ khai triển Cantor của chúng.

**27.** Cộng $(10111)_2$ và $(11010)_2$ bằng cách thực hiện từng bước của thuật toán cộng được cho trong phần lý thuyết của tiết này.

**28.** Nhân $(1110)_2$ và $(1010)_2$ bằng cách thực hiện từng bước thuật toán nhân cho trong phần lý thuyết của tiết này.

**29.** Mô tả thuật toán tính hiệu của hai khai triển nhị phân.

**30.** Đánh giá số các phép toán bit được dùng để trừ hai khai triển nhị phân.

**31.** Lập một thuật toán để xác định $a > b$, $a = b$ hay $a < b$ đối với hai số nguyên $a$ và $b$ ở dạng khai triển nhị phân

**32.** Thuật toán so sánh ở Bài tập 31 dùng bao nhiêu phép toán bit khi số lớn hơn trong hai số $a$ và $b$ có $n$ bit trong khai triển nhị phân của nó.

**33.** Đánh giá độ phức tạp của Algorithm 2 để tìm khai triển cơ số $b$ của số nguyên $n$ qua số các phép chia được dùng.

## 2.5. MA TRẬN

### MỞ ĐẦU

Các ma trận được dùng suốt trong toán học rời rạc để biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử trong một tập hợp. Trong các chương sau, chúng ta sẽ dùng các ma trận trong một số rất lớn các mô hình. Ví dụ, các ma trận sẽ được dùng trong các mạng thông tin và các hệ thống giao thông vận tải. Nhiều thuật toán sẽ được phát triển để dùng các mô hình ma trận đó. Tiết này sẽ ôn lại một số kiến thức về số học các ma trận sẽ được dùng trong các thuật toán đó.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Ma trận* là một hảng số hình chữ nhật. Một ma trận có $m$ hàng và $n$ cột được gọi là ma trận $m \times n$. Một ma trận có số hàng bằng số cột được gọi là một ma trận *vuông*. Hai ma trận là bằng nhau nếu chúng nó cùng số hàng và số cột và các phần tử tương ứng ở tất cả các vị trí đều bằng nhau.

**Ví dụ 1** Ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

là ma trận $3 \times 2$.

■

Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra một số thuật ngữ về ma trận. Các chữ cái hoa và đậm sẽ được dùng để ký hiệu các ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

*Hàng* thứ $i$ của là ma trận $1 \times n$ $[a_{i1}, a_{i2} \ . \ . \ . \ a_{in}]$.

*Cột* thứ $j$ của $A$ là ma trận $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

Phần tử thứ $(i, j)$ của $\mathbf{A}$ là phần tử $a_{ij}$, tức là số nằm ở hàng thứ $i$ và cột thứ $j$ của $\mathbf{A}$. Một ký hiệu ngắn gọn và thuận tiện của ma trận $\mathbf{A}$ là viết $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, ký hiệu đó cho biết $\mathbf{A}$ là một ma trận có phần tử thứ $(i, j)$ *là* $a_{ij}$.

## SỐ HỌC MA TRẬN

Bây giờ chúng ta sẽ xét các phép toán cơ bản của số học ma trận, bắt đầu bằng định nghĩa phép cộng các ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** cho $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ và $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ là các ma trận $m \times n$. Tổng của **A** và **B**, được ký hiệu là $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ là ma trận $m \times n$ có phần tử thứ $(i, j)$ là $a_{i,j} + b_{ij}$. Nói cách khác, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Tổng của hai ma trận có cùng kích thước nhận được bằng cách cộng các phần tử ở những vị trí tương ứng. Các ma trận có kích thước khác nhau không thể cộng được với nhau, vì tổng của hai ma trận chỉ được xác định khi cả hai ma trận có cùng số hàng và cùng số cột.

**Ví dụ 2.** Ta có :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ xét phép nhân các ma trận. Tích của hai ma trận chỉ được xác định khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số hàng của ma trận thứ hai.

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Cho **A** là ma trận $m \times k$ và **B** là ma trận $k \times n$. Tích của **A** và **B**, được ký hiệu là **AB**, là ma trận $m \times n$ với phần tử thứ $(i, j)$ bằng tổng các tích của các phần tử tương ứng từ hàng thứ $i$ *của* **A** *và cột thứ* j *của* **B**. Nói cách khác, nếu $\mathbf{AB} = [c_{ij}]$, thì

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{l=1}^{k} a_{il}b_{lj}$$

Trong Hình 1 hàng tô đậm của **A** và cột tô đậm của **B** được dùng để tính phần tử $c_{ij}$ của **AB**. Tích của hai ma trận không xác định khi số hàng của ma trận thứ nhất và số cột của ma trận thứ hai không như nhau.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \\ \cdot & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots b_{1j} & \dots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots b_{2j} & \dots b_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ b_{k1} & b_{k2} & \dots b_{kj} & \dots b_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \boxed{c_{ij}} & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

***Hình 1.*** Tích của $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ và $\mathbf{B} = [b_{ij}]$.

Dưới đây là một số ví dụ về tích hai ma trận.

**Ví dụ 3.** Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm **AB**.

*Giải :* Vì **A** là ma trận $4 \times 3$ và **B** là ma trận $3 \times 2$ nên tích **AB** là xác định và là ma trận $4 \times 2$. Để tìm các phần tử của **AB**, các phần tử tương ứng của các hàng của **A** và các cột của **B** ban đầu được nhân với nhau rồi sau đó các tích đó sẽ được cộng lại. Ví dụ, phần tử ở vị trí (3,1) của **AB** là tổng các tính của các phần tử ở hàng thứ 3 của **A** và cột thứ 1 của **B**, cụ thể là $3.2 + 1.1 + 0.3 = 7$. Khi tất cả các phần tử của **AB** đã được tính, ta được :

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

■

Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán. Tức là, nếu **A** và **B** là hai ma trận, thì không nhất thiết **AB** phải bằng **BA**. Thực tế, có thể chỉ một trong hai tích đó là xác định. Ví dụ, nếu **A** là ma trận $2 \times 3$ và **B** là ma trận $3 \times 4$, khi đó **AB** là xác định và là ma trận $2 \times 4$, tuy nhiên ma trận **BA** là không xác định vì không thể nhân ma trận $3 \times 4$ với ma trận $2 \times 3$.

Nói chung, giả sử **A** là ma trận $m \times n$ và **B** là ma trận $r \times s$. Khi đó **AB** là xác định chỉ khi $n = r$ và **BA** là xác định chỉ khi $s = m$. Hơn nữa, thậm chí khi **AB** và **BA** đều xác định, thì chúng cũng sẽ không cùng kích thước trừ trường hợp $m = n = r = s$. Do đó, nếu cả hai **AB** và **BA** xác định và có cùng kích thước, thì cả **A** và **B** đều phải là các ma trận vuông và có cùng kích thước. Hơn thế nữa, thậm chí nếu cả **A** và **B** đều là các ma trận $n \times n$, thì **AB** và **BA** cũng không nhất thiết phải bằng nhau, như ví dụ dưới đây cho thấy :

**Ví dụ 4.** Cho $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hỏi **AB** có bằng **BA** không?

*Giải :* Ta tìm được

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vậy

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}.$$

■

## CÁC THUẬT TOÁN NHÂN MA TRẬN

Định nghĩa của tích hai ma trận dẫn tới thuật toán tính tích của hai ma trận. Giả sử rằng $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ là ma trận $m \times n$ là tích của ma trận $m \times k$ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ và ma trận $k \times n$ $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Thuật toán dựa trên định nghĩa nhân ma trận được biểu diễn dưới dạng giả mã như sau :

---

ALGORITHM 1. NHÂN MA TRẬN

```
procedure nhân ma trận (A, B : ma trận)
for i := 1 to m
begin
    for j := 1 to n
    begin
        c_ij := 0
        for q := 1 to k
        c_ij := c_ij + a_iq b_qj
    end
end {C = [c_ij] là tích của A và B}
```

---

Bây giờ chúng ta sẽ xác định độ phức tạp của thuật toán này qua số các phép nhân và phép cộng được dùng.

**Ví dụ 5.** Có bao nhiêu phép cộng và phép nhân các số nguyên được dùng trong Algorithm 1 để nhân hai ma trận có các phần tử là các số nguyên?

*Giải :* Trong tích của **A** và **B** có $n^2$ phần tử. Để tìm mỗi phần tử đòi hỏi cả thảy $n$ phép nhân và $n$ phép cộng. Vậy tổng cộng có $n^3$ phép nhân và $n^3$ phép cộng đã được sử dụng.

■

Điều đáng ngạc nhiên là vẫn có các thuật toán hiệu quả hơn Algorithm 1. Như ví dụ 5 cho thấy, việc nhân hai ma trận $n \times n$ trực tiếp theo định nghĩa đòi hỏi phải có $O(n^3)$ phép nhân và phép cộng. Dùng các thuật toán khác, hai ma trận $n \times n$ có thể được nhân mà chỉ cần dùng $O(n^{\sqrt{7}})$ phép nhân và phép cộng (chi tiết về các thuật toán này có thể tìm trong các sách tham khảo được giới thiệu ở cuối cuốn sách này).

Có một bài toán quan trọng khác liên quan đến độ phức tạp của phép nhân ma trận. Đó là : tích $\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2\ .\ .\ .\ \mathbf{A}_n$ cần được tính như thế nào để phải dùng một số ít nhất các phép nhân số nguyên, trong đó $\mathbf{A}_1\ \mathbf{A}_2\ .\ .\ .\ \mathbf{A}_n$ tương ứng là các ma trận $m_1 \times m_2$, $m_2 \times m_3$, ... $m_n \times m_{n+1}$ và có các phần tử đều là số nguyên? (Vì phép nhân ma trận có tính kết hợp, như Bài tập 13 ở cuối tiết này cho thấy, nên trình tự nhân trước hay sau không quan trọng). Trước khi nghiên cứu vấn đề này, cần chú ý rằng $m_1\ m_2\ m_3$ phép nhân các số nguyên được dùng để nhân ma trận $m_1 \times m_2$ và ma trận $m_2 \times m_3$ theo Algorithm 1. (Xem Bài tập 23 ở cuối tiết này). Ví dụ sau minh họa bài toán về độ phức tạp này.

**Ví dụ 6.** Cho $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ và $\mathbf{A}_3$ tương ứng là các ma trận $30 \times 20$, $20 \times 40$ và $40 \times 10$ với các phần tử đều là số số nguyên. Hỏi phải nhân $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ và $\mathbf{A}_3$ theo trình tự như thế nào để số các phép nhân là ít nhất?

*Giải :* Có hai cách tính tích $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$. Đó là $\mathbf{A}_1(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)$ và $(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\mathbf{A}_3$.

Nếu thực hiện nhân $\mathbf{A}_2$ và $\mathbf{A}_3$ trước, sẽ có tổng cộng 20. 40. 10 = 8000 phép nhân đã được sử dụng để nhận được ma trận $20 \times 10$ $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$. Sau đó nhân $\mathbf{A}_1$ với $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$ đòi hỏi phải thực hiện 30.20.10 = 6000 phép nhân nữa. Như vậy tổng cộng cần thực hiện 8000 + 6000 = 14000 phép nhân. Mặt khác, nếu thực hiện nhân $\mathbf{A}_1$ và $\mathbf{A}_2$ trước, thì cần thực hiện 30.20.40 = 24000 phép nhân để nhận được ma trận $30 \times 40$ $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$. Sau đó, nhân $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ và $\mathbf{A}_3$ đòi hỏi phải thực hiện $30 \times 40 \times 10 = 12\,000$ phép nhân nữa. Từ đó, tổng cộng cần thực hiện 24 000 + 12 000 = 36 000 phép nhân.

Như vậy, nhân theo phương pháp thứ nhất chắc chắn sẽ hiệu quả hơn.

■

Các thuật toán xác định cách có hiệu quả nhất để nhân $n$ ma trận có thể tìm trong các sách tham khảo được giới thiệu ở cuối sách này.

## CHUYỂN VỊ VÀ LŨY THỪA CÁC MA TRẬN

Bây giờ chúng ta đưa vào một ma trận quan trọng có các phần tử chỉ là 0 và 1 .

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Ma trận đồng nhất (hay còn gọi là ma trận đơn vị - ND) bậc $n$ là ma trận $n \times n$ $\mathbf{I}_n = [\delta_{ij}]$, với $\delta_{ij} = 1$ nếu $i = j$ và $\delta_{ij} = 0$ nếu $i \neq j$. Do đó

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân một ma trận với ma trận đơn vị kích thước thích hợp không làm thay đổi ma trận đó. Nói cách khác, khi $\mathbf{A}$ là ma trận $m \times n$, ta có :

$$\mathbf{AI}_n = \mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Người ta cũng có thể định nghĩa lũy thừa của các ma trận vuông khi $\mathbf{A}$ là một ma trận $n \times n$, ta có :

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{A}^r = \underbrace{\mathbf{AAA} \dots \mathbf{A}}_{\text{n lần}}$$

Phép toán chuyển hàng thành cột và cột thành hàng của một ma trận vuông cũng được sử dụng trong nhiều thuật toán.

**ĐỊNH NGHĨA 6.** Cho $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ là ma trận $m \times n$. *Chuyển vị* của $\mathbf{A}$, được ký hiệu là $\mathbf{A}^t$, là ma trận $n \times m$ nhận được bằng cách trao đổi các hàng và cột của ma trận $\mathbf{A}$ cho nhau. Nói cách khác, nếu $\mathbf{A}^t = [b_{ij}]$, thì $b_{ij} = a_{ji}$ với $i = 1, 2, \dots, m$.

**Ví dụ 7.** Chuyển vị của ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

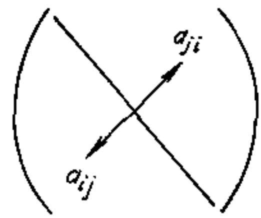
là ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ .

■

Các ma trận không đổi khi trao đổi các hàng và cột của nó cho nhau thường đóng vai trò quan trọng.

**ĐỊNH NGHĨA 7.** Ma trận vuông **A** được gọi là *đối xứng* nếu $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Như vậy, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ là đối xứng nếu $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i$ và $j$ ; $0 \leqslant i \leqslant n$ và $0 \leqslant j \leqslant n$.

Chú ý rằng một ma trận là đối xứng nếu và chỉ nếu nó là ma trận vuông và đối xứng qủa đường chéo chính của nó. Phép đối xứng này được minh họa trên Hình 2.




*Hình 2.* Ma trận đối xứng.

**Ví dụ 8.** Ma trận :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ là đối xứng}$$

## CÁC MA TRẬN ZÊRÔ - MỘT

Các ma trận có các phần tử là 0 hoặc 1 được gọi là các **ma trận zêrô-một**. Các ma trận zêrô-một thường được dùng để biểu diễn các cấu trúc rời rạc như chúng ta sẽ thấy trong các Chương 6 và 7. Các thuật toán dùng các cấu trúc này dựa trên số học Boole cho các ma trận zêrô-một. Số học này lại dựa trên các phép toán Boole $\vee$ và $\wedge$ thực hiện trên các cặp bit và được định nghĩa hởi :

$$b_1 \wedge b_2 = \begin{cases} 1 & \text{nếu } b_1 = b_2 = 1 \\ 0 & \text{các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

$$b_1 \vee b_2 = \begin{cases} 0 & \text{nếu } b_1 = 0 \text{ hoặc } b_2 = 0 \\ 1 & \text{các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

**ĐỊNH NGHĨA 8.** Cho $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ và $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ là các ma trận zêrô-một $m \times n$. Khi đó *hợp* của **A** và **B**, được ký hiệu là $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ là ma trận zêrô-một với phần tử ở vị trí $(i, j)$ là $a_{ij} \vee b_{ij}$. *Giao* của **A** và **B**, được ký hiệu là $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$, là ma trận zêrô - một với phần tử ở vị trí $(i, j)$ là $a_{ij} \wedge b_{ij}$.

**Ví dụ 9.** Tìm hợp và giao của các các ma trận zêrô - một sau :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Giải* : Hợp của **A** và **B** là :

$$\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 0\vee 1 & 1\vee 0 \\ 0\vee 1 & 1\vee 1 & 0\vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giao của **A** và **B**

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\wedge 0 & 0\wedge 1 & 1\wedge 0 \\ 0\wedge 1 & 1\wedge 1 & 0\wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bây giờ ta định nghĩa tích Boole của hai ma trận.

**ĐỊNH NGHĨA 9.** Cho $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ là ma trận zêrô – một $m\times k$ và $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ là ma trận zêrô – một $k\times n$. Khi đó tích Boole của **A** và **B**, được ký hiệu là $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ là ma trận $m\times n$ với phần tử ở vị trí $(i, j)$ $[c_{ij}]$ là :

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

Chú ý rằng tích Boole của **A** và **B** nhận được bằng cách tương tự với tích thông thường của hai ma trận đó, nhưng với phép cộng được thay bằng phép $\vee$ và với phép nhân được thay bằng phép $\wedge$. Dưới đây là ví dụ về tích Boole của các ma trận.

**Ví dụ 10.** Tìm tích Boole của **A** và **B**, với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

*Giải* : Tích Bool $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ được cho bởi :

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} (1\wedge 1) \vee (0\wedge 0) & (1\wedge 1) \vee (0\wedge 1) & (1\wedge 0) \vee (0\wedge 1) \\ (0\wedge 1) \vee (1\wedge 0) & (0\wedge 1) \vee (1\wedge 1) & (0\wedge 0) \vee (1\wedge 1) \\ (1\wedge 1) \vee (0\wedge 0) & (1\wedge 1) \vee (0\wedge 1) & (1\wedge 0) \vee (0\wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0 \\ 0\vee 0 & 0\vee 1 & 0\vee 1 \\ 1\vee 0 & 1\vee 0 & 0\vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Algorithm 2 dưới dạng giả mã sau đây mô tả thuật toán tính tích Boole của 2 ma trận

---

ALGORITHM 2. TÍCH BOOLE

**procedure** tích Boole (**A**, **B** : các ma trận zêrô – một)

**for** $i$ := 1 **to** $m$

**begin**

```
for j := 1 to n
    begin
        c_ij := 0
        for q := 1 to k
            c_ij := c_ij ∨ (a_iq ∧ b_qj)
    end
end {C = [c_ij] là tích Boole của A và B}
```

Chúng ta cũng có thể định nghĩa lũy thừa Boole của các ma trận zêrô – một vuông. Các lũy thừa này sẽ được dùng trong các nghiên cứu sau này của chúng ta về các đường trong đồ thị, các đường này được dùng, chẳng hạn, để mô hình các đường liên lạc trong các mạng máy tính.

**ĐỊNH NGHĨA 10.** Cho $\mathbf{A}$ là ma trận zêrô – một vuông và $r$ là một số nguyên dương. Lũy thừa Boole bậc $r$ của $\mathbf{A}$ được ký hiệu là $\mathbf{A}^{[r]}$ với

$$\mathbf{A}^{[r]} = \underbrace{\mathbf{A} \odot \mathbf{A} \odot \; \ldots \; \odot \mathbf{A}}_{r \text{ lần}}$$

($\mathbf{A}^{[r]}$ là hoàn toàn xác định vì tích Boole có tính chất kết hợp).

Chúng ta cũng có thể định nghĩa $\mathbf{A}^{[0]}$ là $\mathbf{I}_n$ .

**Ví dụ 11.** Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm $\mathbf{A}^{[n]}$ với mọi $n$ nguyên dương.

*Giải :* Ta thấy ngay rằng :

$$\mathbf{A}^{[2]} = \mathbf{A} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta cũng tìm được :

$$\mathbf{A}^{[3]} = \mathbf{A}^{[2]} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ và}$$

$$\mathbf{A}^{[4]} = \mathbf{A}^{[3]} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính thêm một lần nữa, ta được :

$$\mathbf{A}^{[5]} = \mathbf{A}^{[4]} \odot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Độc giả bây giờ có thể thấy rằng $\mathbf{A}^{[n]} = \mathbf{A}^{[5]}$ với mọi $n$ nguyên dương không nhỏ hơn 5.

■

Số các phép toán bit được dùng để tìm tích Boole của hai ma trận $n \times n$ cũng dễ dàng xác định được.

**Ví dụ 2.** Có bao nhiêu phép toán bit được dùng để tính $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$ với **A**, **B** là các ma trận zêrô – một $n \times n$.

*Giải.* Có $n^2$ phân tử trong $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$. Dùng Algorithm 2, tổng cộng có $n$ phép toán *OR* và $n$ phép *AND* được dùng để tìm 1 phần tử của $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$. Vậy phải dùng $2n$ phép toán bit để tìm mỗi phần tử. Do đó khi dùng Algorithm 2, cần phải dùng $2n^3$ phép toán bit để tính $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$.

■

## BÀI TẬP

1. Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Xác định kích thước của **A**.

b) Xác định cột thứ 3 của **A**.

c) Xác định dòng thứ 2 của **A**.

d) Xác định phần tử ở vị trí (3,2) của **A**.

e) Xác định $\mathbf{A}^t$.

2. Tìm **A** + **B** với

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

**3.** Tìm **AB**, nếu

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**4.** Tìm tích **AB**, với

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ và $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

**5.** Tìm ma trận **A** sao cho :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(*Gợi ý* : để tìm **A** bạn sẽ phải giải một hệ phương trình tuyến tính)

**6.** Tìm **A** sao cho

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

**7.** Cho **A** là ma trận $m \times n$ và **O** là ma trận $m \times n$ với tất cả các phần tử đều là số zêrô. Chứng minh rằng :

$$\mathbf{A} = \mathbf{O} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{O}$$

**8.** Chứng minh rằng phép cộng các ma trận có tính chất giao hoán, tức là, chứng minh rằng nếu **A** và **B** đều là các ma trận $m \times n$ thì $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

9. Chứng minh rằng phép cộng các ma trận có tính chất kết hợp, tức là, chứng minh rằng nếu **A**, **B** và **C** đều là các ma trận $m \times n$, thì

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$$

10. Cho **A** là ma trận $3 \times 4$, **B** là ma trận $4 \times 5$ và **C** là ma trận $4 \times 4$. Xác định xem các tích cho dưới đây tích nào xác định và tìm kích thước của các tích xác định đó :

a) **AB** b) **AB** c) **AC**

d) **CA** e) **BC** f) **CB**

11. Bạn biết gì về kích thước của hai ma trận **A** và **B**, nếu như cả hai tích **AB** và **BA** đều xác định?

12. Trong bài tập này ta sẽ chứng minh rằng phép nhân ma trận có tính chất phân phối đối với phép cộng?

a) Cho **A** và **B** là các ma trận $m \times k$ và $C$ là ma trận $k \times n$. Chứng minh rằng $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

b) Giả sử dòng **C** là ma trận $m \times k$ và **A** và **B** là các ma trận $k \times n$. Chứng minh rằng $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$

13. Trong bài tập này ta sẽ chứng minh phép nhân ma trận có tính chất kết hợp. Giả sử **A** là ma trận $m \times p$, **B** là ma trận $p \times k$ và **C** là ma trận $k \times n$. Chứng minh rằng $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

14. Ma trận $n \times n$ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ được gọi là **ma trận chéo** nếu $a_{ij} = 0$ khi $i \neq j$. Chứng minh rằng tích của hai ma trận chéo $n \times n$ cũng là một ma trận chéo. Cho một qui tắc đơn giản để tính ma trận tích.

15. Cho $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Tìm công thức để tính $\mathbf{A}^n$ với $n$ là một số nguyên dương.

16. Chứng minh rằng $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$.

17. Cho **A** và **B** là các ma trận $n \times n$ chứng minh rằng

a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$

b) $(\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t.\mathbf{A}^t$

*Nếu* **A** *và* **B** *là các ma trận* $n \times n$ *và* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$, *thì* **B** *được gọi là* **ma trận nghịch đảo** *của* **A** *(thuật ngữ này phù hợp vì ma trận* **B** *thỏa mãn tính chất đó là duy nhất) và* **A** *được gọi là ma trận* **khả nghịch**. *Ký hiệu* $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ *để chỉ rằng* **B** *là nghịch đảo của* **A**.

**18.** Chứng tỏ rằng

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

là nghịch đảo của

$$\begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

**19.** Cho **A** là ma trận $2 \times 2$ với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Chứng minh rằng nếu $ad - bc \neq 0$ thì

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

**20.** Cho $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Tìm $\mathbf{A}^{-1}$ (*Gợi ý* : dùng Bài tập 19)

b) Tìm $\mathbf{A}^3$

c) Tìm $(\mathbf{A}^{-1})^3$

d) Dùng đáp số của bạn cho câu (b) và (c) chứng tỏ rằng $(\mathbf{A}^{-1})^3$ là nghịch đảo của $\mathbf{A}^3$.

**21.** Cho **A** là một ma trận khả nghịch. Chứng minh rằng $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$ với mọi $n$ là số nguyên dương.

**22.** Cho **A** là một ma trận. Chứng minh rằng ma trận $\mathbf{AA}^t$ là ma trận đối xứng. (*Gợi ý* : chứng minh ma trận này bằng ma trận chuyển vị của nó với sự giúp đỡ của Bài tập 17b).

**23.** Chứng minh rằng thuật toán thông thường dùng $m_1\ m_2\ m_3$ phép nhân để tính tích của ma trận $m_1 \times m_2$ **A** và ma trận $m_2 \times m_3$ **B**.

**24.** Cho biết cách có hiệu quả nhất để nhân các ma trận $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ và $\mathbf{A}_3$ có kích thước tương ứng bằng :

a) $20 \times 50$ ; $50 \times 10$ ; $10 \times 40$ ?

b) $10 \times 5$ ; $5 \times 50$ ; $50 \times 1$ ?

**25.** Nêu cách hiệu quả nhất thể thực hiện phép nhân các ma trận $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ và $\mathbf{A}_4$ nếu kích thước của chúng tương ứng bằng $10\times2$ ; $2\times5$; $5\times20$, và $20\times3$?

**26** a) Chứng minh rằng hệ phương trình tuyến tính :

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

với các biến $x_1, x_2 \dots x_n$ có thể biểu diễn dưới dạng **AX = B** với $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ ; **X** là ma trận cột $n\times1$ với $x_i$ là phần tử ở hàng thứ $i$ ; và **B** là ma trận cột $n\times1$ với $b_i$ là phần tử ở hàng thứ $i$.

b) Chứng minh rằng nếu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ là khả nghịch (như đã được định nghĩa ở trước Bài tập 18), thì nghiệm của hệ ở câu (a) có thể tìm được bằng cách dùng phương trình : $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$.

**27**. Sử dụng các kết quả của Bài tập 18 và 26, giải hệ sau :

$$\begin{aligned} 7x_1 - 8x_2 + 5x_3 &= 5 \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

**28.** Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$ b) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ c) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$.

**29.** Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm

a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B}$; b) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$ ; c) $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$

**30.** Tìm tích Boole của **A** và **B** với

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**31.** Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm

a) $\mathbf{A}^{[2]}$ ; b) $\mathbf{A}^{[3]}$ ; c) $\mathbf{A} \vee \mathbf{A}^{[2]} \vee \mathbf{A}^{[3]}$

**32.** Cho **A** là một ma trận zêrô – một. Chứng minh rằng ;

a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{A} = \mathbf{A}$; b) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{A}$

**33.** Trong bài tập này ta sẽ chứng minh các phép giao và hợp có tính chất giao hoán. Giả sử **A** và **B** là các ma trận zêrô–một $m \times n$. Chứng minh rằng

a) $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$ h) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$.

**34.** Trong bài tập này ta sẽ chứng minb các phép giao và hợp có tính chất kết hợp. Cho **A**, **B** và C là các ma trận zêrô–một $m \times n$. Chứng minh rằng

a) $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \vee \mathbf{C}$

b) $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{C}$

**35.** Trong bài tập này ta sẽ chứng minh luật phân phối của phép giao đối với phép hợp và pbép hợp đối với giao. Giả sử **A**, **B**, và **C** là các ma trận zêrô–một $m \times n$. Chứng minh rằng

a) $\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$

b) $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$

**36.** Cho **A** là ma trận zêrô–một $m \times n$ và **I** là ma trận đơn vị $n \times n$. Chứng minh rằng **A** . **I** = **I** . **A** = **A**.

**37.** Trong bài tập này ta sẽ chứng minh tích Boole có tính kết hợp. Cho **A** là ma trận zêrô–một $m \times p$, **B** là ma trận zêrô – một $p \times k$ và **C** là ma trận zêrô–một $k \times n$. Chứng minh rằng

$$\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \odot \mathbf{C}.$$

## CÂU HỎI ÔN TẬP

1. a) Định nghĩa thuật ngữ *thuật toán*.

   b) Nêu những cách khác nhau mô tả một thuật toán

   c) Nêu sự khác nhau giữa một thuật toán để giải một bài toán và một chương trình máy tính để giải bài toán đó.

2. a) Dùng ngôn ngữ thông thường mô tả thuật toán tìm số lớn nhất, số lớn thứ hai và số lớn thứ ba của một bảng liệt kê gồm $n$ số nguyên.

   b) Biểu diễn thuật toán đó bằng giả mã.

   c) Thuật toán trên dùng bao nhiêu phép so sánh.

3. a) Độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất, trong trường hợp trung bình và trong trường hợp tốt nhất (tính qua các phép so sánh) có ý nghĩa gì đối với thuật toán tìm số nhỏ nhất trong bảng liệt kê gồm $n$ số nguyên.

   b) Xác định độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất, trong trường hợp trung bình và trong trường hợp tốt nhất của các phép so sánh của thuật toán tìm số nhỏ nhất trong bảng liệt kê gồm các số nguyên bằng cách so sánh các số nguyên với số nguyên bé nhất đã tìm được đến lúc này?

4. a) Mô tả thuật toán tìm kiếm tuyến tính và thuật toán tìm kiếm nhị phân để tìm một số nguyên trong một bảng liệt kê các số nguyên sắp theo thứ tự tăng dần.

   b) So sánh độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất của hai thuật toán đó.

   c) Một trong hai thuật toán đó có luôn luôn nhanh hơn thuật toán kia không?

5. Phát biểu Định lý cơ bản của số học.

**6.** a) Mô tả thủ tục phân tích một số ra thừa số nguyên tố.

b) Dùng thủ tục đó phân tích số 80.707 ra thừa số nguyên tố.

**7.** a) Định nghĩa ước số chung lớn nhất của hai số nguyên.

b) Mô tả ít nhất ba cách khác nhau để tìm ước số chung lớn nhất của hai số nguyên. Khi nào mỗi phương pháp tỏ ra tốt nhất.

c) Tìm ước số chung lớn nhất của 1.234.567 và 7.654.321.

d) Tìm ước số chung lớn nhất của $2^3 3^5 5^7 7^9 11$ và $2^9 3^7 5^5 7^3 13$.

**8.** a) Nói $a$ và $b$ đồng dư theo môđun 7 có nghĩa là gì?

b) Các cặp nào trong số các số nguyên −11, −8, −7, −1, 0, 3, và 17 là đồng dư theo môđun 7?

c) Chứng minh rằng nếu $a$ và $b$ đồng dư theo môđun 7 thì $10a + 13$ và $-4b - 20$ cũng đồng dư theo môđun 7.

**9.** Mô tả thủ tục chuyển khai triển thập phân của một số nguyên sang khai triển thập lục phân của số đó.

**10.** a) Làm thế nào có thể tìm được một tổ hợp tuyến tính (với hệ số nguyên) của hai số nguyên bằng ước số chung lớn nhất của chúng?

b) Biểu diễn ƯCLN(84, 119) như một tổ hợp tuyến tính của 84 và 119.

**11.** Định nghĩa tích của hai ma trận **A** và **B**. Khi nào tích này là xác định?

**12.** a) Có bao nhiêu cách khác nhau để tính tích $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$ bằng cách nhân liên tiếp các cặp ma trận? Khi nào tích này là xác định?

b) Giả sử rằng $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ và $\mathbf{A}_4$, tương ứng có kích thước là $10\times20$, $20\times5$, $5\times10$ và $10\times5$. Tích $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$ cần phải tính như thế nào để số phép nhân các phần tử phải dùng là ít nhất.

## BÀI TẬP BỔ SUNG

**1** a) Mô tả thuật toán xác định vị trí lần gặp cuối cùng của số lớn nhất trong một bảng liệt kê các số nguyên.

b) Đánh giá số các phép so sánh đã được dùng.

**2.** a) Mô tả thuật toán tìm phần tử lớn thứ nhất và lớn thứ hai trong một bảng liệt kê các số nguyên.

b) Đánh giá số các phép so sánh đã được dùng.

**3.** a) Cho một thuật toán để xác định một xâu bit có chứa hai số zêrô đứng liền nhau hay không.

b) Thuật toán đó đã dùng bao nhiêu phép so sánh?

**4.** a) Giả sử một bảng liệt kê các số nguyên được sắp theo thứ tự từ số lớn nhất đến số nhỏ nhất, và một số nguyên có thể xuất hiện lặp lại trong bảng liệt kê đó. Tìm thuật toán xác định vị trí tất cả các lần xuất hiện của số nguyên $x$ nào đó trong bảng liệt kê đó.

b) Đánh giá số phép so sánh đã được sử dụng.

**5.** Tìm 4 số đồng dư với 5 theo modun 17.

**6.** Chứng minh rằng nếu $a$ và $d$ là các số dương, thì tồn tại các số nguyên $q$ và $r$ sao cho $a = dq + r$ với $- d/2 \leq r \leq d/2$.

***7** Chứng minh rằng nếu $ac \equiv bc \pmod{m}$ thì $a \equiv b \pmod{m/d}$, với $d$ = ƯCLN$(m, c)$

***8**. Có bao nhiêu số 0 ở cuối khai triển nhị phân của $100_{10}$ ! ?

**9.** Dùng thuật toán Euclid, tìm ƯCLN(10.223, 33.341).

**10.** Để tìm ƯCLN(144, 233) bằng thuật toán Euclid, cần phải làm bao nhiêu phép chia?

**11.** Tìm ƯCLN$(2n + 1, 3n + 2)$ với $n$ là một số nguyên dương (*Gợi ý* : dùng thuật toán Euclid).

**12.** a) Chứng tỏ rằng nếu $a$ và $b$ là các số nguyên dương với $a \geq b$, thì ƯCLN$(a, b) = a$ nếu $a = b$ ; ƯCLN$(a, b) = 2$ƯCLN$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ nếu $a$ và $b$ là số chẵn ; ƯCLN$(a, b)$ = ƯCLN$\left(\frac{a}{2}, b\right)$ nếu $a$ là chẵn $b$ là lẻ ; và ƯCLN$(a, b)$ = ƯCLN$(a - b, b)$ nếu cả $a$ và $b$ đều lẻ.

b) Giải thích rõ dùng câu ($a$) như thế nào để xây dựng một thuật toán tính ước số chung lớn nhất của hai số nguyên mà chỉ dùng các phép so sánh, các phép trừ và xê dịch các khai triển nhị phân chứ không dùng phép chia.

c) Tìm ƯCLN(1202, 4848) bằng thuật toán đó.

**13.** Chứng minh rằng một số nguyên chia hết cho 9 nếu và chỉ nếu tổng các chữ số trong biểu diễn thập phân của nó chia hết cho 9.

**14.** a) Xây dựng một thuật toán tính $x^n$ **mod** $m$, trong đó $x$ là một số nguyên, $m$ và $n$ là các số nguyên dương, bằng cách dùng khai triển nhị phân của $n$. (Gợi ý : Thực hiện liên tiếp các phép bình phương để nhận được $x$ **mod** $m$, $x^2$ **mod** $m$, $x^4$ **mod** $m$ v.v... Sau đó nhân các luỹ thừa thích hợp có dạng $x^{2^k}$ **mod** $m$ để nhận được những $x^n$ **mod** $m$).

b) Đánh giá số các phép nhân được sử dụng trong thuật toán đó.

*Một tập hợp các số nguyên được gọi là* **nguyên tố cùng nhau** *nếu ước số chung lớn nhất của các số nguyên đó bằng 1.*

**15.** Các tập số nguyên sau đây có phải là nguyên tố cùng nhau không

a) 8, 10, 12 b) 12, 15, 25

c) 15, 21, 28 c) 21, 24, 28, 32

**16.** Tìm một tập hợp gồm bốn số nguyên là tập nguyên tố cùng nhau, sao cho không có hai số nào trong chúng là nguyên tố cùng nhau.

**17.** a) Giả sử một bức thư được mã hoá bằng cách dùng hàm $f(p) = (ap + b)$ **mod** 26 sao cho ƯCLN($a$, 26) = 1. Xác định hàm có thể dùng để giải mã bức thư đó ?

b) Phiên bản mã hóa của một bức thư như sau : LJMKG MGMXF QEXMW. Nếu nó được mã hóa bằng cách dùng hàm $f(p) = (7p + 10)$ **mod** 26, thì bức thư gốc là như thế nào?

**18.** Chứng minh rằng hệ các phương trình đồng dư : $x \equiv 2 \pmod 6$ và $x \equiv 3 \pmod 9$ không có nghiệm.

**19.** Tìm nghiệm của hệ phương trình đồng dư sau : $x \equiv 4 \pmod 6$ và $x \equiv 13 \pmod{15}$

***20** a) Chứng minh rằng hệ phương trình đồng dư : $x \equiv a_1 \pmod{m_1}$, và $x \equiv a_2 \pmod{m_2}$ có nghiệm nếu và chỉ nếu ƯCLN$(m_1, m_2) | a_1 - a_2$.

b) Chứng minh rằng nghiệm của câu a) là duy nhất theo modun BCNN$(m_1, m_2)$.

**21.** Tìm $\mathbf{A}^n$, nếu $\mathbf{A}$ là $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

**22.** Chứng minh rằng nếu $\mathbf{A} = c\mathbf{I}$, với $c$ là một số thực và $\mathbf{I}$ là ma trận đơn vị $n \times n$, thì $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ với $\mathbf{B}$ là ma trận $n \times n$ bất kỳ.

**23.** Chứng minh rằng nếu $\mathbf{A}$ là ma trận $2 \times 2$ sao cho $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ với $\mathbf{B}$ là ma trận $2 \times 2$ bất kỳ thì $\mathbf{A} = c\mathbf{I}$, trong đó $c$ là một số thực và $\mathbf{I}$ là ma trận đơn vị $2 \times 2$.

*Một ma trận $n \times$ n được gọi là có dạng* **tam giác trên** *nếu $a_{ij} = 0$ với mọi $i > j$.*

**24.** Từ định nghĩa của tích ma trận, hãy lập một thuật toán tính tích của ma trận có dạng tam giác trên, trong đó bỏ qua các tích tự động bằng zêrô.

**25.** Cho mô tả giả mã của thuật toán ở Bài tập 24.

**26.** Có bao nhiêu phép nhân các phần tử đã được sử dụng trong thuật toán Bài tập 25.

**27.** Chứng minh rằng nếu $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ là các ma trận khả nghịch và $\mathbf{AB}$ tồn tại, thì $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}.\mathbf{A}^{-1}$.

**28.** Xác định trình tự tốt nhất để tính tích **ABCD**, nếu **A, B, C, D** là các ma trận có kích thước tương ứng là : $30 \times 10$; $10 \times 40$; $40 \times 50$ ; và $50 \times 30$ ? Giả sử rằng số phép nhân các phần tử được dùng để tích tính của một ma trận $p$ x $q$ với ma trận $q \times r$ là $pqr$.

**29.** Cho $\mathbf{A}$ là ma trận $n \times n$ và $\mathbf{O}$ là ma trận $n \times n$ chỉ gồm các số không. Chứng minh các hệ thức sau :

a) $\mathbf{A} \odot \mathbf{O} = \mathbf{O} \odot \mathbf{A} = \mathbf{O}$

b) $\mathbf{A} \vee \mathbf{O} = \mathbf{O} \vee \mathbf{A} = \mathbf{A}$

c) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{O} = \mathbf{O} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{O}$

## *BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH*

***Viết các chương trình với Input và Output sau :***

**1.** Cho bảng liệt kê gồm $n$ số nguyên, tìm số nguyên lớn nhất trong bảng đó.

**2.** Cho bảng liệt kê gồm $n$ số nguyên, tìm nơi xuất hiện đầu tiên và cuối cùng của số lớn nhất trong bảng đó.

3. Cho một bảng liệt kê gồm $n$ số nguyên phân biệt, dùng thuật toán tìm kiếm tuyến tính, xác định vị trí của một số nguyên trong bảng.

4. Cho một bảng liệt kê sắp thứ tự gồm $n$ số nguyên phân biệt. Dùng thuật toán tìm kiếm nhị phân xác định vị trí của một số nguyên trong bảng đó.

5. Cho một bảng liệt kê sắp thứ tự gồm $n$ số nguyên và một số nguyên $x$. Xác định số các phép so sánh được dùng để xác định vị trí của số nguyên x trong bảng theo thuật toán tìm kiếm nhị phân.

6. Cho một số nguyên dương. Xác định xem số đó có phải là số nguyên tố không.

7. Cho một bức thư, hãy mã hóa nó theo mật mã Caesar và cho một bức thư đã được mã hóa theo mật mã Caesar, hãy giải mã bức thư đó.

8. Cho hai số nguyên dương. Dùng thuật toán Euclid tìm ước số chung lớn nhất của chúng.

9. Cho hai số nguyên dương, tìm bội số chung nhỏ nhất của chúng.

*10. Cho một số nguyên dương, phân tích số đó ra thừa số nguyên tố.

11. Cho một số nguyên dương $a$ và một số nguyên dương $b$ lớn hơn 1. Tìm khai triển cơ số $b$ của số nguyên $a$.

12. Cho một số nguyên dương, tìm khai triển Cantor của số nguyên đó (Xem phần chú thích ở trước Bài tập 24 của Tiết 2.4).

13. Cho một số nguyên dương $n$, một môđun $m$, một nhân tử $a$, một số gia $c$ và hạt giống $x_0$, với $0 \leqslant a < m$, $0 \leqslant c < m$, hãy tạo dãy $n$ số giả ngẫu nhiên bằng cách dùng "máy phát' đồng dư tuyến tính $x_{n+1} = (ax_n + c) \textbf{ mod } m$.

14. Cho các số nguyên dương $a$ và $b$, tìm các số nguyên $s$ và $t$ sao cho $sa + tb = \text{ƯCLN}(a, b)$.

15. Cho ma trận $m \times k$ **A** và ma trận $k \times n$ **B**, tìm **AB**

*16. Cho ma trận vuông **A** và số nguyên dương $n$. Tìm $\mathbf{A}^n$.

17. Cho một ma trận vuông, xác định xem ma trận đó có là đối xứng hay không.

**18.** Cho ma trận $n_1 \times n_2$ **A**, ma trận $n_2 \times n_3$ **B**, ma trận $n_3 \times n_4$ **C**, và ma trận $n_4 \times n_5$ **D** với tất cả các phần tử là số nguyên, tìm trình tự nhân có hiệu quả nhất bốn ma trận trên (qua số các phép nhân và cộng các số nguyên).

**19.** Cho hai ma trận Boole $m \times n$. Tìm giao và hợp của chúng.

**20.** Cho ma trận Boole $m \times k$ **A** và ma trận Boole $k \times n$ **B**. Tìm tích Boole của **A** và **B**.

**21.** Cho ma trận Boole vuông **A** và một số nguyên dương $n$, tìm $\mathbf{A}^{[n]}$.

## *TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ*

***Dùng các chương trình mà bạn đã viết làm các bài tập sau***

1. Xác định xem $2^p - 1$ có phải là số nguyên tố không đối với mỗi số nguyên tố $p$ không vượt quá 100.

2. Chứng tỏ rằng $n^2 + n + 41$ là số nguyên tố với mọi số nguyên $n$ sao cho $0 \leqslant n \leqslant 39$, nhưng không là số nguyên tố khi $n = 40$. Một đa thức của $n$ với các hệ số nguyên và bậc lớn hơn zêrô có luôn nhận giá trị là số nguyên tố đối với mọi $n$ nguyên dương?

3. Tìm các số nguyên tố có dạng $n^2 + 1$ nhiều nhất có thể được. Người ta vẫn còn chưa biết các số nguyên tố dạng này có nhiều vô hạn hay không.

4. Tìm 10 số nguyên tố khác nhau mỗi số có 100 chữ số.

5. Có bao nhiêu số nguyên tố nhỏ hơn 1.000.000, nhỏ hơn 10.000.000 và nhỏ hơn 100.000.000? Bạn có thể đưa ra một ước lượng về số các số nguyên tố nhỏ hơn một số nguyên dương $x$ nào đó không?

6. Tìm một thừa số nguyên tố của 10 số lẻ, mỗi số gồm 20 chữ số khác nhau được chọn một cách ngẫu nhiên. Đối với mỗi một số, việc tìm đó mất bao lâu? Cũng hỏi như trên đối với 10 số lẻ, mỗi số có 30 chữ số? 10 số lẻ, mỗi số có 40 chữ số, v.v..., bạn cứ tiếp tục chừng nào còn có thể.

7. Tìm tất cả các số giả nguyên tố, tức là các hợp số $n$ sao cho $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$, với $n$ không vượt quá 10.000.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau :***

1. Khảo sát lịch sử của từ thuật toán (algorithm) và mô tả cách dùng từ này trong các văn bản đầu tiên.

2. Mô tả thuật ngữ "thuật toán song song ". có nghĩa là gì? Giải thích xem giả mã được dùng trong cuốn sách này làm thế nào có thể mở rộng để dùng cho cả các thuật toán song song.

3. Giải thích xem độ phức tạp của các thuật toán song song có thể đo như thế nào? Cho một số ví dụ để minh họa khái niệm này và chứng tỏ một thuật toán song song có thể làm việc nhanh hơn một thuật toán không hoạt động song song như thế nào?

4. Các số nguyên tố nhỏ hơn một lũy thừa nguyên của 2 một đơn vị được gọi là các số nguyên tố Mersenne. Hiện nay người ta đã biết bao nhiêu số nguyên tố Mersenne? Mỗi số trong 10 số Mersenne lớn nhất được tìm ra khi nào, do ai tìm ra và dùng loại máy tính nào? Số nguyên tố lớn nhất được biết hiện nay có phải là số Mersenne không?

5. Hãy giải thích những trắc nghiệm tính nguyên tố theo kiểu xác suất đã được sử dụng như thế nào trên thực tế để tạo các số cực lớn mà hầu chắc chắn là số nguyên tố. Các trắc nghiệm như vậy liệu có những mặt hạn chế tiềm tàng nào không?

6. *Số Carmichael* là một số nguyên, nó cũng là một số giả nguyên tố đối với tất cả các cơ số nguyên tố cùng nhau với số nguyên đó. Vấn đề có tồn tại một số vô hạn các số Carmichael đã được giải quyết mới đây sau hơn 75 năm để ngỏ. Hãy giải thích rõ số Carmichael là gì? Cho những ví dụ về các số đó, và mô tả các điểm mấu chốt trong chứng minh có tồn tại vô số các số đó.

7. Tổng kết tình trạng hiện nay của các thuật toán phân tích thừa số qua độ phức tạp của chúng, kích thước của các số hiện nay có thể phân tích được. Theo bạn thì khi nào có thể phân tích được các số có 200 chữ số?

8. Mô tả các thuật toán hiện đang được dùng trong các máy tính hiện đại để cộng, trừ, nhân và chia các số nguyên dương.

**9.** Mô tả lịch sử của Định lý số dư Trung hoa. Mô tả một số bài toán liên quan đã được đặt ra trong các văn bản bằng tiếng Trung hoa và Hinđu và định lý số dư Trung hoa áp dụng như thế nào cho các bài toán đó?

**10.** Khi nào các số trong một dãy mới thực sự là các số ngẫu nhiên chứ không phải giả ngẫu nhiên? Những hạn chế nào sẽ được bộc lộ trong các mô phỏng và thực nghiệm dùng các số giả ngẫu nhiên? Các số giả ngẫu nhiên có thể có những tính chất gì mà các số ngẫu nhiên không có.

**11.** Chứng tỏ phép đồng dư có thể được dùng để nói được ngày trong tuần ở bất kỳ ngày nào đã cho.

**13.** Mô tả một số thuật toán được dùng để nhân các số nguyên lớn một cách có hiệu quả.

**14.** Mô tả một số thuật toán được dùng để nhân các ma trận lớn một cách có hiệu quả ?

CHUONG 3

# SUY LUẬN TOÁN HỌC

Để hiểu các tác phẩm toán học, chúng ta cần phải biết cái gì tạo nên những lập luận toán học đúng đắn, các chứng minh. Học toán mỗi người cần hình thành những tư duy toán học chứ không phải đọc một bài bình luận. Rõ ràng, điều đó đòi hỏi phải hiểu các kỹ thuật thường dùng để xây dựng các chứng minh. Mục đích của chương này là cung cấp cho bạn những cái tạo nên các suy luận toán học đúng đắn và những công cụ cần thiết để xây dựng các suy luận đó.

Nhiều mệnh đề toán học khẳng định một tính chất nào đó là đúng cho tất cả các số nguyên dương. Ví dụ, với mọi số nguyên dương $n$ ta có : $n! < n^n$, $n^3 - n$ chia hết cho 3, tổng $n$ số nguyên dương đầu tiên bằng $n(n + 1)/2$. Mục đích chính của chương này cũng như của cuốn sách này là làm cho các bạn sinh viên hiểu sâu sắc phương pháp quy nạp toán học. Chính nhờ phương pháp này mà ta có thể chứng minh được rất nhiều kết quả loại như vừa kể trên.

Trong các chương trước ta đã định nghĩa dưới dạng tường minh các tập hợp, các dãy, các hàm. Tức là chúng ta mô tả tập hợp bằng cách liệt kê các phần tử của nó, hoặc là cho một số tính chất đặc trưng của các phần tử này.

Chúng ta cho các công thức biểu diễn các số hạng của một dãy hay các giá trị của một hàm. Có một cách rất quan trọng khác để định nghĩa các đối tượng này là dựa trên quy nạp toán học. Để định nghĩa các dãy hay các hàm người ta định rõ giá trị của một vài số hạng đầu tiên, sau đó đưa ra quy tắc tìm các giá trị của các số hạng sau qua các giá trị đã biết đó. Ví dụ, có thể xác định được dãy số $\{2^n\}$ bằng cách cho $a_1 = 2$ và $a_{n+1} = 2a_n$ với $n = 1, 2, 3$ ... Cũng có thể xác định một tập hợp bằng cách liệt kê một vài phần tử của nó, và cho các quy tắc xây dựng các phần tử khác từ những phần tử đã biết của tập hợp. Các định nghĩa như vậy được gọi là các *định nghĩa bằng đệ quy*, chúng rất hay được sử dụng trong toán học rời rạc và trong tin học.

Khi một thủ tục được xây dựng để giải một bài toán nào đó, thông thường nó giải đúng bài toán này. Chính việc thử để thấy với các dữ liệu vào đúng thủ tục cho ta các kết quả đúng cũng không khẳng định được thủ tục này *luôn luôn* đúng. Tính đúng đắn của một thủ tục chỉ có thể đảm bảo bằng cách chứng minh rằng nó luôn tạo ra các kết quả đúng. Mục cuối của chương này trình bày sơ lược về các kỹ thuật kiểm chứng chương trình. Đó là kỹ thuật hình thức để kiểm tra tính đúng đắn của các thủ tục. Việc kiểm chứng chương trình là cơ sở để tiến tới chứng minh sự đúng đắn của các chương trình bằng máy.

# 3.1. CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

## MỞ ĐẦU

Hai vấn đề quan trọng xuất hiện trong toán học là : (1) Khi nào một suy luận toán học là đúng? (2) Có thể dùng các phương pháp nào để xây dựng các suy luận toán học? Trong mục này chúng ta sẽ trả lời các câu hỏi này bằng cách mô tả những dạng khác nhau của suy luận toán học đúng và không đúng.

**Định lý** là một phát biểu có thể chỉ ra được là đúng. Chúng ta thể hiện một định lý là đúng bằng một dãy các mệnh đề tạo thành một suy luận, mà ta gọi là **sự chứng minh**. Để xây dựng các chứng minh cần có các phương pháp rút ra những mệnh đề mới từ những mệnh đề cũ. Những mệnh đề dùng khi chứng minh có thể bao gồm các **tiên đề** hoặc **định đề** (những giả thiết cơ sở của các cấu trúc toán học), những giả thiết của định lý cần chứng minh, và những định lý đã được chứng minh từ trước. Các **quy tắc suy luận** đó là các cách rút ra các kết luận từ những điều khẳng định khác, chúng liên kết các bước của một chứng minh lại với nhau.

Trong tiết này chúng ta sẽ mô tả các quy tắc suy luận. Điều này sẽ làm sáng tỏ cái gì tạo thành một chứng minh đúng đắn. Một số dạng suy luận sai thường gặp được gọi là các nguỵ biện, cũng sẽ được bàn đến. Sau đó, chúng ta sẽ đề cập tới những phương pháp chứng minh định lý thường gặp.

*Chú ý:* Các thuật ngữ *bổ đề* hay *hệ quả* được dùng để biểu thị một dạng nào đó của định lý. **Bổ đề** là một định lý đơn giản được dùng trong chứng minh một định lý khác. Những chứng minh phức tạp thường dễ hiểu hơn khi sử dụng một số các bổ đề đã được chứng minh từ trước. Còn hệ quả là các mệnh đề được suy ra từ một định lý đã được chứng minh.

Các phương pháp chứng minh là rất quan trọng không chỉ bởi vì chúng thường xuyên được dùng để chứng minh các định lý toán học mà còn vì chúng được áp dụng nhiều trong tin học. Chẳng hạn, đó là sự kiểm tra tính đúng đắn của một chương trình trên máy hay việc khẳng định sự an toàn của một hệ điều hành, xây dựng các luật suy diễn trong lĩnh vực trí tuệ nhân tạo v.v.

Do vậy, nắm vững các kỹ thuật chứng minh là vô cùng cốt yếu trong cả toán học và tin học.

## CÁC QUY TẮC SUY LUẬN

Hằng đúng $(p \wedge (p \to q)) \to q$ là cơ sở của quy tắc suy luận có tên là **Modus ponens** hay **luật tách rời**. Hằng đúng này được viết như sau :

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ \therefore\ q \end{array}$$

Khi dùng ký hiệu này, các giả thiết được viết trên các hàng còn kết luận viết ở hàng dưới dấu gạch ngang. (Ký hiệu $\therefore$ có nghĩa là "vậy thì"). Luật tách rời phát biểu rằng nếu cả mệnh đề kéo theo và các giả thiết của nó là đúng thì kết luận của mệnh đề này là đúng.

**Ví dụ 1.** Giả sử mệnh đề kéo theo "nếu hôm nay tuyết rơi, thì chúng ta sẽ đi trượt tuyết" và giả thiết của nó " **hôm nay tuyết rơi** " là đúng. Khi đó, theo luật tách rời, "chúng ta sẽ đi trượt tuyết" là đúng.

■

**Ví dụ 2.** Mệnh đề kéo theo "nếu $n$ chia hết cho 3, khi đó $n^2$ chia hết cho 9" là đúng. Do vậy, nếu $n$ chia hết cho 3, thì theo luật tách rời ta suy ra $n^2$ chia hết cho 9.

■

Bảng 1 liệt kê một số quy tắc suy diễn quan trọng. Việc kiểm nghiệm chúng có thể tìm thấy trong một số bài tập ở Tiết 1.2. Ở đây chúng ta sẽ đưa ra một số chứng minh có dùng các quy tắc suy diễn này.

**BẢNG 1. Các quy tắc suy luận**

| Quy tắc suy luận | Hằng đúng | Tên gọi |
|---|---|---|
| $\dfrac{p}{\therefore p \vee q}$ | $p \to (p \vee q)$ | Luật cộng |
| $\dfrac{p \wedge q}{\therefore p}$ | $(p \wedge q) \to p$ | Luật rút gọn |
| $\dfrac{\begin{matrix} p \\ p \to q \end{matrix}}{\therefore q}$ | $[(p \wedge (p \to q)] \to q$ | Modus ponens |
| $\dfrac{\begin{matrix} \neg q \\ p \to q \end{matrix}}{\therefore \neg p}$ | $[\neg q \wedge (p \to q)] \to \neg p$ | Modus tollens |
| $\dfrac{\begin{matrix} p \to q \\ q \to r \end{matrix}}{\therefore p \to r}$ | $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ | Tam đoạn luận giả định |
| $\dfrac{\begin{matrix} p \vee q \\ \neg p \end{matrix}}{\therefore q}$ | $[(p \vee q) \wedge \neg p] \to q$ | Tam đoạn luận tuyển |

**Ví dụ 3.** Quy tắc suy luận nào là cơ sở của suy diễn sau : "Bây giờ trời quá băng giá. Vậy thì bây giờ hoặc là trời quá băng giá hoặc trời đang mưa"?

*Giải :* Giả sử $p$ là mệnh đề "Bây giờ trời quá băng giá" và $q$ là mệnh đề "bây giờ trời đang mưa". Khi đó suy diễn trên có dạng

$$\frac{p}{\therefore p \vee q}$$

tức là đã sử dụng quy tắc cộng.

■

**Ví dụ 4.** Quy tắc suy luận nào là cơ sở của suy diễn sau : "Bây giờ trời quá băng giá và đang mưa. Vậy thì bây giờ trời quá băng giá"?

*Giải :* Giả sử $p$ là mệnh đề "Bây giờ trời quá băng giá" và $q$ là mệnh đề "bây giờ trời đang mưa". Khi đó suy diễn trên có dạng

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore p \end{array}$$

vậy là ta đã sử dụng quy tắc rút gọn.

■

**Ví dụ 5.** Quy tắc suy luận nào là cơ sở của suy diễn sau.

"Nếu hôm nay trời mưa thì hôm nay chúng ta sẽ không đi chơi ngoài trời. Nếu hôm nay chúng ta không đi chơi ngoài trời thì ngày mai chúng ta sẽ đi chơi ngoài trời. Vậy thì, nếu hôm nay trời mưa thì ngày mai chúng ta sẽ đi chơi ngoài trời".

*Giải :* Giả sử $p$ là mệnh đề "hôm nay trời mưa", và $q$ là mệnh đề "hôm nay chúng ta sẽ không đi chơi ngoài trời", còn $r$ là mệnh đề "ngày mai chúng ta sẽ đi chơi ngoài trời". Khi đó suy diễn trên có dạng quy tắc tam đoạn luận giả định :

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline \therefore p \rightarrow r \end{array}$$

■

Những suy luận có dùng các quy tắc suy diễn gọi là *suy luận có cơ sở*. Khi tất cả các luận đề dùng trong một suy luận có cơ sở là đúng thì sẽ dẫn tới một kết luận đúng. Tuy nhiên, một suy luận có cơ sở có thể dẫn đến một kết luận sai nếu một trong các mệnh đề dùng trong suy diễn là sai. Ví dụ :

"Nếu 101 chia hết cho 3 thì $101^2$ chia hết cho 9. 101 chia hết cho 3, vậy thì $101^2$ chia hết cho 9".

Cách chứng minh trên là có cơ sở vì đã dùng luật tách rời. Tuy vậy, kết luận của suy diễn này là sai vì $101^2 = 10\ 201$ không chia hết cho 9. Sở dĩ ta có kết luận sai vì đã sử dụng mệnh đề sai "101 chia hết cho 3".

## NGỤY BIỆN

Có một số ngụy biện rất hay gặp trong các chứng minh sai. Chúng giống như các quy tắc suy luận nhưng không dựa trên các hằng đúng mà chỉ là các tiếp liên. Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra sự khác nhau giữa suy luận đúng và suy luận sai.

Mệnh đề $[(p \to q) \wedge q] \to p$ không là hằng đúng vì nó sai khi $p$ sai và $q$ đúng. Tuy nhiên có nhiều chứng minh sai đã xem nó như hằng đúng. Loại suy luận sai điển hình này gọi là **ngộ nhận kết luận.**

**Ví dụ 6.** Suy diễn dưới đây có cơ sở hay không?

Nếu bạn giải mọi bài tập trong cuốn sách này, khi đó bạn sẽ nắm vững toán học rời rạc. Bạn đã nắm vững toán học rời rạc.

Vậy thì bạn đã giải mọi bài tập trong cuốn sách này

*Giải :* Giả sử $p$ là mệnh đề "bạn đã giải mọi bài tập trong cuốn sách này", còn $q$ là mệnh đề "bạn đã nắm vững toán học rời rạc". Khi đó cách suy diễn trên có dạng : *nếu* $p \to q$ *và* $q$ *thì có* $p$. Đó là ví dụ về cách suy luận sai vì dùng nguy lý ngộ nhận kết luận. Thật vậy, hoàn toàn có thể là bạn học toán rời rạc bằng nhiều cách khác mà không nhất thiết phải làm đầy đủ các bài tập của cuốn sách này (tự đọc sách, nghe các bài giảng, làm một số mà không phải là tất cả các bài tập của cuốn sách này, v.v.).

■

**Ví dụ 7.** Giả sử $p$ là mệnh đề "$n \equiv 1 \pmod 3$", và $q$ là mệnh đề "$n^2 \equiv 1 \pmod 3$". Mệnh đề kéo theo "nếu $n \equiv 1 \pmod 3$, thì $n^2 \equiv 1 \pmod 3$" có dạng $p \to q$ là đúng. Nếu $q$ là đúng tức là $n^2 \equiv 1 \pmod 3$, thì có thể suy ra $p$ là đúng, tức là $n \equiv 1 \pmod 3$ không ?

*Giải:* Không thể kết luận $p$ đúng được bởi vì có thể $n \equiv 2 \pmod 3$. Chứng minh sai vì dùng nguy lý ngộ nhận kết luận.

■

Mệnh đề $[(p \to q) \wedge \neg p] \to \neg q$ không phải là hằng đúng, vì nó sai khi $p$ sai và $q$ đúng. Nhiều chứng minh sai vì đã sử dụng mệnh đề này như một luật suy diễn. Suy luận phi lý kiểu này gọi là **nguy biện phủ nhận giả thiết.**

**Ví dụ 8.** Cho $p$ và $q$ như trong Ví dụ 6. Nếu mệnh đề kéo theo $p \to q$ là đúng và nếu $\neg p$ là đúng có thể kết luận $\neg q$ là đúng không? Nói cách khác có thể khẳng định rằng bạn không nắm vững môn toán rời rạc nếu bạn không làm mọi bài tập trong cuốn sách này, cho dù thừa nhận nếu bạn làm tất cả các bài tập trong cuốn sách này thì bạn sẽ nắm vững toán rời rạc ?

*Giải:* Điều khẳng định đó là sai vì bạn có thể nắm vững môn toán rời rạc ngay cả khi bạn không làm mọi bài tập trong cuốn sách này.

Cách suy diễn sai này có dạng $p \to q$ và $\neg p$ kéo theo $\neg q$. Đó là một ví dụ về nguỵ hiện phủ nhận giả thiết.

■

**Ví dụ 9.** Giả sử $p$ và $q$ như trong Ví dụ 7. Có thể cho rằng nếu $\neg p$ là đúng khi đó $\neg q$ là đúng vì $p \to q$ là đúng không? Nói cách khác, có thể kết luận $n^2 \not\equiv 1 \pmod 3$ nếu $n \not\equiv 1 \pmod 3$, vì "nếu $n \equiv 1 \pmod 3$" kéo theo $n^2 \equiv 1 \pmod 3$" không ?

*Giải:* Không thể kết luận $n^2 \not\equiv 1 \pmod 3$ nếu $n \not\equiv 1 \pmod 3$, vì $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ khi $n \equiv 2 \pmod 3$. Đây là một ví dụ nữa về nguỵ biện phủ định giả thiết.

■

Nhiều chứng minh sai vì đã dựa trên nguỵ biện **dùng ngay câu hỏi** (begging the question). Nguỵ biện này xuất hiện khi một hay nhiều bước chứng minh dựa trên sự đúng đắn của một mệnh đề đang cần phải chứng minh. Nói cách khác nguỵ biện này xuất hiện khi chứng minh một mệnh đề lại sử dụng chính nó, hoặc là một mệnh đề tương đương với nó. Vì vậy nguỵ biện này cũng được gọi là lý luận quẩn.

**Ví dụ 10.** Suy luận sau đây có đúng không?

Nếu $n^2$ là một số chẵn thì $n$ cũng là một số chẵn. Thật vậy, vì $n^2$ là chẵn nên $n^2 = 2k$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Giả sử $k = 2l$ với $l$ là một số nguyên nào đó. Điều này chứng tỏ $n$ là số chẵn.

*Giải:* Suy luận trên là sai. Phát hiểu "giả sử $k = 2l$ với $l$ là một số nguyên nào đó" xuất hiện trong chứng minh mà không đưa ra lý lẽ nào chứng tỏ nó là đúng. Đây là lý luận quẩn vì phát biểu này cũng tương đương với mệnh đề đang phải chứng minh, tức là $n$ chẵn. Ở đây kết quả hiển nhiên là đúng ($n$ chẵn), chỉ có cách chứng minh là sai.

■

## CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ

Chúng ta đã chứng minh một số định lý trong chương 1 và 2. Bây giờ chúng ta hiểu rõ hơn về phương pháp luận xây dựng các chứng minh.

Dưới đây chúng ta sẽ mô tả cách chứng minh các kiểu mệnh đề.

Bởi vì rất nhiều định lý là các mệnh đề kéo theo, nên các kỹ thuật chứng minh kéo theo là rất quan trọng. Nhớ lại rằng $p \rightarrow q$ là đúng trừ khi $p$ đúng nhưng $q$ sai. Và lưu ý là, để chứng minh mệnh đề $p \rightarrow q$ chỉ cần chỉ ra $q$ là đúng nếu $p$ đúng chứ *ít khi* phải chứng minh $q$ là đúng. Sau đây ta sẽ bàn tới những kỹ thuật chứng minh phép kéo theo.

Giả sử rằng giả thiết $p$ của phép kéo theo $p \rightarrow q$ là sai. Khi đó phép

kéo theo là đúng vì mệnh đề có hai dạng $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{T}$ và $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}$ và tức là mệnh đề đúng. Do vậy, nếu có thể chỉ ra $p$ là sai khi đó phép kéo theo $p \rightarrow q$ được chứng minh. Một chứng minh như vậy gọi là **chứng minh rỗng**. Chứng minh rỗng thường được dùng để thiết lập các trường hợp đặc biệt của các định lý phát biểu rằng phép kéo theo là đúng cho tất cả các số nguyên dương (tức là các định lý dạng $\forall n\ P(n)$ trong đó $P(n)$ là một hàm mệnh đề). Kỹ thuật chứng minh các định lý kiểu này sẽ được thảo luận trong Tiết 3.2.

**Ví dụ 11.** Chỉ ra rằng mệnh đề $P(0)$ là đúng trong đó $P(n)$ là hàm mệnh đề "Nếu $n > 1$ thì $n^2 > n$".

*Giải:* Dễ thấy $P(0)$ là mệnh đề kéo theo "Nếu $0 > 1$ thì $0^2 > 0$". Vì giả thiết $0 > 1$ sai, nên mệnh đề kéo theo $P(0)$ tự động đúng.

■

*Chú ý.* Kết luận của phép kéo theo $0^2 > 0$ là sai. Nhưng không vì thế mà mệnh đề $P(0)$ là sai, vì theo định nghĩa, mệnh đề kéo theo mặc nhiên được coi là đúng nếu giả thiết của nó là sai.

Giả sử rằng kết luận $q$ của phép kéo theo $p \rightarrow q$ là đúng. Khi đó $p \rightarrow q$ là đúng vì nó có dạng $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ hoặc $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{T}$ đều là đúng cả. Do vậy nếu có thể chỉ ra được $q$ là đúng thì mệnh đề $p \rightarrow q$ được chứng minh. Đó là cách **chứng minh tầm thường**. Những chứng minh tầm thường lại rất quan trọng khi cần chứng minh các trường hợp đặc biệt của các định lý (xem phần cách chứng minh từng trường hợp) và trong quy nạp toán học, một kỹ thuật chứng minh được đề cập trong Tiết 3.2.

**Ví dụ 12.** Gọi $P(n)$ là mệnh đề "Nếu $a$ và $b$ là hai số nguyên dương và $a \geqslant b$, thì $a^n \geqslant b^n$ ". Hãy chỉ ra rằng $P(0)$ là đúng.

*Giải:* Mệnh đề $P(0)$ là "nếu $a \geqslant b$, thì $a^0 \geqslant b^0$ "Vì $a^0 = b^0 = 1$ nên kết luận của $P(0)$ là đúng. Do đó, $P(0)$ là đúng. Đây là ví dụ về một chứng minh tầm thường. Lưu ý giả thiết của mệnh đề "$a \geqslant b$" là không cần cho chứng minh này.

■

Mệnh đề kéo theo $p \to q$ có thể được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng nếu $p$ đúng thì $q$ cũng phải đúng. Điều đó chứng tỏ tổ hợp $p$ đúng và $q$ sai không bao giờ xảy ra. Chứng minh kiểu này gọi là **chứng minh trực tiếp**.

Để thực hiện một chứng minh như thế ta giả sử $p$ là đúng rồi sử dụng các quy tắc suy luận và các định lý đã được chứng minh để chỉ ra $q$ cũng phải đúng.

**Ví dụ 13.** Hãy chứng minh trực tiếp định lý "Nếu $n$ là số lẻ thì $n^2$ cũng lẻ".

*Giải:* Giả sử rằng giả thiết của mệnh đề kéo theo này là đúng, tức là $n$ là một số lẻ. Khi đó $n = 2k + 1$, với $k$ là một số nguyên. Từ đó suy ra $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Do đó $n^2$ là một số lẻ.

■

Vì mệnh đề kéo theo $p \to q$ tương đương với mệnh đề phản đảo của nó $\neg q \to \neg p$, nên phép kéo theo $p \to q$ sẽ được chứng minh bằng cách chỉ ra rằng $\neg q \to \neg p$ là đúng. Mệnh đề kéo theo này thường được chứng minh trực tiếp nhưng cũng có thể sử dụng bất kỳ kỹ thuật chứng minh nào. Chứng minh kiểu này gọi là **chứng minh gián tiếp**.

**Ví dụ 14.** Hãy chứng minh gián tiếp định lý "Nếu $3n + 2$ là một số lẻ thì $n$ cũng lẻ".

*Giải:* Giả sử ngược lại kết luận của phép kéo theo là sai, tức là $n$ chẵn. Khi đó $n = 2k$ với $k$ là số nguyên nào đó. Từ đó suy ra rằng $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$ nên $3n + 2$ là một số chẵn. Vì phủ định kết luận của phép kéo theo dẫn đến giả thiết của nó sai, nên mệnh đề kéo theo ban đầu là đúng.

■

Giả sử có thể tìm được mâu thuẫn $q$ sao cho $\neg p \to q$ là đúng, tức là $\neg p \to \mathbf{F}$ là đúng. Khi đó mệnh đề $\neg p$ phải là sai. Do đó $p$ là đúng. Kỹ thuật chứng minh kiểu này được dùng khi có thể tìm được mâu thuẫn dạng $r \wedge \neg r$, tức là ra mệnh đề kéo theo $\neg p \to (r \wedge \neg r)$ là đúng. Đó là cách **chứng minh bằng phản chứng.**

**Ví dụ 15.** Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỷ.

*Giải:* Gọi $p$ là mệnh đề "$\sqrt{2}$ là số vô tỷ". Giả sử ngược lại $\neg p$ là đúng, khi đó $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ. Ta sẽ chỉ ra điều này dẫn tới mâu thuẫn. Vì $\sqrt{2}$ là số hữu tỷ nên tồn tại $a$ và $b$ nguyên sao cho $\sqrt{2} = a/b$, trong đó $a$, $b$ không có ước chung (phân số $a/b$ là tối giản). Bình phương hai vế đẳng thức này ta được :

$$2 = \frac{a^2}{b^2}\text{ . Vì thế } 2b^2 = a^2.$$

Điều này có nghĩa $a^2$ là số chẵn và do vậy cả $a$ cũng là số chẵn. Đặt $a = 2c$ với $c$ là số nguyên nào đó. Do đó $2b^2 = 4c^2$ hay $b^2 = 2c^2$. Vậy $b^2$ và $b$ là các số chẵn.

Ta đã chứng tỏ là $\neg p$ kéo theo $\sqrt{2} = a/b$, trong đó $a$, $b$ là các số nguyên không có ước chung và đều chia hết cho 2. Điều này mâu thuẫn vì chúng ta đã chỉ ra rằng $\neg p$ kéo theo cả $r$ và $\neg r$ với $r$ là mệnh đề "$a$ và $b$ là các số nguyên không có ước chung". Vì thế, $\neg p$ là sai, hay $p$ : "$\sqrt{2}$ là số vô tỷ" là đúng.

■

Chứng minh gián tiếp mệnh đề kéo theo có thể làm như chứng minh bằng phản chứng. Trong chứng minh gián tiếp ta chỉ ra $p \to q$ là đúng bằng cách chứng minh trực tiếp $\neg q \to \neg p$ là đúng. Để viết lại chứng minh gián tiếp như chứng minh bằng phản chứng, ta giả sử $p$ và $\neg q$ là đúng. Khi đó ta chứng minh trực tiếp $\neg q \to \neg p$ là đúng, do vậy $\neg p$ là đúng. Tức là dẫn tới mâu thuẫn $p \wedge \neg p$. Ví dụ 16 sẽ minh họa những điều vừa nói ở trên.

**Ví dụ 16**. Hãy chứng minh bằng phản chứng định lý "Nếu $3n + 2$ là lẻ thì $n$ lẻ".

*Giải:* Ta giả sử $3n + 2$ là lẻ và $n$ không lẻ, tức là $n$ chẵn. Tiến hành từng bước như trong bài giải của Ví dụ 14, ta có thể chỉ ra nếu $n$ chẵn thì $3n + 2$ cũng chẵn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $3n + 2$ là lẻ. Định lý được chứng minh.

Để chứng minh mệnh đề có dạng $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \to q$ người ta dùng hằng đúng.

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \to q] \leftrightarrow [(p_1 \to q) \wedge (p_2 \to q) \wedge \dots \wedge (p_n \to q)]$$

như một quy tắc suy luận. Điều này chứng tỏ rằng mệnh đề kéo theo ban đầu có giả thiết là tuyển của các mệnh đề $p_1$, $p_2$ ..., $p_n$ có thể được chứng minh bằng cách chứng minh mỗi một trong $n$ mệnh đề kéo theo $p_i \to q$ với $i = 1, 2, ..., n$ một cách riêng rẽ. Cách chứng minh như trên gọi là **chứng minh từng trường hợp**. Đôi khi để chứng minh $p \to q$ là đúng, thay cho $p$ ta dùng mệnh đề tuyển $(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n)$ tương đương với $p$ lại thuận tiện hơn. Xét ví dụ sau.

**Ví dụ 17.** Hãy chứng minh mệnh đề "Nếu số nguyên $n$ không chia hết cho 3 thì $n^2 \equiv 1 \pmod 3$".

*Giải:* Gọi $p$ là mệnh đề "$n$ không chia hết cho 3" và $q$ là "$n^2 \equiv 1 \pmod 3$". Khi đó $p$ tương với $p_1 \vee p_2$ trong đó $p_1$ là "$n \equiv 1 \pmod 3$" và $p_2$ là "$n \equiv 2 \pmod 3$". Từ đó, để chứng tỏ $(p \to q)$ ta sẽ chứng minh $(p_1 \to q)$ và $(p_2 \to q)$. Dễ dàng chứng minh hai mệnh đề kéo theo sau này.

Đầu tiên, giả sử $p_1$ là đúng, tức là $n = 3k + 1$ với $k$ là một số nguyên nào đó.. Do đó

$$n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

tức là $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ hay $(p_1 \to q)$ là đúng.

Tiếp theo giả sử $p_2$ là đúng, tức là $n = 3k + 2$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Do đó

$$n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

tức là $n^2 \equiv 1 \pmod 3$ hay $(p_2 \to q)$ là đúng.

Vì cả hai $(p_1 \to q)$ và $(p_2 \to q)$ là đúng nên ta kết luận $(p_1 \vee p_2) \to q$ là đúng. Hơn thế nữa, vì $p$ tương đương với $p_1 \vee p_2$ nên suy ra mệnh đề $p \to q$ là đúng.

■

Để chứng minh một định lý có dạng quan hệ tương đương, tức là nó có dạng $(p \leftrightarrow q)$, trong đó $p$ và $q$ là hai mệnh đề, ta sử dụng hằng đúng

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)].$$

Tức là mệnh đề "$p$ nếu và chỉ nếu $q$" là đúng nếu cả hai mệnh đề kéo theo "nếu $p$ thì $q$" và "nếu $q$ thì $p$" được chứng minh.

**Ví dụ 18.** Hãy chứng minh định lý "$n$ là số lẻ nếu và chỉ nếu $n^2$ là lẻ".

*Giải:* Định lý này có dạng "$p$ nếu và chỉ nếu $q$", trong đó $p$ là "$n$ là số lẻ", còn $q$ là "$n^2$ là số lẻ". Để chứng minh định lý này, ta cần chỉ ra $p \to q$ và $q \to p$ là đúng.

Chúng ta đã biết (Ví dụ 13) $p \rightarrow q$ là đúng. Ta sẽ chứng minh gián tiếp rằng $q \rightarrow p$. Giả sử kết luận là sai, tức là $n$ là chẵn. Đặt $n = 2k$, với $k$ là một số nguyên nào đó. Khi đó $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, tức $n^2$ là chẵn. Mâu thuẫn với giả thiết $n^2$ là lẻ. Do vậy ta đã chứng minh được $q \rightarrow p$ là đúng.

Vì cả hai $(p \rightarrow q)$ và $(q \rightarrow p)$ đã được chứng minh là đúng, nên mệnh đề tương đương với chúng $(p \leftrightarrow q)$ là đúng.

■

Đôi khi một định lý biểu đạt nhiều mệnh đề là tương đương. Định lý này được viết như sau :

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n.$$

hay các mệnh đề $p_1$, $p_2$ ..., $p_n$ có cùng giá trị chân lý. Một cách chứng minh các mệnh đề này tương đương lẫn nhau là dùng hằng đúng :

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow p_1)].$$

Điều này chứng tỏ rằng nếu các mệnh đề kéo theo $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, ..., $p_n \rightarrow p_1$ có thể chỉ ra được là đúng, thì các mệnh đề $p_1$, $p_2$, ..., $p_n$ là tương đương.

**Ví dụ 19.** Hãy chứng minh rằng nếu $n$ là một số nguyên, thì ba mệnh đề sau là tương đương.

$p_1$ : $n$ **mod** $3 = 1$ hoặc $n$ **mod** $3 = 2$,

$p_2$ : $n$ không chia hết cho 3.

$p_3$ : $n^2 \equiv 1 \pmod 3$

*Giải:* Để chứng minh ba mệnh đề này tương đương chúng ta phải chứng minh các mệnh đề kéo theo $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$ và $p_3 \rightarrow p_1$ là đúng.

Ta sẽ chứng minh trực tiếp $p_1 \rightarrow p_2$ là đúng. Giả sử $n$ **mod** $3 = 1$ hoặc 2, tức là $n$ chia cho 3 dư 1 hoặc dư 2. Nói cách khác $n$ không chia hết cho 3. Vậy $p_1 \rightarrow p_2$ là đúng.

Chúng ta đã chỉ ra $p_2 \rightarrow p_3$ là đúng trong Ví dụ 17.

Chúng ta sẽ chứng minh gián tiếp $p_3 \rightarrow p_1$ là đúng. Giả sử kết luận là sai, tức là $n$ **mod** 3 không bằng 1 hoặc 2, vậy $n$ **mod** $3 = 0$. Điều này có nghĩa là $n$ chia hết cho 3 hay $n = 3k$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Từ đó suy ra $n^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$ hay $n^2 \equiv 0 \pmod 3$. Do vậy $p_3$ là sai. hay mệnh đề $p_3 \rightarrow p_1$ là đúng. Bài toán đã được chứng minh.

■

## ĐỊNH LÝ VÀ LƯỢNG TỪ

Nhiều định lý được phát biểu như là các mệnh đề có chứa lượng từ. Người ta dùng nhiều cách khác nhau để chứng minh các định lý có dạng các lượng từ như thế. Chúng ta sẽ mô tả một vài loại quan trọng nhất.

Nhiều định lý là các khẳng định sự tồn tại của các đối tượng thuộc một loại nào đó. Một định lý loại này là mệnh đề có dạng $\exists x P(x)$ với $P$ là vị ngữ. Chứng minh mệnh đề dạng $\exists x P(x)$ gọi là **chứng minh tồn tại**. Có một vài cách chứng minh định lý loại này. Đôi khi một chứng minh tồn tại của mệnh đề $\exists x P(x)$ được hoàn tất bằng cách tìm được một phần tử $a$ sao cho $P(a)$ đúng. Cách chứng minh tồn tại như vậy gọi là chứng minh **kiến thiết**. Có cách chứng minh khác gọi là chứng minh tồn tại không kiến thiết, tức là chúng ta không tìm phần tử $a$ sao cho $P(a)$ đúng mà chứng minh rằng $\exists x P(x)$ là đúng bằng một cách khác. Một phương pháp thông thường để xây dựng một chứng minh tồn tại không kiến thiết là chứng minh bằng phản chứng và chỉ ra rằng phủ định lượng từ tồn tại dẫn tới mâu thuẫn. Ví dụ sau sẽ minh họa khái niệm chứng minh tồn tại kiến thiết.

### Ví dụ 20. *Chứng minh tồn tại kiến thiết.*

Chỉ ra rằng với mọi $n$ nguyên dương, tồn tại $n$ số nguyên dương liên tiếp là hợp số. Điều này có nghĩa là phải chứng minh: $\forall n\ \exists x\ (x + i$ là hợp số với $i = 1, 2, ..., n)$.

*Giải:* Giả sử

$$x = (n + 1)! + 1.$$

Ta thấy $x + i = (n + 1)! + (i + 1)$ với $i = 1, 2, ..., n$ chia hết cho $(i + 1)$. Vì vậy $x + 1, x + 2, ..., x + n$ là $n$ hợp số liên tiếp. Trong cách chứng minh này ta đã chỉ ra số $x$ để cho $P(x)$ đúng. Đó là cách chứng minh kiến thiết.

■

**Ví dụ 21.** *Chứng minh tồn tại không kiến thiết.*

Chỉ ra rằng với mọi số nguyên dương $n$ tồn tại một số nguyên tố lớn hơn $n$. Bài này đòi hỏi chứng minh một lượng từ tồn tại là $\exists x\, Q(x)$, trong đó $Q(x)$ là mệnh đề "$x$ là nguyên tố và $x$ lớn hơn $n$". Bài toán được xét trong tập hợp các số nguyên dương.

*Giải:* Giả sử $n$ là một số nguyên dương. Để chỉ ra có một số nguyên tố lớn hơn $n$ ta nghiên cứu số nguyên $n! + 1$. Vì mọi số nguyên đều có ít nhất một ước số nguyên tố, nên có ít nhất một số nguyên tố là ước của $n! + 1$. (Có thể $n! + 1$ cũng là số nguyên tố). Ta thấy rằng khi chia $n! + 1$ cho các số nguyên nhỏ hơn hay bằng $n$ đều dư 1, nên mọi ước nguyên tố của $n! + 1$ đều lớn hơn $n$. Đó chính là điều cần chứng minh. Chứng minh này là cách chứng minh tồn tại không kiến thiết vì không tìm ra được số nguyên tố lớn hơn $n$ mà đơn giản chỉ khẳng định là nó phải có.

■

Giả sử mệnh đề dạng $\forall x\, P(x)$ là sai. Chúng ta chứng tỏ điều này bằng cách nào? Nhớ lại rằng các mệnh đề $\neg \forall x\, P(x)$ và $\exists x \neg P(x)$ là tương đương. Điều này có nghĩa là nếu ta tìm được một phần tử $a$ sao cho $P(a)$ sai thì chúng ta chỉ ra được $\exists x \neg P(x)$ là đúng hay $\neg \forall x\, P(x)$ là sai. Phần tử $a$ sao cho $P(a)$ sai gọi là **một phản ví dụ**. Nếu tìm được dù chỉ một phản ví dụ cũng đủ chứng tỏ $\forall x\, P(x)$ là sai.

**Ví dụ 22.** Chứng tỏ rằng khẳng định "Tất cả các số nguyên tố đều lẻ" là sai.

*Giải:* Mệnh đề "Tất cả các số nguyên tố đều lẻ" là một lượng từ phổ dụng, tức là $\forall x O(x)$, trong đó $O(x)$ là mệnh đề "$x$ là lẻ" và không gian đang xét là tập các số nguyên tố. Chú ý rằng $x = 2$ là một phản ví dụ, vì 2 là số nguyên tố nhưng là số chẵn. Vì thế mệnh đề "Tất cả các số nguyên tố đều lẻ" là sai.

■

Hãy nhớ rằng dù có cho rất nhiều ví dụ minh chứng một định lý là đúng cũng không thể khẳng định sự đúng đắn của định lý dạng $\forall x P(x)$ trừ khi các ví dụ này phủ hết mọi giá trị của không gian. Ví dụ, việc chỉ ra rằng $x^2 - x + 41$ là nguyên tố với những $x = 0, 1, 2, \ldots, 40$ cũng không thể khẳng định rằng đa thức này luôn nhận giá trị nguyên tố khi $x$ là các số nguyên không âm. Dễ thấy khi $x = 41$ thì giá trị của đa thức là hợp số.

Cuối cùng, trong cuốn sách này chúng tôi tuân theo những quy ước chuẩn của toán học là một mệnh đề với các biến tự do được giả thiết là lượng tử phổ dụng khi nghiên cứu giá trị chân lý của nó. Ví dụ, trong Ví dụ 2 khi nói mệnh đề kéo theo "nếu $n$ chia hết cho 3 thì $n^2$ chia hết cho 9" là đúng, ta ngầm hiểu là lượng hóa "với mọi số nguyên $n$, nếu $n$ chia hết cho 3 thì $n^2$ chia hết cho 9" là đúng. Ta cũng ngầm giả thiết là ở đây không gian là tập các số nguyên dương.

## VÀI LỜI BÌNH LUẬN

Chúng ta đã mô tả các phương pháp khác nhau để chứng minh định lý. Độc giả có thể nhận thấy rằng ở đây không đưa ra một thuật toán nào để chứng minh định lý. Không tồn tại một thủ tục như vậy.

Có nhiều định lý chúng ta có thể dễ dàng chứng minh nhờ các giả thiết, các định nghĩa của các thành phần của nó. Nhưng cũng có nhiều định lý nếu không sử dụng một cách thông minh các chứng minh gián tiếp, chứng minh bằng phản chứng, hay một vài kỹ thuật chứng minh khác thì chứng minh chúng sẽ rất vất vả. Xây dựng các chứng minh là một nghệ thuật có thể học được chỉ bằng cách thử tấn công bằng nhiều cách khác nhau.

Tuy vậy, có nhiều mệnh đề dường như là các định lý vẫn cứ ngoan cố chống lại những cố gắng không mệt mỏi của các nhà toán học từ mấy trăm năm nay. Ví dụ, mệnh đề "mọi số nguyên dương chẵn lớn hơn 4 là tổng của hai số nguyên tố" vẫn chưa được chứng minh là đúng và cũng chưa tìm được một phản ví dụ nào. Mệnh đề này mang tên là bài toán *Goldbach*. Đây là một trong nhiều khẳng định trong toán học chưa được chứng minh.

### *BÀI TẬP*

1. Quy tắc suy luận nào được dùng trong mỗi một lập luận sau :

   a) Alice giỏi môn toán. Do đó Alice giỏi môn toán hoặc môn tin.

   b) Jerry giỏi môn toán và môn tin. Do vậy Jerry giỏi môn toán.

   c) Nếu trời mưa thì bể bơi sẽ đóng cửa. Trời mưa, do đó bể bơi đóng cửa.

   d) Nếu hôm nay tuyết rơi thì trường đại học sẽ đóng cửa. Hôm nay trường đại học không đóng cửa. Do vậy hôm nay đã không có tuyết rơi.

e) Nếu tôi đi bơi thì tôi sẽ phơi nắng được nhiều. Nếu tôi phơi nắng nhiều thì tôi rám nắng. Do đó nếu tôi đi bơi thì tôi rám nắng.

**2.** Quy tắc suy luận nào được dùng trong mỗi một lập luận sau :

a) Những con kanguroo sống ở Australia và là loài thú có túi. Do đó kanguroo là loài thú có túi.

b) Hoặc là hôm nay trời nóng trên 100 độ hoặc là sự ô nhiễm là nguy hại. Hôm nay nhiệt độ ngoài trời nhỏ hơn 100 độ. Do đó ô nhiễm là nguy hại.

c) Linda là vận động viên bơi tuyệt vời. Nếu Linda là vận động viên bơi tuyệt vời, khi đó cô ta có thể làm việc như một người cứu hộ ở bể bơi. Do đó Linda có thể làm việc như một người cứu hộ ở bể bơi.

d) Steve sẽ làm việc ở một công ty tin học vào mùa hè này. Do đó mùa hè này anh ta sẽ làm việc ở một công ty tin học hoặc là một kẻ lang thang ngoài bãi biển.

e) Nếu tôi cả đêm làm bài tập này, thì tôi có thể trả lời được tất cả các bài tập. Nếu tôi trả lời được tất cả các bài tập thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này. Do đó nếu tôi cả đêm làm bài tập này thì tôi sẽ hiểu được tài liệu này.

**3.** Xác định xem mỗi suy luận sau là có cơ sở không. Nếu một suy luận là có cơ sở thì nó dùng quy tắc suy luận nào. Nếu không hãy chỉ ra nguy hiện nào đã được sử dụng.

a) Nếu $n$ là một số thực lớn hơn 1 khi đó $n^2 > 1$. Giả sử $n^2 > 1$. Khi đó $n > 1$.

b) $\log_2 3$ là vô tỷ nếu nó không là tỷ số của hai số nguyên. Do đó, vì $\log_2 3$ không thể viết dưới dạng $a/b$ với $a$ và $b$ là hai số nguyên, nếu nó là vô tỷ.

c) Nếu $n$ là một số thực và $n > 3$, khi đó $n^2 > 9$. Giả sử $n^2 \leqslant 9$. Khi đó $n \leqslant 3$.

d) Một số nguyên dương hoặc là số chính phương hoặc có một số chẵn các ước nguyên dương. Giả sử $n$ là một số nguyên dương có một số lẻ các ước nguyên dương. Khi đó $n$ là số chính phương.

e) Nếu $n$ là một số thực và $n > 2$, khi đó $n^2 > 4$. Giả sử $n \leqslant 2$. Khi đó $n^2 \leqslant 4$.

4. Suy luận sau đây là chứng minh không chính xác của định lý "Nếu $n^2$ không chia hết cho 3 thì $n$ không chia hết cho 3". Nguyên nhân là do dùng suy luận quẩn. Sai lầm ở đâu ?

   Nếu $n^2$ là không chia hết cho 3, khi đó $n^2$ không bằng $3k$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Vì thế $n$ không bằng $3l$ với một số nguyên $l$ nào đó. Kết luận, $n$ không chia hết cho 3.

5. Hãy chứng minh mệnh đề $P(0)$, trong đó $P(n)$ là mệnh đề "Nếu $n$ là số nguyên dương lớn hơn 1, khi đó $n^2 > n$". Bạn đã dùng kiểu chứng minh nào?

6. Hãy chứng minh mệnh đề $P(1)$, trong đó $P(n)$ là mệnh đề "Nếu $n$ là số nguyên dương khi đó $n^2 \geqslant n$". Bạn đã dùng kiểu chứng minh nào?

7. Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "Nếu $a$ và $b$ là các số thực dương, khi đó $(a + b)^n \geqslant a^n + b^n$. Chứng minh $P(1)$ là đúng. Bạn đã dùng kiểu chứng minh nào?

8. Chứng minh rằng bình phương của một số chẵn là một số chẵn bằng
   a) chứng minh trực tiếp
   h) chứng minh gián tiếp
   c) chứng minh bằng phản chứng.

9. Hãy chứng minh tổng hai số nguyên lẻ là một số chẵn

10. Chứng minh tổng hai số hữu tỷ là số hữu tỷ.

11. Chứng minh tổng một số hữu tỷ với một số vô tỷ là một số vô tỷ bằng phản chứng.

12. Chứng minh rằng tích của hai số hữu tỷ là một số hữu tỷ.

13. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng tích hai số vô tỷ là một số vô tỷ.

14. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng tích một số hữu tỷ khác không và một số vô tỷ là số vô tỷ.

15*. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng $n^2 - n + 41$ là nguyên tố khi $n$ là số nguyên dương.

**16**. Chứng minh hoặc bác bỏ rằng $2^n + 1$ là nguyên tố với mọi $n$ nguyên không âm.

**17**. Chỉ ra rằng $\sqrt[3]{3}$ là vô tỷ.

**18***. Chỉ ra rằng $\sqrt{n}$ là vô tỷ nếu $n$ là số nguyên dương không chính phương.

**19** Chứng minh rằng $x$ và $y$ là hai số thực khi đó

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$$

(*Gợi ý* : Sử dụng chứng minh từng trường hợp, với hai trường hợp tương ứng là $x \geq y$ và $x < y$).

**20.** Chứng minh rằng một số nguyên không chia hết cho 5, thì hình phương của nó khi chia cho 5 sẽ dư 1 hoặc 4.

**21.** Chứng minh rằng nếu $x$ và $y$ là hai số thực khi đó $|x| + |y| \geq |x + y|$, (trong đó $|x|$ là giá trị tuyệt đối của $x$).

**22.** Chứng minh rằng nếu $n$ là số nguyên dương khi đó $n$ là chẵn nếu và chỉ nếu $7n + 4$ là chẵn.

**23.** Chứng minh rằng nếu $n$ là số nguyên dương khi đó $n$ là lẻ nếu và chỉ nếu $5n + 6$ là lẻ.

**24.** Chứng minh rằng $m^2 = n^2$ nếu và chỉ nếu $m = n$ hoặc $m = -n$.

**25.*** Cho $p$ là một số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$ nếu và chỉ nếu $a \equiv b \pmod{p}$ hoặc là $a \equiv -b \pmod{p}$.

**26.** Hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng $n^2 - 1$ là hợp số với $n$ nguyên dương lớn hơn 1.

**27.** Hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng nếu $m$ và $n$ là các số nguyên dương sao cho $mn = 1$ khi đó hoặc là $m = 1$ và $n = 1$ hoặc là $m = -1$ và $n = -1$.

**28.** Hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng $a$ **mod** $m + b$ **mod** $m = (a + b)$ **mod** $m$, với $m$ là số nguyên dương.

**29**. Hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng mọi số nguyên dương có thể được viết dưới dạng tổng các bình phương của hai số nguyên.

**30.** Chứng minh rằng nếu $n$ là một số nguyên dương sao cho tổng các ước của nó bằng $n + 1$, thì $n$ là số nguyên tố. Bạn đã dùng kiểu chứng minh nào?

**31.** Chứng minh rằng ít nhất một trong các số thực $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ lớn hơn hay bằng trung bình cộng của các số này. Bạn đã dùng kiểu chứng minh nào?

**32*.** Dùng Bài tập 31 chỉ ra rằng nếu 10 số nguyên dương đầu tiên được đặt xung quanh một vòng tròn, theo một thứ tự bất kỳ, thì sẽ tồn tại 3 số nguyên đứng liền nhau có tổng lớn hơn hay bằng 17.

**33.** Chứng minh rằng nếu $n$ là một số nguyên, bốn mệnh đề sau là tương đương :

- $n$ là chẵn
- $n + 1$ là lẻ
- $3n + 1$ là lẻ
- $3n$ là chẵn.

**34.** Chứng minh rằng nếu $n$ là một số nguyên, ba mệnh đề sau là tương đương :

- $n$ chia hết cho 5
- $n^2$ chia hết cho 5
- $n^2 \not\equiv \pm 1 \pmod 5$.

**35.** Chứng minh hoặc bác bỏ rằng có ba số nguyên dương lẻ liên tiếp là các số nguyên tố, tức là các số nguyên tố lẻ dạng $p$, $p + 2$ và $p + 4$.

**36.** Chứng minh hoặc bác bỏ rằng với $n$ là một số nguyên dương đã cho khi đó tồn tại $n$ số nguyên dương lẻ liên tiếp là các số nguyên tố.

**37.** Quy tắc suy luận nào đã dùng để khẳng định kết luận trong suy luận của Lewis Carroll trong Ví dụ 14 của Tiết 1.3?

**38.** Quy tắc suy luận nào đã dùng để khẳng định kết luận trong suy luận của Lewis Carroll trong Ví dụ 15 của Mục 1.3?

**39.** Hãy đưa ra một chứng minh kiến thiết của mệnh đề "Với mọi số nguyên dương $n$ tồn tại một số nguyên chia hết cho nhiều hơn $n$ số nguyên tố.

**40.** Tìm phản ví dụ cho mệnh đề "với mọi số nguyên tố $n$, $n + 2$ cũng là số nguyên tố".

**41*.** Chứng minh rằng có vô hạn các số nguyên tố đồng dư với 3 theo modun 4. Chứng minh của bạn thuộc loại kiến thiết hay không kiến thiết. (*Gợi ý* : Một phương pháp là giả sử rằng chỉ có một số hữu hạn các số nguyên tố $p_1, p_2, ..., p_n$. Gọi $q = 4p_1p_2 ... p_n + 3$. Chứng tỏ rằng $q$ có ước nguyên tố đồng dư với 3 theo môđun 4 không nằm trong các số nguyên tố $p_1, p_2, ..., p_n$).

**42.** Chứng minh hoặc bác bỏ rằng nếu $p_1, p_2, ..., p_n$ là các số nguyên tố nhỏ nhất thì $p_1p_2 ... p_n + 1$ là một số nguyên tố.

**43.** Chứng minh rằng các mệnh đề $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ và $p_5$ có thể chỉ ra là tương đương nhau nếu chứng minh được rằng các mệnh đề kéo theo

$p_1 \rightarrow p_4$, $p_3 \rightarrow p_1$, $p_4 \rightarrow p_2$ , $p_2 \rightarrow p_5$ và $p_5 \rightarrow p_3$ là đúng.

**44.** Chứng minh hay bác bỏ rằng nếu $a$ và $b$ là các số hữu tỷ khi đó $a^b$ cũng là hữu tỷ.

**45.** Chứng minh rằng có các số vô tỷ $a$ và $b$ sao cho $a^b$ là hữu tỷ. Chứng minh của bạn thuộc loại kiến thiết hay không kiến thiết? (*Gợi ý*: Cho $a = \sqrt{2}$ và $b = \sqrt{2}$. Chỉ ra rằng $a^b$ hoặc $(a^b)^b$ là hữu tỷ).

**46.** Chứng minh bàn cờ $8 \times 8$ có thể phủ hoàn toàn bằng các quân domino ($1 \times 2$ ô).

**47*.** Chứng minh rằng không thể phủ hoàn toàn bàn cờ $8 \times 8$ bằng các quân domino nếu hai ô ở các góc đối diện bị cắt bỏ.

**48*.** Bài toán Logic, lấy từ WFF'N PROOF - Trò chơi Logic, có hai giả thiết :

1. "Môn logic là khó hoặc không có nhiều sinh viên thích môn logic"
2. "Nếu môn toán là dễ thì logic là không khó".

Bằng cách chuyển các giả thiết trên thành các mệnh đề chứa các biến và các toán tử logic. Hãy xác định xem mỗi một trong các khẳng định sau đây có là các kết luận có cơ sở của các giả thiết đã cho không :

a) Môn toán là không dễ nếu nhiều sinh viên thích môn logic.

b) Không có nhiều sinh viên thích môn logic nếu môn toán là không dễ.

c) Môn toán là không dễ hoặc môn logic là khó.

d) Môn logic là không khó hoặc môn toán là không dễ.

e) Nếu không có nhiều sinh viên thích môn logic khi đó hoặc là môn toán không dễ hoặc là logic không khó.

**49*.** Hãy xác định xem suy luận sau đây có cơ sở hay không: "Nếu một siêu nhân có khả năng và muốn ngăn cản một tội ác thì anh ta sẽ làm điều đó. Nếu một siêu nhân không có khả năng ngăn cản một tội ác thì anh ta là người bất lực. Nếu anh ta không muốn ngăn cản tội ác anh ta sẽ là một người xấu bụng. Một siêu nhân không ngăn cản tội ác. Nếu siêu nhân tồn tại thì anh ta hoặc là bất lực hoặc là xấu bụng. Do đó siêu nhân không tồn tại".

## 3.2. QUY NẠP TOÁN HỌC

### MỞ ĐẦU

Giả sử chúng ta cần tính tổng $n$ số nguyên lẻ đầu tiên. Với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ta được :

$$1 = 1.$$

$$1 + 3 = 4.$$

$$1 + 3 + 5 = 9.$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16.$$

$$1 + 3 + 5 + 9 + 11 = 25.$$

Từ các kết quả này ta dự đoán tổng $n$ số nguyên lẻ đầu tiên là $n^2$. Nhưng chúng ta cần có phương pháp *chứng minh* dự đoán trên là *đúng*, nếu thực tế đúng như vậy.

Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh cực kỳ quan trọng. Người ta thường dùng nó để chứng minh những điều khẳng định kiểu như trên. Như chúng ta sẽ thấy trong tiết này và trong các chương sau, quy nạp toán học rất hay được sử dụng để chứng minh các kết quả về những đối tượng rời rạc thuộc nhiều kiểu khác nhau. Chẳng hạn, chứng minh độ phức tạp của thuật toán, tính không đúng đắn của một số loại chương trình, các định lý về đồ thị và cây, cũng như một lớp rất rộng các đẳng thức và các bất đẳng thức.

Trong tiết này chúng ta sẽ mô tả cách dùng phương pháp quy nạp toán học và sẽ lý giải vì sao quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh có cơ sở chặt chẽ. Nhưng chúng ta cũng cần nhớ rằng quy nạp toán học dùng chỉ để chứng minh các kết quả nhận được bằng một cách nào đó chứ không là công cụ để phát hiện ra các công thức hay định lý.

## TÍNH ĐƯỢC SẮP TỐT

Tính đúng đắn của quy nạp toán học được suy ra từ tiên đề sau đây về tập các số nguyên.

*Tính được sắp tốt :* Mọi tập không rỗng các số nguyên không âm luôn có phần tử nhỏ nhất.

Tính được sắp tốt thường được dùng trực tiếp trong các chứng minh.

**Ví dụ 1.** Dùng tính chất được sắp tốt hãy chứng minh thuật toán chia như sau. Nếu $a$ là một số nguyên và $d$ là một số nguyên dương khi đó tồn tại duy nhất các số nguyên $q$ và $r$ sao cho $0 \leq r < d$ và $a = dq + r$.

*Giải:* Giả sử $S$ là tập các số nguyên không âm dạng $a - dq$ trong đó $q$ là một số nguyên. Tập này không rỗng vì $-dq$ có thể lớn tùy ý bằng cách chọn $q$ âm có trị tuyệt đối đủ lớn. Theo tính được sắp tốt $S$ có số nhỏ nhất là $r = a - dq_0$. Rõ ràng $r < d$, vì nếu ngược lại ta xét số $a - d(q_0 + 1) = (a - dq_0) - d = r - d \geq 0$ tức là $a - d(q_0 + 1)$ thuộc tập $S$ mà lại nhỏ hơn $r$. Đó là điều vô lý. Do vậy có các số nguyên $q$, $r$ sao cho $a = dq + r$ và $0 \leq r < d$. Chúng tôi để lại phần chứng minh tính duy nhất của $q$ và $r$ cho độc giả tự làm như một bài tập.

■

## QUY NẠP TOÁN HỌC

Nhiều định lý phát biểu rằng $P(n)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương, trong đó $P(n)$ là một hàm mệnh đề. Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh các định lý thuộc loại như thế. Nói cách khác quy nạp toán học thường được sử dụng để chứng minh các mệnh đề dạng $\forall nP(n)$ trong đó $n$ là một số nguyên dương tùy ý.

Qúa trình chứng minh $P(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n$ bao gồm hai bước :

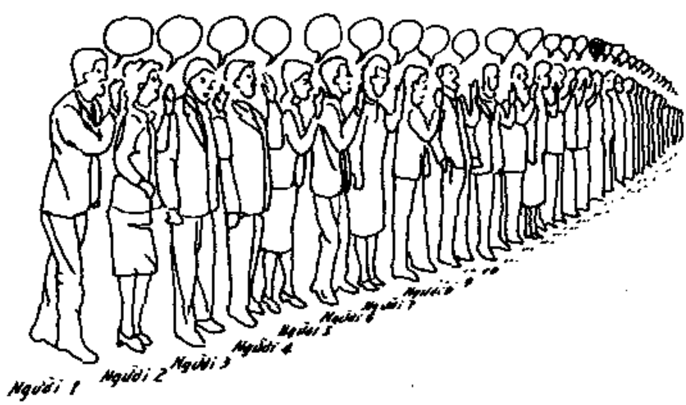
1. *Bước cơ sở* : Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ là đúng.
2. *Bước quy nạp* : Chứng minh phép kéo theo $P(n) \rightarrow P(n+1)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n$, trong đó người ta gọi $P(n)$ là **giả thiết quy nạp.**

Khi hoàn thành cả hai bước chúng ta đã chứng minh $P(n)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương, tức là chúng ta đã chứng minh $P(n)$ là đúng.

Theo cách viết của các quy tắc suy luận thì kỹ thuật chứng minh này có dạng như sau :

$$[P(1) \wedge \forall n(P(n) \rightarrow P(n+1))] \rightarrow \forall nP(n).$$

Vì quy nạp toán học là kỹ thuật chứng minh rất quan trọng, nên chúng ta cần giải thích kỹ thuật từng bước chứng minh. Trước tiên là phải chỉ ra là $P(1)$ đúng. Điều này có nghĩa là chỉ ra một trường hợp riêng của mệnh đề $P(n)$ khi $n = 1$ là đúng. Sau đó cần phải chỉ ra với mọi $n$ nguyên dương tùy ý, mệnh đề $P(n) \rightarrow P(n+1)$ là đúng, có nghĩa là $P(n+1)$ không thể sai khi $P(n)$ đúng. Điều này cũng có thể thực hiện được bằng cách giả sử $P(n)$ là đúng và chỉ ra *với giả thiết quy nạp đó* $P(n+1)$ cũng đúng.

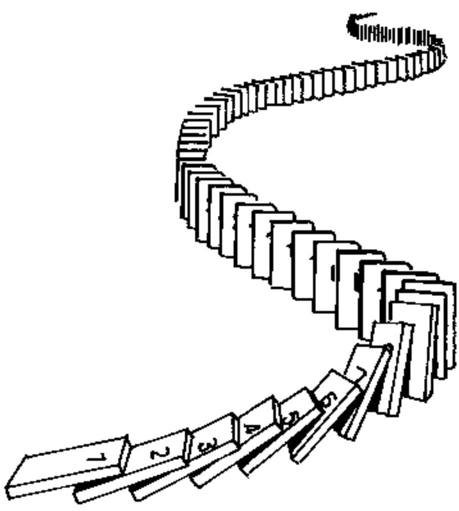


***Hình 1.*** Hàng người tiết lộ bí mật.

*Chú ý:* Trong khi chứng minh bằng quy nạp toán học, ta không giả sử $P(n)$ đúng với mọi $n$ nguyên dương! Mà chúng ta chỉ chứng tỏ rằng giả sử $P(n)$ là đúng thì khi đó $P(n + 1)$ cũng đúng, như vậy quy nạp toán học không phải là cách suy lý quẩn.

Khi sử dụng quy nạp toán học để chứng minh định lý, trước tiên ta chỉ ra $P(1)$ là đúng. Sau đó ta biết $P(2)$ là đúng, vì $P(1)$ suy ra $P(2)$. Tiếp theo $P(3)$ đúng vì $P(2)$ suy ra $P(3)$. Cứ tiếp tục như vậy ta có $P(k)$ đúng với mọi $k$ nguyên dương tùy ý.

Có một vài cách minh họa phương pháp quy nạp toán học có thể giúp bạn để nhớ cách hoạt động của nguyên lý này. Giả sử có một hàng người (Hình 1), người thứ nhất, người thứ hai, người thứ ba, ...Tiếp theo ta giả sử có một tin mật và giả sử rằng nếu một người biết tin này là tức anh ta sẽ tiết lộ cho người đứng sau mình. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "người $n$ biết tin mật này". Khi đó nếu người thứ nhất biết tin mật này thì $P(1)$ là đúng, sau đó $P(2)$ cũng đúng vì người thứ nhất nói cho người thứ hai, người hai lại nói cho người thứ ba, tức là $P(3)$ đúng v.v. Cứ như vậy, theo quy nạp toán học, mọi người trong hàng đều biết điều bí mật. Một cách minh họa khác là một dãy quân cờ đôminô có nhãn là 1,




***Hình 2.*** Cách minh họa phép quy nạp toán học bằng quân bài đôminô.

2, 3, ... đang đứng trên mặt bàn. Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "quân đôminô $n$ bị đổ". Nếu quân 1 bị đổ, tức là $P(1)$ đúng, và nếu quân $n$ đổ thì quân $(n + 1)$ cũng đổ, tức là nếu $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ là đúng, thì khi đó tất cả các quân đôminô đều bị đổ. Điều này được minh họa trên Hình 2.

***Tại sao quy nạp toán học là phương pháp chứng minh có cơ sở vững chắc.*** Nguyên do là vì tập các số nguyên không âm có tính được sắp tốt. Giả sử ta biết $P(1)$ là đúng và giả sử mệnh đề $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n$. Để chứng minh $P(n)$ là đúng với mọi số nguyên dương $n$, ta giả sử ngược lại có ít nhất một số nguyên dương sao cho $P(n)$ là sai. Khi đó tập $S$ bao gồm các số nguyên dương $n$ mà $P(n)$ sai là không rỗng. Theo tiên đề được sắp tốt, $S$ có phần tử nhỏ nhất, giả sử là $k$. Vì $P(1)$ đúng nên $k$ khác 1, hơn thế nữa $k > 1$. Do $0 < k - 1 < k$ nên $k - 1$ không thuộc $S$, tức là $P(k - 1)$ đúng. Nhưng vì mệnh đề $P(k - 1) \rightarrow P(k)$ là đúng, ta suy ra $P(k)$ là đúng. Điều này vô lý vì $k$ thuộc $S$. Do vậy, $P(n)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương.

## CÁC VÍ DỤ

Chúng ta sẽ minh họa cách dùng quy nạp toán học để chứng minh các định lý thông qua các ví dụ. Tuy nhiên các bài toán này có thể được chứng minh bằng các phương pháp khác.

**Ví dụ 2.** Bằng quy nạp toán học hãy chứng minh rằng tổng $n$ số nguyên dương lẻ đầu tiên là $n^2$.

*Giải:* Gọi $P(n)$ là mệnh đề "tổng $n$ số nguyên dương lẻ đầu tiên là $n^2$". Đầu tiên ta cần làm bước cơ sở, tức là phải chỉ ra $P(1)$ là đúng. Sau đó phải chứng minh bước quy nạp, tức là cần chỉ ra $P(n + 1)$ là đúng nếu giả sử $P(n)$ là đúng.

BƯỚC CƠ SỞ : $P(1)$ hiển nhiên là đúng vì $1 = 1^2$

BƯỚC QUY NẠP : Giả sử $P(n)$ đúng, tức là với mọi $n$ nguyên dương lẻ ta có

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Ta phải chỉ ra $P(n + 1)$ là đúng, tức là :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Do giả thiết quy nạp ta suy ra :

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2n + 1)$$
$$= [1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)] + (2n + 1)$$
$$= n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Đẳng thức này chứng tỏ $P(n + 1)$ được suy ra từ $P(n)$.

Vì $P(1)$ là đúng và vì mệnh đề kéo theo $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương, nguyên lý quy nạp toán học chỉ ra rằng $P(n)$ đúng với mọi $n$ nguyên dương.

■

**Ví dụ 3.** Bằng quy nạp toán học chứng minh bất đẳng thức $n < 2^n$ với mọi $n$ nguyên dương.

*Giải:* Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "$n < 2^n$ ".

BƯỚC CƠ SỞ : $P(1)$ là đúng vì $1 < 2^1 = 2$.

BƯỚC QUY NẠP : Giả sử $P(n)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương, tức là $n < 2^n$. Ta cần chứng minh $P(n + 1)$ đúng, tức là cần chứng minh $n + 1 < 2^{n+1}$.

Thật vậy, cộng 1 vào hai vế của giả thiết quy nạp và lưu ý rằng $1 \leq 2^n$, ta có :

$$1 + n < 1 + 2^n < 2^n + 2^n = 2^{(n+1)}.$$

Theo quy nạp toán học, ta khẳng định $n < 2^n$ đúng với mọi $n$ nguyên dương.

■

Bây giờ chúng ta dùng quy nạp toán học để chứng minh một định lý về tính chia hết của số nguyên.

**Ví dụ 4.** Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi $n$ nguyên dương.

*Giải:* Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$n^3 - n$ chia hết cho 3"

BƯỚC CƠ SỞ. $P(1)$ là đúng vì $1^3 - 1 = 0$ chia hết cho 3.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ đúng, tức là $n^3 - n$ chia hết cho 3. Ta cần chứng minh $P(n + 1)$ đúng. Thật vậy, biểu thức

$$(n+1)^3 - (n+1) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - (n+1)$$
$$= (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$$

chia hết cho 3 vì số hạng thứ nhất chia hết cho 3 theo giả thiết quy nạp, còn số hạng sau là 3 lần của một số nguyên. Bước quy nạp được hoàn thành. Theo nguyên lý quy nạp toán học, $n^3 - n$ chia hết cho 3 với mọi $n$ nguyên dương.

■

Đôi khi chúng ta cần chỉ ra $P(n)$ đúng với $n = k, k+1, k+2, \ldots$ trong đó $k$ là một số nguyên khác 1. Khi chứng minh bằng quy nạp toán học ta cần thay đổi một chút ở bước cơ sở.

**Ví dụ 5.** Dùng quy nạp toán học chứng tỏ rằng

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \text{ với mọi } n \text{ nguyên không âm.}$$

*Giải:* Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "công thức này đúng với mọi $n$ nguyên không âm"

BƯỚC CƠ SỞ. $P(0)$ đúng vì $2^0 = 1 = 2^1 - 1$.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ đúng, tức là

$$1 + 2 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Sử dụng giả thiết quy nạp dễ thấy rằng

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n + 2^{n+1} = (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1}$$
$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1.$$

Đẳng thức này chứng tỏ $P(n+1)$ là đúng. Hay công thức này đúng với mọi $n$ nguyên không âm.

■

Như ví dụ 5 đã minh họa, để dùng quy nạp toán học chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k, k+1, k+2, \ldots$ trong đó $k$ khác 1, chúng ta phải chỉ ra $P(k)$ là đúng (bước cơ sở) và sau đó chỉ ra mệnh đề kéo theo $P(n) \to P(n+1)$ đúng với $n = k, k+1, k+2, \ldots$ (bước quy nạp). Lưu ý là $k$ có thể dương, âm hay bằng không (xem Bài tập 62).

Công thức trong Ví dụ 5 là trường hợp riêng của công thức tính tổng các số hạng của cấp số nhân $a, ar, ar^2, \ldots, ar^n, \ldots$ trong đó $a$ và $r$ là các số thực. Ví dụ dãy số trong Ví dụ 5 là cấp số nhân với $a = 1$ và $r = 2$. Cũng như vậy, dãy $3, 15, 75, \ldots, 3.5^n, \ldots$ là cấp số nhân với $a = 3$ và $r = 5$.

**Ví dụ 6.** *Tổng các số hạng của cấp số nhân.* Dùng quy nạp toán học chứng minh công thức sau đây đối với tổng một số hữu hạn các số hạng của cấp số nhân :

$$\sum_{j=0}^{n} ar^j = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}.$$

trong đó $r \neq 1$.

*Giải:* Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "tổng $(n + 1)$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân được cho theo công thức trên".

BƯỚC CƠ SỞ. $P(0)$ là đúng vì $a = \dfrac{ar - a}{r - 1}$

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là :

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}$$

Để chứng minh từ đây có thể suy ra được $P(n+1)$ đúng, cộng $ar^{n+1}$ vào hai vế của đẳng thức trên, ta nhận được :

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^n + ar^{n+1} = \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} + ar^{n+1}$$

$$= \frac{ar^{n+1} - a}{r - 1} + \frac{ar^{n+2} - ar^{n+1}}{r - 1} = \frac{ar^{n+2} - a}{r - 1}$$

Điều này chứng tỏ nếu $P(n)$ đúng thì $P(n + 1)$ cũng đúng. Vậy công thức trên là đúng với mọi $n$ nguyên.

■

Một bất đẳng thức quan trọng đối với tổng các nghịch đảo của các số nguyên dương sẽ được chứng minh trong ví dụ sau.

**Ví dụ 7.** Bất đẳng thức đối với các số điều hòa. Các *số điều hòa* $H_k$, $k = 1, 2, 3 \ldots$ được định nghĩa như sau :

$$H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$$

Ví dụ,
$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

Dùng quy nạp chứng minh rằng : $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$ trong đó $n$ là số nguyên không âm.

*Giải:* Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "$H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$".

BƯỚC CƠ SỞ. $P(0)$ là đúng vì $H_{2^0} = H_1 = 1 \geqslant 1 + \frac{0}{2}$.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ đúng, tức là ta có $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$. Để chứng minh $P(n+1)$ đúng, ta thực hiện các phép biến đổi như sau :

$$H_{2^{n+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} =$$

$$= H_{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \geqslant \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2^n+1} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

(do giả thiết quy nạp)

$$\geqslant \left(1 + \frac{n}{2}\right) + 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

(vì có $2^n$ số hạng mỗi số không nhỏ hơn $\frac{1}{2^{n+1}}$)

$$= \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n+1}{2}$$

Đó là điều cần chứng minh. Như vậy bất đẳng thức về các số điều hòa đúng với mọi số nguyên không âm.

■

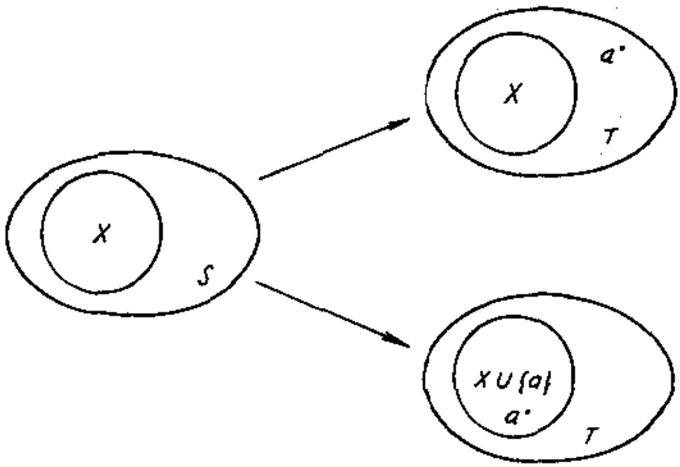
**Ví dụ 8.** *Số tập con của một tập hữu hạn.* Dùng quy nạp toán học chỉ ra rằng, nếu $S$ là một tập có $n$ phần tử, thì $S$ có $2^n$ tập con.

*Giải:* Gọi $P(n)$ là mệnh đề "tập $n$ phần tử có $2^n$ tập con"

BƯỚC CƠ SỞ. $P(0)$ là đúng, vì tập rỗng có $2^0 = 1$ tập con, đó là chính nó.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là tập $n$ phần tử có $2^n$ tập con. Ta cần phải chứng minh $P(n+1)$ cũng đúng.

Thật vậy, giả sử $T$ là tập có $(n + 1)$ phần tử. Khi đó có thể viết $T = S \cup \{a\}$, trong đó $a$ là một phần tử của $T$ và $S = T - \{a\}$. Rõ ràng ứng với mỗi tập con $X$ của $S$ ta có thể tạo ra được đúng hai tập con của $T$ đó là $X$ và $X \cup \{a\}$. Theo giả thiết quy nạp, tập $S$ có $2^n$ tập con, vậy tập $T$ có $2.2^n = 2^{n+1}$ tập con. Đây chính là điều cần chứng minh. ■




*Hình 3.* Sinh các tập con của tập hợp với $n + 1$ phần tử.
Ở đây $T = S \cup \{a\}$.

**Ví dụ 9.** Chứng minh rằng nếu $n$ là một số nguyên dương thì

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

*Giải:* Gọi $P(n)$ là mệnh đề "tổng $n$ số nguyên dương đầu tiên bằng $\frac{n(n + 1)}{2}$".

BƯỚC CƠ SỞ. Rõ ràng $P(1)$ là đúng, vì $1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Với giả thiết này ta phải chỉ ra $P(n + 1)$ đúng. Thật vậy, ta có

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = [1 + 2 + 3 + \ldots + n] + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Đẳng thức này chứng tỏ $P(n+1)$ đúng nếu $P(n)$ đúng.

Vậy tổng $n$ số nguyên dương đầu tiên bằng $\frac{n(n+1)}{2}$.

■

**Ví dụ 10.** Bằng quy nạp chỉ ra rằng $2^n < n!$ với mọi số nguyên $n \geqslant 4$.

***Giải:*** Giả sử $P(n)$ là mệnh đề $2^n < n!$.

BƯỚC CƠ SỞ. Rõ ràng $P(4)$ là đúng vì $2^4 = 16 < 4! = 24$.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là $2^n < n!$. Để chứng minh $P(n+1)$ đúng ta nhân cả hai vế bất đẳng trên với 2, ta có :

$$2.2^n < 2.n! < (n+1)n! = (n+1)!$$

Đó là điều cần chứng minh.

■

**Ví dụ 11.** Bằng quy nạp toán học chứng minh định luật De Morgan tổng quát :

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

trong đó $A_1, A_2 \ldots A_n$ là các tập con của tập vũ trụ $U$ và $n \geqslant 2$.

***Giải:*** Giả sử $P(n)$ là đẳng thức cần chứng minh.

BƯỚC CƠ SỞ. Rõ ràng $P(2)$ là đúng vì $\overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2$ chính là định luật De Morgan mà ta đã chứng minh trong Tiết 1.5.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

Để chứng minh $P(n+1)$ đúng, ta giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ là các tập con của tập vũ trụ $U$. Khi đó sử dụng giả thiết quy nạp ta có :

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k} = \overline{\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}} = \overline{\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)} \cup \overline{A_{n+1}}$$

$$= \left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right) \cup \overline{A_{n+1}} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \overline{A_k}$$

Đây chính là điều cần chứng minh.

■

**Ví dụ 12.** Giả sử $n$ là một số nguyên dương. Một bàn cờ hình vuông mỗi chiều bằng $2^n$ đơn vị và bị hỏ đi một ô vuông. Chỉ ra rằng có thể lát bàn cờ đó bằng các miếng hình chữ L (gồm 3 hình vuông đơn vị), như ở Hình 4.

*Giải:* Gọi $P(n)$ là mệnh đề "có thể lát bàn cờ đó bằng các miếng hình chữ L".

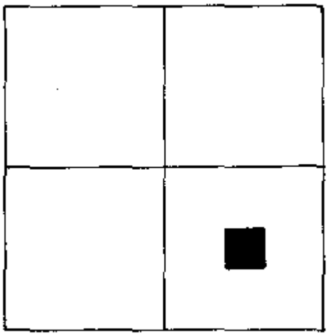
BƯỚC CƠ SỞ. Rõ ràng $P(1)$ là đúng như Hình 5 chỉ ra.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ đúng, tức là mọi bàn cờ hình vuông mỗi chiều bằng $2^n$ đơn vị và bị khuyết một ô vuông đều có thể lát bằng các miếng hình chữ L. Ta phải chứng minh điều này cũng đúng với $(n + 1)$, tức

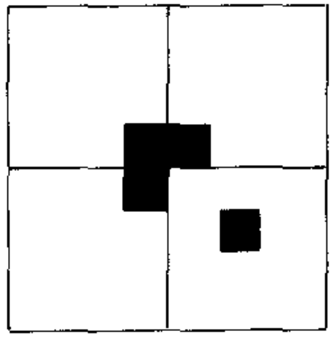
***Hình 4.*** Miếng hình L.

***Hình 5.*** Lát bàn cờ $2 \times 2$ bỏ đi một ô vuông.

là $P(n + 1)$ đúng. Thật vậy, ta chia hình vuông có mỗi cạnh bằng $2^{n+1}$ thành 4 hình vuông mỗi cạnh $2^n$ (Hình 6). Một trong bốn hình vuông này bị khuyết một ô vuông, theo giả thiết quy nạp ta có thể lát nó bằng các miếng hình chữ L. Với ba hình còn lại ta đặt một miếng chữ L như



***Hình 6.*** Chia bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ thành bốn bàn cờ $2^n \times 2^n$



***Hình 7.*** Lát bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ bỏ đi một ô vuông.

trên Hình 7, khi đó ta nhận được ba hình vuông cạnh $2^n$ và cũng bị khuyết một ô vuông, theo giả thiết quy nạp chúng có thể lát bằng cách miếng hình chữ L. Tóm lại có thể lát được hình vuông cạnh $2^{n+1}$ bị khuyết một ô vuông bằng các miếng hình chữ L.

## NGUYÊN LÝ THỨ HAI CỦA QUY NẠP TOÁN HỌC

Một dạng khác của quy nạp toán học cũng thường được dùng trong khi chứng minh. Với dạng này trong bước cơ sở ta cũng làm như trước đây, nhưng trong bước quy nạp có hơi khác một chút. Giả sử $P(k)$ đúng với $k = 1, 2, 3, ..., n$ ta phải chứng minh $P(n + 1)$ đúng. Đó chính là **nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học.** Tóm lại để chứng minh $P(n)$ đúng với mọi $n$ nguyên dương ta phải tiến hành hai bước :

1. BƯỚC CƠ SỞ. Chỉ ra mệnh đề $P(1)$ là đúng.

2. BƯỚC QUY NẠP. Chứng tỏ $[P(1) \wedge P(2) \wedge ... \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương.

Hai dạng khác nhau này của quy nạp toán học là tương đương. Sau đây là những ví dụ áp dụng dạng thứ hai của quy nạp.

**Ví dụ 13.** Chỉ ra rằng nếu $n$ là một số nguyên lớn hơn 1, khi đó $n$ có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

***Giải:*** Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$n$ có thể viết dưới dạng tích của các số nguyên tố".

BƯỚC CƠ SỞ. $P(2)$ là đúng vì 2 là tích của chính nó.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(k)$ là đúng với $k = 1, 2, 3, \dots n$. Ta phải chứng minh $P(n + 1)$ là đúng. Thật vậy, nếu $(n+1)$ là số nguyên tố thì hiển nhiên $P(n + 1)$ là đúng. Nếu $(n+1)$ là hợp số thì nó có thể viết như sau $n + 1 = a.b$, trong đó $2 \leqslant a \leqslant b < n + 1$. Theo giả thiết quy nạp $a$ và $b$ lại có thể viết thành tích của các số nguyên tố. Như vậy nếu $n + 1$ là hợp số thì nó cũng có thể được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

■

**Ví dụ 14.** Chứng tỏ mọi bưu phí bằng hay lớn hơn 12 xu đều có thể tạo ra bằng các con tem 4 hay 5 xu.

*Giải:* Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "mọi bưu phí $n$ xu ($n \geqslant 12$) đều có thể tạo ra bằng các con tem 4 hay 5 xu".

BƯỚC CƠ SỞ. $P(12)$ là đúng vì có thể dùng 3 con tem 4 xu.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(n)$ đúng. Nếu có ít nhất một con tem 4 xu thì ta chỉ việc đổi con tem này bằng tem 5 xu thì sẽ tạo được bưu phí $n + 1$ xu. Nếu không có con tem 4 xu nào, tức là cước phí $n$ xu tạo nên chỉ bằng các con tem 5 xu. Vì $n \geqslant 12$ nên ít nhất ta đã dùng 3 con tem 5 xu. Thay 3 con tem này bằng 4 con tem 4 xu, ta sẽ tạo được cước phí $n + 1$ xu.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh bằng *dạng thứ hai của quy nạp toán học*.

BƯỚC CƠ SỞ. Dễ kiểm tra rằng $P(12)$, $P(13)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$ là đúng.
BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $n \geqslant 15$ và $P(k)$ là đúng với $12 \leqslant k \leqslant n$. Để tạo ra bưu phí $n + 1$ xu ta dùng các con tem đã tạo ra bưu phí $n-3$ xu và thêm một tem 4 xu nữa. Vậy là chúng ta đã hoàn tất bước quy nạp và kết thúc chứng minh.

*Chú ý:* Ví dụ 14 chỉ ra có thể dùng dạng thứ hai của quy nạp toán học trong các trường hợp khi mà trong bước quy nạp phải giả sử mệnh đề đúng với một loạt các giá trị của $n$. Lược đồ áp dụng nguyên lý quy nạp bây giờ có dạng như sau. Chỉ ra rằng $P(k)$, $P(k+1)$, $P(k+2)$, ..., $P(l)$ là đúng (bước cơ sở), sau đó chỉ ra $[P(k) \wedge P(k+1) \wedge P(k+2) \wedge \dots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$

là đúng với mọi số nguyên $n \geqslant l$ (bước quy nạp). Chẳng hạn, ở bước cơ sở của Ví dụ 14 cần phải chỉ ra $P(12)$, $P(13)$, $P(14)$, $P(15)$ là đúng vì trong bước quy nạp ta phải chứng tỏ

$$[P(12) \wedge P(13) \wedge P(14) \wedge \ldots \wedge P(n)] \rightarrow P(n+1)$$

là đúng với mọi số nguyên $n \geqslant 15$.

Chúng ta sẽ thảo luận hai áp dụng quan trọng của quy nạp toán học trong tiết tới. Đó là dùng quy nạp để định nghĩa một dãy số khi không biết công thức tường minh của các số hạng, và sau đó là chứng minh tính đúng đắn của một chương trình.

## BÀI TẬP

1. Hãy tìm công thức tính tổng $n$ số nguyên chẵn đầu tiên.

2. Dùng quy nạp toán học chứng minh công thức tìm được trong Bài tập trên.

3. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng

$$3.5 + 3.5^2 + \ldots + 3.5^n = \frac{3(5^{n+1} - 1)}{4},$$

với $n$ là số nguyên không âm.

4. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng

$$2 - 2.7 + 2.7^2 - \ldots + 2(-7)^n = \frac{1 - (-7)^{n+1}}{4},$$

với $n$ là số nguyên không âm.

5. Tìm công thức tính tổng $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ bằng cách quan sát các giá trị của biểu thức này với các giá trị nhỏ của $n$. Dùng quy nạp toán học để chứng minh kết quả của bạn.

6. Tìm công thức tính tổng $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ bằng cách quan sát các giá trị của biểu thức này với các giá trị nhỏ của $n$. Dùng quy nạp toán học để chứng minh kết quả của bạn.

7. Chỉ ra rằng $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, với $n$ nguyên dương.

**8.** Chỉ ra rằng $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, với $n$ nguyên dương.

**9.** Chỉ ra rằng

$$1^2 + 3^2 + ... + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3},$$

với $n$ nguyên không âm.

**10.** Chứng minh rằng $1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$, với $n$ nguyên dương.

**11*.** Bằng quy nạp toán học hãy chứng minh **bất đẳng thức Bernoulli** : "Nếu $h > -1$ thì $1 + nh \leqslant (1+h)^n$, với mọi $n$ nguyên không âm".

**12.** Chứng minh rằng $3^n \leqslant n!$ với mọi $n$ nguyên lớn hơn 6.

**13.** Chứng minh rằng $2^n \geqslant n^2$ với mọi $n$ nguyên lớn hơn 4.

**14.** Chứng minh bằng quy nạp rằng $n! \leqslant n^n$ với mọi $n$ nguyên lớn hơn 1.

**15.** Chứng minh bằng quy nạp rằng

$$1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

với mọi $n$ nguyên dương.

**16.** Chứng minh bằng quy nạp rằng

$$1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

với mọi $n$ nguyên dương.

**17.** Chứng minh rằng

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^n n(n+1)}{2}$$

với mọi $n$ nguyên dương.

**18.** Chứng minh rằng :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}\ ,$$

với mọi $n$ nguyên lớn hơn 1.

19. Chỉ ra rằng với bất cứ bưu phí nào là một số nguyên lớn hơn 7 xu cũng có thể tạo được chỉ bằng hai loại tem 3 xu và 5 xu.

**20.** Chứng minh bằng quy nạp rằng $n^3 + 2n$ chia hết cho 3 với $n$ nguyên không âm.

**21.** Chứng minh bằng quy nạp rằng $n^5 - n$ chia hết cho 5 với $n$ nguyên không âm.

**22.** Chứng minh bằng quy nạp rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 với $n$ nguyên không âm.

**23*.** Chứng minh bằng quy nạp rằng $n^2 - n$ chia hết cho 8 với $n$ nguyên dương lẻ.

**24.** Chứng minh bằng quy nạp rằng $n^2 - 7n + 12$ là không âm với $n$ nguyên lớn hơn 3.

**25.** Chứng minh bằng quy nạp rằng tập hợp $n$ phần tử có $n(n - 1)/2$ tập con chứa đúng 2 phần tử trong đó $n$ là số nguyên lớn hơn hay bằng 2.

**26*.** Chứng minh bằng quy nạp rằng tập hợp $n$ phần tử có $n(n-1)(n-2)/6$ tập con chứa đúng 3 phần tử trong đó $n$ là số nguyên lớn hơn hay bằng 3.

**27.** Sử dụng quy nạp toán học chứng minh :

$$\sum_{j=1}^{n} j^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

với $n$ nguyên dương.

**28.** Với giá trị $n$ nguyên không âm nào ta có $n^2 \leq n!$ ? Hãy chứng minh điều khẳng định của bạn bằng quy nạp toán học.

**29.** Với giá trị $n$ nguyên không âm nào ta có $2n + 3 \leq 2^n$ ? Hãy chứng minh điều khẳng định của bạn bằng quy nạp toán học.

**30.** Sử dụng quy nạp toán học chứng minh :

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2n}$$

với $n$ nguyên dương.

**31.** a) Với các con tem loại 5 xu và 6 xu có thể tạo được các bưu phí nào?

b) Chứng minh câu trả lời của bạn trong phần a) bằng quy nạp toán học.

c) Chứng minh câu trả lời của bạn trong phần a) bằng nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học.

**32.** Chỉ dùng đồng 10 xu và đồng 25 xu có thể tạo được các khoản tiền là bao nhiêu? Hãy chứng minh câu trả lời của bạn bằng quy nạp toán học.

**33.** Máy trả tiền tự động ở ngân hàng chỉ có loại tiền 20 và loại 50 đôla. Máy có thể trả được các khoản tiền là bao nhiêu, nếu số lượng các tờ giấy bạc thuộc hai loại trên là không hạn chế. Hãy chứng minh câu trả lời của bạn bằng quy nạp toán học.

**34.** Giả sử rằng

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

trong đó $a$ và $b$ là các số thực. Chứng minh rằng

$$A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix},$$

với $n$ là số nguyên dương tùy ý.

**35.** Giả sử **A** và **B** là các ma trận vuông có tính chất $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Chỉ ra rằng $\mathbf{AB}^n = \mathbf{B}^n\mathbf{A}$, với $n$ là số nguyên dương tùy ý.

**36.** Giả sử $m$ là một số nguyên dương. Dùng phương pháp qui nạp toán học chứng minh rằng $a$ và $b$ là hai số nguyên sao cho $a \equiv b \pmod{m}$, khi đó $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ với $k$ là nguyên không âm.

**37.** Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng nếu $A_1, A_2, \ldots A_n$ và $B$ là các tập hợp thì

$$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$$

$$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B).$$

**38.** Chứng minh rằng nếu $A_1, A_2, \ldots\ A_n$ và $B_1, B_2, \ldots B_n$ là các tập hợp sao cho $A_i \subseteq B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ khi đó :

a) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ b) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_i$ .

**39.** Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng nếu $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ là các tập con của tập vũ trụ $U$ thì

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k} .$$

**40.** Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng :
$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n)$ là tương đương với $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \ldots \wedge \neg p_n$, trong đó $p_1$, $p_2$, ... $p_2$, ... $p_n$ là các mệnh đề.

**41*.** Chứng minh rằng

$$[(p_1 \to p_2) \wedge (p_2 \to p_3) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \to p_n)]$$

$$\to [(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge P_{n-1}) \to p_n)]$$

là một hằng đúng với $p_1$, $p_2$, ... $p_n$ là các mệnh đề.

**42.** Dùng công thức cho tổng các số hạng của một cấp số nhân hãy tính các tổng sau :

a) $4 + 4.3 + 4.3^2 + \ldots + 4.3^8$

b) $3 + 3.2^2 + 3.2^4 + \ldots + 3.2^{10}$

c) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + (-1)^n 2^n$.

**43.** Sai lầm ở đâu trong "chứng minh" tất cả các con ngựa đều cùng màu như sau :

> Cho $P(n)$ là mệnh đề tất cả các con ngựa trong một tập $n$ con ngựa là cùng màu. Rõ ràng $P(1)$ là đúng. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng, tức là các con ngựa trong một tập bất kỳ có $n$ con là cùng màu. Xét $n + 1$ con ngựa tùy ý, và đánh số các con ngựa đó là 1, 2, ..., $n$, $n + 1$. Dễ thấy $n$ con ngựa đầu tiên và $n$ con ngựa cuối cùng phải là cùng màu. Vì tập $n$ con ngựa đầu tiên và tập $n$ con ngựa cuối cùng là gối lên nhau, nên tất cả $n + 1$ con ngựa là cùng màu. Điều này chứng tỏ $P(n + 1)$ là đúng và chúng ta hoàn tất chứng minh bằng quy nạp.

**44*.** Tìm sai lầm trong "chứng minh" $a^n = 1$ với mọi $n$ nguyên không âm, và $a$ là số thực khác không cho dưới đây :

BƯỚC CƠ SỞ. $a^0 = 1$ là đúng, theo định nghĩa của hàm mũ.

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $a^k = 1$ với mọi nguyên không âm và nhỏ hơn $n$. Khi đó :

$$a^{n+1} = \frac{a^n \cdot a^n}{a^{n-1}} = \frac{1.1}{1} = 1.$$

**45***. Chứng minh rằng dạng thứ hai của quy nạp toán học là phương pháp có cơ sở bằng cách chỉ ra rằng nó được suy ra từ tính được sắp tốt.

**46.** Chứng minh rằng một biến thể sau đây của quy nạp toán học là phương pháp có cơ sở để chứng minh $P(n)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương.

BƯỚC CƠ SỞ. $P(1)$ và $P(2)$ là đúng.

BƯỚC QUY NẠP. Với mọi số nguyên dương $n$, nếu $P(n)$ và $P(n + 1)$ cả hai đều đúng thì $P(n + 2)$ là đúng.

Trong các Bài 47 và 48, $H_n$ ký hiệu số điều hòa thứ $n$.

**47***. Dùng quy nạp toán học chứng minh $H_{2^n} \leq 1 + n$ với mọi $n$ nguyên không âm.

**48***. Dùng quy nạp toán học chứng minh

$$H_1 + H_2 + \dots + H_n = (n + 1)H_n - n.$$

**49***. Chứng minh rằng :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$$

**50***. Chứng minh rằng $n$ đường thẳng chia mặt phẳng thành $(n^2 + n + 2)/2$ miền nếu không có hai đường thẳng nào song song và không có ba đường nào có chung một điểm.

**51****. Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương hãy chứng minh bằng quy nạp :

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \dots a_n)^{1/n}.$$

**52*.** Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng $4^{n+1} + 5^{2n-1}$ chia hết cho 21 với mọi $n$ nguyên dương.

**53.** Dùng quy nạp toán học chứng minh Bổ đề 2 của Tiết 2.5 nói rằng $p$ là số nguyên tố và $p \mid a_1a_2 \ldots a_n$ trong đó $a_i$ là các số nguyên ($i = 1, 2, \ldots n$), khi đó $p \mid a_i$ với một $i$ nguyên nào đó.

**54*.** Tính chất được sắp tốt có thể dùng để chứng minh rằng hai số nguyên dương $a$ và $b$ có chỉ một ước chung lớn nhất. Gọi $S$ là tập các số nguyên dương dạng $as + bt$, trong đó $s$, $t$ là các số nguyên.

a) Chỉ ra rằng $S$ không rỗng.

b) Dùng tính chất được sắp tốt để chứng minh rằng $S$ có phần tử nhỏ nhất $c$.

c) Chỉ ra rằng nếu $d$ là ước chung của $a$ và $b$ khi đó $d$ là ước của $c$.

d) Chỉ ra rằng $c \mid a$ và $c \mid b$ (*Gợi ý* : Trước tiên giả sử rằng $c$ không là ước của $a$. Khi đó $a = qc + r$ trong đó $0 \leqslant r < c$. Chỉ ra rằng $r \in S$, mâu thuẫn với cách chọn $c$).

e) Từ c) và d) kết luận rằng tồn tại ước chung lớn nhất của $a$ và $b$. Cuối cùng cần chỉ ra ước chung lớn nhất này là duy nhất.

**55*.** Chứng minh rằng nếu $a_1\ a_2 \ldots a_n$ là $n$ số thực phân biệt, khi đó cần đúng $(n - 1)$ phép nhân để tính tích của $n$ số này bất kể dấu ngoặc đơn được chèn như thế nào vào trong tích đó. (*Gợi ý* : dùng nguyên lý thứ hai của qui nạp toán học và xét phép nhân cuối cùng).

**56.** Bằng các miếng hình chữ L hãy lát một bàn cờ $4 \times 4$ khuyết một ô vuông ở góc trên bên trái.

**57.** Bằng các miếng lát hình chữ L hãy lát một bàn cờ $8 \times 8$ có một ô vuông ở góc trên bên trái bị cắt bỏ.

**58.** Chứng minh hoặc bác bỏ khẳng định rằng tất cả các bàn cờ có dạng cho dưới đây đều có thể được phủ hoàn toàn khi sử dụng các miếng hình chữ L, với $n$ là số nguyên dương.

a) $3 \times 2^n$, b) $6 \times 2^n$

c) $3^n \times 3^n$, d) $6^n \times 6^n$

**59*.** Chứng minh rằng một bàn cờ ba chiều $2^n \times 2^n \times 2^n$ có một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$ bị cắt bỏ có thể được lấp đầy bằng các khối lập phương $2 \times 2 \times 2$ bị khuyết một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$.

**60*.** Chỉ ra rằng một bàn cờ $n \times n$ khuyết một hình vuông có thể được phủ hoàn toàn khi dùng các miếng lát hình chữ L nếu $n > 5$, $n$ lẻ và không chia hết cho 3.

**61.** Cho $a$ là một số nguyên và $b$ là một số nguyên dương. Chỉ ra rằng các số nguyên $q$ và $r$ sao cho $a = dq + r$ trong đó $0 \leq r < d$, là duy nhất. (Sự tồn tại đã được chứng minh trong Ví dụ 1).

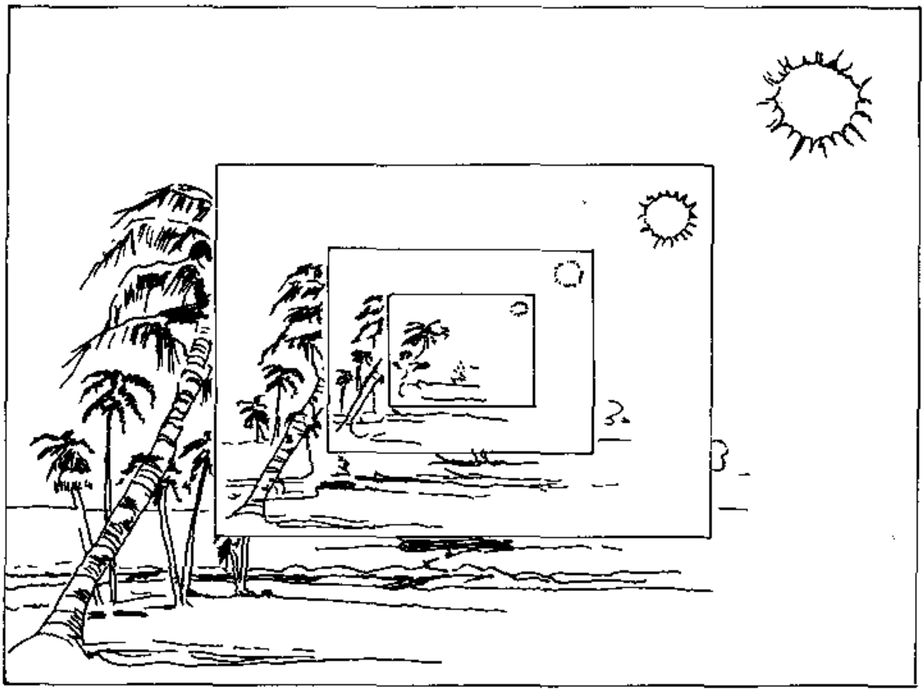
**62.** Dùng nguyên lý quy nạp toán học chỉ ra rằng $P(n)$ là đúng với $n = k + 1, k + 2$ ... với $k$ nguyên, nếu $P(k)$ là đúng và mệnh đề kéo theo $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ là đúng với mọi $n$ nguyên dương và $n \geq k$.

# 3.3. ĐỊNH NGHĨA BẰNG ĐỆ QUY

## MỞ ĐẦU

Đôi khi chúng ra rất khó định nghĩa một đối tượng một cách tường minh. Nhưng có thể dễ dàng định nghĩa đối tượng này qua chính nó. Kỹ thuật này được gọi là **đệ quy (hồi quy)**. Ví dụ, bức tranh trên Hình 1 được tạo ra bằng đệ quy. Trước tiên, cho bức tranh gốc. Sau đó lần lượt tại tâm của nó đặt chồng lên những bức tranh như thế nhưng nhỏ hơn.

Chúng ta có thể dùng đệ quy để định nghĩa các dãy số, các hàm số, và các tập hợp. Trước đây để định nghĩa một dãy số ta cho công thức tường minh của các số hạng của nó. Chẳng hạn, $a_n = 2^n$ với $n = 0, 1, 2, ...$ Nhưng cũng có thể định nghĩa dãy số này bằng cách cho số hạng đầu tiên của dãy $a_0 = 1$, và cho quy tắc tìm một số hạng của dãy qua một số hạng trước nó, ví dụ, $a_{n+1} = 2a_n$ với $n = 0, 1, 2, ...$




*Hình 1.* Bức tranh định nghĩa bằng đệ quy.

## CÁC HÀM ĐƯỢC ĐỊNH NGHĨA BẰNG ĐỆ QUY

Để định nghĩa một hàm xác định trên tập các số nguyên không âm, chúng ta cho :

1. Giá trị của hàm tại $n = 0$.
2. Công thức tính giá trị của nó tại số nguyên $n$ từ các giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn.

Định nghĩa như thế được gọi là **định nghĩa đệ quy** hay **định nghĩa quy nạp**.

**Ví dụ 1.** Giả sử $f$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau :

$$f(0) = 3, \quad f(n + 1) = 2f(n) + 3.$$

Hãy tìm $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, và $f(4)$.

*Giải:* Từ định nghĩa đệ quy ta suy ra :

$f(1) = 2f(0) + 3 = 2.3 + 3 = 9.$

$f(2) = 2f(1) + 3 = 2.9 + 3 = 21.$

$f(3) = 2f(2) + 3 = 2.21 + 3 = 45,$

$f(4) = 2\ f(3) + 3 = 2.45 + 3 = 93.$

■

Có nhiều hàm được định nghĩa bằng đệ quy. Chẳng hạn hàm giai thừa trong ví dụ sau.

**Ví dụ 2.** Hãy cho định nghĩa đệ quy của hàm giai thừa $F(n) = n\,!$.

*Giải:* Dễ thấy $f(0) = 1$.

Vì $(n + 1)\,! = 1.2.3...n(n + 1) = n!(n + 1)$, nên ta có công thức $F(n + 1) = (n + 1)! = (n + 1).F(n)$ với mọi $n$ nguyên dương.

■

Để xác định giá trị của hàm giai thừa, chẳng hạn $F(5) = 5!$, ta phải sử dụng công thức đệ quy nhiều lần.

$$F(5) = 5.F(4) = 5.4F(3) = 5.4.3F(2) = 5.4.3.2F(2) = 5.4.3.2F(1)$$

$$= 5.4.3.2.1F(0) = 5.4.3.2.1.1 = 120.$$

**Ví dụ 3.** Hãy cho định nghĩa đệ quy của hàm $F(n) = a^n$ trong đó $a$ là một số thực khác không và $n$ là nguyên không âm.

*Giải:* Ta cho $F(0) = a^0 = 1$.

Vì $a^{n+1} = a\ a^n$ nên $F(n + 1) = aF(n)$.

■

**Ví dụ 4**. Hãy cho định nghĩa đệ quy của hàm

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

*Giải:* Phần đầu của định nghĩa đệ quy là :

$$F(0) = \sum_{k=0}^{0} a_k = a_0$$

Phần thứ hai của định nghĩa đệ quy là :

$$F(n + 1) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left[\sum_{k=0}^{n} a_k\right] + a_{n+1} = F(n) + a_{n+1}$$

■

Trong một số định nghĩa hàm bằng đệ quy, người ta cho giá trị của hàm tại *k* số nguyên dương đầu tiên và cho quy tắc tính giá trị của hàm tại số nguyên lớn hơn từ *k* giá trị này. Theo nguyên lý thứ hai của qui nạp toán học thì cách định nghĩa này tạo ra các hàm hoàn toàn xác định (xem Bài tập 45 ở cuối tiết này).

**Ví dụ 5.** Dãy Fibonacci. Dãy số $f_0, f_1, f_2$ ... được định nghĩa bằng đệ quy như sau : $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, và $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ trong đó $n = 2, 3, 4, \ldots$ Hãy tính các số hạng $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$.

*Giải:* Trong phần đầu của định nghĩa cho $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ nên ta suy ra :

$$f_2 = f_0 + f_1 = 0 + 1 = 1,$$

$$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2,$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3,$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5,$$

$$f_6 = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8.$$

■

Chúng ta dùng định nghĩa đệ quy để chứng minh rất nhiều tính chất của dãy số này, như trong ví dụ sau.

**Ví dụ 6.** Chỉ ra rằng $f_n > \alpha^{n-2}$, trong đó $\alpha = \dfrac{(1 + \sqrt{5})}{2}$ với $n \geqslant 3$.

*Giải:* Gọi *P(n)* là mệnh đề "$f_n > \alpha^{n-2}$".

Rõ ràng : $\alpha < 2 = f_3, \quad \alpha^2 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} < 3 = f_4,$

tức là $P(3)$ và $P(4)$ là đúng. Bây giờ giả sử *P(k)* là đúng với mọi *k* nguyên sao cho $3 \leqslant k \leqslant n$, trong đó $n \geqslant 4$. Ta cần chỉ ra *P(n + 1)* đúng. Thật vậy, vì $\alpha$ nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$, nên suy ra $\alpha^2 = \alpha + 1$. Do đó

$$\alpha^{n-1} = \alpha^2.\alpha^{n-3} = (\alpha + 1).\alpha^{n-3} = \alpha.\alpha^{n-3} + \alpha^{n-3} = \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}$$

Theo giả thiết quy nạp nếu $n \geqslant 5$ ta suy ra

$$f_{n-1} > \alpha^{n-3}; \quad f_n > \alpha^{n-2}.$$

do vậy $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} > \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} = \alpha^{n-1}$. Đó là điều cần chứng minh.

■

Bây giờ ta chỉ ra rằng thuật toán Euclid sử dụng $O(\log b)$ phép chia để tìm ƯCLN của hai số nguyên dương $a$ và $b$, trong đó $a \geqslant b$.

**ĐỊNH LÝ 1.** *Định lý Lamé.*

Giả sử $a$, $b$ là hai số nguyên dương, trong đó $a \geqslant b$. Khi đó số phép chia dùng trong thuật toán Euclid để tìm ƯCLN$(a, b)$ sẽ nhỏ hơn hay bằng năm lần số các chữ số của $b$ trong hệ thập phân.

***Chứng minh:*** Giả sử $a$ và $b$ là hai số nguyên dương và $a \geqslant b$. Khi dùng thuật toán Euclid để tìm ƯCLN$(a, b)$, ta sẽ nhận được dãy các đẳng thức sau ($a = r_0$, và $b = r_1$) :

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2 \;; \qquad 0 \leqslant r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \;; \qquad 0 \leqslant r_3 < r_2$$

...

...

...

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \;; \; 0 \leqslant r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n \;;$$

Như vậy để tìm $r_n =$ ƯCLN$(a, b)$ ta dùng $n$ phép chia. Các thương $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ luôn lớn hơn hay bằng 1, còn $q_n \geqslant 2$ vì $r_n < r_{n-1}$. Từ đó suy ra :

$$r_n \geqslant 1 = f_2,$$

$$r_{n-1} \geqslant 2r_n \geqslant 2 f_2 = f_3$$

$$r_{n-2} \geqslant r_{n-1} + r_n \geqslant f_3 + f_2 = f_4.$$

...

$$r_2 \geqslant r_3 + r_4 \geqslant f_{n-1} + f_{n-2} = f_n$$

$$b = r_1 \geqslant r_2 + r_3 \geqslant f_n + f_{n-1} = f_{n+1}.$$

Từ đó suy ra nếu $n$ là số phép chia trong thuật toán tìm ƯCLN($a$, $b$) thì $b \geqslant f_{n+1}$. Từ Ví dụ 6 ta có $f_{n+1} > \alpha^{n-1}$ với $n > 2$, trong đó

$$\alpha = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

Do vậy $b > \alpha^{n-1}$. Cuối cùng ta được :

$$\log_{10} b > (n-1)\log_{10}\alpha > \frac{n-1}{5}.$$

(vì $\log_{10}\alpha \sim 0.208 > \frac{1}{5}$).

Hay $n - 1 < 5.\log_{10} b$. Giả sử $b$ là số nguyên có $k$ chữ số, khi đó $b < 10^k$ và $\log_{10} b < k$. Do vậy $n - 1 < 5.k$, hay $n \leqslant 5k$. Đó là điều cần chứng minh.

Vì $$k = \lfloor \log_{10} b \rfloor + 1 \leqslant \log_{10} b + 1,$$

nên $$n \leqslant 5k \leqslant 5(\log_{10} b + 1) = O(\log b).$$

Vậy thuật toán Euclid để tìm ƯCLN($a$, $b$) với mọi $a > b$ đã sử dụng $O(\log b)$ phép chia.

## CÁC TẬP HỢP ĐƯỢC ĐỊNH NGHĨA BẰNG ĐỆ QUY

Các tập hợp thường được định nghĩa bằng đệ quy. Trước tiên người ta đưa ra tập xuất phát. Sau đó là quy tắc tạo các phần tử mới từ các phần tử đã biết của tập. Những tập được mô tả bằng cách như vậy được được gọi là các tập được định nghĩa tốt, các định lý về chúng có thể chứng minh bằng cách sử dụng định nghĩa đệ quy của chúng.

**Ví dụ 7.** Giả sử $S$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau :

$3 \in S$ ;

$x + y \in S$ nếu $x \in S$ và $y \in S$ ;

Hãy chỉ ra rằng $S$ là tập các số nguyên chia hết cho 3.

*Giải:* Gọi $A$ là tập các số nguyên dương chia hết cho 3. Để chứng minh $A = S$ ta sẽ chứng minh rằng $A$ là một tập con của $S$ và $S$ là tập con của $A$. Để chứng minh $A$ là tập con của $S$, ta giả sử $P(n)$ là mệnh đề "$3n$ thuộc tập $S$". $P(1)$ đúng vì theo định nghla của $S$ "$3.1 = 3 \in S$".

Giả sử $P(n)$ đúng, tức là $3n \in S$. Vì $3 \in$ và $3n \in S$ nên theo định nghĩa $3 + 3n = 3(n + 1) \in S$. Điều này có nghĩa là $P(n + 1)$ đúng. Theo quy nạp toán học mọi số có dạng $3n$, với $n$ nguyên dương, thuộc $S$, hay nói cách khác $A$ là tập con của $S$.

Ngược lại, $3 \in S$, hiển nhiên 3 chia hết cho 3 nên $\in A$. Tiếp theo ta chứng minh tất cả các phần tử của $S$ sinh ra do phần thứ hai của định nghĩa, cũng thuộc $A$. Giả sử $x$ , $y$ là hai phần tử của $S$, cũng là hai phần tử của $A$. Theo định nghĩa của $S$ thì $x + y$ cũng là một phần tử của $S$, và vì $x$ và $y$ đều chia hết cho 3 nên $x + y$ cũng chia hết cho 3, tức là $x + y \in A$. Vậy $S$ là tập con của $A$.

■

Định nghĩa tập hợp trong Ví dụ 7 là một định nghĩa đệ quy rất điển hình. Đầu tiên tập xuất phát được đưa ra. Tiếp theo là quy tắc tạo các phần tử mới từ các phần tử đã biết của tập. Sự ngầm định trong định nghĩa đệ quy này là không có phần tử nào thuộc tập đang định nghĩa, trừ phần tử đầu tiên được liệt kê trong tập đầu hoặc nó có thể được tạo ra theo quy tắc xây dựng phần tử mới.

Một trong các ứng dụng thường gặp nhất của định nghĩa đệ quy cho các tập hợp là để định nghĩa các **biểu thức được tạo đúng quy tắc** trong các hệ khác nhau. Xét ví dụ sau.

**Ví dụ 8.** Ta xét các biểu thức gồm các biến, các số và các toán tử cộng +, trừ −, nhân *, chia / và lũy thừa ↑ được kết hợp với nhau theo một quy tắc nào đó. Khi đó một biểu thức (được tạo) đúng quy tắc được định nghĩa như sau :

1. $x$ là biểu thức đúng quy tắc nếu $x$ là một số hay một biến,
2. $(f + g)$, $(f - g)$, $(f * g)$, $(f / g)$ và $(f \uparrow g)$ là các biểu thức đúng quy tắc nếu $f$, $g$ là các biểu thức đúng quy tắc.

Chẳng hạn, do $x$ và 3 là các biểu thức đúng quy tắc, nên theo định nghĩa trên $(x + 3)$, $(x - 3)$, $(x * 3)$, $(x / 3)$ và $(x \uparrow 3)$ là các biểu thức đúng quy tắc. Tiếp theo, vì $y$ cũng là biểu thức đúng quy tắc nên $((x + 3) + y)$, $(y - (x * 3))$ cũng là đúng qui tắc. v.v. (Lưu ý $(3/0)$ cũng là biểu thức đúng quy tắc, vì ở đây ta chỉ quan tâm tới cú pháp).

**Ví dụ 9.** Các biểu thức cho mệnh đề phức hợp gồm các **T**, **F**, các biến mệnh đề và các toán tử $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ được định nghĩa như sau :

1. **T**, **F** và $p$, trong đó $p$ là một biến mệnh đề, là các biểu thức đúng qui tắc.

2. $(\neg p)$, $(p \vee q)$, $(p \wedge q)$, $(p \rightarrow q)$, $(p \leftrightarrow q)$ là các biểu thức đúng nếu $p$ và $q$ là các biểu thức đúng quy tắc.

Chẳng hạn, nếu $p$, $q$ và $r$ là các biến mệnh đề, khi đó dùng định nghĩa đệ quy nhiều lần dễ dàng chỉ ra rằng các biểu thức

$(p \vee q)$, $(r \wedge \mathbf{T})$ and $((p \vee q) \rightarrow (r \wedge \mathbf{T}))$ là đúng quy tắc.

■

Định nghĩa đệ quy thường được dùng khi nghiên cứu các xâu ký tự. Trong Chương 1, ta đã định nghĩa **xâu** là một dãy các ký tự thuộc bộ chữ cái $\sum$. Tập hợp các xâu ứng với bộ chữ cái $\sum$ được ký hiệu bởi $\sum^*$. Hai xâu có thể kết hợp với nhau theo phép **ghép**. Ghép các xâu $x$ và $y$ cho $xy$ là xâu tạo nên bằng cách viết tiếp xâu $y$ vào xâu $x$. Ví dụ, cho $x$ = *abra*, $y$ = *cadabra*, khi đó $xy$ = *abracadabra*. Khi chứng minh các kết quả về xâu người ta thường dùng định nghĩa đệ quy.

**Ví dụ 10.** *Định nghĩa đệ quy của tập các xâu*

Giả sử $\sum^*$ là tập các xâu trên bộ chữ cái $\sum$. Khi đó $\sum^*$ được định nghĩa bằng đệ quy như sau :

- $\lambda \in \sum^*$, trong đó $\lambda$ là một xâu rỗng (không có phần tử nào) ;
- $wx \in \sum^*$ nếu $w \in \sum^*$ và $x \in \sum$.

Phần đầu của định nghĩa nói rằng xâu rỗng thuộc $\sum^*$. Phần sau khẳng định một xâu mới tạo nên bằng cách ghép một ký tự của $\sum$ với một xâu của $\sum^*$ cũng thuộc $\sum^*$.

■

**Độ dài** của xâu, tức số ký tự trong xâu, cũng được định nghĩa bằng đệ quy.

**Ví dụ 11.** Hãy định nghĩa bằng đệ quy độ dài của xâu $w$.

***Giải:*** Ta ký hiệu độ dài của $w$ là $l(w)$. Khi đó định nghĩa đệ quy của $l(w)$ như sau :

- $l(\lambda) = 0$, trong đó $\lambda$ là xâu rỗng :
- $l(wx) = l(w) + 1$ nếu $w \in \sum^*$ và $x \in \sum$.

■

**Ví dụ 12**. Sử dụng quy nạp toán học chứng minh

$$l(xy) = l(x) + l(y),$$

trong đó $x$ và $y$ là các xâu thuộc $\sum^*$.

***Giải:*** Gọi $P(y)$ là mệnh đề $l(xy) = l(x) + l(y)$ với $x$, $y$ thuộc $\sum^*$.

BƯỚC CƠ SỞ. Dễ kiểm tra rằng $P(\lambda)$ là đúng vì

$$l(x\lambda) = l(x) + 0 = l(x) + l(\lambda) \text{ với mọi xâu } x.$$

BƯỚC QUY NẠP. Giả sử $P(y)$ là đúng, ta phải chứng minh $P(ya)$ đúng với mọi $a \in \sum$ tức là $l(xya) = l(x) + l(ya)$. Theo định nghĩa độ dài của xâu ta có

$$l(xya) = l(xy) + 1 \text{ và } l(ya) = l(y) + 1.$$

Theo giả thiết của phép qui nạp $l(xy) = l(x) + l(y)$

ta có $l(xya) = l(x) + l(y) + 1 = l(x) + l(ya)$

Đó là điều cần chứng minh.

## *BÀI TẬP*

**1.** Hãy tìm $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, và $f(4)$, nếu $f(n)$ được định nghĩa bằng đệ quy với $f(0) = 1$ và với $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) $f(n + 1) = f(n) + 2$.

b) $f(n + 1) = 3.f(n)$.

c) $f(n + 1) = 2^{f(n)}$

d) $f(n + 1) = (f(n))^2 + f(n) + 1$.

**2.** Hãy tìm $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ và $f(5)$, nếu $f(n)$ được định nghĩa đệ quy với $f(0) = 3$ và với $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) $f(n + 1) = -2f(n)$.

b) $f(n + 1) = 3.f(n) + 7$.

c) $f(n + 1) = (f(n))^2 - 2f(n) - 2$.

d) $f(n + 1) = 3^{f(n)/3}$.

**3.** Hãy tìm $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ và $f(5)$ nếu $f(n)$ được định nghĩa bằng đệ quy với $f(0) = -1$, $f(1) = 2$ và với $n = 1, 2, \ldots$

a) $f(n + 1) = f(n) + 3f(n - 1)$.

b) $f(n + 1) = f(n)^2 f(n - 1)$.

c) $f(n + 1) = 3f(n)^2 - 4f(n - 1)^2$.

d) $f(n + 1) = f(n - 1)/f(n)$.

**4.** Hãy tìm $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ và $f(5)$, nếu $f(n)$ được định nghĩa bằng đệ quy với $f(0) = f(1) = 1$ và với $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) $f(n + 1) = f(n) - f(n - 1)$.

b) $f(n + 1) = f(n)f(n - 1)$.

c) $f(n + 1) = f(n)^2 + f(n - 1)^3$.

d) $f(n + 1) = f(n) / f(n - 1)$.

**5.** Hãy cho định nghĩa đệ quy của dãy $\{a_n\}$, $n = 1, 2 \ldots$ nếu

a) $a_n = 6n$; b) $a_n = 2n + 1$ ;

c) $a_n = 10^n$; d) $a_n = 5$ .

**6.** Hãy định nghĩa đệ quy của dãy $\{a_n\}$, $n = 1, 2,\ldots$ nếu

a) $a_n = 4n - 2$; b) $a_n = 1 + (-1)^n$ ;

c) $a_n = n(n + 1)$; d) $a_n = n^2$ .

**7.** Cho $F$ là hàm sao cho $F(n)$ là tổng của $n$ số nguyên dương đầu tiên. Hãy đưa ra định nghĩa đệ quy của $F(n)$.

**8.** Hãy đưa ra định nghĩa đệ quy của $S_m(n)$ là tổng của số nguyên $m$ và số nguyên không âm $n$.

**9.** Hãy đưa ra định nghĩa đệ quy của $P_m(n)$ là tích của số nguyên $m$ và số nguyên không âm $n$.

Trong các Bài tập từ 10 - 17, $f_n$ là số Fibonacci thứ $n$.

**10.** Chứng minh rằng $f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$, với $n$ nguyên dương.

**11.** Chứng minh rằng $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$, với $n$ nguyên dương.

**12*.** Chứng minh rằng $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$, với $n$ nguyên dương.

**13*.** Chỉ ra rằng $f_0 f_1 + f_1 f_2 + \ldots + f_{2n-1}f_{2n} = f_{2n}^2$, với $n$ nguyên dương.

**14*.** Chỉ ra rằng $f_0 - f_1 + f_2 - \ldots - f_{2n-1} + f_{2n} = f_{2n-1} - 1$, với $n$ nguyên dương.

**15.** Xác định số phép chia cần dùng trong thuật toán Euclid tìm ƯCLN của các số Fibonacci $f_n$ và $f_{n+1}$ với $n$ nguyên dương. Dùng quy nạp kiểm tra kết quả của bạn.

**16.** Cho

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Chứng tỏ rằng $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$

với mọi $n$ nguyên dương.

**17.** Bằng cách tính định thức hai vế của phương trình trong Bài tập 16, chứng minh đẳng thức trong Bài 12.

**18*.** Hãy đưa ra định nghĩa đệ quy của hàm max và min sao cho $\max(a_1, a_2, \ldots a_n)$ và $\min(a_1, a_2, \ldots a_n)$ tương ứng là số lớn nhất và bé nhất của $n$ số $a_1, a_2, \ldots a_n$.

**19*.** Cho $a_1, a_2, \ldots a_n$ và $b_1, b_2, \ldots b_n$ là các số thực. Dùng định nghĩa đệ quy mà bạn đã đưa ra trong Bài tập 18, chứng minh :

a) $\max(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) = -\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

b) $\max(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \leqslant \max(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \max(b_1, b_2, \ldots b_n)$.

c) $\min(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n) \geqslant \min(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \min(b_1, b_2, \ldots b_n)$.

**20.** Gọi $S$ là tập được định nghĩa như sau :

$1 \in S$, và $s + t \in S$, nếu $s \in S$ và $t \in S$.

Chứng minh rằng $S$ là tập các số nguyên dương.

**21.** Hãy cho định nghĩa đệ quy của tập các số nguyên dương là bội của 5.

**22.** Cho định nghĩa đệ quy của :

a) tập các số nguyên lẻ.

b) tập các lũy thừa nguyên dương của 3.

c) tập các đa thức với hệ số nguyên.

**23.** Cho định nghĩa đệ quy của :

a) tập các số nguyên dương chẵn.

b) tập các số nguyên dương đồng dư với 2 theo modun 3.

c) tập các số nguyên dương không chia hết cho 5.

**24.** Chứng tỏ rằng một biểu thức đúng quy tắc bất kỳ gồm các số, các biến, và các toán tử $\{+, -, *, /, \uparrow\}$ sẽ chứa cùng một số dấu mở ngoặc và dấu đóng ngoặc.

**25.** Hãy định nghĩa một biểu thức đúng quy tắc của các tập hợp, các biến biểu diễn tập hợp, và các toán tử $\{\bar{\ }, \cup, \cap, -\}$.

**Đảo** *của một xâu là một xâu gồm các ký tự của xâu ban đầu nhưng với thứ tự ngược lại. Ta ký hiệu xâu đảo của xâu* $w$ *là xâu* $w^R$.

**26.** Tìm xâu đảo của các xâu sau đây :

a) 0101

b) 11011

c) 10001 00101 11

**27.** Hãy đưa ra định nghĩa xâu đảo bằng đệ quy. (*Gợi ý* : Trước tiên định nghĩa đảo của xâu rỗng. Sau đó viết xâu $w$ độ dài $n + 1$ dưới dạng $xy$, với $x$ là xâu độ dài $n$ và biểu diễn xâu đảo $w$ qua $x^R$ và $y$).

**28*.** Hãy cho một chứng minh đệ quy rằng $(w_1w_2)^R = w_2^Rw_1^R$.

**29.** Hãy định nghĩa bằng đệ quy $w^i$ trong đó $i$ là một số nguyên không âm (với $w^i$ biểu diễn phép ghép $i$ bản sao của xâu $w$).

**30*.** Hãy định nghĩa bằng đệ quy tập các xâu nhị phân thuận nghịch độc.

**31.** Khi nào một xâu thuộc vào tập $A$ gồm các xâu nhị phân và được định nghĩa như sau :
$\lambda \in A$, $0x1 \in A$ nếu $x \in A$, trong đó $\lambda$ là một xâu rỗng?

**32*.** Định nghĩa bằng đệ quy tập các xâu nhị phân nhiều bit 0 hơn bit 1.

**33.** Dùng Bài tập 29 và quy nạp toán học để chỉ ra rằng $l(w^i) = i.l(w)$, trong đó $w$ là một xâu và $i$ là một số nguyên không âm.

**34*.** Chỉ ra rằng $(w^R)^i = (w^i)^R$ trong đó $w$ là một xâu, $i$ là một số nguyên không âm, tức là chứng minh rằng lũy thừa bậc $i$ của một xâu đảo của một xâu là xâu đảo của xâu lũy thừa bậc $i$.

**35*.** Một **phân hoạch** của số nguyên dương $n$ là một cách viết $n$ như là tổng của các số nguyên dương. Ví dụ, $7 = 3 + 2 + 1 + 1$ là một phân hoạch của 7. Cho $P_m$ bằng số các phân hoạch khác nhau của $m$, trong đó không kể tới thứ tự của các số hạng trong tổng và $P_{m,n}$ là số các biểu diễn khác nhau của $m$ thành tổng của các số nguyên dương không vượt quá $n$.

a) Chỉ ra rằng $P_{m,m} = P_m$.

b) Chỉ ra rằng định nghĩa đệ quy sau đây cho $P_{m,n}$ là đúng.

$$P_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 1 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ P_{n,m} & \text{if } m < n \\ 1 + P_{m,m-1} & \text{if } m = n > 1 \\ P_{m,n-1} + P_{m-n,n} & \text{if } m > n > 1 \end{cases}$$

c) Tìm số phân hoạch của 5 và 6 bằng cách sử dụng định nghĩa đệ quy trên.

*Ta sẽ nghiên cứu định nghĩa đệ quy sau đây của hàm* **Akermann**. *Hàm này đóng một vai trò quan trọng trong lý thuyết hàm đệ quy và trong nghiên cứu độ phức tạp của một một số thuật toán có chứa hợp của tập hợp.*

$$A(m, n) = \begin{cases} 2n & \text{if } m = 0 \\ 0 & \text{if } m \geq 1 \text{ và } n = 0 \\ 2 & \text{if } m \geq 1 \text{ và } n = 1 \\ A(m-1, A(m, n-1)) & \text{if } m \geq 1 \text{ và } n \geq 2. \end{cases}$$

Các Bài tập từ 36 đến 43 sử dụng định nghĩa này của hàm *Akermann*.

**36.** Tính các giá trị :

a) $A(1,0)$ h) $A(0,1)$

c) $A(1,1)$ d) $A(2,2)$.

**37.** Chỉ ra rằng $A(m, 2) = 4$ với mọi $m \geq 1$.

**38.** Chỉ ra rằng $A(1, n) = 2^n$ với mọi $n \geq 1$.

**39.** Tính

a) $A(2, 3)$

b*) $A(3, 3)$

**40*.** Tìm $A(3,4)$.

**41**.** Chứng minh rằng $A(m, n + 1) > A(m,n)$, với mọi $m$, $n$ nguyên không âm.

**42***. Chứng minh rằng $A(m+1, n) \geqslant A(m, n)$, với mọi $m$, $n$ nguyên không âm.

**43**. Chứng minh rằng $A(i, j) \geqslant j$ với mọi $i$, $j$ nguyên không âm.

**44**. Giả sử hàm $F$ được định nghĩa bằng cách cho $F(0)$ và một quy tắc để tính $F(n+1)$ từ $F(n)$. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng $F$ là một hàm được định nghĩa tốt.

**45**. Giả sử hàm $F$ được định nghĩa bằng cách cho $F(0)$ và một quy tắc để tính $F(n+1)$ từ các giá trị $F(k)$, với $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Dùng nguyên lý thứ hai quy nạp toán học chứng minh rằng $F$ là một hàm được định nghĩa tốt.

# 3.4. CÁC THUẬT TOÁN ĐỆ QUY

## MỞ ĐẦU

Đôi khi chúng ta có thể quy việc giải bài toán với tập các dữ liệu đầu vào xác định về việc giải cùng bài toán đó nhưng với các giá trị đầu vào nhỏ hơn. Ví dụ, bài toán tìm ƯCLN của hai số $a$, $b$ với $b > a$, có thể rút gọn về bài toán tìm ƯCLN của hai số nhỏ hơn, $b$ **mod** $a$ và $a$ vì ƯCLN($b$ **mod** $a$, $a$) = ƯCLN($a$, $b$). Khi việc rút gọn như vậy thực hiện được thì lời giải bài toán ban đầu có thể tìm được bằng một dãy các phép rút gọn cho tới những trường hợp mà ta có thể dễ dàng nhận được lời giải của bài toán. Ví dụ, trong bài toán tìm ƯCLN($a$, $b$), việc rút gọn sẽ tiếp tục cho tới khi số nhỏ hơn trong hai số bằng không, vì ƯCLN(0, $a$) = $a$ với $a > 0$.

Chúng ta sẽ thấy rằng các thuật toán rút gọn liên tiếp bài toán ban đầu tới bài toán có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn, được áp dụng trong một lớp rất rộng các bài toán.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Một thuật toán được gọi là *đệ quy* nếu nó giải bài toán bằng cách rút gọn liên tiếp bài toán ban đầu tới bài toán cũng như vậy nhưng có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn.

**Ví dụ 1.** Tìm thuật toán đệ quy tính giá trị $a^n$ với $a$ là số thực khác không và $n$ là số nguyên không âm.

*Giải:* Ta xây dựng thuật toán đệ quy nhờ định nghĩa đệ quy của $a^n$, đó là $a^{n+1} = a.a^n$ với $n > 0$ và khi $n = 0$ thì $a^0 = 1$. Vậy để tính $a^n$ ta quy về các trường hợp có số mũ $n$ nhỏ hơn, cho tới khi $n = 0$. Xem Thuật toán 1 sau đây : ■

---

THUẬT TOÁN 1. THUẬT TOÁN ĐỆ QUY TÍNH $a^n$.

**procedure** *power* (*a* : số thực khác không; *n* : số nguyên không âm)

**if** *n* = 0 **then** *power*(a, *n*) := 1

**else** power(a.*n*) := *a* * *power*(a, *n* – 1)

---

**Ví dụ 2.** Tìm thuật toán đệ quy tính ƯCLN của hai số nguyên $a$, $b$ không âm và $a < b$.

*Giải:* Vì ƯCLN($a$, $b$) = ƯCLN($b$ **mod** $a$, $a$) và điều kiện ƯCLN(0, $b$) = $b$ nên ta có thể xây dựng thuật toán tìm ƯCLN như sau ■

---

THUẬT TOÁN 2. THUẬT TOÁN ĐỆ QUY TÍNH ƯCLN(*a, b*).

**procedure** *ƯCLN (a, b : các số nguyên không âm, a <b)*

**if** *a* = **0 then** *ƯCLN (a, b)* := *b*

**else** *ƯCLN (a, b)* : = *ƯCLN (b* **mod** *a, a)*

---

**Ví dụ 3.** Hãy biểu diễn thuật toán tìm kiếm tuyến tính như một thủ tục đệ quy.

*Giải:* Để tìm $x$ trong dãy tìm kiếm $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ trong bước thứ $i$ của thuật toán ta so sánh $x$ với $a_i$. Nếu $x$ bằng $a_i$ thì $i$ là vị trí cần tìm, ngược lại thì việc tìm kiếm được quy về dãy có số phần tử ít hơn, cụ thể là dãy $a_{i+1}$, ..., $a_n$. Thuật toán tìm kiếm có dạng thủ tục đệ quy như sau.

Cho *search*$(i, j, x)$ là thủ tục tìm số $x$ trong dãy $a_i$, $a_{i+1}$, ..., $a_j$. Dữ liệu đầu vào là bộ ba $(1, n, x)$. thủ tục sẽ dừng khi số hạng đầu tiên của dãy còn lại là $x$ hoặc là khi dãy còn lại chỉ có một phần tử khác $x$. Nếu $x$ không là số hạng đầu tiên và còn có các số hạng khác thì lại áp dụng thủ tục này, nhưng dãy tìm kiếm ít hơn một phần tử nhận được bằng cách xóa đi phần tử đầu tiên của dãy tìm kiếm ở bước vừa qua.

THUẬT TOÁN 3. THUẬT TOÁN ĐỆ QUY TÌM KIẾM TUYẾN TÍNH.

```
procedure search (i, j, x)
if a_i = x then vị trí := i
else if i = j then vị trí := 0
else search (i + 1, j, x)
```

■

**Ví dụ 4.** Hãy xây dựng phiên bản đệ quy của thuật toán tìm kiếm nhị phân.

*Giải.* Giả sử ta muốn định vị $x$ trong dãy $a_1$, $a_2$ ..., $a_n$ bằng tìm kiếm nhị phân. Trước tiên ta so sánh $x$ với số hạng giữa, $a_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Nếu chúng bằng nhau thì thuật toán kết thúc, nếu không ta chuyển sang tìm kiếm trong dãy ngắn hơn, nửa đầu của dãy nếu $x$ nhỏ hơn giá trị giữa của dãy xuất phát, nửa sau nếu ngược lại. Như vậy ta rút gọn việc giải bài toán tìm kiếm về việc giải cũng bài toán đó nhưng trong dãy tìm kiếm có độ dài lần lượt giảm đi một nửa. Ta có thuật toán 4.

THUẬT TOÁN 4. THUẬT TOÁN ĐỆ QUY TÌM KIẾM NHỊ PHÂN.

```
procedure binary search (x, i, j)
m := ⌊(i + j)/2⌋
if x = a_m then vị trí := m
else if (x < a_m and i < m) then binary search (x, i, m - 1)
else if (x > a_m and j > m) then binary search (x, m + 1, j)
else vị trí := 0
```

## ĐỆ QUY VÀ LẶP

Định nghĩa đệ quy biểu diễn giá trị của hàm tại một số nguyên qua giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn. Điều này có nghĩa là ta có thể xây dựng một thuật toán đệ quy tính giá trị của hàm được định nghĩa bằng đệ quy tại một điểm nguyên.

**Ví dụ 5.** Thủ tục đệ quy sau đây cho ta giá trị của $n$ ! với $n$ nguyên dương.

---

THUẬT TOÁN 5. THỦ TỤC ĐỆ QUY TÍNH GIAI THỪA.

**procedure** *factorial* (*n* : nguyên dương)

**if** *n* = 1 **then** *factorial(n)* := 1

**else** *factorial(n)* := *n* * *factorial(n – l)*

---

Có cách khác tính hàm giai thừa của một số nguyên từ định nghĩa đệ quy của nó. Thay cho việc lần lượt rút gọn việc tính toán cho các giá trị nhỏ hơn, chúng ta có thể xuất phát từ giá trị của hàm tại 1 và lần lượt áp dụng định nghĩa đệ quy để tìm giá trị của hàm tại các số nguyên lớn dần. Đó là **thủ tục lặp**. Nói cách khác để tìm $n!$ ta xuất phát từ $n! = 1$ (với $n = 1$), tiếp theo lần lượt nhân với các số nguyên cho tới khi bằng $n$. Xem Thuật toán 6.

---

THUẬT TOÁN 6. THỦ TỤC LẶP TÍNH GIAI THỪA.

**procedure** Iterative factorial (*n* : nguyên dương) ;

*x* := 1

**for** *i* := 1 **to** *n*

*x* := *i* * *x*

{*x* là *n*!}

---

Sau khi thi hành đoạn mã này giá trị của biến $x$ là $n!$, ví dụ, sau khi đi qua vòng lặp 6 lần $x = 6! = 1.2.3.4.5.6 = 720$.

Thông thường để tính một dãy các giá trị được định nghĩa bằng đệ quy, nếu dùng phương pháp lặp thì số các phép tính sẽ ít hơn là dùng thuật toán đệ quy (trừ khi dùng các máy đệ quy chuyên dụng). Chúng ta sẽ xem xét bài toán tính các số hạng thứ $n$ của dãy Fibonacci.

---

THUẬT TOÁN 7. THỦ TỤC ĐỆ QUY TÍNH CÁC SỐ FIBONACCI.

**procedure** *fibonacci* ($n$ : nguyên không âm)

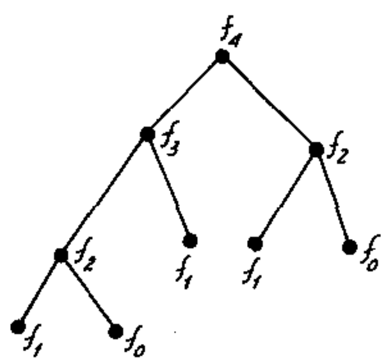
**if** $n = 0$ **then** *fibonacci*(0) := 0

**else** **if** $n = 1$ **then** *fibonacci*(1) := 1

**else** *fibonacci*($n$) := *fibonacci*($n - 1$) + *fibonacci*($n - 2$)

---

Theo thuật toán này, để tìm $f_n$ ta biểu diễn $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Sau đó thay thế cả hai số này bằng tổng của hai số Fibonacci bậc thấp hơn, cứ tiếp tục như vậy cho tới khi $f_0$ và $f_1$ xuất hiện thì được thay bằng các giá trị của chúng theo định nghĩa.




*Hình 1.* Ước lượng $f_4$ bằng đệ quy.

Mỗi giai đoạn đệ quy cho tới khi $f_0$ và $f_1$ xuất hiện, các số Fibonacci được tính hai lần. Chẳng hạn khi $n = 4$, trên Hình 1, giản đồ cây gồm có gốc với nhãn $f_4$, và các cành từ gốc được gán nhãn $f_3$ và $f_2$ vì chúng xuất hiện trong công thức đệ quy tính $f_4$. Mỗi nhánh này lại sinh ra hai nhánh con của cây. Sự phân nhánh sẽ kết thúc khi $f_0$ và $f_1$ được sinh ra. Độc giả có thể kiểm tra lại rằng để tìm $f_n$ cần ($f_{n+1} - 1$) phép cộng.

Bây giờ ta tính số các phép toán cần dùng để tính $f_n$ khi sử dụng phương pháp lặp.

Thuật toán này khởi tạo $x$ như $f_0 = 0$ và $y$ như $f_1 = 1$. Khi vòng lặp được duyệt qua tổng của $x$ và $y$ được gán cho biến phụ $z$. Sau đó $x$ được gán giá trị của $y$ và $y$ được gán giá trị của $z$. Vậy sau khi đi qua vòng lặp lần 1, ta có $x = f_1$ và $y = f_0 + f_1 = f_2$. Khi qua vòng lặp $n - 1$

lần thì $x = f_{n-1}$. Như vậy chỉ có $n-1$ phép cộng được dùng để tìm $f_n$ khi $n > 1$.

---

THUẬT TOÁN 8. THỦ TỤC LẶP TÍNH CÁC SỐ FIBONACCI.

```
procedure Iterative fibonacci (n : nguyên không âm) ;
if n := 0 then y := 0
else
begin
    x : = 0 ; y := 1
    for i := 1 to (n - 1)
    begin
        z := x + y
        x := y ; y := z
    end ;
end ; {y là số Fibonacci thứ n}
```

---

Chúng ta đã chỉ ra rằng số các phép toán dùng trong thuật toán đệ quy nhiều hơn khi dùng phương pháp lặp. Tuy nhiên đôi khi người ta vẫn thích dùng thủ tục đệ quy hơn ngay cả khi nó tỏ ra kém hiệu quả so với thủ tục lặp. Đặc biệt, có những bài toán chỉ có thể giải bằng thủ tục đệ quy mà không thể giải bằng thủ tục lặp.

## *BÀI TẬP*

**1.** Hãy cho thuật toán đệ qui tính $nx$ với mọi $n$ nguyên dương và $x$ nguyên.

**2.** Hãy cho thuật toán đệ qui tìm tổng $n$ số nguyên dương đầu tiên.

**3.** Hãy cho thuật toán đệ qui tìm tổng $n$ số nguyên dương lẻ đầu tiên.

**4.** Hãy cho thuật toán đệ qui tìm số cực đại của tập hữu hạn các số nguyên.

**5.** Hãy cho thuật toán đệ qui tìm số cực tiểu của tập hữu hạn các số nguyên.

**6.** Mô tả thuật toán đệ quy tìm $x^n$ **mod** $m$ với $n$, $x$, $m$ là các số nguyên dương.

**7.** Hãy đưa ra thuật toán đệ quy tìm $n!$ **mod** $m$ trong đó $m$, $n$ là các số nguyên dương.

**8.** Hãy đưa ra thuật toán đệ quy tìm **mod** của một danh sách các số nguyên. (**mod** là một phần tử của danh sách ít nhất có tần xuất xuất hiện các như phần tử khác của danh sách.

**9.** Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tìm ƯCLN của số nguyên không âm $a$, $b$ $(a < b)$ nếu dùng đẳng thức ƯCLN$(a, b)$ = ƯCLN$(a, b - a)$.

**10.** Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tính $a^{2^n}$ trong đó $a$ là một số thực và $n$ là một số nguyên dương. (*Gợi ý* : Dùng đẳng thức $a^{2^{n+1}} = (a^{2^n})^2$).

**11.** Hãy so sánh số các phép nhân dùng trong Thuật toán ở Bài tập 10 với số phép nhân dùng trong Thuật toán 1 để tính $a^{2^n}$?

**12*.** Dùng Thuật toán ở Bài tập 10 để nghĩ ra một thuật toán tính $a^n$ với $n$ nguyên không âm. (*Gợi ý* : Sử dụng biểu diễn nhị phân của $n$).

**13*.** Hãy so sánh số các phép nhân dùng trong Thuật toán ở Bài 12 với số phép nhân dùng trong Thuật toán 1 để tính $a^n$?

**14.** Bao nhiêu phép cộng được dùng bởi các thuật toán đệ quy và thuật toán lặp trong Thuật toán 7 và 8 để tìm số Fibonacii $f_7$.

**15.** Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tìm số hạng thứ $n$ của dãy được xác định như sau :
$a_0 = 1$, $a_1 = 2$ và $a_n = a_{n-1}a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, \ldots$

**16.** Hãy nghĩ ra Thuật toán lặp tìm số hạng thứ $n$ của dãy được xác định trong Bài tập 15.

**17.** Thuật toán đệ quy hay thuật toán lặp tìm số hạng thứ $n$ của dãy trong Bài tập 15 là có hiệu quả hơn?

**18.** Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tìm số hạng của dãy được xác định như sau : $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$, với $n = 3, 4, 5, \ldots$

**19.** Hãy nghĩ ra thuật toán lặp tìm số hạng thứ $n$ của dãy được xác định trong Bài tập 18.

**20.** Thuật toán đệ quy hay thuật toán lặp tìm dãy số trong Bài tập 18 là có hiệu quả hơn?

**21.** Hãy đưa ra thuật toán đệ quy và thuật toán lặp tìm số hạng thứ $n$ của dãy được xác định như sau : $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ và $a_n = a_{n-1}.(a_{n-2})^2.(a_{n-3})^3$, với $n = 4, 5, ...$
Thuật toán nào hiệu quả hơn?

**22.** Hãy nghĩ ra thuật toán đệ quy tìm số các phân hoạch của một số dương định nghĩa hằng đệ quy cho trong Bài tập 35 của Tiết 3.3.

**23.** Hãy đưa ra thuật toán đệ quy tìm xâu nghịch đảo của xâu nhị phân (Xem phần mở đầu của Bài tập 26 trong Tiết 3.3).

**24.** Hãy cho định nghĩa đệ quy tìm xâu $w^i$, là ghép của $i$ bản sao của $w$, với $w$ là xâu nhị phân.

**25.** Hãy cho thuật toán đệ quy tìm giá trị của hàm Akermann (*Gợi ý* : Xem phần ở đầu của Bài tập 36 trong Tiết 3.3).

# 3.5. TÍNH ĐÚNG ĐẮN CỦA CHƯƠNG TRÌNH

## MỞ ĐẦU

Giả sử rằng chúng ta đã thiết kế được một thuật toán để giải một hài toán nào đó và đã viết chương trình để thể hiện nó. Liệu ta có thể tin chắc rằng chương trình có luôn luôn cho lời giải đúng hay không? Sau khi tất cả các sai sót về mặt cú pháp đã được loại bỏ, chúng ta có thể thử chương trình với các đầu vào mẫu. Nó không đúng nếu cho kết quả sai với đầu vào mẫu nào đó. Tuy nhiên, ngay cả khi chương trình cho kết quả đúng với tất cả đầu vào mẫu, nó vẫn có thể không luôn luôn tạo ra các câu trả lời đúng (trừ khi tất cả các đầu vào có thể đã được thử). Chúng ta cần phải chứng minh rằng chương trình *luôn luôn* cho đầu ra đúng.

Việc kiểm chứng chương trình, chứng minh tính đúng đắn của chương trình, dùng các quy tắc suy diễn và các kỹ thuật chứng minh đã được mô tả trong chương này, kể cả quy nạp toán học. Vì chương trình không đúng có thể dẫn tới các hiệu ứng rất tồi tệ, nên một số rất lớn các phương pháp luận đã được xây dựng để kiểm chứng chương trình. Đã có nhiều cố gắng giành cho việc chứng minh tự động chương trình sao cho nó có thể thực hiện được trên máy tính. Tuy nhiên, những kết quả đạt được theo hướng này còn rất hạn chế. Thật vậy, nhiều nhà toán học và lý thuyết máy tính đã khẳng định rằng sẽ không bao giờ thực hiện được việc tự động chứng minh tính đúng đắn của những chương trình phức tạp.

Một vài khái niệm và phương pháp thường dùng để chứng minh một chương trình là đúng đắn sẽ được bàn tới trong tiết này. Tuy nhiên, phương pháp luận đầy đủ của việc kiểm chứng chương trình sẽ không được trình bày trong cuốn sách này. Tiết này chỉ là phần nhập môn ngắn gọn vào lĩnh vực kiểm chứng chương trình, nó sẽ gắn các quy tắc suy luận, các kỹ thuật chứng minh và khái niệm thuật toán lại với nhau.

## KIỂM CHỨNG CHƯƠNG TRÌNH

Một chương trình gọi là đúng đắn nếu với mọi đầu vào khả dĩ, nó cho đầu ra đúng. Việc chứng minh tính đúng đắn của chương trình gồm hai phần. Phần đầu chỉ ra rằng nếu chương trình kết thúc thì nhận được kết quả đúng. Phần này xác minh tính **đúng đắn bộ phận** của chương trình. Phần thứ hai chứng tỏ chương trình luôn luôn là kết thúc.

Để định rõ thế nào là một chương trình cho thông tin ra đúng người ta thường dùng hai mệnh đề sau. Thứ nhất là **khẳng định đầu**, nó đưa ra những tính chất mà thông tin đầu vào cần phải có. Mệnh đề thứ hai là **khẳng định cuối**, nó đưa ra những tính chất mà thông tin đầu ra cần phải có, tùy theo mục đích của chương trình. Khi kiểm tra chương trình cần phải chuẩn bị các khẳng định đầu và khẳng định cuối thích hợp.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Chương trình hay đoạn chương trình $S$ được gọi là *đúng đắn bộ phận* đối với khẳng định đầu $p$ và khẳng định cuối $q$, nếu $p$ là đúng với các giá trị vào của $S$ và nếu $S$ kết thúc thì $q$ là đúng với các giá trị ra của $S$. Ký hiệu $p\{S\}q$ có nghĩa là chương trình hay đoạn chương trình $S$ là đúng đắn bộ phận đối với khẳng định đầu $p$ và khẳng định cuối $q$.

Chú ý là khái niệm đúng đắn bộ phận không đề cập tới việc chương trình có kết thúc hay không. Nó chỉ nhằm kiểm tra xem chương trình có làm được cái mà nó định làm hay không, nếu nó kết thúc.

Ví dụ đơn giản sau đây minh họa các khái niệm khẳng định đầu và khẳng định cuối.

**Ví dụ 1.** Chỉ ra rằng đoạn chương trình

$y := 2$

$z := x + y$

là đúng đắn đối với khẳng định đầu $p$: $x = 1$ và khẳng định cuối $q$: $z = 3$.

*Giải:* Giả sử $p$ đúng, tức là $x = 1$ lúc bắt đầu chương trình. Sau đó $y$ được gán giá trị 2, còn $z$ được gán tổng các giá trị của $x$ và $y$, tức là 3. Vậy nếu $S$ kết thúc thì $q$ đúng. Theo định nghĩa, $S$ là đúng đắn đối với khẳng định đầu $p$ và khẳng định cuối $q$ hay $p\{S\}q$ là đúng.

■

## CÁC QUY TẮC SUY LUẬN

Một quy tắc suy luận rất có ích khi chứng minh một chương trình là đúng đó là phân chia nó thành dãy các đoạn chương trình (các chương trình con) và chứng minh mỗi đoạn chương trình là đúng.

Giả sử chương trình $S$ được phân chia thành các đoạn chương trình $S_1$, $S_2$ và ta viết là $S = S_1 ; S_2$ với ý nghĩa $S$ được tạo bởi $S_1$, tiếp theo là $S_2$. Giả sử tính đúng đắn của $S_1$ đối với khẳng định đầu $p$ và khẳng định cuối $q$, và tính đúng đắn của $S_2$ đối với khẳng định đầu $q$ và khẳng định cuối $r$ đã được chứng minh. Từ đó suy ra nếu $p$ đúng và $S_1$ được thi hành và kết thúc, thì $q$ là đúng, và nếu $q$ đúng và $S_2$ được thi hành và kết thúc, thì $r$ là đúng. Như vậy, nếu $p$ là đúng và $S = S_1 ; S_2$ được thi hành và kết thúc thì $r$ là đúng. Quy tắc suy luận này có tên là **quy tắc hợp thành** có thể diễn đạt như sau :

$$\begin{array}{l} p\{S_1\}q \\ q\{S_2\}r \\ \hline \therefore p\{S_1 ; S_2\}r \end{array}$$

Quy tắc suy luận này sẽ được sử dụng trong tiết này.

Chúng ta sẽ trình bày một số quy tắc suy luận nữa dùng cho các chương trình có chứa các câu lệnh điều kiện và các vòng lặp. Vì chương trình có thể phân chia thành các đoạn để chứng minh tính đúng đắn của nó, nên điều đó cho phép ta kiểm chứng được nhiều chương trình khác nhau.

*CÂU LỆNH ĐIỀU KIỆN*

Trước tiên, chúng ta sẽ trình bày những quy tắc suy luận đối với câu lệnh điều kiện. Giả sử một đoạn chương trình có dạng :

```
if điều_kiện then
    S
```

trong đó $S$ là một khối lệnh. Khối $S$ sẽ được thi hành nếu *điều kiện* là đúng, và $S$ sẽ không được thi hành và nếu *điều kiện* là sai. Để kiểm chứng tính đúng đắn của đoạn này đối với khẳng định cuối $q$ ta phải làm hai việc. Đầu tiên phải chỉ ra khi $p$ đúng và *điều kiện* đúng thì $q$ đúng sau khi $S$ kết thúc. Sau đó phải chứng minh rằng khi $p$ đúng và *điều kiện* sai thì $q$ đúng (vì trong trường hợp này $S$ không thi hành).

Điều đó dẫn tới quy tắc suy luận sau :

$$(p \wedge \text{điều kiện})\ \{S\}\, q$$
$$(p \wedge \neg\text{điều kiện}) \rightarrow q$$
$$\overline{\therefore\ p\{\textbf{if}\ \text{điều kiện}\ \textbf{then}\ S\}\, q}$$

Ví dụ sau minh họa cách sử dụng quy tắc suy luận này.

**Ví dụ 2.** Hãy chứng tỏ đoạn chương trình

```
if x > y then
    y := x
```

là đúng đối với khẳng định đầu **T** và khẳng định cuối $y \geqslant x$.

*Giải:* Khi khẳng định đầu là đúng và có điều kiện $x > y$, thì $y$ được gán giá trị của $x$, tức là $y := x$. Khẳng định cuối là đúng. Hơn nữa, khi khẳng định đầu đúng và điều kiện $x > y$ sai, tức là $y \geqslant x$, thì khẳng định cuối vẫn đúng. Vì thế, theo quy tắc suy luận cho đoạn chương trình kiểu này thì đoạn chương trình trên là đúng đối với khẳng định đầu $p$ và khẳng định cuối $q$ đã cho.

■

Tương tự, giả sử một đoạn chương trình có dạng

```
if điều kiện then
        S1
else
        S2
```

Nếu *điều kiện* là đúng thì $S_1$ được thi hành, nếu *điều kiện* là sai thì $S_2$ được thực hiện. Để kiểm chứng rằng đoạn chương trình là đúng đối với khẳng định đầu $p$ và khẳng định cuối $q$ ta phải làm hai việc. Trước tiên, phải chỉ ra khi $p$ đúng và *điều kiện* đúng thì $q$ đúng sau khi $S_1$ kết thúc. Sau đó phải chứng minh rằng khi $p$ đúng và *điều kiện* sai thì $q$ đúng sau khi $S_2$ được thực hiện. Ta có quy tắc suy luận sau đây.

$$(p \wedge \textit{điều kiện})\ \{S_1\}q$$

$$(p \wedge \neg \textit{điều kiện})\ \{S_2\}q$$

$$\overline{\therefore\ p\{\textbf{if } \textit{điều kiện} \textbf{ then } S_1 \textbf{ else } S_2\}q.}$$

Ví dụ sau minh họa cách sử dụng quy tắc suy luận này.

**Ví dụ 3.** Hãy chứng tỏ đoạn chương trình

```
if x < 0 then
        abs := - x
else
        abs := x
```

là đúng đối với khẳng định đầu **T** và khẳng định cuối $abs = |x|$.

*Giải*. Khi khẳng định đầu là đúng và có điều kiện $x < 0$, thì $abs$ được gán $-x$, tức là $abs = -x = |x|$ khẳng định cuối là đúng. Hơn nữa, khi khẳng định đầu là đúng và điều kiện $x < 0$ là sai, tức là $x \geqslant 0$, khi đó $abs$ được gán $x$, tức $abs = x = |x|$. Vì thế, theo quy tắc suy luận cho đoạn chương trình kiểu này thì đoạn chương trình trên là đúng đối với khẳng định đầu và khẳng định cuối đã cho.

### *BẤT BIẾN VÒNG LẶP*

Tiếp theo chúng ta sẽ trình bày cách chứng minh tính đúng đắn của vòng lặp **while**. Để xây dựng quy tắc suy luận cho đoạn chương trình dạng.

---

```
while điều_kiện
        S
```

---

hãy lưu ý rằng $S$ được lặp đi lặp lại cho tới khi nào *điều kiện* trở nên sai. Ta gọi một điều khẳng định nào đó là **bất biến vòng lặp** nếu nó vẫn còn đúng sau mỗi lần $S$ thi hành. Nói cách khác, nếu $(p \wedge \textit{điều kiện})\{S\}p$ là đúng thì $p$ là một bất biến vòng lặp.

Giả sử $p$ là bất biến vòng lặp. Từ đó suy ra $p$ là đúng trước khi đoạn chương trình thực hiện, $p$ và $\neg$*điều kiện* là đúng sau khi kết thúc. Quy tắc suy luận là :

$$\frac{(p \wedge \textit{điều kiện})\ \{S\}p}{\therefore\ p\{\textbf{while}\ \textit{điều kiện}\ S\}(\neg \textit{điều kiện} \wedge p).}$$

**Ví dụ 4.** Hãy dùng bất biến vòng lặp chứng tỏ đoạn chương trình

---

```
i := 1
factorial := 1
while i < n
  begin
     i := i + 1
     factorial := factorial * i
  end
```

---

kết thúc với *factorial* $= n!$, trong đó $n$ là số nguyên dương. Giả sử $p$ là mệnh đề "*factorial* $:= i!$ và $i \leq n$". Chúng ta sẽ chứng minh $p$ là một bất biến vòng lặp bằng quy nạp toán học. Đầu tiên hãy nhớ rằng $p$ là đúng trước khi vào lặp, vì $i = 1$, $factorial = 1 = 1!$ và $1 \leq n$. Giả sử $p$ đúng và $i < n$ sau khi thực hiện vòng lặp và giả sử vòng **while** được thi hành một lần nữa. Trước tiên $i$ tăng thêm một, như vậy vẫn còn nhỏ hơn hay bằng $n$. Do giả thiết quy nạp $factorial = (i - 1)!$ trước khi vào vòng lặp, nó sẽ được đặt bằng $(i - 1)!*i = i!$. Vì thế, $p$ vẫn còn đúng. Do đó $p$ là một bất biến vòng lặp.

Nói cách khác mệnh đề $[p \wedge (i < n)]\{S\}p$ là đúng. Từ đó suy ra khẳng định $p$ $\{$**while** $i < n$ $S\}$ $[(i \geq n) \wedge p]$ cũng đúng.

Vì vòng lặp kết thúc sau khi lặp $(n - 1)$ lần, khi đó $i = n$ và $factorial = n!$

Ví dụ cuối cùng này sẽ minh họa cách dùng các quy tắc suy luận khác nhau để kiểm chứng tính đúng đắn của một chương trình dài hơn.

**Ví dụ 5.** Ta sẽ kiểm tra sự đúng đắn của chương trình $S$ tính tích hai số nguyên.

```
procedure multiply (m, n : integer)
     S1 { if n < 0 then a := -n
        { else a := n
     S2 { k := 0
        { x := 0
        { while k < a
        { begin
     S3 {       x := x + m
        {       k := k + 1
        { end
     S4 { if n < 0 then product := -x
        { else product := x
```

Chúng ta sẽ chứng minh sau khi $S$ được thi hành thì *product* có giá trị là $mn$. Theo quy tắc hợp thành ta chia $S$ thành bốn đoạn $S = S_1; S_2; S_3; S_4$ như đã chỉ ra trong đoạn chương trình $S$.

Gọi $p$ là khẳng định đầu "$m$ và $n$ là các số nguyên". Khi đó có thể chỉ ra $p\{S_1\}q$ là đúng, với $q$ là mệnh đề $p \wedge (a = |n|)$. Tiếp theo gọi $r$ là mệnh đề $q \wedge (k = 0) \wedge (x = 0)$. Dễ kiểm tra rằng $q\{S_2\}r$ là đúng. Có thể chỉ ra "$x = mk$ và $k \leq a$" là một bất biến với vòng lặp trong $S_3$. Hơn nữa, dễ thấy rằng vòng lặp này sẽ kết thúc sau $a$ bước lặp khi $k = a$, tức là $x = ma$ tại điểm này. Từ đó suy ra $r\{S_3\}s$ là đúng với $s$ là mệnh đề "$x = ma$ và $a = |n|$". Cuối cùng có thể chỉ ra $S_4$ là đúng đối với khẳng định đầu $s$ và khẳng định cuối $t$, trong đó $t$ là mệnh đề "*product* $= mn$".

Kết hợp lại ta có tất cả $p\{S_1\}q$, $q\{S_2\}r$, $r\{S_3\}s$, $s\{S_4\}t$ là đúng, theo quy tắc hợp thành suy ra $p\{S\}t$ là đúng. Hơn nữa vì bốn đoạn đều kết thúc nên $S$ cũng dừng. Vậy ta đã kiểm tra được tính đúng đắn của chương trình.

■

## BÀI TẬP

1. Chứng minh đoạn chương trình :

   $y := 1$,
   $z := x + y$

   là đúng đắn đối với khẳng định đầu $x = 0$ và khẳng định cuối $z = 1$.

2. Hãy kiểm chứng đoạn chương trình :

   **if** $x < 0$ **then** $x := 0$,

   là đúng đắn đối với khẳng định đầu **T** và khẳng định cuối $x \geq 0$.

3. Hãy kiểm chứng đoạn chương trình :

   $x := 2$

   $z := x + y$

   **if** $y > 0$ **then** $z := z + 1$

   **else** $z := 0$

   là đúng đắn đối với khẳng định đầu $y = 3$ và khẳng định cuối $z = 6$.

4. Hãy kiểm chứng đoạn chương trình :

**if** $x < y$ **then** min := $x$
**else**
min := $y$

là đúng đắn đối với khẳng định đầu **T** và khẳng định cuối
$(x \leqslant y \wedge \min = x) \vee (x > y \wedge \min = y)$.

5. Hãy nghĩ ra một quy tắc suy diễn để kiểm chứng tính đúng đắn bộ phận của các câu lệnh dạng :

**if** *điều_kiện_1* **then**
$S_1$
**else if** *điều_kiện_2* **then**
$S_2$
.
.
.
**else**
$S_n$

trong đó $S_1, S_2, \ldots, S_n$ là các khối lệnh.

6. Dùng quy tắc suy diễn đưa ra trong Bài tập 5 kiểm chứng tính đúng đắn của đoạn chương trình

**if** $x < 0$ **then**
$y := -2|x|/x$
**else if** $x > 0$ **then**
$y := 2|x|/x$
**else if** $x = 0$ **then** $y := 2$.

với khẳng định đầu **T** và khẳng định cuối $y = 2$.

7. Dùng bất biến vòng lặp chứng minh đoạn chương trình sau đây tính lũy thừa bậc $n$ với $n$ nguyên dương của một số thực $x$ là đúng đắn :

*power* := 1
$i$ := 1
**while** $i \leqslant n$
**begin**

```
            power := power * x
            i := i + 1
      end
```

**8***. Chứng minh chương trình lặp tính $f_n$ cho trong Tiết 3.4 là đúng đắn.

**9.** Hãy giải trình mọi chi tiết trong chứng minh tính đúng đắn được cho trong Ví dụ 5.

**10.** Giả sử cả mệnh đề kéo theo $p_0 \to p_1$ và khẳng định chương trình $p_1\{S\}q$ là đúng. Chỉ ra rằng $p_0\{S\}q$ cũng đúng.

**11.** Giả sử cả $p\{S\}q_0$ và mệnh đề kéo theo $q_0 \to q_1$ là đúng. Chỉ ra rằng $p\{S\}q_1$ cũng đúng

**12.** Đoạn chương trình sau đây tính thương và số dư :

```
      r := a
      q := 0
      while r ≥ d
      begin
            r := r - d
            q := q + 1
      end
```

Kiểm chứng rằng nó là đúng đắn bộ phận đối với khẳng định đầu "$a$ và $d$ là nguyên dương" và khẳng định cuối "$q$ và $r$ là nguyên sao cho $a = dq + r$ và $0 \leq r < d$".

**13.** Dùng bất biến vòng lặp chứng minh rằng Thuật toán Euclid (Thuật toán 1, trong Tiết 2.4) là đúng đắn bộ phận đối với khẳng định đầu "$a$ và $b$ là nguyên dương "và khẳng định cuối $x$ = ƯCLN$(a, b)$.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

**1.** a) Thế nào là chứng minh trực tiếp, gián tiếp, chứng minh bằng phản chứng của mệnh đề kéo theo $p \to q$.

b) Hãy đưa ra cách chứng minh trực tiếp, gián tiếp, chứng minh bằng phản chứng của mệnh đề "Nếu $n$ chẵn, thì $n + 4$ chẵn".

**2.** a) Hãy mô tả một cách chứng minh mệnh đề $p \leftrightarrow q$.

b) Chứng minh mệnh đề "Số dương $3n + 2$ là lẻ nếu và chỉ nếu số dương $9n + 5$ là chẵn, với $n$ nguyên".

**3.** Nếu ta chỉ ra được các mệnh đề kéo theo $p_4 \to p_2$, $p_3 \to p_1$ và $p_1 \to p_2$ là có cơ sở, thì có thể kết luận rằng các mệnh đề $p_1$, $p_2$, $p_3$ và $p_4$ là tương đương hay không ? Nếu không, hãy đưa ra một tập các mệnh đề kéo theo khác có thể được dùng để chứng minh rằng bốn mệnh đề đã cho là tương đương.

**4.** a) Giả sử mệnh đề dạng $\forall x P(x)$ là sai. Có thể chứng minh điều này bằng cách nào?

b) Chỉ ra rằng mệnh đề "Với mỗi số $n$ nguyên dương, $n^2 + 1$ là số nguyên tố" là sai.

**5.** a) Chứng minh tồn tại kiến thiết và chứng minh tồn tại không kiến thiết có gì khác nhau?

b) Chứng minh với mọi số $n$ nguyên dương tồn tại một số lớn hơn $n$ không chia hết cho 3 hoặc 5. Bạn dùng cách chứng minh tồn tại kiến thiết hay không kiến thiết?

**6.** a) Hãy phát biểu tính được sắp tốt của tập các số nguyên dương.

b) Sử dụng tính chất này chỉ ra rằng mọi số nguyên dương có thể được viết dưới dạng tích của các số nguyên tố.

**7.** a) Có thể dùng quy nạp toán học để tìm công thức tính tổng $n$ số hạng đầu tiên của một dãy hay không?

h) Có thể dùng quy nạp toán học để xác định xem công thức tính tổng $n$ số hạng đầu tiên của một dãy số có đúng hay không?

**8.** a) Bất đẳng thức $11n + 17 \leq 2^n$ đúng với những giá trị nguyên dương nào của $n$?

b) Hãy chứng minh điều phỏng đoán của bạn trong phần a) bằng quy nạp toán học.

**9.** a) Những tổng bưu phí nào có thể tạo được khi chỉ dùng các loại tem 5 xu và 9 xu?

b) Hãy chứng minh điều phỏng đoán của bạn bằng quy nạp toán học.

c) Hãy chứng minh điều phỏng đoán của bạn bằng dạng thứ hai của quy nạp toán học.

d) Tìm cách chứng minh điều phỏng đoán của bạn bằng một cách khác với cách dùng trong phần h) và c).

**10.** Hãy đưa ra 3 ví dụ về cách chứng minh dùng dạng thứ hai của quy nạp toán học.

**11.** a) Hãy giải thích tại sao một hàm được định nghĩa tốt nếu nó được định nghĩa bằng đệ quy, tức là cho $f(1)$ và quy tắc để tìm $f(n)$ từ $f(n - 1)$.

b) Hãy đưa ra một định nghĩa đệ quy của hàm $f(n) = (n + 1)!$

**12.** a) Hãy đưa ra một định nghĩa đệ quy của các số Fibonacci.

b) Chỉ ra rằng $f_n > \alpha^{n-2}$ khi $n \geqslant 3$ trong đó $f_n$ là số hạng thứ $n$ của dãy Fibonacci và $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

**13.** a) Hãy giải thích tại sao dãy $a_n$ được định nghĩa tốt nếu nó được định nghĩa bằng đệ quy khi cho $a_1$ và $a_2$ và cho quy tắc xác định $a_n$ từ $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ với $n = 3, 4, 5, \ldots$

b) Tìm các giá trị của $a_n$ nếu $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ và $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1$ với $n = 3, 4, 5, \ldots$

**14.** Hãy đưa ra hai ví dụ về cách xây dựng bằng đệ quy các công thức được tạo đúng quy tắc từ tập các phần tử khác nhau và các toán tử.

**15.** a) Hãy đưa ra một định nghĩa đệ quy của độ dài của một xâu.

b) Dùng định nghĩa đệ quy từ phần a) chứng minh $l(xy) = l(x) + l(y)$.

**16.** a) Thuật toán đệ quy là gì?

b) Mô tả thuật toán đệ quy tính tổng $n$ số hạng của một dãy.

**17.** Mô tả thuật toán đệ quy tính ƯCLN của hai số nguyên dương.

**18.** a) Khi thử một chương trình máy tính ta thấy được nó tạo ra các kết quả đúng từ các giá trị vào đúng. Điều đó có thể khẳng định là chương trình đã cho luôn cho các kết quả ra đúng không ?

b) Việc chứng tỏ rằng một chương trình máy tính là đúng đắn bộ phận đối với một khẳng định đầu và một khẳng định cuối có chứng tỏ rằng chương trình đó luôn luôn cho đầu ra đúng không? Nếu không thì còn cần điều kiện gì nữa ?

**19.** Kỹ thuật nào bạn có thể dùng để chỉ ra rằng chương trình rất dài là đúng đắn bộ phận đối với các khẳng định đầu và khẳng định cuối nào đó?

**20.** Bất biến vòng lặp là gì? Nó được dùng như thế nào?

## BÀI TẬP BỔ SUNG

1. Chứng minh rằng tích của hai số lẻ là một số lẻ.

2. Chứng minh $\sqrt{5}$ là số vô tỷ.

3. Chứng minh hay phản bác rằng tổng của hai số vô tỷ là vô tỷ.

4. Chứng minh hay bác bỏ rằng $n^2 + n + 1$ là nguyên tố với mọi $n$ là số nguyên dương..

5. Hãy xác định xem lý lẽ sau đây là có cơ sở không. Nếu $n$ lớn hơn 5 thì $n^2$ lớn hơn 25. Do đó $n$ là số nguyên với $n^2$ lớn hơn 25 sẽ suy ra $n > 5$.

6. Chứng minh rằng $n^4 - 1$ chia hết cho 5 khi $n$ không chia hết cho 5. Dùng cách chứng minh từng trường hợp, với 4 trường hợp khác nhau tùy theo số dư của phép chia $n$ cho 5.

7. Chứng minh $|xy| = |x||y|$ bằng cách chứng minh từng trường hợp.

8*. Chúng ta định nghĩa các **số Ulam** bằng cách đặt $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Sau khi xác định được các số Ulam nhỏ hơn $n$, ta sẽ đặt $n$ bằng số Ulam tiếp theo nếu nó có thể biểu diễn duy nhất thành tổng của hai số Ulam khác nhau. Ví dụ, $u_3 = 3$, $u_4 = 4$, $u_5 = 6$ và $u_6 = 8$.

   a) Tìm 20 số Ulam đầu tiên.

   b) Chứng minh có vô hạn số Ulam.

9. Hãy đưa ra cách chứng minh kiến thiết rằng có một đa thức $P(x)$ sao cho $P(x_1) = y_1$, $P(x_2) = y_2$, ..., $P(x_n) = y_n$, trong đó $x_1, x_2, ..., x_n$ và $y_1, y_2, ..., y_n$ là các số thực.

   *(Gợi ý :* Cho $P(x) = \sum_{i=1}^{n} \left( \prod_{i \neq j} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) . y_i$ ).

10. Chỉ ra rằng
$$1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n + 1)^3 = (n + 1)^2 (2n^2 + 4n + 1)$$
với mọi $n$ nguyên dương.

11. Chứng tỏ rằng $1.2^0 + 2.2^1 + 3.2^2 + ... + n.2^{n-1} = (n - 1).2^n + 1$, với $n$ nguyên dương.

12. Chỉ ra rằng
$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + ... + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1},$$
với mọi $n$ nguyên dương.

**13.** Chỉ ra rằng

$$\frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1},$$

với mọi $n$ nguyên dương.

**14.** Dùng quy nạp toán học chứng minh $2^n > n^2 + n$, với mọi $n$ nguyên dương lớn hơn 4.

**15.** Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng $2^n > n^3$, với mọi $n$ nguyên dương lớn hơn 9.

**16.** Tìm số nguyên $N$ sao cho $2^n > n^4$, với mọi $n$ nguyên dương lớn hơn $N$. Dùng quy nạp chứng minh kết quả của hạn là đúng.

**17.** Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng $a - b$ là một nhân tử của $a^n - b^n$, với mọi $n$ nguyên dương.

**18.** Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ chia hết cho 9, với mọi $n$ nguyên không âm.

**19.** Dùng quy nạp toán học chứng minh tổng $(n + 1)$ số hạng đầu tiên của một cấp số cộng là

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (a + nd) = \frac{(n+1)(2a+nd)}{2}$$

trong đó $a$ và $d$ là số thực.

**20.** Giả sử $a_j \equiv b_j \pmod{m}$ với $j = 1, 2, 3, \ldots m$. Chứng minh bằng quy nạp toán học rằng :

a) $\sum_{j=1}^{n} a_j \equiv \sum_{j=1}^{n} b_j \pmod{m}$

h) $\prod_{j=1}^{n} a_j \equiv \prod_{j=1}^{n} b_j \pmod{m}$

**21*.** Hãy xác định các số Fibonacci chẵn và dùng qui nạp chứng minh điều phỏng đoán của bạn.

**22*.** Hãy xác định số các Fibonacci chia hết cho 3 và dùng quy nạp chứng minh điều phỏng đoán của hạn.

**23*.** Chứng minh rằng $f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} = f_{n+k+1}$, với mọi số nguyên không âm $n$, trong đó $k$ là số nguyên không âm còn $f_i$ là số hạng thứ $i$ của dãy Fibonacci.

**Dãy Lucas** *được xác định như sau :* $l_0 = 2$, $l_1 = 1$ *và* $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ *với* $n = 2, 3, 4, \ldots$

**24.** Chỉ ra rằng $f_n + f_{n+2} = l_{n+1}$ với mọi số nguyên không âm $n$, trong đó $f_i$ và $l_i$ là các số Fibonacci và số Lucas thứ $i$.

**25.** Chỉ ra rằng :

$l_0^2 + l_1^2 + \ldots + l_n^2 = l_n . l_{n+1} + 2$ mọi $n$ nguyên không âm và $l_i$ là số Lucas thứ $i$.

**26*.** Dùng quy nạp toán học chỉ ra rằng tích của $n$ số nguyên dương liên tiếp chia hết cho $n!$ (*Gợi ý* : Sử dụng hằng đẳng thức

$$\frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} =$$

$$= \frac{(m-1)m(m+1)\ldots(m+n-2)}{n!} + \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{(n-1)!} \text{ ).}$$

**27.** Dùng quy nạp toán học chỉ ra rằng $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, với mọi $n$ nguyên dương. (*Gợi ý* : Dùng các hằng đẳng thức

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$, và

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ .

**28*.** Dùng quy nạp toán học chỉ ra rằng

$$\sum_{j=1}^{n} \cos jx = \cos\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2} \sin\frac{x}{2}$$

với mọi $n$ nguyên dương và $\sin\frac{x}{2} \neq 0$.

**Hàm McCarthy 91** *được định nghĩa theo quy tắc sau :*

$$M(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{khi } n > 100 \\ M(M(n + 11)) & \text{khi } n \leq 100 \end{cases}$$

*với mọi n nguyên dương.*

**29.** Bằng cách dùng liên tiếp quy tắc định nghĩa $M(n)$, tìm

a) $M(102)$ h) $M(101)$

c) $M$ (99) d) $M(97)$

e) $M(87)$ f) $M(76)$.

**30****. Chỉ ra rằng $M(n)$ là hàm được định nghĩa tốt từ tập các số nguyên dương sang tập các số nguyên dương.
(*Gợi ý* : Chứng minh rằng $M(n) = 91$ đối với mọi $n$ nguyên dương và không lớn hơn 101).

**31.** Cách chứng minh như dưới đây đẳng thức :
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$$
với mọi $n$ nguyên dương, có đúng không? Vì sao?
BƯỚC CƠ SỞ. Đẳng thức là đúng với $n = 1$ vì
$$\frac{1}{1.2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{1}.$$
BƯỚC QUY NẠP. Giả sử đẳng thức đúng với $n$. Khi đó
$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}$$
Vì thế kết quả là đúng với $n + 1$ nếu nó đúng với $n$. Đẳng thức trên được chứng minh.

**32*.** Một bộ trò chơi xếp hình được lắp vào với nhau bằng cách nối liên tiếp các chi tiết phù hợp vào một khối. Mỗi bước đi được thực hiện mỗi lần khi một chi tiết được thêm vào khối hay khi hai chi tiết được nối với nhau. Hãy dùng dạng thứ hai của quy nạp toán học chứng minh rằng: để lắp ráp được bộ đồ chơi xếp hình có $n$ chi tiết cần đúng $n - 1$ bước đi, không quan tâm tới việc mỗi bước đi được thực hiện như thế nào.

**33*.** Chỉ ra rằng $n$ đường tròn chia mặt phẳng thành $n^2 - n + 2$ miền nếu mọi cặp đường tròn cắt nhau tại đúng hai điểm và không có 3 đường tròn nào chứa một điểm chung.

**34*.** Chỉ ra rằng $n$ mặt phẳng chia không gian 3 chiều thành $(n^3 + 5n + 6)/6$ miền nếu mọi bộ 3 mặt phẳng nào cũng có một điểm chung và không có 4 mặt phẳng chứa một điểm chung.

**35*.** Dùng tính chất được sắp tốt, chỉ ra rằng $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ.
(*Gợi ý* : Giả sử $\sqrt{2}$ là hữu tỷ. Chỉ ra rằng tập các số dương có dạng $b\sqrt{2}$ có một phần tử $a$ nhỏ nhất. Sau đó chỉ ra rằng $a\sqrt{2} - a$ là số dương nhỏ hơn có dạng này).

**36.** Một tập là được **sắp tốt** nếu mọi tập con không rỗng của nó có một phần tử bé nhất. Hãy xác định xem mỗi một trong các tập sau đây có là tập được sắp tốt không?

a) tập các số nguyên

b) tập các số nguyên lớn hơn - 100

c) tập các số hữu tỷ dương

d) tập các số hữu tỷ dương với mẫu số nhỏ hơn 100.

**37*.** Chỉ ra rằng có thể chứng minh tính được sắp tốt khi nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học được dùng như một tiên đề.

**38*.** Chỉ ra rằng nguyên lý thứ nhất và thứ hai của quy nạp toán học là tương đương, tức là có thể chỉ ra mỗi nguyên lý là có cơ sở từ nguyên lý kia.

**39.** a) Chỉ ra rằng nếu $a_1$, $a_2$, ... $a_n$ là các số nguyên dương thì

$$\text{ƯCLN}(a_1, a_2,..., a_n) = \text{ƯCLN}(a_1, a_2, ..., a_{n-2}, \text{ƯCLN}(a_{n-1}, a_n)).$$

b) Dùng phần a) cùng với thuật toán Euclid hãy viết một thuật toán đệ quy tính ƯCLN của $n$ số nguyên dương.

**40*.** Hãy mô tả thuật toán đệ quy để viết ƯCLN của $n$ số nguyên dương như một tổ hợp tuyến tính của $n$ số nguyên này.

**41.** Hãy tìm dạng hiển của công thức cho $f(n)$ nếu $f(1) = 1$ và $f(n) = f(n - 1) + 2n - 1$ với $n \geqslant 2$. Chứng minh kết quả của bạn bằng qui nạp toán học.

**42**.** Cho định nghĩa đệ quy của tập các xâu chứa các bit 0 hai lần nhiều hơn bit 1.

**43.** Cho $S$ là tập các xâu nhị phân xác định theo đệ quy: $\lambda \in S$ và $0x \in S$, $x1 \in S$ nếu $x \in S$, trong đó $\lambda$ là xâu rỗng.

a) Tìm tất cả các xâu của $S$ có độ dài không vượt quá 5.

b) Cho mô tả dưới dạng hiển các phần tử của $S$.

**44.** Cho $S$ là tập các xâu được xác định bằng đệ quy, $abc \in S$, $bac \in S$, $acb \in S$ và $abcx \in S$; $axbc \in S$, $xabc \in S$ nếu $x \in S$.

a) Tìm tất cả các phần tử của $S$ có độ dài không lớn hơn 8.

b) Chỉ ra rằng mỗi phần tử của $S$ có độ dài chia hết cho 3.

*Giả sử B là tập các* **xâu có dấu ngoặc cân bằng** được định nghĩa đệ quy như sau : $\lambda \in B$, trong đó $\lambda$ là xâu rỗng, $(x) \in B$, $xy \in B$ nếu $x, y \in B$.

**45.** Hãy tìm các xâu dấu ngoặc cân bằng với bốn hoặc ít hơn các ký hiệu.

**46.** Sử dụng qui nạp chỉ ra rằng nếu $x$ là xâu dấu ngoặc cân bằng thì số các dấu ngoặc trái trong $x$ bằng số các dấu ngoặc phải.

*Định nghỉa hàm N trên tập các xâu có dấu ngoặc bằng cách sau :*

$$N\Big(\lambda\Big) = 0, \qquad N\Big(\,(\,\Big) = 1, \qquad N\Big(\,)\,\Big) - 1\ ;$$

$$N\Big(uv\Big) = N\Big(u\Big) + N\Big(v\Big),$$

*trong đó $\lambda$ là xâu rỗng, $u$, $v$ là các xâu. Có thể chỉ ra rằng $N$ là hàm được xác định tốt.*

**47.** Tìm

a) $N\Big(()\Big)$ b) $N\Big()))())((\Big)$

c) $N\Big((()(()\Big)$ d) $N\Big(()((()))(())\Big)$.

**48**.** Chỉ ra rằng xâu $w$ gồm các dấu ngoặc là cân bằng nếu và chỉ nếu $N(w) = 0$ và $N(u) \geqslant 0$ với mọi $u$ là tiền tố của $w$ tức là $w = uv$.

**49*.** Cho thuật toán đệ quy để tìm tất cả các xâu có dấu ngoặc cân bằng chứa $n$ hoặc ít hơn ký hiệu.

**50.** Hãy cho thuật toán đệ quy tìm ƯCLN của hai số nguyên không âm $a$ và $b$ với $a \leqslant b$, dựa trên các tính chất sau : ƯCLN$(a, b) = a$ nếu $a = b$, ƯCLN$(a, b) = 2$ƯCLN$\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ nếu $a$ và $b$ là chẵn, ƯCLN$(a, b) =$ ƯCLN$\left(\frac{a}{2}, b\right)$ nếu $a$ là chẵn và $b$ là lẻ và ƯCLN$(a, b)$ $=$ ƯCLN$(b - a, b)$ nếu $a$ và $b$ đều lẻ.

**51.** Hãy kiểm chứng đoạn chương trình

**if** $x > y$ **then**

$x := y$

với khẳng định đầu **T** và khẳng định cuối $x \leqslant y$.

**52.** Hãy soạn một quy tắc suy luận để kiểm chứng một chương trình đệ quy và sử dụng nó để kiểm chứng chương trình đệ quy tính giai thừa cho trong Tiết 3.4.

## *BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH*

***Viết các chương trình với các input và output sau :***

**1.** Cho cấp số nhân $a, ar, ar^2, ..., ar^n$ tìm tổng các số hạng của nó.

**2.** Cho số nguyên không âm $n$, hãy tìm tổng $n$ số nguyên dương nhỏ nhất.

**3**.** Cho một bàn cờ $2^n \times 2^n$ bị khuyết một ô, hãy đưa ra một cách lát bàn cờ này bằng những miếng hình chữ L.

**4**.** Hãy sinh ra tất cả các công thức được tạo đúng quy tắc, chứa các biến $x, y, z$ và các toán tử $\{+, *, /, -\}$ với $n$ hoặc ít hơn các ký hiệu.

**5**.** Hãy sinh ra tất cả các biểu thức mệnh đề được tạo đúng quy tắc, chứa $n$ hoặc ít hơn các ký hiệu trong đó mỗi ký hiệu là **T**, **F**, một trong các biến mệnh đề $p$ và $q$ hoặc một toán tử trong số $\{\neg, \wedge, \vee, \leftrightarrow, \rightarrow\}$.

**6.** Cho một xâu, tìm xâu nghịch đảo của nó.

**7.** Cho số thực $a$ và số nguyên dương $n$, hãy tìm $a^n$ bằng đệ quy.

**8.** Cho số thực $a$ và số nguyên dương $n$, hãy tìm $a^{2^n}$ bằng đệ quy.

**9*.** Cho số thực $a$ và số nguyên dương $n$, hãy tìm $a^n$ bằng cách biểu diễn nhị phân của $n$ và thuật toán đệ quy để tính $a^{2^k}$.

**10.** Cho hai số nguyên không đồng thời bằng không, hãy tìm ƯCLN bằng thuật toán đệ quy.

**11.** Cho một danh sách các số nguyên và một phần tử $x$, hãy định vị $x$ trong danh sách này, bằng cách thực hiện đệ quy tìm kiếm tuyến tính.

**12.** Cho một danh sách các số nguyên và một phần tử $x$, hãy định vị $x$ trong danh sách này, bằng cách thực hiện đệ quy tìm kiếm nhị phân.

**13.** Cho một số nguyên không âm $n$, hãy tìm số Fibonacci thứ $n$ bằng phương pháp lặp.

**14.** Cho một số nguyên không âm $n$, hãy tìm số Fibonacci thứ $n$ bằng phương pháp đệ quy.

**15.** Cho một số nguyên dương, hãy tìm số cách phân hoạch của số nguyên này (Xem Bài tập 35 của Tiết 3.3).

**16.** Cho các số dương $m$ và $n$, hãy tìm $A(m, n)$, giá trị của hàm Ackermann tại cặp số $(m, n)$. (Xem lời nói đầu trước Bài số 36, Tiết 3.3).

## *TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ*

***Dùng các chương trình bạn đã viết để làm các bài tập sau :***

**1.** Kiểm chứng phỏng đoán Goldbach nói rằng mọi số nguyên dương chẵn $n$ là tổng của hai số nguyên tố, với $n \leq 10\ 000$.

**2.** Tìm thừa số nguyên tố nhỏ nhất của $n! + 1$ với mọi $n$ nguyên dương không lớn hơn 20.

**3.** Tìm tập nhỏ nhất của $n$ hợp số liên tiếp với mỗi số dương $n$ sao cho $n \leq 10$.

**4.** Một phỏng đoán chưa chứng minh được nói rằng có vô hạn số nguyên tố sinh đôi, tức là các số nguyên tố sai khác nhau 2 đơn vị. Bạn có thể tìm được bao nhiêu số nguyên tố sinh đôi?

**5.** Hãy tìm các số Fibonacci chia hết cho 5, cho 7, cho 11. Chứng minh phỏng đoán của bạn là đúng.

**6.** Tìm cách phủ các bàn cờ có kích thước $16 \times 16$, $32 \times 32$ và $64 \times 64$ khuyết một ô, bằng các miếng lát hình chữ L.

**7.** Hãy khảo sát xem bàn cờ $m \times n$ nào có thể phủ hoàn toàn bằng miếng lát hình chữ L. Bạn có thể đưa ra phỏng đoán rồi chứng minh.

**8.** Giả tbuyết $3x + 1$ nổi tiếng (*Giả thuyết Collatz*) phát biểu như sau : Dù bạn xuất phát từ giá trị nguyên $x$ nào, khi tính lặp giá trị của $f(x)$, trong đó $f(x) = \frac{x}{2}$ nếu $x$ chẵn và $f(x) = 3x + 1$ nếu $x$ lẻ, thì ta luôn nhận được số nguyên 1. Hãy kiểm chứng giả thuyết đó với các số nguyên nhiều nbất có thể được.

**9.** Giá trị nào của hàm Akermann là đủ nhỏ để bạn có thể tính được?

**10.** Hãy so sánh hoặc là số các phép toán hoặc là thời gian cần thiết để tính các số Fibonacci bằng đệ quy và bằng phương pháp lặp.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau***

1. Mô tả nguồn gốc của qui nạp toán học. Những ai đã sử dụng nó trước tiện và đã áp dụng vào các bài toán nào?

2. Trong thời gian gần đây có một số định lý quan trọng đã được chứng minh dựa trên sự tính toán rất nhanh của máy tính. Nói gì về cơ sở của các chứng minh như thế và kể lại những cuộc bàn cãi xung quanh cách chứng minh bằng tính toán trên máy.

3. Lập trình logic thao tác trên các mệnh đề có dùng các lượng từ, các vị ngữ, các liên từ logic và dùng các quy tắc suy diễn. Hãy giải thích các khái niệm cơ bản của lập trình logic và cách sử dụng nó trong lĩnh vực trí tuệ nhân tạo. Minh họa sự ứng dụng này bằng ngôn ngữ PROLOG.

4. "Chứng minh tự động các định lý" là nhiệm vụ dùng máy tính chứng minh định lý. Hãy thảo luận mục đích và các ứng dụng chứng minh tự động các định lý và sự tiến bộ đã đạt được trong lĩnh vực này.

5. Mô tả quy tắc cơ sở của WFF'N PROOF – Trò chơi logic hiện đại – do Layman Allen đưa ra. Hãy cho một ví dụ về một trò chơi trong WFF'N PROOF.

6. Các miếng lát hình chữ L dùng trong các Bài tập của Tiết 3.2 là những ví dụ về các polymino do Golomb đưa ra năm 1954. Mô tả một vài bài toán và các kết quả liên quan tới bài toán lát bàn cờ bằng các poly mino.

7. Hãy bình luận về việc dùng các hàm Ackermann trong lý thuyết định nghĩa đệ quy và trong phân tích độ phức tạp của thuật toán cho hợp các tập hợp.

8. Mô tả một vài bài toán logic tìm thấy trong tác phẩm của Lewis Carroll và chỉ ra quy tắc suy diễn nào được dùng để giải các bài toán này.

9. Hãy bình luận một vài phương pháp luận dùng để chứng minh tính đúng đắn của chương trình và so sánh chúng với các phương pháp Hoare được mô tả trong Tiết 3.

10. Hãy giải thích có thể mở rộng ý tưởng và khái niệm tính đúng đắn của chương trình để chứng minh rằng các hệ điều hành là an toàn.

CHƯƠNG 4

# ĐẾM CÁC PHẦN TỬ

Lý thuyết tổ hợp là một phần quan trọng của toán học rời rạc chuyên nghiên cứu sự sắp xếp các đối tượng. Chủ đề này đã được nghiên cứu từ thế kỷ 17, khi những câu hỏi về tổ hợp được nêu ra trong những công trình nghiên cứu các trò chơi may rủi. Liệt kê, đếm các đối tượng có những tính chất nào đó là một phần quan trọng của lý thuyết tổ hợp. Chúng ta cần phải đếm các đối tượng để giải nhiều bài toán khác nhau. Hơn nữa các kỹ thuật đếm được dùng rất nhiều khi tính xác suất của các biến cố.

Những quy tắc đếm cơ sở mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong Tiết 4.1 có thể giải được rất nhiều dạng bài toán khác nhau. Ví dụ, chúng ta có thể dùng các quy tắc này để tính tất cả các số điện thoại có thể có trên toàn nước Mỹ, số mật khẩu cho phép truy nhập hệ máy tính, liệt kê các thứ tự về đích khác nhau của các vận động viên có thể xảy ra trong cuộc chạy thi. Một công cụ tổ hợp quan trọng khác là nguyên lý lồng chim bồ câu (nguyên lý Dirichlet), sẽ được nghiên cứu trong Tiết 4.2. Nguyên lý đó nói rằng, khi ta bỏ các đối tượng vào nhiều hộp mà số các đối tượng nhiều hơn số hộp, thì ít nhất có một hộp chứa không ít hơn hai đối tượng. Ví dụ, ta có thể áp dụng nguyên lý này để chỉ ra rằng trong một lớp có nhiều hơn hay bằng 15 sinh viên thì ít nhất có ba người được sinh vào cùng một ngày trong tuần.

Chúng ta có thể diễn đạt nhiều bài toán dưới dạng sắp xếp, có kể tới thứ tự hoặc không, các đối tượng của một tập hợp. Những sắp xếp này được gọi là các hoán vị và các tổ hợp được sử dụng trong nhiều bài toán đếm. Ví dụ, trong một kỳ thi tuyển có 2000 sinh viên tham gia, người ta dự định mời 100 người đạt điểm cao nhất dự một bữa tiệc. Chúng ta có thể liệt kê tất cả các tập hợp 100 sinh viên có thể được mời dự tiệc hoặc cũng như vậy có thể liệt kê các cách trao 10 giải cho 10 người đạt điểm cao nhất.

Chúng ta có thể phân tích các trò chơi may rủi, như bài xì (poker) khi dùng các kỹ thuật đếm. Chúng ta cũng có thể sử dụng chúng để tính xác suất trúng sổ số, chẳng hạn như xác suất trúng giải của một người chơi nếu anh ta chọn đúng cả 6 số trong 48 số nguyên dương.

Một bài toán khác trong lý thuyết tổ hợp là việc tạo ra các cách sắp xếp theo một kiểu nào đó. Vấn đề này rất quan trọng trong các mô phỏng máy tính. Chúng ta cũng sẽ đưa ra những thuật toán tạo các cách sắp xếp theo nhiều kiểu khác nhau.

## 4.1 CƠ SỞ CỦA PHÉP ĐẾM

### MỞ ĐẦU

Mật khẩu vào một hệ máy tính gồm sáu, bẩy hoặc tám ký tự. Mỗi ký tự có thể là một chữ số hay một chữ cái. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu như vậy? Trong tiết này chúng ta sẽ trả lời câu hỏi đó cũng như sẽ nghiên cứu các phương pháp giải một lớp rất rộng các bài toán về việc đếm các phần tử.

Bài toán đếm các phần tử xuất hiện khắp nơi trong toán học cũng như trong tin học. Ví dụ, chúng ta cần đếm số những cuộc thí nghiệm có kết quả tốt và toàn bộ những cuộc thí nghiệm có thể để xác định xác suất của các biến cố rời rạc. Chúng ta cần tính số các phép toán phải làm trong một thuật toán để nghiên cứu độ phức tạp của nó.

Trong tiết này chúng ta sẽ trình bày các phương pháp đếm cơ bản, chúng là nền tảng cho hầu như tất cả các phương pháp khác.

### NHỮNG NGUYÊN LÝ ĐẾM CƠ BẢN

Chúng ta sẽ giới thiệu hai nguyên lý đếm cơ bản. Sau đó sẽ nói rõ việc sử dụng chúng như thế nào để giải các bài toán đếm khác nhau.

*QUY TẮC CỘNG*. Giả sử có hai công việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng $n_1$ cách, việc thứ hai có thể làm bằng $n_2$ cách và nếu hai việc này không thể làm đồng thời, khi đó sẽ có $n_1 + n_2$ cách làm một trong hai việc đó.

Các ví dụ dưới đây minh họa việc sử dụng quy tắc cộng như thế nào.

**Ví dụ 1.** Giả sử cần chọn hoặc là một cán bộ của khoa toán hoặc là một sinh viên toán làm đại hiểu trong hội đồng của một trường đại học. Hỏi có bao nhiêu cách chọn vị đại biểu này nếu khoa toán có 37 cán bộ và 83 sinh viên?

*Giải*: Ta gọi việc thứ nhất là việc chọn một cán hộ của khoa toán. Nó có thể làm bằng 37 cách. Việc thứ hai, chọn một sinh viên toán, có thể làm bằng 83 cách. Theo quy tắc cộng có $37 + 83 = 120$ cách chọn vị đại diện này.

Chúng ta sẽ mở rộng quy tắc cộng cho trường hợp có nhiều hơn hai công việc. Giả sử các việc $T_1, T_2, \ldots, T_m$ có thể làm tương ứng bằng $n_1, n_2, \ldots, n_m$ cách và giả sử không có hai việc nào có thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong $m$ việc đó là $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$. Quy tắc cộng mở rộng này thường được dùng trong các bài toán đếm, như trong các Ví dụ 2 và 3. Quy tắc cộng mở rộng có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc cộng cho hai tập hợp. (Bài tập 49 ở cuối tiết này).

■

**Ví dụ 2.** Một sinh viên có thể chọn bài thực hành máy tính từ một trong ba danh sách tương ứng có 23, 15 và 19 bài. Có hao nhiêu cách chọn hài thực hành?

*Giải:* Có 23 cách chọn bài thực hành từ danh sách thứ nhất, 15 cách từ danh sách thứ hai và 19 cách từ danh sách thứ ba. Vì vậy có $23 + 15 + 19 = 57$ cách chọn bài thực hành.

■

**Ví dụ 3.** Giá trị của biến $k$ bằng bao nhiêu sau khi đoạn chương trình sau được thực hiện ?

---

$k = 0$

**for** $i_1 := 1$ **to** $n_1$

```
    k := k + 1
for i2 := 1 to n2
    k := k + 1
      .
      .
      .
for im := 1 to nm
    k := k + 1
```

---

*Giải*: Giá trị khởi tạo của $k$ bằng không. Khối lệnh này gồm $m$ vòng lặp khác nhau. Sau mỗi bước lặp của từng vòng lặp giá trị của $k$ được tăng lên một đơn vị. Gọi $T_i$ là việc thi hành vòng lặp thứ $i$. Có thể làm $T_i$ bằng $n_i$ cách vì vòng lặp thứ $i$ có $n_i$ bước lặp. Do các vòng lặp không thể thực hiện đồng thời nên theo quy tắc cộng, giá trị cuối cùng của $k$ bằng số cách thực hiện một trong số các nhiệm vụ $T_i$ ($i = 1, 2, ..., m$), tức là $k = n_1 + n_2 + ... + n_m$.

■

Quy tắc cộng có thể phát biểu dưới dạng của ngôn ngữ tập hợp như sau: Nếu $A_1, A_2, ..., A_m$ là các tập rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần. Giả sử $T_i$ là việc chọn một phần tử từ tập $A_i$ với $i = 1, 2, ... m$. Có $|A_i|$ cách làm $T_i$ và không có hai việc nào có thể được làm cùng một lúc. Số cách chọn một phần tử của hợp các tập hợp này, một mặt bằng số phần tử của nó mặt khác theo quy tắc cộng nó bằng $|A_1| + |A_2| + ... + |A_m|$. Cuối cùng chúng ta nhận được đẳng thức :

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_m|$$

Đẳng thức này đúng chỉ khi các tập hợp thành phần là rời nhau. Tình hình sẽ phức tạp hơn nhiều khi các tập hợp có phần tử chung. Vấn đề này lát nữa sẽ được bàn qua một chút và sẽ bàn kỹ hơn trong Chương 5.

**QUY TẮC NHÂN.** *Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra làm hai việc. Việc thứ nhất có thể làm bằng $n_1$ cách, việc thứ hai có thể làm bằng $n_2$ cách sau khi việc thứ nhất đã được làm, khi đó sẽ có $n_1 n_2$ cách thực hiện nhiệm vụ này.*

Các ví dụ dưới đây sẽ minh họa việc sử dụng quy tắc nhân như thế nào.

**Ví dụ 4.** Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?

*Giải:* Thủ tục ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên dương. Quy tắc nhân chỉ ra rằng có 26.100 = 2600 cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế. Như vậy nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế.

■

**Ví dụ 5.** Trong một trung tâm máy tính có 32 chiếc máy vi tính. Mỗi máy có 24 cổng. Hỏi có bao nhiêu cổng khác nhau trong trung tâm này?

*Giải:* Thủ tục chọn cổng gồm hai việc, việc chọn máy và sau đó chọn cổng của chiếc máy này. Vì có 32 cách chọn máy và 24 cách chọn cổng bất kể máy nào đã được chọn. Quy tắc nhân cho thấy có 32.24 = 768 cổng.

■

Người ta thường sử dụng quy tắc nhân mở rộng. Giả sử rằng một nhiệm vụ nào đó được thi hành bằng cách thực hiện các việc $T_1$, $T_2$, ..., $T_m$. Nếu việc $T_i$ có thể lậm bằng $n_i$ cách sau khi các việc $T_1$, $T_2$, ... $T_{i-1}$ đã được làm, khi đó có $n_1$, $n_2$ ... $n_m$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho. Quy tắc nhân mở rộng này có thể chứng minh bằng quy nạp toán học từ quy tắc nhân cho hai công việc. (Xem Bài tập 50 ở cuối chương).

**Ví dụ 6.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 7?

*Giải:* Mỗi một trong 7 bit của xâu nhị phân có thể chọn bằng hai cách vì mỗi hit hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Bởi vậy, quy tắc tích cho thấy có tổng cộng $2^7$ = 128 xâu nhị phân khác nhau có độ dài bằng 7.

■

**Ví dụ 7.** Có nhiều nhất bao nhiêu biển đăng kí xe ô tô nếu mỗi biển chứa một dãy ba chữ cái tiếp sau là ba chữ số (không bỏ dãy chữ nào ngay cả khi nó có ý nghĩa không đẹp).

*Giải:* Có tất cả 26 cách chọn cho mỗi một trong ba chữ cái và 10 cách chọn cho mỗi chữ số. Vì thế theo quy tắc nhân, nhiều nhất có 26.26.26.10.10.10 = 17 576 000 biển đăng ký xe.

■

**Ví dụ 8.** *Đếm hàm.* Có thể tạo được bao nhiêu hàm số từ một tập $A$ có $m$ phần tử sang một tập $B$ có $n$ phần tử.

*Giải.* Theo định nghĩa, một hàm số xác định trên $A$ có giá trị trên $B$ là một phép tương ứng mỗi phần tử của $A$ với một phần tử nào đó của $B$. Rõ ràng sau khi đã chọn được ảnh của $i - 1$ phần tử đầu, để chọn ảnh của phần tử thứ $i$ của $A$ ta có $n$ cách. Vì vậy theo quy tắc nhân ta có $n.n...n = n^m$ hàm số xác định trên $A$ nhận giá trị trên $B$.

■

**Ví dụ 9.** *Đếm số hàm đơn ánh.* Có bao nhiêu hàm đơn ánh xác định trên tập $A$ có $m$ phần tử và nhận giá trị trên tập $B$ có $n$ phần tử?

*Giải:* Trước tiên chúng ta thấy rằng nếu $m > n$ thì với mọi hàm, ít nhất có hai phần tử của $A$ có cùng một ảnh, điều đó có nghĩa là không có hàm đơn ánh từ $A$ sang $B$. Bây giờ giả sử $m \leq n$, và gọi các phần tử của $A$ là $a_1, a_2, ..., a_m$. rõ ràng có $n$ cách chọn ảnh cho phần tử $a_1$. Vì hàm là đơn ánh nên ảnh của phần tử $a_2$ phải khác ảnh của $a_1$ nên chỉ có $n - 1$ cách chọn ảnh cho phần tử $a_2$ (không được dùng lại phần tử của $B$ đã được chọn làm ảnh của $a_1$). Nói chung, để chọn ảnh của $a_k$ ta có $n - k + 1$ cách. Theo quy tắc nhân có $n(n - 1)(n - 2) ... (n - m + 1)$ hàm đơn ánh từ tập $A$ sang tập $B$.

■

**Ví dụ 10.** *Dự án đánh số điện thoại.* Dạng của số điện thoại ở bắc Mỹ được quy định như sau trong *dự án đánh số.* Số điện thoại gồm mười chữ số được tách ra thành một nhóm mã vùng gồm 3 chữ số, nhóm mã chi nhánh gồm 3 chữ số và nhóm mã máy 4 chữ số. Vì những nguyên nhân kỹ thuật nên có một số hạn chế đối với một số chữ số đó. Để xác định dạng cho phép, giả sử $X$ biểu thị chữ số có thể nhận các giá trị từ 0 tới 9, $N$ là chữ số có thể nhận giá trị từ 2 tới 9 và $Y$ là các chữ số có thể nhận giá trị hoặc 0 hoặc 1. Hai dự án đánh số mà ta sẽ gọi là dự án cũ và dự án mới sẽ được thảo luận. (Dự án cũ được dùng từ những năm 1960, dự án mới cuối cùng sẽ được dùng ở Bắc Mỹ). Như sẽ chỉ ra dưới đây dự án mới cho phép sử dụng được nhiều số hơn..

Trong dự án cũ, dạng của mã vùng, mã chi nhánh và mã máy tương ứng là *NYX, NNX* và *XXXX*, còn theo dự án mới là *NXX, NXX*, và *XXXX.* Hỏi theo dự án cũ và theo dự án mới có bao nhiêu số điện thoại khác nhau ở Bắc Mỹ?

*Giải:* Theo quy tắc nhân ta có 8.2.10 = 160 mã vùng với dạng *NYX* và 8.10.10 = 800 mã vùng với dạng *NXX*. Tương tự có 8.8.10 = 640 mã chi nhánh đối với dạng *NNX* và 8.10.10 = 800 với dạng *NXX* và cuối cùng có 10.10.10.10 = 10000 mã máy với dạng *XXXX*. Áp dụng quy tắc nhân một lần nữa ta nhận được số các số điện thoại có thể theo dự án cũ ở Bắc Mỹ là

$$160.640.10000 = 1\ 024\ 000\ 000$$

còn theo dự án mới thì con số đó là :

$$800.800.10\ 000 = 6\ 400\ 000\ 000$$

■

**Ví dụ 11.** Giá trị của biến $k$ bằng bao nhiêu sau khi chương trình sau được thực hiện ?

```
k = 0
for i1 : = 1 to n1
    for i2 : = 1 to n2
        .
        .
        .
    for im : = 1 to nm
        k : = k + 1
```

*Giải:* Giá trị khởi tạo của $k$ bằng không. Mỗi lần vòng lặp lồng nhau đi qua giá trị của $k$ được tăng lên một đơn vị. Gọi $T_i$ là việc thi hành vòng lặp thứ $i$. Khi đó số lần đi qua vòng lặp bằng số cách làm các việc $T_1$, $T_2$, ..., $T_m$. Số cách thực hiện việc $T_j$ là $n_j$ ($j$ = 1, 2, ..., $m$), vì vòng lặp thứ $j$ được duyệt với mỗi giá trị nguyên $i_j$ nằm giữa 1 và $n_j$. Theo quy tắc nhân suy ra rằng vòng lặp kép được duyệt qua $n_1.n_2 \ldots n_m$ lần. Vì vậy giá trị cuối cùng của $k$ là $n_1n_2 \ldots n_m$.

■

**Ví dụ 12.** *Đếm số tập con của một tập hữu hạn.* Dùng quy tắc nhân hãy chỉ ra rằng số tập con khác nhau của một tập $S$ hữu hạn phần tử là $2^{|S|}$.

*Giải:* Cho $S$ là một tập hữu hạn. Ta liệt kê các phần tử của $S$ theo một thứ tự nào đó. Giữa các tập con của $S$ và các dãy nhị phân có độ dài

$|S|$ có sự tương ứng một – một. Cụ thể là, một tập con của $S$ được gán với dãy nhị phân có số 1 ở vị trí thứ $i$ nếu phần tử thứ $i$ trong danh sách thuộc tập con này, và là số 0 trong trường hợp ngược lại. Theo quy tắc nhân có $2^{|S|}$ dãy nhị phân độ dài $|S|$. Vì vậy $|P(S)| = 2^{|S|}$.

■

Quy tắc nhân thường được phát biểu bằng ngôn ngữ tập hợp như sau :

Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_m$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Đề–các của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Để liên hệ với quy tắc nhân hãy nhớ là việc chọn một phần tử của tích Đề–các $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của $A_1$ một phần tử của $A_2$, ..., một phần tử của $A_m$. Theo quy tắc nhân ta nhận được đẳng thức :

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m| = |A_1| . |A_2| \ldots |A_m|.$$

## NHỮNG BÀI TOÁN ĐẾM PHỨC TẠP HƠN

Nhiều bài toán đếm phức tạp không thể giải được nếu chỉ sử dụng hoặc quy tắc cộng hoặc quy tắc nhân. Nhưng chúng có thể giải được nếu sử dụng cả hai quy tắc này.

**Ví dụ 13.** Trong một phiên bản của ngôn ngữ lập trình *BASIC*, tên một biến là một xâu chứa một hoặc hai chữ số hoặc chữ cái, trong đó không phân biệt chữ in thường và chữ in hoa. Hơn thế nữa tên biến bắt đầu bằng một chữ cái và phải khác với năm xâu hai ký tự dành riêng. Có bao nhiêu tên biến khác nhau trong phiên bản này của *BASIC*.

*Giải:* Gọi $V$ là số các tên khác nhau trong phiên bản này của *BASIC*, $V_1$ là số các tên gồm 1 ký tự, $V_2$ số các tên gồm 2 ký tự. Khi đó theo quy tắc cộng, ta có $V = V_1 + V_2$. Chú ý rằng $V_1 = 26$, vì tên biến một ký tự thì nhất thiết phải là chữ cái. Để tính $V_2$ ta thấy ký tự đầu là chữ cái (chọn một trong 26 chữ cái), ký tự thứ hai có thể là chữ cái hoặc chữ số (chọn một trong 26 chữ cái và 10 chữ số). Nhưng cần phải bớt đi 5 xâu dành riêng nên $V_2 = 26.36 - 5 = 931$. Vì vậy, có $V = V_1 + V_2 = 26 + 931 = 957$ tên biến khác nhau trong phiên bản này của *BASIC*.

■

**Ví dụ 14.** Mỗi người sử dụng hệ thống máy tính đều có mật khẩu dài từ sáu tới tám ký tự, trong đó mỗi ký tự là một chữ hoa hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

*Giải:* Gọi $P$ là tổng số mật khẩu có thể và $P_6$, $P_7$, $P_8$ tương ứng là số mật khẩu dài 6, 7, 8 ký tự. Theo quy tắc cộng ta có: $P = P_6 + P_7 + P_8$.

Bây giờ chúng ta sẽ tính $P_6$, $P_7$, $P_8$. Tính trực tiếp $P_6$ sẽ rất khó. Để tìm $P_6$ dễ hơn ta tính số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa hoặc chữ số, rồi bớt đi số các xâu dài 6 ký tự là các chữ in hoa và không chứa chữ số nào. Theo quy tắc nhân số các xâu dài 6 ký tự là $36^6$ và số các xâu không chứa các chữ số là $26^6$. Vì vậy,

$P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\,176\,782\,336 - 308\,915\,776 = 1\,867\,866\,560.$

Hoàn toàn tương tự ta có :

$P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\,364\,164\,096 - 8\,031\,810\,176 = 70\,332\,353\,920,$

$P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\,821\,109\,907\,456 - 208\,827\,064\,576 = 2\,612\,282\,842\,880.$

Cuối cùng ta được : $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\,684\,483\,063\,360.$

■

## NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, chúng ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Cộng số cách làm mỗi việc sẽ dẫn đến sự trùng lặp, vì những cách làm cả hai việc sẽ được tính hai lần. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc. Đó là **nguyên lý bù trừ**. Ví dụ sau sẽ minh hoạ chúng ta có thể giải quyết bài toán đếm như thế nào khi sử dụng nguyên lý này.

**Ví dụ 15.** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00?

*Giải:* Việc thứ nhất, xây dựng các xâu nhị phân độ dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1, có thể được làm bằng $2^7 = 128$ cách, vì bit đầu chỉ có thể chọn bằng một cách, mỗi một trong bẩy bít sau có thể chọn bằng hai cách. Việc thứ hai, xây dựng các dãy nhị phân độ dài 8 bit kết thúc bằng hai bit 00, có thể làm bằng $2^6 = 64$ cách, vì mỗi một trong sáu bit đầu có thể làm bằng hai cách, hai bit cuối cùng có thể chọn chỉ bằng một cách. Có thể làm cả hai việc đồng thời, xây dựng các xâu nhị phân dài 8 bit bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng hai bit 00, bằng $2^5 = 32$ cách, vì mỗi một trong 5 bit từ bit thứ hai tới bit thứ sáu có thể chọn bằng hai cách, bit đầu và hai bit cuối cùng có thể chọn chỉ bằng một cách. Cuối cùng, số xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc được bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00 bằng số cách làm hoặc công việc một hoặc công việc hai và bằng 128 + 64 − 32 = 160.

■

Chúng ta có thể phát biểu nguyên lý đếm này bằng ngôn ngữ tập hợp. Cho $A_1$, $A_2$ là các tập hợp. Gọi $T_1$ là việc chọn một phần tử của $A_1$ còn $T_2$ là việc chọn một phần tử của $A_2$. Có $|A_1|$ cách làm việc $T_1$ và $|A_2|$ cách làm việc $T_2$. Số cách làm hoặc $T_1$ hoặc $T_2$ bằng tổng số cách làm việc $T_1$ và số cách làm việc $T_2$ trừ đi số cách làm cả hai việc. Vì có $|A_1 \cup A_2|$ cách làm hoặc $T_1$ hoặc $T_2$, và có $|A_1 \cap A_2|$ cách làm cả hai việc $T_1$ và $T_2$ nên chúng ta có :

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Đó chính là công thức đưa ra trong Tiết 1.5 để xác định số các phần tử của hợp hai tập hợp. Nguyên lý bù trừ có thể tổng quát hóa để tìm số cách thực hiện nhiệm vụ gồm $n$ việc khác nhau, hoặc là tìm số phần tử của hợp $n$ tập hợp với $n$ là số nguyên dương. Chúng ta sẽ còn nghiên cứu nguyên lý này và một số ứng dụng của nó trong Chương 5.

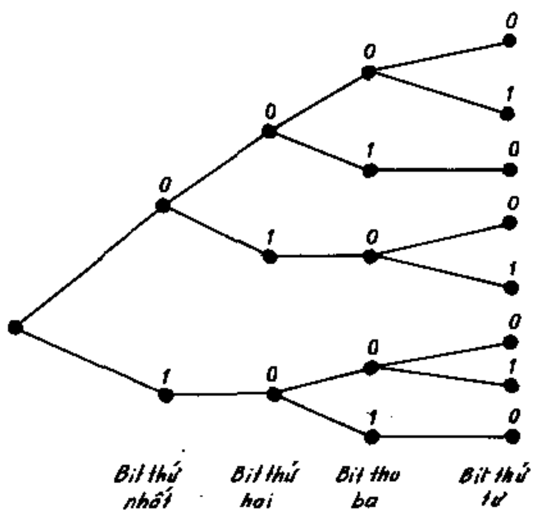
## BIỂU ĐỒ CÂY

Bài toán đếm có thể được giải bằng biểu đồ cây. Một cây bao gồm một gốc và các cành đi ra từ gốc, và các cành phụ đi ra từ điểm cuối của cành khác. (Chúng ta sẽ nghiên cứu cây trong Chương 8). Để sử dụng cây trong bài toán đếm chúng ta dùng cành biểu diễn mỗi một lựa chọn, các kết cục bằng các lá, đó là điểm cuối của cành không có cành khác bắt đầu trên nó.

**Ví dụ 16**. Có bao nhiêu xâu nhị phân có chiều dài 4 bit không có hai số 1 liên tiếp?

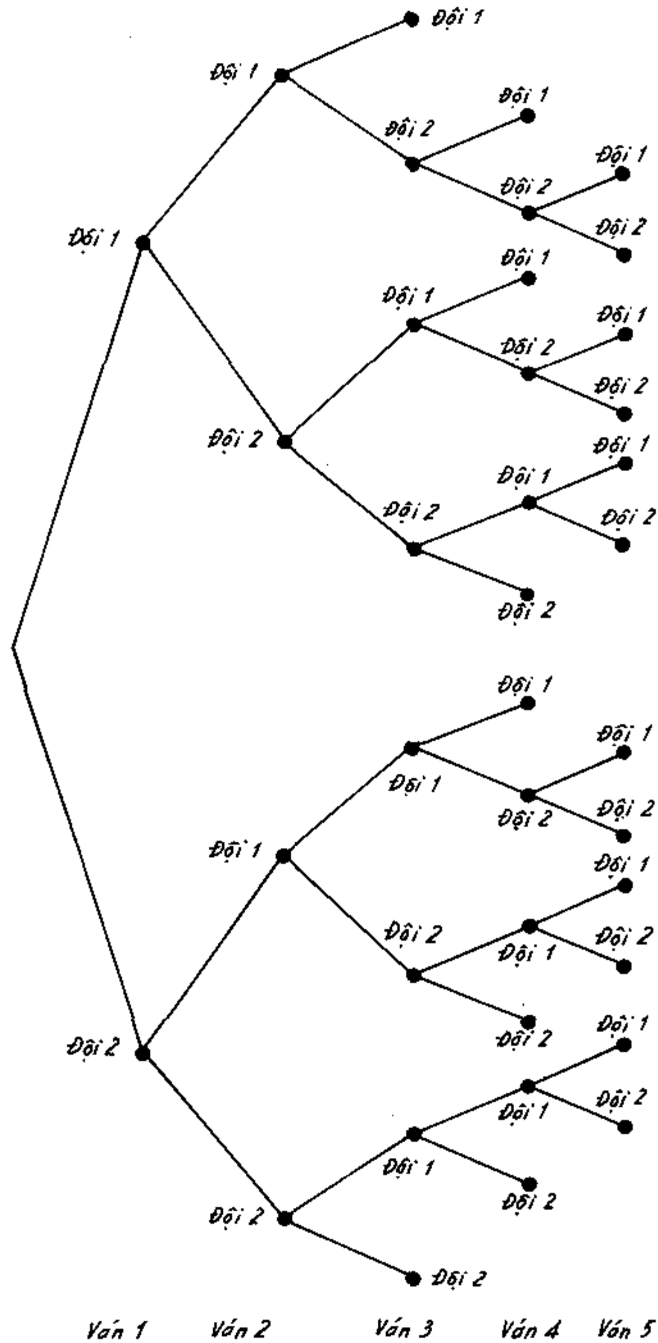
*Giải*: Hình 1 biểu thị tất cả các dãy nhị phân dài 4 bit không có liên tiếp hai số 1. Ta thấy có 8 dãy nhị phân như vậy.

■




***Hình 1.*** Xâu nhị phân dài 4 bit không có hai số 1 liên tiếp

**Ví dụ 17.** Trận thi đấu thể thao giữa hai đội $A$ và $B$ gồm năm ván. Đội nào thắng ba ván trước sẽ kết thúc cuộc thi và giành chiến thắng. Cuộc thi đấu có thể diễn ra theo bao nhiêu cách khác nhau?




***Hình* 2.** Ba ván tốt nhất trong năm ván.

*Giải:* Biểu đồ cây trên hình 2 thể hiện tất cả các cách mà cuộc thi có thể diễn ra, trong đó có ghi tên của đội thắng mỗi ván thi đấu. Chúng ta thấy cuộc thi có thể diễn ra theo 20 cách khác nhau.

■

## BÀI TẬP

1. Trong một trường đại học có 18 sinh viên toán và 325 sinh viên tin học.

   a) Có bao nhiêu cách chọn hai đại diện sao cho một là sinh viên toán còn người kia là sinh viên tin học?

   b) Có bao nhiêu cách chọn một đại diện hoặc là sinh viên toán hoặc là sinh viên tin học?

2. Một tòa nhà có 27 tầng, mỗi tầng có 37 văn phòng. Hỏi có bao nhiêu văn phòng trong tòa nhà đó?

3. Một phiếu trắc nghiệm đa lựa chọn gồm 10 câu hỏi. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời.

   a) Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu mọi câu hỏi đều được trả lời?

   b) Có bao nhiêu cách điền một phiếu trắc nghiệm nếu có thể bỏ trống.

4. Một mẫu áo sơ mi đặc biệt được thiết kế có kiểu cho nam và có kiểu cho nữ, có 12 màu và 3 cỡ cho mỗi giới. Có bao nhiêu loại khác nhau của mẫu áo này sẽ được sản xuất?

5. Từ New York tới Denver có 6 hãng hàng không và có 7 hãng bay từ Denver tới San Francisco. Có bao nhiêu khả năng khác nhau để bay từ New York đến San Francisco qua Denver?

6. Từ Boston tới Detroit có 4 đường cao tốc và có 6 đường từ Detroit tới Los Angeles. Có bao nhiêu đường cao tốc nối Boston với Los Angeles qua Detroit.

7. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau?

8. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau, trong đó không chữ cái nào được lặp lại?

9. Có bao nhiêu người có tên họ viết tắt bằng ba chữ cái khác nhau, trong đó chữ cái đầu tiên là chữ $A$?

**10.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 8?

**11.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có bit đầu tiên và bit cuối cùng là 1?

**12.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 6 hoặc ít hơn?

**13.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài không vượt quá $n$ và chứa toàn số 1, trong đó $n$ là một số nguyên dương?

**14.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài không vượt quá $n$, bắt đầu và kết thúc bằng số 1, trong đó $n$ là một số nguyên dương?

**15.** Có bao nhiêu xâu các chữ thường và có độ dài bằng 4 hoặc ít hơn?

**16.** Có bao nhiêu xâu các chữ thường có độ dài bằng 4 và chứa chữ $x$?

**17.** Trong các số nguyên dương có đúng 3 chữ số, có bao nhiêu số

a) Chia hết cho 7?

b) Lẻ?

c) Có ba chữ số như nhau?

d) Không chia hết cho 4?

e) Chia hết cho 3 hoặc cho 4?

f) Không chia hết cho 3 hoặc cho 4?

g) Chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 4?

h) Chia hết cho 3 và 4?

**18.** Trong các số nguyên dương có đúng 4 chữ số, có bao nhiêu số

a) Chia hết cho 9?

b) Chẵn?

c) Có các chữ số khác nhau?

d) Không chia hết cho 3?

e) Chia hết cho 5 hoặc cho 7?

f) Không chia hết cho 5 hoặc cho 7?

g) Chia hết cho 5 nhưng không chia hết cho 7?

h) Chia hết cho cả 5 và 7?

**19.** Có bao nhiêu xâu gồm 3 chữ số thập phân

a) Không chứa cùng một chữ số ba lần?

b) Bắt đầu bằng chữ số lẻ?

c) Có đúng hai chữ số 4?

**20.** Có bao nhiêu xâu gồm 4 chữ số thập phân

a) Không chứa cùng một chữ số hai lần?

b) Kết thúc bằng chữ số chẵn?

c) Có đúng ba chữ số 9?

**21.** Một ủy ban được thành lập bao gồm hoặc là thống đốc bang hoặc là một trong hai nghị sĩ của mỗi một trong 50 bang. Có bao nhiêu cách để thành lập ủy ban này?

**22.** Có bao nhiêu biển đăng ký xe nếu dùng ba chữ số theo sau là ba chữ cái hoặc ba chữ cái theo sau là ba chữ số?

**23.** Có bao nhiêu biển đăng ký xe nếu mỗi biển số gồm hai chữ số tiếp sau là bốn chữ cái hoặc hai chữ cái theo sau là bốn chữ số?

**24.** Có bao nhiêu biển đăng ký xe nếu mỗi biển số gồm hoặc là ba chữ cái tiếp sau là ba chữ số hoặc bốn chữ cái theo sau là hai chữ số?

**25.** Có bao nhiêu biển đăng ký xe mỗi biển số gồm hai hoặc ba chữ cái tiếp sau bởi hai hoặc ba chữ số?

**26.** Có bao nhiêu hàm số khác nhau từ tập có 10 phần tử đến tập có số phần tử bằng :

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 ?

**27.** Có bao nhiêu hàm số đơn ánh từ tập có 5 phần tử đến tập có số phần tử bằng :

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 ?

**28.** Có bao nhiêu hàm số từ tập $\{1, 2,...,n\}$ trong đó $n$ là một số nguyên dương, tới tập $\{0, 1\}$?

**29.** Có bao nhiêu hàm số từ tập $\{1, 2, ..., n\}$ trong đó $n$ là một số nguyên dương, tới tập $\{0, 1\}$ và

a) đó là các hàm đơn ánh?

b) gán 0 cho cả hai số 1 và $n$?

c) gán 1 cho đúng một trong các số nguyên dương nhỏ hơn $n$?

**30.** Có bao nhiêu hàm bộ phận (xem các Bài tập trong Tiết 1.6) từ tập có 5 phần tử đến tập có

a) 1 b) 2 c) 5 d) 9 phần tử?

**31.** Có bao nhiêu hàm bộ phận (xem các Bài tập trong Tiết 1.6) từ tập có $m$ phần tử đến tập có $n$ phần tử với $m$, $n$ là các số nguyên dương?

**32.** Có bao nhiêu tập con có hơn 1 phần tử của tập có 100 phần tử?

**33.** **Xâu thuận nghịch đọc** là một xâu mà khi viết theo thứ tự ngược lại cũng bằng chính nó. Hãy tính số xâu nhị phân có độ dài bằng $n$ là thuận nghịch đọc ?

**34.** Trong một đám cưới có 10 người kể cả cô dâu và chú rể. Để chụp ảnh người ta xếp 6 người thành một hàng. Hỏi có bao nhiêu cách xếp hàng để chụp nếu :

a) mọi kiểu ảnh đều có cô dâu?

b) mọi kiểu ảnh đều có cô dâu và chú rể?

c) chỉ có hoặc cô dâu hoặc chú rể xuất hiện trong mọi kiểu ảnh?

**35.** Cô dâu và chú rể mời bốn người bạn đứng thành một hàng để chụp ảnh cùng với mình. Có bao nhiêu cách xếp hàng nếu :

a) cô dâu đứng cạnh chú rể?

b) cô dâu không đứng cạnh chú rể?

c) cô dâu đứng ở phía bên trái của chú rể?

**36.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 7 hoặc có hai bit đầu tiên là các số 0, hoặc ba bit cuối cùng là các số 1?

**37.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 hoặc bắt đầu bằng ba số 0 hoặc kết thúc bằng hai số 0?

**38*.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 10 và có năm số 0 liền nhau, hoặc năm số 1 liền nhau?

**39*.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng tám và có ba số 0 liền nhau, hoặc bốn số 1 liền nhau?

**40.** Mỗi sinh viên lớp toán rời rạc hoặc là giỏi toán hoặc là giỏi tin học hoặc giỏi cả hai môn này. Trong lớp có bao nhiêu sinh viên nếu 38 người giỏi tin (kể cả người giỏi cả hai môn), 23 người giỏi toán (kể cả người giỏi cả hai môn) và 7 người giỏi cả hai môn?

**41.** Có bao nhiêu số nguyên không lớn hơn 100 chia hết cho 4 hoặc cho 6?

**42.** Tên của mọi biến trong ngôn ngữ lập trình *C* là một xâu gồm không quá tám ký tự là các chữ thường, chữ hoa, chữ số và dấu gạch dưới. Hơn thế nữa, ký tự đầu tiên của xâu không được là chữ số. Trong *C* có thể đặt tên được cho bao nhiêu biến khác nhau?

**43.** Giả sử rằng trong tương lai mọi máy điện thoại trên thế giới được gán một con số (số điện thoại) gồm mã quốc gia dài từ 1 tới 3 chữ số, tức là nó có dạng *X*, *XX* hoặc *XXX* tiếp theo là số điện thoại 10 chữ số dạng *NXX-NXX-XXXX* (như đã mô tả trong Ví dụ 10). Theo cách đánh số này, sẽ có bao nhiêu số điện thoại khác nhau có thể dùng được trên toàn cầu.

**44.** Dùng biểu đồ cây tìm số xâu nhị phân độ dài bốn không có ba số 0 liên nhau.

**45.** Có bao nhiêu cách xếp các chữ *a, b, c* và *d* sao cho chữ *b* không đi liền sau chữ *a*?

**46.** Dùng biểu đồ cây hãy tìm số cách có thể sẽ xảy ra trong một cuộc thi đấu thể thao gồm bảy ván giữa hai đội. Đội thắng là đội đầu tiên thắng bốn trong bảy ván thi đấu.

**47.** Dùng biểu đồ cây hãy xác định số các tập con của tập {3, 7, 9, 11, 24} sao cho tổng giá trị các phần tử của tập con nhỏ hơn 28?

**48*.** Dùng quy tắc nhân chỉ ra rằng có $2^{2^n}$ bảng chân lý khác nhau đối với các mệnh đề *n* biến.

**49.** Dùng quy nạp toán học chứng minh quy tắc cộng cho *m* công việc từ quy tắc cộng cho hai việc.

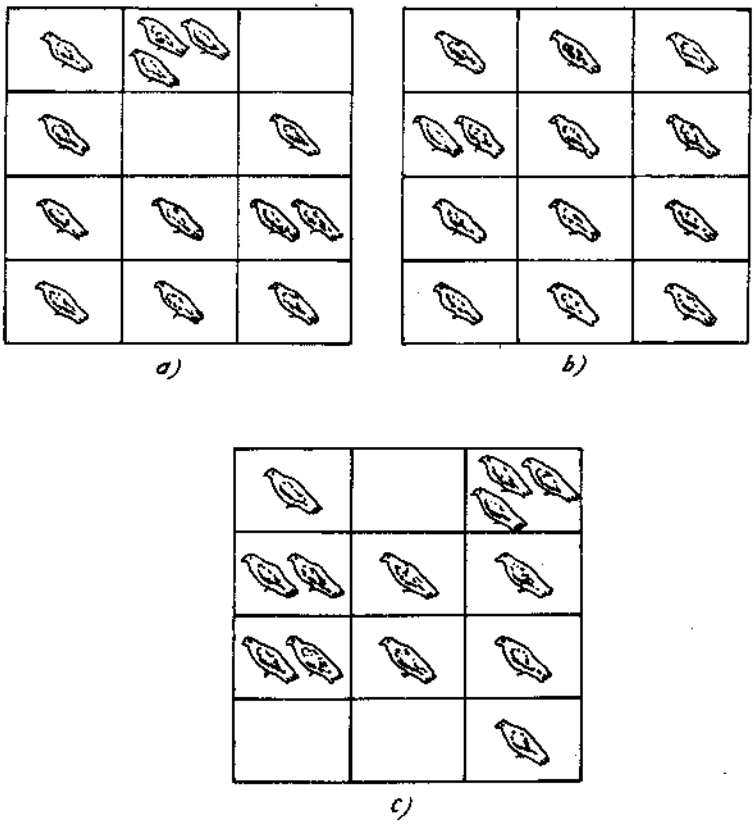
**50.** Dùng quy nạp toán học chứng minh quy tắc nhân cho *m* công việc từ quy tắc nhân cho hai việc.

**51.** Một đa giác lồi *n* cạnh có bao nhiêu đường chéo? (Một đa giác được gọi là lồi nếu mọi đoạn thẳng nối hai điểm bên trong hoặc trên hiên nằm hoàn toàn trong nó).

# 4.2. NGUYÊN LÝ LỒNG CHIM BỒ CÂU

## MỞ ĐẦU

Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì ít nhất trong một ngăn có nhiều hơn một con chim (xem hình 1). Nguyên lý này dĩ nhiên là có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim.




*Hình 1*

**ĐỊNH LÝ 1.** *Nguyên lý lồng chim bồ câu.*

Nếu có $k + 1$ hoặc nhiều hơn đồ vật được đặt vào trong $k$ hộp, thì có ít nhất một hộp chứa hai hoặc nhiều hơn hai đồ vật.

*Chứng minh.* Giả sử không có hộp nào trong $k$ hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là bằng $k$. Điều này trái với giả thiết là có ít nhất $k + 1$ vật.

Nguyên lý lồng chim bồ câu cũng thường được gọi là *Nguyên lý Dirichlet* mang tên nhà toán học người Đức ở thế kỷ thứ 19. Ông thường xuyên sử dụng nguyên lý này trong công việc của mình.

■

**Ví dụ 1.** Trong bất kỳ một nhóm 367 người thể nào cũng có ít nhất hai người trùng ngày sinh vì một năm có nhiều nhất 366 ngày.

■

**Ví dụ 2**. Trong bất kỳ một nhóm 27 từ tiếng Anh nào, ít nhất cũng có hai từ bắt đầu bằng cùng một chữ cái, vì chỉ có 26 chữ cái tiếng Anh.

■

**Ví dụ 3.** Bài thi các môn học trong trường đại học được chấm theo thang điểm là các số nguyên từ 0 tới 100. Một lớp học cần phải có bao nhiêu sinh viên để đảm bảo trong mọi môn thi đều có ít nhất hai sinh viên nhận cùng điểm?

*Giải*: Thang điểm có 101 bậc. Theo nguyên lý Dirichlet lớp học cần phải có ít nhất 102 sinh viên để luôn có 2 sinh viên cùng điểm thi.

■

## NGUYÊN LÝ DIRICHLET TỔNG QUÁT

Nguyên lý Dirichlet chỉ ra rằng có ít nhất hai vật trong cùng một hộp nếu số vật nhiều hơn số hộp. Tuy nhiên, ta có thể rút ra kết luận mạnh hơn nếu số vật hơn số hộp rất nhiều. Chẳng hạn, trong bất kỳ một nhóm gồm 21 chữ số của hệ thập phân đều có ít nhất 3 chữ số trùng nhau. Điều đó là đúng bởi vì nếu chứa 21 vật vào 10 hộp thì ít nhất có một hộp chứa nhiều hơn 2 vật.

**ĐỊNH LÝ 2**. *Nguyên lý Dirichlet tổng quát.*

Nếu có $N$ đồ vật được đặt vào trong $k$ hộp, sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\lceil N/k \rceil$ vật.

*Chứng minh.* Giả sử không có hộp nào trong $k$ hộp chứa nhiều hơn $\lceil N/k \rceil - 1$ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là

$$k.(\lceil N/k \rceil - 1) < k\{((N/k) + 1) - 1\} = N. \qquad (*)$$

trong đó ta đã dùng bất đẳng thức $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$. Bất đẳng thức (*) là trái với giả thiết.

■

Những ví dụ sau minh họa việc áp dụng nguyên lý Dirichlet tổng quát.

**Ví dụ 4**. Trong 100 người có ít nhất $\lceil 100/12 \rceil = 9$ người cùng tháng sinh.

■

**Ví dụ 5.** Cần phải có tối thiểu bao nhiêu sinh viên ghi tên vào lớp toán học rời rạc để chắc chắn rằng sẽ có ít nhất 6 người đạt cùng một điểm thi, nếu thang điểm gồm 5 bậc, $A$, $B$, $C$, $D$, và $F$?

*Giải:* Để chắc chắn ít nhất có 6 người cùng điểm thì số sinh viên tối thiểu là số nguyên nhỏ nhất sao cho $\lceil N/5 \rceil = 6$. Số đó là $N = 5.5 + 1 = 26$.

■

**Ví dụ 6.** Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong một bang có số điện thoại khác nhau, mỗi số gồm 10 chữ số (Giả sử số điện thoại có dạng *NXX* – *NXX* – *XXXX*, trong đó ba chữ số đầu tiên là mã vùng, *N* nhận các giá trị từ 2 tới 9, *X* nhận bất kỳ chữ số nào).

*Giải*: Có 8 triệu số điện thoại khác nhau có dạng *NXX* – *XXXX* (như đã chỉ ra trong Ví dụ 10 của Tiết 4.1). Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có $\lceil 25\ 000\ 000/8\ 000\ 000 \rceil = 4$ máy có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 4 mã vùng.

■

## MỘT VÀI ỨNG DỤNG HAY CỦA NGUYÊN LÝ DIRICHLET

Trong nhiều áp dụng của nguyên lý Dirichlet các đối tượng đặt vào hộp cần phải được chọn một cách khôn khéo. Bây giờ chúng ta sẽ mô tả một vài áp dụng như vậy.

**Ví dụ 7.** Trong một tháng 30 ngày một đội bóng chày chơi ít nhất mỗi ngày một trận, nhưng cả tháng chơi không quá 45 trận. Hãy chỉ ra rằng có những ngày liên tiếp mà đội bóng đã chơi tất cả 14 trận.

*Giải:* Gọi $a_j$ là số trận mà đội đã chơi kể từ ngày đầu tháng tới hết ngày $j$. Khi đó $a_1, a_2, ..., a_{30}$ là một dãy các số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $1 \le a_j \le 45$. Hơn thế nữa $a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14$ cũng là một dãy các số nguyên dương phân biệt và tăng dần với $15 \le a_j + 14 \le 59$.

Sáu mươi số nguyên dương $a_1, a_2, ..., a_{30}, a_1 + 14, ..., a_{30} + 14$ luôn nhỏ hơn hoặc bằng 59. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai trong 60 số này bằng nhau. Vì các dãy $a_1, a_2, ..., a_{30}$ và $a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14$ gồm các số phân biệt nên tồn tại các chỉ số $i, j$ để sao cho $a_i = a_j + 14$ $(j < i)$. Điều này có nghĩa là từ ngày $j + 1$ tới hết ngày $i$ đội đã chơi đúng 14 trận.

■

**Ví dụ 8.** Chứng tỏ rằng trong $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$ tồn tại ít nhất một số chia hết cho một số khác.

*Giải:* Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ dưới dạng tích của một lũy thừa cơ số 2 với một số lẻ. Nói cách khác ta có $a_j = 2^{k_j}.q_j$ trong đó $k_j$ là số nguyên không âm còn $q_j$ là số dương lẻ nhỏ hơn $2n$. Vì chỉ có $n$ số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại hai trong các số lẻ $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ bằng nhau, tức là có hai chỉ số $i$ và $j$ sao cho $q_i = q_j = q$ ($q$ là giá trị chung của chúng). Khi đó $a_i = 2^{k_i}q$ và $a_j = 2^{k_j}q$. Suy ra, nếu $k_i \leq k_j$ thì $a_j$ chia hết cho $a_i$ còn trong trường hợp ngược lại ta có $a_i$ chia hết cho $a_j$.

■

Sử dụng khéo léo nguyên lý Dirichlet có thể chứng minh sự tồn tại của dãy con tăng hay giảm có độ dài nào đó trong một dãy các số nguyên khác nhau cho trước. Trước khi trình bày các áp dụng này chúng ta sẽ đưa ra một vài định nghĩa. Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là dãy các số thực. Dãy con của dãy này là dãy có dạng $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}$ trong đó $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq N$. Vì thế **dãy con** là dãy nhận được từ dãy xuất phát bằng cách bỏ đi một số số hạng của dãy xuất phát và giữ nguyên thứ tự ban đầu của chúng. Một dãy gọi là **thực sự tăng** nếu mỗi số hạng lớn hơn số hạng liền trước nó, và một dãy gọi là **thực sự giảm** nếu mỗi số hạng nhỏ hơn số hạng liền trước nó.

**ĐỊNH LÝ 3.** *Mọi dãy $n^2 + 1$ số thực phân biệt đều có một dãy con dài $n + 1$ hoặc là thực sự tăng hoặc thực sự giảm.*

Trước khi chứng minh định lý này ta xét ví dụ sau.

**Ví dụ 9.** Dãy 8, 11, 9, 1, 4, 6, 12, 10, 5, 7 có $10 = 3^2 + 1$ số hạng. Có 4 dãy con tăng thực sự độ dài 4, cụ thể là 1, 4, 6, 12 ; 1, 4, 6, 10 ; 1, 4, 6, 7 ; 1, 4, 5, 7. Có một dãy con thực sự giảm độ dài 4, đó là 11, 9, 6, 5.

■

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh Định lý 3.

***Chứng minh.*** Giả sử $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ là dãy $n^2 + 1$ số thực khác nhau. Gọi $i_k$ là độ dài của dãy con thực sự tăng dài nhất bắt đầu từ $a_k$, còn $d_k$ là độ dài của dãy con thực sự giảm dài nhất bắt đầu từ $a_k$. Như vậy ta đã kết hợp số hạng $a_k$ với một cặp số nguyên $(i_k, d_k)$.

Giả sử không có dãy con thực sự tăng hoặc thực sự giảm có độ dài $n + 1$. Điều này có nghĩa là cả hai số dương $i_k$ và $d_k$ đều nhỏ hơn hay bằng $n$ (với $k = 1, ..., n^2 + 1$). Theo quy tắc nhân có tất cả $n^2$ cặp $(i_k, d_k)$. Và theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai trong số $n^2 + 1$ cặp bằng nhau. Nói cách khác, tồn tại hai số hạng $a_s$ và $a_t$ (với $s < t$) sao cho $i_s = i_t$ và $d_s = d_t$. Điều này là không thể xảy ra. Thật vậy, vì các số hạng của dãy là khác nhau, nên hoặc là $a_s < a_t$ hoặc là $a_s > a_t$. Nếu $a_s < a_t$ khi đó, vì $i_s = i_t$ ta xây dựng từ $a_s$ dãy con tăng có phần tử đầu tiên là $a_s$ và $i_t$ phần tử tiếp sau là dãy con tăng dài $i_t$ bắt đầu từ $a_t$. Dãy này có độ dài là $i_t + 1 = i_s + 1$, điều này vô lý vì dãy con tăng dài nhất bắt đầu từ $a_s$ có độ dài $i_s$ chứ không là $i_s + 1$. Hoàn toàn tương tự đối với trường hợp $a_s > a_t$.

■

Ví dụ cuối cùng trình bày cách áp dụng nguyên lý Dirichlet vào lý thuyết tổ hợp mà vẫn quen gọi là **lý thuyết Ramsey**, tên của nhà toán học người Anh. Nói chung, lý thuyết Ramsey giải quyết những bài toán phân chia các tập con của một tập các phần tử.

**Ví dụ 10.** Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

*Giải:* Gọi $A$ là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của $A$ hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của $A$, điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì $\lceil 5/2 \rceil = 3$. Trong trường hợp đầu ta gọi $B$, $C$, $D$ là bạn của $A$. Nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với $A$ lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau (không ai là kẻ thù của ai cả), ngược lại, tức là nếu trong ba người $B$, $C$, $D$ không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau. Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của $A$.

■

## *BÀI TẬP*

1. Chứng tỏ rằng trong bất kỳ tập hợp gồm sáu lớp học nào cũng có ít nhất hai lớp gặp nhau cùng một ngày, các lớp học nghỉ thứ bảy.

2. Chứng tỏ rằng nếu trong một lớp có 30 sinh viên thì ít nhất có 2 sinh viên có tên bắt đầu bằng cùng một chữ cái.

**3.** Một ngăn tủ có chứa một tá chiếc tất màu nâu và một tá chiếc tất màu đen. Một người lấy các chiếc tất một cách ngẫu nhiên trong bóng tối. Anh ta cần phải lấy ra bao nhiêu chiếc tất để chắc chắn rằng mình có ít nhất hai chiếc tất cùng màu?

**4.** Cho $d$ là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng trong một nhóm tùy ý gồm $d + 1$ số nguyên có ít nhất hai số khi chia cho $d$ có cùng số dư.

**5**. Cho $n$ là một số nguyên dương. Chứng tỏ rằng trong mọi tập $n$ số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho $n$.

**6.** Chứng minh rằng nếu $f$ là một hàm từ $S$ tới $T$ trong đó $S$ và $T$ là hai tập hữu hạn và $|S| > |T|$ thì sẽ có các phần tử $s_1$ và $s_2$ của $S$ sao cho $f(s_1) = f(s_2)$ hoặc nói cách khác $f$ không là hàm đơn ánh.

**7.** Mỗi sinh viên trong một trường đại học đều có quê ở một trong 50 bang. Cần phải tuyển bao nhiêu sinh viên để đảm bảo có ít nhất 100 người cùng bang?

**8***. Cho $(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, là một tập hợp gồm 5 điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trên mặt phẳng $xy$. Chứng tỏ rằng điểm giữa của đường nối ít nhất một trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

**9***. Cho $(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, là một tập hợp gồm 9 điểm khác nhau có các tọa độ nguyên trong không gian $xyz$. Chứng tỏ rằng điểm giữa của đường nối ít nhất một trong các cặp điểm này có tọa độ nguyên.

**10.** Cần có bao nhiêu cặp số nguyên $(a, b)$ để chắc chắn có hai cặp $(a_1, b_1)$ $(a_2, b_2)$ sao cho $a_1$ **mod** 5 = $a_2$ **mod** 5 và $b_1$ **mod** 5 = $b_2$ **mod** 5?

**11.** a) Chỉ ra rằng trong 5 số chọn từ 8 số nguyên dương đầu tiên nhất thiết có một cặp có tổng bằng 9.

b) Điều khẳng định trong câu a) có đúng không nếu chọn 4 chứ không phải 5 số.

**12.** a) Chỉ ra rằng trong 7 số chọn từ 10 số nguyên dương đầu tiên nhất thiết có ít nhất hai cặp có tổng bằng 11.

h) Điều khẳng định trong câu a) có đúng không nếu thay cho 7 ta chọn 6 số ?

**13.** Một công ty giữ hàng hóa trong kho. Số các ngăn chứa trong kho được xác định bởi số gian hàng, số ô trong mỗi gian và số các giá ở mỗi ô. Biết nhà kho có 50 gian, mỗi gian có 85 ô và mỗi ô có 5 giá. Hỏi số hàng hóa tối thiểu phải bằng bao nhiêu để ít nhất có hai sản phẩm được đặt trong cùng một ngăn?

**14.** Có 51 nhà trong một phố. Mỗi ngôi nhà có địa chỉ nằm từ 1000 đến 1099. Chỉ ra rằng ít nhất có hai nhà có địa chỉ là hai số nguyên liên tiếp.

**15.*** Giả sử $x$ là một số vô tỷ. Chứng tỏ rằng giá trị tuyệt đối của hiệu giữa $j\ x$ và số nguyên gần nó nhất sẽ nhỏ hơn $1/n$ đối với một số nguyên dương $j$ nào đó không vượt quá $n$.

**16.** Hãy tìm dãy con tăng và dãy con giảm có độ dài cực đại của dãy số 22, 5, 7, 2, 23, 10, 15, 21, 3, 17.

**17.** Hãy xây dựng một dãy 16 số nguyên dương không có dãy con tăng hoặc dãy con giảm gồm 5 số hạng.

**18.** Hãy chỉ ra rằng trong 102 người có chiều cao khác nhau đứng thành một hàng có thể tìm được 11 người có chiều cao tăng dần hoặc giảm dần mà không thay đổi thứ tự của họ trong hàng.

**19*.** Hãy mô tả thuật toán dưới dạng giả mã để tạo các dãy con tăng hoặc giảm dài nhất của một dãy các số nguyên khác nhau.

**20.** Chỉ ra rằng trong một nhóm có 5 người (trong đó hai người bất kỳ hoặc là bạn hoặc là thù) không phải luôn có ba người là bạn của nhau hoặc là kẻ thù của nhau.

**21.** Chỉ ra rằng trong một nhóm có 10 người (trong đó hai người bất kỳ hoặc là bạn hoặc là thù) luôn có ba người là bạn hoặc bốn người là kẻ thù lẫn nhau và có nhóm ba người là kẻ thù hoặc bốn người là bạn của nhau.

**22.** Sử dụng Bài tập 21 chứng minh rằng trong một nhóm tùy ý 20 người (trong đó hai người bất kỳ hoặc là bạn hoặc là thù) có một nhóm 4 người là bạn hoặc là kẻ thù lẫn nhau.

**23.** Chỉ ra rằng có ít nhất 4 người ở California (dân số : 25 triệu) có cùng tên họ viết tắt bằng ba chữ cái sinh cùng ngày trong năm (không nhất thiết trong cùng một năm).

**24.** Chứng tỏ rằng trong số 100 000 000 người ăn lương ở Mỹ có thu nhập thấp hơn 1 000 000 đô–la tồn tại hai người có tổng thu nhập bằng tiền như nhau, tính đến từng xu (penny)

**25.** Trong một trường đại học có 38 ca học phân cho các lớp. Nếu có 677 lớp khác nhau thì cần phải có bao nhiêu phòng học?

**26.** Một mạng máy tính gồm có 6 máy. Mỗi máy nối trực tiếp với ít nhất một máy khác. Chỉ ra rằng có ít nhất hai máy mà số các máy khác nối với chúng là bằng nhau.

**27.** Một mạng máy tính gồm có 6 máy. Mỗi máy nối trực tiếp hoặc không nối với các máy khác. Chỉ ra rằng có ít nhất hai máy mà số các máy khác nối với chúng là bằng nhau.

**28*.** Một bữa tiệc có ít nhất hai người. Chứng minh rằng có hai người có số người quen bằng nhau.

**29.** Một đô vật tay tham gia thi đấu giành chức vô địch trong 75 giờ. Mỗi giờ anh ta có ít nhất một trận đấu, nhưng toàn bộ anh ta có không quá 125 trận. Chứng tỏ rằng có những giờ liên tiếp anh ta đã đấu đúng 24 trận.

**30*.** Điều khẳng định trong Bài tập 29 còn đúng không nếu con số 24 được thay bằng

a) 2? b) 13? c) 25? d) 30?

**31.** Chứng tỏ rừng nếu $f$ là một hàm từ $S$ sang $T$, trong đó $S$ và $T$ là các tập hữu hạn và $m = \lceil |S|/|T| \rceil$ khi đó có ít nhất $m$ phần tử của $S$ được gán với cùng một giá trị của $T$. Điều đó có nghĩa là có $m$ phần tử $s_1, s_2, ..., s_m$ của $S$ sao cho $f(s_1) = f(s_2) = ... = f(s_m)$.

**32.** Giả sử một lớp toán rời rạc có 9 sinh viên.

a) Chứng tỏ rằng trong lớp có ít nhất 5 sinh viên nam hoặc ít nhất có 5 sinh viên nữ.

b) Chứng tỏ rằng trong lớp có ít nhất 3 sinh viên nam hoặc ít nhất có 7 sinh viên nữ.

**33.** Một lớp toán rời rạc có 25 sinh viện thuộc năm thứ nhất, năm thứ hai hoặc là học sinh lớp 12.

a) Chỉ ra rằng có ít nhất 9 sinh viên năm thứ nhất hoặc là có ít nhất 9 sinh viên năm thứ hai hoặc là có ít nhất 9 học sinh lớp 12.

b) Chỉ ra rằng có hoặc là ít nhất 3 sinh viên năm thứ nhất và ít nhất 19 sinh viên năm thứ hai hoặc là có ít nhất 5 học sinh lớp 12.

**34.** Cho $n_1, n_2, ..., n_t$ là các số nguyên dương. Chứng tỏ rằng nếu xếp $(n_1 + n_2 + ... + n_t - t + 1)$ vật vào $t$ hộp, thì khi đó với một $i$ nào đó $(i = 1 ... t)$ hộp thứ $i$ chứa ít nhất $n_i$ vật.

**35*.** Cách chứng minh Định lý 3 dựa trên nguyên lý Dirichlet tổng quát là ý chính của bài toán này. Ta sẽ sử dụng những ký hiệu đã dùng trước đây.

a) Giả sử rằng $i_k \leq n$ với $k = 1, 2, ... n^2 + 1$. Dùng nguyên lý Dirichlet tổng quát chỉ ra rằng có $n + 1$ số hạng $a_{k_1}, a_{k_2} ... a_{k_{n+1}}$ với $i_{k_1} = i_{k_2} = ... = i_{k_{n+1}}$ trong đó $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_{n+1}$.

b) Chứng tỏ rằng $a_{k_j} > a_{k_{j+1}}$ với $j = 1, 2, ..., n$. ( *Gợi ý*: giả sử $a_{k_j} < a_{k_{j+1}}$, hãy chứng tỏ rằng điều này kéo theo $i_{k_j} > i_{k_{j+1}}$, đó là mâu thuẫn).

c) Dùng phần a) và b) để chứng minh nếu không có dãy con tăng có độ dài $n + 1$ khi đó phải có dãy con giảm cùng độ dài.

# 4.3. HOÁN VỊ VÀ TỔ HỢP

## MỞ ĐẦU

Giả sử một đội bóng quần vợt có 10 cầu thủ. Huấn luyện viên cần chọn 5 người đi thi đấu ở trường khác. Ngoài ra, ông ta cũng cần chuẩn bị một danh sách có thứ tự gồm 4 cầu thủ để tham gia 4 trận chơi đơn. Trong tiết này ta sẽ nghiên cứu các phương pháp đếm số cách chọn không có thứ tự 5 cầu thủ để đi thi đấu và số danh sách khác nhau gồm 4 cầu thủ tham gia 4 trận chơi đơn. Tổng quát hơn, chúng ta sẽ trình bày các phương pháp đếm số cách chọn không có thứ tự các phần tử khác nhau và việc sắp xếp có thứ tự các đối tượng của một tập hữu hạn.

## HOÁN VỊ VÀ CHỈNH HỢP

**Hoán vị** của một tập các đối tượng khác nhau là một cách sắp xếp có thứ tự các đối tượng này. Chúng ta cũng quan tâm tới việc sắp xếp có thứ tự một số phần tử của một tập hợp. Một cách sắp xếp có thứ tự $r$ phần tử của một tập $n$ phần tử được gọi là một **chỉnh hợp chập r** của tập $n$ phần tử.

**Ví dụ 1.** Cho $S = \{1, 2, 3\}$. Cách sắp xếp 3, 2, 1 là một hoán vị của $S$, còn cách sắp xếp 3, 2 là một chỉnh hợp chập 2 của $S$.

■

Số chỉnh hợp chập $r$ của tập $S$ có $n$ phần tử được biểu thị bởi $P(n, r)$. Chúng ta có thể tính $P(n, r)$ bằng quy tắc nhân.

**ĐỊNH LÝ 1.** Số chỉnh hợp chập $r$ của tập $S$ có $n$ phần tử là

$$P(n, r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1).$$

***Chứng minh.*** Phần tử đầu tiên của chỉnh hợp có thể chọn bằng $n$ cách, vì tập $S$ có $n$ phần tử, phần tử thứ hai của chỉnh hợp được chọn từ $(n - 1)$ phần tử còn lại của tập $S$, tức là chúng ta có $n - 1$ cách chọn phần tử này. Tương tự ta có $(n - 2)$ cách chọn phần tử thứ ba, và cứ như thế ta có $(n - r + 1)$ cách chọn phần tử thứ $r$. Theo quy tắc nhân ta được :

$$n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1)$$

chỉnh hợp chập $r$ từ tập $S$. Đó là điều cần chứng minh.

■

Từ Định lý 1 ta suy ra

$$P(n,r) = n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

Trường hợp đặc biệt ta có $P(n,n) = n!$.

Chúng ta sẽ minh họa kết quả này qua một số ví dụ sau.

**Ví dụ 2.** Có bao nhiêu cách chọn bốn cầu thủ khác nhau trong mười cầu thủ của đội bóng quần vợt để chơi bốn trận đấu đơn, các trận đấu là có thứ tự?

***Giải:*** Mỗi cách chọn có thứ tự bốn cầu thủ của đội bóng là một chỉnh hợp chập bốn của mười phần tử. Theo Định lý 1, ta có

$$P(10,\ 4) = 10.9.8.7 = 5040.$$

■

**Ví dụ 3**. Giả sử rằng có tám vận động viên chạy thi. Người thắng sẽ nhận được huy chương vàng, người về đích thứ hai nhận huy chương bạc, người về đích thứ ba nhận huy chương đồng. Có bao nhiêu cách trao các huy chương này nếu tất cả các kết cục của cuộc thi đều có thể xảy ra?

*Giải:* Số cách trao huy chương chính là số chỉnh hợp chập ba của tập hợp tám phần tử. Vì thế có $P(8,3) = 8.7.6 = 336$ cách trao huy chương.

■

**Ví dụ 4.** Giả sử rằng một thương nhân định đi bán hàng tại tám thành phố. Chị ta bắt đầu cuộc hành trình của mình tại một thành phố nào đó, nhưng có thể đến bảy thành phố kia theo bất kỳ thứ tự nào mà chị ta muốn. Hỏi chị ta có thể đi qua tất cả các thành phố này theo bao nhiêu lộ trình khác nhau?

*Giải:* Số lộ trình có thể giữa các thành phố bằng số hoán vị của bẩy phần tử, vì thành phố đầu tiên đã được xác định, nhưng bẩy thành phố còn lại có thể có thứ tự tùy ý. Do đó có $7! = 5040$ cách để người bán hàng chọn hành trình của mình. Nếu muốn tìm lộ trình ngắn nhất thì chị ta phải tính tổng khoảng cách cho mỗi hành trình có thể, tức là tổng cộng phải tính cho 5040 hành trình.

■

## TỔ HỢP

Một **tổ hợp chập r** của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự $r$ phần tử của tập đã cho. Như vậy, một tổ hợp chập $r$ chính là một tập con $r$ phần tử của tập ban đầu.

**Ví dụ 5.** Cho $S$ là tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Khi đó $\{1, 3, 4\}$ là một tổ hợp chập 3 của $S$.

Số tổ hợp chập $r$ của tập có $n$ phần tử được hiểu thị bởi $C(n, r)$.

**Ví dụ 6**. Rõ ràng $C(4,2) = 6$ vì tổ hợp chập 2 của $\{a, b, c, d\}$ là 6 tập con $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{a, d\}$, $\{b, c\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$.

■

Chúng ta có thể xác định số tổ hợp chập $r$ của $n$ phần tử nhờ công thức tính chỉnh hợp chập $r$ của $n$ phần tử. Để làm điều đó chú ý rằng các chỉnh hợp chập $r$ của một tập hợp có thể nhận được bằng cách trước hết lập các tổ hợp chập $r$ rồi sắp thứ tự cho các phần tử thuộc các tổ hợp đó. Dựa trên nhận xét này ta sẽ chứng minh định lý sau về số tổ hợp chập $r$.

**ĐỊNH LÝ 2**. Số tổ hợp chập $r$ từ tập có $n$ phần tử trong đó $n$ là số nguyên dương và $r$ là số nguyên với $0 \leq r \leq n$, được cho bởi công thức sau

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

*Chứng minh*. Các chỉnh hợp chập $r$ từ tập có $n$ phần tử có thể nhận được bằng cách tạo ra $C(n,r)$ tổ hợp chập $r$ sau đó sắp thứ tự cho các phần tử của chúng . Vì vậy ta có :

$$P(n, r) = C(n, r).P(r, r).$$

Từ đó suy ra :

$$C(n, r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Hệ quả sau đây rất có ích khi tính số tổ hợp.

**HỆ QUẢ 1.** Cho $n$ và $r$ là các số nguyên không âm sao cho $r \leq n$. Khi đó $C(n, r) = C(n, n-r)$.

*Chứng minh.* Theo định lý 2 ta có

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

và
$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Vậy
$$C(n,r) = C(n,n-r).$$

■

Người ta còn dùng ký hiệu $\binom{n}{r}$ để ghi số tổ hợp chập $r$ của $n$ phần tử. Số đó cũng được gọi là **hệ số nhị thức**. Sở dĩ có tên *hệ số nhị thức* là bởi vì các hệ số trong khai triển của nhị thức $(a+b)^n$ chính là các số tổ hợp chập $r$ của $n$ phần tử với $r = 1, 2, ..., n$. Bài toán khai triển nhị thức sẽ được xem xét trong tiết này.

**Ví dụ 7.** Có bao nhiêu cách tuyển 5 trong số 10 cầu thủ của một đội bóng quần vợt để đi thi đấu tại một trường khác?

*Giải:* Đó chính là số tổ hợp chập 5 của 10 phần tử. Theo Định lý 2 ta được

$$C(10,5) = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

■

## HỆ SỐ NHỊ THỨC

Trong tiết này chúng ta sẽ thảo luận một số tính chất quan trọng của hệ số nhị thức. Đầu tiên đó là một hằng đẳng thức quan trọng.

**ĐỊNH LÝ 3.** HẰNG ĐẲNG THỨC PASCAL. Cho $n$ và $k$ là các số nguyên dương với $n \geqslant k$. Khi đó

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k).$$

*Chứng minh*. Giả sử $T$ là một tập có $n+1$ phần tử. Gọi $a$ là một phần tử nào đó của $T$, và $S = T - \{a\}$. Lưu ý rằng $C(n+1, k)$ là số các tập con có $k$ phần tử của tập $T$, hoặc là chứa phần tử a cùng với $k-1$ phần tử của $S$, hoặc là chứa $k$ phần tử của $S$ và không chứa $a$. Vì có $C(n, k-1)$ tập con chứa $(k-1)$ phần tử của $S$, và có $C(n, k)$ tập con chứa $k$ phần tử của tập $S$. Do vậy

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n, k).$$

■

*Chú ý*. Trên đây là cách chứng minh hằng đẳng thức Pascal bằng lý thuyết tổ hợp. Cũng có thể chứng minh hằng đẳng thức này bằng các phép biến đổi đại số công thức tổ hợp (xem Bài tập 47 ở cuối tiết này).

Hằng đẳng thức Pascal là cơ sở để sắp xếp hình học các hệ số nhị thức thành tam giác như trên Hình 1. Hàng thứ $n$ của tam giác gồm các hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Tam giác này được gọi là **tam giác Pascal**. Hằng đẳng thức Pascal chỉ ra rằng khi cộng hai hệ số nhị thức liền kề trong tam giác sẽ nhận được hệ số nhị thức của hàng tiếp theo ở giữa hai hệ số này.

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}$$
$$\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}$$
$$\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{0}$$
...

a)

Theo hằng đẳng thức Pascal

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = \binom{7}{5}$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
...

b)

***Hình 1.*** Tam giác Pascal.

Ngoài hằng đẳng thức Pascal, hệ số nhị thức còn có nhiều hằng đẳng thức khác. Hai trong số chúng sẽ được cho dưới đây và sẽ được chứng minh bằng lý thuyết tổ hợp. Các số khác có thể tìm thấy trong các bài tập cuối tiết này.

**ĐỊNH LÝ 4.** Cho $n$ là số nguyên dương. Khi đó $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

***Chứng minh.*** Một tập hợp $n$ phần tử có tất cả $2^n$ tập con khác nhau. Mặt khác ta thấy, mỗi tập con có hoặc không phần tử nào, hoặc một phần tử, hoặc hai phần tử, ... hoặc $n$ phần tử. Số tập con có không phần tử nào là $C(n, 0)$, số tập con có một phần tử là $C(n, 1)$, số tập con có hai phần tử là $C(n, 2)$, ..., số tập con có $n$ phần tử là $C(n,n)$. Do đó ta có tất cả $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ tập con của tập $n$ phần tử. Kết hợp cả hai phần trên ta được

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n.$$

■

**ĐỊNH LÝ 5.** HẰNG ĐẲNG THỨC VANDERMONDE. Giả sử $m$, $n$ và $r$ là các số nguyên không âm sao cho $r$ không vượt quá $m$ hoặc $n$. Khi đó

$$C(m + n, r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

*Chú ý.* Hằng đẳng thức này do Alexande-Théophile Vandermonde phát hiện vào thế kỷ 18.

***Chứng minh.*** Giả sử cho một tập có $m$ phần tử và tập thứ hai có $n$ phần tử. Khi đó tổng số cách chọn $r$ phần tử từ hợp của hai tập này là $C(m+n,r)$. Một cách khác để chọn $r$ phần tử từ hợp của hai tập hợp này là chọn $k$ phần tử ($k = 0,1,\ldots,r$) từ tập thứ nhất và $r-k$ phần tử từ tập thứ hai. Theo quy tắc nhân, điều này có thể làm bằng $C(m,k) \cdot C(n,r-k)$ cách. Vì vậy tổng số cách chọn $r$ phần tử từ hợp của hai tập này bằng

$$C(m + n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

Đó chính là hằng đẳng thức Vandermonde.

■

## ĐỊNH LÝ NHỊ THỨC

Định lý nhị thức cho ta hệ số trong khai triển lũy thừa của một nhị thức. Nhị thức là tổng của hai số hạng, ví dụ $x + y$. (Số hạng có thể là tích của các hằng số và các biến, nhưng ở đây không liên quan tới chúng ta). Ví dụ sau đây minh họa cách chứng minh định lý này.

**Ví dụ 8.** Khai triển của $(x + y)^3$ có thể nhận được bằng suy luận tổ hợp thay cho việc nhân liên tiếp ba số hạng. Khi khai triển $(x + y)^3 = (x + y)(x + y)(x + y)$ tất cả các tích của các số hạng trong tổng thứ nhất với các số hạng trong tổng thứ hai và trong tổng thứ ba được cộng lại. Các số hạng dạng $x^3$, $x^2y$, $xy^2$ và $y^3$ được sinh ra. Để nhận được số hạng dạng $x^3$, $x$ cần phải được chọn trong mọi tổng và chỉ bằng một cách. Như vậy số hạng $x^3$ có hệ số bằng 1. Để nhận được số hạng dạng $x^2y$, $x$ cần phải được chọn từ hai trong ba tổng (do vậy, $y$ từ tổng còn lại). Vì thế số các số hạng như thế bằng số tổ hợp chập 2 từ 3 phần tử, tức là $C(3,2)$. Tương tự, số các số hạng dạng $xy^2$ bằng số cách chọn một trong ba tổng để được $x$ (do vậy chọn $y$ từ mỗi hai tổng còn lại). Điều này có thể làm bằng $C(3,1)$ cách. Cuối cùng để nhận được $y^3$ chỉ có một cách chọn $y$ từ mỗi một trong ba tổng của tích. Do vậy suy ra

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu định lý nhị thức.

**ĐỊNH LÝ 6.** ĐỊNH LÝ NHỊ THỨC. Cho $x$ và $y$ là hai biến và $n$ là một số nguyên dương. Khi đó

$$\begin{aligned}(x + y)^n &= \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j \\ &= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + \dots + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n.\end{aligned}$$

***Chứng minh.*** Ta sẽ chứng minh định lý này bằng suy luận tổ hợp. Các số hạng trong khai triển của $(x + y)^n$ sẽ có dạng $x^{n-j}y^j$ với $j = 0, 1, \dots, n$. Để nhận được số hạng dạng $x^{n-j}y^j$ ta chọn $x$ từ $n - j$ tổng $(x + y)$ và có $C(n, n - j)$ cách chọn như vậy, khi đó $y$ được chọn từ $j$ tổng còn lại (chỉ có một cách duy nhất). Do đó hệ số của $x^{n-j}y^j$ là $C(n,n - j) = C(n,j)$. Đó chính là điều cần chứng minh.

■

**Ví dụ 9.** Tìm khai triển của biểu thức $(x + y)^4$.

*Giải*: Theo định lý nhị thức ta có :

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= \sum C(4, j)x^{4-j}y^j \\ &= C(4,0)x^4 + C(4,1)x^3y + C(4,2)x^2y^2 + C(4,3)xy^3 + C(4,4)y^4 \\ &= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

■

**Ví dụ 10.** Tính hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(x + y)^{25}$.

*Giải:* Theo công thức nhị thức hệ số này bằng

$$C(25,13) = \frac{25!}{13!12!} = 5\,200\,300.$$

■

**Ví dụ 11**. Tính hệ số của $x^{12}\, y^{13}$ trong khai triển của $(2x - 3y)^{25}$. Theo định lý nhị thức ta có.

$$(2x + (-3y))^{25} = \sum C(25, j)\ (2x)^{25-j}\, (-3y)^j$$

Do vậy hệ số của $x^{12}\, y^{13}$ trong khai triển nhận được khi $j = 13$, tức là

$$C(25,13).2^{12}\,(-3)^{13} = -\frac{25!2^{12}3^{13}}{13!\ 12!}$$

■

Dùng định lý nhị thức ta có thể chứng minh Định lý 4 bằng cách khác. Nhớ lại là Định lý 4 phát biểu như sau: với mọi $n$ nguyên dương ta có

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

***Chứng minh***. Dùng định lý nhị thức ta có

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k).1^k.1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)$$

Đó chính là điều cần chứng minh.

Dùng định lý nhị thức ta cũng có thể chứng minh hằng đẳng thức sau đây.

**ĐỊNH LÝ 7.** Cho $n$ là một số nguyên dương. Khi đó

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k.\, C(n,k) = 0$$

***Chứng minh***. Từ định lý nhị thức ta suy ra

$$0 = ((-1) + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.C(n,k)$$

Đó là điều cần chứng minh.

## *BÀI TẬP*

**1**. Liệt kê tất cả các hoán vị của $\{a, b, c\}$.

**2**. Tập hợp $\{a, b, c, d, e, f\}$ có tất cả bao nhiêu hoán vị ?

**3**. Có tất cả bao nhiêu hoán vị của tập hợp $\{a,b,c,d,e,f\}$ với phần tử cuối cùng bằng $a$.

4. Giả sử $S = \{1,2,3,4,5\}$.

   a) Liệt kê tất cả các chỉnh hợp chập 3 của $S$.

   b) Liệt kê tất cả các tổ chập 3 của $S$.

5. Tìm giá trị của các đại lượng sau.

   a) $P(6,3)$ b) $P(6,5)$ c) $P(8,1)$

   d) $P(8,5)$ e) $P(8,8)$ f) $P(10,9)$

6. Tìm giá trị của các đại lượng sau.

   a) $C(5,1)$ b) $C(5,3)$ c) $C(8,4)$

   d) $C(8,8)$ e) $C(8,0)$ f) $C(12,6)$.

7. Tính số chỉnh hợp chập 5 của tập 9 phần tử.

8. Có bao nhiêu thứ tự có thể xảy ra trong cuộc thi chạy giữa năm vận động viên?

9. Bao nhiêu khả năng có thể xảy ra đối với các vị trí thứ nhất, thứ nhì và thứ ba trong cuộc đua có 12 con ngựa, nếu mọi thứ tự tới đích đều có thể?

10. Có sáu ứng cử viên chức thống đốc bang. Tính số cách in tên của các ứng cử viên lên phiếu bầu cử.

11. Một nhóm sinh viên gồm $n$ nam và $n$ nữ. Có bao nhiêu cách xếp thành một hàng sao cho nam nữ đứng xen nhau?

12. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 2 số nguyên dương nhỏ hơn 100?

13. Có bao nhiêu cách chọn một tập hợp 5 chữ từ bảng chữ cái tiếng Anh?

14. Một tập hợp 10 phần tử có bao nhiêu tập con với số phần tử lẻ?

15. Một tập hợp 100 phần tử có bao nhiêu tập con có nhiều hơn hai phần tử?

16. Bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 có :

   a) Đúng 3 số 0? b) Số các số 0 bằng số các số 1?

   c) Ít nhất 7 số 1? d) ít nhất 3 số 1?

**17.** Có một trăm vé đánh số từ 1 đến 100 được bán cho 100 người khác nhau. Người ta sẽ trao 4 giải thưởng kể cả giải độc đắc . Hỏi

a) Có bao nhiêu cách trao thưởng ?

b) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 trúng giải độc đắc?

c) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 trúng một trong các giải?

d) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu người giữ vé 47 không trúng thưởng?

e) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu hai người giữ vé 19 và vé 47 trúng thưởng?

f) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu ba người giữ vé 19, 47 và 73 trúng thưởng?

g) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu bốn người giữ vé 19, 47, 73 và 97 trúng thưởng?

h) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu không ai trong bốn người giữ vé 19, 47, 73 và 97 trúng thưởng?

i) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng nếu một trong bốn người giữ vé 19, 47, 83 và 97 trúng giải độc đắc?

j) Có bao nhiêu cách trao giải thưởng, nếu những người giữ vé 19, 47 trúng giải nhưng những người có vé 73 và 97 không trúng giải?

**18.** Một đội bóng có 13 cầu thủ.

a) Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ để thi đấu?

b) Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ trong 13 cầu thủ của đội sao cho mỗi cầu thủ được phân công chơi ở một trong 10 vị trí đã định?

c) Trong 13 cầu thủ có 3 là nữ. Có bao nhiêu cách chọn 10 cầu thủ để thi đấu, nếu ít nhất có một cầu thủ là nữ?

**19.** Một câu lạc bộ có 25 thành viên.

a) Có bao nhiêu cách chọn 4 thành viên vào ủy ban thường trực?

b) Có bao nhiêu cách chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký và thủ quỹ?

**20.** Một giáo sư soạn 40 câu hỏi đúng / sai về toán rời rạc, trong đó có 17 câu phải trả lời là đúng. Nếu thứ tự các câu hỏi có thể tùy ý, thì có bao nhiêu đáp án khác nhau?

**21.** Từ tập các số nguyên dương không vượt quá 100, có thể tạo được bao nhiêu chỉnh hợp chập 4 chứa 3 số nguyên liên tiếp

a) Theo trật tự thông thường và có thể bị phân cách bởi các số khác của chỉnh hợp?

b) Tại những vị trí liên tiếp của chỉnh hợp?

**22.** Tổ bộ môn toán học của một trường đại học có 7 cán bộ nữ và 9 cán bộ nam.

a) Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ nếu trong hội đồng có ít nhất một là nữ?

b) Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 5 thành viên của tổ nếu trong hội đồng có ít nhất một là nữ và ít nhất một là nam?.

**23.** Trong bảng chữ cái tiếng Anh có 21 phụ âm và 5 nguyên âm. Bao nhiêu xâu gồm 6 chữ thường chứa.

a) Đúng một nguyên âm? b) Đúng hai nguyên âm?

b) Ít nhất một nguyên âm? d) Ít nhất hai nguyên âm?

**24.** Bao nhiêu xâu gồm 6 chữ thường từ bảng chữ cái tiếng Anh chứa

a) Chữ $a$?

b) Chữ $a$ và chữ $b$?

c) Chữ $a$ và chữ $b$ tại các vị trí liên tiếp với $a$ trước $b$ và tất cả các chữ là khác nhau?

d) Chữ $a$ và chữ $b$, trong đó $a$ đứng ở vị trí nào đó bên trái của $b$, tất cả các chữ là khác nhau?

**25.** Giả sử một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam bằng số ủy viên nữ?

**26.** Một tổ bộ môn có 10 nam và 15 nữ. Có bao nhiêu cách chọn một hội đồng gồm 6 ủy viên trong đó số ủy viên nam ít hơn số ủy viên nữ?

**27.** Có bao nhiêu xâu nhị phân chứa đúng tám số 0 và mười số 1 và ngay sau mỗi số 0 nhất thiết là một số 1.

**28**. Có bao nhiêu xâu nhị phân chứa đúng năm số 0 và mười bốn số 1 và ngay sau mỗi số 0 nhất thiết là hai số 1.

**29.** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 chứa ít nhất ba số 0 và ít nhất ba số 1.

**30.** Có bao nhiêu cách chọn 12 nước trong Liên hiệp quốc vào một hội đồng nếu 3 nước được bầu từ nhóm 45 nước, 4 nước được bầu từ nhóm 57 nước, các nước khác được bầu từ 69 nước còn lại?

**31**. Có bao nhiêu biển đăng ký xe chứa 3 chữ cái tiếp theo là 3 chữ số, nếu các chữ cái hoặc chữ số không xuất hiện quá một lần?

**32**. Có bao nhiêu cách xếp 6 người ngồi xung quanh một bàn tròn, hai cách ngồi được xem là như nhau nếu cách này có thể nhận được từ cách kia bằng cách quay bàn đi một góc nào đó?

**33**. Chỉ ra rằng nếu $n$ và $k$ là các số nguyên dương, khi đó

$$C(n+1, k) = \frac{(n+1)C(n, k-1)}{k}$$

Hãy dùng hằng đẳng thức này để xây dựng một định nghĩa bằng quy nạp các hệ số của nhị thức.

**34**. Chứng tỏ rằng nếu $p$ là nguyên tố và $k$ là số nguyên sao cho $1 \leq k \leq p-1$ khi đó $C(p,k)$ chia hết cho $p$.

**35**. Tìm khai triển của $(x+y)^5$.

**36**. Tìm hệ số của $x^5y^8$ trong khai triển của $(x+y)^{13}$.

**37**. Trong khai triển của $(x+y)^{100}$ có bao nhiêu số hạng?

**38**. Tìm hệ số của $x^7$ trong khai triển của $(1+x)^{11}$.

**39**. Tìm hệ số của $x^9$ trong khai triển của $(2-x)^{19}$.

**40**. Tìm hệ số của $x^8y^9$ trong khai triển của $(3x+2y)^{17}$.

**41**. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển của $(2x-3y)^{200}$.

**42*.** Tìm công thức tính hệ số của $x^k$ trong khai triển của $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{100}$, trong đó $k$ là số tự nhiên.

**43***. Tìm công thức hệ số của $x^k$ trong khai triển của $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{100}$, trong đó $k$ là số tự nhiên.

**44**. Trong tam giác Pascal hàng chứa hệ số nhị thức $C(10,k)$ $(0 \leq k \leq 10)$ là 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
Sử dụng hằng đẳng thức Pascal hãy tạo ra hàng ngay sau hàng đã cho trong tam giác Pascal.

**45**. Hàng nào của tam giác Pascal chứa hệ số nhị thức $C(9, k)$ $(0 \leq k \leq 9)$

**46***. Cho $n$ là số nguyên dương. Tìm hệ số nhị thức lớn nhất $C(n,r)$, trong đó $r$ là số nguyên không âm nhỏ hơn hay bằng $n$.

**47**. Chứng minh hằng đẳng thức Pascal bằng cách dùng công thức tính $C(n,k)$.

**48**. Chứng minh công thức : $C(n,r)C(r,k) = C(n,k).C(n-k,\ r-k)$, trong đó $n, r, k$ là các số nguyên không âm với $r \leq n$ và $k \leq r$.

a) Bằng lý thuyết tổ hợp,

b) Bằng cách sử dụng công thức tính số tổ hợp chập $r$ của tập có $n$ phần tử.

**49***. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=0}^{r} C(n+k,k) = C(n+r+1,\ r)$$

trong đó $n$ và $r$ là các số nguyên dương.

a) Bằng lý thuyết tổ hợp,

b) Sử dụng hằng đẳng thức Pascal.

**50**. Chỉ ra rằng nếu $n$ là số nguyên dương thì $C(2n,\ 2) = 2C(n,2) + n^2$

a) Bằng lý thuyết tổ hợp,

b) Bằng các biến đổi đại số.

**51***. Hãy chứng minh bằng công cụ tổ hợp rằng

$$\sum_{k=1}^{n} k\, C(n\ ,k) = n\, 2^{n-1}$$

*(Gợi ý* : Hãy tính bằng hai cách số cách chọn một hội đồng và thêm vào đó chọn chủ tịch hội đồng đó).

**52***. Hãy chứng minh bằng công cụ tổ hợp rằng.

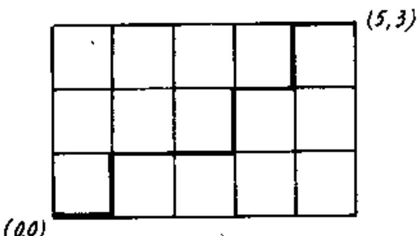
$$\sum_{k=1}^{n} k.C(n,k)^2 = n.C(2n - 1, n - 1).$$

(*Gợi ý* : hãy tính bằng hai cách số cách chọn một hội đồng có $n$ ủy viên từ nhóm $n$ giáo sư toán học và $n$ giáo sư tin học, sao cho chủ tịch là giáo sư toán).

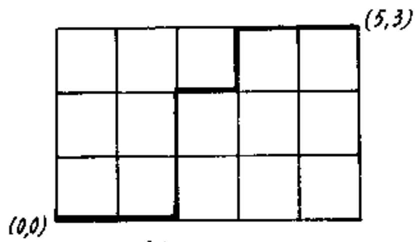
**53.** Giả sử $S$ là một tập cho trước nào đó. Chứng minh rằng số các tập con của $S$ có số phần tử là lẻ cũng bằng số các tập con của nó với số phần tử là chẵn.

**54***. Dùng quy nạp toán hãy chứng minh định lý nhị thức.

**55**. Trong bài tập này chúng ta sẽ đếm số đường đi từ gốc (0, 0) của mặt phẳng $xy$ tới điểm $(m, n)$ sao cho mỗi đường đi gồm một dãy các bước đi. Mỗi bước đi là sự dịch chuyển sang bên phải hay lên trên một đơn vị (sự dịch chuyển sang bên trái hay xuống dưới là không cho phép). Hai đường đi như thế từ điểm (0,0) tới (5,3) được minh họa trên hình vẽ.




a)




b)

a) Chỉ ra rằng mỗi đường đi như trên có thể biểu diễn bằng một xâu nhị phân gồm $m$ số 0 và $n$ số 1, trong đó 0 biểu thị chuyển động sang phải, còn 1 là chuyển động lên trên một đơn vị.

b) Từ phần a) hãy suy ra có $C(m + n, n)$ đường đi từ (0, 0) tới $(m, n)$.

**56**. Dùng Bài tập 55 chứng minh đẳng thức $C(n, k) = C(n, n - k)$ trong đó $k$ là số nguyên dương và $0 \leq k \leq n$.
(*Gợi ý* : tính số đường đi dạng như trong Bài tập 55, từ điểm (0, 0) tới $(n - k, k)$ và từ (0, 0) tới $(k, n - k)$).

**57**. Dùng Bài tập 55 chứng minh Định lý 4.
(*Gợi ý* : Tính số đường đi với $n$ bước được mô tả trong Bài tập 55. Mỗi đường đi như thế có điểm cuối tại một trong các điểm $(n - k, k)$ với $k = 0, 1, 2, ..., n$).

**58.** Dùng bài tập 55 chứng minh hằng đẳng thức Pascal.
(*Gợi ý* : Chỉ ra rằng đường đi như đã mô tả trong Bài tập 55 từ điểm (0, 0) tới $(n + 1 - k, k)$ qua hoặc $(n + 1 - k, k - 1)$ hoặc $(n - k, k)$, nhưng không qua cả hai).

**59**. Chứng minh hằng đẳng thức trong Bài tập 49, sử dụng Bài tập 55. (*Gợi ý* : Trước tiên lưu ý rằng số đường đi từ (0, 0) tới $(n + 1, r)$ bằng $C(n + 1 + r, r)$. Sau đó, tính số đường đi bằng cách lấy tổng các đường có bước đầu tiên là đi lên trên $k$ đơn vị ($k = 0, 1, \ldots r$).

**60***. Trong trận chung kết giải vô địch bóng đá thế giới để chấm dứt tình trạng ngang điểm người ta áp dụng thủ tục đá luân lưu như sau. Mỗi đội chọn ra năm cầu thủ theo một thứ tự nhất định. Mỗi cầu thủ thực hiện một quả đá phạt đền, cầu thủ đội này đá xong thì đến lượt cầu thủ của đội kia và cứ tiếp diễn như thế theo thứ tự của các cầu thủ đã xác định. Nếu tỷ số trận đấu sau 10 quả đá phạt đền vẫn bằng nhau thì thủ tục này được lặp lại. Và nếu sau quả đá phạt đền thứ 20 mà tỷ số trận đấu vẫn còn bằng nhau thì luật "cái chết bất ngờ" sẽ được áp dụng, tức là, đội đầu tiên ghi bàn thắng mà không bị giáng trả sẽ là đội giành cúp vàng.

a) Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau vòng đá 10 quả phạt đền thứ nhất?

b) Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau vòng đá 10 quả phạt đền thứ hai?

c) Có bao nhiêu tỷ số khác nhau có thể xảy ra nếu trận đấu kết thúc sau khi thực hiện không quá 10 quả phạt đền theo luật "cái chết bất ngờ"?

## 4.4. XÁC SUẤT RỜI RẠC

### MỞ ĐẦU

Lý thuyết tổ hợp và lý thuyết xác suất có chung một khởi nguyên. Lý thuyết xác suất bắt đầu phát triển vào thế kỷ 17 khi các trò chơi may rủi được nhà toán học Pháp Blaise Pascal phân tích một cách kỹ càng. Trong các nghiên cứu này Pascal đã phát hiện ra những tính chất khác nhau của các hệ số nhị thức. Vào thế kỷ 18 nhà toán học Pháp Laplace, trước đó cũng đã nghiên cứu trò chơi may rủi, đã đưa ra định nghĩa xác suất của một biến cố như là tỷ số giữa các kết cục *thuận lợi* và toàn bộ số các kết cục có thể. Ví dụ, xác suất xuất hiện các mặt lẻ khi gieo một con súc sắc là tỷ số giữa số các kết cục *thuận lợi* – tức là số cách xuất hiện mặt lẻ – và tổng số các kết cục có thể – tức là, tổng số các cách xuất hiện một mặt bất kỳ. Rõ ràng có 6 kết cục có thể – các mặt 1, 2, 3, 4, 5 và 6 – và có đúng 3 kết cục có ích – các mặt 1, 3 và 5. Do vậy, xác suất xuất hiện các mặt lẻ khi gieo một con súc sắc là 3/6 = 1/2. (Lưu ý rằng chúng ta giả sử con súc sắc là đối xứng, tức là các kết cục có thể là đồng khả năng).

Trong mục này chúng ta chỉ nghiên cứu các thí nghiệm có một số hữu hạn các kết cục đồng khả năng. Điều này cho phép chúng ta sử dụng định nghĩa của Laplace về xác suất của một biến cố.

## XÁC SUẤT HỮU HẠN

Một thủ tục mang lại một số trong các kết cục khả dĩ được gọi là một **thí nghiệm**. Tập hợp các kết cục khả dĩ gọi là **không gian mẫu** của thí nghiệm. Mỗi tập con của không gian mẫu gọi là một **biến cố** (sự kiện). Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra định nghĩa của Laplace về xác suất của một biến cố khi số các kết cục có thể là hữu hạn.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Giả sử $S$ là không gian mẫu hữu hạn với các kết cục đồng khả năng. Khi đó xác suất của biến cố $E$ – một tập con của $S$ – sẽ bằng $p(E) = |E|/|S|$.

Chúng ta xét một vài ví dụ.

**Ví dụ 1.** Một bình kín đựng bốn quả bóng xanh và năm quả bóng đỏ. Tính xác suất lấy ngẫu nhiên được một quả bóng xanh ra khỏi bình.

*Giải:* Để tính xác suất hãy nhớ rằng có tất cả 9 kết cục có thể và có 4 trong những kết cục có thể này cho ta quả bóng xanh. Do vậy xác suất cần tính bằng 4/9.

■

**Ví dụ 2.** Tính xác suất của biến cố "tổng các số của hai mặt trên của 2 con súc sắc khi chúng được gieo đồng thời bằng 7".

*Giải :* Khi gieo 2 con súc sắc có tất cả 36 kết cục có thể (vì mỗi con súc sắc có 6 mặt, theo quy tắc nhân tổng số các kết cục có thể là $6^2 = 36$). Nhưng ta chỉ có 6 kết cục *thuận lợi* đó là (1,6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) và (6,1) trong đó giá trị của các con súc sắc thứ nhất và thứ hai được biểu diễn bằng một cặp số có thứ tự. Do vậy xác suất của biến cố "tổng các số của hai mặt trên của 2 con súc sắc khi chúng được gieo đồng thời bằng 7" là 6/36 = 1/6.

■

Gần đây xổ số đã trở nên cực kỳ phổ cập. Chúng ta có thể dễ dàng tính được khả năng trúng thưởng của các loại xổ số khác nhau.

**Ví dụ 3.** Người chơi xổ số sẽ trúng giải nhất khi chọn được bốn chữ số có thứ tự phù hợp với bốn chữ số được chọn ngẫu nhiên nhờ một thiết bị cơ khí nào đó. Nếu chỉ có ba chữ số phù hợp thì sẽ trúng giải nhì. Hãy tính xác suất trúng giải nhất và xác suất trúng giải nhì.

*Giải:* Chỉ có một cách chọn trúng cả bốn chữ số. Nhưng theo quy tắc nhân có tất cả $10^4 = 10\,000$ cách chọn bốn chữ số. Vì thế, xác suất trúng giải nhất là 1/10000 = 0.0001.

Người chơi sẽ được giải nhì nếu chọn được đúng ba trong bốn chữ số và có đúng một chữ số bị sai. Rõ ràng có chín cách chọn để chữ số đầu tiên bị sai (một cách chọn đúng) và có chỉ một cách chọn ba chữ số còn lại là đúng. Vì vậy, có 9 cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số đầu tiên sai ba chữ số còn lại là đúng. Tương tự có chín cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số thứ hai sai, chín cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số thứ ba sai và chín cách chọn bốn chữ số trong đó chữ số thứ tư sai. Theo quy tắc cộng, có tất cả 36 cách chọn bốn chữ số trong đó có đúng một chữ số sai. Vì vậy xác suất trúng giải nhỏ là 36/10000 = 9/2500 = 0.0036.

■

**Ví dụ 4.** Hiện nay có nhiều đợt xổ số trao những giải thưởng rất lớn cho những ai chọn đúng 6 số trong $n$ số nguyên dương với $n$ thường nằm giữa 30 và 50. Hãy tính xác suất trúng thưởng khi $n = 40$.

*Giải:* Rõ ràng chỉ có một tổ hợp trúng thưởng và tổng số cách chọn 6 số trong 40 số là :

$$C(40,\ 6) = \frac{40!}{34!\,6!} = 3\ 838\ 380$$

Do vậy xác suất trúng thưởng là :

$$\frac{1}{3838380} \approx 0.00000026$$

■

Bằng các kỹ thuật đã được trình bày ở trên bây giờ chúng ta có thể giải được một số bài toán xác suất liên quan tới việc chơi bài tú lơ khơ. Một cỗ bài có 52 quân, chia thành 13 *bộ*. Đó là các bộ hai, ba, bốn, năm, sáu, bảy, tám, chín, mười, gi, quy, ca, át. Trong mỗi bộ có 4 quân, mỗi quân thuộc một trong các (loại) *hoa* rô, cơ, pích, nhép.

**Ví dụ 5.** Có bao nhiêu cách nhận được 5 quân bài từ một cỗ bài?

*Giải:* Rõ ràng có $C(52,\ 5) = 2\ 598\ 960$ cách khác nhau.

■

**Ví dụ 6.** Giả sử ta lấy ngẫu nhiên 5 quân bài từ một cỗ bài (lấy một xấp *bài 5 quân*). Tính xác suất của biến cố "trong *xấp bài* có 4 quân thuộc cùng một bộ".

*Giải:* Theo quy tắc nhân, số cách lấy 5 quân trong đó có 4 quân thuộc cùng một bộ sẽ là tích của số cách chọn một bộ, số cách chọn 4 quân từ 1 bộ và số cách chọn quân bài thứ năm trong các quân bài còn lại, tức là :

$$C(13,1)\ C(4,4)\ C(48,1).$$

Vì tất cả có $C(52,5)$ cách khác nhau lấy 5 quân bài, nên xác suất nhận được "một tay bài có 4 quân thuộc cùng một bộ" là

$$\frac{C(13,1)C(4,4)C(48,1)}{C(52,5)} = \frac{13.1.48}{2598960} \approx 0.00024.$$

■

**Ví dụ 7.** Tìm xác suất khi lấy ngẫu nhiên một xấp bài 5 quân có 3 quân thuộc cùng một bộ và 2 quân còn lại thuộc một bộ khác, lưu ý là có kể đến thứ tự của các bộ.

*Giải:* Theo quy tắc nhân, số cách lấy 5 quân bài trong đó có 3 quân thuộc cùng một bộ và 2 quân còn lại thuộc một bộ khác sẽ bằng tích của số cách lấy hai bộ có thứ tự, số cách lấy 3 quân từ bộ thứ nhất, và số cách lấy 2 quân từ bộ thứ hai. (Hãy lưu ý đến thứ tự của các bộ được chọn, vì 3 quân quy và 2 quân át khác với 3 quân át và 2 quân quy). Số cách chọn thoả mãn điều kiện đầu bài là :

$$P(13,2)C(4,3)C(4,2) = 13.12.4.6 = 3744.$$

Vì có 2 598 960 cách có thể nên xác suất cần tìm là :

$$\frac{3744}{2\,598\,960} \approx 0.0014.$$

■

## XÁC SUẤT CỦA TỔ HỢP CÁC BIẾN CỐ

Chúng ta có thể sử dụng kỹ thuật đếm để tìm xác suất của biến cố được tạo nên từ các biến cố khác.

**ĐỊNH LÝ 1**. Giả sử $E$ là một biến cố trong không gian mẫu $S$. Khi đó xác suất của biến cố $\overline{E}$, biến cố bù của $E$ là :

$$p(\overline{E}) = 1 - p(E).$$

*Chứng minh.* Để tìm xác suất của biến cố $\overline{E}$ ta nhận thấy $|\overline{E}| = |S| - |E|$. Do vậy :

$$p(\overline{E}) = \frac{|S| - |E|}{|S|} = 1 - p(E).$$

■

Nhiều khi việc tính trực tiếp xác suất của một biến cố lại tỏ ra kém hiệu quả. Lúc đó người ta dùng chiến thuật luân phiên, thay cho việc tính xác suất của một biến cố người ta tính xác suất của phần bù của nó. Bài toán được giải quyết dễ dàng hơn, như các ví dụ sau đây cho thấy.

**Ví dụ 8:** Một xâu 10 bit nhị phân được tạo ra một cách ngẫu nhiên. Tìm xác suất để nhận được một xâu có ít nhất 1 chữ số 0.

*Giải.* Giả sử $E$ là biến cố "có ít nhất một trong 10 bit là chữ số 0". Khi đó $\overline{E}$ là biến cố "tất cả các bit đều là số 1". Vì không gian mẫu $S$ là tập các xâu nhị phân độ dài 10, nên ta suy ra

$$p(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{|\overline{E}|}{|S|} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

Vì vậy xác suất nhận được xâu nhị phân có ít nhất một chữ số 0 là 1023/1024. Bài toán sẽ rất khó giải nếu không dùng Định lý 1 mà tính trực tiếp.

■

Chúng ta có thể tính xác suất của hợp hai biến cố.

**ĐỊNH LÝ 2.** Giả sử $E_1$ và $E_2$ là hai biến cố trong không gian mẫu $S$. Khi đó :

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

*Chứng minh.* Theo công thức tính số phần tử của hợp hai tập hợp (trong Tiết 1.4) ta có

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} p(E_1 \cup E_2) &= |E_1 \cup E_2|/|S| \\ &= (|E_1| + |E_2| - |E_1| \cap |E_2|)/|S| \\ &= |E_1|/|S| + |E_2|/|S| - |E_1 \cap E_2|/|S| \\ &= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2). \end{aligned}$$

**Ví dụ 9.** Tính xác suất để một số nguyên dương được chọn ngẫu nhiên từ tập các số nguyên dương không lớn hơn 100, chia hết cho 2 hoặc cho 5.

*Giải:* Giả sử $E_1$ là biến cố "số nguyên được chọn chia hết cho 2" và $E_2$ là biến cố "số nguyên chọn được chia hết cho 5". Khi đó $E_1 \cup E_2$ là biến cố "số nguyên chọn được chia hết cho 2 hoặc 5", còn $E_1 \cap E_2$ là biến cố "số nguyên chọn được chia hết cho cả 2 và 5" hay tương đương với nó, chia hết cho 10. Vì $|E_1| = 50$, $|E_2| = 20$ và $|E_1 \cap E_2| = 10$ ta suy ra

$$\begin{aligned} p(E_1 \cup E_2) &= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) \\ &= \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

■

## BÀI TẬP

1. Tính xác suất để một quân bài được chọn từ cỗ bài là con át.

2. Tính xác suất xuất hiện mặt số 6 khi gieo một con súc sắc.

3. Tính xác suất để một số nguyên được chọn ngẫu nhiên từ 100 số nguyên dương đầu tiên là một số lẻ.

4. Tính xác suất để một ngày được chọn ngẫu nhiên trong một năm (có 366 ngày) là một ngày của tháng 4.

5. Tính xác suất của biến cố "tổng các số trên hai con súc sắc khi gieo đồng thời là một số chẵn".

6. Tính xác suất để một quân bài được chọn từ cỗ bài là quân át hoặc một quân cơ.

7. Tính xác suất xuất hiện mặt ngửa sáu lần liên tiếp khi tung một đồng xu.

8. Xác suất để một "xấp bài 5 quân" chứa quân át cơ bằng bao nhiêu?

9. Tính xác suất của biến cố "một xấp bài 5 quân không chứa quân quy cơ".

10. Xác suất để một "xấp bài 5 quân chứa hai quân rô và ba quân pích" bằng bao nhiêu?

11. Tính xác suất để một "xấp bài 5 quân chứa con hai rô, quân ba pích, quân sáu cơ, quân mười nhép, và quân ca cơ" bằng bao nhiêu?

12. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân chứa đúng một con át.

13. Tìm xác suất để một xấp bài 5 quân chứa ít nhất một con át.

14. Tính xác suất được một xấp bài 5 quân chứa các quân bài thuộc 5 bộ khác nhau.

15. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân chứa hai bộ đôi (tức là có hai con thuộc một bộ, hai con khác thuộc bộ thứ hai, con bài thứ năm thuộc bộ thứ ba).

16. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân có cùng hoa, nghĩa là cả năm con cùng một hoa.

17. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân thuộc năm bộ liên tiếp. Lưu ý rằng con át có thể được xem là con thấp nhất của xấp A–2–3–4–5 hoặc là quân cao nhất của xấp 10–J–Q–K–A.

**18**. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân cùng một hoa và thuộc năm bộ liên tiếp.

**19***. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân trong đó năm quân thuộc năm bộ khác nhau nhưng không cùng hoa haythuộc 5 bộ liên tiếp.

**20**. Tính xác suất để một xấp bài 5 quân là một xấp cùng hoa liên tiếp từ quân át xuống.

**21**. Tính xác suất của biến cố khi gieo 6 lần một con súc sắc không xuất hiện mặt có số chẵn.

**22**. Xác suất nhận được một số nguyên dương chia hết cho 3 khi nó được chọn ngẫu nhiên từ một tập các số nguyên dương không vượt quá 100 bằng bao nhiêu?

**23**. Tính xác suất nhận được một số nguyên dương chia hết cho 5 hoặc 7 khi nó được chọn ngẫu nhiên từ một tập các số nguyên dương không vượt quá 100.

**24**. Tìm xác suất trúng xổ số khi chọn đúng 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 30. b) 36. c) 42. d) 48.

**25**. Tìm xác suất trúng xổ số khi chọn đúng 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 50. b) 52. c) 56. d) 60.

**26**. Tìm xác suất không chọn đúng cả 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 40. b) 48. c) 56. d) 64.

**27**. Tìm xác suất khi chọn trúng chỉ một trong 6 số nguyên, (thứ tự các số nguyên được chọn là không quan trọng) từ các số nguyên dương không vượt quá :

a) 50. b) 48. c) 56. d) 64.

**28**. Một người chơi siêu xổ số Pensylvania phải chọn 7 số từ 80 số nguyên dương đầu tiên. Nếu 7 số được chọn này nằm trong 11 số do hội đồng xổ số Pensylvania chọn thì sẽ trúng giải thưởng lớn. Tính xác suất để một người chơi trúng giải thưởng lớn.

**29**. Trong cuộc chơi siêu xổ số người chơi sẽ trúng thưởng nếu 8 số anh ta chọn trùng với 8 số do máy tính chọn từ các số nguyên dương không vượt quá 100. Tính xác suất trúng thưởng.

**30**. Tính xác suất trúng giải thưởng dành cho ai chọn được đúng 5 số (chứ không là 6) trong 6 số do máy tính chọn từ 40 số nguyên dương đầu tiên.

31. Trên vành của bánh xe dùng để quay xổ số có gắn 38 con số, trong đó có 18 số màu đỏ, 18 số màu đen, 2 số còn lại, không đỏ mà cũng không đen, là các số 0 và 00. Khi bánh xe quay, xác suất để nó dừng lại tại một con số bất kỳ là 1/38.

a) Tính xác suất để bánh xe dừng tại một số màu đỏ.

b) Tính xác suất để bánh xe dừng tại một con số màu đen hai lần liên tục.

c) Tính xác suất để bánh xe dừng tại số 0 hoặc 00.

d) Tính xác suất để bánh xe không dừng tại số 0 hoặc 00 năm lần liên tiếp.

e) Tính xác suất để bánh xe dừng tại một số nằm giữa 1 và 6 (kể cả 1 và 6) trong một lần quay nhưng không dừng lại giữa chúng trong lần quay kế tiếp.

**32**. Khả năng xảy ra tổng các số ở mặt trên bằng 8 khi gieo hai con súc sắc lớn hơn hay khi gieo ba con súc sắc là lớn hơn?

**33**. Khả năng xảy ra tổng các số ở mặt trên bằng 9 khi gieo hai con súc sắc lớn hơn hay khi gieo ba con súc sắc là lớn hơn?

**34**. Hai biến cố $E_1$ và $E_2$ được gọi là **độc lập** nếu $p(E_1 \cap E_2) = p(E_1)\,p(E_2)$. Giả sử chúng ta tung đồng xu 3 lần. Mỗi biến cố là tập con của tập các kết cục có thể. Hãy xét xem mỗi cặp các biến cố sau đây có là độc lập hay không.

a) $E_1$ : lần đầu xuất hiện mặt sấp.

$E_2$ : lần hai xuất hiện mặt ngửa.

b) $E_1$ : lần đầu xuất hiện mặt sấp.

$E_2$ : hai lần chứ không phải ba lần, xuất hiện mặt ngửa liên tiếp.

c) $E_1$ : lần thứ hai xuất hiện mặt sấp.

$E_2$ : hai lần chứ không phải ha lần, xuất hiện mặt ngửa liên tiếp.

## 4.5. CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP SUY RỘNG

### MỞ ĐẦU

Trong nhiều bài toán đếm, các phần tử có thể được sử dụng lặp lại. Ví dụ, các chữ cái hoặc các chữ số được dùng nhiều lần trong một biển đăng ký xe. Khi mua một tá quà tặng, mỗi loại có thể được lấy nhiều lần. Điều này không giống với bài toán đếm đã thảo luận ở các tiết trên trong đó chúng ta chỉ nghiên cứu các hoán vị và tổ hợp mà mỗi đối tượng chỉ được dùng nhiều nhất một lần. Trong tiết này chúng sẽ trình bày cách giải các bài toán đếm khi các phần tử có thể được dùng nhiều lần.

Cũng như vậy, một số bài toán đếm có chứa các phần tử giống nhau. Ví dụ, để đếm số cách khác nhau mà các chữ cái của từ *SUCCES* có thể được sắp xếp lại, cần phải xem xét tới việc sắp xếp các chữ cái giống nhau.

Ngoài ra, trong tiết này chúng ta cũng sẽ giải thích cách giải một lớp khá rộng các bài toán đếm khác, đó là bài toán đếm cách đặt các phần tử khác nhau vào trong hộp. Ví dụ, tính số cách chia một cỗ bài cho 4 người chơi.

Tóm lại, những phương pháp mô tả trước đây trong chương này và những phương pháp sẽ đưa vào trong tiết này sẽ tạo thành một bộ công cụ rất có ích để giải một lớp rất rộng các bài toán đếm. Kho công cụ này sẽ còn phong phú hơn khi mà trong Chương 5 chúng ta sẽ đưa thêm một số phương pháp nữa, lúc đó các bạn sẽ có thể giải được hầu hết các bài toán đếm thường gặp trong một phạm vi rộng lớn của các lĩnh vực nghiên cứu .

### HOÁN VỊ CÓ LẶP

Chúng ta xét bài toán đếm có lặp sau đây.

**Ví dụ 1.** Từ bảng chữ cái tiếng Anh có thể tạo ra được bao nhiêu xâu có độ dài $n$?

*Giải:* Theo quy tắc nhân, vì có 26 chữ cái và vì mỗi chữ có thể được dùng lại nên chúng ta có $26^n$ xâu với độ dài $n$.

■

Vấn đề sau đây liên quan tới xác suất cũng động chạm tới **chỉnh hợp** có lặp.

**Ví dụ 2.** Tính xác suất lấy liên tiếp được 3 quả bóng đỏ ra khỏi bình kín chứa 5 quả đỏ và 7 quả xanh, nếu sau mỗi lần lấy một quả bóng ra lại bỏ nó trở lại bình.

*Giải:* Theo quy tắc nhân, số các kết cục *có lợi* – tức là, số cách lấy được 3 quả bóng đỏ – là $5^3$, vì mỗi lần lấy ta có 5 quả đỏ ở trong bình. Toàn bộ các kết cục có thể là $12^3$, vì mỗi lần lấy bóng trong bình có 12 quả. Như vậy, xác suất cần tìm là $5^3/12^3$. Đây là một ví dụ về việc lấy **mẫu có hoàn lại.**

■

Số các chỉnh hợp lặp chập $r$ từ tập $n$ phần tử được cho trong định lý sau đây.

**ĐỊNH LÝ 1.** Số các chỉnh hợp lặp chập $r$ từ tập $n$ phần tử bằng $n^r$.

*Chứng minh.* Rõ ràng có cách $n$ chọn một phần tử từ tập $n$ phần tử cho mỗi một trong $r$ vị trí của chỉnh hợp khi cho phép lặp. Vì vậy theo quy tắc nhân, có $n^r$ chỉnh hợp lặp chập $r$ từ tập $n$ phần tử.

## TỔ HỢP LẶP

Chúng ta nghiên cứu một ví dụ về tổ hợp có lặp.

**Ví dụ 3.** Giả sử trong một đĩa quả có táo, cam, lê mỗi loại có ít nhất 4 quả. Tính số cách lấy 4 quả từ đĩa này nếu giả sử rằng thứ tự các quả được chọn không quan trọng, và các quả thuộc cùng một loại là không phân biệt.

*Giải:* Ta liệt kê danh sách tất cả 15 cách chọn 4 quả như sau :

| | | |
|---|---|---|
| 4 táo | 4 cam | 4 lê |
| 3 táo, 1 cam | 3 táo, 1 lê | 3 cam, 1 táo |
| 3 cam, 1 lê | 3 lê, 1 táo | 3 lê, 1 cam |

2 táo, 2 cam   2 táo, 2 lê   2 cam, 2 lê

2 táo, 1 cam, 1 lê   2 cam, 1 táo, 1 lê   2 lê, 1 táo, 1 cam

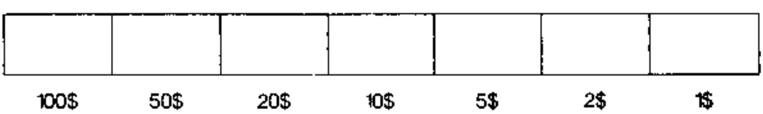
Lời giải là số các tổ hợp lặp chập 4 từ tập ba phần tử {*táo, cam, lê*}.

Để giải những bài toán đếm phức tạp hơn có dạng như trên chúng ta cần có phương pháp tổng quát đếm số tổ hợp chập $r$ từ tập $n$ phần tử. Trong Ví dụ 4 chúng ta sẽ minh họa phương pháp như thế.

**Ví dụ 4.** Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 1\$, tờ 2\$, tờ 5\$, tờ 10\$, tờ 20\$, tờ 50\$ và tờ 100\$? Giả sử, thứ tự mà các tờ tiền được chọn ra là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

*Giải:* Vì ta không kể tới thứ tự chọn tờ tiền, và vì ta chọn đúng 5 lần, mỗi lần lấy một từ 1 trong 7 loại tiền nên bài toán này liên quan tới việc tính tổ hợp lặp chập 5 từ 7 phần tử. Liệt kê tất cả các khả năng có thể là việc làm chán ngắt bởi lẽ có quá nhiều lời giải. Thay vào đó chúng ta sẽ minh hoạ cách sử dụng kỹ thuật đếm các tổ hợp lặp.

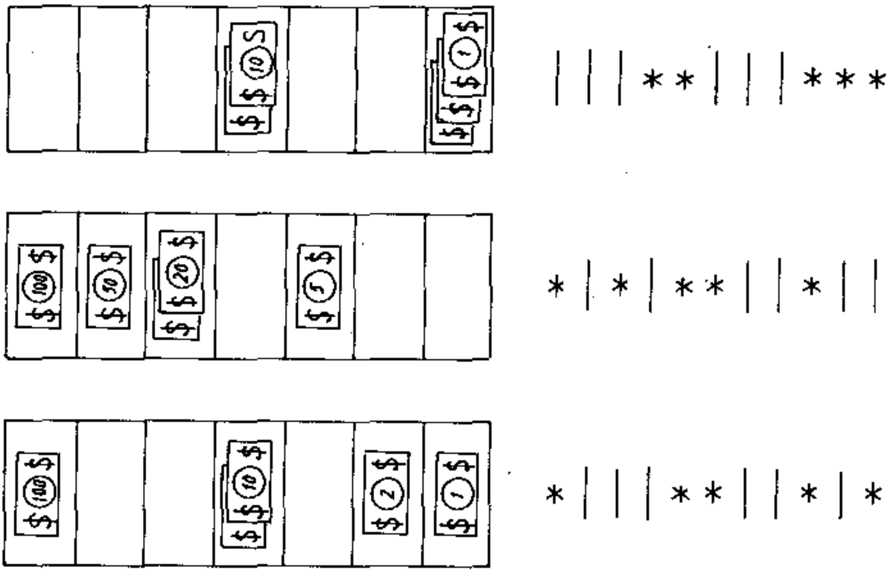
Giả sử két tiền có 7 ngăn, mỗi ngăn đựng một loại tiền, như minh họa trên hình 1. Các ngăn được phân cách bằng vách ngăn. Việc chọn 5 tờ tiền tương ứng với việc đặt 5 vật đánh dấu vào 7 ngăn chứa 7 loại tiền. Hình 2 minh họa sự tương ứng này cho 3 cách chọn 5 tờ tiền, trong đó 6 vách ngăn được biểu thị bằng 6 thanh đứng còn 5 tờ tiền biểu thị bằng các ngôi sao.




***Hình 1.*** Két bảy ngăn chứa bảy loại tiền.

Số cách chọn 5 tờ tiền ứng với số cách sắp xếp 6 thanh và 5 ngôi sao. Do vậy, số cách chọn 5 tờ tiền bằng số cách chọn các vị trí cho 5 ngôi sao từ 11 vị trí có thể, tức là bằng

$$C(11,5) = \frac{11!}{5!6!} = 462$$




*Hình 2.* Ví dụ về các cách chọn năm loại tiền.

Tổng quát hóa điều vừa thảo luận chúng ta có định lý sau đây.

**ĐỊNH LÝ 2**. Số tổ hợp lặp chập $r$ từ tập $n$ phần tử bằng

$$C(n + r - 1, r).$$

***Chứng minh.*** Mỗi tổ hợp lặp chập $r$ từ tập $n$ phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy $(n - 1)$ thanh đứng và $r$ ngôi sao. Ta dùng $(n - 1)$ thanh để phân cách các ngăn. Ngăn thứ $i$ chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ $i$ của tập xuất hiện trong tổ hợp. Ví dụ, tổ hợp lặp chập 6 của tập 4 phần tử được biểu thị bằng 3 thanh đứng và 6 ngôi sao.

Dãy * * |*| | * * *

biểu thị tổ hợp chứa đúng 2 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ hai, không có phần tử thứ ba và 3 phần tử thứ tư của tập hợp.

Như ta đã thấy mỗi dãy $(n - 1)$ thanh và $r$ ngôi sao ứng với một tổ hợp lặp chập $r$ của tập $n$ phần tử. Số các dãy như vậy bằng $C(n - 1 + r, r)$ vì mỗi dãy ứng với một cách chọn $r$ chỗ cho $r$ ngôi sao từ $n - 1 + r$ chỗ chứa $n - 1$ thanh và $r$ ngôi sao. Đó là điều cần chứng minh.

Những ví dụ sau đây minh họa cách sử dụng Định lý 2.

**Ví dụ 5.** Một cửa hàng bánh bích quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh? Giả sử là ta chỉ quan tâm tới loại bánh mà không quan tâm tới hộp bánh cụ thể nào và thứ tự chọn chúng.

*Giải:* Số cách chọn 6 hộp bánh bằng số tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử. Theo định lý 2 ta nhận được $C(4 + 6 - 1,6) = C(9,6)$. Từ đó có

$$C(9,6) = C(9,3) = \frac{9.8.7}{1.2.3} = 84 \text{ cách chọn 6 hộp bánh quy.}$$

■

Định lý 2 cũng có thể dùng để tìm số nghiệm nguyên của các phương trình tuyến tính chịu những ràng buộc nào đó. Hãy xét ví dụ sau.

**Ví dụ 6.** Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

*Giải:* Chúng ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có $x_1$ phần tử loại 1, $x_2$ phần tử loại 2 và $x_3$ phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 11 từ tập có 3 phần tử. Theo định lý 2 số đó bằng :

$$C(3 + 11 - 1,11) = C(13,11) = C(13,2) = \frac{13.12}{1.2} = 78$$

Chúng ta cũng có thể tìm được số nghiệm của phương trình này khi các ẩn số chịu những ràng buộc nào đó. Ví dụ, tìm số nghiệm nguyên của phương trình thỏa mãn điều kiện $x_1 \geq 1$, $x_2 \geq 2$ và $x_3 \geq 3$. Dễ thấy một nghiệm của phương trình thỏa mãn những điều kiện này ứng với một cách chọn 11 phần tử trong đó có $x_1$ phần tử loại 1, $x_2$ phần tử loại 2 và $x_3$ phần tử loại 3 trong đó có ít nhất một phần tử loại 1, hai phần tử loại 2 và ba phần tử loại 3. Vì thế, trước tiên ta chọn 1 phần tử loại 1, 2 phần tử loại 2 và 3 phần tử loại 3, sau đó chọn thêm 5 phần tử nữa. Theo định lý 2 ta có

$$C(3 + 5 - 1,5) = C(7,5) = C(7,2) = \frac{7.6}{1.2} = 21 \text{ cách.}$$

Vậy phương trình có 21 nghiệm thỏa mãn các điều kiện đã cho như trên.

■

**Ví dụ 7.** Cho biết giá trị của $k$ sau khi đoạn giả lệnh dưới đây được thi hành.

```
k := 0
for i1 := 1 to n
    for i2 := 1 to i1
    .
    .
    .
    for im := 1 to im-1
        k := k + 1
```

*Giải:* Dễ thấy rằng giá trị khởi tạo của $k$ bằng 0 và 1 được cộng dồn cho $k$ mỗi lần vòng lặp lồng nhau được duyệt qua ứng với tập các số nguyên $i_1$, $i_2$, ... $i_m$, trong đó

$$1 \leqslant i_m \leqslant i_{m-1} \leqslant \ldots \leqslant i_1 \leqslant n$$

Số bộ các số nguyên như thế là số cách chọn có lặp $m$ số nguyên từ tập $\{1, 2, ..., n\}$. Thực vậy mỗi lần một tập các số nguyên như thế được chọn, chúng ta sắp xếp chúng theo thứ tự không giảm. Khi đó sẽ xác định duy nhất một bộ $i_m$, $i_{m-1}$,... $i_1$. Ngược lại, mọi bộ như thế sẽ ứng với một tập không có thứ tự $m$ phần tử hay một tổ hợp lặp chập $m$ từ $n$ phần tử. Vì vậy theo Định lý 2, suy ra $k = C(n + m - 1, m)$ sau khi đoạn giả mã này được thi hành. ■

**BẢNG 1. Tổ hợp và chỉnh hợp có lặp hay không lặp**

| Loại | Có lặp không? | Công thức |
|---|---|---|
| Chỉnh hợp chập $r$ | Không | $\frac{n!}{(n-r)!}$ |
| Tổ hợp chập $r$ | Không | $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ |
| Chỉnh hợp chập $r$ | Có | $n^r$ |
| Tổ hợp chập $r$ | Có | $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$ |

Bảng 1 trên đây cho các công thức tính số cách chọn có thứ tự hay không kể thứ tự $r$ phần tử từ tập $n$ phần tử có hoàn lại hay không hoàn lại.

## HOÁN VỊ CỦA TẬP HỢP CÓ CÁC PHẦN TỬ GIỐNG NHAU

Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần. Chúng ta xét ví dụ sau.

**Ví dụ 8.** Có thể nhận được bao nhiêu xâu khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ *SUCCESS*?

*Giải:* Vì một số chữ cái của từ *SUCCESS* là như nhau nên câu trả lời không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được. Từ này chứa 3 chữ $S$, 2 chữ $C$, 1 chữ $U$ và 1 chữ $E$. Để xác định số xâu khác nhau có thể tạo ra được ta nhận thấy có $C(7,3)$ cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ $S$, còn lại 4 chỗ trống. Có $C(4,2)$ cách chọn hai chỗ cho hai chữ $C$, còn lại hai chỗ trống. Có thể đặt chữ $U$ bằng $C(2,1)$ cách, và $C(1,1)$ cách đặt chữ $E$ vào xâu. Theo quy tắc nhân, số các xâu khác nhau có thể tạo được là :

$$C(7,3)\ C(4,2)\ C(2,1)\ C(1,1) = \frac{7!.4!.2!.1!}{3!.4!.2!.2!.1!.1!.1!.0!} = \frac{7!}{3!.2!.1!.1!} = 420$$

■

Bằng cách lý luận tương tự như trong ví dụ trên chúng ta có thể chứng minh được định lý sau.

**ĐỊNH LÝ 3.** Số hoán vị của $n$ phần tử trong đó có $n_1$ phần tử như nhau thuộc loại 1, $n_2$ phần tử như nhau thuộc loại 2, ..., và $n_k$ phần tử như nhau thuộc loại $k$, bằng

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

***Chứng minh.*** Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy có $C(n,n_1)$ cách giữ $n_1$ chỗ cho $n_1$ phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống. Sau đó có $C(n - n_1, n_2)$ cách đặt $n_2$ phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại $n - n_1 - n_2$ chỗ trống. Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4, ..., loại $k - 1$ vào chỗ trống trong hoán vị. Cuối cùng có $C(n - n_1 - ... - n_{k-1}, n_k)$ cách đặt $n_k$ phần tử loại $k$ vào hoán vị. Theo quy tắc nhân tất cả các hoán vị có thể là

$$C(n,\ n_1)\ C(n - n_1,\ n_2)\ \ldots\ C(n - n_1 - \ldots - n_{k-1},\ n_k) =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdots\frac{(n-n_1-\ldots-n_{(k-1)})!}{n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

■

## SỰ PHÂN BỐ CÁC ĐỒ VẬT VÀO TRONG HỘP

Một số bài toán đếm có thể giải bằng cách liệt kê những cách đặt các đối tượng khác nhau vào trong những hộp khác nhau. Chúng ta xét ví dụ sau, trong đó các đối tượng là các lá hài còn các hộp là "những người chơi".

**Ví dụ 9.** Có bao nhiêu cách chia những *xấp bài 5 quân* cho mỗi một trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân?

*Giải:* Chúng ta sẽ dùng quy tắc nhân để giải bài toán này. Trước tiên chúng ta thấy người đầu tiên có thể nhận được 5 quân bài bằng $C(52,5)$ cách. Người thứ hai có thể được chia 5 quân bài bằng $C\ (47,5)$ cách, vì chỉ còn 47 quân hài. Người thứ ba có thể nhận được 5 quân bài bằng $C(42,5)$ cách. Cuối cùng, người thứ tư nhận được 5 quân bài bằng $C\ (37,5)$ cách. Vì vậy, tổng cộng có

$$C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5) = \frac{52!}{47!5!}\,\frac{47!}{42!5!}\,\frac{42!}{37!5!}\,\frac{37!}{32!5!} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

cách chia cho 4 người mỗi người một xấp 5 quân bài.

■

*Chú ý.* Lời giải của Ví dụ 9 cũng bằng số các hoán vị 52 phần tử trong đó có 4 loại, mỗi loại có 5 phần tử giống hệt nhau, và loại thứ năm có 32 phần tử. Thật vậy, chúng ta có thể xây dựng được một phép tương ứng một – một giữa các hoán vị và các cách chia bài. Để làm điều đó, giả sử chúng ta có 52 ô được đánh số từ 1 tới 52. Mỗi một trong 4 người chơi được "phát" 5 ô. Những ô của người thứ nhất là ô loại 1, những ô chia cho người thứ hai là ô loại hai, v.v. và 32 ô còn lại là các ô loại 5. Khi đó một cách chia xấp 5 quân bài cho 4 người chính là một cách sắp xếp mỗi quân bài vào một ô.

Ví dụ 9 là một bài toán điển hình về việc phân bổ các đồ vật khác nhau vào các hộp khác nhau. Các đồ vật là 52 quân bài, còn 5 hộp là 4 người chơi và số còn lại để trên bàn. Số cách sắp xếp các đồ vật vào trong hộp được cho bởi định lý sau.

**ĐỊNH LÝ 4**. Số cách phân chia $n$ đồ vật khác nhau vào trong $k$ hộp khác nhau sao cho có $n_i$ vật được đặt vào hộp thứ $i$, với $i = 1, 2, ..., k$, bằng

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$$

Chúng tôi để dành cho độc giả tự chứng minh định lý này (xem Bài tập 43 và 44).

## BÀI TẬP

**1.** Có bao nhiêu cách chọn có hoàn lại lần lượt 5 phần tử từ một tập 3 phần tử?

**2.** Có bao nhiêu cách chọn có hoàn lại lần lượt 5 phần tử từ một tập 5 phần tử?

**3.** Có bao nhiêu xâu gồm 6 chữ cái?

**4.** Hàng ngày một sinh viên chọn ngẫu nhiên một chiếc bánh san–đuých để ăn trưa từ một chồng bánh được gói kín. Giả sử có 6 loại bánh, hỏi có bao nhiêu cách anh sinh viên chọn bánh trong 7 ngày của một tuần, nếu có kể tới thứ tự những chiếc bánh được chọn?

**5.** Có bao nhiêu cách phân 3 công việc cho 5 người làm, nếu một người có thể làm được nhiều việc?

**6.** Tính số cách chọn 5 phần tử không có thứ tự từ một tập có 3 phần tử nếu cho phép chọn có hoàn lại.

**7.** Tính số cách chọn 3 phần tử không có thứ tự từ một tập có 5 phần tử nếu cho phép chọn có hoàn lại.

**8.** Có bao nhiêu cách chọn một tá quà tặng từ một cửa hàng có 21 loại khác nhau?

**9.** Trong một cửa hàng bán túi đựng hàng có các loại túi sau : túi đựng hạt giống cây thuốc lá, túi đựng trứng, túi đựng muối, túi đựng hạt vừng, túi đựng hạt cải, túi đựng nho, và túi hình thường. Có bao nhiêu cách chọn :

a) 6 túi?

b) Một tá túi?

c) Hai tá túi?

đ) Một tá túi sao cho mỗi loại có ít nhất một túi?

e) Một tá túi sao cho ít nhất có 3 túi trứng và có không quá 2 túi muối?

**10**. Một cửa hàng bánh sừng bò có loại bánh bình thường, bánh có anh đào, bánh có hạnh nhân, bánh có sôcôla, bánh táo, bánh mận. Có bao nhiêu cách chọn : 6 loại bánh.

a) Một tá bánh?

b) Ba tá?

c) Hai tá sao cho mỗi loại có ít nhất hai chiếc?

d) Hai tá sao cho có không quá hai chiếc bánh táo?

e) Hai tá sao cho có ít nhất 5 chiếc bánh có sôcôla và 3 chiếc bánh mận?

f) Hai tá sao cho có ít nhất một chiếc bánh bình thường, ít nhất hai chiếc có anh đào, ít nhất 1 chiếc có hạnh nhân, ít nhất có hai chiếc bánh táo và có không quá ba chiếc có mận?

**11**. Có bao nhiêu cách chọn tám đồng tiền xu từ một hộp chứa 100 đồng một xu giống nhau và 80 đồng năm xu giống hệt nhau?

**12**. Một "chú lợn tiết kiệm" chứa 20 đồng xu. Có thể có bao nhiêu tổ hợp khác nhau các đồng một xu, đồng năm xu, đồng mười xu, đồng hai lăm xu, đồng năm mươi xu trong đó?

**13**. Một nhà xuất bản có 3000 bản của một cuốn sách toán học rời rạc. Có bao nhiêu cách cất chúng vào trong ba kho hàng nếu các cuốn sách giống hệt nhau?

**14**. Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

**15**. Phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 21$$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho

a) $x_1 \geqslant 1$?

b) $x_i \geqslant 2$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5$?

c) $0 \leqslant x_1 \leqslant 10$?

d) $0 \leqslant x_1 \leqslant 3$ và $1 \leqslant x_2 \leqslant 4$, và $x_3 \geqslant 15$?

**16.** Phương trình

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 29$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm sao cho

a) $x_i \geqslant 1$ với $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

b) $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 2$, $x_3 \geqslant 3$, $x_4 \geqslant 4$, $x_5 > 5$ và $x_6 \geqslant 6$?

c) $x_1 \leqslant 5$?

d) $x_1 < 8$ và $x_2 > 8$?

**17**. Có bao nhiêu xâu gồm 10 chữ số của hệ tam phân (0,1 hoặc 2) chứa đúng hai chữ số 0, ba chữ số 1 và năm chữ số 2?

**18.** Có bao nhiêu xâu 20 chữ số của hệ thập phân chứa đúng hai chữ số 0, bốn chữ số 1, ba chữ số 2, một chữ số 3, hai chữ số 4, ba chữ số 5, hai chữ số 7 và ba chữ số 9?

**19.** Một gia đình có 14 đứa con trong đó có hai nhóm sinh ba, ba cặp sinh đôi và hai đứa trẻ sinh một. Những đứa trẻ cùng sinh đôi hoặc sinh ba giống nhau như đúc. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp bọn trẻ ngồi thành một dãy?

**20**. Bất đẳng thức

$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 11$

có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm? (*Gợi ý* : Đưa vào một biến phụ $x_4$ sao cho $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$).

**21.** Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000 có tổng các chữ số của nó bằng 19?

**22**. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000 có đúng một chữ số bằng 9 và có tổng các chữ số bằng 13?

**23.** Trong kỳ thi kết thúc môn toán học rời rạc có 10 câu hỏi. Có bao nhiêu cách gán điểm cho các câu hỏi nếu tổng số điểm bằng 100 và mỗi câu ít nhất được 5 điểm?

**24.** Chứng tỏ rằng có $C(n + r - q_1 - q_2 - ... - q_r - 1, n - q_1 - q_2 - ... - q_r)$ cách chọn không kể thứ tự $n$ phần tử với $r$ loại khác nhau trong đó có $q_1$ phần tử loại 1, $q_2$ phần tử loại 2, ..., và $q_r$ phần tử loại $r$.

**25.** Có bao nhiêu xâu nhị phân khác nhau nếu chúng được bắt đầu bằng bit 1 và chứa thêm ba bit 1 nữa, nó còn chứa tất cả 12 bit 0 và sau mỗi bit 1 có ít nhất hai bit 0?

**26.** Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *MISSISSIPPI*, yêu cầu phải dùng tất cả các chữ?

**27.** Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *ABRACADABRA* yêu cầu phải dùng tất cả các chữ?

**28.** Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *AARDVARK*, yêu cầu phải dùng tất cả các chữ và ba chữ *A* phải đứng liền nhau?

**29.** Có bao nhiêu xâu khác nhau có thể lập được từ các chữ cái trong từ *ORONO* nếu dùng một vài hoặc tất cả các chữ?

**30.** Có bao nhiêu xâu khác nhau có 5 hoặc nhiều hơn các ký tự có thể lập được từ các chữ cái trong từ *SEERESS*?

**31.** Có bao nhiêu xâu khác nhau có 7 hoặc nhiều hơn các ký tự có thể lập được từ các chữ cái trong từ *EVERGREEN*?

**32.** Có bao nhiêu xâu nhị phân khác nhau có thể lập được nếu dùng 6 chữ số 1 và 8 chữ số 0?

**33.** Một sinh viên có ba quả xoài, hai quả đu đủ và hai quả ki-vi. Nếu anh ta ăn mỗi ngày một quả và chỉ có loại quả là quan trọng, thì anh ta có bao nhiêu cách ăn các quả này?

**34.** Một giáo sư cất bộ sưu tập gồm 40 số báo toán học vào 4 chiếc ngăn tủ, mỗi ngăn đựng 10 số. Có bao nhiêu cách có thể cất các tờ báo vào các ngăn nếu :

a) Mỗi ngăn được đánh số sao cho có thể phân biệt được.

b) Các ngăn là giống hệt nhau?

**35.** Trong không gian Oxyz một con bọ di chuyển bằng cách nhảy từng bước dài 1 đơn vị theo hướng của trục $x$ hoặc của trục $y$ hoặc của trục $z$. (Không được nhảy giật lùi theo chiều âm của các trục tọa độ). Tính số cách để con bọ đó có thể di chuyển từ gốc tọa độ (0, 0, 0) tới điểm (4, 3, 5).

**36.** Tính số cách một con bọ trong không gian Oxyzw có thể di chuyển từ gốc tọa độ (0, 0, 0, 0) tới điểm (4, 3, 5, 4) bằng cách nhảy từng bước dài 1 đơn vị theo hướng dương của trục $x$ hoặc của trục $y$ hoặc của trục $z$ hoặc của trục $w$.

**37**. Có bao nhiêu cách chia một cỗ bài chuẩn 52 quân cho năm người chơi, mỗi người một xấp bảy quân?

**38.** Khi chơi bridge, người ta chia cỗ bài chuẩn 52 quân cho 4 người. Tính số cách chia cho 4 người.

**39.** Người ta chia một cỗ bài chuẩn 52 quân cho 4 người chơi. Hãy tính xác suất để mỗi người nhận được một quân át.

**40.** Có bao nhiêu cách xếp 12 cuốn sách lên 4 giá sách khác nhau nếu :

a) Các cuốn sách là các bản chụp của cùng một đầu sách?

b) Không có hai cuốn cùng đầu sách, và có kể tới vị trí của các cuốn sách trên giá?

(*Gợi ý* : Chia quá trình trên thành việc xếp từng cuốn sách riêng rẽ. Đánh số các giá sách là 1, 2, 3, 4. Ký hiệu các cuốn sách là $b_i$ ($i$ = 1, 2,..., 12). Đặt $b_1$ vào bên phải của một trong các giá 1, 2, 3, 4. Sau đó lần lượt đặt $b_2$, $b_3$, ..., và $b_{12}$).

**41.** Có bao nhiêu cách xếp $n$ cuốn sách lên $k$ giá sách khác nhau nếu :

a) Các cuốn sách là các bản chụp của cùng một đầu sách?

b) Không có hai cuốn cùng đầu sách, và có kể tới vị trí của các cuốn sách trên giá.

**42.** Trên giá sách có 12 cuốn xếp thành một hàng. Có bao nhiêu cách chọn năm cuốn sao cho không có hai cuốn nào ở liền kề nhau? (*Gợi ý* : Biểu diễn các cuốn sách được chọn bằng các thanh đứng, các cuốn không được chọn bằng các ngôi sao. Đếm số các dãy gồm 5 thanh và 7 ngôi sao, sao cho không có hai thanh nào liền kề nhau).

**43***. Dùng quy tắc nhân, hãy chứng minh Định lý 4 bằng cách đầu tiên đặt các vật vào hộp thứ nhất, sau đó vào hộp thứ hai, v.v...

**44***. Chứng minh Định lý 4 hằng cách đầu tiên xây dựng một phép tương ứng một - một giữa các hoán vị của một tập $n$ phần tử chia thành $k$ loại, loại $i$ có $n_i$ phần tử giống nhau ($i = 1, 2, \ldots k$) và các cách bỏ $n$ vật vào $k$ hộp sao cho có $n_i$ vật được bỏ vào hộp $i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$) và sau đó áp dụng Định lý 3.

**45***. Trong bài tập này chúng ta sẽ chứng minh Định lý 2 bằng cách xây dựng một phép tương ứng một - một giữa tập các tổ hợp có lặp chập $r$ từ tập $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ và tập các tổ hợp chập $r$ từ tập $T = \{1, 2, 3, \ldots, n + r - 1\}$

a) Sắp xếp các phần tử trong một tổ hợp lặp chập $r$ của $S$ thành một dãy tăng $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_r$. Chỉ ra rằng dãy tạo nên bằng cách thêm $k - 1$ vào số hạng thứ $k$ là thực sự tăng. Khẳng định dãy này được tạo bởi $r$ phần tử khác nhau của $T$.

b) Chứng tỏ rằng thủ tục mô tả trong a) xác định một phép tương ứng một - một giữa tập các tổ hợp lặp chập $r$ từ tập $S$ và tập các tổ hợp chập $r$ từ tập $T$. (*Gợi ý* : Hãy chỉ ra phép tương ứng này có ngược bằng cách một tổ hợp lặp chập $r$ của $S$ được tạo bằng cách bớt đi $k - 1$ từ phần tử thứ $k$ được gán cho một tổ hợp chập $r$ của $T$ với.

$$1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_r \leq n + r - 1.$$

c) Kết luận rằng có $C(n + r - 1, r)$ tổ hợp lặp chập $r$ từ tập có $n$ phần tử.

**46**. Có bao nhiêu cách phân phối năm đối tượng khác nhau vào ba hộp giống nhau?

**47**. Có bao nhiêu cách phân phối năm đối tượng giống nhau vào ba hộp giống nhau?

**48**. Có bao nhiêu số hạng khác nhau trong khai triển của $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$ sau khi cộng tất cả các số hạng đồng dạng với nhau?

**49***. Hãy chứng minh **định lý đa thức** : Nếu $n$ là một số nguyên dương thì $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_m = n} C(n, n_1, n_2, \ldots, n_m) x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_m^{n_m}$

trong đó $C(n; n_1, n_2, \ldots, n_m) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!}$ là **hệ số đa thức.**

**50.** Hãy tìm khai triển $(x + y + z)^4$

**51.** Tìm hệ số của $x^3y^2z^5$ trong $(x + y + z)^{10}$.

**52.** Có bao nhiêu số hạng trong khai triển của $(x + y + z)^{100}$?

# 4.6. SINH CÁC HOÁN VỊ VÀ TỔ HỢP

## MỞ ĐẦU

Trong những tiết trước của chương này chúng ta đã mô tả các phương pháp đếm số các hoán vị và tổ hợp thuộc các kiểu khác nhau. Nhưng nhiều khi chúng ta lại cấu tạo ra chính các hoán vị hoặc tổ hợp chứ không phải là đếm chúng. Hãy xem xét ba ví dụ sau. Ví dụ đầu tiên, giả sử một thương nhân cần đi bán hàng ở 6 thành phố khác nhau. Để mất tối thiểu thời gian đi lại anh ta cần phải đi qua các thành phố theo thứ tự nào? Muốn giải bài toán này chúng ta phải xác định thời gian đi lại cho mỗi một trong 6! = 720 thứ tự khác nhau đi qua 6 thành phố, sau đó chọn một lịch trình có thời gian nhỏ nhất. Ví dụ thứ 2, giả sử có một tập gồm 6 số. Hãy chọn ra một số phần tử của tập này sao cho tổng của chúng bằng 100. Một cách tìm các số này là tạo ra các tất cả $2^6 = 64$ tập con rồi kiểm tra tổng các phần tử của chúng. Ví dụ thứ 3, giả sử một phòng thí nghiệm có 95 nhân viên. Để thực hiện một đề án cần một nhóm 12 người và một tập 25 kỹ xảo. (Mỗi nhân viên có thể thực hiện được một hoặc nhiều kỹ xảo). Một cách tìm những nhóm 12 người để làm một đề án với một tập kỹ xảo cho trước sẽ sinh ra tất cả các tập con 12 người và sau đó kiểm tra xem họ có thể thực hiện được những kỹ xảo đã cho không. Những ví dụ này chứng tỏ rằng thường thường chúng ta cần phải sinh ra các hoán vị hay tổ hợp để giải quyết các bài toán đặt ra.

## SINH CÁC HOÁN VỊ

Mọi tập $n$ phần tử đều có thể tương ứng một với tập $\{1,2,\ldots n\}$. Chúng ta có thể liệt kê các hoán vị của một tập bất kỳ gồm $n$ phần tử bằng cách sinh ra hoán vị của tập $n$ số nguyên dương nhỏ nhất, sau đó thay thế các số nguyên này bằng các phần tử tương ứng của chúng. Có nhiều thuật toán đã được phát triển để sinh ra $n$ ! hoán vị của tập này. Chúng ta sẽ mô tả một trong các phương pháp đó, phương pháp liệt kê các hoán vị của tập {1, 2, ..., $n$} theo **thứ tự từ điển**. Khi đó, hoán vị $a_1a_2 \ldots a_n$ được gọi là đi trước (nhỏ hơn) hoán vị $b_1b_2 \ldots b_n$ nếu với $k$ nào đó ($1 \leq k \leq n$), $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_{k-1} = b_{k-1}$, và $a_k < b_k$. Nói cách khác, một hoán vị của tập $n$ số nguyên dương đầu tiên được gọi là đi trước (theo thứ tự từ điển) một hoán vị khác nếu con số của hoán vị đầu tại vị trí đầu tiên mà hai hoán vị khác nhau, nhỏ hơn con số thuộc hoán vị thứ hai cũng ở vị trí đó.

**Ví dụ 1**. Hoán vị 23415 của tập {1, 2, 3, 4, 5} là đi trước hoán vị 23514, vì những hoán vị này trùng nhau ở hai vị trí đầu tiên, nhưng số 4 ở vị trí thứ ba của hoán vị đầu là nhỏ hơn số 5 cũng ở vị trí thứ ba của hoán vị sau. Tương tự hoán vị 41532 là đi trước 52143.

■

Thuật toán sinh các hoán vị của tập {1, 2, ..., $n$} dựa trên thủ tục xây dựng hoán vị kế tiếp, theo thứ tự từ điển, của hoán vị cho trước $a_1$, $a_2$,..., $a_n$. Bây giờ chúng ta sẽ chỉ rõ cách xây dựng hoán vị liên tiếp này. Đầu tiên ta giả sử $a_{n-1} < a_n$. Rõ ràng nếu đổi chỗ $a_{n-1}$ và $a_n$ cho nhau thì sẽ nhận được hoán vị mới đi sau (lớn hơn) hoán vị đã cho, và không thể có một hoán vị nào khác lớn hơn hoán vị xuất phát mà lại bé hơn hoán vị nhận được bằng việc đổi chỗ $a_{n-1}$ và $a_n$ cho nhau. Ví dụ, hoán vị liền tiếp sau hoán vị 234156 là hoán vị 234165. Nếu $a_{n-1} > a_n$ thì không thể nhận được hoán vị lớn hơn bằng cách đổi chỗ của hai số hạng này trong hoán vị. Bây giờ ta hãy xem xét ba số. Nếu $a_{n-2} < a_{n-1}$ thì có thể sắp xếp lại ba số cuối cùng để có thể nhận một hoán vị mới liền sau hoán vị xuất phát. Đặt số nhỏ hơn trong hai số $a_{n-1}$ và $a_n$ vào vị trí $n - 2$, sau đó đặt số nguyên còn lại và số $a_{n-2}$ vào hai vị trí cuối cùng theo thứ tự tăng dần. Ví dụ, hoán vị liền sau hoán vị 234165 là 234516.

Nếu $a_{n-2} > a_{n-1}$ (và $a_{n-1} > a_n$), khi đó không thể nhận được hoán vị lớn hơn bằng cách đổi chỗ ba số hạng cuối cùng của hoán vị. Dựa trên những nhận xét này ta có thể mô tả phương pháp tổng quát tạo hoán vị liền sau (theo thứ tự từ điển) của hoán vị cho trước $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ như sau.

Trước tiên, tìm các số nguyên $a_j$ và $a_{j+1}$ sao cho $a_j < a_{j+1}$ và $a_{j+1} > a_{j+2} > ... > a_n$, tức là tìm cặp số nguyên liền kề đầu tiên tính từ bên phải sang bên trái của hoán vị mà số đầu nhỏ hơn số sau. Sau đó, để nhận được hoán vị liền sau ta đặt vào vị trí thứ $j$ số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn $a_j$ của tập $a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$ , rồi liệt kê theo thứ tự tăng dần của các số còn lại của $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$ vào các vị trí $j + 1, ..., n$. Dễ thấy không có hoán vị nào lớn hơn hoán vị xuất phát và nhỏ hơn hoán vị vừa tạo ra. (Độc giả kiểm tra lại sự kiện này như một bài tập).

**Ví dụ 2.** Tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 362541

*Giải:* Cặp số nguyên đầu tiên tính từ phải qua trái có số trước nhỏ hơn số sau là $a_3 = 2$ và $a_4 = 5$. Số nhỏ nhất trong các số bên phải của số 2 mà lại lớn hơn 2 là số 4. Đặt số 4 vào vị trí thứ 3. Sau đó đặt các số 2, 5, 1 theo thứ tự tăng dần vào ba vị trí còn lại. Hoán vị liền sau hoán vị đã cho là 364125.

■

Để sinh ra $n!$ hoán vị của các số 1, 2, ..., $n$ chúng ta sẽ bắt đầu bằng hoán vị nhỏ nhất theo thứ tự từ điển, tức là 12 ... $n$ và áp dụng liên tiếp $(n! - 1)$ lần thủ tục đã mô tả ở trên. Bằng cách đó ta nhận được tất cả các hoán vị của $n$ số nguyên.

**Ví dụ 3.** Hãy tạo ra các hoán vị của các số nguyên 1, 2, 3 theo thứ tự từ điển.

*Giải:* Chúng ta bắt đầu bằng hoán vị 123. Bằng cách đổi chỗ 3 và 2 ta nhận được hoán vị tiếp theo là 132. Tiếp nữa, vì 3 > 2 và 1 < 3 nên phải xét cả 3 số trong nhóm hoán vị này. Đặt số nhỏ nhất trong hai số 3 và 2 vào vị trí thứ nhất, sau đó là hai số 1 và 3 vào vị trí thứ 2 và thứ 3 theo thứ tự tăng dần, tức là ta có 213. Đổi chỗ 1 và 3 cho nhau vì 1 < 3 được 231. Vì 2 < 3 nên được đặt 3 vào vị trí đầu tiên và sau đó là 1 và 2, tức là 312. Cuối cùng, đổi chỗ 1 với 2 ta nhận được hoán vị lớn nhất là 321 .

■

Thuật toán 1 sau đây biểu thị thủ tục tìm hoán vị liền sau, theo thứ tự từ điển, một hoán vị cho trước khác hoán vị lớn nhất $n\ n-1 \ldots 21$.

ALGORITHM 1. SINH HOÁN VỊ LIỀN SAU, THEO THỨ TỰ TỪ ĐIỂN, MỘT HOÁN VỊ CHO TRƯỚC.

. . . .

**procedure** *Hoán vị liền sau* $(a_1a_2 \ldots a_n)$ : hoán vị của $\{1, 2, \ldots, n\}$ khác $n$ $n$-1 ... 2 1)

$j := n - 1$

**while** $a_j > a_{j+1}$

$j := j - 1$ ; {$j$ là chỉ số lớn nhất mà $a_j < a_{j+1}$}

$k := n$

**while** $a_j > a_k$

$k := k - 1$ {$a_k$ là số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn $a_j$ và nằm bên phải $a_j$}

đổi chỗ $(a_j, a_k)$

$r := n$

$s := j + 1$

**while** $r > s$

**begin**

đổi chỗ $a_r$, $a_s$

$r := r - 1$ ; $s := s + 1$

**end**

{Điều này sẽ xếp phần đuôi của hoán vị ở sau vị trí thứ $j$ theo thứ tự tăng dần.}

## SINH CÁC TỔ HỢP

Làm thế nào để tạo ra tất cả các tổ hợp các phần tử của một tập hữu hạn? Vì tổ hợp chính là một tập con, nên ta có thể dùng phép tương ứng một – một giữa các tập con của $\{a_1a_2, \ldots, a_n\}$ và xâu nhị phân độ dài $n$.

Nhớ lại là một xâu nhị phân ứng với một tập con, tại vị trí $k$, sẽ có số 1 hoặc số 0 tùy theo phần tử $a_k$ thuộc vào tập con đó hay không. Nếu có thể liệt kê tất cả các xâu nhị phân ra được thì ta sẽ nhận được tất cả các tập con.

Mặt khác ta thấy một xâu nhị phân độ dài $n$ cũng là khai triển nhị phân của một số nguyên nằm giữa 0 và $2^n - 1$. Khi đó $2^n$ xâu nhị phân có thể liệt kê theo thứ tự tăng dần của số nguyên trong biểu diễn nhị phân của chúng. Chúng ta sẽ bắt đầu từ xâu nhị phân bé nhất 00...00 ($n$ số 0). Mỗi bước để tìm xâu liền sau ta tìm vị trí đầu tiên tính từ phải qua trái mà ở đó là số 0, sau đó thay tất cả số 1 ở bên phải số này bằng 0 và đặt số 1 vào chính vị trí này.

**Ví dụ 4.** Hãy tìm xâu nhị phân liền sau của 10001 00111.

*Giải:* Bít đầu tiên từ bên phải sang bằng 0 là bít thứ tư. Ta thay nó bằng số 1 và ba bit bên 1 phải nó được thay bằng số 0, từ đó ta nhận được dãy nhị phân liền sau là 1 0001 01000.

■

Thủ tục tạo ra xâu nhị phân liền sau một xâu nhị phân cho trước $b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0$ được cho dưới dạng Thuật toán 2.

---

ALGORITHM 2. SINH XÂU NHỊ PHÂN LIỀN SAU.

**procedure** *Xâu nhị phân liền sau* ($b_{n-1}b_{n-2} \dots b_1b_0$ : xâu nhị phân khác 11 ...11)

$i := 0$

**while** $b_i = 1$

**begin**

  $b_i := 0$

  $i := i + 1$

**end**

$b_i := 1$

---

■

Tiếp theo chúng ta sẽ trình bày thuật toán tạo các tổ hợp chập $r$ từ $n$ phần tử $\{1, 2, \dots, n\}$. Mỗi tổ hợp chập $r$ có thể biểu diễn bằng một xâu tăng. Khi đó có thể liệt kê các tổ hợp theo thứ tự từ điển. Có thể xây dựng tổ hợp liền sau tổ hợp $a_1a_2 \ldots a_r$ bằng cách sau. Trước hết, tìm phần tử đầu tiên $a_i$ trong dãy đã cho kể từ phải qua trái sao cho $a_i \neq n - r + i$. Sau đó thay $a_i$ bằng $a_i + 1$, và $a_j$ bằng $a_i + j - i + 1$ với $j = i + 1, i + 2, \ldots, r$. Chúng tôi để lại cho độc giả tự chứng minh thủ tục trên sinh ra tổ hợp liền sau. Còn bây giờ chúng ta hãy xét ví dụ minh họa thủ tục này.

**Ví dụ 5.** Tìm tổ hợp chập 4 từ tập {1, 2, 3, 4, 5, 6} đi liền sau tổ hợp {1, 2, 5, 6}.

*Giải:* Lùi từ phải qua trái ta thấy $a_2 = 2$ là số hạng đầu tiên của tổ hợp đã cho thỏa mãn điều kiện $a_i \neq 6 - 4 + i$. Để nhận được tổ hợp tiếp sau ta tăng $a_i$ lên một đơn vị , tức $a_2 = 3$, sau đó đặt $a_3 = 3 + 1 = 4$ và $a_4 = 3 + 2 = 5$. Vậy tổ hợp liền nhau tổ hợp đã cho là {1,3,4,5}

Thủ tục này được cho dưới dạng thuật toán như sau.

---

ALGORITHM 3. SINH TỔ HỢP CHẬP *R* LIỀN SAU THEO THỨ TỰ TỪ ĐIỂN

**procedure** *Tổ hợp liền sau* ($\{a_1a_2 \ldots a_r\}$ : tập con thực sự của tập $\{1, 2, \ldots, n\}$ không bằng $\{n - r + 1, \ldots, n\}$ với $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$)

$i := r$

**while** $a_i = n - r + i$

  $i := i - 1$

 $a_i := a_i + 1$

**for** $j := i + 1$ **to** $r$

  $a_j := a_i + j - i$

---

## BÀI TẬP

1. Tìm hoán vị theo thứ tự từ điển di liền sau sau mỗi hoán vị sau đây.

a) 1432  b) 54123  c) 12453

d) 45231  e) 6714235  f) 31528764

2. Sắp xếp các hoán vị sau theo thứ tự từ điển : 234561, 231456, 165432, 156423, 543216, 541236, 231465, 314562, 432561, 654321, 654312, 435612.

3. Dùng Thuật toán 1 hãy tạo ra 24 hoán vị của 4 số nguyên dương đầu tiên theo thứ tự từ điển.

4. Dùng Thuật toán 2 hãy liệt kê tất cả các tập con của tập $\{1, 2, 3, 4\}$.

5. Dùng Thuật toán 3 hãy liệt kê tất cả các tổ hợp chập 3 của $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Chứng tỏ rằng Thuật toán 1 sinh ra hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển.

7. Chứng tỏ rằng Thuật toán 3 sinh ra tổ hợp liền sau theo thứ tự từ điển của một tổ hợp cho trước.

8. Hãy xây dựng một thuật toán sinh ra chỉnh hợp chập $r$ từ tập $n$ phần tử.

9. Hãy liệt kê tất cả các chỉnh hợp chập 3 của $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

*Những bài tập còn lại trong mục này sẽ xây dựng Thuật toán khác tạo ra hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$. Thuật toán này dựa trên khai triển Cantor của một số nguyên. Mọi số nguyên không âm nhỏ hơn $n!$ có duy nhất khai triển Cantor :*

$$a_1 1! + a_2 2! + \dots + a_{n-1}(n-1)!$$

*trong đó $a_i$ là các số nguyên không âm không vượt quá $i$, với $i = 1, 2, ..., n-1$. Các số $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$ được gọi là các số Cantor của số nguyên này.*
*Cho hoán vị của tập $\{1, 2, \dots, n\}$, giả sử $a_{k-1}$ với $k = 2, 3, \dots, n$ là số các số nguyên nhỏ hơn $k$ mà đứng sau $k$ trong hoán vị. Ví dụ, trong hoán vị 43215, $a_1 = 1$ vì chỉ có một số nhỏ hơn 2 mà đứng sau 2. Tương tự, $a_2 = 2$ vì có 2 số nhỏ hơn 3 và đứng sau 3, tiếp theo ta có $a_3 = 3$ và $a_4 = 0$. Ta nghiên cứu một hàm từ tập các hoán vị $\{1, 2, \dots, n\}$ tới tập các số nguyên không âm nhỏ hơn $n!$. Mỗi hoán vị ứng với một bộ các số $a_1, a_2, \dots, a_n$, theo định nghĩa chính là các số Cantor, xác định duy nhất một số nguyên không âm nhỏ hơn $n!$.*

**10.** Tìm các số nguyên tương ứng với các hoán vị sau :

a) 246531 b) 12345 c) 654321

**11*.** Chỉ ra rằng phép tương ứng mô tả ở trên là một song ánh giữa tập các hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$ và các số nguyên không âm nhỏ hơn $n!$.

**12.** Tìm các hoán vị của {1, 2, 3, 4, 5} ứng với các số nguyên sau đây với phép song ánh được định nghĩa như trên.

a) 3 b) 89 c) 111.

**13.** Xây dựng thuật toán sinh ra tất cả các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ dựa trên phép tương ứng đã được mô tả ở trước Bài tập 10.

**14*.** Phương pháp sau đây có thể tạo một hoán vị ngẫu nhiên của $n$ phần tử. Đầu tiên, đổi chỗ số hạng thứ $n$ và số hạng thứ $r(n)$, trong đó $r(n)$ là số nguyên được chọn ngẫu nhiên sao cho $1 \leq r(n) \leq n$. Tiếp theo, chúng ta đổi chỗ số hạng thứ $(n - 1)$ của dãy nhận được cho số hạng thứ $r(n - 1)$, trong đó $r(n - 1)$ là số nguyên được chọn ngẫu nhiên sao cho $1 \leq r(n - 1) \leq n - 1$. Tiếp tục quá trình này cho tới khi $j = n$, trong đó tại bước $j$ ta đổi chỗ số hạng thứ $(n - j + 1)$ của dãy nhận được cho số hạng thứ $r(n - j + 1)$, trong đó $r(n - j + 1)$ là số nguyên được chọn ngẫu nhiên sao cho $1 \leq r(n - j + 1) \leq n - j + 1$. Chứng minh rằng nếu dùng phương pháp trên thì mỗi một trong $n!$ hoán vị sẽ có khả năng được tạo ra là ngang nhau. (*Gợi ý :* Sử dụng qui nạp toán học với giả thiết là xác suất sinh ra mỗi hoán vị của $n - 1$ phần tử là $1/(n - 1)!$).

## CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Hãy giải thích cách sử *dụng quy tắc cộng* và *quy tắc nhân* để tính số xâu nhị phân có độ dài không quá 10.

2. Hãy giải thích cách tính số xâu nhị phân có độ dài không quá 10 và có ít nhất một bit là số 0.

3. a) Có thể dùng quy tắc nhân như thế nào để tính số hàm từ một tập $m$ phần tử tới tập $n$ phần tử.

   b) Có bao nhiêu hàm từ tập 5 phần tử tới tập 10 phần tử.

   c) Sử dụng quy tắc nhân như thế nào để tính số hàm đơn ánh từ một tập $m$ phần tử tới tập $n$ phần tử.

d) Có bao nhiêu hàm đơn ánh từ tập 5 phần tử tới tập 10 phần tử.

e) Có bao nhiêu hàm toàn ánh từ tập 5 phần tử *lên* tập 10 phần tử.

**4.** Bằng cách nào bạn có thể tìm được số các kết cục có thể trong một cuộc thi đấu thể thao nhiều ván giữa hai đội, nếu đội thắng là đội thắng 4 ván trước.

**5.** Làm cách nào có thể tìm được số các xâu nhị phân dài 10 bit và hoặc bắt đầu bằng 101 hoặc kết thúc bằng 010?

**6.** a) Phát biểu nguyên lý Dirichlet .

b) Hãy giải thích cách dùng nguyên lý Dirichlet để chỉ ra rằng trong bất kỳ 11 số nguyên nào cũng có ít nhất hai số có cùng chữ số cuối cùng.

**7.** a) Phát biểu nguyên lý Dirichlet tổng quát.

b) Hãy giải thích cách dùng nguyên lý Dirichlet tổng quát để chỉ ra rằng trong bất kỳ 91 số nguyên nào cũng có ít nhất 10 số có cùng chữ số cuối cùng.

**8.** a) Hãy nêu sự khác nhau giữa tổ hợp và chỉnh hợp chập $r$ từ tập $n$ phần tử.

b) Hãy phát biểu và chứng minh đẳng thức liên hệ tới tổ hợp và chỉnh hợp chập $r$ từ tập $n$ phần tử.

c) Có bao nhiêu cách chọn 6 sinh viên trong một lớp có 25 người vào một hội đồng?

d) Có bao nhiêu cách chọn 6 sinh viên trong một lớp có 25 người giữ 6 chức vụ khác nhau trong hội đồng?

**9.** a) Tam giác Pascal là gì?

b) Làm cách nào để tạo ra một hàng của tam giác Pascal từ một hàng trên nó?

**10.** Thế nào là chứng minh bằng tổ hợp một hằng đẳng thức? Cách chứng minh bằng tổ hợp khác với cách chứng minh bằng đại số như thế nào?

**11.** Hãy giải thích cách chứng minh hằng đẳng thức Pascal bằng suy luận của lý thuyết tổ hợp.

**12.** a) Hãy phát biểu định lý nhị thức.

b) Hãy giải thích cách chứng minh định lý nhị thức bằng suy luận của lý thuyết tổ hợp.

c) Tìm hệ số của $x^{100}y^{101}$ trong khai triển $(2x+5y)^{201}$ .

**13.** a) Nêu định nghĩa xác suất của một biến cố khi tất cả các kết cục là đồng khả năng.

b) Tính xác suất trúng giải xổ số nếu chọn đúng 6 số từ 50 số nguyên dương.

**14.** a) Hãy giải thích cách tìm công thức tính số cách chọn có lặp r phần tử từ n phần tử, nếu không kể tới thứ tự.

b) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, nếu không phân biệt các vật trong cùng một loại?

c) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, và ít nhất có 3 vật thuộc loại 1?

d) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, nếu không có quá 4 vật thuộc loại 1?

e) Có bao nhiêu cách chọn một tá các đồ vật từ một tập hợp có 5 loại khác nhau, nếu có ít nhất hai vật loại một và không quá ha vật loại 2?

**15.** a) Cho $n$ và $r$ là hai số nguyên dương. Hãy giải thích tại sao số nghiệm của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$, trong đó $x_i$ là các số nguyên không âm với $i = 1, 2, \dots, n$ , bằng số tổ hợp chập $r$ từ $n$ phần tử?

b) Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

c) Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 17$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

**16.** **a)** Hãy rút ra công thức tính số hoán vị của $n$ phần tử trong đó các phần tử chia thành $k$ loại, và $n_i$ là số phần tử loại $i$ (với $i = 1, 2, \dots, k$), nếu các phần tử thuộc cùng một loại là không phân biệt .

b) Có bao nhiêu cách sắp xếp các chữ cái của từ *INDISCREETNESS*

**17**. Mô tả thuật toán sinh ra các hoán vị của tập $n$ số tự nhiên đầu tiên.

**18**. a) Có bao nhiêu cách chia mỗi xấp 5 quân bài cho 6 người chơi?

b) Có bao nhiêu cách đặt $n$ vật khác nhau vào $k$ hộp khác nhau sao cho $n_i$ vật được đặt vào hộp thứ $i$?

**19**. Mô tả thuật toán sinh ra tất cả các tổ hợp của tập $n$ số tự nhiên đầu tiên.

## *BÀI TẬP BỔ SUNG*

**1**. Có bao nhiêu cách chọn 6 đối tượng từ 10 đối tượng khác nhau, khi

a) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và không cho phép lặp lại.

b) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và cho phép lặp lại.

c) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và không cho phép lặp lại.

d) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và cho phép lặp lại.

**2**. Có bao nhiêu cách chọn 10 đối tượng từ 6 đối tượng khác nhau, khi

a) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và không cho phép lặp lại.

b) Các đối tượng trong các lần chọn là có thứ tự và cho phép lặp lại.

c) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và không cho phép lặp lại.

d) Các đối tượng trong các lần chọn là không có thứ tự và cho phép lặp lại.

**3.** Một cuộc trắc nghiệm gồm có 100 câu hỏi đúng/sai. Có bao nhiêu cách khác nhau mà một sinh viên có thể điền vào phiếu trắc nghiệm nếu cho phép để cả dấu trống?

**4.** Bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 10 hoặc là bắt đầu bằng 000 hoặc là kết thúc bằng 1111?

**5.** Có bao nhiêu xâu độ dài 10 được tạo ra từ tập {a, b, c} chứa đúng 3 chữ $a$ hoặc đúng 4 chữ $b$?

**6.** Số điện thoại nội bộ trong hệ thống điện thoại của một khu trường gồm 5 chữ số, với chữ số đầu khác không. Hệ thống điện thoại này có bao nhiêu số khác nhau?

7. Một hiệu kem có 28 loại hương vị, 8 loại gia vị và 12 loại kem sơ chế.

   a) Có thể làm một đĩa gồm ba lớp kem bằng bao nhiêu cách nếu mỗi hương vị có thể dùng nhiều lần và thứ tự của các lớp kem là không quan trọng?

   b) Có bao nhiêu cách làm loại kem nhỏ, nếu nó gồm một lớp kem với một loại hương vị, một loại gia vị và một loại kem sơ chế?

   c) Có bao nhiêu cách làm loại kem lớn, nếu nó gồm ba lớp kem, trong đó mỗi hương vị có thể dùng nhiều lần, thứ tự các lớp là không quan trọng, hai loại gia vị, trong đó mỗi loại chỉ dùng một lần và không kể tới thứ tự, và ba loại kem sơ chế, mỗi loại dùng một lần và không kể thứ tự?

8. Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1000

   a) Có đúng ba chữ số thập phân?

   b) Có một số lẻ các chữ số thập phân?

   c) Có ít nhất một chữ số thập phân bằng 9?

   d) Không có các chữ số lẻ?

   e) Có hai chữ số liên tiếp bằng 5?

   f) Là một số thuận nghịch đọc?

9. Khi các số từ 1 tới 1000 được viết trong hệ thập phân, có bao nhiêu các chữ số sau được dùng?

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 9.

10. Có 12 dấu hiệu hoàng đạo. Trong bao nhiêu người thì chắc chắn có ít nhất có 6 người cùng dấu hiệu hoàng đạo?

11. Một công ty làm 213 loại bánh bích quy khác nhau. Một sinh viên chỉ ăn bánh của công ty. Tính số lần lớn nhất có thể mà anh ta không ăn cùng một loại bánh trong 4 lần liền?

12. Cần có bao nhiêu người để chắc chắn rằng ít nhất hai người được sinh vào cùng một ngày trong tuần và trong cùng một tháng (có thể khác năm).

13. Chỉ ra rằng có ít nhất hai tập con khác nhau gồm 5 phần tử của tập 10 số nguyên dương không vượt quá 50 có cùng tổng.

**14.** Một gói quân bài gồm 20 quân. Hỏi phải có bao nhiêu gói mới đảm bảo chắc chắn rằng có hai quân bài trong các gói đó là như nhau. Biết rằng tổng cộng có 550 quân bài khác nhau.

**15.** a) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân At?

b) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân At và hai quân khác bộ?

c) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân cùng bộ?

d) Cần phải chọn bao nhiêu quân bài từ một bộ bài để chắc chắn chọn được ít nhất hai quân thuộc hai bộ khác nhau?

**16*.** Chỉ ra rằng trong tập bất kỳ gồm $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$ nhất thiết có hai số nguyên tố cùng nhau.

**17*.** Chỉ ra rằng trong một dãy $m$ số nguyên tồn tại một hay nhiều hơn các số hạng liên tiếp có tổng chia hết cho $m$.

**18.** Chỉ ra rằng nếu có năm điểm phân biệt ở trong một hình vuông cạnh bằng 2 thì có ít nhất hai trong 5 điểm này có khoảng cách không xa hơn $\sqrt{2}$

**19.** Chứng minh rằng biểu diễn thập phân của một số hữu tỷ phải lặp lại từ một điểm nào đó trở đi.

**20.** Một đa giác đều $n$ cạnh có bao nhiêu đường chéo, trong đó $n$ là số nguyên dương lớn hơn hay bằng 3?

**21.** Có bao nhiêu cách chọn một tá quà tặng từ 20 loại khác nhau :

a) Nếu không có hai quà tặng cùng loại?

b) Nếu tất cả các quà tặng thuộc cùng một loại?

c) Nếu không có một điều kiện ràng buộc nào?

d) Nếu ít nhất có hai loại?

e) Nếu nhất thiết phải có ít nhất sáu quà tặng thuộc cùng một loại nào đó?

f) Nếu có thể có không nhiều hơn sáu quà tặng thuộc cùng một loại nào đó?

**22**. Tính xác suất trúng thưởng khi chọn đúng sáu số liên tiếp trong một đợt xổ số, trong đó mỗi số được chọn trong số các từ 1 tới 40.

**23.** Tính xác suất để một xấp bài 13 quân không có bộ đôi.

**24.** Tìm $n$ nếu :

a) $P(n, 2) = 100$,

b) $P(n, n) = 5040$,

c) $P(n, 4) = 12\ P(n, 2)$.

**25**. Tìm $n$ nếu :

a) $C(n, 2) = 45$

b) $C(n, 3) = P(n, 2)$

c) $C(n, 5) = C(n, 2)$.

**26.** Chứng minh nếu $n$ và $r$ là các số nguyên không âm và $n \geqslant r$, thì

$$P(n + 1, r) = \frac{P(n, r)(n+1)}{n+1-r}$$

**27.** Chứng minh bằng các lý luận tổ hợp :

$C(n, r) = C(n, n - r)$.

**28**. Chứng minh bằng các lý luận tổ hợp Định lý 7 của Tiết 4.3 bằng cách lập phép tương ứng giữa các tập con của tập có một số chẵn các phần tử và các tập con của tập này có một số lẻ các phần tử. (*Gợi ý*: Lấy một phần tử $a$ trong tập. Lập phép tương ứng bằng cách đặt $a$ trong tập con nếu nó chưa có, và lấy nó ra nếu nó đã có trong tập con này).

**29**. Giả sử $n$ và $r$ là các số nguyên không âm và $r < n$. Chỉ ra rằng :

$C(n, r - 1) = C(n + 2, r + 1) - 2C(n + 1, r + 1) + C(n, r + 1)$.

**30**. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng :

$\sum_{j=2}^{n} C(j,2) = C(n + 1, 3)$ với mọi $n$ nguyên lớn hơn 1.

**31**. Dùng định lý nhị thức chứng minh rằng $3^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$

(*Gợi ý* : Đặt $x = 1$, $y = 2$ trong phát biểu của định lý).

**32**. Trong bài tập này chúng ta sẽ tìm công thức cho tổng các bình phương của $n$ số nguyên dương nhỏ nhất. Ta sẽ tính số các bộ ba $(i, j, k)$ sao cho $i$, $j$ và $k$ là nguyên thỏa mãn $0 \leq i < k$, $0 \leq j < k$ và $1 \leq k \leq n$ bằng hai cách.

a) Chỉ ra rằng có $k^2$ bộ ba như thế với mỗi $k$ cố định. Kết luận có $\sum_{k=1}^{n} k^2$ bộ ba như thế.

b) Chỉ ra rằng số các bộ ba như thế với $0 \leq i < j < k$ và số các bộ ba như thế với $0 \leq j < i < k$ cùng bằng $C(n + 1, 3)$.

c) Chỉ ra rằng số các bộ ba như thế với $0 \leq i = j < k$ bằng $C(n + 1, 2)$.

d) Kết hợp các phần a) b) và c) kết luận :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2.C(n+1, 3) + C(n+1, 2) = n(n + 1)(2n + 1)/6.$$

**33***. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài $n$ trong đó $n \geq 4$ chứa đúng hai lần xuất hiện của 01?

**34**. Tính xác suất để một tập bài có 7 quân chứa :

a) Bốn quân cùng bộ, và 3 quân thuộc bộ thứ hai?

b) Ba quân cùng bộ và hai đôi thuộc hai bộ khác nhau?

c) Ba đôi thuộc ba bộ khác nhau và quân còn lại thuộc bộ thứ tư?

d) Hai đôi thuộc hai bộ và 3 quân còn lại thuộc các bộ thứ ba, thứ tư và thứ năm?

e) Cả bẩy quân thuộc bẩy bộ khác nhau?

f) Bẩy quân thuộc 7 bộ liên tiếp?

h) Bẩy quân cùng hoa thuộc 7 bộ liên tiếp.

**35**. Tính xác suất để một xấp bài có 13 quân chứa :

a) Cả 13 quân cơ?

b) 13 quân cùng hoa?

c) 7 quân pích và 6 quân nhép?

d) 7 quân cùng hoa và 6 quân thuộc hoa khác?

e) 4 quân rô, 6 quân cơ, 2 quân pích và 1 quân nhép?

f) 4 quân cùng hoa, 6 quân thuộc hoa thứ hai, 2 quân thuộc hoa thứ ba, và 1 quân thuộc hoa thứ tư?

**36.** Có bao nhiêu cách khác nhau xếp 8 người ngồi vào một bàn tròn, hai cách ngồi như nhau nếu cách nọ nhận được từ cách kia bằng một phép quay?

**37.** Có bao nhiêu cách phân 24 sinh viên cho 5 thầy giáo hướng dẫn khoa học?

**38.** Có bao nhiêu cách chọn 12 quả táo từ trong một thùng kín chứa 20 quả loại 1, 20 quả loại 2 và 20 quả loại 3, nếu ít nhất 3 quả trong mỗi loại được chọn?

**39.** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 17$, trong đó $x_1$, $x_2$, $x_3$ là nguyên không âm, có bao nhiêu nghiệm, nếu :

a) $x_1 > 1$, $x_2 > 2$ và $x_3 > 3$?

b) $x_1 < 6$ và $x_3 > 5$?

c) $x_1 < 4$, $x_2 < 3$ và $x_3 > 5$?

**40.** a) Có thể tạo được bao nhiêu xâu khác nhau từ các chữ cái của từ *PEPPERCORN* khi tất cả các chữ cái đều được dùng?

b) Có bao nhiêu xâu như thế bắt đầu và kết thúc bằng chữ *P*?

**41.** Có bao nhiêu tập con từ tập 10 phần tử :

a) Có ít hơn 5 phần tử?

b) Có nhiều hơn 7 phần tử?

c) Có một số lẻ phần tử?

**42.** Người làm chứng một tai nạn mà thủ phạm đã bỏ chạy kể với cảnh sát là biển số của chiếc xe gây tai nạn có 3 chữ cái tiếp theo là 3 chữ số, bắt đầu bằng *AS* và chứa hai chữ số 1 và 2. Bao nhiêu biển số khác nhau có thể phù hợp với mô tả này?

**43.** Có bao nhiêu cách đặt $n$ đối tượng giống nhau vào trong $m$ thùng khác nhau sao cho không thùng nào rỗng?

**44.** Có bao nhiêu cách xếp 6 em trai và 8 em gái ngồi vào một dãy ghế sao cho không có hai em trai ngồi cạnh nhau?

**45.** Hãy đưa ra một thuật toán để sinh ra tất cả các chỉnh hợp lặp chập $r$ từ một tập hữu hạn.

46. Hãy đưa ra một thuật toán để sinh ra tất cả các tổ hợp lặp chập $r$ từ một tập hữu hạn.

## BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH

***Viết các chương trình với INPUT và OUTPUT sau đây***

1. Cho $n$ là số nguyên dương và một số nguyên không âm $r$, hãy tìm số các chỉnh hợp chập $r$ và số các tổ hợp chập $r$ của một tập $n$ phần tử.

2. Cho các số nguyên dương $n$ và $r$ tìm số các chỉnh hợp lặp chập $r$ và số tổ hợp lặp chập $r$ của tập $n$ phần tử.

3. Cho số nguyên dương $n$, tìm xác suất chọn trúng 6 số nguyên từ tập $\{1, 2, 3, ... n\}$ trùng với 6 số chọn được nhờ một thiết bị cơ học nào đó.

4. Cho một dãy các số nguyên dương hãy tìm dãy con tăng dài nhất và dãy con giảm dài nhất.

5*. Cho phương trình $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$ trong đó $C$ là hằng số và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số nguyên không âm. Hãy liệt kê tất cả các nghiệm của phương trình.

6. Cho số nguyên dương $n$ hãy liệt kê tất cả các hoán vị của tập $\{1, 2, 3, ..., n\}$ theo thứ tự từ điển.

7. Cho các số nguyên dương $n$ và một số nguyên không âm $r$ không vượt quá $n$. Hãy liệt kê các tổ hợp chập $r$ của tập $\{1, 2, 3, ..., n\}$ theo thứ tự từ điển.

8. Cho các số nguyên dương $n$ và một số nguyên không âm $r$ không vượt quá $n$. Hãy liệt kê các chỉnh hợp chập $r$ của tập $\{1, 2, 3, ..., n\}$ theo thứ tự từ điển.

9. Cho số nguyên dương $n$. Hãy liệt kê tất cả các tổ hợp của tập $\{1, 2, 3, ... ,n\}$

10. Cho số nguyên dương $n$ và một số nguyên không âm $r$. Hãy liệt kê tất cả các chỉnh hợp lặp chập $r$ của tập $\{1, 2, 3, ..., n\}$.

11. Cho các số nguyên dương $n$ và $r$. Hãy liệt kê tất cả các tổ hợp lặp chập $r$ của tập $\{1, 2, 3,..., n\}$.

**12.** Cho số nguyên dương $n$. Hãy sinh ra một hoán vị ngẫu nhiên của tập $\{1, 2, 3,..., n\}$. {xem Bài tập 14 Tiết 4.6).

## TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

***Dùng các chương trình mà bạn đã viết để làm các bài tập sau***

**1.** Tìm số các kết cục có thể trong một cuộc thi đấu mà theo thể lệ cuộc thi đội giành thắng lợi là đội thắng trước 5 trong 9, 6 trong 11, 7 trong 13, và 8 trong 15 trận.

**2.** Hệ số nhị thức nào là lẻ? Bạn có thể đưa ra một phỏng đoán dựa trên các con số?

**3.** Người ta vẫn chưa biết hệ số nhị thức $C(2n, n)$ có thể chia hết cho hình phương của một số nguyên tố hay không, hoặc số mũ lớn nhất trong phân tích $C(2n, n)$ thành thừa số nguyên tố có tăng vô hạn hay không khi $n$ tăng. Hãy khảo sát vấn đề này bằng cách tìm lũy thừa lớn nhất và bé nhất của các số nguyên tố trong phân tích ra thừa số của $C(2n,n)$ đối với càng nhiều số nguyên $n$ càng tốt.

**4.** Tìm xác suất của mỗi loại xấp bài 5 quân và sắp xếp các loại theo xác suất của chúng.

**5.** Hãy tạo ra tất cả các hoán vị của tập gồm 8 phần tử.

**6.** Hãy tạo ra tất cả các chỉnh hợp chập 6 của tập gồm 9 phần tử.

**7.** Hãy tạo ra tất cả các tổ hợp của tập gồm 8 phần tử.

**8.** Hãy tạo ra tất cả các tổ hợp lặp chập 5 của tập gồm 7 phần tử.

**9.** Hãy tạo ra danh sách 100 hoán vị được chọn ngẫu nhiên của tập 100 số nguyên dương đầu tiên. (Xem Bài tập 14 trong Tiết 4.6).

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau :***

**1.** Hãy mô tả một vài ứng dụng đầu tiên nguyên lý Dirichlet bởi Dirichlet và các nhà toán học khác.

**2.** Hãy nghiên cứu xem có thể mở rộng cách đánh số điện thoại hiện thời để đáp ứng nhu cầu số máy tăng nhanh không. Với mỗi phương án đánh số mới mà bạn đề nghị hãy chỉ ra cách tìm số các số điện thoại khác nhau mà nó có.

3. Nhiều hằng đẳng thức tổ hợp đã được trình bày trong cuốn sách này. Hãy tìm nguồn gốc của một vài hằng đẳng thức đó và đưa ra một vài hằng đẳng thức quan trọng khác ngoài những hằng đẳng thức được trình bày trong cuốn sách này. Hãy đưa ra một vài cách chứng minh khác nhau cho các hằng đẳng thức đó.

4. Mô tả các mô hình khác nhau thường được dùng để mô hình sự phân bố các hạt trong cơ học thống kê, bao gồm thống kê Maxwell–Bolzman, Bose–Einstein, và Fermi–Dirac. Trong mỗi trường hợp hãy trình bày các kỹ thuật đếm được sử dụng trong mô hình.

5. Hãy định nghĩa các số Stirling loại một và mô tả một vài tính chất của chúng, sau đó là các đẳng thức mà chúng thỏa mãn.

6. Hãy định nghĩa các số Stirling loại hai và mô tả một vài tính chất của chúng, sau đó là các đẳng thức mà chúng thỏa mãn.

7. Hãy định nghĩa các số Ramsey, phát biểu và chứng minh định lý Ramsey về sự tồn tại của chúng và mô tả những gì người ta mới biết về chúng.

8. Hãy mô tả các cách để tạo ra tất cả các hoán vị của tập $n$ phần tử khác với cách đã trình bày trong Tiết 4.6. So sánh thuật toán này và thuật toán trong Tiết 4.6 về độ phức tạp tính toán của chúng.

9. Mô tả ít nhất một cách tạo tất cả các phân hoạch một số nguyên dương $n$ (Xem Bài tập 35 trong Tiết 3.3).

CHƯƠNG V

# KỸ THUẬT ĐẾM CAO CẤP

Nhiều bài toán đếm không thể dễ dàng giải được bằng các phương pháp đã trình bày trong Chương 4. Một ví dụ là : Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài $n$ không chứa hai bít 0 liên tiếp? Để giải bài toán này, gọi $a_n$ là số các xâu cần tìm độ dài $n$. Có thể chỉ ra rằng $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Phương trình này và các điều kiện đầu $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ xác định dãy số $\{a_n\}$. Nhưng công thức tường minh cho $a_n$ không thể tìm được từ phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các số hạng của dãy. Như chúng ta sẽ thấy một phương pháp tương tự có thể được dùng để giải nhiều loại bài toán đếm.

Nhiều loại khác nữa của bài toán đếm cũng không thể giải được bằng các kỹ thuật đã bàn luận trong Chương 4, chẳng hạn : Có bao nhiêu cách phân chia 7 đồ vật cho 3 người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một vật? Có bao nhiêu số nguyên tố nhỏ hơn 1000? Cả hai bài toán này có thể giải được bằng cách đếm số phần tử của hợp các tập hợp. Chúng ta sẽ mở rộng kỹ thuật đếm, gọi là nguyên lý bù trừ, cho phép đếm các phần tử của hợp các tập hợp, và chúng ta sẽ chỉ ra rằng nguyên lý này có thể dùng để giải các bài toán đếm.

Các kỹ thuật được nghiên cứu trong chương này cùng với các kỹ thuật đếm cơ sở ở Chương 4, có thể dùng để giải nhiều bài toán đếm.

# 5.1. HỆ THỨC TRUY HỒI

## MỞ ĐẦU

Trong một quần thể vi trùng số lượng các cá thể tăng gấp đôi sau mỗi giờ. Nếu thoạt đầu có 5 cá thể hỏi sau 5 giờ số lượng chúng là bao nhiêu? Để giải bài toán này ta giả sử số vi trùng sau $n$ giờ là $a_n$. Vì số vi trùng tăng gấp đôi sau mỗi giờ nên ta có quan hệ $a_n = 2.a_{n-1}$, với $n$ là số nguyên dương tùy ý. Hệ thức này cùng với điều kiện ban đầu $a_0 = 5$ xác định duy nhất $a_n$ đối với mọi $n$ không âm. Chúng ta có thể tìm công thức cho $a_n$ từ thông tin này.

Một số bài toán đếm giải được bằng các kỹ thuật đếm đã bàn luận trong Chương 4 cũng có thể giải được bằng cách tìm các mối quan hệ, gọi là quan hệ truy hồi, giữa các số hạng của dãy, như đã làm đối với bài toán vi trùng. Chúng ta sẽ nghiên cứu các sắc thái khác nhau của các bài toán đếm được mô hình hóa khi dùng các hệ thức truy hồi. Trong tiết này và tiết sau chúng ta sẽ mở rộng các phương pháp để tìm công thức tường minh cho các số hạng của dãy có hệ thức truy hồi thuộc một số loại nào đó.

## HỆ THỨC TRUY HỒI

Trong Chương 3 chúng ta đã xét cách xác định dãy số bằng đệ quy. Nhớ rằng, định nghĩa đệ quy của một dãy số định rõ giá trị của một hay nhiều hơn các số hạng đầu tiên và quy tắc xác định các số hạng tiếp theo từ các số hạng đi trước. Định nghĩa đệ quy có thể dùng để giải các bài toán đếm. Khi đó quy tắc tìm các số hạng từ các số hạng đi trước được gọi là các **hệ thức truy hồi**.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Hệ thức truy hồi* đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn $a_n$ qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy, cụ thể là, $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ với mọi $n$ nguyên và $n \geq n_0$, trong đó $n_0$ là nguyên không âm. Dãy số được gọi là *lời giải* hay là *nghiệm* của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

*Chú ý.* Thuật ngữ hệ thức truy hồi trong cuốn sách này còn được dùng với tên khác mang cùng nghĩa như *công thức truy hồi, biểu thức truy hồi*.

**Ví dụ 1.** Cho $\{a_n\}$ là dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4, ...,$ và giả sử $a_0 = 3$, $a_1 = 5$. Tìm $a_2$ và $a_3$?

*Giải:* Từ hệ thức truy hồi ta có $a_2 = a_1 - a_0 = 5 - 3 = 2$ và $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$.

■

**Ví dụ 2.** Hãy xác định xem dãy $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 3n$ với mọi $n$ nguyên không âm có là *lời giải* của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n = 2, 3, 4,...,$ hay không? Câu hỏi cũng như vậy đối với $a_n = 2^n$ và $a_n = 5$.

*Giải:* Giả sử $a_n = 3n$ với mọi $n$ nguyên không âm. Khi đó với $n \geqslant 2$ ta thấy rằng $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = 2[3(n - 1)] - 3(n - 2) = 3n$. Do đó, $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 3n$ là một lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

Giả sử, $a_n = 2^n$ với mọi $n$ nguyên không âm. Rõ ràng $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ và $a_2 = 4$. Vì $a_2 \neq 2a_1 - a_n = 2.2 - 1 = 3$, chúng ta thấy rằng $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 2^n$ không là một lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

Giả sử $a_n = 5$ với mọi $n$ nguyên không âm. Khi đó với $n \geqslant 2$ ta thấy $2a_{n-1} - a_{n-2} = 2.5 - 5 = 5$. Do đó, $\{a_n\}$ trong đó $a_n = 5$ là một lời giải của hệ thức truy hồi đã cho.

■

Các **điều kiện đầu** đối với dãy số định rõ giá trị các số hạng đi trước số hạng đầu tiên kể từ đó hệ thức truy hồi có hiệu lực. Chẳng hạn, trong Ví dụ 1, $a_0 = 3$ và $a_1 = 5$ là các điều kiện đầu. Các điều kiện đầu và hệ thức truy hồi xác định duy nhất dãy số. Chúng cho ta định nghĩa đệ quy của dãy. Bất kỳ số hạng nào của dãy cũng có thể tìm được từ các điều kiện đầu và sử dụng hệ thức truy hồi với số lần cần thiết. Tuy nhiên có một cách tốt hơn để tính các số hạng của một lớp các dãy xác định bằng hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu. Chúng ta sẽ thảo luận các phương pháp đó trong tiết này và tiết tiếp theo.

## MÔ HÌNH HÓA BẰNG HỆ THỨC TRUY HỒI

Chúng ta có thể dùng các hệ thức truy hồi để mô hình hóa một lớp rất rộng các bài toán như tính lãi kép, tính số lượng thỏ trên một hòn đảo, xác định số lượng các dịch chuyển trong trò chơi Tháp Hà–nội, và tính số các xâu nhị phân có những tính chất nào đó.

**Ví dụ 3.** *Lãi kép.* Giả sử một người gửi 10 000 đô–la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

*Giải:* Để giải bài toán này ta gọi $P_n$ là tổng số tiền có trong tài khoản sau $n$ năm. Vì số tiền có trong tài khoản sau $n$ năm bằng số có sau $n - 1$ năm cộng lãi suất của năm thứ $n$, nên ta thấy dãy $\{P_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau :

$$P_n = P_{n-1} + 0,11P_{n-1} = (1,11)P_{n-1}.$$

Điều kiện đầu là $P_o = 10\ 000$.

Chúng ta có thể dùng phương pháp lặp để tìm công thức trên cho $P_n$. Dễ thấy rằng :

$$P_1 = (1,11)P_o$$

$$P_2 = (1,11)P_1 = (1,11)^2P_o,$$

$$\ldots$$

$$P_n = (1,11)P_{n-1} = (1,11)^nP_o.$$

Khi thế điều kiện đầu $P_o = 10\ 000$ vào, sẽ nhận công thức $P_n = (1,11)^n.10\ 000$. Có thể dùng quy nạp toán học để khẳng định tính đúng đắn của nó. Công thức là đúng với $n = 0$ vì đó chính là điều kiện đầu của dãy. Bây giờ ta giả sử $P_n = (1,11)^n.10000$. Khi đó từ hệ thức truy hồi và giả thiết quy nạp, ta có

$$P_{n+1} = (1,11)P_n = (1,11)(1,11)^n.10000 = (1,11)^{n+1}.10000.$$

Điều này chứng tỏ công thức tường minh của $P_n$ là đúng.

Thay $n = 30$ vào công thức $P_n = (1,11)^n.10\ 000$ cho ta

$$P_{30} = (1,11)^{30}.10\ 000 = 228922,97 \text{ đô–la}.$$

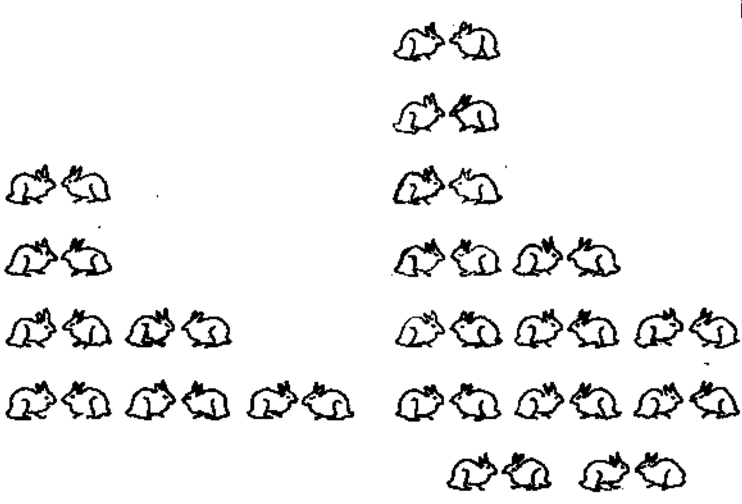
■

Ví dụ sau chỉ ra có thể tính số lượng thành viên của họ hàng nhà thỏ sống trên một hòn đảo bằng hệ thức truy hồi.

**Ví dụ 4.** *Họ nhà thỏ và số Fibonacii.* Chúng ta hãy xem xét bài toán sau đây được đặt ra đầu tiên bởi Fibonacii vào thế kỷ thứ 13 trong tác phẩm của ông mang tên *Liber abaci*. Một cặp thỏ mới sinh (một con đực và một con cái) được thả lên một hòn đảo. Giả sử rằng một cặp thỏ chưa sinh sản được trước khi đầy 2 tháng tuổi. Từ khi chúng đầy 2 tháng tuổi, mỗi tháng chúng đẻ được một đôi thỏ con như chỉ ra trên hình 1. Tìm công thức truy hồi tính số cặp thỏ trên đảo sau $n$ tháng với giả sử các con thỏ là trường thọ.

***Giải:*** Giả sử $f_n$ là số cặp thỏ sau $n$ tháng. Ta sẽ chỉ ra rằng $f_n$ với $n = 1, 2, 3, \ldots$ là các số của dãy Fibonacii.

Số lượng các cặp thỏ có thể tính được bằng hệ thức truy hồi. Cuối tháng thứ nhất số các cặp thỏ trên đảo là $f_1 = 1$. Vì cặp thỏ này vẫn chưa đến tuổi sinh sản được nên trong tháng thứ hai cũng là $f_2 = 1$. Để tìm số cặp thỏ sau $n$ tháng, ta cộng số cặp thỏ trên đảo ở tháng trước $f_{n-1}$ và số cặp thỏ mới đẻ là $f_{n-2}$ vì mỗi cặp thỏ con được sinh ra từ cặp thỏ có ít nhất 2 tháng tuổi.



| Số tháng | Số cặp sinh sản | Số cặp thỏ con | Tổng số cặp thỏ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 2 | 3 | 5 |
| 6 | 3 | 5 | 8 |

Các cặp sinh sản Số cặp thỏ non

***Hình 1.*** Thỏ trên đảo.

Do vậy dãy $\{f_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi :

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

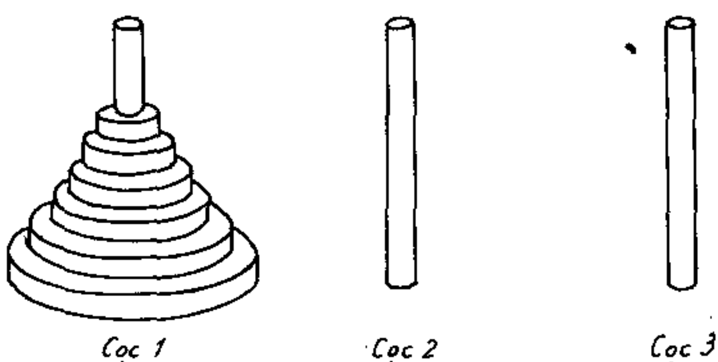
với $n \geqslant 3$ cùng với điều kiện đầu $f_1 = 1$ và $f_2 = 1$. Vì điều kiện đầu và hệ thức truy hồi xác định duy nhất dãy số này nên số các cặp thỏ trên đảo sau $n$ tháng được cho bởi số Fibonacci thứ $n$.

■

Ví dụ sau đây là trò chơi xếp hình nổi tiếng.

**Ví dụ 5.** *Tháp Hà-nội.* Trò chơi xếp hình rất phổ cập vào cuối thế kỷ 19 gọi là Tháp Hà–nội. Tương truyền rằng tại một ngôi tháp tại Hà nội có một tấm đế bằng đồng trên đó có ba cái cọc bằng kim cương. Lúc khai thiên lập địa, trên một trong ba cái cọc thượng đế đã để 64 chiếc đĩa bằng vàng với đường kính giảm dần (Hình 2). Ngày đêm các nhà sư dịch chuyển đĩa sang một chiếc cọc khác theo quy tắc : mỗi lần chỉ được dịch chuyển một đĩa, một đĩa có thể dịch chuyển từ một cọc này sang cọc khác bất kỳ, nhưng không được để một chiếc đĩa lên trên một đĩa khác có đường kính nhỏ hơn. Ngày tận thế sẽ đến khi tất cả các đĩa được chuyển sang một chiếc cọc khác.

Giả sử $H_n$ là số lần dịch chuyển cần thiết để giải bài toán Tháp Hà nội có $n$ đĩa. Hãy lập hệ thức truy hồi đối với dãy $\{H_n\}$.



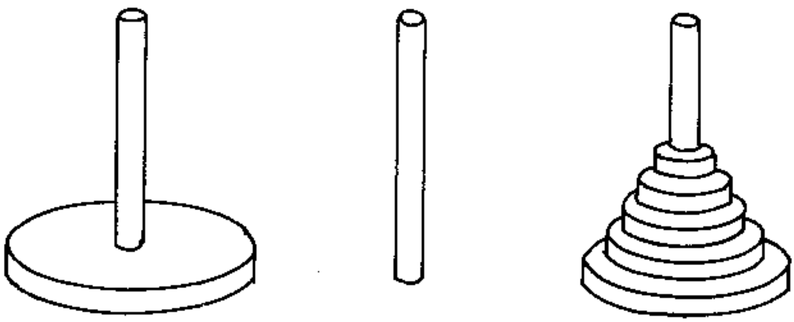

***Hình** 2.* Trạng thái ban đầu Tháp Hà nội.

***Giải:*** Thoạt đầu $n$ đĩa ở trên cọc 1. Chúng ta có thể dịch chuyển $n - 1$ chiếc đĩa nằm trên sang cọc 3, theo quy tắc đã nêu ở trên, và phải dùng

$H_{n-1}$ lần dịch chuyển, (xem Hình 3) và chiếc đĩa lớn nhất được giữ cố định trong khi di chuyển $(n - 1)$ đĩa bé ở trên. Tiếp theo, ta chuyển chiếc đĩa lớn nhất này bằng một lần di chuyển từ cọc 1 sang cọc 2. Cuối cùng ta mất $H_{n-1}$ lần dịch chuyển $(n - 1)$ chiếc đĩa từ cọc 3 sang cọc 2 và đặt lên trên chiếc đĩa lớn nhất vẫn được giữ cố định khi di chuyển $(n - 1)$ đĩa bé. Do vậy ta có hệ thức truy hồi :

$$H_n = 2.H_{n-1} + 1.$$

Điều kiện đầu $H_1 = 1$, vì chỉ cần một lần dịch chuyển một đĩa ở cọc 1 sang cọc 2 theo đúng quy tắc của cuộc chơi.




***Hình** 3*. Trạng thái trung gian ở Tháp Hà nội.

Chúng ta có thể dùng phương pháp lặp để giải hệ thức truy hồi này. Ta nhận thấy rằng ;

$$\begin{aligned} H_n &= 2H_{n-1} + 1 \\ &= 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\ldots \\ &= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \\ &= 2^n - 1. \end{aligned}$$

Chúng ta đã sử dụng hệ thức truy hồi nhiều lần để biểu diễn $H_n$ qua các số hạng trước nó của dãy. Trong đẳng thức trước đẳng thức cuối cùng ta đã sử dụng điều kiện đầu $H_1 = 1$. Đẳng thức cuối cùng chính là công thức tính tổng các số hạng của một cấp số nhân.

Phương pháp lặp đã cho ta nghiệm của hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ với điều kiện đầu $H_1 = 1$. Công thức này cũng có thể chứng minh bằng quy nạp toán học. Các bạn sẽ làm như một bài tập ở cuối tiết này.

Khi thay $n = 64$ vào hệ thức trên ta được :

$$H_{64} = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

đó là số lần cần thiết để dịch chuyển tất cả các đĩa từ một cọc này sang cọc khác. Giả sử mỗi lần dịch chuyển mất một giây, thì cần hơn 500 tỷ năm để các nhà sư dịch chuyển tất cả các đĩa sang cọc khác.

■

Ví dụ 6 minh họa cách dùng hệ thức truy hồi để tính số các xâu nhị phân có độ dài nhất định và có một tính chất nào đó.

**Ví dụ 6.** Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài $n$ và không có hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu như thế có độ dài bằng 5?

***Giải.*** Gọi $a_n$ là số các xâu nhị phân độ dài $n$ và không có hai số 0 liên tiếp. Để nhận được hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$, ta thấy rằng theo quy tắc cộng, số các xâu nhị phân độ dài $n$ và không có hai số 0 liên tiếp bằng số các xâu như thế kết thúc bằng số 1 cộng với số các xâu như thế kết thúc bằng số 0. Chúng ta giả sử rằng $n \geq 3$, tức là các xâu nhị phân có ít nhất ba bit.

Các xâu nhị phân độ dài $n$, không có hai số 0 liên tiếp và kết thúc bằng số 1 chính là xâu nhị phân như thế, độ dài $n - 1$ và thêm số 1 vào cuối của chúng. Vậy chúng có tất cả là $a_{n-1}$.

Các xâu nhị phân độ dài $n$, không có hai số 0 liên tiếp và kết thúc bằng số 0, cần phải có bít thứ $n - 1$ bằng 1, nếu không thì chúng có hai số 0 ở hai bit cuối cùng. Từ đó suy ra, các xâu nhị phân độ dài $n$, không có hai số 0 liên tiếp, kết thúc bằng số 0 chính là các xâu nhị phân không có hai số 0 liên tiếp có độ dài $n - 2$ và thêm 10 vào cuối của nó. Do vậy số chúng là $a_{n-2}$ (Xem minh họa trên Hình 4).

Cuối cùng ta rút ra :

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ với } n \geq 3.$$

| | | | Số các xâu nhị phân dài $n$ không có hai số 0 liên tiếp |
|---|---|---|---|
| Kết thúc bằng số 1 | Xâu nhị phân tùy ý có độ dài $n$ - 1 không có hai số 0 liên tiếp | 1 | $a_{n-1}$ |
| Kết thúc bằng số 0 | Xâu nhị phân tùy ý có độ dài $n$ - 2 không có hai số 0 liên tiếp | 1 0 | $a_{n-2}$ |
| | | | Tổng : $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ |

***Hình 4.*** Tính số xâu nhị phân đọ dài $n$ và không có hai số 0 liên tiếp.

Điều kiện đầu là $a_1 = 2$ vì cả hai xâu độ dài 1 đều không có hai số 0 liên tiếp, ta cũng có $a_2 = 3$, vì có 3 xâu như thế là 01, 10 và 11.

Để nhận được $a_5$ ta sử dụng hệ thức truy hồi ba lần :

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5,$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8,$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13.$$

***Chú ý :*** Ta thấy rằng $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi giống như là dãy Fibonacci. Vì $a_1 = f_3$, và $a_2 = f_4$ ta suy ra $a_n = f_{n+2}$.

■

Ví dụ tiếp theo chỉ ra cách sử dụng hệ thức truy hồi để mô hình hóa số các từ mã cho phép khi thực hiện một kiểm tra tính hợp lệ nào đó.

**Ví dụ 7.** *Tính số từ mã.* Một hệ máy tính coi một xâu các chữ số hệ thập phân là một từ mã hợp lệ nếu nó chứa một số chẵn chữ số 0. Chẳng hạn, 1230407869 là hợp lệ còn 120987045608 là không hợp lệ. Giả sử $a_n$ là số các từ mã hợp lệ độ dài $n$. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho $a_n$.

***Giải:*** Dễ thấy $a_1 = 9$, vì có 10 xâu một chữ số và chỉ có một xâu, cụ thể là xâu 0, là không hợp lệ. Có thể tìm hệ thức hồi quy cho dãy này bằng cách nghiên cứu xem bằng cách nào có thể nhận được xâu hợp lệ $n$ chữ số từ xâu $n - 1$ chữ số. Có hai cách tạo xâu hợp lệ $n$ chữ số từ xâu $n - 1$ chữ số.

Dầu tiên, xâu hợp lệ $n$ chữ số có thể nhận được bằng cách nối thêm chữ số khác không vào xâu hợp lệ $n - 1$ chữ số. Ta có 9 cách nối thêm, vậy bằng cách này có thể tạo được $9a_{n-1}$ xâu hợp lệ $n$ chữ số.

Tiếp theo, xâu hợp lệ $n$ chữ số có thể nhận được bằng cách nối thêm chữ số 0 vào xâu không hợp lệ $n - 1$ chữ số. Số các xâu hợp lệ $n$ chữ số loại này chính bằng số các xâu không hợp lệ $n - 1$ chữ số, tức là bằng $10^{n-1} - a_{n-1}$, vì có tất cả $10^{n-1}$ xâu $n - 1$ chữ số trong đó có $a_{n-1}$ xâu là hợp lệ.

Vì tất cả các xâu hợp lệ $n$ chữ số sẽ được tạo ra bằng một trong hai cách trên, nên ta suy ra tất cả có :

$$a_n = 9a_{n-1} + (10^{n-1} - a_{n-1}) = 8a_{n-1} + 10^{n-1}.$$

xâu hợp lệ độ dài $n$.

## *BÀI TẬP*

1. Tìm 5 số hạng đầu tiên được xác định bởi mỗi hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu sau đây :

   a) $a_n = 6a_{n-1},$ $\quad a_n = 2$ ;

   b) $a_n = a_{n-1}^2,$ $\quad a_1 = 2$ ;

   c) $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$ $\quad a_0 = 1,\quad a_1 = 2$ ;

   d) $a_n = n.a_{n-1} + n^2.a_{n-2}$ $\quad a_0 = 1,\quad a_1 = 2$ ;

   e) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3}$ $\quad a_n = 1,\quad a_1 = 2$ ; $a_2 = 0$ ;

2. Chỉ ra rằng dãy $(a_n)$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, nếu :

   a) $a_n = 0$? $\qquad$ b) $a_n = 1$?

   c) $a_n = (-4)^n$? $\qquad$ d) $a_n = 2(-4)^n + 3$?

3. Dãy $\{a_n\}$ nào là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ nếu

   a) $a_n = 0$? $\qquad$ b) $a_n = 1$?

   c) $a_n = 2^n$? $\qquad$ d) $a_n = 4^n$?

   e) $a_n = n\ 4^n$? $\qquad$ f) $a_n = 2.4^n + 3n.4^n$?

   g) $a_n = (-4)^n$? $\qquad$ h) $a_n = n^2 4^n$?

4. Với mỗi dãy sau hãy tìm một hệ thức truy hồi mà dãy này thỏa mãn (Câu trả lời là không duy nhất) :

   a) $a_n = 3,$ $\qquad$ b) $a_n = 2^n,$

   c) $a_n = 2n + 3$ $\qquad$ d) $a_n = 5^n$ ,

e) $a_n = n^2$, f) $a_n = n^2 + n$,

g) $a_n = n + (-1)^n$, h) $a_n = n!$

**5.** Hãy tìm nghiệm của mỗi hệ thức truy hồi và điều kiện đầu sau đây. Dùng phương pháp lặp như trong Ví dụ 5.

a) $a_n = 3a_{n-1}$, $a_0 = 2$,

b) $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_0 = 3$,

c) $a_n = a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$,

d) $a_n = a_{n-1} + 2n + 3$, $a_0 = 4$,

e) $a_n = 2a_{n-1} - 1$, $a_0 = 1$,

f) $a_n = 3a_{n-1} + 1$, $a_0 = 1$,

g) $a_n = na_{n-1}$, $a_0 = 5$,

h) $a_n = 2na_{n-1}$, $a_0 = 1$,

**6.** Một người gửi 1000 đô-la vào tài khoản của mình trong một ngân hàng với lãi suất kép 9% một năm.

a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi cho tổng số có trong tài khoản vào cuối năm thứ $n$?

b) Tìm công thức tường minh cho tổng số có trong tài khoản vào cuối năm thứ $n$?

c) Sau 100 năm tổng số tiền có trong tài khoản là bao nhiêu?

**7.** Giả sử số vi trùng trong một quần thể sẽ tăng gấp ba sau mỗi giờ.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi tính số vi trùng sau $n$ giờ.

b) Nếu có 100 vi trùng khi bắt đầu tạo quần thể mới thì chúng sẽ nảy nở thành bao nhiêu sau 10 giờ?

**8.** Giả sử dân số toàn thế giới năm 1995 là 7 tỷ người và tăng với tốc độ 3% một năm.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi cho dân số thế giới $n$ năm sau năm 1995.

b) Tìm công thức tường minh cho dân số thế giới $n$ năm sau năm 1995.

c) Năm 2010 dân số thế giới là bao nhiêu?

**9.** Một nhà máy sản xuất ô tô thể thao theo đơn đặt hàng với tốc độ ngày càng tăng. Tháng đầu chỉ sản xuất một chiếc, tháng thứ hai làm được hai chiếc, và cứ như vậy tháng thứ $n$ sản xuất được $n$ chiếc.

a) Hãy lập công thức truy hồi tính số ô tô sản xuất được trong $n$ tháng đầu tiên của nhà máy.

b) Bao nhiêu ô tô được sản xuất trong năm đầu tiên?

c) Hãy tìm công thức tường minh tính số ô tô sản xuất được trong $n$ tháng đầu tiên của nhà máy.

**10.** Một nhân viên bắt đầu làm việc tại một công ty từ năm 1987, với lương khởi điểm là 50 000 đô-la. Hàng năm anh ta được nhận thêm 1000 đô-la và 5% lương của năm trước.

a) Hãy thiết lập hệ thức truy hồi tính lương của nhân viên đó $n$ năm sau năm 1987.

b) Lương năm 1995 của anh ta là bao nhiêu?

c) Hãy tìm công thức tường minh tính lương của nhân viên này $n$ năm sau năm 1987.

**11.** Dùng quy nạp toán học kiểm tra lại công thức nhận được trong Ví dụ 5, tính số dịch chuyển cần thiết để chuyển $n$ đĩa từ cột này sang cột khác trong trò chơi Tháp Hà nội.

**12.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số hoán vị của tập có $n$ phần tử.

b). Dùng hệ thức tìm được hãy tính số hoán vị của tập $n$ phần tử.

**13.** Một máy bán tem tự động chỉ nhận các đồng xu một đô la và các tờ tiền 1 đô-la và 5 đô la.

a) Hãy tìm hệ thức truy hồi tính số cách đặt $n$ đô-la vào trong máy bán hàng, trong đó thứ tự các đồng xu, các tờ tiền được đặt vào là quan trọng.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Bao nhiêu cách đặt 10 đô-la vào máy để mua một bộ tem?

**14.** Một nước dùng các đồng xu giá trị 1 peso, 2 peso, 5 peso và 10 peso và các tờ tiền giấy giá trị 5 peso, 10 peso, 20 peso, 50 peso và 100 peso. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số cách trả $n$ peso, trong đó thứ tự trả các đồng xu và tờ tiền giấy là có tính đến.

**15.** Có bao nhiêu cách trả 17 peso, trong đó thứ tự trả các đồng xu và tờ tiền giấy là có tính đến. (Các loại tiền như trong Bài tập 14).

**16*.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các dãy số nguyên dương tăng thực sự, có số hạng đầu tiên bằng 1 và số hạng cuối cùng bằng $n$, trong đó $n$ là số nguyên dương, tức là các dãy $a_1$, $a_2$, ... $a_k$ trong đó $a_1 = 1$ và $a_k = n$ và $a_j < a_{j+1}$ với $j = 1, 2, ..., k - 1$.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu dãy như vậy nếu $n$ nguyên dương và lớn hơn hay bằng 2.

**17.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài $n$, chứa 2 số 0 liên tiếp.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu như vậy có độ dài bằng 7?

**18.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài $n$, chứa 3 số 0 liên tiếp.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bằng 7 chứa ba số 0 liên tiếp?

**19.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu nhị phân độ dài $n$, không chứa 3 số 0 liên tiếp?

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu dãy nhị phân độ dài bằng 7 không chứa ba số 0 liên tiếp?

**20*.** a) Tìm hệ thức hồi quy cho số các xâu nhị phân chứa xâu 01.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài bằng 7 chứa dãy 01?

**21.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các cách đi lên $n$ bậc thang nếu một người có thể bước một hoặc hai bậc một lần.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu cách đi lên một cầu thang 8 bậc theo kiểu nêu trong phần a)?

**22.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các cách đi lên $n$ bậc thang nếu một người có thể bước một, hai hoặc ba bậc một lần.

b) Tìm điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu cách đi lên một cầu thang 8 bậc theo kiểu nêu trong phần a)?

*Một xâu chỉ chứa các ký tự 0, 1, 2 được gọi là các* **xâu tam phân.**

**23.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân không chứa 2 số 0 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

**24.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân chứa 2 số 0 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

**25*.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân không chứa 2 số 0 liên tiếp hoặc hai số 1 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

**26*.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân hoặc là chứa 2 số 0 liên tiếp hoặc hai chứa hai số 1 liên tiếp.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

**27*.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân không chứa liên tiếp các ký tự như nhau.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

**28**.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các xâu tam phân chứa liên tiếp hai ký tự như nhau.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Có bao nhiêu xâu tam phân như vậy có độ dài bằng 6?

**29.** Các thông báo được truyền qua các kênh truyền thông sử dụng hai tín hiệu. Truyền một tín hiệu mất 1 $\mu s$ (một phần triệu giây), truyền tín hiệu kia mất 2 $\mu s$.

a) Tìm hệ thức truy hồi tính số các thông báo khác nhau gồm các dãy xen nhau của hai tín hiệu này và được truyền đi trong $n$ $\mu s$.

b) Tìm các điều kiện đầu.

c) Bao nhiêu thông báo khác nhau được truyền đi trong $10\mu s$ nếu dùng hai tín hiệu này.

**30.** Một người lái xe buýt trả thuế cầu đường bằng cách thả vào các máy thu thuế tự động lần lượt các đồng 5 xu và đồng 10 xu.

a) Tìm hệ thức truy hồi tính số cách khác nhau mà người lái xe có thể trả một khoản thuế $n$ xu (trong đó trật tự theo đó các đồng xu được thả vào máy là [illegible] quan trọng).

b) Có bao nhiêu cách khác nhau mà người lái xe có thể trả một khoản thuế 45 xu?

**31.** a) Tìm hệ thức truy hồi mà $R_n$ thỏa mãn, trong đó $R_n$ là số miền của mặt phẳng bị phân chia bởi $n$ đường thẳng nếu không có hai đường nào song song và không có ba đường nào cùng đi qua một điểm.

b) Tính $R_n$ bằng phương pháp lặp.

**32*.** a) Tìm hệ thức truy hồi mà $R_n$ thỏa mãn, trong đó $R_n$ là số miền của mặt cầu bị phân chia bởi $n$ đường tròn lớn (tức là giao của mặt cầu với các mặt phẳng đi qua tâm mặt cầu) nếu không có 3 đường nào trong số $n$ đường tròn này đi qua cùng một điểm.

b) Tính $R_n$ bằng phương pháp lặp.

**33*** a) Tìm hệ thức truy hồi mà $S_n$ thỏa mãn, trong đó $S_n$ là số miền trong không gian 3 chiều bị phân chia bởi $n$ mặt phẳng nếu mọi bộ 3 mặt phẳng gặp nhau tại một điểm, nhưng không có bộ 4 mặt phẳng nào đi qua cùng một điểm.

b) Tính $S_n$ bằng phương pháp lặp.

**34.** Tìm hệ thức truy hồi cho các xâu nhị phân độ dài $n$ và có một số chẵn bít 0.

**35.** Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 7 chứa một số chẵn bít 0?

**36.** a) Tìm hệ thức truy hồi cho số các cách phủ toàn bộ bàn cờ $2 \times n$ bằng các quân đôminô $1 \times 2$. (*Gợi ý* : nghiên cứu song song các cách phủ trong đó góc trên bên phải của bàn cờ được phủ bằng các quân đôminô nằm ngang và thẳng đứng).

b) Tìm điều kiện ban đầu cho hệ thức tìm được trong phần a).

c) Có bao nhiêu cách phủ toàn bộ bàn cờ $2 \times 17$ bằng các quân đôminô $1 \times 2$?

**37.** a) Tìm hệ thức truy hồi tính số các cách lát một đường đi bộ bằng các viên đá lát nếu chúng có màu đỏ, xanh hoặc xám sao cho không có hai viên đỏ liền kề, giả sử các viên cùng màu là không phân biệt được.

b) Tìm điều kiện ban đầu cho hệ thức tìm được trong phần a).

c) Có bao nhiêu cách lát một đoạn đường 7 viên như mô tả trong phần a)?

**38.** Chứng minh rằng các số Fibonacci thỏa mãn hệ thức truy hồi $f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$ với $n = 5, 6, 7,\ldots$ và các điều kiện đầu $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, và $f_4 = 3$. Dùng hệ thức này chứng minh rằng $f_{5n}$ chia hết cho 5, với $n = 1, 2, 3, \ldots$

**39***. Gọi $S(m, n)$ là số các hàm toàn ánh từ tập $m$ phần tử lên tập $n$ phần tử. Chỉ ra rằng $S(m, n)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau :

$$S(m, n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n, k)S(m, k)$$

với mọi $m$, $n$ sao cho $m \geqslant n$ và $n > 1$ và điều kiện đầu $S(m,1) = 1$.

*Giả sử* $\{a_n\}$ *là dãy các số thực.* **Sai phân lùi** *của dãy này được định nghĩa bằng đệ quy như sau.* **Sai phân đầu tiên** $\nabla a_n$ *là*

$$\nabla a_n = a_n - a_{n-1} ;$$

**Sai phân thứ (k + 1)** : $\nabla^{k+1} a_n$ *nhận được từ* $\nabla^k a_n$ *bằng*

$$\nabla^{k+1} a_n = \nabla^k a_n - \nabla^k a_{n-1}$$

**40.** Tìm $\nabla a_n$ cho dãy $\{a_n\}$ trong đó :

a) $a_n = 4$, b) $a_n = 2n$,

c) $a_n = n^2$, d) $a_n = 2^n$.

**41.** Tìm $\nabla^2 a_n$ cho các dãy $\{a_n\}$ trong Bài tập 34.

**42.** Chỉ ra rằng $a_{n-1} = a_n - \nabla a_n$.

**43.** Chỉ ra rằng $a_{n-2} = a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n$.

**44***. Chứng minh rằng $a_{n-k}$ có thể biểu diễn qua $a_n$, $\nabla a_n$, $\nabla^2 a_n$, ..., $\nabla^k a_n$.

**45.** Hãy biểu diễn hệ thức hồi quy $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ qua $a_n$, $\nabla a_n$ và $\nabla^2 a_n$.

**46.** Chỉ ra rằng mọi hệ thức truy hồi cho dãy $\{a_n\}$ đều có thể được viết qua $a_n$, $\nabla a_n$, $\nabla^2 a_n$, ... Phương trình nhận được chứa dãy số và các sai phân của nó được gọi là **phương trình sai phân**.

# 5.2. GIẢI CÁC HỆ THỨC TRUY HỒI

## MỞ ĐẦU

Các hệ thức truy hồi xuất hiện trong các mô hình rất khác nhau. Một số có thể giải bằng cách lặp hoặc bằng một số kỹ thuật đặc biệt. Tuy nhiên phần lớn chúng có thể giải tường minh theo một cách rất có hệ thống. Đó là các hệ thức biểu diễn các số hạng của dãy như tổ hợp tuyến tính của các số hạng đi trước.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng số* là hệ thức truy hồi có dạng :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k},$$

trong đó $c_1$, $c_2$, ..., $c_k$ là các số thực, và $c_k \neq 0$.

Hệ thức truy hồi trong định nghĩa là **tuyến tính** vì vế phải là tổng các tích của các số hạng trước của dãy với một hệ số. Nó là **thuần nhất** vì mọi số hạng đều có dạng $a_j$*s*. Các hệ số của các số hạng của dãy đều là **hằng số**, thay vì là các hàm phụ thuộc *n*. **Bậc** là *k* vì $a_n$ được biểu diễn qua *k* số hạng trước của dãy.

Theo nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học thì dãy số thỏa mãn hệ thức truy hồi nêu trong định nghĩa được xác định duy nhất bằng hệ thức truy hồi này và *k* điều kiện đầu :

$$a_0 = C_0,\ a_1 = C_1,\ \dots,\ a_{k-1} = C_{k-1}.$$

**Ví dụ 1.** Hệ thức truy hồi $P_n = (1{,}11)P_{n-1}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 1. Hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2. Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-5}$ là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 5.

■

Có một số hệ thức truy hồi $P_n$ không là hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số.

**Ví dụ 2.** Hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$ là không tuyến tính. Hệ thức truy hồi $H_n = 2H_{n-1} + 1$ là không thuần nhất. Hệ thức truy hồi $B_n = nB_{n-1}$ không có hệ số hằng số.

■

Các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất được nghiên cứu vì hai lý do. Thứ nhất chúng hay gặp khi mô hình hoá các bài toán. Thứ hai chúng có thể giải được một cách có hệ thống.

## GIẢI HỆ THỨC TRUY HỒI TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT HỆ SỐ HẰNG SỐ

Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó $r$ là hằng số. Chú ý rằng $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \dots + c_ka_{n-k}$ nếu và chỉ nếu :

$$r^n = c_1r^{n-1} + c_2r^{n-2} + \dots + c_kr^{n-k}.$$

Sau khi chia cả hai vế cho $r^{n-k}$ và trừ vế phải cho vế trái chúng ta nhận được phương trình tương đương :

$$r^k - c_1r^{k-1} - c_2r^{k-2} - \dots - c_{k-1}r - c_k = 0.$$

Vậy, dãy $\{a_n\}$ với $a_n = r^n$ là nghiệm nếu và chỉ nếu $r$ là nghiệm của phương trình trên. Phương trình này được gọi là phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi, nghiệm của nó gọi là nghiệm đặc trưng của hệ thức truy hồi. Như sẽ thấy sau này, các nghiệm đặc trưng dùng để cho công thức hiển của tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi.

Trước tiên chúng ta sẽ trình bày các kết quả đối với hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc hai. Sau đó chúng ta sẽ nêu ra những kết quả tương tự cho trường hợp tổng quát khi bậc lớn hơn hai. Vì các chứng minh là khá phức tạp nên chúng ta sẽ không trình bày trong cuốn sách này.

Bây giờ ta quay lại các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất hạc hai.

Trước tiên ta nghiên cứu trường hợp khi có hai nghiệm đặc trưng phân biệt.

**ĐỊNH LÝ 1.** Cho $c_1$, $c_2$ là hai số thực. Giả sử $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $r_1$ và $r_2$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$, với $n = 1, 2, \ldots$ trong đó $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số.

***Chứng minh:*** Để chứng minh định lý này ta cần làm hai việc. Đầu tiên, cần phải chỉ ra rằng, nếu $r_1$ và $r_2$ là hai nghiệm của phương trình đặc trưng và $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số thì dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi. Sau đó, cần phải chứng minh rằng nếu dãy $\{a_n\}$ là nghiệm thì $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ với $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số nào đó.

Bây giờ ta sẽ chứng minh phần đầu. Giả sử $r_1$ và $r_2$ là hai nghiệm của $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$, tức là, $r_1{}^2 = c_1 r_1 + c_2$, và $r^2{}_2 = c_1 r_2 + c_2$. Ta thực hiện các biến đổi sau :

$$\begin{aligned}
c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} &= c_1(\alpha_1 r_1^{n-1} + \alpha_2 r_2^{n-1}) + c_2(\alpha_1 r_1^{n-2} + \alpha_2 r_2^{n-2}) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2}(c_1 r_1 + c_2) + \alpha_2 r_2^{n-2}(c_1 r_2 + c_2) \\
&= \alpha_1 r_1^{n-2} r_1^2 + \alpha_2 r_2^{n-2} r_2^2 \\
&= \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n \\
&= a_n.
\end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi đã cho.

Để chứng minh phần hai, ta giả sử $\{a_n)$ là một nghiệm bất kỳ của hệ thức truy hồi. Ta sẽ chọn $\alpha_1$ và $\alpha_2$ sao cho dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thỏa mãn các điều kiện đầu $a_o = C_o$ và $a_1 = C_1$. Thật vậy,

$$a_o = C_o = \alpha_1 + \alpha_2,$$

$$a_1 = C_1 = \alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2$$

Từ phương trình đầu ra được $\alpha_2 = C_o - \alpha_1$. Thế vào phương trình sau ta có

$$C_1 = \alpha_1 r_1 + (C_o - \alpha_1) r_2 = \alpha_1(r_1 - r_2) + C_o - r_2$$ từ đây suy ra

$$\alpha_1 = \frac{(C_1 - C_o r_2)}{r_1 - r_2},$$

và $\alpha_2 = C_o - \alpha_1 = C_o - \dfrac{(C_1 - C_o r_2)}{r_1 - r_2} = \dfrac{(C_o r_1 - C_1)}{r_1 - r_2}$.

Vậy khi chọn các giá trị này của $\alpha_1$ và $\alpha_2$ dãy $\{a_n\}$ với $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$ thỏa mãn các điều kiện đầu. Vì hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu xác định duy nhất dãy, nên $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$. Định lý được chứng minh.

■

Các nghiệm đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số có thể là các số phức. Định lý 1 (và một số định lý khác trong tiết này) vẫn còn đúng trong trường hợp này. Hệ thức truy hồi với nghiệm đặc trưng phức sẽ không được trình bày trong cuốn sách này. Những độc giả quen thuộc với số phức có thể giải các Bài tập 22 và 23 ở cuối tiết này.

Các ví dụ sau sẽ minh họa sự tiện lợi của các công thức hiển cho trong Định lý 1.

**Ví dụ 3.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $a_o = 2$, $a_1 = 7$.

*Giải:* Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi này có dạng $r^2 - r - 2 = 0$. Nghiệm của nó là $r = 2$ và $r = -1$. Theo Định lý 1 dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1 2^n + \alpha_2(-1)^n$, với các hằng số $\alpha_1$ và $\alpha_2$ nào đó. Từ các điều kiện đầu, suy ra

$$a_o = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$a_1 = 7 = \alpha_1 2 + \alpha_2(-1)$$

Giải ra ta được $\alpha_1 = 3$ và $\alpha_2 = -1$. Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi và điều kiện đầu là dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3.2^n - (-1)^n$.

■

**Ví dụ 4.** Tìm công thức hiển của các số Fibonacci.

*Giải:* Nhớ lại rằng dãy các số Fibonacci thỏa mãn hệ thức $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ và các điều kiện đầu $f_o = 0$ và $f_1 = 1$. Các nghiệm đặc trưng là

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ và } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Theo Định lý 1 ta suy ra các số Fibonacci được cho bởi công thức sau

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

với các hằng số $\alpha_1$ và $\alpha_2$ nào đó. Các điều kiện ban đầu $f_o = 0$, $f_1 = 1$ có thể dùng để xác định các hằng số này.

$$f_o = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$

$$f_1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Từ hai phương trình này cho ta $\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Do đó các số Fibonacci được cho bằng công thức hiển sau

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

■

Định lý 1 không dùng được trong trường hợp một nghiệm đặc trưng là nghiệm bội hai. Khi đó ta có Định lý 2 sau đây.

**ĐỊNH LÝ 2.** Cho $c_1$ và $c_2$ là các số thực và $c_2 \neq 0$. Giả sử $r^2 - c_1r - c_2 = 0$ chỉ có một nghiệm $r_o$. Dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ nếu và chỉ nếu $a_n = \alpha_1r_o^n + \alpha_2nr_o^n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ trong đó $\alpha_1$ và $\alpha_2$ là các hằng số.

Chứng minh Định lý 2 là một bài tập ở cuối tiết này. Sau đây là ví dụ minh họa

**Ví dụ 5.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$$

với các điều kiện đầu $a_o = 1$ và $a_1 = 6$.

*Giải:* Phương trình đặc trưng $r^2 - 6r + 9 = 0$ có nghiệm kép $r = 3$. Do đó nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng :

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n,$$

với các hằng số $\alpha_1$ và $\alpha_2$ nào đó. Từ các điều kiện đầu ta suy ra :

$$a_o = 1 = \alpha_1.$$

$$a_1 = 6 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3.$$

Giải ra ta được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$. Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu đã cho là

$$a_n = 3^n + n3^n.$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu kết quả tổng quát về nghiệm của các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số trong đó bậc có thể lớn hơn hai, và với giả thiết phương trình đặc trưng có các nghiệm phân biệt. Chứng minh kết quả này là một bài tập cho độc giả.

**ĐỊNH LÝ 3.** Cho $c_1, c_2, \ldots c_k$ là các số thực. Giả sử rằng phương trình đặc trưng $r^k - c_1r^{k-1} - \ldots - c_k = 0$ có $k$ nghiệm phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$$

nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1r_1^n + \alpha_2r_2^n + \ldots + \alpha_kr_k^n,$$

với $n = 0, 1, 2, \ldots$, trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các hằng số.

Chúng ta sẽ minh họa định lý này bằng ví dụ sau.

**Ví dụ 6.** Hãy tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, và $a_2 = 15$.

*Giải:* Đa thức đặc trưng của hệ thức truy hồi này là

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6$$

Các nghiệm đặc trưng là $r = 1$, $r = 2$, $r = 3$. Do vậy nghiệm của hệ thức truy hồi có dạng :

$$a_n = \alpha_11^n + \alpha_22^n + \alpha_33^n.$$

Để tìm các hằng số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, ta dùng các điều kiện ban đầu :

$$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$a_1 = 5 = \alpha_1 + \alpha_22 + \alpha_33$$

$$a_2 = 15 = \alpha_1 + \alpha_24 + \alpha_39.$$

Giải hệ các phương trình này ta nhận được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$. Vì thế, nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này và các điều kiện ban đầu đã cho là dãy $\{a_n\}$ với

$$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n.$$

## BÀI TẬP

1. Trong các hệ thức truy hồi sau đây hệ thức nào là tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Bậc của các hệ thức đó là bao nhiêu?

   a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + 5a_{n-3}$ b) $a_n = 2na_{n-1} + a_{n-2}$

   c) $a_n = a_{n-1} + a_{n-4}$ d) $a_n = a_{n-1} + 2$

   e) $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2}$ f) $a_n = a_{n-2}$

2. Trong các hệ thức truy hồi sau đây hệ thức nào là tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số. Bậc của các hệ thức đó là bao nhiêu?

   a) $a_n = 3a_{n-2}$ b) $a_n = 3,$

   c) $a_n = a_{n-1}^2$ d) $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-3}$

   e) $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}$ f) $a_n = 4a_{n-2} + 5a_{n-4} + 9a_{n-7}$.

3. Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau :

   a) $a_n = 2a_{n-1}$ với $n \geqslant 1$, $a_0 = 3$.

   b) $a_n = a_{n-1}$ với $n \geqslant 1$, $a_0 = 2$.

   c) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

   d) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 6$, $a_1 = 8$.

   e) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

   f) $a_n = 4a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 4$.

   g) $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{4}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$.

4. Giải các hệ thức truy hồi cùng các điều kiện đầu sau :

   a) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = 6$.

   b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$.

   c) $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 10$.

d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 4$, $a_1 = 1$.

e) $a_n = a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 5$, $a_1 = -1$.

f) $a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ với $n \geq 2$, $a_0 = 3$, $a_1 = -3$.

g) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n$ với $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 8$.

**5.** Có thể truyền được bao nhiêu thông báo khác nhau trong $n$ $\mu s$ khi sử dụng hai tín hiệu như trong Bài tập 25 của Tiết 5.1?

**6.** Có thể truyền được bao nhiêu thông báo khác nhau trong $n$ $\mu s$ khi sử dụng ba tín hiệu nếu truyền tín hiệu đầu mất 1 $\mu s$, hai tín hiệu sau mỗi tín hiệu cần 2 $\mu s$ và mỗi tín hiệu trong thông báo được truyền liên tiếp nhau?

**7.** Với những tấm lát $1 \times 2$ và $2 \times 2$ có thể lát một chiếc hảng $2 \times n$ bằng bao nhiêu cách khác nhau?

**8.** Giả sử số tôm hùm bị đánh bắt trong một năm bằng trung bình cộng số bị đánh bắt trong hai năm trước đó.

a) Hãy tìm quan hệ truy hồi cho $\{L_n\}$, trong đó $L_n$ là số tôm bị đánh bắt trong năm thứ $n$.

b) Hãy tìm $L_n$ nếu năm đầu 100 000 tôm hùm bị đánh bắt, năm thứ hai 300 000 tôm hùm bị đánh bắt.

**9.** Một người gửi 100 000 đô-la vào một quỹ đầu tư vào ngày đầu của một năm. Ngày cuối cùng của năm người đó được hưởng hai khoản tiền lãi. Khoản lãi đầu là 20% tổng số tiền có trong tài khoản cả năm. Khoản thứ hai là 45% của tổng số tiền cơ trong tài khoản trong năm trước đó.

a) Tìm công thức truy hồi cho $\{P_n\}$ trong đó $P_n$ là tổng số tiền trong tài khoản vào cuối của $n$ năm, nếu người đó không rút tiền ra lần nào.

b) Tính tổng số tiền trong tài khoản vào sau $n$ năm, nếu người đó không rút tiền ra lần nào.

**10*.** Chứng minh Định lý 2.

**11.** **Số Lucas** thỏa mãn hệ thức truy hồi sau : $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$, và điều kiện ban đầu $L_0 = 2$ và $L_1 = 1$.

a) Chỉ ra rằng $L_n = f_{n-1} + f_{n+1}$ với $n = 2, 3, \ldots$ trong đó $f_n$ là các số Fibonacci.

b) Hãy tìm công thức hiển của các số Lucas.

**12.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ với $n = 3, 4, 5, \ldots$ và $a_0 = 3$, $a_1 = 6$, $a_2 = 0$.

**13.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 7a_{n-2} + 6a_{n-3}$ với $a_0 = 9$, $a_1 = 10$, $a_2 = 32$.

**14.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 5a_{n-2} - 4a_{n-4}$ với $a_0 = 3$, $a_1 = 2$, $a_2 = 6$ và $a_3 = 8$.

**15.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ với $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

**16*.** Chứng minh Định lý 3.

**17.** Chứng minh hằng đẳng thức sau đây biểu diễn mối quan hệ giữa các số Fibonacci và các hệ số nhị thức :

$$f_{n+1} = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \ldots + C(n-k, k)$$

trong đó $n$ là các số nguyên dương và $k = \lfloor n/2 \rfloor$. (Gợi ý : Giả sử $a_n = C(n, 0) + C(n-1, 1) + \ldots + C(n-k, k)$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn cùng hệ thức truy hồi và điều kiện ban đầu xác định các số Fibonacci).

**18.** Hệ thức truy hồi tuyến tính **không thuần nhất** bậc $k$ có dạng :

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + F(n).$$

Chứng minh rằng nếu $\{p_n\}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi không thuần nhất thì mọi nghiệm đều có dạng $\{p_n + h_n\}$ trong đó $h_n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất tương ứng $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$. (*Gợi ý* : Chỉ ra rằng nếu $\{q_n\}$ là một nghiệm khác thì $\{q_n - p_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất tương ứng).

**19.** Xét hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = 3a_{n-1} + 2^n$.

a) Chỉ ra rằng $a_n = -2^{n+1}$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi này.

b) Dùng Bài tập **18** để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 1$.

**20.** Xét hệ thức truy hồi tuyến tính không thuần nhất $a_n = 2a_{n-1} + 2^n$.

a) Chỉ ra rằng $a_n = n2^n$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi này.

b) Dùng Bài tập 18 để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Tìm nghiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 2$.

**21.** a) Xác định giá trị của các hằng số $A$ và $B$ sao cho $a_n = An + B$ là một nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 2a_{n-1} + n + 5$.

b) Dùng Bài tập 18 để tìm tất cả các nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Tìm ngbiệm thỏa mãn điều kiện ban đầu $a_0 = 4$.

**22.** a) Tìm các nghiệm đặc trưng của hệ thức truy bồi tuyến tính tbuần nhất $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (*Chú ý* : Nghiệm là các số phức).

b) Tìm nghiệm thỏa mãn hệ thức truy hồi trên và các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 2$.

**23*.** a) Tìm nghiệm đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất $a_n = a_{n-4}$ (*Chú ý* : Tìm cả nghiệm phức).

b) Tìm nghiệm thỏa mãn hệ thức truy hồi trên và các điều kiện ban đầu $a_0 = 1$ và $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ và $a_3 = 1$.

**24*.** Giải các hệ thức truy hồi đồng thời

$$a_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1}$$

$$b_n = a_{n-1} + 2\, b_{n-1}$$

với $a_0 = 1$ và $b_0 = 2$.

**25*.** a) Dùng công thức tìm được trong Bài tập 4 cho các số Fibonacci $f_n$, hãy chứng tỏ rằng $f_n$ là số nguyên gần nhất với $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b) Tìm $n$ để $f_n$ lớn hơn và nhỏ hơn $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

**26.** Cbứng tỏ rằng nếu $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $a_0 = s$ và $a_1 = t$ trong đó $s$ và $t$ là các hằng số, thì $a_n = sf_{n-1} + tf_n$ với mọi $n$ nguyên dương.

**27.** Hãy biểu diễn nghiệm của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ với $n \geqslant 2$, $a_n = 0$ và $a_1 = 1$ qua các số Fibonacci (*Gợi ý* : Đặt $b_n = a_n + 1$, áp dụng Bài tập 26 cho dãy $b_n$).

**28***. Gọi $\mathbf{A}_n$ là ma trận $n \times n$ với các số 2 trên đường chéo chính và các số 1 trên tất cả các vị trí ở cạnh các phần tử trên đường chéo chính và bằng không tại tất cả các vị trí còn lại. Tìm hệ thức truy hồi cho định thức $d_n$ của $\mathbf{A}_n$. Giải hệ thức truy hồi này để tìm công thức cho $d_n$.

**29**. Giả sử rằng mỗi một cặp thỏ trên đảo khi được một tháng tuổi đẻ được hai cặp thỏ con và từ 2 tháng tuổi mỗi tháng đẻ được 6 cặp thỏ con. Giả sử trong thời gian thí nghiệm không có con nào bị chết hoặc rời khỏi đảo.

a) Tìm hệ thức truy hồi cho số cặp thỏ trên đảo sau $n$ tháng kể từ khi thả một cặp thỏ mới sinh lên đảo.

b) Bằng cách giải hệ thức truy hồi trong a) hãy tìm số cặp thỏ trên đảo sau $n$ tháng kể từ khi thả một cặp thỏ mới sinh lên đảo.

# 5.3. QUAN HỆ CHIA ĐỂ TRỊ

## MỞ ĐẦU

Nhiều thuật toán đệ quy chia bài toán với các thông tin vào đã cho thành một hay nhiều bài toán nhỏ hơn. Sự phân chia này được áp dụng liên tiếp cho tới khi có thể tìm được lời giải của bài toán nhỏ một cách dễ dàng. Chẳng hạn, chúng ta tiến hành việc tìm kiếm nhị phân bằng cách rút gọn việc tìm kiếm một phần tử trong một danh sách tới việc tìm phần tử đó trong một danh sách có độ dài giảm đi một nửa. Chúng ta rút gọn liên tiếp như vậy cho tới khi còn lại một phần tử. Một ví dụ khác là thủ tục nhân các số nguyên. Thủ tục này rút gọn bài toán nhân hai số nguyên tới ba phép nhân hai số nguyên với số bit giảm đi một nửa. Phép rút gọn này được dùng liên tiếp cho tới khi nhận được các số nguyên có một bit. Các thủ tục này gọi là các thuật toán **chia để trị**. Trong tiết này sẽ nghiên cứu các hệ thức truy hồi thường gặp khi phân tích độ phức tạp của các thuật toán loại này.

## HỆ THỨC CHIA ĐỂ TRỊ

Giả sử rằng một thuật toán phân chia một bài toán cỡ $n$ thành $a$ bài toán nhỏ, trong đó mỗi bài toán nhỏ có cỡ $n/b$ (để đơn giản giả sử rằng $n$ chia hết cho $b$ ; trong thực tế các bài toán nhỏ thường có cỡ bằng số nguyên gần nhất lớn hơn hoặc bằng hoặc nhỏ hơn hay bằng $n/b$). Cũng vậy ta giả sử rằng tổng các phép toán thêm vào khi thực hiện phân chia bài toán cỡ $n$ thành các bài toán có cỡ nhỏ hơn là $g(n)$. Khi đó, nếu $f(n)$ là số các phép toán cần thiết để giải bài toán đã cho, thì $f$ thỏa mãn hệ thức truy hồi sau :

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$$

Hệ thức này có tên là hệ thức truy hồi **chia để trị**.

**Ví dụ 1.** Chúng ta đã xét thuật toán tìm kiếm nhị phân trong Tiết 2.1. Thuật toán này đưa bài toán tìm kiếm cỡ $n$ về bài toán tìm kiếm phần tử này trong dãy tìm kiếm cỡ $n/2$, khi $n$ chẵn. (Vì thế, bài toán cỡ $n$ được đưa *về một* bài toán cỡ $n/2$). Khi thực hiện việc rút gọn cần hai phép so sánh. (Một để xác định nửa danh sách nào được tiếp tục sử dụng, và phép so sánh thứ hai để xác định xem danh sách có còn phần tử nào không). Vì thế, nếu $f(n)$ là số phép so sánh cần phải làm khi tìm kiếm một phần tử trong danh sách tìm kiếm cỡ $n$ ta có $f(n) = f(n/2) + 2$, nếu $n$ là số chẵn.

■

**Ví dụ 2**. Chúng ta sẽ nghiên cứu thuật toán định vị các phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của dãy $a_1, a_2, ..., a_n$. Nếu $n = 1$, thì $a_1$ là phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của dãy. Nếu $n > 1$ thì ta chia dãy này thành hai dãy hoặc là chúng có cùng số lượng các phần tử hoặc là một dãy có nhiều phần tử hơn dãy kia. Bài toán thu về việc tìm phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của mỗi một trong hai dãy nhỏ hơn. Lời giải của bài toán xuất phát sẽ nhận được bằng cách so sánh các phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của hai dãy con.

Gọi $f(n)$ là tổng số các phép so sánh cần phải thực hiện để tìm phần tử lớn nhất và nhỏ nhất của tập $n$ phần tử. Chúng ta đã chỉ ra rằng bài toán cỡ $n$ có thể đưa về hai bài toán cỡ $n/2$, khi $n$ chẵn, bằng việc dùng hai phép so sánh, một là so sánh các phần tử lớn nhất và sau đó là so sánh các phần tử nhỏ nhất của hai tập con. Vì thế chúng ta nhận được hệ thức truy hồi $f(n) = 2f(n/2) + 2$ khi $n$ chẵn.

■

**Ví dụ 3.** Thật kỳ lạ là vẫn có các thuật toán hiệu quả hơn thuật toán thông thường (như đã mô tả trong Tiết 2.4) để nhân hai số nguyên. Bây giờ chúng ta sẽ trình bày một trong các thuật toán như vậy. Đó là thuật toán nhân nhanh, có dùng kỹ thuật chia để trị. Trước tiên ta phân chia mỗi một trong hai số nguyên $2n$ bit thành hai khối mỗi khối $n$ bit. Sau đó phép nhân hai số nguyên $2n$ bit ban đầu được thu về ba phép nhân các số nguyên $n$ bit cộng với các phép dịch chuyển và các phép cộng.

Giả sử $a$ và $b$ là các số nguyên có các biểu diễn nhị phân dài $2n$ (thêm các bit đầu bằng 0 vào các biểu diễn này nếu cần làm cho chúng có độ dài như nhau). Cho

$$a = (a_{2n-1}\, a_{2n-2} \cdots a_1\, a_o)_2$$

và $$b = (b_{2n-1}\, b_{2n-2} \ldots b_1 b_o)_2.$$

Giả sử $a = 2^n A_1 + A_o$, $\quad b = 2^n B_1 + B_o$,

trong đó

$$A_1 = (a_{2n-1} a_{2n-2} \cdots a_{n+1}\, a_n)_2, \qquad A_o = (a_{n-1} \cdots a_1 a_o)_2$$

$$B_1 = (b_{2n-1}\, b_{2n-2} \cdots b_{n+1}\, b_n)_2, \qquad B_n = (b_{n-1} \cdots b_1 b_o)_2.$$

Thuật toán nhân nhanh các số nguyên dựa trên đẳng thức :

$$ab = (2^{2n} + 2^n)A_1B_1 + 2^n(A_1 - A_o)(B_o - B_1) + (2^n + 1)A_oB_o.$$

Đẳng thức này chỉ ra rằng phép nhân hai số nguyên 2n bit có thể thực hiện bằng cách dùng ba phép nhân các số nguyên $n$ bit và các phép cộng, trừ và phép dịch chuyển. Điều đó có nghĩa là nếu $f(n)$ là tổng các phép toán nhị phân cần thiết để nhân hai số nguyên $n$ bit thì

$$f(2n) = 3f(n) + Cn.$$

Ba phép nhân các số nguyên $n$ bit cần $3f(n)$ phép toán nhị phân. Mỗi một trong các phép cộng, trừ, hay dịch chuyển dùng một hằng số nhân với $n$ lần các phép toán nhị phân và $Cn$ là tổng các phép toán nhị phân được dùng khi làm các phép toán này.

**Ví dụ 4.** Thuật toán nhân hai ma trận $n \times n$, với $n$ chẵn, dùng 7 phép nhân hai ma trận $(n/2) \times (n/2)$ và 15 phép cộng các ma trận $(n/2) \times (n/2)$. Vì thế, nếu $f(n)$ là số các phép toán (nhân và cộng) được dùng ta suy ra

$$f(n) = 7f\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{15n^2}{4}, \text{ với } n \text{ chẵn.}$$

Như các Ví dụ 1–4 đã chỉ ra, các hệ thức truy hồi dạng $f(n) = af(n/b) + g(n)$ xuất hiện trong rất nhiều bài toán khác nhau. Ta có thể đánh giá kích cỡ của các hàm thỏa mãn một hệ thức truy hồi như thế. Giả sử rằng $f$ thỏa mãn hệ thức truy hồi này với mọi $n$ chia hết cho $b$. Gọi $n = b^k$ với $k$ là số nguyên dương. Khi đó

$$\begin{aligned}
f(n) &= af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\
&= a^2f\left(\frac{n}{b^2}\right) + ag\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\
&= a^3f\left(\frac{n}{b^3}\right) + a^2g\left(\frac{n}{b^2}\right) + ag\left(\frac{n}{b}\right) + g(n) \\
&\ \ \vdots \\
&= a^kf\left(\frac{n}{b^k}\right) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right).
\end{aligned}$$

Vì $\frac{n}{b^k} = 1$ ta suy ra

$$f(n) = a^kf(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j g\left(\frac{n}{b^j}\right).$$

Chúng ta có thể dùng phương trình này để đánh giá kích cỡ của các hàm thỏa mãn hệ thức chia để trị.

**ĐỊNH LÝ 1.** Giả sử $f$ là một hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c$$

với mọi $n$ chia hết cho $b$, $a \geqslant 1$, $b$ là số nguyên lớn hơn 1, còn $c$ là số thực dương. Khi đó

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & \text{nếu } a > 1 \\ O(\log n) & \text{nếu } a = 1 \end{cases}$$

***Chứng minh:*** Trước tiên giả sử $n = b^k$. Từ công thức của $f(n)$ nhận được trong phần bàn luận trước định lý này với $g(n) = c$, ta có

$$f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c = a^k f(1) + c\sum_{j=0}^{k-1} a^j$$

Khi $a = 1$ ta được $f(n) = f(1) + ck$. Vì $n = b^k$ nên $k = \log_b n$. Vì thế

$$f(n) = f(1) + c\log_b n.$$

Khi $n$ không là lũy thừa của $b$. Khi đó chúng ta có $b^k < n < b^{k+1}$, với $k$ là số nguyên dương. Vì $f$ là hàm tăng ta suy ra $f(n) \leqslant f(b^{k+1}) = f(1) + c(k + 1) = (f(1) + c) + ck \leqslant (f(1) + c) + c\log_b n$. Do đó, trong cả hai trường hợp, $f(n) = O(\log n)$ khi $a = 1$.

Bây giờ giả sử $a > 1$. Khi $n = b^k$ với $k$ là một số nguyên dương, từ công thức tính tổng của cấp số nhân suy ra

$$\begin{aligned} f(n) &= a^k f(1) + \frac{c(a^k - 1)}{a - 1} \\ &= a^k\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] - \frac{c}{a-1} \\ &= C_1 n^{\log_b a} + C_2 \ , \end{aligned}$$

vì $a^k = a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$ , trong đó $C_1 = f(1) + \frac{c}{a-1}$ và $C_2 = -\frac{c}{a-1}$.

Bây giờ giả sử $n$ không là lũy thừa của $b$. Khi đó chúng ta có $b^k < n < b^{k+1}$, với $k$ là một số nguyên dương. Vì $f$ là hàm tăng ta suy ra

$$\begin{aligned} f(n) &\leqslant f(b^{k+1}) = C_1 a^{k+1} + C_2 \\ &\leqslant (C_1 a)a^{\log_b n} + C_2 \\ &\leqslant (C_1 a)n^{\log_b a} + C_2 \end{aligned}$$

vì $k \leqslant \log_b n < k + 1$.

Do vậy, chúng ta có $f(n) = O(n^{\log_b a})$.

■

**Ví dụ 5.** Cho $f(n) = 5f\left(\frac{n}{2}\right) + 3$ và $f(1) = 7$. Hãy tìm $f(2^k)$ trong đó $k$ là số nguyên dương. Hãy đánh giá $f(n)$ nếu $f$ là hàm tăng.

*Giải:* Từ Định lý 1, với $a = 5$, $b = 2$, và $c = 3$ chúng ta thấy nếu $n = 2^k$ thì

$$\begin{aligned} f(n) &= a^k\left[f(1) + \frac{c}{a-1}\right] - \frac{c}{a-1} \\ &= 5^k\left[7 + \frac{3}{4}\right] - \frac{3}{4} = 5^k.\frac{31}{4} - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Như vậy, nếu $f$ là hàm tăng, Định lý 1 chỉ ra rằng

$$f(n) = O(n^{\log_b a}) = O(n^{\log_2 5}).$$

■

Chúng ta có thể dùng Định lý 1 để đánh giá độ phức tạp của thuật toán tìm kiếm nhị phân và thuật toán trong Ví dụ 2.

**Ví dụ 6.** Hãy ước lượng số phép toán so sánh dùng trong thuật toán tìm kiếm nhị phân.

*Giải:* Trong Ví dụ 1 ta đã chứng minh rằng $f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 2$ khi $n$ chẵn, còn $f$ là số phép toán so sánh cần dùng trong tìm kiếm nhị phân trong một dãy cỡ $n$. Vì thế từ Định lý 1 ta suy ra $f(n) = O(\log n)$.

■

**Ví dụ 7.** Hãy ước lượng số phép toán so sánh dùng trong thuật toán cho trong Ví dụ 2 để định vị các số lớn nhất và bé nhất.

*Giải* : Trong ví dụ 2 đã chỉ ra rằng $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + 2$ khi $n$ chẵn, còn $f$ là số phép toán so sánh cần dùng trong thuật toán này. Vì thế từ Định lý 1 suy ra

$$f(n) = O(n^{\log 2}) = O(n).$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu một định lý tổng quát hơn và phức tạp hơn nhưng rất có ích khi phân tích độ phức tạp của thuật toán chia để trị.

**ĐỊNH LÝ 2**. Giả sử $f$ là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

$$f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + cn^{d}$$

với mọi $n = b^k$, trong đó $k$ là số nguyên dương, $a \geqslant 1$, $b$ là số nguyên lớn hơn 1 còn $c$ và $d$ là các số thực dương. Khi đó

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{d}) & \text{nếu } a < b^{d} \\ O(n^{d}\log n) & \text{nếu } a = b^{d} \\ O(n^{\log_b a}) & \text{nếu } a > b^{d} \end{cases}$$

Chứng minh Định lý 2 là nội dung của các Bài tập 17-21 ở cuối tiết này.

**Ví dụ 8.** Hãy ước lượng số phép toán nhị phân cần dùng khi nhân hai số nguyên $n$ bit bằng thuật toán nhân nhanh.

*Giải :* Ví dụ 3 đã chỉ ra rằng $f(n) = 3f\left(\frac{n}{2}\right) + Cn$, khi $n$ chẵn, trong đó $f(n)$ là số các phép toán nhị phân cần dùng khi nhân hai số nguyên $n$ bít bằng thuật toán nhân nhanh. Vì thế, từ Định lý 2 ta suy ra $f(n) = O(n^{\log 3})$. Chú ý là $\log 3 \approx 1{,}6$. Vì thuật toán nhân thông thường dùng $O(n^2)$ phép toán nhị phân, thuật toán nhân nhanh sẽ thực sự tốt hơn thuật toán nhân thông thường khi các số nguyên là đủ lớn.

■

**Ví dụ 9.** Hãy đánh giá số các phép nhân và phép cộng cần dùng khi nhân hai ma trận $n \times n$ bằng thuật toán trình bày trong Ví dụ 4. Chúng ta có $f(n) = 7f\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{15n^2}{4}$, với $n$ chẵn. Vì thế, từ Định lý 2, ta suy ra $f(n) = O(n^{\log 7})$. Vì $\log 7 \approx 2{,}8$, nên với $n$ đủ lớn thuật toán nhân hai ma trận $n \times n$ sẽ tốt hơn thuật toán thông thường dùng $O(n^3)$ phép toán nhân và phép cộng.

■

## *BÀI TẬP*

1. Cần bao nhiêu phép so sánh khi tìm kiếm nhị phân trong một dãy có 64 phần tử?

2. Cần bao nhiêu phép so sánh để định vị số lớn nhất và số bé nhất trong một dãy 128 phần tử bằng thuật toán cho trong Ví dụ 2?

**3.** Hãy nhân $(1110)_2$ và $(1010)_2$ bằng thuật toán nhân nhanh.

**4.** Hãy viết thuật toán nhân nhanh bằng giả mã.

**5.** Xác định giá trị của hằng số $C$ trong Ví dụ 3 và dùng nó để đánh giá số phép toán nhị phân cần thiết để nhân hai số nguyên 64 bit bằng thuật toán nhân nhanh.

**6.** Cần bao nhiêu phép toán để nhân hai ma trận $32 \times 32$ bằng thuật toán dùng trong Ví dụ 4?

**7.** Giả sử rằng $f(n) = f\left(\frac{n}{3}\right) + 1$ với $n$ là số chia hết cho 3 và $f(1) = 1$. Hãy tìm :

a) $f(3)$. b) $f(27)$ c) $f(729)$

**8.** Giả sử rằng $f(n) = 2f\left(\frac{n}{2}\right) + 3$ với $n$ là số chẵn và $f(1) = 5$. Hãy tìm :

a) $f(2)$. b) $f(8)$ c) $f(64)$ d) $f(1024)$

**9.** Giả sử $f(n) = f\left(\frac{n}{5}\right) + 3n^2$ với $n$ là số chia hết cho 5 và $f(1) = 4$. Hãy tìm :

a) $f(5)$. b) $f(125)$ c) $f(3125)$.

**10.** Hãy tìm $f(n)$ với $n = 2^k$, trong đó $f$ thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + 1$ và $f(1) = 1$.

**11.** Hãy ước lượng cỡ của hàm $f$ trong Bài tập 10 nếu $f$ là hàm tăng.

**12.** Tìm $f(n)$ với $n = 3^k$, trong đó $f$ thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = 2f\left(\frac{n}{3}\right) + 4$ và $f(1) = 1$.

**13.** Hãy ước lượng cỡ của hàm $f$ trong Bài tập 12 nếu $f$ là hàm tăng.

**14.** Giả sử rằng có $n = 2^k$ đội tham gia trong cuộc thi đấu theo thể thức loại trực tiếp, trong đó có $n/2$ trận thi đấu ở vòng thứ nhất, sau đó $n/2 = 2^{k-1}$ đội thắng sẽ thi đấu tiếp ở vòng hai, và cứ tiếp tục như thế, hãy lập hệ thức truy hồi cho số các vòng thi đấu của toàn giải.

**15.** Có bao nhiêu vòng thi đấu trong cuộc thi đấu như trong Bài tập 14, nếu tất cả có 32 đội tham gia.

**16.** Hãy giải hệ thức truy hồi cho số vòng thi đấu trong cuộc thi như trong Bài tập 14.

*Trong các Bài tập 17-21 giả sử rằng f là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi* $f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + cn^d$ *, trong đó* $a \geqslant 1$*, b là số nguyên lớn hơn 1, còn c và d là các số thực dương. Những bài tập này sẽ cho ta cách chứng minh Định lý 2.*

**17*.** Chứng tỏ rằng nếu $a = b^d$ và $n$ là lũy thừa của $b$ khi đó $f(n) = f(1)n^d + cn^d\log_b n$.

**18.** Dùng Bài tập 17 chứng tỏ rằng nếu $a = b^d$ thì $f(n) = O(n^d \log n)$.

**19*.** Chứng tỏ rằng nếu $a \neq b^d$ và $n$ là lũy thừa của $b$ khi đó

$f(n) = C_1 n^d + C_2 n^{\log_b a}$,

trong đó $C_1 = \dfrac{b^d c}{b^d - a}$ và $C_2 = f(1) + \dfrac{b^d c}{a - b^d}$.

**20.** Dùng Bài tập 19 chỉ ra rằng nếu $a < b^d$ thì $f(n) = O(n^d)$.

**21.** Dùng Bài tập 19 chỉ ra rằng nếu $a > b^d$ thì $f(n) = O(n^{\log_b a})$.

**22.** Tìm $f(n)$ với $n = 4^k$ trong đó $f$ thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = 5f\left(\frac{n}{4}\right) + 6n$ và $f(1) = 1$.

**23.** Đánh giá cỡ của hàm $f$ trong bài tập 22 nếu $f$ là hàm tăng.

**24.** Tìm $f(n)$ với $n = 2^k$ trong đó $f$ thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = 8f\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ và $f(1) = 1$.

**25.** Đánh giá cỡ của hàm $f$ trong Bài tập 24 nếu $f$ là hàm tăng.

# 5.4. NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

## MỞ ĐẦU

Lớp toán rời rạc gồm 30 nữ sinh và 50 sinh viên năm thứ hai. Bao nhiêu sinh viên trong lớp học là nữ hoặc là sinh viên năm thứ hai? Câu hỏi này không thể trả lời được trừ khi cho thêm một số thông tin nữa. Cộng số nữ sinh với số sinh viên năm thứ hai có thể sẽ không cho câu trả lời đúng bởi vì số sinh viên nữ năm thứ hai sẽ được tính hai lần. Chính vì vậy số sinh viên trong lớp hoặc là nữ hoặc là sinh viên năm thứ hai là tổng số sinh viên nữ và số sinh viên năm thứ hai trừ đi số sinh viên nữ năm thứ hai. Kỹ thuật giải bài toán đếm như thế đã được giới thiếu trong Tiết 4.1. Trong mục này ta sẽ mở rộng những tư tưởng đã đưa vào trong tiết đó để giải một lớp rộng hơn nữa các bài toán đếm.

## NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

Có bao nhiêu phần tử trong hợp của hai tập hợp hữu hạn phần tử? Trong Tiết 1.5 đã chỉ rằng số các phần tử trong hợp hai tập $A$ và $B$ bằng tổng các phần tử của mỗi tập trừ đi số phần tử của giao hai tập hợp, tức là

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| .$$

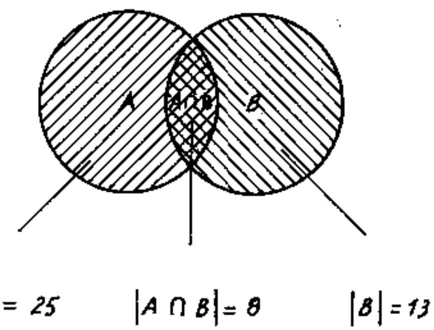
Như chúng ta đã chỉ ra trong Tiết 4.1 công thức cho số các phần tử của hợp hai tập hợp rất hay dùng trong các bài toán đếm. Ta hãy xét ví dụ sau.

**Ví dụ 1.** Lớp toán rời rạc có 25 sinh viên giỏi Tin học, 13 sinh viên giỏi Toán và 8 sinh viên giỏi cả Toán và Tin học. Hỏi trong lớp này có bao nhiêu sinh viên, nếu mỗi sinh viên hoặc giỏi toán hoặc giỏi tin hoặc giỏi cả hai môn?

*Giải :* Gọi A là tập các sinh viên giỏi Tin học và B là tập các sinh viên giỏi Toán học. Khi đó $A \cap B$ là tập các sinh viên giỏi cả Toán và Tin học. Vì mỗi sinh viên trong lớp hoặc giỏi toán giỏi tin hoặc giỏi cả hai môn, nên ta suy ra số sinh viên trong lớp là $|A \cup B|$. Do vậy,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$$




***Hình 1.*** Tập các sinh viên trong lớp toán rời rạc.

■

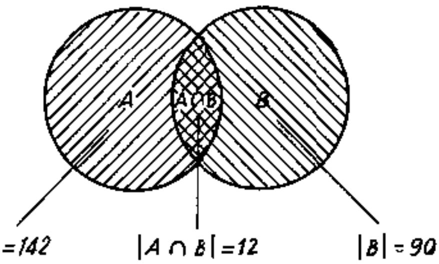
**Ví dụ 2.** Bao nhiêu số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11?

*Giải :* Gọi $A$ số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7, và $B$ lậ tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 11. Khi đó $A \cup B$ là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11 và $A \cap B$ là tập các số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho cả 7 và 11. Trong Ví dụ 2 của Tiết 2.3 chúng ta biết là trong số các số nguyên không lớn hơn 1000 có $\lfloor 1000/7 \rfloor$ số nguyên chia hết cho 7 và $\lfloor 1000/11 \rfloor$ chia hết cho 11. Vì 7 và 11 là hai số nguyên tố cùng nhau nên số nguyên chia hết cho cả 7 và 11 là số nguyên chia hết cho 7.11. Số các số này là $\lfloor 1000/(7.11) \rfloor$. Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{7.11} \right\rfloor \\ &= 142 + 90 - 12 = 220, \end{aligned}$$

tức là có 220 số nguyên không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11. (Xem Hình 2).

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 142 + 90 - 12 = 220,$$




*Hình 2.* Tập các số nguyên dương không lớn hơn 1000 chia hết cho 7 hoặc 11.

Ví dụ tiếp theo chỉ ra cách tìm số các phần tử trong phần bù của hợp hai tập hợp.

**Ví dụ 3.** Giả sử trong trường bạn có 1807 sinh viên năm thứ nhất. Trong số này có 453 sinh viên chọn môn tin học, 567 chọn môn toán học và 299 học cả hai môn toán và tin. Có bao nhiêu sinh viên không theo học toán cũng không học tin học?

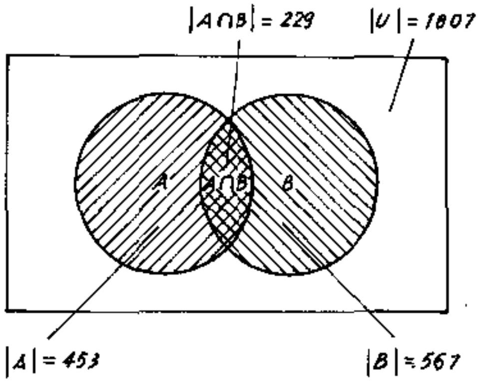
*Giải :* Số sinh viên không theo học toán cũng không học tin học sẽ bằng tổng số sinh viên trừ đi số sinh viên theo học hoặc toán hoặc tin học. Gọi $A$ là tập các sinh viên năm thứ nhất theo học tin học, còn B là tập các sinh viên học môn toán. Khi đó ta có : $|A| = 453$, $|B| = 567$, và $|A \cap B| = 299$. Số sinh viên theo học hoặc tin học, hoặc toán học là :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$
$$= 453 + 567 - 299 = 721.$$

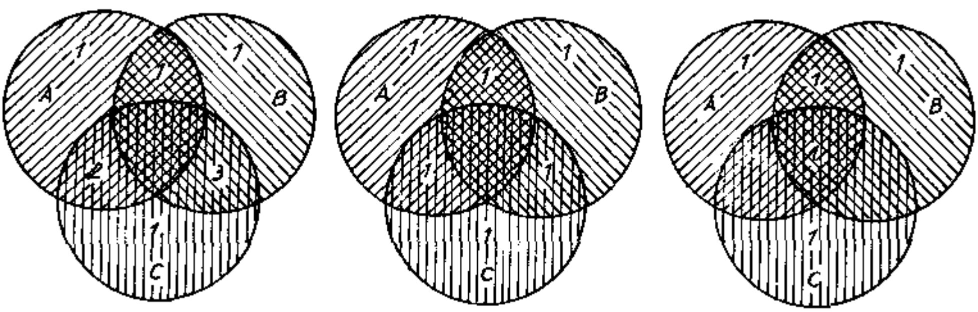
Do vậy có $1807 - 721 = 1086$ sinh viên năm thứ nhất không theo học cả toán và cả tin học. Điều này được minh họa trên hình 3.

Trong phần sau của tiết này chúng ta sẽ đưa ra cách tìm số các phần tử của hợp một số hữu hạn các tập hợp. Khi đó chúng ta sẽ nhận được **nguyên lý bù trừ.** Trước khi nghiên cứu hợp của $n$ tập hợp trong đó $n$ là một số nguyên dương tùy ý, chúng ta sẽ trình bày cách rút ra công thức tính số phần tử của hợp 3 tập hợp $A$, $B$, $C$. Trước khi xây dựng công thức này ta lưu ý rằng $|A| + |B| + |C|$ đếm một lần những phần tử chỉ thuộc một trong ba tập, đếm hai lần những phần tử thuộc đúng hai trong ba tập, và đếm 3 lần những phần tử thuộc cả ba tập. Xem minh họa trên hình 4a.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 453 + 567 - 299 = 721$$




***Hình 3.*** Tập các sinh viên năm thứ nhất không theo học tin học cũng không học toán học.




(a) Đếm các phần tử theo $|A| + |B| + |C|$

(b) Đếm các phần tử theo $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$.

(c) Đếm các phần tử theo $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

***Hình 4.*** Tìm công thức tính số phần tử của hợp ba tập hợp.

Để loại bỏ việc đếm trùng lập các phần tử thuộc nhiều hơn một tập ta cần phải trừ đi số các phần tử thuộc giao của tất cả các cặp của ba tập hợp này, tức là nhận được

$$|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|.$$

Biểu thức này đếm một lần các phần tử chỉ thuộc một trong ba tập đã cho. Các phần tử xuất hiện trong đúng hai tập cũng được đếm một lần. Các phần tử thuộc cả ba tập chưa đếm lần nào. Xem hình 4b.

Để khỏi bỏ sót ta thêm vào số các phần tử thuộc giao của ba tập. Biểu thức cuối cùng này tính mỗi phần đúng một lần dù nó thuộc một hay hai hoặc ba tập.

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Công thức này được minh họa trên hình 4c.

**Ví dụ 4.** Biết rằng có 1232 sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, 879 học tiếng Pháp và 114 sinh viên học tiếng Nga, 103 sinh viên học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Pháp, 23 học cả tiếng Tây Ban Nha và tiếng Nga, 14 học cả tiếng Pháp và tiếng Nga. Nếu tất cả 2092 sinh viên đều theo học ít nhất một ngoại ngữ, thì có bao nhiêu sinh viên học cả ba thứ tiếng?

*Giải* : Gọi $S$ là tập các sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, $F$ là tập các sinh viên học tiếng Pháp, $R$ là tập các sinh viên học tiếng Nga. Khi đó :

$$|S| = 1232 \qquad |F| = 879 \qquad |R| = 114$$

$$|S \cap F| = 103 \quad |S \cap R| = 23 \quad |F \cap R| = 14$$

và $$|S \cup F \cup R| = 2092.$$

Thay vào công thức tổng quát :

$$|S \cup F \cup R| = |S| + |F| + |R| - |S \cap F| - |S \cap R| - |F \cap R| + |S \cap F \cap R|$$

ta nhận được

$$2092 = 1232 + 879 + 114 - 103 - 23 - 14 + |S \cap F \cap R|$$

Giải ra ta được : $|S \cap F \cap R| = 7.$

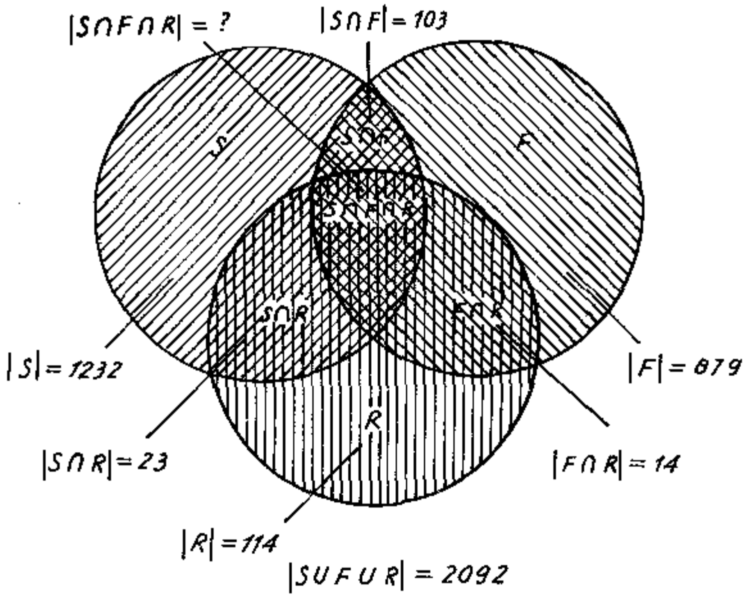
Do vậy có 7 sinh viên theo học cả ba thứ tiếng. Xem minh hoạ trên hình 5.

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh nguyên lý bù trừ.

**ĐỊNH LÝ 1.** *Nguyên lý bù trừ.* Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hữu hạn. Khi đó

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

$$+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.$$




***Hình** 5.* Tập các sinh viên học tiếng Tây Ban Nha, tiếng Pháp và tiếng Nga.

***Chứng minh:*** Chúng ta sẽ chứng minh công thức trên bằng cách chỉ ra rằng mỗi phần tử của hợp $n$ tập hợp được đếm đúng một lần. Giả sử $a$ là phần tử chung của đúng $r$ tập trong các tập $A_1, A_2, \ldots A_n$ trong đó $1 \leq r \leq n$. Phần tử này được đếm $C(r,1)$ lần trong tổng $\sum|A_i|$. Nó được đếm $C(r,2)$ lần trong $\sum|A_i \cap A_j|$. Tổng quát nó được đếm

$$C(r,1) - C(r,2) + \ldots + ((-1)^{r+1}C(r,r)$$

lần khi tính giá trị ở vế phải của công thức trên. Theo Định lý 7 của Tiết 5.3 ta có

$$C(r,0) - C(r,1) + C(r,2) - \ldots + (-1)^r C(r,r) = 0.$$

Vì thế

$$1 = C(r,0) = C(r,1) - C(r,2) + \ldots + (-1)^{r+1}C(r,r).$$

Do vậy, mỗi phần tử của hợp được đếm đúng một lần khi tính giá trị ở vế phải của công thức đã cho. Nguyên lý bù trừ được chứng minh.

■

Nguyên lý hù trừ cho ta công thức tính số phần tử của hợp $n$ tập hợp với mọi $n$ nguyên dương. Nơ gồm có $2^n - 1$ số hạng.

**Ví dụ 5.** Hãy viết ra công thức tính số phần tử của hợp 4 tập hợp.

*Giải:* Nguyên lý hù trừ chỉ ra rằng

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$$
$$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4|$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$$
$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

Chú ý rằng công thức này chứa 15 số hạng khác nhau, mỗi số hạng cho mỗi tập con không rỗng của $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

## *BÀI TẬP*

1. Tập $A_1 \cup A_2$ có hao nhiêu phần tử nếu $A_1$ có 12 phần tử, $A_2$ có 18 phần tử và

   a) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ ? b) $|A_1 \cap A_2| = 1$ ?

   c) $|A_1 \cap A_2| = 6$ ? d) $A_1 \subseteq A_2$

2. Trong một trường đại học có 345 sinh viên theo học môn toán cao cấp, 212 sinh viên học môn toán rời rạc và 188 học cả hai môn. Hỏi có hao nhiêu sinh viên hoặc học môn toán cao cấp hoặc học môn toán tời rạc?

3. Kết quả của một cuộc điều tra mức sống của các gia đình ở Mỹ cho biết 96% có ít nhất một máy thu hình, 98% có điện thoại, và 95% có điện thoại và ít nhất một máy thu hình. Tính tỷ lệ phần trăm các gia đình ở Mỹ không có điện thoại hoặc không có máy thu hình.

4. Một báo cáo về tình hình thị trường máy tính cá nhân cho biết 650 000 người sẽ mua modem cho máy của họ trong năm tới, và 1 250 000 sẽ mua ít nhất một sản phẩm phần mềm. Nếu báo cáo này nói rằng 1 450 000 người sẽ mua hoặc là modem hoặc là ít nhất một sản phẩm phần mềm, thì bao nhiêu người sẽ mua cả modem và mua ít nhất một sản phẩm phần mềm?

5. Hãy tìm số phần tử của $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ nếu mỗi tập có 100 phần tử và nếu

a) các tập hợp là từng cặp rời nhau.

b) có 50 phần tử chung của mỗi cặp tập và không có phần tử chung của cả ba tập.

c) Có 50 phần tử chung của mỗi cặp tập và 25 phần tử chung của cả ba tập.

**6.** Hãy tìm số phần tử của $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ nếu $A_1$ có 100 phần tử, $A_2$ có 1000 phần tử và $A_3$ có 10 000 phần tử và nếu

a) $A_1 \subseteq A_2$ và $A_2 \subseteq A_3$

b) các tập hợp là từng cặp rời nhau,

c) có hai phần tử chung của mỗi cặp tập và một phần tử chung của cả ba tập.

**7.** Trong tổng số 2504 sinh viên của một trường đại học tin học cơ 1876 theo học môn Ngôn ngữ Pascal, 999 học môn Ngôn ngữ Fortran, và 345 học Ngôn ngữ C. Ngoài ra ta còn biết 876 sinh viên học cả Pascal và Fortran, 232 học cả Fortran và C, 290 học cả Pascal và C. Nếu 189 sinh viên học cả 3 môn Pascal, Fortran vâ C, thì trong trường hợp đó có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong ba môn về ngôn ngữ lập trình kể trên?

**8.** Sau một cuộc phỏng vấn 270 sinh viên các trường đại học người ta thấy 64 sinh viên thích ăn cải xanh, 94 thích ăn bắp cải, 58 thích ăn xúp lơ, 26 thích cả cải xanh và bắp cải, 28 thích cải xanh và xúp lơ, 22 thích bắp cải và xúp lơ và 14 thích cả ba loại rau. Hỏi trong số 270 sinh viên này có bao nhiêu không thích cả ba loại rau kể trên?

**9.** Có bao nhiêu sinh viên trong một trường đại học ghi tên học hoặc là toán cao cấp, toán học rời rạc, cấu trúc dữ liệu hoặc là ngôn ngữ lập trình, nếu tương ứng có 507, 292, 312 và 344 ghi tên học các môn học trên, và 14 học cả toán cao cấp và cấu trúc dữ liệu, 213 học toán cao cấp và ngôn ngữ lập trình, 211 học toán rời rạc và cấu trúc dữ liệu, 43 học toán rời rạc và ngôn ngữ lập trình, và không có sinh viên nào học đồng thời hoặc là toán cao cấp và toán rời rạc hoặc là cấu trúc dữ liệu và ngôn ngữ lập trình?

**10.** Tìm số các số nguyên không vượt quá 100 không chia hết hoặc cho 5 hoặc cho 7.

**11.** Tìm số các số nguyên dương không vượt quá 100 và hoặc là số lẻ hoặc là bình phương của một số nguyên.

**12.** Tìm các số nguyên không vượt quá 100 và hoặc là bình phương hoặc là lập phương của một số nguyên.

**13.** Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài bằng 8 và không chứa 6 số không liên tiếp?

**14*.** Có bao nhiêu hoán vị của 26 chữ cái trong bảng chữ cái tiếng Anh không chứa một trong các xâu *fish*, *rat*, hoặc *bird*?

**15.** Có bao nhiêu hoán vị của 10 chữ số hoặc là bắt đầu bằng ba chữ số 987, hoặc chứa các chữ số 45 ở vị trí thứ năm và thứ sáu, hoặc là kết thúc bằng ba chữ số 123?

**16.** Có bao nhiêu phần tử trong hợp của bốn tập hợp, nếu mỗi tập có 10 phần tử, mỗi cặp tập hợp có chung 50 phần tử, mỗi bộ ba tập hợp có 25 phần tử chung và có 5 phần tử thuộc cả 4 tập hợp?

**17.** Có bao nhiêu phần tử trong hợp của bốn tập hợp, nếu các tập hợp tương ứng có 50, 60, 70 và 80 phần tử, mỗi cặp tập hợp có chung 5 phần tử, mỗi bộ ba tập hợp có 1 phần tử chung và không có phần tử nào cùng thuộc cả 4 tập hợp?

**18.** Có bao nhiêu số hạng trong công thức tính số phần tử của hợp 10 tập hợp theo nguyên lý bù trừ?

**19.** Hãy viết công thức hiển tính số phần tử của hợp 5 tập hợp theo nguyên lý bù trừ.

**20.** Có bao nhiêu phần tử trong hợp của năm tập hợp, nếu tập có 10 000 phần tử, mỗi cặp tập hợp có chung 1000 phần tử, mỗi bộ ba tập hợp có 100 phần tử chung, mỗi bộ bốn tập hợp có 10 phần tử chung và có 1 phần tử thuộc cả 5 tập hợp?

**21.** Hãy viết công thức hiển tính số phần tử của hợp 6 tập hợp theo nguyên lý bù trừ nếu biết rằng không có bộ ba tập nào trong các tập này có phần tử chung.

**22*.** Chứng minh nguyên lý bù trừ bằng quy nạp toán học.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

**1.** a) Hệ thức truy hồi là gì?

b) Tìm hệ thức truy hồi cho tổng số tiền có trong tài khoản sau $n$ năm nếu gửi 1000000 đô la vào tài khoản với lãi suất 9% một năm.

**2.** Hãy giải thích cách sử dụng các số Fibonacci để giải bài toán các con thỏ trên đảo.

**3.** a) Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số bước cần thực hiện trong trò chơi Tháp Hà Nội.

b) Chỉ ra rằng hệ thức truy hồi này có thể giải bằng cách lặp.

**4.** a) Hãy giải thích cách tìm hệ thức truy hồi cho số xâu nhị phân độ dài $n$ không chứa hai số 1 liên tiếp.

b) Hãy tìm bài toán đếm khác có lời giải thỏa mãn hệ thức truy hồi này.

**5.** Phát biểu định nghĩa hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc $k$.

**6.** a) Hãy giải thích cách giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc 2.

b) Hãy giải hệ thức truy hồi $a_n = 13a_{n-1} - 22a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$ nếu $a_0 = 3$ và $a_1 = 15$.

c) Hãy giải hệ thức truy hồi $a_n = 14a_{n-1} - 49a_{n-2}$ với $n \geqslant 2$ nếu $a_0 = 3$ và $a_1 = 35$.

**7.** a) Hãy giải thích cách tìm $f(b^k)$ trong đó $k$ là một số dương nếu $f(n)$ thỏa mãn hệ thức truy hồi chia để trị $f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + g(n)$ với mọi $n$ nguyên dương chia hết cho $b$.

b) Tính $f(256)$ nếu $f(n) = 3f\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{5n}{4}$ và $f(1) = 7$.

**8.** a) Hãy đưa ra hệ thức truy hồi chia để trị cho sô các phép so sánh khi tìm một số trong danh sách theo thuật toán tìm kiếm nhị phân

b) Hãy cho một đánh giá big – $O$ cho số các phép so sánh dùng trong tìm kiếm nhị phân. theo hệ thức truy hồi chia để trị mà bạn đưa ra trong phần a) nếu dùng Định lý 1 trong Tiết 5.3.

**9.** a) Hãy đưa ra công thức tính số phần tử của hợp ba tập hợp.

b) Giải thích tại sao công thức này là đúng.

c) Hãy giải thích cách dùng công thức vừa đưa ra trong a) để tìm số các số nguyên không vượt quá 1000 chia hết cho 6, 10, hoặc 15.

d) Hãy giải thích cách dùng công thức trong phần a) để tìm số nghiệm không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 22$ với $x_1 < 8$, $x_2 < 6$ và $x_3 < 5$.

**10.** a) Hãy đưa ra công thức tính số phần tử của hợp 4 tập hợp và giải thích tại sao nó đúng.

b) Giả sử các tập $A_1$, $A_2$, $A_3$ và $A_4$ mỗi tập có 25 phần tử, giao của bất kỳ một cặp tập hợp nào đều có 5 phần tử, giao của bất kỳ một bộ ba tập hợp nào đều có 2 phần tử, và có 1 phần tử chung của cả bốn tập. Tính số phần tử của hợp 4 tập hợp này.

**11.** a) Phát biểu nguyên lý bù trừ.

b) Hãy nêu những ý chính của chứng minh Định lý này.

## *BÀI TẬP BỔ SUNG*

**1.** Một nhóm 10 người bắt đầu trò chơi "viết thư dây chuyền" như sau. Đầu tiên mỗi người gửi thư cho 4 người nữa. Mỗi người nhận thư lại gửi thư cho 4 người khác nữa.

a) Tìm hệ thức truy hồi biểu thị số thư gửi đi ở bước thứ $n$ của "dây chuyền thư" này, nếu không có ai nhận được hơn một thư.

b) Tìm điều kiện đầu cho hệ thức truy hồi trong phần a).

c) Bao nhiêu bức thư đã được gửi đi ở bước thứ $n$?

**2.** Một lò phản ứng hạt nhân tạo được 18 gam một đồng vị phóng xạ. Mỗi giờ 1% của đồng vị phóng xạ này bị phân rã.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi cho số đồng vị phóng xạ này còn lại sau $n$ giờ.

b) Tìm điều kiện đầu cho hệ thức trên.

c) Giải hệ thức truy hồi này.

**3.** Mỗi giờ chính phủ Mỹ in thêm 10 000 tờ 1 đô-la, 4000 tờ 5 đô-la, 3000 tờ 10 đô-la, 2500 tờ 20 đô-la, 1000 tờ 50 đô-la và 1000 tờ 100 đô-la như đã làm trong giờ trước đó. Giờ đầu tiên người ta đã in 1000 tờ tiền mỗi loại.

a) Lập công thức truy hồi tính tổng số tiền được in trong giờ thứ $n$.

h) Tìm điều kiện đầu của hệ thức này.

c) Giải hệ thức truy hồi nhận được trong phần a).

d) Tìm hệ thức truy hồi cho tổng số tiền được in trong $n$ giờ đầu tiên.

e) Giải hệ thức truy hồi nhận được trong phần d).

**4.** Già sử rằng trong một quần thể vi trùng sau một giờ sẽ sinh ra 2 vi trùng mới, và mỗi vi trùng chỉ sống được 2 giờ. Thoạt đầu quần thể có 100 vi trùng.

a) Hãy lập hệ thức truy hồi biểu diễn số vi trùng còn tồn tại sau $n$ giờ.

b) Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi này.

c) Khi nào quần thể này có hơn một triệu vi trùng?

**5.** Các thông báo được gửi đi qua các kênh truyền thông bằng hai tín hiệu khác nhau. Để truyền một tín hiệu cần 2 $\mu s$, còn truyền tín hiệu kia cần $3 \mu s$.

a) Tìm hệ thức truy hồi cho số tín hiệu có thể gửi được trong $n$ $\mu s$.

h) Hãy cho điều kiện đầu của hệ thức truy hồi trong phần a).

c) Có bao nhiêu thông báo khác nhau có thể gửi được trong 12 $\mu s$?

**6.** Một trạm bưu điện chỉ có các loại tem 4 xu, 6 xu và tem 10 xu. Hãy tìm hệ thức truy hồi cho số cách tạo một bưu phí $n$ xu bằng 3 loại tem nêu trên, nếu thứ tự các tem là quan trọng. Tìm điều kiện đầu cho hệ thức này.

**7.** Có bao nhiêu cách tạo các bưu phí sau khi dùng các qui tắc cho trong Bài tập 6

a) 12 xu b) 14 xu

b) 18 xu d) 22 xu

**8.** Tìm nghiệm của hệ :

$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$

$b_n = a_{n-1} - b_{n-1}$

với $a_0 = 1$ và $b_0 = 2$.

**9.** Giải hệ thức truy hồi $a_n = \dfrac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$, nếu $a_0 = 1$, và $a_1 = 2$ *(Gợi ý :* Lấy lôgarit hai vế để nhận được hệ thức truy hồi cho dãy $\log a_n$, $n = 0, 1, 2,...$).

**10*.** Giải hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1}^3 a_{2n-2}^2$ nếu $a_0 = 2$ và $a_1 = 2$. (Xem gợi ý Bài tập 9).

**11.** Giả sử phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất với hệ số hằng số có ít nhất một nghiệm bội. Hãy tìm công thức tổng quát biểu diễn nghiệm của hệ thức truy hồi qua nghiệm của phương trình đặc trưng.

**12.** Dùng Bài tập 11 tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$ nếu $a_0 = 2$, $a_1 = 2$ và $a_2 = 4$.

**13*.** Giả sử trong Ví dụ 4 của Tiết 5.1 mỗi cặp thỏ sau khi đẻ hai lần sẽ rời khỏi đảo. Hãy tìm hệ thức truy hồi tính số thỏ trên đảo vào giữa tháng thứ $n$.

**14.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi $f(n) = 3f\left(\dfrac{n}{5}\right) + 2n^4$ khi $n$ chia hết cho 5 với $n = 5^k$, $k$ là một số nguyên dương và $f(1) = 1$.

**15.** Hãy đánh giá cỡ lớn của $f$ trong Bài tập 14 nếu $f$ là hàm tăng.

**16.** Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi biểu diễn số phép so sánh dùng trong thuật toán đệ quy như sau. Để tìm số lớn nhất và lớn thứ nhì của dãy $n$ số, ở mỗi bước người ta chia dãy thành hai dãy con có số phần tử bằng nhau hoặc hơn nhau một phần tử. Thuật toán dừng khi đi tới các dãy con có hai phần tử.

**17.** Hãy tính số phép so sánh dùng trong thuật toán ở Bài tập 16.

*Giả sử* $\{a_n\}$ *là một dãy số thực.* **Sai phân tiến** *của dãy này được định đệ quy như sau.* **Sai phân thứ nhất** *là* $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$. **Sai phân tiến thứ (k + 1)** $\Delta^{k+1} a_n$ *nhận được từ* $\Delta^k a_n$ *bằng đẳng thức sau :* $\Delta^{k+1} a_n = \Delta^k a_{n+1} - \Delta^k a_n$

**18.** Tìm $\Delta a_n$ trong đó

a) $a_n = 3$. b) $a_n = 4n + 7$ c) $a_n = n^2 + n + 1$.

**19.** Cho $a_n = 3n^3 + n + 2$. Hãy tìm $\Delta^k a_n$ trong đó $k$ bằng

a) 2. b) 3. c) 4.

**20*.** Giả sử $a_n = P(n)$ trong đó $P$ là đa thức bậc $d$. Chứng minh $\Delta^{d+1}a_n = 0$ với mọi số nguyên không âm $n$.

**21.** Cho $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$ là hai dãy số thực. Chứng tỏ rằng

$$\Delta(a_n b_n) = a_{n+1}(\Delta b_n) + b_n(\Delta a_n).$$

**22.** Giả sử có 14 sinh viên nhận được điểm A trong kỳ thi thứ nhất của môn toán rời rạc, 18 nhận được điểm A trong kỳ thi thứ hai. Nếu có 22 sinh viên nhận được điểm A hoặc trong kỳ thi đầu hoặc trong kỳ thi thứ hai, thì sẽ có bao nhiêu sinh viên nhận được điểm A trong cả hai lần thi?

**23.** Có 323 trang trại trong vùng Monmouth, mỗi trại có ít nhất một con ngựa, một con bò và một con cừu. Nếu 224 trại có ngựa, 85 có bò, 57 có cừu và 18 trại có cả ba loại súc vật, thì sẽ có bao nhiêu trại có đúng hai loại súc vật? 7.

**24.** Những câu hỏi cho cơ sở dữ liệu về số sinh viên trong một trường đại học đã nhận được các dữ liệu như sau : toàn trường có 2175 sinh viên, trong số đó 1675 không là sinh viên năm thứ nhất, 1074 học môn toán cao cấp, 444 học môn toán rời rạc, 607 không là sinh viên năm thứ nhất và có học toán cao cấp, 350 có học toán cao cấp và toán rời rạc, 201 không là sinh viên năm thứ nhất và có học toán rời rạc, và 143 không là sinh viên năm thứ nhất và có học cả hai môn toán cao cấp và toán rời rạc. Có phải tất cả các câu trả lời cho các câu hỏi là chính xác không?

**25.** Các sinh viên khoa toán trong một trường đại học theo học ít nhất một trong bốn chuyên ngành sau đây : toán ứng dụng (AM), toán thuần tuý (PM), vận trù học (OR) và tin học (CS). Hãy tính số sinh viên toàn khoa nếu có 23 sinh viên theo học ngành AM (kể cả người theo học nhiều ngành), 17 sinh viên theo học ngành PM, 44 theo học ngành OR, 63 theo học ngành CS, 5 theo học ngành AM và PM, 8 theo học ngành AM và CS, 4 theo học ngành AM và OR, 6 theo học ngành PM và CS, 5 theo học ngành PM và OR, 14 theo học ngành OR và CS, 2 theo học ngành PM, OR và CS, 2 theo học ngành AM, OR và CS, 1 theo học ngành PM, AM và OR, 1 theo học ngành PM, AM và CS và 1 theo học cả 4 chuyên ngành.

**26.** Cần bao nhiêu số hạng khi dùng nguyên lý bù trừ để biểu diễn số phần tử của hợp bảy tập hợp nếu không có quá năm trong các tập này có phần tử chung?

**27.** Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 20$ với $2 < x_1 < 6$, $6 < x_2 < 10$, và $0 < x_3 < 5$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

**28.** Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 1 000 000

a) chia hết cho 2, 3 hoặc 5?

b) không chia hết cho 7, 11 hoặc 13?

c) chia hết cho 3 nhưng không chia hết cho 7 ?

**29.** Có bao nhiêu số nguyên dương nhỏ hơn 200 là

a) lũy thừa bậc hai hoặc cao hơn của số nguyên?

b) lũy thừa bậc hai hoặc cao hơn của số nguyên hoặc của số nguyên tố?

c) không chia hết cho bình phương của một số nguyên lớn hơn một?

d) không chia hết cho lập phương của một số nguyên lớn hơn 1?

e) không chia hết cho ít nhất ba số nguyên tố?

## BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH

***Viết các chương trình với các input và output sau đây***

**1.** Cho số nguyên dương $n$, hãy liệt kê tất cả các dịch chuyển trong trò chơi Tháp Hà nội để chuyển $n$ đĩa từ một cột sang một cột khác theo quy tắc của trò chơi.

**2.** Cho số nguyên dương $n$, hãy liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài $n$ không chứa hai số 0 liên tiếp.

**3.** Cho công thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$ trong đó $c_1$, $c_2$ là các số thực, các điều kiện đầu $a_0 = C_0$ và $a_1 = C_1$ và một số dương $k$, hãy tìm $a_k$ bằng cách lặp.

**4.** Cho công thức truy hồi $a_n = c_1a_{n-1} + c_2\, a_{n-2}$ và các điều kiện đầu $a_0 = C_0$ và $a_1 = C_1$ hãy tìm nghiệm duy nhất này.

5. Cho công thức truy hồi dạng $f(n) = af\left(\frac{n}{b}\right) + c$ trong đó $a$, $c$ là các số thực, $b$ là số nguyên dương, và $k$ là số nguyên dương, hãy tìm $f(b^k)$ bằng cách lặp.

6. Cho biết số phần tử của giao ba tập hợp, số phần tử chung của mỗi cặp trong ba tập này, và số phần tử của mỗi tập, hãy tính số phần tử của hợp ba tập đã cho.

7. Cho số nguyên dương $n$ hãy viết công thức tính số phần tử của hợp $n$ tập.

## TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

***Dùng các chương trình mà bạn đã viết để làm các bài tập sau***

1. Tìm giá trị chính xác của $f_{100}$, $f_{500}$ và $f_{1000}$ trong đó $f_n$ là các số Fibonacci.

2. Tìm số nhỏ nhất trong các số Fibonacci lớn hơn 1 000 000, lớn hơn 1 000 000 000 và lớn hơn 1 000 000 000 000.

3. Tìm càng nhiều càng tốt các số Fibonacci là số nguyên tố. Đến nay chúng ta cũng không biết các số này có nhiều vô hạn không.

4. Hãy liệt kê tất cả các dịch chuyển cần thiết để giải trò chơi Tháp Hà nội có 10 đĩa .

5. Tính số phép toán cần để nhân hai số nguyên $n$ bit với $n$ nhận các giá trị 16, 64, 256 và 1024 khi dùng thuật toán nhân nhanh được mô tả trong Tiết 5.3 và thuật toán chuẩn để nhân các số nguyên. (Thuật toán 4 trong Tiết 2.4).

6. Tính số phép toán cần để nhân hai ma trận $n \times n$ với $n$ nhận các giá trị 4, 16, 64, và 128 khi dùng thuật toán nhân nhanh được mô tả trong Tiết 5.3 và thuật toán chuẩn để nhân các ma trận (Thuật toán 1 trong Tiết 2.6).

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời các câu hỏi sau***

1. Tìm tài liệu gốc trong đó Fibonacci trình bày câu đố của mình về việc mô hình quần thể thỏ. Hãy bàn về bài toán này và các bài toán khác do Fibonacci đưa ra và hãy cho một số thông tin về chính Fihonacci.

2. Hãy giải thích các số Fibonacci đã xuất hiện như thế nào trong các ứng dụng khác nhau như trong nghiên cứu kiểu sắp xếp lá trên cây, trong nghiên cứu sự phản xạ của các gương, v.v...

**3.** Hãy xem lại định nghĩa số may mắn. Giải thích cách tìm chúng bằng kỹ thuật sàng tương tự như sàng Eratosthenes. Tìm tất cả các số may mắn nhỏ hơn 1 000.

**4.** Hãy cho biết phương pháp sàng đã được dùng như thế nào trong lý thuyết số. Những kết quả loại nào đạt được bằng phương pháp này?

**5.** Hãy tìm các quy tắc của trò chơi bài Pháp cũ mang tên "gặp nhau". Hãy mô tả các quy tắc này và công trình của Pierre Raymond de Montmort trong tác phẩm "Bài toán gặp nhau".

**6.** Hãy giải thích có thể dùng hàm sinh để giải một số loại hệ thức truy hồi kể cả các hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất.

**7.** Hãy mô tả cách dùng hàm sinh để giải các bài toán đếm khác nhau.

**8.** Hãy trình bày lý thuyết đếm Polya và các loại bài toán đếm có thể giải bằng lý thuyết này.

**9.** Bài toán nội trợ yêu cầu tính số cách xếp $n$ cặp vợ chồng xung quanh một bàn tròn sao cho nam nữ ngồi xen kẽ nhau và không có cặp vợ chồng nào ngồi cạnh nhau. Hãy giải thích cách Lucas dùng để giải bài toán này.

**10.** Hãy giải thích có thể dùng *đa thức tháp* để giải bài toán đếm.

*CHƯƠNG 6*

# QUAN HỆ

Các mối quan hệ giữa những phần tử của các tập hợp xuất hiện trong nhiều bối cảnh. Thường ngày chúng ta vẫn gặp các mối quan hệ này, chẳng hạn mối quan hệ giữa một doanh nghiệp với số điện thoại của nó, mối quan hệ của một nhân viên với lương của người đó, mối quan hệ của một người với người thân của anh ta v.v... Trong toán học chúng ta nghiên cứu các mối quan hệ như mối quan hệ giữa một số nguyên dương và một ước số của nó, mối quan hệ giữa một số nguyên và một số nguyên khác đồng dư với nó theo môđun 5, mối quan hệ giữa một số thực và một số thực khác lớn hơn nó v.v... Các mối quan hệ như quan hệ giữa một chương trình và một biến mà chương trình đó sử dụng và mối quan hệ giữa một ngôn ngữ máy tính và một mệnh đề đúng trong ngôn ngữ đó cũng thường xuất hiện trong tin học.

Các mối quan hệ giữa những phần tử của các tập hợp được biểu diễn bằng cách dùng một cấu trúc được gọi là quan hệ. Các quan hệ có thể được dùng để giải các bài toán như xác định các cặp thành phố nào được nối bằng các chuyến bay trong một mạng, tìm trật tự khả dĩ thành công cho các pha khác nhau của một dự án phức tạp, hoặc tạo một cách tiện ích để lưu trữ thông tin trong các cơ sở dữ liệu của máy tính.

## 6.1. QUAN HỆ VÀ CÁC TÍNH CHẤT CỦA NÓ

### MỞ ĐẦU

Cách trực tiếp nhất để biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử của hai tập hợp là dùng các cặp được sắp tạo bởi hai phần tử có quan hệ. Vì lý do đó, tập các cặp được sắp được gọi là quan hệ hai ngôi. Trong tiết này chúng ta sẽ đưa vào những thuật ngữ cơ bản được dùng để mô tả các quan hệ hai ngôi. Sau đó, cũng trong chương này, chúng ta sẽ dùng các quan hệ để giải các bài toán có liên quan với các mạng thông tin, với việc lập tiến độ các dự án và nhận dạng các phần tử của các tập hợp có những tính chất chung.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Cho $A$ và $B$ là các tập hợp. *Một quan hệ hai ngôi từ $A$ đến $B$* là một tập con của $A \times B$.

Nói một cách khác, quan hệ hai ngôi từ $A$ đến $B$ là tập $R$ các cặp được sắp trong đó phần tử đầu tiên thuộc tập $A$ và phần tử thứ hai thuộc tập $B$. Chúng ta sẽ dùng ký hiệu $aRb$ để chỉ $(a,b) \in R$ và $a\not{R}b$ để chỉ $(a,b) \notin R$. Hơn nữa, khi $(a, b)$ thuộc $R$, $a$ được nói là **có quan hệ** $R$ với $b$.

Các quan hệ hai ngôi biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử của hai tập hợp. Chúng ta cũng sẽ đưa vào các quan hệ $n$ – ngôi biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử của hơn hai tập hợp ở phần sau của chương này. Dưới đây chúng ta sẽ bỏ qua các từ *hai ngôi* nếu thấy không có nguy cơ hiểu lầm.

Dưới đây là một số ví dụ về quan hệ.

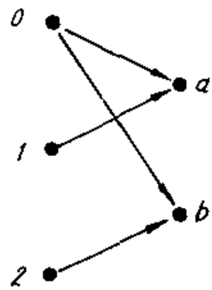
**Ví dụ 1.** Cho $A$ là tập các sinh viên của trường bạn và $B$ là tập các môn học. Cho $R$ là quan hệ bao gồm các cặp $(a,b)$ trong đó $a$ là sinh viên ghi tên học môn $b$. Ví dụ, nếu Jason Goodfriend và Deborah Sherman đều ghi tên học môn Toán học rời rạc có mã số là CS518, thì các cặp (Jason Goodfriend, CS518) và (Deborah Sherman, CS518), thuộc $R$. Nếu Jason Goodfriend còn ghi tên học môn CS510 là môn cấu trúc dữ liệu, thì cặp (JasonGood friend, CS510) cũng thuộc $R$. Tuy nhiên, nếu Deborah Sherman không ghi tên học môn CS510, thì cặp (Deborah Sherman, CS510) không thuộc $R$.

■

**Ví dụ 2.** Cho $A$ là tập tất cả các thành phố và $B$ là tập 50 bang của Hoa Kỳ. Ta định nghĩa quan hệ $R$ bằng cách chỉ rõ rằng $(a,b)$ thuộc $R$ nếu thành phố $a$ thuộc bang $b$. Ví dụ, (Boulder, Colorado), (Bangor, Maine), (Ann Arbor, Michigan), (Cupertino, California), và (Red Bank, New Jersey) đều thuộc $R$.

■

**Ví dụ 3.** Cho $A = \{0, 1, 2\}$ và $B = \{a, b\}$. Khi đó $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ là một quan hệ từ $A$ đến $B$. Điều này có nghĩa là, chẳng hạn, $0Ra$ nhưng $1 \not R b$. Các quan hệ cũng có thể được biểu diễn bằng đồ thị như cho trong hình 1, ở đây ta dùng mũi tên để biểu diễn các cặp được sắp. Một cách khác để hiểu diễn quan hệ này là dùng bảng, cũng được cho trên Hình 1. Chúng ta sẽ thảo luận kỹ hơn về việc biểu diễn các quan hệ ở Tiết 6.3.




| R | a | b |
|---|---|---|
| 0 | x | x |
| 1 | x | |
| 2 | | x |

*Hình 1.* Biểu diễn các cặp được sắp trong quan hệ $R$ ở Ví dụ 3.

## HÀM NHƯ MỘT QUAN HỆ

Hãy nhớ lại rằng một hàm $f$ từ tập $A$ đến tập $B$ (như định nghĩa ở Tiết 1.6) gán cho mỗi phần tử của tập $A$ một phần tử duy nhất của tập $B$. Đồ thị của $f$ là tập các cặp được sắp $(a,b)$ sao cho $b = f(a)$. Vì đồ thị của $f$ là một tập con của $A \times B$, nên nó là một quan hệ từ $A$ đến $B$. Hơn nữa, đồ thị của một hàm có tính chất là mọi phần tử của $A$ là phần tử đầu tiên của đúng một cặp được sắp của đồ thị đó.

Ngược lại, nếu $R$ là một quan hệ từ $A$ đến $B$ sao cho mỗi phần tử của $A$ là phần tử đầu tiên của đúng một cặp được sắp của $R$, thì có thể định nghĩa được một hàm với $R$ là đồ thị của nó. Điều này được làm bằng cách gán cho mỗi phần tử $a \in A$ một phần tử duy nhất $b \in B$ sao cho $(a,b) \in R$.

Một quan hệ cũng có thể được dùng để biểu diễn các mối quan hệ một – nhiều giữa các phần tử của hai tập $A$ và $B$, trong đó một phần tử của $A$ có thể có quan hệ với hơn một phần tử của $B$. Trong khi đó, một hàm biểu diễn một quan hệ trong đó mỗi một phần tử của $A$ có quan hệ với đúng một phần tử của $B$.

## CÁC QUAN HỆ TRÊN MỘT TẬP HỢP

Các quan hệ từ tập $A$ đến chính nó được đặc biệt quan tâm.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** *Một quan hệ trên* tập $A$ là một quan hệ từ $A$ đến $A$.

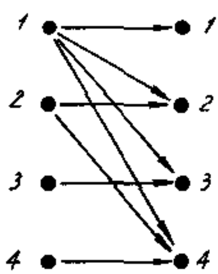
Nói một cách khác, một quan hệ trên tập $A$ là một tập con của $A \times A$.

**Ví dụ 4.** Cho $A$ là tập $\{1, 2, 3, 4\}$. Hỏi các cặp được sắp nào thuộc quan hệ $R = \{(a,b) \mid b \text{ chia hết cho } a\}$.

*Giải:* Vì $(a,b)$ thuộc $R$ nếu và chỉ nếu $a$ và $b$ là các số nguyên dương không vượt quá 4 sao cho $b$ chia hết cho $a$, ta có :

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$$

Các cặp trong quan hệ này được biểu diễn dưới dạng đồ thị và bảng trong hình 2.




| R | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | x | x | x | x |
| 2 | | x | | x |
| 3 | | | x | |
| 4 | | | | x |

***Hình** 2.* Biểu diễn các cặp được sắp trong quan hệ $R$ ở Ví dụ 4.

**Ví dụ 5.** Xét các quan hệ sau trên tập các số nguyên :

$$R_1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$$

$$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$$

$$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ hoặc } a = -b\}$$

$$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$$

$$R_5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$$

$$R_6 = \{(a,b) \mid a + b \leqslant 3\}.$$

Hỏi mỗi cặp sau được chứa trong các quan hệ nào ở trên : (1, 1), (1,2), (2,1), (1, −1) và (2,2) ?

*Chú ý:* Không giống như các quan hệ trong các Ví dụ 1–4, các quan hệ ở đây là trên một tập vô hạn.

*Giải:* Cặp (1,1) thuộc $R_1$, $R_3$, $R_4$ và $R_6$ ; (1,2) thuộc $R_1$ và $R_6$ ; (2,1) thuộc $R_2$, $R_5$ và $R_6$ ; (1, − 1) thuộc $R_2$, $R_3$ và $R_6$, và cuối cùng (2,2) thuộc $R_1$, $R_3$ và $R_4$.

■

Không có khó khăn gì trong việc xác định số các quan hệ trên một tập hữu hạn, vì một quan hệ trên tập $A$ đơn giản chỉ là một tập con của $A \times A$.

**Ví dụ 6.** Có bao nhiêu quan hệ trên một tập có $n$ phần tử ?

*Giải:* Một quan hệ trên tập $A$ là một tập con của $A \times A$. Vì $A \times A$ có $n^2$ phần tử khi $A$ có $n$ phần tử, và một tập gồm $m$ phần tử có $2^m$ tập con, nên $A \times A$ có $2^{n^2}$ tập con. Vì vậy có $2^{n^2}$ quan hệ trên tập gồm $n$ phần tử.

■

## CÁC TÍNH CHẤT CỦA QUAN HỆ

Có một số tính chất được dùng để phân loại các quan hệ trên một tập. Chúng ta sẽ xét những tính chất quan trọng nhất ở đây.

Trong một số quan hệ một phần tử luôn có quan hệ với chính nó. Ví dụ, $R$ là quan hệ trên tập mọi người trên thế giới gồm các cặp $(x, y)$ trong đó $x$ và $y$ có cùng mẹ và cùng cha. Khi đó $xRx$ đối với mỗi người $x$.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Quan hệ $R$ trên tập $A$ được gọi là *có tính phản xạ* nếu $(a, a) \in R$ với mọi phần tử $a \in A$.

Chúng ta thấy rằng một quan hệ trên $A$ là phản xạ nếu mỗi phần tử thuộc $A$ có quan hệ với chính nó. Các ví dụ sau đây minh hoạ khái niệm quan hệ có tính phản xạ.

**Ví dụ 7.** Xét các quan hệ sau trên tập {1,2,3,4}

$R_1$ = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)}
$R_2$ = {(1,1), (1,2), (2,1)}
$R_3$ = {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)}
$R_4$ = ({2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}
$R_5$ = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4}, (3,3), (3,4), (4,4)}
$R_6$ = {(3,4)}

Các quan hệ nào ở trên có tính phản xạ ?

*Giải:* Các quan hệ $R_3$ và $R_5$ có tính chất phản xạ, vì cả hai quan hệ đó đều chứa tất cả các cặp dạng $(a,a)$, cụ thể là (1,1), (2,2), (3,3) và (4,4). Các quan hệ khác không phải là phản xạ vì chúng không chứa tất cả các cặp đó. Đặc biệt, $R_1$, $R_2$, $R_4$ và $R_6$ không là phản xạ vì các quan hệ đó đều không chứa cặp (3,3).

■

**Ví dụ 8**. Các quan hệ nào trong Ví dụ 5 là phản xạ ?

*Giải* : Các quan hệ có tính phản xạ trong ví dụ đó là $R_1$ (vì $a \leq a$ với mọi số nguyên $a$}, $R_3$ và $R_4$. Đối với các quan hệ còn lại trong ví dụ đó, dễ dàng tìm được cặp $(a,a)$ không được chứa trong các quan hệ đó (xin dành lại cho các bạn như một bài tập).

■

**Ví dụ 9.** Quan hệ "chia hết" trên tập các số nguyên dương có tính phản xạ không ?

*Giải.* Vì $a \mid a$ với mọi $a$ là số nguyên dương, nên quan hệ "chia hết" có tính phản xạ.

■

Trong một số quan hệ một phần tử có quan hệ với phần tử thứ hai nếu và chỉ nếu phần tử thứ hai cũng có quan hệ với phần tử thứ nhất. Quan hệ bao gồm các cặp $(x, y)$ trong đó $x$ và $y$ là các sinh viên ở trường bạn, ít nhất cùng học chung một môn là một quan hệ có tính chất đó. Các quan hệ khác có tính chất là nếu một phần tử có quan hệ với một phần tử thứ hai, thì phần tử thứ hai không có quan hệ với phần tử thứ nhất. Quan hệ gồm các cặp $(x, y)$ trong đó $x$ và $y$ là sinh viên của trường bạn và $x$ có điểm hình quân cao hơn $y$ là quan hệ có tính chất đó.

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Quan hệ $R$ trên tập $A$ được gọi là *đối xứng* nếu $(b,a) \in R$ khi $(a,b) \in R$ với $a,b \in A$ . Quan hệ $R$ trên tập $A$ sao cho $(a,b) \in R$ và $(b,a) \in R$ chỉ nếu $a = b$, với $a,b \in A$ được gọi là *phản đối xứng*.

Tức là, một quan hệ là đối xứng nếu và chỉ nếu $a$ có quan hệ với $b$ kéo theo $b$ có quan hệ với $a$. Còn một quan hệ là phản đối xứng, nếu và chỉ nếu không có các cặp phần tử $a$ và $b$ phân biệt với $a$ có quan hệ với $b$ và $b$ có quan hệ với $a$. Hai thuật ngữ đối xứng và phản đối xứng được dùng ở đây không phải theo nghĩa đối ngược nhau, vì một quan hệ có thể có cả hai tính chất đó, hoặc đều không có cả hai tính chất đó (xem Bài tập 6 ở cuối tiết này). Một quan hệ không thể vừa là đối xứng vừa là phản đối xứng nếu nó chứa một cặp nào đó có dạng $(a,b)$ trong đó $a \neq b$.

**Ví dụ 10.** Các quan hệ nào trong Ví dụ 7 là đối xứng? là phản đối xứng?

*Giải.* Các quan hệ $R_2$ và $R_3$ là đối xứng, vì trong mỗi trường hợp $(b, a)$ đều thuộc các quan hệ đó nếu $(a,b)$ thuộc chúng. Đối với $R_2$, điều duy nhất cần phải kiểm tra là cả (2,1) và (1,2) đều thuộc quan hệ đó. Đến $R_3$ điều cần phải kiểm tra là cả (2,1) và (1,2) thuộc quan hệ đó và (1,4) và (4,1) cũng thuộc quan hệ đó. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn một quan hệ nào khác trong Ví dụ 7 là đối xứng. Điều này được làm bằng cách tìm một cặp $(a, b)$ sao cho $(a,b)$ thuộc quan hệ nhưng $(b,a)$ thì không.

$R_4$, $R_5$ và $R_6$ tất cả đều là phản đối xứng. Đối với các quan hệ này không có một cặp $(a,b)$ nào với $a \neq b$ sao cho cả $(a,b)$ và $(b,a)$ đều thuộc các quan hệ đó. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn quan hệ nào khác là phản đối xứng. Điều này được làm bằng cách tìm một cặp $(a,b)$ với $a \neq b$ sao cho cả $(a,b)$ và $(b,a)$ đều thuộc quan hệ đó.

■

**Ví dụ 11.** Các quan hệ nào trong Ví dụ 5 là đối xứng? là phản đối xứng?

*Giải:* Các quan hệ $R_3$, $R_4$, $R_6$ là đối xứng. $R_3$ là đối xứng vì nếu $a = b$ hoặc $a = -b$ thì $b = a$ hoặc $b = -a$. $R_4$ là đối xứng vì $a = b$ kéo theo b = a. $R_6$ đối xứng vì $a + b \leqslant 3$ kéo theo $b + a \leqslant 3$. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn quan hệ mà khác là đối xứng.

Các quan hệ $R_1$, $R_2$, $R_4$ và $R_5$ là phản đối xứng. $R_1$ là phản đối xứng vì bất đẳng thức $a \leqslant b$ và $b \geqslant a$ kéo theo $a = b$. $R_2$ là phản đối xứng vì không thể có đồng thời $a > b$ và $b > a$. $R_4$ là phản đối xứng vì hai phần tử có quan hệ đối với $R_4$ nếu và chỉ nếu chúng bằng nhau. $R_5$ là phản đối xứng vì không thể đồng thời có $a = b+1$ và $b = a+1$. Độc giả nên kiểm tra lại rằng không còn quan hệ nào khác là phản đối xứng.

■

**Ví dụ 12**. Quan hệ "chia hết" trên tập các số nguyên dương có là đối xứng không ? Có là phản đối xứng không ?

*Giải:* Quan hệ này không phải là đối xứng, vì $1 \mid 2$ nhưng $2 \nmid 1$. Nó là phản đối xứng, vì nếu $a$ và $b$ là các số nguyên dương với $a \mid b$ và $b \mid a$ thì $a = b$ (chứng minh điều này dành cho bạn như một bài tập).

■

Giả sử $R$ là một quan hệ bao gồm tất cả các cặp sinh viên của trường bạn $(x, y)$ trong đó $x$ đã lấy được nhiều chứng chỉ hơn $y$. Giả sử rằng $x$ có quan hệ đó với $y$ và $y$ có quan hệ đó với $z$. Điều này có nghĩa là $x$ đã lấy được nhiều chứng chỉ hơn $y$ và $y$ đã lấy được nhiều chứng chỉ hơn $z$. Chúng ta có thể kết luận rằng $x$ lấy được nhiều chứng chỉ hơn $z$. Điều vừa nói ở trên chứng tỏ $R$ có tính chất bắc cầu, tính chất này được định nghĩa như sau :

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Một quan hệ $R$ trên tập $A$ được gọi là có *tính chất bắc cầu* nếu $(a,b) \in R$ và $(b, c) \in R$ thì $(a,c) \in R$ với $a, b, c \in A$.

**Ví dụ 13**. Các quan hệ nào trong Ví dụ 7 có tính chất bắc cầu ?

*Giải:* $R_4$, $R_5$ và $R_6$ là các quan hệ có tính chất bắc cầu. Đối với mỗi quan hệ đó, ta có thể chứng minh nó có tính chất bắc cầu bằng cách chứng tỏ rằng nếu $(a,b)$ và $(b,c)$ thuộc quan hệ đó, thì $(a,c)$ cũng thuộc quan hệ ấy. Ví dụ, $R_4$ có tính chất bắc cầu, vì (3,2) và (2,1), (4,2) và (2,1), (4,3) và (3,1), (4,3) và (3,2) là tất cả các cặp như vậy và (3,1), (4,1) và (4,2) cũng thuộc $R_4$. Việc chứng minh $R_5$ và $R_6$ là có tính chất bắc cầu xin dành cho bạn đọc.

$R_1$ không có tính bắc cầu vì (3,4) và (4,1) thuộc $R_1$ nhưng (3,1) không thuộc $R_1$. $R_2$ cũng không có tính bắc cầu, vì (2,1) và (1,2) thuộc $R_2$, nhưng (2,2) lại không thuộc $R_2$, $R_3$ không có tính bắc cầu vì (4,1) và (1,2) thuộc $R_3$ nhưng (4,2) lại không thuộc $R_3$.

■

**Ví dụ 14.** Các quan hệ nào trong Ví dụ 5 có tính bắc cầu ?

*Giải:* Các quan hệ $R_1$, $R_2$ và $R_4$ đều có tính bắc cầu. $R_1$ có tính bắc cầu vì $a \leq b$ và $b \leq c$ kéo theo $a \leq c$. $R_2$ cũng có tính bắc cầu vì $a > b$ và $b > c$ *kéo theo* $a > c$. $R_3$ là bắc cầu vì $a = \pm b$ và $b = \pm c$ kéo theo $a = \pm c$. $R_4$ rõ ràng là bắc cầu, độc giả cần tự chứng minh điều này. $R_5$ không có tính bắc cầu vì (2,1) và (1,0) thuộc $R_5$ nhưng (2,0) lại không thuộc $R_5$. $R_6$ cũng không có tính bắc cầu vì (2,1) và (1,2) thuộc $R_6$ nhưng (2,2) lại không thuộc $R_6$.

■

**Ví dụ 15**. Quan hệ "chia hết" trên tập các số nguyên dương có tính bắc cầu không ?

*Giải:* Giả sử rằng $b$ chia hết cho $a$ và $c$ chia hết cho $b$ khi đó tồn tại các số nguyên dương $k$ và $l$ sao cho $b = ak$ và $c = bl$. Từ đó, $c = akl$, tức là $c$ chia hết cho $a$. Do đó, quan hệ "chia hết" là có tính bắc cầu.

■

Ví dụ sau đây cho thấy cách đếm số các quan hệ với một tính chất xác định.

**Ví dụ 16.** Có bao nhiêu quan hệ có tính phản xạ trên một tập hợp có $n$ phần tử.

*Giải:* Một quan hệ trên tập $A$ là một tập con của $A \times A$. Do đó, một quan hệ được xác định bằng cách chỉ rõ mỗi một cặp được sắp (trong tổng số $n^2$ cặp) có thuộc $R$ hay không. Tuy nhiên, nếu $R$ có tính phản xạ thì $n$ cặp được sắp $(a,a)$ với $a \in A$ cần phải thuộc $R$. Trong khi đó, mỗi cặp trong số $n(n-1)$ cặp còn lại có dạng $(a,b)$ với $a \neq b$ có thể thuộc $R$ hoặc không. Do đó, theo quy tắc nhân đối với phép đếm, có $2^{n(n-1)}$ các quan hệ có tính phản xạ. (Đây là số cách chọn để mỗi phần tử $(a,b)$ với $a \neq b$ có thuộc $R$ hay không).

■

Số các quan hệ đối xứng và số các quan bệ phản đối xứng trên một tập có $n$ phần tử có thể được đếm bằng cách dùng lý luận tương tự như trong Ví dụ 16 (xem Bài tập 25 ở cuối tiết này). Đếm số các quan hệ có tính chất bắc cầu trên một tập có $n$ phần tử vượt ra ngoài phạm vi của cuốn sách này.

## TỔ HỢP CÁC QUAN HỆ

Vì các quan hệ từ $A$ đến $B$ là các tập con của $A \times B$, nên hai quan hệ từ $A$ đến $B$ cũng có thể được tổ hợp như hai tập hợp. Ta hãy xét các ví dụ sau :

**Ví dụ 17.** Cho $A = \{1, 2, 3\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Các quan hệ $R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ và $R_2$ $\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)\}$ có thể tổ hợp để nhận được :

$$R_1 \cup R_2 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (3,3)\}$$

$$R_1 \cap R_2 = \{(1,1)\}$$

$$R_1 - R_2 = \{(2,2), (3,3)\}$$

$$R_2 - R_1 = \{(1,2), (1,3), (1,4)\}$$

■

**Ví dụ 18.** Cho $A$ và $B$ tương ứng là tập hợp tất cả các sinh viên, và tập hợp tất cả các môn học ở trường bạn. Giả sử rằng quan hệ $R_1$ gồm tất cả các cặp được sắp $(a,b)$ trong đó $a$ là sinh viên đã học môn học $b$, $R_2$ gồm tất cả các cặp được sắp $(a,b)$ trong đó $a$ là sinh viên cần môn $b$ để tốt nghiệp. Xác định các quan hệ $R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2$, $R_1 \oplus R_2$, $R_1 - R_2$ và $R_2 - R_1$ ?

*Giải:* Quan hệ $R_1 \cup R_2$ gồm tất cả các cặp được sắp $(a,b)$ trong đó a là sinh viên đã học môn $b$ hoặc cần môn $b$ để tốt nghiệp ; $R_1 \cap R_2$ là tập của tất cả các cặp được sắp $(a,b)$ trong đó $a$ là sinh viên đã học môn $b$ và cần môn $b$ để tốt nghiệp. Cũng như vậy, $R_1 \oplus R_2$ gồm tất cả các cặp được sắp trong đó $a$ là sinh viên đã học môn $b$ nhưng không cần nó để tốt nghiệp, hoặc cần môn $b$ để tốt nghiệp nhưng lại chưa học nó ; $R_1 - R_2$ là tập các cặp được sắp $(a,b)$ trong đó $a$ đã học môn $b$ nhưng không cần nó để tốt nghiệp, tức $b$ là môn học tùy chọn mà $a$ đã học ; $R_2 - R_1$ là tập các cặp được sắp $(a,b)$ trong đó $b$ là môn mà $a$ cần để tốt nghiệp, nhưng chưa học nó.

■

Có một cách khác để tổ hợp các quan hệ tương tự như hợp thành của các hàm.

**ĐỊNH NGHĨA 6.** Cho $R$ là một quan hệ từ tập $A$ đến tập $B$ và $S$ là một quan hệ từ tập $B$ đến tập $C$. Hợp thành của $R$ và $S$ là một quan hệ chứa các cặp được sắp $(a,c)$ trong đó $a \in A$ và $c \in C$ và đối với chúng tồn tại một phần tử $b \in B$ sao cho $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in S$. Ta ký hiệu hợp thành của $R$ và $S$ là $S \circ R$.

Các ví dụ sau minh họa sự tạo các hợp thành của các quan hệ.

**Ví dụ 19.** Xác định hợp thành của các quan hệ $R$ và $S$ trong đó $R$ là quan hệ từ $\{1,2,3\}$ đến $\{1,2,3,4\}$ với $R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,1), (3,4)\}$ và $S$ là quan hệ từ $\{1,2,3,4\}$ đến $\{0,1,2\}$ với $S = \{(1,0), (2,0), (3,1), (3,2), (4,1)\}$.

*Giải:* $S \circ R$ được xây dựng bằng cách dùng tất cả các cặp được sắp trong $R$ phù hợp với phần tử thứ nhất của cặp được sắp trong $S$. Ví dụ, cặp $(2,3)$ trong $R$ và $(3,1)$ trong $S$ tạo ra cặp $(2,1)$ trong $S \circ R$. Tính tất cả các cặp được sắp đó trong $S \circ R$, ta tìm được $S \circ R = \{(1,0), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1)\}$.

■

Lũy thừa của một quan hệ $R$ cũng có thể được định nghĩa bằng phương pháp quy nạp từ định nghĩa của hợp thành của hai quan hệ.

**ĐỊNH NGHĨA 7.** Cho $R$ là một quan hệ trên tập $A$. Lũy thừa $R^n$, với $n = 1,2,3 \ldots$ được định nghĩa bằng qui nạp như sau :

$$R^1 = R \text{ và } R^{n+1} = R^n \circ R.$$

Từ định nghĩa suy ra rằng $R^2 = R \circ R$, $R^3 = R^2 \circ R = (R \circ R) \circ R$ v.v...

**Ví dụ 20.** Cho $R = \{(1,1), (2,1), (3,2), (4,3)\}$. Tìm các lũy thừa $R^n$ với $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

*Giải:* Vì $R^2 = R \circ R$, chúng ta tìm được $R^2 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,2)\}$. Tiếp theo, vì $R^3 = R^2 \circ R$, suy ra $R^3 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$. Phép tính tiếp theo cho $R^4$ chứng tỏ rằng $R^4$ giống hệt $R^3$, sao cho $R^4 = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1)\}$. Từ đó cũng suy ra rằng $R^n = R^3$ đối với $n = 5, 6, 7, \ldots$ Điều này độc giả tự chứng minh.

■

Định lý sau chứng tỏ rằng lũy thừa của một quan hệ bắc cầu là những tập con của quan hệ đó. Điều này sẽ được dùng trong Tiết 6.4.

**ĐỊNH LÝ 1.** Quan hệ $R$ trên tập $A$ là bắc cầu nếu và chỉ nếu $R^n \subseteq R$ với $n = 1, 2, 3 \ldots$

***Chứng minh*** : Trước hết chúng ta chứng minh điều kiện đủ của định lý. Giả sử $R^n \subseteq R$ với $n = 1, 2, 3 \ldots$ Đặc biệt, $R^2 \subseteq R$. Để thấy điều này kéo theo $R$ có tính bắc cầu, ta chú ý rằng nếu $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in R$ thì theo định nghĩa của hợp thành $(a,c) \in R^2$. Vì $R^2 \in R$, điều này có nghĩa là $(a,c) \in R$, tức $R$ có tính bắc cầu.

Ta sẽ dùng phương pháp qui nạp toán học chứng minh điều kiện cần của định lý. Chú ý rằng điều kiện này hiển nhiên đúng với $n = 1$.

Giả sử rằng $R^n \subseteq R$ với $n$ là một số nguyên dương bất kỳ. Đây là giả thiết qui nạp. Để hoàn tất bước qui nạp ta phải chứng minh rằng $R^{n+1} \subseteq R$. Để chứng minh điều này ta giả sử rằng $(a,b) \in R^{n+1}$. Khi đó, vì $R^{n+1} = R^n \circ R$, nên tồn tại một phần tử $x \in A$ sao cho $(a, x) \in R$ và $(x, b) \in R^n$. Từ giả thuyết qui nạp, cụ thể là $R^n \subseteq R$, suy ra $(x,b) \in R$. Hơn nữa, vì $R$ là bắc cầu và $(a,x) \in R$, $(x,b) \in R$ suy ra $(a,b) \in R$. Do đó $R^{n+1} \subseteq R$, được chứng minh.

## *BÀI TẬP*

1. Liệt kê các cặp được sắp trong quan hệ $R$ từ $A = \{0,1,2,3,4\}$ đến $B = \{0,1,2,3\}$ trong đó $(a,b) \in R$ nếu và chỉ nếu :

   a) $a = b$ b) $a + b = 4$

   c) $a > b$ d) $a \mid b$

   e) ƯCLN$(a, b) = 1$ f) BCNN$(a, b) = 2$

2. a) Liệt kê tất cả các cặp được sắp trong quan hệ $R = \{(a,b) \mid b$ chia hết cho a$\}$ trên tập $\{1,2,3,4,5,6\}$

   b) Biểu diễn quan hệ trên bằng đồ thị như đã làm ở Ví dụ 4.

   c) Biểu diễn quan hệ trên dưới dạng bảng như đã làm ở Ví dụ 4.

3. Đối với mỗi quan hệ cho dưới đây trên tập $\{1,2,3,4\}$, hãy xác định xem nó có là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và bắc cầu không ?

   a) $\{(2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

   b) $\{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$.

   c) $\{(2,4), (4,2)\}$

   d) $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

   e) $\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

   f) $\{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4)\}$.

4. Xác định xem quan hệ $R$ trên tập mọi người có là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu không, với $(a,b) \in R$ nếu và chỉ nếu :

a) $a$ cao hơn $b$ ?

b) $a$ và $b$ sinh cùng ngày ?

c) $a$ và $b$ cùng tên

d) $a$ và $b$ có cùng một ông ?

**5.** Cũng hỏi như trên, với quan hệ $R$ trên tập các số nguyên và $(x,y) \in R$ nếu và chỉ nếu :

a) $x \neq y$.

b) $xy \geqslant 1$.

c) $x = y + 1$ hay $x = y - 1$.

d) $x = y \pmod 7$.

e) $x$ là bội số của $y$.

f) $x$ và $y$ đều âm hoặc đều không âm.

g) $x = y^2$.

h) $x \geqslant y^2$.

*Một quan hệ $R$ trên tập $A$ được gọi là* **không phản xạ** *nếu với mọi $a \in A$ , $(a,a) \notin R$. Tức là, quan hệ $R$ là không phản xạ nếu không có một phần tử nào của a có quan hệ với chính nó.*

**7.** Các quan hệ nào trong Ví dụ 3 là không phản xạ ?

**8.** Cũng hỏi như trên với các quan hệ trong Ví dụ 4 ?

**9.** Một quan hệ có thể vừa không có tính phản xạ vừa không có tính không phản xạ không ?

*Một quan hệ $R$ được gọi là* **bất đối xứng** nếu *$(a, b) \in R$ kéo theo $(b, a) \notin R$.*

**10.** Các quan hệ nào trong Ví dụ 3 là bất đối xứng ?

**11.** Cũng hỏi như trên với các quan hệ trong Ví dụ 4

**12.** Một quan hệ bất đối xứng có cần phải là phản đối xứng không ? Một quan hệ phản đối xứng có cần phải là bất đối xứng không ? Giải thích.

**13.** Có bao nhiêu quan hệ khác nhau từ tập có $m$ phần tử đến tập có $n$ phần tử ?

*Cho $R$ là một quan hệ từ tập $A$ đến tập $B$.* **Quan hệ ngược** *từ $B$ đến $A$, được ký hiệu là $R^{-1}$, là tập các cặp được sắp $\{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.*
**Quan hệ bù** $\overline{R}$ *là tập các cặp được sắp $\{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$.*

**14.** Cho $R$ là quan hệ $R = \{(a,b) \mid a < b\}$ trên tập các số nguyên. Tìm :

a) $R^{-1}$ b) $\overline{R}$

**15.** Cho $R$ là quan hệ $R = \{(a,b) \mid b$ chia hết cho $a\}$ trên tập các số nguyên dương, tìm :

a) $R^{-1}$ b) $\overline{R}$

**16.** Cho $R$ là quan hệ trên tập tất cả các bang của Hoa Kỳ gồm các cặp được sắp $(a,b)$, trong đó bang $a$ giáp giới với bang $b$. Tìm :

a) $R^{-1}$ b) $\overline{R}$

**17.** Giả sử hàm $f$ từ $A$ đến $B$ là một song ánh.
Cho $R$ là quan hệ bằng đồ thị của $f$, tức là $\{(a,f(a)) \mid a \in A\}$.
Tìm $R^{-1}$.

**18.** Cho $R_1 = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ và $R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)\}$ là các quan hệ từ $\{1,2,3\}$ đến $\{1,2,3,4\}$. Tìm :

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$

c) $R_1 - R_2$ d) $R_2 - R_1$

**19.** Cho $A$ là tập các sinh viên ở trường hạn và $B$ là tập các cuốn sách có trong thư viện trường. Giả sử $R_1$ và $R_2$ tương ứng là các quan hệ bao gồm tất cả các cặp được sắp $(a,b)$ trong đó sinh viên $a$ cần đọc cuốn sách $b$ và trong đó sinh viên $a$ đã đọc cuốn sách $b$. Mô tả các cặp được sắp trong các quan hệ dưới đây :

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_1 \oplus R_2$

d) $R_1 - R_2$ e) $R_2 - R_1$

**20.** Cho $R$ là quan hệ $\{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1)\}$ và $S$ là quan hệ $\{(2,1), (3,1), (3,2), (4,2)\}$. Tìm $S \circ R$.

**21.** Cho $R$ là quan hệ trên tập mọi người, bao gồm các cặp $(a,b)$ trong đó $a$ là bố hoặc mẹ của $b$. Cho $S$ là quan hệ trên tập mọi người, bao gồm các cặp $(a,b)$ trong đó $a$ là anh hoặc chị em ruột của $b$. Xác định $S \circ R$ và $R \circ S$.

**22.** Liệt kê 16 quan hệ khác nhau trên tập $\{0,1\}$.

**23.** Trong số 16 quan hệ khác nhau trên tập $\{0,1\}$ có bao nhiêu quan hệ chứa cặp $(0,1)$?

**24.** Trong số 16 quan hệ khác nhau trên tập $\{0,1\}$ mà bạn đã liệt kê trong Bài tập 22, những quan hệ nào là

a) Phản xạ ? b) Không phản xạ ?

c) Đối xứng ? d) Phản đối xứng ?

e) Bất đối xứng ? f) Bắc cầu ?

**25*.** Có bao nhiêu quan hệ trên tập gồm $n$ phần tử là :

a) Đối xứng ? b) Phản đối xứng

c) Bất đối xứng ? d) Không phản xạ

e) Phản xạ và đối xứng f) Không là phản xạ và cũng không phải là không phản xạ.

**26*.** Có bao nhiêu quan hệ bắc cầu trên tập có $n$ phần tử nếu

a) $n = 1$ ? h) $n = 2$ ?

c) $n = 3$?

**27.** Tìm sai lầm trong "chứng minh", "định lý" sau :

**ĐỊNH LÝ**. Cho $R$ là quan hệ trên tập $A$ có tính chất đối xứng và bắc cầu. Khi đó $R$ có tính chất phản xạ.

***Chứng minh***: Giả sử $a \in A$ . Lấy phần tử $b \in A$ sao cho $(a,b) \in R$ Vì $R$ là đối xứng, ta cũng có $(b, a) \in R$. Bây giờ dùng tính chất bắc cầu của $R$, ta suy ra $(a,a) \in R$ vì $(a,b) \in R$ và $(b,a) \in R$.

**28.** Giả sử $R$ và $S$ là hai quan hệ có tính chất phản xạ trên tập $A$ . Chứng minh hoặc bác bỏ các khẳng định sau :

a) $R \cup S$ là phản xạ h} $R \cap S$ là phản xạ

c) $R \oplus S$ là không phản xạ d) $R - S$ là không phản xạ

e) $S \circ R$ là phản xạ.

**29.** Chứng minh rằng quan hệ $R$ trên tập $A$ là đối xứng nếu và chỉ nếu $R = R^{-1}$, với $R^{-1}$ là quan hệ ngược của $R$.

**30.** Chứng minh rằng quan hệ $R$ trên tập $A$ là phản đối xứng nếu và chỉ nếu $R \cap R^{-1}$ là tập con của quan hệ đường chéo $\Delta = \{(a,a) \mid a \in A\}$.

**31.** Chứng minh rằng quan hệ $R$ trên tập $A$ là phản xạ nếu và chỉ nếu quan hệ ngược $R^{-1}$ là phản xạ.

**32.** Chứng minh rằng quan hệ $R$ trên tập $A$ là phản xạ nếu và chỉ nếu quan hệ bù $\overline{R}$ là không phản xạ.

**33.** Cho $R$ là một quan hệ có tính chất phản xạ và bắc cầu. Chứng minh rằng $R^n = R$ với mọi số nguyên dương $n$.

**34.** Cho $R$ là quan hệ trên tập $\{1,2,3,4,5\}$ chứa các cặp được sắp (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,1), (3,4), (3,5), (4,2), (4,5), (5,1), (5,2) và (5,4). Tìm :

a) $R^2$, b) $R^3$,

c) $R^4$, d) $R^5$.

**35.** Cho $R$ là quan hệ phản xạ trên tập $A$ . Chứng minh rằng $R^n$ cũng có tính chất phản xạ với mọi số nguyên dương $n$.

***36.** Cho $R$ là quan hệ đối xứng. Chứng minh rằng $R^n$ là đối xứng với mọi số nguyên dương $n$.

**37.** Giả sử rằng quan hệ $R$ là không phản xạ. $R^n$ có nhất thiết cũng phải không phản xạ không ? Giải thích.

# 6.2. QUAN HỆ n – NGÔI VÀ NHỮNG ỨNG DỤNG CỦA NÓ

## MỞ ĐẦU

Mối quan hệ giữa các phần tử của hơn hai tập hợp cũng thường xuất hiện. Ví dụ, có một mối quan hệ giữa tên, ngành học và điểm trung bình của một sinh viên. Tương tự, cũng có một mối quan hệ giữa hãng hàng không, số chuyến bay, nơi xuất phát, nơi tới, thời gian cất cánh, thời gian tới của một chuyến bay. Một ví dụ trong toán học là mối quan hệ của ba số nguyên trong đó số thứ nhất lớn hơn số thứ hai và số thứ hai lại lớn hơn số thứ ba. Một ví dụ khác là mối quan hệ "ở giữa" của các điểm trên một đường thẳng, trong đó ba điểm có quan hệ với nhau khi điểm thứ hai ở giữa điểm thứ nhất và điểm thứ ba.

Trong tiết này, ta sẽ nghiên cứu mối quan hệ giữa các phần tử của hơn hai tập hợp. Các quan hệ này được gọi là **quan hệ n - ngôi**. Các quan hệ này được dùng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu của máy tính. Những biểu diễn đó giúp chúng ta trả lời những câu hỏi về thông tin được lưu trữ trong cơ sở dữ liệu như : Những chuyến bay nào sẽ hạ cánh xuống sân bay O'Hare giữa 3 và 4 giờ sáng ? Những sinh viên nào ở trường bạn là sinh viên năm thứ hai, ngành toán hoặc tin học có điểm bình quân lớn hơn 3,0 ? Các nhân viên nào của một công ty đã làm việc cho công ty dưới 5 năm và kiếm được 50 000 đôla ?

## QUAN HỆ *n* - NGÔI

Chúng ta bắt đầu với định nghĩa sau

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Cho $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ là các tập hợp. Một *quan hệ n-ngôi* trên các tập này là một tập con của $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Các tập $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ được gọi là *miền* của quan hệ đó và *n* được gọi là *bậc* của nó.

**Ví dụ 1.** Cho *R* là quan hệ gồm các bộ ba *(a,b,c)*, trong đó *a,b,c* là các số nguyên với $a < b < c$. Khi đó $(1,2,3) \in R$, nhưng $(2,4,3) \notin R$. Bậc của quan hệ này là 3. Các miền của nó tất cả đều là tập các số nguyên.

■

**Ví dụ 2.** Cho *R* là quan hệ gồm các bộ 5 *(A , N, S, D, T)* biểu diễn các chuyến bay, trong đó *A* là hãng hàng không *N* là số chuyến bay, *S* là nơi xuất phát, *D* là nơi đến và *T* là thời gian xuất phát. Ví dụ, nếu hãng hàng không Nadir Express có chuyến bay số 963 từ Newark đến Bangor vào lúc 15h00, thì (Nadir, 963, Newark, Bangor, 15h00) thuộc *R*. Bậc của quan hệ này là 5, các miền của nó tương ứng là tập tất cả các hãng hàng không, tập số các chuyến bay, tập các thành phố, (lại) tập các thành phố và tập thời gian.

■

## CƠ SỞ DỮ LIỆU VÀ CÁC QUAN HỆ

Thời gian đòi hỏi để thao tác thông tin trong một cơ sở dữ liệu phụ thuộc vào chỗ thông tin được lưu trữ như thế nào. Các phép thêm và xóa các bản ghi, cập nhật các bản ghi, tìm kiếm các bản ghi và tổ hợp các bản ghi từ các cơ sở dữ liệu chồng phủ lên nhau được thực hiện hàng triệu lần mỗi ngày trong một cơ sở dữ liệu lớn. Vì tầm quan trọng của các thao tác này, nên người ta đã phát triển các phương pháp khác nhau để biểu diễn các cơ sở dữ liệu. Trong mục này chúng ta sẽ xét một trong số các phương pháp đó, nó có tên là **mô hình quan hệ của dữ liệu**, một phương pháp dựa trên khái niệm quan hệ.

Một cơ sở dữ liệu gồm các **bản ghi**, đó là các bộ $n$ thành phần – được tạo bởi các **trường**. Các trường là mục nhập của các bộ $n$ thành phần. Ví dụ, một cơ sở dữ liệu gồm các bản ghi về sinh viên có thể được tạo bởi các trường chứa tên, số chứng minh thư của sinh viên, ngành học, điểm bình quân của sinh viên đó. Mô hình quan hệ của dữ liệu biểu diễn một cơ sở dữ liệu gồm các bản ghi như một quan hệ $n$ – ngôi. Như vậy, các bản ghi về sinh viên được biểu diễn bởi các bộ 4 thành phần có dạng (Tên sinh viên, số chứng minh thư, ngành học, điểm bình quân). Một cơ sở dữ liệu mẫu gồm 6 bản ghi như vậy là :

(Ackermann, 231455, Tin học, 3,88)
(Adams, 888323, Vật lý, 3,45)
(Chou, 102147, Tin học, 3,79)
(Goodfriend, 453876, Toán, 3,45)
(Rao, 678543, Toán, 3,90)
(Stevens, 786576, Tâm lý học, 2,99)

BẢNG 1

| Tên sinh viên | Số chứng minh thư | Ngành học | Điểm bình quân |
|---|---|---|---|
| Ackermann | 231455 | Tin học | 3,88 |
| Adams | 888323 | Vật lý | 3,45 |
| Chou | 102147 | Tin học | 3,79 |
| Good friend | 453876 | Toán | 3,45 |
| Rao | 678543 | Toán | 3,90 |
| Stevens | 786576 | Tâm lý học | 2,99 |

Các quan hệ được sử dụng để biểu diễn các cơ sở dữ liệu cũng được gọi là **các bảng**, vì những quan hệ này thường được biểu diễn dưới dạng bảng. Ví dụ, chính cơ sở dữ liệu về các sinh viên nói ở trên được biểu diễn trong Bảng 1.

Một miền của một quan hệ $n$-ngôi được gọi là **khóa cơ bản** (primary key) khi giá trị của bộ $n$ thành phần tại miền đó xác định bộ $n$ thành phần ấy. Điều này có nghĩa là, một miền là khóa cơ bản khi không có hai bộ $n$ thành phần trong quan hệ đó có cùng một giá trị tại miền đó.

Các bản ghi thường được thêm hay bị xóa đi khỏi các cơ sở dữ liệu. Vì thế, việc một miền là khóa cơ bản sẽ phụ thuộc vào thời gian. Do đó, khóa cơ bản cần được chọn sao cho nó vẫn giữ được tính chất đó bất kỳ khi nào cơ sở dữ liệu bị thay đổi. Điều này có thể được làm bằng cách dùng khóa cơ bản của **nội hàm** cơ sở dữ liệu – nội hàm chứa tất cả các bộ $n$ thành phần mà ta có thể bao hàm trong một quan hệ $n$-ngôi biểu diễn cơ sở dữ liệu đó.

**Ví dụ 3**. Các miền nào là khóa cơ bản đối với quan hệ $n$ ngôi được biểu diễn trong Bảng 1, khi giả thiết rằng không có bộ $n$ thành phần nào sẽ được thêm vào trong tương lai ?

*Giải*: Vì trong bảng này chỉ có một bộ 4 thành phần đối với mỗi sinh viên, nên miền tên sinh viên là một khóa cơ bản. Tương tự, các số chứng minh thư trong bảng này là duy nhất, nên miền các số chứng minh thư cũng là một khóa cơ bản. Tuy nhiên, miền ngành học không phải là một khóa cơ bản vì có hơn một bộ 4 thành phần chứa cùng một ngành học. Miền điểm bình quân cũng không phải một khóa cơ bản vì có hai bộ 4 thành phần chứa cùng một điểm bình quân (hai bộ nào ?).

■

Những tổ hợp của các miền cũng có thể xác định một cách duy nhất các bộ $n$ thành phần trong một quan hệ $n$ ngôi. Khi các giá trị của tập các miền xác định một bộ $n$ thành phần trong một quan hệ, thì tích Đềcác của các miền đó được gọi là **khóa phức hợp**.

**Ví dụ 4**. Tích Đềcác của miền ngành học và miền điểm bình quân có phải là khóa phức hợp đối với quan hệ n ngôi cho trong bảng 1 không khi giả thiết rằng không có bộ $n$ phần tử nào được thêm vào ?

*Giải:* Vì không có hai bộ $n$ thành phần nào trong bảng này có cả ngành học lẫn điểm bình quân như nhau nên tích Đềcác này là một khóa phức hợp.

■

Vì các khóa cơ bản và khóa phức hợp được dùng để xác định một cách duy nhất các bảng ghi trong một cơ sở dữ liệu, nên việc các khóa này vẫn còn hiệu lực khi các bản ghi mới được thêm vào cơ sở dữ liệu là điều quan trọng. Do vậy, cần phải kiểm tra để đảm bảo chắc chắn mỗi bản ghi mới có giá trị trong một hoặc nhiều trường thích hợp khác với tất cả các bản ghi khác trong bảng. Ví dụ, việc dùng số chứng minh thư của các sinh viên như một khóa đối với các bản ghi về sinh viên là có nghĩa, nếu như không có hai sinh viên có cùng số chứng minh thư. Một trường đại học không thể dùng trường tên như một khóa, vì hai sinh viên có thể có tên giống nhau (chẳng hạn như John Smith).

Có rất nhiều phép toán trên các quan hệ $n$ ngôi để tạo các quan hệ $n$−ngôi mới. Hai phép toán như vậy sẽ được xét ở đây, cụ thể là phép chiếu và phép hợp. Phép chiếu được dùng để tạo quan hệ $n$ ngôi mới bằng cách xóa đi cùng một số trường trong mỗi bản ghi của quan hệ đó.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Phép chiếu $P_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ánh xạ bộ $n$ phần tử $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tới bộ $m$ phần tử $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_m})$ trong đó $m \leq n$.

Nói một cách khác, phép chiếu $P_{i_1 i_2 \dots i_m}$ xóa đi $n$-$m$ thành phần của bộ $n$ thành phần, chỉ còn giữ lại các thành phần thứ $i_1$, $i_2$ ... và $i_m$.

**Ví dụ 5.** Tìm kết quả khi thực hiện phép chiếu $P_{1,3}$ đối với các bộ 4 thành phần (2,3,0,4), (Jane Doe, 2344111001, Địa lý, 3,14) và $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ ?

*Giải:* Phép chiếu $P_{1,3}$ ánh xạ các bộ 4 thành phần đó tương ứng thành (2,0), (Jane Doe, Địa lý), và $(a_1, a_3)$.

■

Ví dụ sau minh họa cách dùng phép chiếu để tạo các quan hệ mới.

**Ví dụ 6.** Quan hệ nào sẽ được tạo thành khi dùng phép chiếu $P_{1,4}$ lên quan hệ cho trong bảng 1 ?

*Giải:* Khi dùng phép chiếu $P_{1,4}$, các cột thứ hai và thứ ba của bảng sẽ bị xóa đi và ta sẽ nhận được cặp biểu diễn tên sinh viên và điểm bình quân của sinh viên đó. Bảng 2 cho kết quả của phép chiếu đó. ■

| BẢNG 2 | |
|---|---|
| **Tên sinh viên** | **Điểm bình quân** |
| Ackermann | 3, 88 |
| Adams | 3,45 |
| Chou | 3,79 |
| Goodfriend | 3,45 |
| Rao | 3,90 |
| Stevens | 2,99 |

Cũng có thể xảy ra trường hợp số hàng sẽ ít đi khi thực hiện phép chiếu lên quan hệ được cho trong một bảng. Điều này xảy ra khi một số bộ $n$ thành phần trong quan hệ có giá trị như nhau trong tất cả $m$ thành phần của phép chiếu, và chỉ khác nhau đối với các thành phần bị xóa bởi phép chiếu đó. Chẳng hạn, hãy xét ví dụ sau.

**Ví dụ 7.** Hỏi sẽ nhận được bảng nào khi thực hiện phép chiếu $P_{1,2}$ tới quan hệ được cho trong bảng 3 ?

| BẢNG 3 | | |
|---|---|---|
| **Sinh viên** | **Ngành học** | **Môn học** |
| Glauser | Sinh học | BI 290 |
| Glauser | Sinh học | MS 475 |
| Glauser | Sinh học | PY 410 |
| Marcus | Toán học | MS 511 |
| Marcus | Toán học | MS 603 |
| Marcus | Toán học | CS 322 |
| Miller | Tin học | MS 575 |
| Miller | Tin học | CS 455 |

| BẢNG 4 | |
|---|---|
| **Sinh viên** | **Ngành học** |
| Glauser | Sinh học |
| Marcus | Toán học |
| Miller | Tin học |

*Giải:* Bảng 4 cho quan hệ nhận được khi thực hiện phép chiếu $P_{1,2}$ lên bảng 3. Chú ý rằng sau khi phép chiếu được thực hiện, số dòng sẽ còn ít hơn so với bảng ban đầu. ■

Phép **hợp** được dùng để tổ hợp hai bảng thành một khi những bảng này có cùng một số trường. Ví dụ, một bảng chứa các trường cho hãng hàng không, số chuyến bay, và cửa vào cùng với một bảng có chứa các trường cho số chuyến bay, cửa vào và thời gian cất cánh có thể được tổ hợp thành một bảng chứa các trường cho hãng hàng không, số chuyến bay, cửa vào và thời gian cất cánh.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Cho $R$ là một quan hệ bậc $m$ và $S$ là một quan hệ bậc $n$. Hợp $J_p$ $(R, S)$ với $p \leq m$ và $p \leq n$ là một quan hệ bậc $m + n - p$ chứa tất cả các bộ $(m + n - p)$ thành phần $(a_1, a_2, \ldots a_{m-p}\ c_1, c_2 \ldots c_p, b_1, b_2, \ldots, b_{n-p})$ với bộ $m$ thành phần $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-p}, c_1, c_2, \ldots c_p)$ thuộc $R$ và bộ $n$ thành phần $(c_1, c_2, \ldots c_p, b_1, b_2, \ldots b_{n-p})$ thuộc $S$.

Nói một cách khác, toán tử hợp $J_p$ tạo một quan hệ mới từ hai quan hệ bằng cách tổ hợp tất cả các bộ $m$ thành phần của quan hệ thứ nhất với tất cả các bộ $n$ thành phần của quan hệ thứ hai trong đó $p$ thành phần cuối cùng của quan hệ thứ nhất phù hợp với $p$ thành phần đầu tiên của quan hệ thứ hai.

**Ví dụ 8**. Quan hệ nào sẽ được tạo thành khi toán tử $J_2$ được dùng để tổ hợp các quan hệ được cho trong bảng 5 và bảng 6 ?

**BẢNG 5**

| Giáo sư | Khoa | Mã số môn học |
|---|---|---|
| Cruz | Động vật học | 335 |
| Cruz | Động vật học | 412 |
| Farber | Tâm lý học | 501 |
| Farber | Tâm lý học | 617 |
| Grammer | Vật lý học | 544 |
| Grammer | Vật lý học | 551 |
| Rosen | Tin học | 518 |
| Rosen | Toán học | 575 |

**BẢNG 6**

| Khoa | Mã số môn học | Phòng học | Thời gian |
|---|---|---|---|
| Tin học | 518 | N521 | 14h |
| Toán học | 575 | N502 | 15h |
| Toán học | 611 | N521 | 16h |
| Vật lý | 544 | B505 | 16h |
| Tâm lý học | 501 | A100 | 15h |
| Tâm lý học | 617 | A110 | 11h |
| Động vật học | 335 | A100 | 9h |
| Động vật học | 412 | A100 | 8h |

*Giải:* Hợp $J_2$ tạo ra quan hệ được cho trong bảng 7.

**BẢNG 7**

| Giáo sư | Khoa | Mã số môn học | Phòng học | Thời gian |
|---|---|---|---|---|
| Cruz | Động vật học | 335 | A100 | 9h |
| Cruz | Động vật học | 412 | A100 | 8h |
| Farber | Tâm lý học | 501 | A100 | 15h |
| Farber | Tâm lý học | 617 | A110 | 11h |
| Grammer | Vật lý | 544 | B505 | 16h |
| Roaen | Tin học | 518 | N521 | 14h |
| Rosen | Toán học | 575 | N502 | 15h |

Ngoài phép chiếu và phép hợp còn có các toán tử khác cũng tạo ra các quan hệ mới từ các quan hệ hiện có. Sự mô tả các toán tử này có thể tìm trong các sách về cơ sở dữ liệu.

## *BÀI TẬP*

**1.** Liệt kê các bộ ba trong quan hệ $\{(a,b,c) \mid a,b,c$ là các số nguyên với $0 < a < b < c < 5\}$.

**2.** Xác định các bộ 4 thành phần trong quan hệ $\{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d$ là các số nguyên dương với $abcd = 6\}$.

**3.** Liệt kê các bộ 5 thành phần trong quan hệ cho bởi bảng 8

**4.** Giả sử rằng sẽ không có các bộ $n$ thành phần mới được thêm vào, tìm tất cả các khóa cơ bản đối với các quan hệ được cho bởi

a) Bảng 3 b) Bảng 5

c) Bảng 6 d) Bảng 8

**5.** Giả sử rằng sẽ không có các bộ $n$ thành phần được thêm vào, tìm khóa phức hợp với hai trường trong đó có trường Hãng hàng không đối với cơ sở dữ liệu cho trong bảng 8.

**BẢNG 8**

| Hãng hàng không | Số chuyến bay | Cửa | Nơi đến | Thời gian cất cánh |
|---|---|---|---|---|
| Nadir | 122 | 34 | Detroit | 08h 10 |
| Acme | 221 | 22 | Denver | 08h 17 |
| Acme | 122 | 33 | Anchorage | 08 h22 |
| Acme | 323 | 34 | Honolulu | 08h 30 |
| Nadir | 199 | 13 | Detroit | 08h47 |
| Acme | 222 | 22 | Denver | 09h10 |
| Nadir | 322 | 34 | Detroit | 09h44 |

**6.** Bạn sẽ nhận được gì khi dùng phép chiếu $P_{2,3,5}$ lên bộ 5 thành phần $(a,b,c,d,e)$ ?

**7.** Cần phải dùng ánh xạ chiếu nào để xóa các thành phần thứ nhất, thứ hai và thứ tư của một bộ 6 thành phần ?

**8.** Lập bảng được tạo thành bằng cách dùng phép chiếu $P_{1,2,4}$ lên bảng 8.

9. Lập bảng được tạo thành bằng cách dùng phép chiếu $P_{1,4}$ lên bảng 8.

10. Có bao nhiêu thành phần trong bộ $n$ thành phần thuộc bảng nhận được bằng cách dùng toán tử hợp $J_3$ đối với hai bảng với các bộ 5 và 8 thành phần tương ứng ?

11. Lập bảng nhận được bằng cách dùng toán tử hợp $J_2$ đối với các quan hệ cho trong các bảng 9 và 10.

**BẢNG 9**

| Nhà cung cấp | Mã số linh kiện | Dự án |
|---|---|---|
| 23 | 1092 | 1 |
| 23 | 1101 | 3 |
| 23 | 9048 | 4 |
| 31 | 4975 | 3 |
| 31 | 3477 | 2 |
| 32 | 6984 | 4 |
| 32 | 9191 | 2 |
| 33 | 1001 | 1 |

**BẢNG 10**

| Mã số linh kiện | Dự án | Số lượng | Mã màu |
|---|---|---|---|
| 1001 | 1 | 14 | 8 |
| 1092 | 1 | 2 | 2 |
| 1101 | 3 | 1 | 1 |
| 3477 | 2 | 25 | 2 |
| 4975 | 3 | 6 | 2 |
| 6984 | 4 | 10 | 1 |
| 9048 | 4 | 12 | 2 |
| 9191 | 2 | 80 | 4 |

## 6.3. BIỂU DIỄN CÁC QUAN HỆ

### MỞ ĐẦU

Có nhiều cách hiểu diễn một quan hệ giữa các tập hữu hạn. Như chúng ta đã thấy ở trên, một trong những cách đó là liệt kê các cặp được sắp của nó. Trong tiết này, chúng ta sẽ xét hai cách khác nữa để biểu diễn các quan hệ. Một phương pháp dùng các ma trận zêrô–một, và phương pháp kia dùng các đồ thị có hướng.

## BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG MA TRẬN

Một quan hệ giữa các tập hữu hạn có thể được biểu diễn bằng một ma trận zêrô–một. Giả sử $R$ là một quan hệ từ tập $A = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$ tới tập $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ (Ở đây các phần tử của $A$ và $B$ được liệt kê theo một trật tự đặc biệt nào đó, nhưng là tùy ý. Hơn nữa, khi $A = B$ ta dùng cùng một sắp thứ tự đối với $A$ và $B$). Quan hệ $R$ có thể được biểu diễn bằng ma trận $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$, trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } (a_i, b_j) \in R \\ 0 & \text{nếu } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Nói một cách khác, ma trận zêrô–một biểu diễn quan hệ $R$ có phần tử $(i, j)$ nhận giá trị 1 nếu $a_i$ có quan hệ với $b_j$ và nhận giá trị 0 nếu $a_i$ không có quan hệ với $b_j$. (Một biểu diễn như vậy phụ thuộc vào cách sắp thứ tự của các tập $A$ và $B$).

Các ví dụ sau minh họa việc dùng ma trận để biểu diễn các quan hệ.

**Ví dụ 1**. Cho $A = \{1,2,3\}$ và $B = \{1,2\}$. Giả sử $R$ là quan hệ từ $A$ đến $B$ chứa $(a,b)$ nếu $a \in A$ , $b \in B$ và $a > b$. Ma trận nào biểu diễn quan hệ $R$ nếu $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$ và $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ ?

*Giải:* Vì $R = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$, nên ma trận biểu diễn $R$ là :

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Các số 1 trong $\mathbf{M}_R$ cho thấy rằng các cặp (2,1), (3,1) và (3,2) thuộc $R$. Các số 0 cho thấy không còn cặp nào khác thuộc $R$.

■

**Ví dụ 2.** Cho $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. Các cặp được sắp nào thuộc quan hệ $R$ được biểu diễn bởi ma trận sau

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Giải:* Vì $R$ gồm các cặp được sắp $(a_i, b_j)$ với $m_{ij} = 1$, suy ra :

$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$

■

Ma trận của một quan hệ trên một tập là ma trận vuông và có thể được dùng để xác định quan hệ đó có một số tính chất nào đó hay không. Hãy nhớ lại rằng quan hệ $R$ trên tập $A$ là phản xạ nếu $(a,a) \in R$ với mọi $a \in A$ . Như vậy, $R$ là phản xạ nếu và chỉ nếu $(a_i , a_i) \in R$ đối với $i$ = 1,2, ..., $n$. Từ đó suy ra $R$ là phản xạ nếu và chỉ nếu $m_{ii}$ = 1 với $i$ = 1,2, ..., $n$. Nói một cách khác, $R$ là phản xạ nếu mọi phần tử của đường chéo chính của $\mathbf{M}_R$ là bằng 1 như được cho trên hình 1.

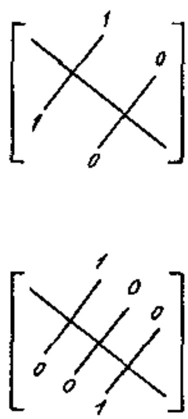
$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

***Hình 1.*** Ma trận zêrô–một biểu diễn một quan hệ phản xạ.

Quan hệ $R$ là đối xứng nếu $(a,b) \in R$ kéo theo $(b,a) \in R$. Do đó, quan hệ $R$ trên tập $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ là đối xứng nếu và chỉ nếu $(a_j,a_i) \in R$ với mọi $(a_i, a_j) \in R$. Như vậy, $R$ là đối xứng nếu và chỉ nếu $m_{ji}$ = 1 đối với mọi $m_{ij}$ = 1. Điều này có nghĩa là $m_{ji}$ = 0 với mọi $m_{ij}$ = 0. Do đó, $R$ là đối xứng nếu và chỉ nếu $m_{ij} = m_{ji}$ đối với mọi cặp số nguyên $i$ và $j$ với $i$ = 1, 2, ... $n$ và $j$ = 1, 2, ..., $n$. Nhớ lại định nghĩa phép chuyển vị của một ma trận ở Tiết 2.6, ta thấy rằng $R$ là đối xứng nếu và chỉ nếu :

a)

b)




***Hình 2.*** Các ma trận zêrô–một biểu diễn các quan hệ đối xứng và phản đối xứng :
a) đối xứng ; b) phản đối xứng.

$$\mathbf{M}_R = (\mathbf{M}_R)^1$$

tức là, nếu $\mathbf{M}_R$ là một ma trận đối xứng. Dạng của ma trận hiểu diễn quan hệ đối xứng được minh họa trên hình 2a.

Quan hệ $R$ là phản đối xứng nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R$ và $(b,a) \in R$ kéo theo $a = b$. Do đó, ma trận của quan hệ phản đối xứng có tính chất là nếu $m_{ij} = 1$ với $i \neq j$ thì $m_{ji} = 0$. Hay, nói một cách khác, $m_{ij} = 0$ hoặc $m_{ji} = 0$ khi $i \neq j$. Dạng của ma trận biểu diễn quan hệ phản đối xứng được minh họa trên hình 2b.

**Ví dụ 3.** Giả sử quan hệ $R$ trên một tập được biểu diễn bởi ma trận :

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R$ có là phản xạ, đối xứng và/hoặc phản đối xứng không ?

*Giải*: Vì tất cả các phần tử trên đường chéo chính đều bằng 1 nên $R$ là phản xạ. Hơn nữa $\mathbf{M}_R$ là ma trận đối xứng nên $R$ cũng là đối xứng. Cũng dễ dàng thấy rằng $R$ không phải là phản đối xứng.

■

Các phép toán Boole hợp và giao (đã được xét ở Tiết 2.6) có thể được dùng để tìm các ma trận biểu diễn hợp và giao của các quan hệ. Giả sử rằng $R_1$ và $R_2$ là các quan hệ trên tập $A$ được biểu diễn bởi các ma trận $\mathbf{M}_{R_1}$ và $\mathbf{M}_{R_2}$, tương ứng. Ma trận biểu diễn hợp của hai quan hệ này có số 1 ở các vị trí mà $\mathbf{M}_{R_1}$ hoặc $\mathbf{M}_{R_2}$ có số 1. Ma trận biểu diễn giao của các quan hệ đó có số 1 ở các vị trí mà cả $\mathbf{M}_{R_1}$ và $\mathbf{M}_{R_2}$ đều có số 1. Như vậy, các ma trận biểu diễn hợp và giao của hai quan hệ đó là

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2}$$

và

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2}$$

**Ví dụ 4**. Giả sử các quan hệ $R_1$ và $R_2$ trên tập $A$ được biểu diễn bằng các ma trận

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm các ma trận biểu diễn $R_1 \cup R_2$ và $R_1 \cap R_2$

*Giải:* Các ma trận biểu diễn các quan hệ đó tương ứng là :

$$\mathbf{M}_{R_1 \cup R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \vee \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{R_1 \cap R_2} = \mathbf{M}_{R_1} \wedge \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Bây giờ chúng ta sẽ hướng sự chú ý tới ma trận biểu diễn hợp thành của các quan hệ. Ma trận này có thể tìm được bằng cách dùng tích Boole của các ma trận (đã được xét ở Tiết 2.6) biểu diễn các quan hệ đó. Đặc biệt, giả sử $R$ là quan hệ từ tập $A$ đến $B$ và $S$ là quan hệ từ tập $B$ đến $C$. Giả sử rằng $A$ , $B$ và $C$ tương ứng có $m$, $p$ và $n$ phần tử. Giả sử các ma trận biểu diễn $S$o$R$, $R$ và $S$ tương ứng là $\mathbf{M}_{SoR} = [t_{ij}]$, $\mathbf{M}_R = [r_{ij}]$ và $\mathbf{M}_S = [s_{ij}]$ (các ma trận này có kích thước tương ứng bằng $m \times p$, $m \times n$ và $n \times p$). Cặp được sắp $(a_i, c_j)$ thuộc $S \circ R$ nếu và chỉ nếu có một phần tử $b_k$ sao cho $(a_i, b_k)$ *thuộc* $R$ và $(b_k, c_j)$ thuộc $S$. Từ đó suy ra rằng $t_{ij} = 1$ nếu và chỉ nếu $r_{ik} = s_{kj} = 1$ đối với một $k$ nào đó. Từ định nghĩa của tích Boole, điều này có nghĩa là

$$\mathbf{M}_{SoR} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S$$

**Ví dụ 5.** Tìm ma trận biểu diễn quan hệ $S \circ R$ nếu biết các ma trận biểu diễn $R$ và $S$ là

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Giải:* Ma trận biểu diễn $S \circ R$ là :

$$\mathbf{M}_{SoR} = \mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

■

Ma trận biểu diễn hợp thành của hai quan hệ cũng có thể được dùng để tìm ma trận biểu diễn $R^n$. Cụ thể là :

$$\mathbf{M}_{R^n} = \mathbf{M}_R^{[n]}$$

theo định nghĩa của lũy thừa Boole. Bài tập 19 ở cuối tiết này sẽ yêu cầu bạn chứng minh công thức đó.

**Ví dụ 6.** Tìm ma trận biểu diễn quan hệ $R^2$, biết rằng ma trận biểu diễn $R$ là :

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*Giải:* Ma trận biểu diễn $R^2$ là

$$\mathbf{M}_{R^2} = \mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

## BIỂU DIỄN QUAN HỆ BẰNG CÁC ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

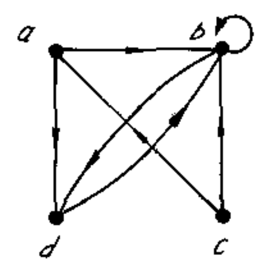
Chúng ta đã chứng minh rằng một quan hệ có thể được biểu diễn bằng cách liệt kê ra tất cả các cặp được sắp hoặc dùng các ma trận zêrô–một. Còn có một cách quan trọng khác biểu diễn một quan hệ – đó là cách dùng các đồ thị. Mỗi phần tử của một tập được biểu diễn bằng một điểm và mỗi cặp được sắp được biểu diễn bằng một cung có hướng chỉ bằng mũi tên. Chúng ta dùng cách biểu diễn đồ thị này khi hình dung một quan hệ trên một tập hữu hạn như một **đồ thị có hướng**.

**ĐỊNH NGHĨA 1**. Một *đồ thị có hướng* (digraph) gồm một tập $V$ các *đỉnh* (hay các nút) cùng với một tập $E$ các cặp phần tử của $V$ được sắp. Các cặp này được gọi là các *cạnh* (hoặc các *cung*). Đỉnh $a$ được gọi là *đỉnh khởi đầu* của cạnh $(a,b)$ và đỉnh $b$ được gọi là *đỉnh kết thúc* của cạnh đó.

Cạnh có dạng $(a,a)$ được biểu diễn bằng một cung từ đỉnh $a$ quay lại chính nó. Một cạnh như vậy được gọi là một **khuyên**.

**Ví dụ 7.** Đồ thị có hướng với các đỉnh $a,b,c$ và $d$ và các cạnh $(a,b)$, $(a, d)$, $(b,b)$, $(b,d)$, $(c,a)$, $(c,b)$ và $(d,b)$ được cho trên hình 3.

■



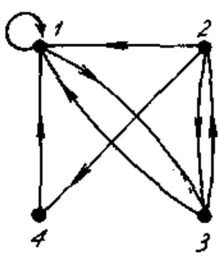

*Hình 3.* Một đồ thị có hướng.

Quan hệ $R$ trên một tập $A$ được biểu diễn bằng một đồ thị có hướng với các phần tử của $A$ như các đỉnh của nó và các cặp được sắp $(a,b) \in R$ là các cạnh của nó. Sự gán này là một song ánh giữa các quan hệ trên tập $A$ và các đồ thị có hướng với $A$ là tập hợp các đỉnh của chúng. Như vậy, mỗi mệnh đề về các quan hệ đều tương ứng với một mệnh đề về các đồ thị có hướng và ngược lại. Các đồ thị có hướng biểu diễn một cách trực quan thông tin về các quan hệ. Do đó, chúng thường được dùng để nghiên cứu các quan hệ và những tính chất của chúng. Chú ý rằng các quan hệ từ tập $A$ đến tập $B$ không thể biểu diễn bằng các đồ thị có hướng trừ khi $A = B$. Việc dùng các đồ thị có hướng để biểu diễn các quan hệ được minh họa trong các ví dụ sau.

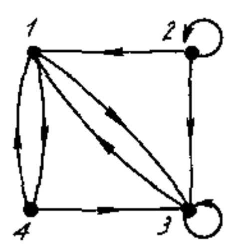
**Ví dụ 8.** Đồ thị có hướng của quan hệ

$$R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

trên tập $\{1,2,3,4\}$ được cho trên hình 4.




*Hình 4.* Đồ thị có hướng của quan hệ $R$.




*Hình 5.* Đồ thị có hướng của quan hệ $R$.

**Ví dụ 9.** Các cặp được sắp nào thuộc quan hệ $R$ được biểu diễn bởi đồ thị có hướng cho trên hình 5.

*Giải:* Các cặp được sắp $(x,y)$ trong quan hệ đó là :

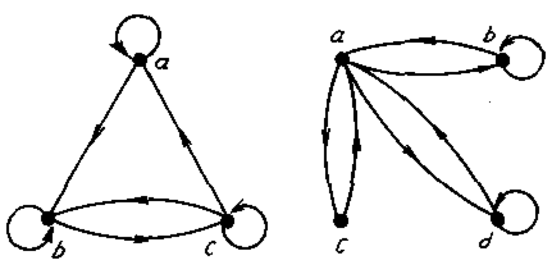
$$R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (4,1), (4,3)\}.$$

Mỗi một cặp này tương ứng với một cạnh của đồ thị đó, với (2,2) và (3,3) tương ứng là hai khuyên.

■

Đồ thị có hướng biểu diễn một quan hệ có thể được dùng để xác định xem quan hệ đó có một số tính chất nào đó hay không. Ví dụ, một quan hệ là phản xạ nếu và chỉ nếu có một khuyên ở tất cả các đỉnh của đồ thị có hướng, sao cho tất cả các cặp được sắp có dạng $(x,x)$ đều thuộc quan hệ đó. Một quan hệ là đối xứng nếu và chỉ nếu đối với mỗi cạnh giữa các đỉnh phân biệt trong đồ thị có hướng của nó đều có một cạnh có hướng ngược lại, sao cho cặp $(y,x)$ thuộc quan hệ đó nếu $(x,y)$ thuộc quan hệ ấy. Tương tự, một quan hệ là phản đối xứng nếu và chỉ nếu không bao giờ có hai cạnh ngược hướng nhau nối hai đỉnh phân biệt. Cuối cùng, một quan hệ là bắc cầu nếu và chỉ nếu mỗi khi có một cạnh nối đỉnh x với đỉnh y và một cạnh nối đỉnh $y$ với đỉnh $z$ thì cũng có một cạnh nối đỉnh $x$ với đỉnh $z$ (hoàn tất một tam giác trong đó mỗi cạnh của tam giác là một cạnh có hướng đúng của đồ thị).

**Ví dụ 10**. Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bằng các đồ thị có hướng cho trên hình 6 có là : phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu không ?




a) Đồ thị có hướng của $R$ ; b) Đồ thị có hướng của $S$.

***Hình 6.*** Đồ thị có hướng của các quan hệ $R$ và $S$ :

*Giải*: Vì có các khuyên ở tất cả các đỉnh của đồ thị có hướng biểu diễn $R$, nên nó có tính chất phản xạ. $R$ không là đối xứng cũng không là phản đối xứng vì có một cạnh nối $a$ với $b$ nhưng không có cạnh nối $b$ với $a$, hơn nữa lại có hai cạnh ngược hướng nối $b$ và $c$. Cuối cùng, $R$ không có tính bắc cầu vì có một cạnh nối $a$ với $b$, một cạnh nối $b$ với $c$ nhưng lại không có cạnh nối $a$ với $c$.

Vì các khuyên không có ở tất cả các đỉnh của đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ $S$, nên quan hệ này không phải là phản xạ. Quan hệ này là đối xứng nhưng không phải phản đối xứng vì mỗi cạnh nối hai đỉnh phân biệt đều kèm theo cạnh có hướng ngược lại. Cũng không khó thấy rằng từ đồ thị có hướng $S$ không phải là bắc cầu. Vì $(c,a)$ và $(a,b)$ thuộc $S$ nhưng $(a,b)$ không thuộc $S$.

## BÀI TẬP

**1.** Biểu diễn các quan hệ trên tập $\{1,2,3\}$ dưới đây bằng ma trận (với các phần tử được liệt kê theo thứ tự tăng dần).

a) $\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3)\}$

b) $\{(1,2),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,3)\}$

c) $\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3)\}$

d) $\{(1,3),\ (3,1)\}$

**2.** Liệt kê các cặp được sắp trong quan hệ trên tập $\{1,2,3\}$ tương ứng với các ma trận dưới đây (trong đó các hàng và cột tương ứng với các số nguyên được liệt kê theo thứ tự tăng).

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**3.** Làm thế nào có thể dùng ma trận biểu diễn một quan hệ để xác định được quan hệ đó có là phản xạ hay không ?

**4.** Hãy xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận cho trong Bài tập 2 có là phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu hay không ?

**5.** Làm thế nào tìm được quan hệ $\overline{R}$ của $R$ từ ma trận biểu diễn $R$ với $R$ là một quan hệ trên tập hữu hạn $A$ ?

**6.** Cũng hỏi như trên với quan hệ ngược $R^{-1}$ của $R$?

**7.** Cho $R$ là một quan hệ được biểu diễn bởi ma trận

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm ma trận biểu diễn :

a) $R^{-1}$ b) $\overline{R}$ c) $R^2$.

**8.** Cho $R_1$ và $R_2$ là hai quan hệ trên tập $A$ được biểu diễn bằng các ma trận

$$\mathbf{M}_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } \mathbf{M}_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tìm các ma trận biểu diễn :

a) $R_1 \cup R_2$ b) $R_1 \cap R_2$ c) $R_2 \circ R_1$

d) $R_1 \circ R_2$ c) $R_1 \oplus R_2$

**9.** Cho $R$ là quan hệ được biểu diễn bởi ma trận

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm các ma trận biểu diễn

a) $R^2$ b) $R^3$ c) $R^4$

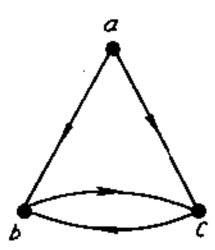
**10.** Vẽ các đồ thị có hướng biểu diễn các quan hệ cho trong Bài tập 1.

**11.** Cũng hỏi như bài tập trên đối với các quan hệ cho trong Bài tập 2.

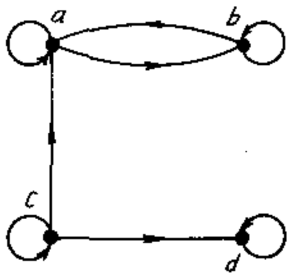
**12.** Vẽ đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ
$R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c, b), (c,d), (d,a), (d,b)\}$

Trong các Bài tập 13–15 hãy liệt kê các cặp được sắp trong các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng.

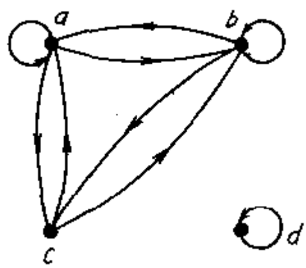
**13.**



**14.**




**15.**




**16.** Làm thế nào có thể dùng đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ $R$ để xác định quan hệ đó là không phản xạ ?

**17.** Hãy xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng cho trong các bài tập 13–15 có là phản xạ, không phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bất đối xứng và/hoặc bắc cầu hay không ?

**18.** Cho các đồ thị có hướng biểu diễn hai quan hệ. Làm thế nào có thể tìm được đồ thị có hướng biểu diễn hợp, giao, hiệu đối xứng, hợp thành của các quan hệ đó.

**19.** Chứng minh rằng nếu $\mathbf{M}_R$ là ma trận biểu diễn quan hệ $R$, thì $\mathbf{M}_R^{[n]}$ là biểu diễn quan hệ $R^n$.

# 6.4. BAO ĐÓNG CỦA CÁC QUAN HỆ

## MỞ ĐẦU

Một mạng máy tính có các trung tâm dữ liệu ở Boston, Chicago, Denver, Detroit, New York, và San Diego. Có các đường dây điện thoại một chiều trực tiếp, chẳng hạn sự liên kết từ Boston tới Chicago, từ Boston tới Detroit, từ Chicago tới Detroit, từ Detroit tới Denver và từ New York tới San Diego. Cho $R$ là một quan hệ chứa các cặp $(a,b)$ nếu có một đường dây điện thoại từ trung tâm dữ liệu ở $a$ đến trung tâm dữ liệu ở $b$. Làm thế nào có thể xác định được có một đường liên lạc (có thể là gián tiếp) bao gồm một hoặc nhiều đường điện thoại từ một trung tâm dữ liệu này tới một trung tâm khác hay không. Vì không phải tất cả các đường liên lạc đều là trực tiếp, chẳng hạn đường liên lạc từ Boston đến Denver phải qua Detroit, nên $R$ không thể được dùng trực tiếp để trả lời câu hỏi đó. Theo ngôn ngữ các quan hệ, thì $R$ không phải là bắc cầu, nó không chứa tất cả các cặp có thể liên lạc với nhau. Như chúng ta sẽ thấy trong tiết này, chúng ta có thể tìm được tất cả các cặp trung tâm dữ liệu có đường liên lạc bằng cách xây dựng một quan hệ bắc cầu nhỏ nhất chứa $R$. Quan hệ đó được gọi là **bao đóng bắc cầu** (hay **bao đóng truyền ứng**) của $R$.

Nói chung, giả sử $R$ là một quan hệ trên tập $A$. $R$ có thể có hoặc không có một tính chất **P** nào đó, chẳng hạn tính phản xạ, tính đối xứng hoặc tính bắc cầu. Nếu có một quan hệ $S$ có tính chất **P** và chứa $R$ sao cho $S$ là tập con của tất cả các quan hệ có tính chất **P** và chứa $R$, thì $S$ được gọi là một **bao đóng** của $R$ đối với **P**. (Chú ý rằng bao đóng của một quan hệ đối với một tính chất nào đó có thể không tồn tại, xem các bài tập 15 và 35 ở cuối tiết này). Dưới đây chúng ta sẽ cho thấy làm thế nào tìm được các bao đóng phản xạ, đối xứng và bắc cầu của các quan hệ.

## BAO ĐÓNG

Quan hệ $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,2)\}$ trên tập $A = \{1,2,3\}$ không có tính phản xạ. Làm thế nào xây dựng được một quan hệ có tính phản xạ chứa $R$ và là nhỏ nhất có thể được ? Điều này có thể làm bằng cách thêm $(2,2)$ và $(3,3)$ vào $R$, vì đó là các cặp duy nhất có dạng $(a,a)$ không chứa trong $R$. Rõ ràng, quan hệ mới này chứa $R$. Hơn nữa, *bất kỳ* quan hệ phản xạ nào chứa $R$ nào cũng phải chứa $(2,2)$ và $(3,3)$. Vì quan hệ này chứa $R$, có tính phản xạ và được chứa trong bất kỳ quan hệ phản xạ nào chứa $R$, nên nó được gọi là **bao đóng phản xạ** của $R$.

Như thí dụ trên vừa minh họa, với quan hệ $R$ đã cho trên tập $A$ , bao đóng phản xạ của $R$ có thể tạo được bằng cách thêm vào $R$ tất cả các cặp dạng $(a,a)$ với $a \in A$ nhưng không được chứa trong $R$. Việc thêm các cặp đó sẽ tạo ra một quan hệ mới có tính chất phản xạ, chứa $R$ và được chứa trong bất kỳ quan hệ phản xạ nào chứa $R$. Chúng ta thấy rằng bao đóng phản xạ của quan hệ $R$ bằng $R \cup \Delta$ với $\Delta = \{(a,a) | a \in A\}$ *là* **quan hệ đường chéo** trên $A$ (độc giả nên tự chứng minh điều này).

**Ví dụ 1**. Xác định bao đóng phản xạ của quan hệ $R = \{(a,b) \mid a > b\}$ trên tập các số nguyên.

*Giải.* Bao đóng phản xạ của $R$ là

$$R \cup \Delta = \{(a,b) \mid a > b\} \cup \{(a,a) \mid a \in \mathbf{Z}\}$$

$$= \{(a, b) \mid a \geqslant b\}$$

■

Quan hệ $\{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$ trên tập $\{1,2,3\}$ là không đối xứng. Làm thế nào tạo được một quan hệ đối xứng nhỏ nhất có thể được và chứa $R$? Để làm điều đó ta cần phải thêm vào $R$ các cặp $(2,1)$ và $(1,3)$ vì đây là các cặp duy nhất có dạng $(b,a)$ không được chứa trong $R$, nhưng với $(a,b) \in R$. Quan hệ này là đối xứng và chứa $R$. Hơn thế nữa, mọi quan hệ đối xứng chứa $R$ cần phải chứa quan hệ mới này, vì một quan hệ đối xứng chứa $R$ cần phải chứa $(2,1)$ và $(3,1)$. Do đó quan hệ mới này được gọi là **bao đóng đối xứng** của R.

Như thí dụ trên vừa minh họa, bao đóng đối xứng của một quan hệ $R$ có thể được xây dựng bằng cách thêm các cặp $(b,a)$ không chứa trong $R$

nhưng với $(a,b) \in R$. Việc thêm các cặp này vào sẽ tạo ra một quan hệ mới có tính đối xứng và chứa $R$. Đồng thời, quan hệ mới này được chứa trong mọi quan hệ đối xứng có chứa $R$. Bao đóng đối xứng của một quan hệ có thể xây dựng bằng cách lấy hợp của quan hệ đó với quan hệ nghịch của nó, tức $R \cup R^{-1}$ là bao đóng đối xứng của $R$, ở đây $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$. Độc giả nên tự chứng minh khẳng định này.

**Ví dụ 2.** Tìm bao đóng đối xứng của quan hệ $R = \{(a,b) \mid a > b\}$ trên tập các số nguyên dương.

*Giải:* Bao đóng đối xứng của $R$ là quan hệ

$$R \cup R^{-1} = \{(a,b) \mid a > b\} \cup \{(b,a) \mid a > b\}$$

$$= \{(a,b) \mid a \neq b\}$$

■

Giả sử $R$ là một quan hệ không có tính bắc cầu. Làm thế nào tạo được một quan hệ bắc cầu chứa $R$ sao cho quan hệ mới này được chứa trong mọi quan hệ bắc cầu chứa $R$? Liệu bao đóng bắc cầu của $R$ có thể được tạo bằng cách thêm tất cả các cặp dạng $(a,c)$ trong đó $(a,b)$ và $(b,c)$ đã được chứa trong quan hệ đó? Ta hãy xét quan hệ $R = \{(1,3), (1,4), (2,1), (3,2)\}$ trên tập $\{1,2,3,4\}$. Quan hệ này không có tính bắc cầu vì nó không chứa tất cả các cặp $(a,c)$ trong đó $(a,b)$ và $(b,c)$ đều thuộc $R$. Các cặp dạng này không được chứa trong $R$ là $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$ và $(3,1)$. Tuy nhiên, việc thêm các cặp này vào $R$ *không* tạo ra một quan hệ bắc cầu vì quan hệ vừa tạo thành có chứa $(3,1)$ và $(1,4)$ nhưng lại không chứa $(3,4)$. Điều này cho thấy rằng việc xây dựng bao đóng bắc cầu của một quan hệ phức tạp hơn việc xây dựng các bao đóng phản xạ hoặc đối xứng. Như sẽ được chỉ ra dưới đây, bao đóng bắc cầu của một quan hệ có thể tìm được bằng cách thêm các cặp được sắp mới cần phải có mặt và sau đó lặp lại quá trình này cho tới khi không cần phải thêm một cặp mới nào nữa.

## ĐƯỜNG ĐI TRONG CÁC ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Chúng ta sẽ thấy rằng việc biểu diễn các quan hệ bằng các đồ thị có hướng sẽ giúp ta xây dựng được các bao đóng bắc cầu. Bây giờ chúng ta sẽ đưa vào một số thuật ngữ cần dùng cho mục đích này.

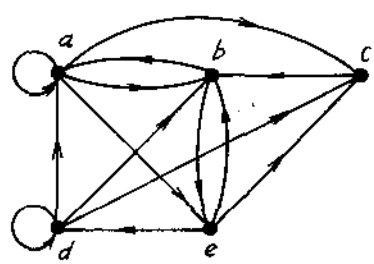
Một đường đi trong đồ thị có hướng nhận được bằng cách đi dọc theo các cạnh (theo cùng một hướng như được chỉ ra bằng mũi tên trên cạnh đó).

**ĐỊNH NGHĨA 1**. Một *đường đi* từ $a$ đến $b$ trong đồ thị có hướng $G$ là dãy gồm một hoặc nhiều cạnh $(x_0, x_1)$, $(x_1, x_2)$, $(x_2, x_3)$, ..., $(x_{n-1}, x_n)$ trong $G$ với $x_0 = a$ và $x_n = b$, tức là dãy các cạnh trong đó đỉnh kết thúc của một cạnh chính là đỉnh khởi đầu của cạnh tiếp theo trên đường đi đó. Đường đi này được ký hiệu là $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ và có *chiều dài là* $n$. Một đường đi bắt đầu và kết thúc ở cùng một đỉnh được gọi là một **chu trình**.

Một đường đi trong đồ thị có hướng có thể qua một đỉnh hơn một lần. Hơn nữa, một cạnh trong đồ thị có hướng có thể gặp hơn một lần trong một đường đi. Độc giả cũng cần lưu ý rằng một số tác giả cho phép những đường đi có chiều dài zêrô, tức là đường đi không gồm một cạnh nào. Trong cuốn sách này mọi đường đi cần phải có chiều dài ít nhất là 1.

**Ví dụ 3**. Trong các dãy đỉnh cho dưới đây, dãy nào là một đường đi trong đồ thị có hướng cho trên hình 1 : $a,b,e,d$ ; $a,e,c,d,b$ ; $b,a,c,b,a,a,b$ ; $d,c$ ; $c,b,a$ ; $e,b,a,b,a,b,e$ ? Chiều dài của các đường đi đó bằng bao nhiêu ? Những đường nào là một chu trình ?

***Giải:*** Vì mỗi cặp $(a,b)$, $(b,e)$ và $(e,d)$ đều là cạnh của đồ thị, nên a, $b$, $e$, $d$ là một đường đi có chiều dài là 3 ; Vì $(c,d)$ không là một cạnh, nên $a$, $e$, $c$, $d$, $b$ không là một đường đi. Cũng như vậy, $b$, $a,c,b,a,a,b$ là một đường đi với chiều dài là 6 vì $(b,a)$, $(a,c)$, $(c,b)$, $(b,a)$, $(a,a)$ và $(a,b)$ đều là các cạnh. Ta cũng thấy rằng $d,c$ là một đường đi với chiều dài là 1, vì $(d,c)$ là một cạnh. Cũng như vậy, $c,b,a$ là một đường đi có chiều dài là 2, vì $(c,b)$, $(b,a)$ đều là các cạnh của đồ thị. Tất cả các cặp $(e,b)$, $(b,a)$, $(a,b)$, $(b,a)$, $(a,b)$ và $(b,e)$ đều là các cạnh nên $e,b,a,b,a,b,e$ là một đường đi có chiều dài là 6.



***Hình 1***. Đồ thị có hướng.

Hai đường đi $b,a,c,b,a,a,b$ và $e,b,a,b,a,b,e$ là các chu trình vì chúng khởi đầu và kết thúc đều ở một đỉnh. Các đường đi $a, b, e, d$ ; $c,b,a$ ; và $d, c$ đều không phải là chu trình.

■

Thuật ngữ *đường đi* cũng được áp dụng trong một quan hệ. Bằng cách chuyển định nghĩa từ đồ thị có hướng qua các quan hệ, ta có : có một **đường đi** từ $a$ đến $b$ trong quan hệ $R$ nếu tồn tại một dãy các phần tử $a, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, b$ với $(a,x_1) \in R$, $(x_1,x_2) \in R$, ... và $(x_{n-1}, b) \in R$. Định lý sau có thể nhận được thẳng từ định nghĩa của đường đi trong một quan hệ.

**ĐỊNH LÝ 1.** Cho $R$ là một quan hệ trên tập $A$ . Có một đường đi với chiều dài $n$ từ $a$ đến $b$ nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R^n$.

*Chứng minh.* Ta sẽ dùng phương pháp qui nạp toán học. Theo định nghĩa, có một đường đi từ $a$ đến $b$ với chiều dài bằng 1 nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R$, vậy định lý đúng với $n = 1$.

Giả sử định lý đúng với số nguyên dương $n$. Đây là giả thiết qui nạp. Có một đường đi từ $a$ đến $b$ với chiều dài $n+1$ nếu và chỉ nếu tồn tại một phần tử $c \in A$ sao cho có một đường đi với chiều dài 1 từ $a$ đến $c$ sao cho $(a,c) \in R$ và một đường đi với chiều dài $n$ từ $c$ đến $b$ sao cho $(c,b) \in R^n$. Do đó, theo giả thiết qui nạp, có một đường đi với chiều dài $n+1$ từ a đến $b$ nếu và chỉ nếu tồn tại một phần tử $c$ với $(a,c) \in R$ và $(c,b) \in R^n$. Nhưng có tồn tại một phần tử như vậy nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R^{n+1}$. Vì vậy, có một đường đi với chiều dài $n+1$ nếu và chỉ nếu $(a,b) \in R^{n+1}$. Định lý được chứng minh.

## BAO ĐÓNG BẮC CẦU

Bây giờ chúng ta sẽ chứng tỏ rằng việc tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ tương đương với việc xác định các cặp đỉnh nào trong đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ đó được nối bằng một đường đi. Với ý nghĩ đó trong đầu, ta định nghĩ quan hệ mới sau :

**ĐỊNH NGHĨA 2**. Cho $R$ là một quan hệ trên tập $A$. *Quan hệ liên thông* $R^*$ gồm các cặp $(a,b)$ sao cho có một đường đi giữa $a$ và $b$ trong $R$.

Vì $R^n$ gồm các cặp $(a,b)$ sao cho có một đường đi với chiều dài $n$ từ $a$ đến $b$, nên suy ra $R^*$ là hợp của tất cả các tập $R^n$. Nói một cách khác :

$$R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

Quan hệ liên thông rất tiện ích trong nhiều mô hình.

**Ví dụ 4**. Cho $R$ là quan hệ trên tập mọi người trên thế giới chứa các cặp $(a,b)$ nếu $a$ đã gặp $b$. Tìm $R^n$ với $n$ là số nguyên dương lớn hơn 2? Tìm $R^*$ ?

*Giải:* Quan hệ $R^2$ chứa các cặp $(a,b)$ nếu tồn tại một nhân vật $c$ sao cho $(a,c) \in R$ và $(c,b) \in R$, tức là nếu có một nhân vật $c$ sao cho $a$ đã gặp $c$ và $c$ đã gặp $b$.

Tương tự, $R^n$ gồm các cặp $(a,b)$ sao cho tồn tại các nhân vật $x_1$, $x_2$, ..., $x_{n-1}$ sao cho $a$ đã gặp $x_1$, $x_1$ đã gặp $x_2$, ... và $x_{n-1}$ đã gặp $b$.

Quan hệ $R^*$ chứa các cặp $(a,b)$ nếu có một dãy nhân vật bắt đầu từ $a$ và kết thúc ở $b$ sao cho mỗi nhân vật trong dãy đã gặp nhân vật đứng ngay sau nó trong dãy (có nhiều phỏng đoán rất lý thú về tập $R^*$. Bạn có nghĩ rằng quan hệ liên thông này bao gồm cả cặp có bạn là phần tử đầu tiên và tổng thống của nước Mông Cổ là phần tử thứ hai không ?).

■

**Ví dụ 5.** Cho $R$ là quan hệ trên tập tất cả các ga tàu điện ngầm ở New York City chứa các cặp $(a,b)$ nếu có thể đi từ ga $a$ đến ga $b$ mà không phải đổi tàu. Tìm $R^n$ với $n$ là một số nguyên dương? Tìm $R^*$.

*Giải:* Quan hệ $R^n$ chứa các cặp $(a,b)$ nếu có thể đi từ ga $a$ đến ga b bằng cách làm tối đa $(n-1)$ lần đổi tầu. Còn quan hệ $R^*$ gồm các cặp $(a,b)$ trong đó có thể đi từ ga $a$ đến ga $b$ khi làm số lần đổi tàu theo mức độ cần thiết (Độc giả nên tự chứng minh các khẳng định này).

■

**Ví dụ 6**. Cho $R$ là một quan hệ trên tập tất cả các bang của Hoa Kỳ chứa các cặp $(a,b)$ nếu hang $a$ và bang $b$ có một biên giới chung. Tìm $R^n$, với $n$ nguyên dương? Tìm $R^*$.

*Giải:* Tập $R^n$ gồm các cặp $(a,b)$ trong đó có thể đi từ bang $a$ đến bang $b$ bằng cách đi qua chính xác $n$ biên giới giữa các hang. $R^*$ chứa các cặp $(a, b)$ trong đó có thể đi từ bang $a$ đến bang $b$ bằng cách đi qua số các biên giới tùy theo mức độ cần thiết. (Độc giả nên tự chứng minh các khẳng định này). Các cặp duy nhất không được chứa trong $R^*$ là các cặp chứa các bang không nối liền với phần lục địa của Hoa Kỳ (tức là, các cặp chứa Alaska hoặc Hawaii).

■

Định lý sau cho thấy bao đóng bắc cầu của một quan hệ chính là quan hệ liên thông của nó.

**ĐỊNH LÝ 2.** Bao đóng bắc cầu của quan hệ R bằng quan hệ liên thông $R^*$.

*Chứng minh:* Chú ý rằng $R^*$ chứa $R$. Để chứng minh $R^*$ là bao đóng bắc cầu của $R$ ta cũng cần phải chứng minh rằng $R^*$ là bắc cầu và $R^* \subseteq S$ với mọi quan hệ $S$ là bắc cầu và chứa $R$.

Trước hết, ta chứng minh $R^*$ là bắc cầu. Nếu $(a,b) \in R^*$ và $(b,c) \in R^*$ thì tức là có một đường đi từ $a$ đến $b$ và từ $b$ đến $c$ trong $R$. Ta nhận được đường đi từ $a$ đến $c$ bằng cách khởi đầu bằng đường đi từ $a$ đến $b$ và tiếp theo nó bằng đường đi từ $b$ đến $c$. Do đó $(a,c) \in R^*$. Suy ra $R^*$ là bắc cầu.

Bây giờ chúng ta giả sử rằng $S$ là một quan hệ bắc cầu chứa $R$. Vì $S$ là bắc cầu nên $S^n$ cũng là bắc cầu (độc giả cần tự chứng minh khẳng định này) và $S^n \subseteq S$ (theo Định lý 1 của Tiết 6.1). Hơn nữa vì

$$S^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} S^k$$

và $S^k \subseteq S$ suy ra $S^* \subseteq S$. Bây giờ chú ý rằng nếu $R \subseteq S$ thì $R^* \subseteq S^*$ vì bất kỳ một đường đi nào trong $R$ cũng là một đường đi trong $S$. Do đó, $R^* \subseteq S^* \subseteq S$. Vậy mọi quan hệ bắc cầu chứa $R$ cũng cần phải chứa $R^*$. Do đó $R^*$ chính là bao đóng bắc cầu của $R$.

Bây giờ, một khi chúng ta đã biết rằng bao đóng bắc cầu đúng bằng quan hệ liên thông, ta hãy hướng chú ý vào bài toán tính quan hệ này. Chúng ta không cần phải kiểm tra các đường đi với chiều dài tùy ý để xác định có một đường đi giữa hai đỉnh của một đồ thị có hướng hữu hạn hay không. Như bổ đề dưới đây cho thấy, chỉ cần kiểm tra các đường đi chứa không hơn $n$ cạnh với $n$ là số các phần tử trong tập là đủ.

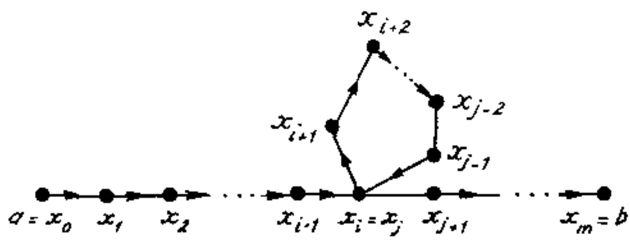
**BỔ ĐỀ 1.** Cho $A$ là tập có $n$ phần tử, và $R$ là một quan hệ trên $A$ . Nếu có một đường đi trong $R$ từ a đến $b$ thì cũng có một đường đi như vậy với chiều dài không vượt quá $n$. Hơn nữa, khi $a \neq b$, nếu có một đường đi từ $a$ đến $b$ *trong* $R$ thì cũng có một đường đi như vậy với chiều dài không vượt quá $n - 1$.

*Chứng minh*: Giả sử có một đường đi từ $a$ đến $b$ trong $R$. Giả sử $m$ là chiều dài ngắn nhất của một đường đi như thế, đó là $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m$ với $x_0 = a$ và $x_m = b$.

Giả sử rằng $a = b$ và $m > n$ sao cho $m \geq n + 1$. Theo nguyên lý Dirichlet vì có $n$ đỉnh trong $A$ , nên trong số $m$ đỉnh $x_0, x_1, ..., x_{m-1}$ ít nhất phải có hai đỉnh trùng nhau (xem hình 2).

Giả sử rằng $x_i = x_j$ với $0 \leq i < j \leq m - 1$. Khi đơ đường đi này chứa một chu trình từ $x_i$ tới chính nó. Chu trình này có thể được xóa khỏi đường đi từ $a$ đến $b$, chỉ để lại đường đi $x_0, x_1, ..., x_i, x_{j+1}, ..., x_{m-1}, x_m$ từ $a$ đến $b$ có chiều dài ngắn hơn. Từ đó, đường đi có chiều dài ngắn nhất cần phải có chiều dài nhỏ hơn hoặc bằng $n$.

Trường hợp với $a \neq b$ xin dành cho bạn đọc như một bài tập.




***Hình** 2.* Tạo một dường đi có chiều dài không vượt quá $n$.

Từ Bổ đề 1, chúng ta thấy rằng bao đóng bắc cầu của $R$ là hợp của $R$, $R^2$, $R^3$, ..., $R^n$. Sở dĩ như vậy là vì có một đường đi trong $R^*$ giữa 2 đỉnh nếu và chỉ nếu có một đường đi giữa các đỉnh đó trong $R^i$ với $i$ là một số nguyên dương nào đó nhỏ hơn hoặc bằng $n$. Vì

$$R^* = R \cup R^2 \cup R^3 \cup ... \cup R^n ,$$

và ma trận zêrô-một biểu diễn hợp của các quan hệ là hợp của các ma trận zêrô-một biểu diễn các quan hệ đó, nên ma trân zêrô-một biểu diễn bao đóng là hợp của các ma trận zêrô-một biểu diễn $n$ lũy thừa đầu tiên của $R$.

**ĐỊNH LÝ 3**. Cho $\mathbf{M}_R$ là ma trận zêrô-một biểu diễn quan hệ $R$ trên một tập gồm $n$ phần tử. Khi đó ma trận zêrô-một biểu diễn bao đóng bắc cầu $R^*$ là :

$$\mathbf{M}_{R^*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]} \vee ... \vee \mathbf{M}_R^{[n]}$$

**Ví dụ 7.** Tìm ma trận zêrô–một biểu diễn bao đóng của $R$, nếu cho

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Giải:* Từ Định lý 3, suy ra rằng ma trận zêrô–một biểu diễn $R^*$ là :

$$\mathbf{M}_{R*} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^{[2]} \vee \mathbf{M}_R^{[3]}$$

Vì $$\mathbf{M}_R^{[2]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{M}_R^{[3]} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

suy ra rằng

$$\mathbf{M}_{R*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Định lý 3 có thể được dùng để làm cơ sở cho thuật toán tính ma trận của quan hệ $R^*$. Để tìm ma trận này, cần phải tính các lũy thừa Boole liên tiếp cho tới lũy thừa bậc $n$ của $\mathbf{M}_R$. Một khi mỗi lũy thừa đó đã được tính, ta lấy hợp của lũy thừa đó với hợp của các lũy thừa bậc nhỏ hơn. Khi điều này đã được làm với lũy thừa bậc $n$, ta sẽ tìm được ma trận biểu diễn $R^*$. Thủ tục này được trình bày như giả mã Algorithm 1 sau

---

ALGORITHM 1. THỦ TỤC TÍNH BAO ĐÓNG BẮC CẦU

**procedure** *bao đóng bắc cầu* ($\mathbf{M}_R$ : ma trận zêrô–một $n$ x $n$)

**A** : = $\mathbf{M}_R$

**B** : = **A**

**for** $i$ : 2 **to** $n$

**begin**

  **A** : = **A** $\odot$ $\mathbf{M}_R$

  **B** : = **B** V **A**

**end** (**B** là ma trận zêrô–một biểu diễn $R^*$)

---

Chúng ta có thể dễ dàng tìm được số phép toán bit được dùng bởi Algorithm 1 để xác định bao đóng bắc cầu của một quan hệ. Tính các lũy thừa Booie $\mathbf{M}_R$, $\mathbf{M}_R^{[2]}$ , ..., $\mathbf{M}_R^{[n]}$ đòi hỏi phải tìm $(n - 1)$ tích Boole của các ma trận zêrô–một $n \times n$. Mỗi tích Boole này có thể tính được bằng cách dùng $n^3$ phép toán bit. Do đó, các tích này có thể tính được bằng cách dùng $(n - 1)n^3$ phép toán bit.

Để tìm $\mathbf{M}_{R^*}$ từ các lũy thừa Boole bậc $n$ của $\mathbf{M}_R$ ta cần phải tính $(n-1)$ phép hợp của các ma trận zêrô–một. Tính mỗi một hợp này cần $n^2$ phép toán bit. Vì vậy phải cần tới $(n - 1)n^2$ phép toán bit trong phần tính các hợp. Do đó khi dùng Algorithm 1, ta phải cần tới $(n - 1)n^3 + (n - 1)n^2 = O(n^4)$ các phép toán bit để tính ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của một quan hệ trên tập $A$ gồm $n$ phần tử. Phần còn lại của tiết này mô tả một thuật toán hiệu quả hơn để tìm bao đóng bắc cầu.

## THUẬT TOÁN WARSHALL

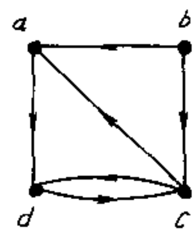
Thuật toán Warshall – gọi theo tên Stephen Warshall, người đã mô tả thuật toán này vào năm 1960 – là một phương pháp rất có hiệu quả để tính bao đóng bắc cầu của một quan hệ. Algorithm 1 có thể tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ trên một tập $n$ phần tử bằng cách dùng $n^4 - n^2$ phép toán bit. Tuy nhiên, bao đóng bắc cầu được tìm bằng thuật toán Warshall chỉ cần dùng $2n^3$ phép toán bit.

*Chú ý* : Thuật toán Warshall đôi khi còn được gọi là thuật toán Roy – Warshall vì B.Roy cũng đã mô tả thuật toán này vào năm 1959.

Cho $R$ là một quan hệ trên tập $n$ phần tử. Giả sử $v_1, v_2, ..., v_n$ là một bảng liệt kê tùy ý các phần tử đó. Trong thuật toán Warshall có dùng khái niệm các **đỉnh trong**. Nếu $a, x_1, x_2, ..., x_{m-1}, b$ là một đường đi, thì các đỉnh trong của nó là $x_1, x_2, ..., x_{m-1}$, tức đó là tất cả các đỉnh nằm ở đâu đó trên đường đi nhưng khác với đỉnh đầu và cuối của đường đi đó. Ví dụ, các đỉnh trong của đường đi *a, c, d, f, g, h, b, j* ở một đồ thị có hướng là *c, d, f, g, h* và *b*. Các đỉnh trong của đường đi *a, c, d, a, f, b* là *c, d, a* và *f*. (Chú ý rằng đỉnh đầu tiên trong đường đi đó sẽ là đỉnh trong, nếu nó được gặp lại trên đường đi đó trừ phi là đỉnh cuối cùng. Tương tự, đỉnh cuối cùng của một đường đi cũng là điểm trong nếu nó được gặp trước đó trừ khi là đỉnh đầu tiên).

Thuật toán Warshall dựa trên việc xây dựng dãy các ma trận zêrô–một. Những ma trận đó là $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{W}_1$, ..., $\mathbf{W}_n$, trong đó $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$ là ma trận biểu diễn quan hệ $R$, và $W_k = [w_{ij}^{(k)}]$ trong đó $\omega_{ij}^{(k)} = 1$ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ sao cho tất cả các đỉnh trong của nó thuộc tập $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ ($k$ đỉnh đầu tiên trong bảng liệt kê) và $w_{ij}^{k} = 0$ trong các trường hợp còn lại. (Đỉnh đầu tiên và đỉnh cuối cùng trong đường đi đó có thể ở ngoài tập $k$ đỉnh đầu tiên trong bảng liệt kê). Chú ý rằng $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_R{}^*$ vì phần tử ở vị trí $(i,j)$ trong ma trận $\mathbf{M}_R{}^*$ bằng 1 nếu và chỉ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ với tất cả các đỉnh trong thuộc tập $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ (nhưng đó là toàn bộ các đỉnh trong đồ thị có có hướng đang xét). Ví dụ sau minh họa ma trận $\mathbf{W}_k$ biểu diễn cái gì.

**Ví dụ 8.** Cho $R$ là một quan hệ có đồ thị có hướng cho trên hình 3. Giả sử $a$, $b$, $c$, $d$ là bảng liệt kê các phần tử của tập đang xét. Tìm các ma trận $\mathbf{W}_0$, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ và $\mathbf{W}_4$. Ma trận $\mathbf{W}_4$ biểu diễn bao đóng bắc cầu của $R$.




*Hình 3.* Đồ thị có hướng của quan hệ $R$.

*Giải:* Đặt $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$ và $v_4 = d$. $\mathbf{W}_0$ là ma trận biểu diễn quan hệ $R$. Do đó :

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{W}_1$ có 1 ở vị trí $(i,j)$ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ và đường đi này chỉ có $v_1 = a$ là đỉnh trong, nếu có. Chú ý rằng tất cả các đường đi có chiều dài bằng 1 cũng có thể được dùng vì chúng không có các đỉnh trong. Như vậy, bây giờ có một đường đi cho phép từ $b$ đến $d$, cụ thể là $b,a,d$. Từ đó,

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{W}_2$ có 1 ở vị trí $(i,j)$ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ với các đỉnh trong chỉ là $v_1 = a$ và/hoặc $v_2 = b$, nếu có. Vì không có các cạnh nào có $b$ là đỉnh kết thúc, nên sẽ không có các đường đi mới nào nhận được khi chúng ta có cho phép $b$ là một đỉnh trong. Từ đó suy ra $\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1$. $\mathbf{W}_3$ có 1 ở vị trí $(i,j)$ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ với các đỉnh trong chỉ là $v_1 = a$, $v_2 = b$ và/hoặc $v_3 = c$, nếu có. Bây giờ chúng ta có các đường đi từ $d$ đến $a$, cụ thể là $d$, $c$, $a$ và từ $d$ đến $d$, cụ thể là $d$, $c$, $d$. Từ đó, ta có :

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

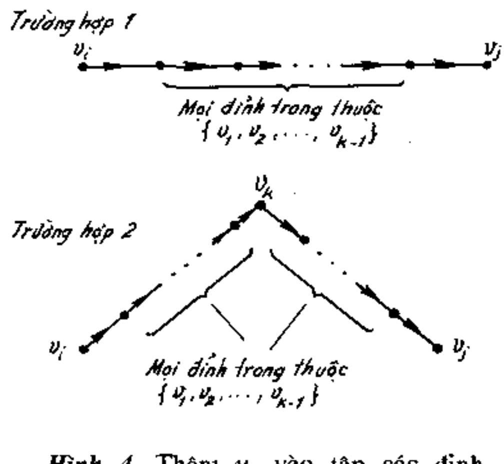
Cuối cùng, $\mathbf{W}_4$ có 1 ở vị trí $(i,j)$ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ với các đỉnh trong chỉ là $v_1 = a$, $v_2 = b$, $v_3 = c$ và/hoặc $v_4 = d$, nếu có. Vì đây là tất cả các đỉnh của đồ thị nên phần tử $(i,j)$ bằng 1 nếu và chỉ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$. Từ đó,

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ma trận cuối cùng này chính là ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của $R$.

■

Thuật toán Warshall tính $\mathbf{M}_{R^*}$ bằng cách tính $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$, $\mathbf{W}_1$, ..., $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R^*}$ hiệu quả hơn. Nhận xét sau cho thấy ta có thể tính $\mathbf{W}_k$ trực tiếp từ $\mathbf{W}_{k-1}$. Có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ với không có đỉnh trong nào khác hơn $v_1$, $v_2$, . .., $v_k$ nếu và chỉ nếu có một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ với các đỉnh trong của nó chỉ nằm trong số $k$-1 đỉnh đầu tiên trong bảng liệt kê hoặc có các đường đi từ $v_i$ đến $v_k$ và từ $v_k$ đến $v_j$ với các đỉnh trong chỉ thuộc số $k$-1 đỉnh đầu tiên trong bảng kê. Điều này có nghĩa là, hoặc một đường đi từ $v_i$ đến $v_j$ đã tồn tại trước khi $v_k$ được phép như một đỉnh trong, hoặc việc cho phép $v_k$ như một đỉnh trong tạo ra một đường đi từ $v_i$




***Hình 4.*** Thêm $v_k$ vào tập các đỉnh trong cho phép.

đến $\nu_k$ và sau đó từ $\nu_k$ đến $\nu_j$. Hai trường hợp này được minh họa trên Hình 4.

Loại đường đi thứ nhất tồn tại nếu và chỉ nếu $\omega_{ij}^{[k-1]} = 1$ và loại đường đi thứ hai tồn tại khi cả hai phần tử $\omega_{ik}^{[k-1]}$ và $\omega_{kj}^{[k-1]}$ đều bằng 1. Từ đó, suy ra $\omega_{ij}^{[k]} = 1$ nếu và chỉ nếu hoặc $\omega_{ij}^{[k-1]} = 1$ hoặc cả hai $\omega_{ik}^{[k-1]}$ và $\omega_{kj}^{[k-1]}$ đều bằng 1. Điều này dẫn chúng ta đến Bổ đề sau.

**BỔ ĐỀ 2**. Cho $\mathbf{W}_k = [\omega_{ij}^{[k]}]$ là ma trận zêrô-một có phần tử ở vị trí $(i, j)$ nhận giá trị 1 nếu và chỉ nếu có một đường đi từ $\nu_i$ đến $\nu_j$ với các đỉnh trong thuộc tập hợp $\{\nu_1, \nu_2, ..., \nu_k\}$ thì

$$\omega_{ij}^{[k]} = \omega_{ij}^{[k-1]} \vee (\omega_{ik}^{[k-1]} \wedge \omega_{kj}^{[k-1]})$$

với mọi $i$, $j$ và $k$ là các số nguyên dương không vượt quá $n$.

Bổ đề 2 cho chúng ta phương tiện để tính một cách hiệu quả các ma trận $\mathbf{W}_k$, $k = 1, 2, ...\ n$. Chúng ta sẽ dùng Bổ đề 2 để biểu diễn giả mã cho thuật toán Warshall và gọi là Algorithm 2.

---

ALGORITHM 2. THUẬT TOÁN WARSHALL

**procedure** *Warshall* ($\mathbf{M}_R$ : ma trận zêrô-một $n \times n$)

$\mathbf{W} := \mathbf{M}_R$

**for** $k := 1$ **to** n

**begin**

    **for** $i := 1$ **to** $n$

    **begin**

        **for** $j := 1$ **to** $n$

        $\omega_{ij} := \omega_{ij} \vee (\omega_{ik} \wedge \omega_{kj})$

    **end**

**end** $\{\mathbf{W} = [\omega_{ij}]$ là $\mathbf{M}_{R*}\}$

---

Độ phức tạp tính toán của thuật toán Warshall có thể đánh giá một cách dễ dàng qua các phép toán bit. Để tìm phần tử $\omega_{ij}^{[k]}$ từ các phần tử

$\omega_{ij}^{[k-1]}$, $\omega_{ik}^{[k-1]}$ và $\omega_{kj}^{[k-1]}$ theo Bổ đề 2 đòi hỏi hai phép toán bit. Để tìm $n^2$ phần tử của $\mathbf{W}_k$ từ các phần tử của $\mathbf{W}_{k-1}$ như vậy phải cần tới $2n^2$ phép toán hit. Vì thuật toán Warshall hắt đầu với $\mathbf{W}_o = \mathbf{M}_R$ và tính dãy $n$ ma trận zêrô–một $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, ..., $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_{R*}$, nên tổng cộng các phép toán bit được dùng là $n.2n^2 = 2n^3$.

## *BÀI TẬP*

**1.** Cho $R$ là một quan hệ trên tập $\{0,1,2,3\}$ chứa các cặp được sắp (0,1), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2) và (3,0). Tìm

a) Bao đóng phản xạ của $R$

b) Bao đóng đối xứng của $R$

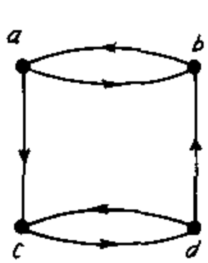
**2.** Cho $R$ là quan hệ $\{(a,b) \mid a \neq b\}$ trên tập các số nguyên. Tìm bao đóng phản xạ của $R$.

**3.** Cho $R$ là quan hệ $\{(a,b) \mid b$ chia hết cho a$\}$ trên tập các số nguyên. Tìm bao đóng đối xứng của R

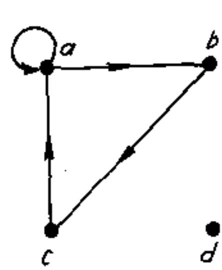
**4.** Làm thế nào có thể dựng được đồ thị có hướng biểu diễn hao đóng phản xạ của một quan hệ trên một tập hữu hạn từ đồ thị có hướng của quan hệ đó ?

*Trong các Bài tập từ 5 – 7 hãy vẽ đồ thị có hướng biểu diễn bao đóng phản xạ của các quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng sau đây :*

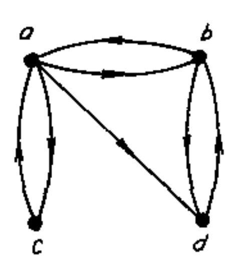
**5.**




**6.**




**7.**




**8.** Làm thế nào có thể xây dựng đồ thị có hướng hiểu diễn bao đóng đối xứng của một quan hệ từ đồ thị hiểu diễn quan hệ đó ?

**9.** Tìm đồ thị có hướng biểu diễn bao đóng đối xứng của các quan hệ được hiểu diễn bởi các đồ thị cho trong các Bài tập **5** – **7**.

**10.** Tìm quan hệ nhỏ nhất chứa quan hệ trong Bài tập 2 và có tính chất vừa phản xạ vừa đối xứng.

**11.** Tìm đồ thị có hướng biểu diễn quan hệ nhỏ nhất vừa phản xạ vừa đối xứng chứa các quan hệ có đồ thị được cho trong các Bài tập 5 – 7.

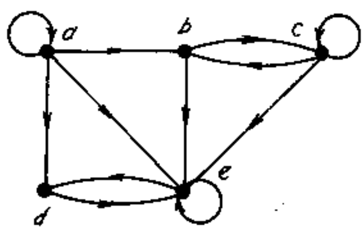
**12.** Giả sử quan hệ $R$ trên tập hữu hạn $A$ được hiểu diễn bởi ma trận $\mathbf{M}_R$. Chứng minh rằng ma trận biểu diễn hao đóng phản xạ của $R$ là $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$.

**13.** Giả sử quan hệ $R$ trên tập hữu hạn $A$ được hiểu diễn bởi ma trận $\mathbf{M}_R$. Chứng minh rằng ma trận biểu diễn bao đóng đối xứng của $R$ là $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R^t$.

**14**. Chứng minh rằng bao đóng của quan hệ $R$ đối với một tính chất **P** nào đó, nếu nó tồn tại, là giao của tất cả các quan hệ có tính cbất **P** và chứa $R$.

**15.** Khi nào có thể định nghĩa "bao đóng không phản xạ" của quan hệ $R$, tức là quan hệ chứa $R$ và là không phản xạ đồng thời nó được chứa trong tất cả các quan hệ không phản xạ và cbứa $R$ ?

16. Xác định dãy các đỉnh sau có là một đường đi trong đồ thị có hướng dưới đây không ?




a) *a,b,c,e*

h) *b,e,c,b,e*

c) *a,a,b,e,d,e*

d) *b,c,e,d,a,a,b*

e) *b,c,c,b,e,d,e,d*

f) *a,a,b,b,c,c,b,e,d*

**17.** Tìm tất cả các chu trình có chiều dài bằng 3 trong đồ thị có hướng cho trong Bài tập 16.

**18.** Xác định xem có một đường đi trong đồ thị có hướng ở Bài tập 16 bắt đầu ở đỉnh đầu tiên và kết thúc ở đỉnh thứ hai đã cho dưới đây hay không ?

| | | |
|---|---|---|
| a) *a, b* | b) *b, a* | c) *b, b* |
| d) *a, e* | e) *b, d* | f) *c, d* |
| g) *d, d* | h) *e, a* | i) *e, c* |

**19.** Cho $R$ là quan hệ trên tập $\{1,2,3,4,5\}$ chứa các cặp được sắp $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,1)$, $(3,5)$, $(4,3)$, $(5,1)$, $(5,2)$ và $(5,4)$. Tìm

a) $R^2$ b) $R^3$ c) $R^4$

d) $R^5$ e) $R^6$ f) $R^*$

**20.** Cho $R$ là quan hệ chứa cặp $(a,b)$ nếu $a$ và $b$ là các thành phố có chuyến bay thẳng không dừng lại từ $a$ đến $b$. Khi nào thì $(a,b)$ thuộc

a) $R^2$ ? b) $R^3$ ? c) $R^*$ ?

**21.** Cho $R$ là quan hệ cho trên tập tất cả các sinh viên, chứa cặp $(a,b)$ nếu $a$ và $b$ ít nhất học chung một môn trong một lớp và $a \neq b$. Khi nào $(a,b)$ thuộc

a) $R^2$ ? b) $R^3$ ? c) $R^*$ ?

**22.** Giả sử quan hệ $R$ là phản xạ. Chứng tỏ rằng $R^*$ cũng phản xạ.

**23.** Giả sử quan hệ $R$ là đối xứng. Chứng minh rằng $R^*$ cũng đối xứng.

**24.** Giả sử quan hệ $R$ là không phản xạ. Quan hệ $R^2$ có nhất thiết cũng phải không phản xạ không ?

**25.** Dùng Algorithm 1 tìm bao đóng bắc cầu của các quan hệ sau cho trên tập $\{1,2,3,4\}$

a) $\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (4,1)\}$

b) $\{(2,1), (2,3), (3,1), (3,4), (4,1), (4,3)\}$

c) $\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)\}$

d) $\{(1,1), (1,4), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,2)\}$

**26.** Dùng Algorithm 1 tìm bao đóng bắc cầu của các quan hệ sau cho trên tập $\{a,b,c,d,e\}$ :

a) $\{(a,c), (b,d), (c,a), (d,b), (e,d)\}$

b) $\{(b,c), (b,e), (c,e), (d,a), (e,b), (e,c)\}$

c) $\{(a,b), (a,c), (a,e), (b,a), (b,c), (c,a), (c,b), (d,a), (e,d)\}$

d) $\{(a,e), (b,a), (b,d), (c,d), (d,a), (d,c), (e,a), (e,b), (e,c), (e,e)\}$

**27.** Dùng thuật toán Warshall tìm bao đóng của các quan hệ cho trong Bài tập 25.

**28.** Cũng hỏi như trên đối với các quan hệ trong Bài tập 26.

**29.** Tìm quan hệ nhỏ nhất chứa quan hệ {(1,2), (1,4), (3,3), (4,1)} và có các tính chất sau

a) Phản xạ và bắc cầu

b) Đối xứng và bắc cầu

c) Phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

**30.** Hoàn tất chứng minh Bổ đề 1 cho trường hợp $a \neq b$.

**31.** Người ta đã đưa ra các thuật toán dùng $O(n^{2,8})$ các phép toán bit để tính tích Boole của hai ma trận zêrô-một $n \times n$. Giả sử rằng các thuật toán này có thể dùng được, hãy cho các đánh giá big - $O$ đối với số các phép toán bit khi dùng Algorithm 1 và khi dùng thuật toán Warshall để tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ cho trên một tập $n$ phần tử.

***32.** Xây dựng một thuật toán dùng khái niệm các đỉnh trong của một đường đi để tìm chiều dài của đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh trong một đồ thị có hướng, nếu như đường đi đó tồn tại.

**33.** Hãy sửa Algorithm 1 để dùng nó có thể tìm được bao đóng phản xạ của bao đóng bắc cầu của một quan hệ cho trên tập $n$ phần tử.

**34.** Hãy sửa thuật toán Warshall để dùng nó có thể tìm được bao đóng phản xạ của bao đóng bắc cầu của một quan hệ cho trên tập $n$ phần tử.

**35.** Chứng minh rằng bao đóng đối với một tính chất **P** nào đó của quan hệ $R$ = {(0,0), (0,1), (1,1), (2,2)} trên tập {0,1,2} không tồn tại nếu **P** là tính chất

a) "Không có tính phản xạ".

b) "Có một số lẻ phần tử".

# 6.5. QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

## MỞ ĐẦU

Các sinh viên ở một trường đăng ký học các lớp một ngày trước khi bắt đầu học kỳ mới. Các sinh viên có tên bắt đầu bằng các chữ cái từ $A$ đến $G$, từ $H$ đến $N$ và từ $O$ đến $Z$ có thể đăng ký bất kỳ lúc nào trong khoảng thời gian tương ứng từ 8h đến 11h, từ 11h đến 14h, từ 11h đến 17h. Giả sử $R$ là quan hệ chứa $(x,y)$ nếu và chỉ nếu các sinh viên $x$ và $y$ có tên bắt đầu bằng chữ cái trong cùng một khối nói ở trên. Do đó, $x$ và $y$ có thể đăng ký cùng một khoảng thời gian nếu và chỉ nếu $(x,y) \in R$. Dễ dàng thấy rằng $R$ là phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Hơn thế nữa, $R$ đã chia tập các sinh viên thành ba khối tùy thuộc vào chữ cái đầu tiên trong tên của họ. Để biết một sinh viên khi nào có thể đăng ký ta chỉ cần quan tâm sinh viên đó thuộc khối nào trong ba khối ấy, chứ không cần phải quan tâm tới bản thân sinh viên đó.

Các số nguyên $a$ và $b$ quan hệ với nhau bằng phép "đồng dư theo môđun 4" khi $a-b$ chia hết cho 4. Dưới đây chúng ta sẽ chỉ ra rằng quan hệ này cũng là phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Dễ dàng thấy rằng $a$ quan hệ với $b$ nếu và chỉ nếu $a$ và $b$ có cùng số dư khi chia cho 4. Từ đây suy ra rằng quan hệ này tách tập hợp các số nguyên thành 4 lớp khác nhau. Khi chúng ta chỉ cần quan tâm một số nguyên khi chia cho 4 cho số dư nào, ta chỉ cần biết nó thuộc lớp nào chứ không cần biết giá trị của nó bằng bao nhiêu.

Hai quan hệ nêu ở trên – quan hệ $R$ và phép đồng dư theo môđun 4 – là những ví dụ về các quan hệ tương đương, cụ thể là những quan hệ có tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Trong tiết này chúng ta sẽ chỉ ra rằng các quan hệ như vậy sẽ tách các tập thành những lớp rời nhau gồm các phần tử tương đương. Các quan hệ tương đương xuất hiện bất kỳ khi nào chúng ta chỉ cần quan tâm một phần tử của tập thuộc lớp nào chứ không cần quan tâm tới các đặc điểm của nó.

## QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

Trong tiết này chúng ta sẽ nghiên cứu các quan hệ với một tổ hợp đặc biệt các tính chất cho phép chúng được dùng để liên hệ các vật tương đương nhau theo một nghĩa nào đó.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Quan hệ cho trên tập $A$ được gọi là một *quan hệ tương đương* nếu nó là phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Hai phần tử quan hệ với nhau bằng một quan hệ tương đương được gọi là **tương đương** với nhau. (Định nghĩa này có nghĩa vì quan hệ tương đương là đối xứng). Vì một quan hệ tương đương là phản xạ, nên trong một quan hệ tương đương, một phần tử tương đương với chính nó. Hơn thế nữa, một quan hệ tương đương là bắc cầu, nên nếu $a$ và $b$ là tương đương và $b$ và $c$ là tương đương thì $a$ và $c$ là tương đương.

Các ví dụ sau đây minh họa khái niệm quan hệ tương đương.

**Ví dụ 1.** Giả sử $R$ là quan hệ trên tập các xâu chữ cái tiếng Anh sao cho $aRb$ nếu và chỉ nếu $l(a) = l(b)$, ở đây $l(x)$ là chiều dài của xâu $x$. Hỏi $R$ có phải là một quan hệ tương đương không ?

*Giải:* Vì $l(a) = l(a)$, suy ra $aRa$ với mọi xâu $a$, vậy $R$ là phản xạ. Tiếp sau, giả sử rằng $aRb$, sao cho $l(a) = l(b)$. Khi đó $bRa$ vì $l(b) = l(a)$, vậy $R$ là đối xứng. Cuối cùng, giả sử rằng $aRb$ và $bRc$. Khi đó $l(a) = l(b)$ và $l(b) = l(c)$. Do đó $l(a) = l(c)$, nghĩa là $aRc$. Vậy $R$ là bắc cầu. Vì $R$ là phản xạ, đối xứng và bắc cầu nên nó là một quan hệ tương đương.

■

**Ví dụ 2.** Cho $R$ là một quan hệ trên tập các số nguyên sao cho $aRb$ nếu và chỉ nếu $a = b$ hoặc $a = -b$. Trong Tiết 6.1 ta đã chứng minh rằng $R$ là phản xạ, đối xứng và bắc cầu, vậy $R$ là một quan hệ tương đương.

■

**Ví dụ 3.** Cho $R$ là một quan hệ trên tập các số thực sao cho $aRb$ nếu và chỉ nếu $a - b$ là một số nguyên. $R$ có là một quan hệ tương đương không ?

*Giải:* Vì $a - a = 0$ là một số nguyên với mọi số thực $a$, nên $R$ là phản xạ. Bây giờ giả sử rằng $aRb$. Khi đó $a - b$ là một số nguyên, sao cho $b - a$ cũng là một số nguyên. Vậy $bRa$ nên $R$ là đối xứng. Nếu $aRb$ và $bRc$, thì $a - b$ và $b - c$ là các số nguyên. Do đó, $a - c = (a - b) + (b - c)$

cũng là một số nguyên. Vậy $aRc$, tức là $R$ là bắc cầu. Do đó, $R$ là một quan hệ tương đương.

■

Một trong những quan hệ tương đương được dùng rộng rãi nhất là phép đồng dư theo môđun $m$, với $m$ là một số nguyên dương lớn hơn 1.

**Ví dụ 4.** *Đồng dư theo môđun m* : Cho $m$ là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng quan hệ

$$R = \{(a,b) \mid a \equiv b \pmod{m}\}$$

là một quan hệ tương đương trên tập các số nguyên.

*Giải:* Từ Tiết 2.3 ta đã biết rằng $a \equiv b \pmod{m}$ nếu và chỉ nếu $a - b$ chia hết cho $m$. Chú ý rằng $a - a = 0$ chia hết cho $m$, vì $0 = 0.m$, nên $a \equiv a \pmod{m}$, *vậy* $R$ là phản xạ. Bây giờ giả sử $a \equiv b \pmod{m}$. Khi đó $a - b$ chia hết cho $m$, nghĩa là $a - b = km$, với $k$ là một số nguyên. Từ đó suy ra $b - a = -km$, vậy $b \equiv a \pmod{m}$. Do đó, $R$ là đối xứng. Tiếp theo, giả thiết rằng $a \equiv b \pmod{m}$ và $b \equiv c \pmod{m}$. Khi đó $a - b$ và $b - c$ đều chia hết cho $m$. Do đó, tồn tại các số nguyên $k$ và $l$ sao cho $a \quad b = km$ và $b - c = lm$. Cộng hai phương trình trên với nhau cho thấy $a - c = (a - b) + (b - c) = km + lm = (k + l)m$, suy ra $a \equiv c \pmod{m}$. Do đó $R$ là bắc cầu. Suy ra, quan hệ đồng dư theo mod $m$ là một quan hệ tương đương.

■

## CÁC LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho $A$ là tập tất cả các sinh viên ở trường bạn đã tốt nghiệp phổ thông. Xét quan hệ $R$ trên $A$ gồm tất cả các cặp $(x,y)$ trong đó $x$ và $y$ tốt nghiệp ở cùng một trường phổ thông. Với sinh viên $x$ đã cho, ta có thể lấy một tập các sinh viên tương đương với $x$ đối với $R$. Tập này gồm tất cả các sinh viên đã tốt nghiệp phổ thông ở cùng trường với $x$. Tập con này của $A$ được gọi là một lớp tương đương của quan hệ đó.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Cho $R$ là một quan hệ tương đương trên tập $A$. Tập tất cả các phần tử có quan hệ với một phần tử $a$ của $A$ được gọi là *một lớp tương đương* của $a$. Lớp tương đương của $a$ đối với $R$ được ký hiệu là $[a]_R$. Khi chỉ xét một quan hệ, ta sẽ bỏ chỉ số dưới $R$ của ký hiệu trên mà chỉ viết $[a]$ cho lớp tương đương đó. Nói cách khác, nếu $R$ là một quan hệ tương đương trên tập $A$, thì lớp tương đương của phần tử $a$ là

$$[a]_R = \{s \mid (a,s) \in R\}$$

Nếu $b \in [a]_R$ thì $b$ được gọi là **đại diện** của lớp tương đương đó.

**Ví dụ 5**. Xác định lớp tương đương của một số nguyên đối với quan hệ tương đương cho trong Ví dụ 2.

*Giải.* Vì một số nguyên tương đương với chính nó và số đối của nó trong quan hệ tương đương đó, suy ra $[a] = \{-a, a\}$. Tập này chứa hai số nguyên phân biệt, trừ trường hợp $a = 0$. Ví dụ, $[7] = \{-7, 7\}$ ; $[-5] = \{-5, 5\}$ và $[0] = \{0\}$.

**Ví dụ 6.** Xác định các lớp tương đương của 0 và 1 đối với quan hệ đồng dư theo modun 4.

*Giải:* Lớp tương đương của 0 chứa tất cả các số nguyên $a$ sao cho $a \equiv 0 \pmod 4$. Các số nguyên thuộc lớp này chính là các số nguyên chia hết cho 4. Từ đó, lớp tương đương của 0 đối với quan hệ này là :

$$[0] = \{\ \ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$$

Lớp tương đương của 1 chứa tất cả các số nguyên sao cho $a \equiv 1 \pmod 4$. Các số nguyên thuộc lớp này là những số khi chia cho 4 có số dư là 1. Từ đó, lớp tương đương của 1 đối với quan hệ này là :

$$[1] = \{\ \ldots, -7, -3, 1, 5, 9\ \ldots\}$$

■

Trong Ví dụ 6 các lớp tương đương của 0 và 1 đối với quan hệ đồng dư theo môđun 4 có thể dễ dàng tổng quát hóa bằng cách thay 4 bằng một số nguyên dương $m$ bất kỳ. Các lớp tương đương của quan hệ đồng dư theo modun $m$ được gọi là các **lớp đồng dư theo môđun m**. Lớp đồng dư của số nguyên $a$ theo môđun $m$ được ký hiệu là $[a]_m$. Ví dụ, từ Ví dụ 6, suy ra rằng $[0]_4 = \{\ \ldots, -8, -4, 0, 4, 8\ \ldots\}$ và $[1]_4 = \{\ldots, -7, -3, 1, 5, 9\ \ldots\}$.

## CÁC LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ SỰ PHÂN HOẠCH

Cho $A$ là tập các sinh viên ở trường bạn đã đăng ký học chính xác chỉ ở một ngành và giả sử $R$ là quan hệ trên $A$ chứa các cặp $(x, y)$ trong đó $x$ và $y$ là các sinh viên học cùng một ngành. Khi này $R$ là một quan hệ tương đương – điều này bạn đọc nên tự chứng minh lấy. Chúng ta có thể thấy rằng $R$ sẽ tách tất cả các sinh viên thuộc tập $A$ thành các tập con rời nhau, trong đó mỗi một tập con chứa tất cả các sinh viên theo học một ngành xác định. Ví dụ, một tập con chứa các sinh viên đăng ký (chỉ học) ngành tin học và một tập con thứ hai chứa tất cả các sinh viên đăng ký học ngành lịch sử. Hơn nữa, các tập con này là các lớp tương đương của $R$. Ví dụ này minh họa các lớp tương đương của một quan hệ tương đương phân hoạch một tập thành các tập con không rỗng, rời nhau như thế nào. Dưới đây chúng ta sẽ trình bày các khái niệm đó một cách chính xác hơn.

Cho $R$ là một quan hệ trên tập $A$. Định lý sau chứng tỏ rằng các lớp tương đương của hai phần tử thuộc $A$ hoặc là đồng nhất hoặc là rời nhau.

**ĐỊNH LÝ 1.** Cho $R$ là một quan hệ tương đương trên tập $A$. Các mệnh đề sau là tương đương :

(i) $aRb$

(ii) $[a] = [b]$

(iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$.

***Chứng minh***: Trước hết ta hãy chứng minh rằng (*i*) kéo theo (*ii*). Giả sử rằng $aRb$, ta sẽ phải chứng minh rằng $[a] = [b]$ bằng cách chứng tỏ $[a] \subseteq [b]$ và $[b] \subseteq [a]$. Giả sử $c \in [a]$. Khi đó $aRc$. Vì $aRb$ và $R$ là đối xứng nên $bRa$. Hơn nữa, vì $R$ là bắc cầu và $bRa$ và $aRc$, suy ra $bRc$. Do đó, $c \in [b]$, tức là $[a] \subseteq [b]$. Việc chứng minh $[b] \subseteq [a]$ hoàn toàn tương tự, và dành lại cho độc giả như một bài tập.

Thứ hai, ta sẽ chứng minh rằng (*ii*) kéo theo (*iii*). Giả sử rằng $[a] = [b]$. Suy ra $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ vì $[a]$ là không rỗng (do $a \in [a]$ vì $R$ là phản xạ).

Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng (*iii*) kéo theo (*i*). Giả sử rằng $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Khi đó có một phần tử $c$ với $c \in [a]$ và $c \in [b]$. Nói một cách khác, $aRc$ và $cRb$. Vì tính bắc cầu của quan hệ $R$ suy ra $aRb$.

Vì (*i*) kéo theo (*ii*), (*ii*) kéo theo (*iii*) và (*iii*) lại kéo theo (*i*) suy ra ba mệnh đề (*i*), (*ii*) và (*iii*) là tương đương.

Bây giờ chúng ta đã có thể chỉ ra một quan hệ tương đương *phân hoạch* một tập hợp như thế nào. Cho $R$ là một quan hệ tương đương trên tập $A$. Hợp các lớp tương đương của $R$ là toàn bộ tập $A$, vì một phần tử $a \in A$ sẽ thuộc một lớp tương đương riêng của nó, cụ thể là, lớp $[a]_R$.

Nói một cách khác

$$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A.$$

Thêm vào đó, theo Định lý 1, suy ra rằng các lớp tương đương này hoặc là bằng nhau hoặc là rời nhau, sao cho

$$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$$

khi $$[a]_R \neq [b]_R.$$

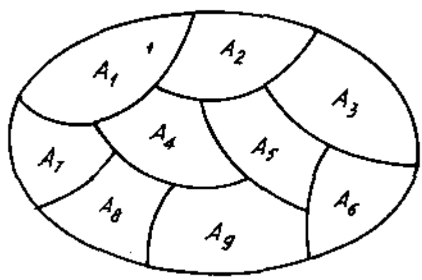
Hai nhận xét trên chứng tỏ rằng các lớp tương đương tạo nên một phân hoạch của tập $A$, vì nó tách $A$ thành các tập con rời nhau. Nói một cách chính xác hơn, một **phân hoạch** của tập $S$ là một tập hợp các tập con không rỗng rời nhau của $S$ và có $S$ như là hợp của chúng. Nói một cách khác, tập hợp các tập con $A_i$, $i \in I$ (ở đây $I$ là tập chỉ số) tạo nên một phân hoạch của $S$ nếu và chỉ nếu :

$$A_i \neq \varnothing \quad \text{với} \quad i \in I$$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \text{khi } i \neq j,$$

và $$\bigcup_{i \in I} A_i = S.$$

(Ở đây ký hiệu $\bigcup_{i \in I} A_i$ biểu diễn hợp của các tập con $A_i$ đối với mọi $i \in I$). Hình 1 minh họa khái niệm phân hoạch của một tập hợp.




*Hình 1.* Sự phân hoạch một tập hợp.

**Ví dụ 7.** Giả sử $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Tập hợp các tập con $A_1 = \{1,2,3\}$, $A_2 = \{4,5\}$ và $A_3 = \{6\}$ tạo nên một phân hoạch của $S$, vì các tập con này đều rời nhau và hợp của chúng chính là $S$.

■

Chúng ta đã thấy rằng các lớp tương đương của một quan hệ tương đương trên một tập tạo nên sự phân hoạch của tập đó. Các tập con trong phân hoạch này là các lớp tương đương. Ngược lại, mỗi một phân hoạch của một tập hợp đều có thể được dùng để tạo nên một quan hệ tương đương. Hai phần tử là tương đương đối với quan hệ này nếu và chỉ nếu chúng thuộc cùng một tập con của phân hoạch đó.

Để thấy điều này, ta giả sử rằng $\{A_i \mid i \in I\}$ là một phân hoạch của $S$. *Giả sử* $R$ là một quan hệ trên $S$ chứa cặp $(x,y)$ với $x$ và $y$ thuộc cùng một tập con $A_i$ trong phân hoạch nói trên. Để chứng minh $R$ là một quan hệ tương đương ta cần phải chứng minh rằng $R$ có tính phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Ta thấy rằng $(a,a) \in R$ với mọi $a \in S$ và $a$ ở trong cùng một tập con như chính nó. Do đó, $R$ là phản xạ. Nếu $(a, b) \in R$ thì $b$ và $a$ ở trong cùng một tập con của phân hoạch, sao cho $(b,a)$ cũng thuộc $R$. Do đó, $R$ là đối xứng. Nếu $(a,b) \in R$ và $(b,c) \in R$ thì $a$ và $b$ ở trong cùng một tập con $X$ trong phân hoạch và $b$ và $c$ ở trong cùng một tập con $Y$ trong phân hoạch đó. Vì các tập con trong một phân hoạch đều rời nhau mà $b$ lại thuộc cả $X$ lẫn $Y$, *suy ra* $X = Y$. Do đó, $a$ và $c$ thuộc cùng một tập con của phân hoạch, vậy $(a, c) \in R$. Do đó $R$ là bắc cầu.

Từ những điều trên suy ra $R$ là một quan hệ tương đương. Các lớp tương đương của $R$ bao gồm các tập con của $S$ chứa các phần tử có quan hệ và theo định nghĩa của $R$, đó là các tập con của phân hoạch. Định lý 2 dưới đây sẽ tổng kết các mối liên hệ mà ta vừa thiết lập giữa các quan hệ tương đương và sự phân hoạch.

**ĐỊNH LÝ 2.** Cho $R$ là một quan hệ tương đương trên tập $S$. Khi đó các lớp tương đương của $R$ sẽ lập nên một phân hoạch của $S$. Ngược lại, với một phân hoạch đã cho $\{A_i \mid i \in I\}$ của tập $S$, tồn tại một quan hệ tương đương $R$ có các tập con $A_i$ là các lớp tương đương của nó.

Các lớp đồng dư theo mođun $m$ là một minh họa rất hữu ích cho Định lý 2. Có $m$ lớp đồng dư khác nhau theo môđun $m$, tương ứng với $m$ số dư khả dĩ khi chia một số nguyên cho $m$. $m$ lớp đồng dư đó được ký hiệu bởi $[0]_m$, $[1]_m$, ..., $[m-1]_m$. Chúng tạo ra một phân hoạch của tập các số nguyên.

**Ví dụ 8**. Xác định các tập trong phân hoạch các số nguyên tạo bởi quan hệ đồng dư theo môđun 4.

***Giải:*** Có bốn lớp đồng dư, tương ứng là $[0]_4$, $[1]_4$, $[2]_4$ và $[3]_4$. Đó là các tập hợp :

$$[0]_4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8 ...\}$$

$$[1]_4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9 ...\}$$

$$[2]_4 = \{..., -6, -2, 2, 6, 10 ...\}$$

$$[3]_4 = \{..., -5, -1, 3, 7, 11 ...\}$$

Các lớp đồng dư này rời nhau và mỗi số nguyên chỉ thuộc chính xác một trong 4 tập hợp đó. Nói một cách khác, như Định lý 2 đã khẳng định, các lớp đồng dư này tạo nên một phân hoạch.

■

## BÀI TẬP

1. Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập {0,1,2,3} cho dưới đây là quan hệ tương đương ? Xác định các tính chất của một quan hệ tương đương mà các quan hệ khác không có

   a) {(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)}

   b) {(0,0), (0,2), (2,0), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3)}

   c) {(0,0), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,3)}

   d) {(0,0), (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)}

   e) {(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,2), (3,3)}.

2. Các quan hệ nào trong số các quan hệ trên tập mọi người cho dưới đây là các quan hệ tương đương. Xác định các tính chất của một quan hệ tương đương mà các quan hệ khác không có.

   a) $\{(a,b) \mid a$ và $b$ cùng tuổi$\}$
   b) $\{(a,b) \mid a$ và $b$ có cùng bố mẹ$\}$
   c) $\{(a,b) \mid a$ và $b$ có bố mẹ chung$\}$
   d) $\{(a,b) \mid a$ và $b$ đã gặp nhau$\}$
   e) $\{(a,b) \mid a$ và $b$ nói cùng một thứ tiếng$\}$

3. Cũng hỏi như trên đối với các quan hệ trên tập các hàm từ **Z** đến **Z** cho dưới đây :

   a) $\{(f,g) \mid f(1) = g(1)\}$

   b) $\{(f,g) \mid f(0) = g(0)$ hoặc $f(1) = g(1)\}$

   c) $\{(f,g) \mid f(x) - g(x) = 1, \forall x \in \mathbf{Z}\}$

   d) $\{(f,g) \mid f(x) - g(x) = C$ với một $C$ nào đó thuộc $\mathbf{Z}$ và $\forall x \in \mathbf{Z}\}$

   e) $\{(f,g) \mid f(0) = g(1)$ và $f(1) = g(0)\}$.

4. Hãy định nghĩa ba quan hệ tương đương trên tập các sinh viên trong lớp học môn toán rời rạc của bạn khác với các quan hệ đã nói trong

phần lý thuyết ở trên. Xác định các lớp tương đương của các quan hệ tương đương đó.

5. Giả sử $A$ là một tập hợp không rỗng và $f$ là một hàm có $A$ là miền xác định của nó. Giả sử $R$ là một quan hệ trên $A$ gồm tất cả các cặp $(x,y)$ với $f(x) = f(y)$.

   a) Chứng minh rằng $R$ là một quan hệ tương đương trên $A$

   b) Xác định các lớp tương đương của $R$.

6. Cho $A$ là một tập không rỗng và $R$ là một quan hệ tương đương trên $A$. Chứng minh rằng tồn tại một hàm $f$ có $A$ là miền xác định sao cho $(x,y) \in R$ nếu và chỉ nếu $f(x) = f(y)$.

7. Chứng minh rằng quan hệ $R$ chứa tất cả các cặp $(x,y)$ trong đó $x$ và $y$ là các xâu bit có chiều dài bằng ba hoặc lớn hơn và có ba bit đầu tiên như nhau là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các xâu bit có chiều dài là ba hoặc lớn hơn.

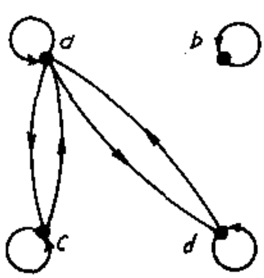
8. Chứng minh rằng quan hệ $R$ gồm tất cả các cặp $(x,y)$ trong đó $x$ và $y$ là các xâu bit có chiều dài là 3 hoặc lớn hơn với các bit trùng nhau có thể trừ ba bit đầu tiên là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các xâu bit.

9. Chứng minh rằng sự tương đương của các mệnh đề là một quan hệ tương đương trên tập tất cả các mệnh đề phức hợp.

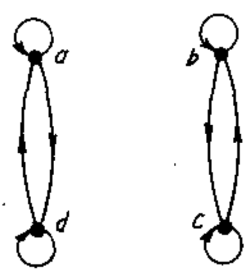
10. Cho $R$ là quan hệ trên tập tất cả các cặp số nguyên dương được sắp sao cho $((a,b), (c,d)) \in R$ nếu và chỉ nếu $ad = bc$. Chứng minh rằng $R$ là một quan hệ tương đương.

*Trong các Bài tập từ 11 – 13 hãy xác định xem quan hệ được biểu diễn bởi các đồ thị có hướng cho dưới đây có là quan hệ tương đương không ?*

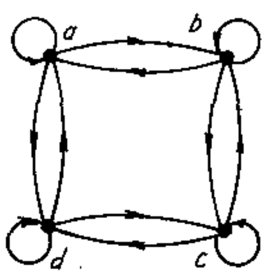
**11.**




**12.**




**13.**



**14.** Xác định xem các quan hệ được biểu diễn bởi các ma trận cho dưới đây có là một quan hệ tương đương không ?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**15.** Chứng tỏ rằng quan hệ $R$ trên tập tất cả các xâu bit sao cho $sRt$ nếu và chỉ nếu $s$ và $t$ chứa cùng một số các số 1 là một quan hệ tương đương.

**16.** Xác định các lớp tương đương của quan hệ tương đương cho trong Bài tập 1.

**17.** Cũng hỏi như trên với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 2.

**18.** Cũng hỏi như trên với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 3.

**19.** Xác định lớp tương đương của xâu bit 011 đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 15.

**20.** Xác định các lớp tương đương của các xâu bit sau đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 7.

a) 010 b) 1011

c) 11111 d) 01010101.

**21.** Mô tả các lớp tương đương của các xâu bit trong Bài tập 20 đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 8.

**22.** Xác định các lớp đồng dư $[4]_m$ khi m là

a) 2 b) 3

c) 6 d) 8.

**23.** Mô tả các lớp đồng dư theo môdun 6.

**24.** a) Xác định lớp tương đương của (1,2) đối với quan hệ tương đương cho trong Bài tập 10.

b) Mô tả các lớp tương đương của quan hệ tương đương $R$ trong Bài tập 10.

**25.** Trong số các tập hợp của các tập con sau, tập hợp nào là phân hoạch của $\{1,2,3,4,5,6\}$ ?

a) $\{1,2\}$, $\{2,3,4\}$, $\{4,5,6\}$
b) $\{1\}$, $\{2,3,6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$
c) $\{2,4,6\}$, $\{1,3,5\}$
d) $\{1,4,5\}$, $\{2,6\}$

**26.** Trong số các tập hợp của các tập con sau, tập hợp nào là phân hoạch của tập các số nguyên ?

a) Tập con các số chẵn và tập con các số lẻ

b) Tập con các số nguyên dương và tập các số nguyên âm.

c) Tập con các số nguyên chia hết cho 3, tập con các số nguyên chia cho 3 còn dư 1, tập con các số nguyên chia cho 3 còn dư 2.

d) Tập con các số nguyên nhỏ hơn $-100$, tập con các số nguyên có trị tuyệt đối không vượt quá 100 và tập con các số nguyên lớn hơn 100.

*Một phân hoạch $P_1$ được gọi là* **cái mịn** *của phân hoạch $P_2$ nếu mỗi tập trong $P_1$ đều là một tập con của một trong các tập của $P_2$.*

**27.** Chứng minh rằng sự phân hoạch tạo bởi các lớp tương đương theo môđun 6 là cái mịn của phân hoạch tạo bởi các lớp đồng dư theo môđun 3.

**28.** Giả sử $R_1$ và $R_2$ là các quan hệ tương đương trên tập $A$. Cho $P_1$ và $P_2$ là 2 phân hoạch tương ứng với $R_1$ và $R_2$. Chứng minh rằng $R_1 \subseteq R_2$ nếu và chỉ nếu $P_1$ là cái mịn của $P_2$.

**29.** Tìm quan hệ tương đương nhỏ nhất trên tập $\{a,b,c,d,e\}$ chứa quan hệ $\{(a,b),\ (a,c),\ (d,e)\}$.

**30.** Giả sử $R_1$ và $R_2$ là hai quan hệ tương đương trên tập $S$. Xác định xem các tổ hợp sau của $R_1$ và $R_2$ có nhất thiết phải là một quan hệ tương đương hay không ?

a) $R_1 \cup R_2$  b) $R_1 \cap R_2$  c) $R_1 \oplus R_2$

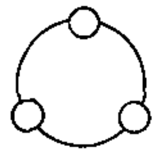
**31.** Xét quan hệ tương đương trong Ví dụ 3, cụ thể là

$R = \{(x,y) \mid x - y$ là một số nguyên$\}$

a) Xác định lớp tương đương của 1 đối với quan hệ tương đương đó.

b) Xác định lớp tương đương của 1/2 đối với quan hệ tương đương đó.

**32*.** Một vòng đeo tay có ba hạt cườm, mỗi hạt có màu hoặc là đỏ, hoặc là trắng hoặc là xanh như trong hình minh họa bên. Hãy định nghĩa một quan hệ $R$ giữa các vòng đeo tay như sau : $(B_1, B_2)$ trong đó $B_1$ và $B_2$ là các vòng đeo tay thuộc $R$ nếu và chỉ nếu $B_2$ nhận được từ $B_1$ bằng cách quay nó hoặc quay rồi sau đó lấy ảnh gương của nó.




a) Chứng minh rằng $R$ là một quan hệ tương đương

b) Xác định các lớp tương đương của $R$.

**33*.** Cho $R$ là quan hệ trên tập tất cả các bàn cờ $2 \times 2$ được tô màu, trong đó mỗi ô (trong số 4 ô) được tô đỏ hoặc xanh sao cho $(C_1, C_2)$ – với $C_1$ và $C_2$ là các bàn cờ $2 \times 2$ nói trên – thuộc $R$ nếu và chỉ nếu $C_2$ có thể nhận được từ $C_1$ bằng cách hoặc quay bàn cờ, hoặc quay rồi sau đó lấy ảnh đối xứng gương của nó.

a) Chứng minh $R$ là một quan hệ tương đương

b) Tìm các lớp tương đương của $R$.

**34.** a) Cho $R$ là một quan hệ trên tập các hàm từ $\mathbf{Z}^+$ đến $\mathbf{Z}^+$ sao cho $(f, g) \in R$ nếu và chỉ nếu $f$ là $\theta(g)$ (xem phần dẫn giải trước Bài tập 22 ở Tiết 1.8). Chứng minh rằng $R$ là một quan hệ tương đương.

b) Mô tả lớp tương đương chứa $f(n) = n^2$ đối với quan hệ tương đương cho ở câu a).

**35.** Xác định số các quan hệ tương đương khác nhau trên tập ba phần tử bằng cách liệt kê ra các quan hệ đó.

**36.** Cũng hỏi như trên đối với tập gồm 4 phần tử.

**37*.** Khi tạo một bao đóng bắc cầu của một bao đóng đối xứng của một bao đóng phản xạ của một quan hệ, có nhất thiết nhận được một quan hệ tương đương không ?

**38***. Khi lập một bao đóng đối xứng của một bao đóng phản xạ của một bao đóng bắc cầu của một quan hệ, có nhất thiết nhận được một quan hệ tương đương không ?

**39.** Giả sử ta dùng Định lý 2 để tạo một phân hoạch $P$ từ một quan hệ tương đương $R$. Xác định quan hệ tương đương $R'$ tạo thành nếu chúng ta lại dùng Định lý 2 để tạo một quan hệ tương đương từ $P$.

**40.** Giả sử ta dùng Định lý 2 để tạo một quan hệ tương đương R từ phân hoạch $P$. Hãy xác định phân hoạch $P'$ tạo thành nếu ta lại dùng Định lý 2 để tạo một phân hoạch từ $R$.

**41.** Lập một thuật toán để tìm một quan hệ tương đương nhỏ nhất chứa một quan hệ đã cho.

**42.** Cho $p(n)$ là ký hiệu số các quan hệ tương đương khác nhau trên một tập $n$ phần tử (và theo Định lý 2 thì cũng chính là số các phân hoạch của một tập n phần tử). Chứng minh rằng $p(n)$ thỏa mãn công thức truy hồi sau :

$$p(n) = \sum_{j=0}^{n-1} C(n-1, j)p(n-j-1)$$

với điều kiện ban đầu $p(0) = 1$

(Chú ý : các số $p(n)$ được gọi là *các số Bell* theo tên nhà toán học Mỹ E.T.Bell).

**43.** Dùng Bài tập 42 tìm số các quan hệ tương đương khác nhau trên tập $n$ phần tử với $n$ là số nguyên dương không vượt quá **10**.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

**1.** a) Quan hệ trên một tập là gì ?

b) Có bao nhiêu quan hệ trên một tập $n$ phần tử ?

**2.** a) Quan hệ phản xạ là gì ?

b) Quan hệ đối xứng là gì ?

c) Quan hệ phản đối xứng là gì ?

d) Quan hệ bắc cầu là gì ?

**3.** Cho một ví dụ về một quan hệ trên tập {1,2,3,4} có các tính chất sau:

a) phản xạ, đối xứng và không bắc cầu

b) không là phản xạ, nhưng đối xứng và bắc cầu

c) phản xạ, phản đối xứng và không bắc cầu

d) phản xạ, đối xứng và bắc cầu

e) phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.

**4.** a) Có bao nhiêu quan hệ phản xạ trên một tập $n$ phần tử ?

b) Có bao nhiêu quan hệ đối xứng trên một tập $n$ phần tử

c) Có bao nhiêu quan hệ phản đối xứng trên một tập $n$ phần tử.

**5.** a) Hãy giải thích xem làm thế nào có thể dùng một quan hệ $n$-ngôi để biểu diễn thông tin về các sinh viên của một trường đại học.

b) Làm thế nào có thể dùng quan hệ 5-ngôi chứa tên của các sinh viên, địa chỉ, số điện thoại, ngành học và điểm bình quân của họ để lập một quan hệ 3-ngôi chỉ chứa tên, ngành học và điểm bình quân của họ ?

c) Làm thế nào có thể dùng quan hệ 4-ngôi chứa tên, địa chỉ, số điện thoại và ngành học của các sinh viên cùng với quan hệ 4-ngôi chứa tên, số thẻ sinh viên, ngành học và số các giờ chứng chỉ để tổ hợp thành một quan hệ $n$-ngôi, duy nhất.

**6.** a) Giải thích xem làm thế nào có thể dùng các ma trận zêrô-một để biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn.

b) Giải thích xem làm thế nào có thể dùng các ma trận zêrô-một biểu diễn một quan hệ để xác định được quan hệ đó có là phản xạ, đối xứng và/hoặc phản đối xứng hay không ?

**7.** a) Hãy giải thích xem làm thế nào có thể dùng các đồ thị có hướng để biểu diễn một quan hệ cho trên một tập hữu hạn.

b) Hãy giải thích xem làm thế nào có thể dùng các đồ thị có hướng biểu diễn một quan hệ để xác định được một quan hệ có là phản xạ, đối xứng và/hoặc phản đối xứng hay không ?

**8.** a) Hãy nêu định nghĩa của bao đóng phản xạ và bao đóng đối xứng của một quan hệ.

b) Làm thế nào có thể xây dựng được bao đóng phản xạ của một quan hệ.

c) Làm thế nào có thể xây dựng được bao đóng đối xứng của một quan hệ.

d) Tìm bao đóng phản xạ và bao đóng đối xứng của quan hệ $\{(1,2), (2,3), (2,4), (3,1)\}$ trên tập $\{1,2,3,4\}$.

**9.** a) Nêu định nghĩa của bao đóng bắc cầu của một quan hệ.

b) Một bao đóng bắc cầu của một quan hệ có thể nhận được bằng cách gộp vào tất cả các cặp $(a,c)$ sao cho $(a,b)$ và $(b,c)$ thuộc quan hệ đó không ?

c) Mô tả hai thuật toán tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ.

d) Tìm bao đóng bắc cầu của quan hệ $\{(1,1), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1)\}$.

**10.** a) Nêu định nghĩa của quan hệ tương đương.

b) Các quan hệ nào trên tập $\{a,b,c,d\}$ là quan hệ tương đương chứa $(a, b)$ và $(b,d)$ ?

**11.** a) Chứng minh rằng quan hệ đồng dư theo môđun $m$ là một quan hệ tương đương với mọi $m$ nguyên dương.

b) Chứng minh rằng quan hệ $\{(a,b) \mid a \equiv \pm b \text{ (môđun 7)}\}$ là một quan hệ tương đương trên tập các số nguyên.

**12.** a) Thế nào là các lớp tương đương của một quan hệ tương đương ?

b) Xác định các lớp tương đương của quan hệ đồng dư theo môđun 5.

c) Xác định các lớp tương đương của quan hệ tương đương cho trong Câu hỏi 11b.

**13.** Giải thích mối quan hệ giữa các quan hệ tương đương trên một tập và các phân hoạch trên tập đó.

## *BÀI TẬP BỔ SUNG*

**1.** Cho S là tập tất cả các xâu chữ cái tiếng Anh. Hãy xác định xem các quan hệ cho dưới đây có là phản xạ, không phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và/hoặc bắc cầu hay không ?

a) $R_1 = \{(a,b) \mid a$ và $b$ không có chữ cái nào chung$\}$

b) $R_2 = \{(a,b) \mid a$ và $b$ có chiều dài khác nhau$\}$

c) $R_3 = \{(a,b) \mid a$ dài hơn $b\}$

**2.** Xây dựng một quan hệ trên tập $\{a,b,c,d\}$ có các tính chất sau :

a) phản xạ, đối xứng, nhưng không bắc cầu

b) không phản xạ, đối xứng và bắc cầu

c) không phản xạ, phản đối xứng và không bắc cầu.

d) phản xạ, không đối xứng cũng không phản đối xứng, bắc cầu.

e) không là phản xạ, không phản xạ, đối xứng, phản đối xứng và không bắc cầu.

**3.** Chứng minh rằng quan hệ trên $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ được định nghĩa bởi $(a,b)R(c, d)$ nếu và chỉ nếu $a + d = b + c$ là một quan hệ tương đương.

**4.** Chứng minh rằng một tập con của một quan hệ phản đối xứng cũng là một quan hệ phản đối xứng.

**5.** Cho $R$ là một quan hệ phản xạ trên tập $A$. Chứng minh rằng $R \subseteq R^2$.

**6.** Giả sử $R_1$ và $R_2$ là hai quan hệ phản xạ trên tập $A$. Chứng minh rằng $R_1 \oplus R_2$ là một quan hệ không phản xạ.

**7.** Giả sử $R_1$ và $R_2$ là hai quan hệ phản xạ trên tập $A$. Hỏi $R_1 \cap R_2$ có là phản xạ không? $R_1 \cup R_2$ có là phản xạ không ?

**8.** Giả sử $R$ là một quan hệ đối xứng trên tập $A$. Hỏi $\overline{R}$ có là đối xứng không ?

**9.** Cho $R_1$ và $R_2$ là hai quan hệ đối xứng. $R_1 \cap R_2$ có là đối xứng không? $R_1 \cup R_2$ có là đối xứng không ?

**10.** $R$ được gọi là quan hệ **vòng quanh** nếu $aRb$ và $bRc$ kéo theo $cRa$. Chứng minh $R$ là một quan hệ phản xạ và vòng quanh nếu và chỉ nếu nó là một quan hệ tương đương.

**11.** Chứng minh rằng khóa cơ bản trong một quan hệ $n$-ngôi vẫn là khóa cơ bản trong mọi phép chiếu của quan hệ đó nếu phép chiếu vẫn chứa khóa đó như một trong các trường của nó.

**12.** Khóa cơ bản trong một quan hệ $n$-ngôi có còn là khóa cơ bản trong một quan hệ lớn hơn nhận được bằng cách lấy hợp của quan hệ này với một quan hệ thứ hai không ?

**13.** Chứng minh rằng bao đóng phản xạ của một bao đóng đối xứng của một quan hệ đúng bằng bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ của quan hệ đó.

**14.** Cho $R$ là một quan hệ trên tập tất cả các nhà toán học, chứa các cặp $(a,b)$ nếu và chỉ nếu $a$ và $b$ đã viết chung một bài báo.

a) Mô tả quan hệ $R^2$

b) Mô tả quan hệ $R^*$

c) **Số Erdos** của một nhà toán học bằng 1 nếu nhà toán học đó đã viết chung một bài báo với nhà toán học Hungari Paul Erdos – người đã viết rất nhiều bài báo khoa học, số đó bằng 2 nếu nhà toán học đó không viết chung một bài báo nào với Erdos, nhưng lại viết chung với một ai đó đã từng viết chung với Erdos một bài báo, v.v... (trừ trường hợp số Erdos của chính Erdos bằng 0). Hãy cho một định nghĩa của số Erdos qua các đường đi trong $R$.

**15*.** a) Hãy nêu một ví dụ để chứng tỏ rằng bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của một quan hệ không nhất thiết phải bằng bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của quan hệ đó.

b) Tuy nhiên, hãy chứng minh rằng bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của một quan hệ cần phải chứa bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của quan hệ đó.

**16.** a) Cho $S$ là tập các chương trình con của một chương trình máy tính. Ta định nghĩa quan hệ $R$ như sau : $\mathbf{P}R\mathbf{Q}$ nếu chương trình con **P** trong quá trình thực hiện nó phải gọi chương trình con **Q**. Hãy mô tả bao đóng bắc cầu của $R$.

b) Đối với các chương trình con **P** nào thì (**P**, **P**) thuộc bao đóng bắc cầu của $R$.

c) Mô tả bao đóng phản xạ của bao đóng bắc cầu của $R$.

**17.** Giả sử rằng $R$ và $S$ là hai quan hệ trên tập $A$ với $R \subseteq S$ sao cho các bao đóng của $R$ và $S$ đối với một tính chất **P** nào đó đều tồn tại. Chứng minh rằng bao đóng của $R$ đối với **P** là tập con của bao đóng của $S$ đối với **P**.

**18.** Chứng minh rằng bao đóng đối xứng của hợp hai quan hệ là hợp các bao đóng đối xứng của nó.

**19*.** Lập một thuật toán dựa trên khái niệm các đỉnh trong để tìm chiều dài của đường đi dài nhất giữa hai đỉnh trong một đồ thị có hướng hoặc để xác định rằng có những đường đi với chiều dài tùy ý giữa các đỉnh đó.

**20.** Trong số các quan hệ cho trên tập mọi người cho dưới đây, quan hệ nào là quan hệ tương đương ?

a) $\{(x, y) \mid x$ và $y$ sinh cùng ngày giờ$\}$

b) $\{(x, y) \mid x$ và $y$ sinh cùng năm$\}$

c) $\{(x, y) \mid x$ và $y$ ở cùng một thành phố$\}$

**21***. Có bao nhiêu quan hệ tương đương khác nhau cho trên tập hợp với 5 phần tử có đúng ba lớp tương đương khác nhau ?

**22.** Chứng minh rằng $\{(x, y) \mid x - y \in \mathbf{Q}\}$ là một quan hệ tương đương trên tập các số thực với $Q$ là tập hợp các số hữu tỷ. Hãy xác định $[1]$, $[1/2]$ và $[\pi]$.

**23.** Giả sử $P_1 = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ và $P_2 = (B_1, B_2, ... B_n\}$ là hai phân hoạch của một tập $S$. Chứng minh rằng tập các tập con không rỗng có dạng $A_i \cap B_j$ cũng là một phân hoạch của $S$ và phân hoạch này đều là cái mịn của $P_1$ và $P_2$ (xem chú giải ở trước Bài tập 27 của Tiết 6.5).

**24***. Chứng minh rằng bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ của một quan hệ $R$ là quan hệ tương đương nhỏ nhất chứa $R$.

## BÀI TẬP TRÊN MÁY TÍNH

***Viết các chương trình với input và output sau:***

**1.** Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, hãy xác định xem quan hệ đó có là phản xạ và/hoặc không–phản xạ không.

**2.** Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, hãy xác định xem quan hệ đó có là đối xứng và/hoặc phản đối xứng không.

**3.** Cho một ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, xác định xem quan hệ đó có là bắc cầu hay không.

**4.** Cho số nguyên dương $n$, hãy cho hiển thị tất cả các quan hệ trên tập có $n$ phần tử.

**5***. Cho số nguyên dương $n$, hãy xác định số các quan hệ bắc cầu cho trên tập $n$ phần tử.

**6***. Cho số nguyên dương $n$, hãy xác định số các quan hệ tương đương trên tập có $n$ phần tử.

**7***. Cho số nguyên dương $n$, hãy cho hiển thị tất cả các quan hệ tương đương trên tập $n$ số nguyên dương nhỏ nhất.

**8.** Cho một quan hệ $n$-ngôi, tìm hình chiếu của quan hệ này khi chỉ rõ các trường bị xóa.

**9.** Cho một quan hệ $m$-ngôi và một quan hệ $n$-ngôi và một tập các trường chung, tìm hợp của các quan hệ đó đối với các trường chung ấy.

**10.** Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng phản xạ của quan hệ đó.

**11.** Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng đối xứng của quan hệ đó.

**12.** Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của quan hệ đó bằng cách tính hợp các lũy thừa của ma trận biểu diễn quan hệ đó.

**13.** Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn bao đóng bắc cầu của quan hệ đó bằng cách dùng thuật toán Warshall.

**14.** Cho ma trận biểu diễn một quan hệ trên một tập hữu hạn, tìm ma trận biểu diễn quan hệ tương đương nhỏ nhất chứa quan hệ đó.

## TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

***Dùng các chương trình mà bạn đã biết để làm các bài tập sau***

**1.** Cho hiển thị tất cả các quan hệ khác nhau cho trên tập có 4 phần tử.

**2.** Cho hiển thị tất cả các quan hệ phản xạ và đối xứng khác nhau cho trên tập có 6 phần tử.

**3.** Cho hiển thị tất cả các quan hệ phản xạ và bắc cầu cho trên tập 5 phần tử.

**4*.** Hãy xác định có bao nhiêu quan hệ bắc cầu cho trên tập với $n$ phần tử với mọi số nguyên dương $n \leqslant 7$.

**5.** Tìm bao đóng bắc cầu của một quan hệ mà bạn lựa chọn cho trên một tập có ít nhất 20 phần tử. Hoặc dùng một quan hệ tương ứng với các đường nối trực tiếp trong một mạng giao thông hoặc mạng thông tin hoặc dùng một quan hệ phát sinh một cách ngẫu nhiên.

**6.** Tính số các quan hệ tương đương khác nhau cho trên tập có $n$ phần tử, với n là số nguyên dương không vượt quá 20.

7. Cho hiển thị tất cả các quan hệ tương đương cho trên một tập có 7 phần tử.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau :***

1. Bàn về khái niệm quan hệ mờ. Các quan hệ mờ được dùng như thế nào ?

2. Mô tả các nguyên lý cơ bản của cơ sở dữ liệu theo mô hình quan hệ một cách mở rộng và chi tiết hơn so với những điều đã được trình bày trong Tiết 6.2. Cơ sở dữ liệu theo mô hình quan hệ được dùng rộng rãi như thế nào so với các loại cơ sở dữ liệu khác ?

3. Tìm các bài báo gốc của Marshall và của Roy (tiếng Pháp) trong đó họ đã phát triển các thuật toán tìm các bao đóng bắc cầu. Hãy bàn về cách tiếp cận của họ. Tại sao hạn cho rằng cái mà chúng ta gọi là thuật toán Marshall thực tế đã được phát minh một cách độc lập bởi hơn một người ?

4. Mô tả các lớp tương đương có thể được dùng như thế nào để định nghĩa các số hữu tỷ như là các lớp của những cặp số nguyên và các phép tính số học cơ bản được định nghĩa như thế nào theo cách tiếp cận đó (xem Bài tập 10 ở Tiết 6.5).

*CHƯƠNG 7*

# ĐỒ THỊ

Lý thuyết đồ thị là ngành khoa học được phát triển từ lâu nhưng lại có nhiều ứng dụng hiện đại. Những ý tưởng cơ bản của nó được đưa ra từ thế kỷ thứ 18 bởi nhà toán học Thụy Sĩ tên là Leonhard Euler. Ông đã dùng đồ thị để giải quyết bài toán cầu Konigsberg nổi tiếng. Bài toán này sẽ được xem xét trong chương này.

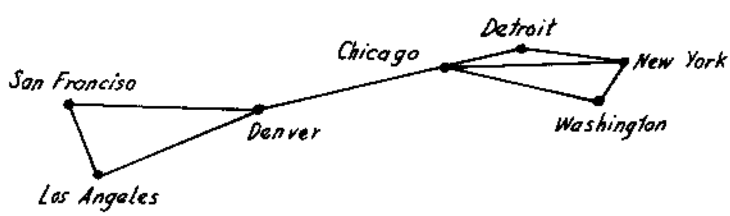
Đồ thị cũng được dùng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Ví dụ, dùng đồ thị để xác định xem có thực hiện một mạch điện trên một bảng điện phẳng được không. Chúng ta cũng có thể phân biệt hai hợp chất hóa học có cùng công thức phân tử nhưng có cấu trúc khác nhau nhờ đồ thị. Chúng ta cũng có thể xác định xem hai máy tính có được nối với nhau bằng một đường truyền thông hay không nếu dùng mô hình đồ thị mạng máy tính. Đồ thị với các trọng số được gán cho các cạnh của nó có thể dùng để giải các bài toán như bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố trong một mạng giao thông. Chúng ta cũng có thể dùng đồ thị để lập lịch thi và phân chia kênh cho các đài truyền hình.

## 7.1. MỞ ĐẦU

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó. Người ta phân loại đồ thị tùy theo đặc tính và số các cạnh nối các cặp đỉnh của đồ thị. Nhiều bài toán thuộc những lĩnh vực rất khác nhau có thể giải được bằng mô hình đồ thị. Chẳng hạn người ta có thể dùng đồ thị để biểu diễn sự cạnh tranh các loài trong một môi trường sinh thái, dùng đồ thị để biểu diễn ai có ảnh hưởng lên ai trong một tổ chức nào đó, và cũng có thể dùng đồ thị để biểu diễn các kết cục của cuộc thi đấu thể thao. Chúng ta cũng sẽ chỉ ra có thể dùng đồ thị để giải các bài toán như bài toán tính số các tổ hợp khác nhau của các chuyến bay giữa hai thành phố trong một mạng hàng không, hay để giải bài toán đi tham quan tất cả các phố của một thành phố sao cho mỗi phố đi qua đúng một lần, hoặc bài toán tìm số các màu cần thiết để tô các vùng khác nhau của một bản đồ.

## CÁC LOẠI ĐỒ THỊ

Bây giờ chúng ta sẽ giới thiệu các loại đồ thị bằng cách đưa ra cách dùng mỗi loại để mô hình các mạng máy tính khác nhau. Giả sử một mạng máy tính gồm các máy tính và các đường điện thoại. Ta có thể biểu diễn vị trí của mỗi máy tính bằng một điểm và mỗi đường điện thoại bằng một cung như trong hình 1.

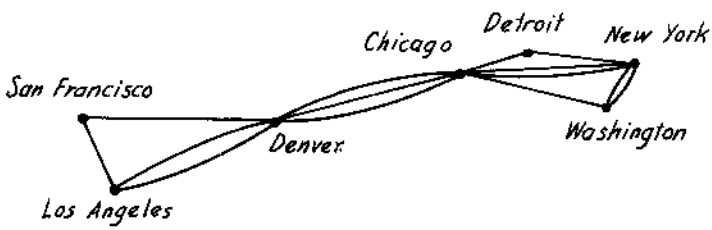



***Hình 1.*** Mạng máy tính.

Trong mạng máy tính này ta thấy có nhiều nhất một đường điện thoại giữa hai máy; mỗi đường hoạt động theo cả hai chiều, và không máy tính nào có đường điện thoại nối đến chính nó. Do vậy mạng này có thể mô hình bằng một **đơn đồ thị**, bao gồm các đỉnh biểu diễn các máy tính và các cạnh vô hướng biểu diễn các đường điện thoại nối hai đỉnh phân biệt và không có hai cạnh nối cùng một cặp đỉnh.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Một đơn đồ thị $G = (V, E)$ gồm một tập không rỗng $V$ mà các phần tử của nó gọi là các đỉnh và một tập $E$ mà các phần tử của nó gọi là các cạnh, đó là các cặp không thứ tự của các đỉnh phân biệt.

Đôi khi có nhiều đường điện thoại giữa các máy tính trong mạng. Đó là khi có sự truyền thông với cường độ cao giữa các máy tính. Mạng với nhiều đường thoại được biểu diễn trên Hình 2. Đơn đồ thị không thể mô hình các mạng như thế này được. Thay vào đó người ta dùng **đa đồ thị**. Đó là đồ thị gồm các đỉnh và các cạnh vô hướng, nhưng có thể có nhiều cạnh nối mỗi cặp đỉnh. Đơn đồ thị là một trường hợp riêng của đa đồ thị.




***Hình** 2.* Mạng máy tính có nhiều đường điện thoại.

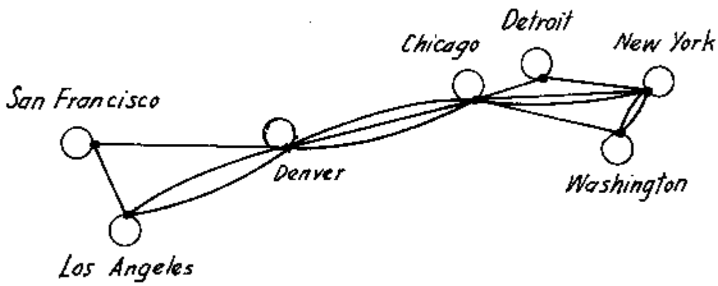
Ta không thể dùng một cặp đỉnh để xác định một cạnh trong đa đồ thị. Định nghĩa đa đồ thị vì vậy có phức tạp hơn một chút.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Một *đa đồ thị* $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh $V$, một tập các cạnh $E$ và một hàm $f$ từ $E$ tới $\{ \{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Các cạnh $e_1$ và $e_2$ được gọi là song song hay cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.

Một mạng máy tính có thể có đường điện thoại từ một máy tới chính nó. Đó là mạng trên Hình 3. Ta không thể dùng đa đồ thị để mô hình các mạng như thế được vì đa đồ thị không chứa **các khuyên**, đó là các cạnh nối một đỉnh với chính nó. Khi đó ta phải dùng một loại đồ thị tổng quát hơn, gọi là **giả đồ thị**.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** *Một giả đồ thị* $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V, một tập các cạnh $E$ và một hàm $f$ từ $E$ tới $\{ \{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Một cạnh là một khuyên nếu $f(e) = \{u\}$ với một đỉnh $u$ nào đó.

Độc giả có thể thấy rằng các cạnh bội trong một giả đồ thị gắn liền với cùng một cặp đỉnh. Tuy nhiên, ta sẽ nói rằng $\{u, v\}$ là một cạnh của đồ thị $G = (V, E)$ nếu có ít nhất một cạnh $e$ sao cho $f(e) = \{u, v\}$. Ta sẽ không phân biệt cạnh $e$ và tập $\{u, v\}$ tương ứng với nó trừ khi đặc tính của các cạnh bội là quan trọng.

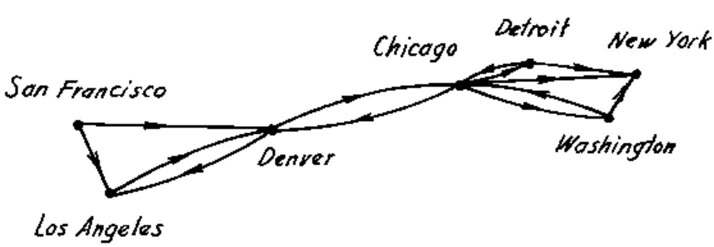



*Hình 3.* Mạng máy tính có các đường nội bộ.

Tóm lại, giả đồ thị là loại đồ thị vô hướng tổng quát nhất vì nó có thể chứa các khuyên và các cạnh bội. Đa đồ thị là loại đồ thị vô hướng có thể chứa cạnh bội nhưng không thể có các khuyên, còn đồ thị đơn là loại đồ thị vô hướng không chứa cạnh bội hoặc các khuyên.

Các đường điện thoại trong một mạng máy tính có thể hoạt động chỉ theo một chiều. Chẳng hạn trên Hình 4 máy chủ ở New York có thể chỉ nhận dữ liệu từ các máy khác mà không thể gửi dữ liệu đi. Khi đó các đường điện thoại hai chiều được biểu diễn bằng một cặp cạnh có chiều ngược nhau.

32 - THTTH



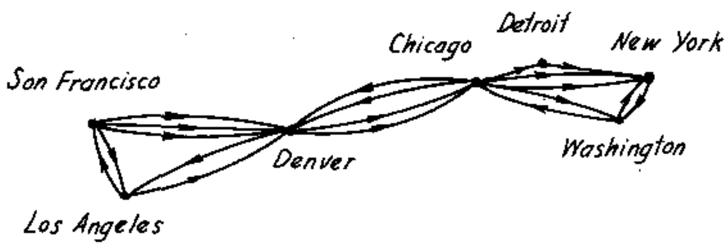

*Hình 4.* Mạng truyền thông có các đường điện thoại một chiều.

Chúng ta dùng đồ thị có hướng để mô hình hóa những mạng như thế. Những cạnh của đồ thị có hướng là các cặp đỉnh có thứ tự. Trong đồ thị có hướng người ta dùng khuyên, tức là một cặp có thứ tự của cùng một đỉnh, nhưng không dùng cạnh bội cùng chiều nối cùng cặp đỉnh.

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Một *đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm tập các đỉnh $V$ và tập các cạnh $E$ là các cặp có thứ tự của các phần tử thuộc $V$.

Cuối cùng trong mạng máy tính có thể có nhiều đường điện thoại sao cho có thể có nhiều đường một chiều từ mỗi địa phương tới máy chủ ở New York và có thể có nhiều đường từ máy chủ tới các máy ở xa. Đó là mạng trên hình 5. Đồ thị có hướng là không đủ để mô hình các mạng loại này, vì trong đồ thị có hướng không chứa các cạnh bội. Khi đó ta cần phải dùng **đa đồ thị có hướng**, trong đó có thể có nhiều các cạnh có hướng từ một đỉnh tới một đỉnh khác (có thể tới chính nó). Định nghĩa đa đồ thị có hướng như sau.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Một *đa đồ thị có hướng* $G = (V, E)$ gồm tập các đỉnh $V$ và tập các cạnh $E$ và một hàm $f$ từ $E$ tới $\{(u, v) \mid u, v \in V\}$. Các cạnh $e_1$ và $e_2$ là các cạnh bội nếu $f(e_1) = f(e_2)$.




Hình 5.

Độc giả đã thấy rằng các cạnh bội có hướng nối cùng một cặp đỉnh. Tuy vậy ta sẽ nói rằng $(u, v)$ là một cạnh của đồ thị $G = (V, E)$ khi nào có ít nhất một cạnh $e$ sao cho $f(e) = (u, v)$. Ta sẽ không phân biệt cạnh $e$ và cặp đỉnh có thứ tự $(u, v)$ trừ khi đặc tính của các cạnh bội là quan trọng.

Các thuật ngữ dùng cho các loại đồ thị khác nhau cho thấy rõ các cạnh của đồ thị có kết hợp với các cặp đỉnh có thứ tự hay không thứ tự, các cạnh bội, các khuyên có được dùng hay không. Định nghĩa các loại đồ thị được tổng kết trong Bảng 1. Vì lý thuyết đồ thị có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau nên có nhiều thuật ngữ khác nhau được dùng đồng thời. Có lẽ các thuật ngữ này tới một ngày nào đó sẽ được chuẩn hóa.

**BẢNG 1. Thuật ngữ đồ thị**

| Loại | Cạnh | Có cạnh bội không? | Có khuyên không? |
|---|---|---|---|
| Đơn đồ thị | Vô hướng | Không | Không |
| Đa đồ thị | Vô hướng | Có | Không |
| Giả đồ thị | Vô hướng | Có | Có |
| Đồ thị có hướng | Có hướng | Không | Có |
| Đa đồ thị có hướng | Có hướng | Có | Có |

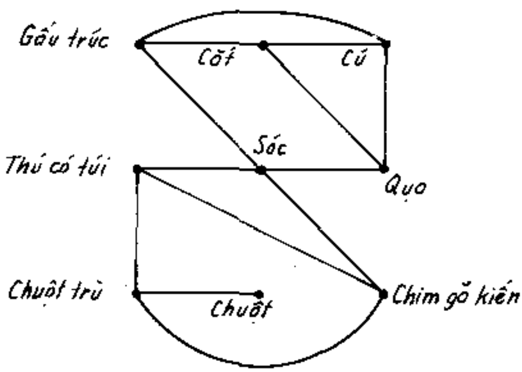
## CÁC MÔ HÌNH ĐỒ THỊ

Trong tiết này chúng ta sẽ giới thiệu một số mô hình đồ thị từ các lĩnh vực ứng dụng khác nhau. Trong các tiết tiếp theo và trong các chương sau chúng ta sẽ nghiên cứu thêm các mô hình khác nhau.

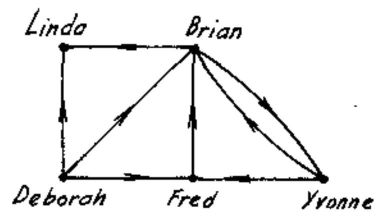
**Ví dụ 1.** *Đồ thị "lấn tổ" trong sinh thái học.* Đồ thị được dùng trong nhiều mô hình có tính đến sự tương tác của các loài vật. Chẳng hạn sự cạnh tranh của các loài trong một hệ sinh thái có thể mô hình hoá bằng **đồ thị "lấn tổ"**. Mỗi loài được biểu diễn bằng một đỉnh. Một cạnh vô hướng nối hai đỉnh nếu hai loài được biểu diễn bằng các đỉnh này là cạnh tranh với nhau (tức là, chúng cùng chung nguồn thức ăn). Đồ thị trên Hình 6 là mô hình của hệ sinh thái rừng. Từ đồ thị này chúng ta thấy sóc và gấu trúc là cạnh tranh với nhau còn quạ và chuột trù thì không.

■

**Ví dụ 2.** *Đồ thị ảnh hưởng.* Khi nghiên cứu tính cách của một nhóm người, ta thấy một số người có thể có ảnh hưởng lên suy nghĩ của những người khác. Đồ thị có hướng được gọi là **đồ thị ảnh hưởng** có thể dùng để mô hình bài toán này. Mỗi người của nhóm được biểu diễn bằng một đỉnh. Khi một người được biểu diễn bằng đỉnh $a$ có ảnh hưởng lên người được biểu diễn bằng đỉnh $b$ thì giữa đỉnh $a$ và đỉnh $b$ được nối bằng một cạnh có hướng. Trên Hình 7 biểu diễn đồ thị ảnh hưởng của các thành viên của một nhóm. Deborah có ảnh hưởng lên Brian, Fred và Linda nhưng không ai có thể ảnh hưởng lên cô ta. Còn Yvon và Brian có thể ảnh hưởng lẫn nhau.

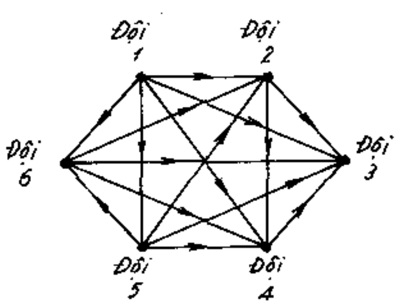



*Hình 6.* Đồ thị lấn tổ.

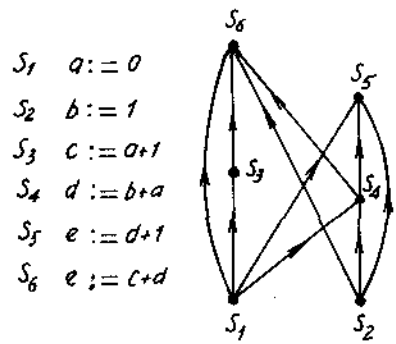



*Hình 7.* Đồ thị ảnh hưởng.

**Ví dụ 3.** *Thi đấu vòng tròn.* Một cuộc thi đấu thể thao trong đó mỗi đội đấu với mỗi đội khác đúng một lần gọi là **đấu vòng tròn**. Cuộc thi đấu như thế có thể được mô hình bằng một đồ thị có hướng trong đó mỗi đội là một đỉnh. Một cạnh đi từ đỉnh $a$ đến đỉnh $b$, ký hiệu là $(a, b)$, nếu đội $a$ thắng đội $b$. Mô hình đồ thị có hướng như thế được biểu diễn trên Hình 8. Trong cuộc thi đấu này đội 1 không thua trận nào còn đội 3 không thắng trận nào.




*Hình 8.* Mô hình đồ thị đấu vòng tròn.




*Hình 9.* Đồ thị có ưu tiên trước sau.

**Ví dụ 4.** Các chương trình máy tính có thể thi hành nhanh hơn bằng cách thi hành đồng thời một số câu lệnh nào đó. Điều quan trọng là không được thực hiện một câu lệnh đòi hỏi kết quả của câu lệnh khác chưa được thực hiện. Sự phụ thuộc của các câu lệnh vào các câu lệnh trước có thể biểu diễn bằng một đồ thị có hướng. Mỗi câu lệnh được biểu diễn bằng một đỉnh và có một cạnh từ một đỉnh tới một đỉnh khác nếu câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ hai không thể thực hiện được trước khi câu lệnh được biểu diễn bằng đỉnh thứ nhất được thực hiện. Đồ thị này được gọi là **đồ thị có ưu tiên trước sau**. Một chương trình máy tính và đồ thị của nó được biểu diễn trên Hình 9. Chẳng hạn, câu lệnh $S_5$ không thể thực hiện trước khi các câu lệnh $S_1$, $S_2$ và $S_4$ được thực hiện.

■

## *BÀI TẬP*

1. Vẽ các mô hình đồ thị biểu diễn các đường hàng không, và nói rõ loại của đồ thị được dùng, trong đó mỗi ngày có 4 chuyến bay từ Boston tới Newark, 2 chuyến bay từ Newark tới Boston, 3 chuyến bay từ Newark tới Miami, 2 chuyến bay từ Miami tới Newark, 1 chuyến bay từ Newark tới Detroit, 2 chuyến bay từ Detroit tới Newark, 3 chuyến bay từ Newark tới Washington, 2 chuyến bay từ Washington tới Newark và 1 chuyến bay từ Washington tới Miami. với :

   a) một cạnh giữa các đỉnh biểu diễn các thành phố có chuyến bay theo hướng nào đó.

   b) một cạnh giữa các đỉnh biểu diễn các thành phố cho mỗi chuyến bay theo hướng nào đó.

   c) một cạnh giữa các đỉnh biểu diễn các thành phố cho mỗi chuyến bay theo cả hai chiều, thêm vào đó có một khuyên biểu thị chuyến du lịch đặc biệt ngắm cảnh thành phố, cất cánh và hạ cánh tại Miami.

   d) một cạnh từ một đỉnh biểu thị thành phố có chuyến bay tới một đỉnh khác biểu thị thành phố ở đó chuyến bay kết thúc.

   e) một cạnh cho mỗi chuyến bay từ một đỉnh biểu thị thành phố nơi chuyến bay bắt đầu tới một đỉnh khác biểu thị thành phố ở đó chuyến bay kết thúc.

2. Loại đồ thị nào được dùng để mô hình hệ thống đường cao tốc giữa các thành phố lớn, trong đó

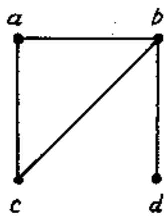
   a) có một cạnh giữa các đỉnh biểu thị các thành phố nếu giữa chúng có đường cao tốc?

b) có một cạnh giữa các đỉnh hiểu thị các thành phố cho mỗi đường cao tốc giữa chúng?

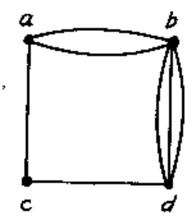
c) có một cạnh giữa các đỉnh biểu thị các thành phố cho mỗi đường cao tốc giữa chúng và có một khuyên tại đỉnh hiểu thị thành phố nếu có đường cao tốc bao quanh thành phố này?

*Trong các Bài tập 3 – 9 hãy xác định xem đồ thị nào là đơn đồ thị, đa đồ thị (và không là đơn đồ thị), giả đồ thị (không là đa đồ thị), đồ thị có hướng hoặc đa đồ thị có hướng (không là đồ thị có hướng).*

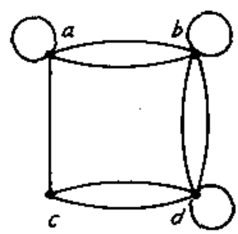
**3.**



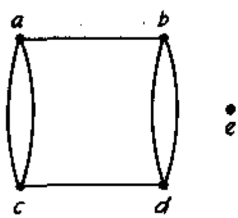

**4.**



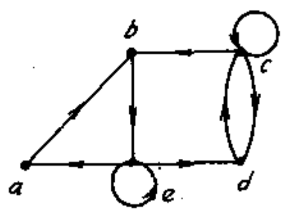

**5.**



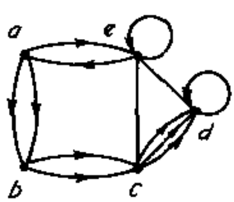

**6.**



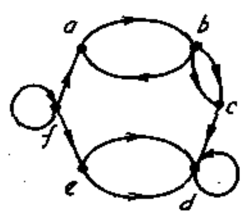

**7.**




**8.**




**9.**



**10.** Với mỗi đồ thị vô hướng trong các Bài tập 3-9, mà không là đơn đồ thị, hãy tìm tập các cạnh mà nếu bỏ chúng đi sẽ nhận được đồ thị đơn.

**11.** *Đồ thị giao* của các tập $A_1$, $A_2$, ... $A_n$ là một đồ thị có một đỉnh biểu diễn mỗi tập và có cạnh nối các đỉnh biểu diễn các tập nếu các tập này có phần giao khác trống. Hãy xây dựng đồ thị giao của các tập hợp sau :

a) $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
$A_3 = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $A_4 = \{5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A_5 = \{0, 1, 8, 9\}$.

b) $A_1 = \{... -4, -3, -2, -1, 0\}$,
$A_2 = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$,
$A_3 = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$,
$A_4 = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$,
$A_5 = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$.

c) $A_1 = \{x \mid x < 0\}$, $A_2 = \{x \mid -1 < x < 0\}$,
$A_3 = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $A_4 = \{x \mid -1 < x < 1\}$,
$A_5 = \{x \mid x > -1\}$. $A_6 = \mathbf{R}$.

**12.** Dùng đồ thị trên Hình 6 hãy xác định những loài cạnh tranh với diều hâu.

**13.** Hãy xây dựng đồ thị lấn tổ cho 6 loài chim trong đó chim hét cạnh tranh với chim cổ đỏ và chim giẻ cùi xanh, chim cổ đỏ cũng cạnh tranh với chim nhại, chim nhại cạnh tranh với chim giẻ cùi, và chim bổ hạt cạnh tranh với chim gõ kiến .

**14.** Ai có thể có ảnh hưởng lên Fred và Fred có thể ảnh hưởng lên ai trong đồ thị ảnh hưởng của Ví dụ 2?

**15.** Xây dựng đồ thị ảnh hưởng cho các thành viên lãnh đạo của một công ty nếu Chủ tịch có ảnh hưởng lên Giám đốc nghiên cứu và phát triển, Giám đốc maketting và Giám đốc điều hành ; Giám đốc nghiên cứu và phát triển có ảnh hưởng lên Giám đốc điều hành. Giám đốc maketting có thể ảnh hưởng lên Giám đốc điều hành; không ai có thể có ảnh hưởng lên Trưởng phòng tài chính và Trưởng phòng tài chính không có ảnh hưởng lên bất cứ ai.

**16.** Đội 4 đã thắng những đội nào và những đội nào đã thắng Đội 4 trong cuộc đấu vòng tròn biểu diễn trên Hình 8?

**17.** Trong trận đấu vòng tròn đội Hổ thắng các đội Giẻ cùi xanh, Chim giáo chủ, và Chim vàng anh ; đội Giẻ cùi xanh thắng đội Chim vàng anh và đội Chim giáo chủ. Đội chim giáo chủ thắng đội Chim vàng anh. Hãy mô hình hóa kết quả trận đấu bằng một đồ thị có hướng.

**18.** Câu lệnh nào cần phải thực hiện trước khi thực hiện $S_6$ trong chương trình cho trong Ví dụ 4? (Dùng Hình 9).

**19.** Hãy xây dựng đồ thị *có ưu tiên trước sau* cho chương trình sau :

$S_1 : x := 0$ $\quad S_2 : x := x + 1$
$S_3 : y := 2$ $\quad S_4 : z := y$
$S_5 : x := x + 2$ $\quad S_6 : y := x + z$
$S_7 : z := 4.$

**20.** Hãy mô tả đồ thị dùng để mô hình các đường hàng không và thời gian chuyến bay của chúng. *(Gợi ý :* thêm cấu trúc vào đồ thị có hướng)

**21.** Hãy mô tả đồ thị dùng để mô hình quan hệ giữa các người trong một nhóm, ở đó mỗi người có thể hoặc là thích, không thích hoặc là trung lập với người khác, và quan hệ ngược có thể là khác. (*Gợi ý:* thêm cấu trúc vào đồ thị định hướng. Xem xét riêng rẽ các cạnh có chiều ngược nhau giữa các đỉnh biểu diễn hai người).

## 7.2. CÁC THUẬT NGỮ VỀ ĐỒ THỊ

### MỞ ĐẦU

Trong mục này chúng ta sẽ đưa vào một vài thuật ngữ cơ sở của lý thuyết đồ thị, được sử dụng khi giải nhiều loại bài toán khác nhau. Một trong các bài toán như thế là bài toán xác định xem có thể vẽ đồ thị lên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau hay không. Một ví dụ khác là xác định xem có tồn tại phép tương ứng một-một giữa các đỉnh của hai đồ thị tạo ra phép tương ứng một−một giữa các cạnh của các đồ thị đó hay không. Chúng ta cũng sẽ đưa ra một vài lớp quan trọng nhất của đồ thị thường được dùng như các ví dụ và trong các mô hình.

## NHỮNG THUẬT NGỮ CƠ SỞ

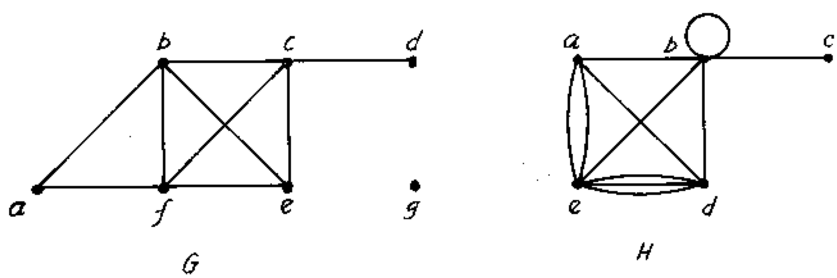
Đầu tiên chúng ta định nghĩa một vài thuật ngữ mô tả các đỉnh và cạnh của đồ thị vô hướng.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Hai đỉnh $u$ và $v$ trong một đồ thị vô hướng $G$ được gọi là *liền kề* (hay láng giềng) nếu $\{u, v\}$ là một cạnh của $G$. Nếu $e = \{u, v\}$ thì e gọi là *cạnh liên thuộc* với các đỉnh $u$ và $v$. Cạnh $e$ cũng được gọi là *cạnh nối* các đỉnh $u$ và $v$. Các đỉnh $u$ và $v$ gọi là các *điểm đầu mút* của cạnh $\{u, v\}$.

Để ghi nhận số các cạnh liên thuộc với một đỉnh ta có định nghĩa sau.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** *Bậc* của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Người ta ký hiệu bậc của đỉnh $v$ là $deg(v)$.

**Ví dụ 1.** Bậc của các đỉnh trong các đồ thị $G$ và $H$ trên Hình 1 là bao nhiêu?




***Hình 1.*** Đồ thị vô hướng $G$ và $H$.

*Giải:* Trong $G$, $deg(a) = 2$, $deg(b) = deg(c) = deg(f) = 4$, $deg(d) = 1$, $deg(e) = 3$ và $deg(g) = 0$. Trong $H$, $deg(a) = 4$, $deg(b) = deg(e) = 6$, $deg(c) = 1$, và $deg(d) = 5$.

■

Đỉnh bậc 0 được gọi là **đỉnh cô lập**. Từ đó suy ra đỉnh cô lập không nối với bất kỳ đỉnh nào. Đỉnh $g$ trên đồ thị $G$ trong Ví dụ 1 là cô lập. Một đỉnh gọi là **treo** (móc) nếu và chỉ nếu có bậc bằng 1. Do vậy đỉnh treo liền kề (nối) với đúng một đỉnh khác, Đỉnh $d$ trên đồ thị $G$ trong Ví dụ 1 là một đỉnh treo.

Chúng ta sẽ nhận được gì nếu ta cộng bậc của tất cả các đỉnh lại với nhau? Mỗi một cạnh đóng góp 2 đơn vị vào tổng các bậc của tất cả các đỉnh vì một cạnh nối với đúng hai đỉnh. Điều này có nghĩa là tổng các bậc của tất cả các đỉnh gấp đôi số các cạnh của đồ thị. Ta có kết quả sau đây thường gọi là *Định lý bắt tay*, vì một cạnh có hai đầu mút giống như một cái bắt tay có hai bàn tay.

**ĐỊNH LÝ 1.** *Định lý Bắt tay.* Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có $e$ cạnh. Khi đó $2e = \sum_{v \in V} deg(v)$.

(Định lý này đúng cả khi đồ thị có cạnh bội hoặc các khuyên).

**Ví dụ 2.** Có bao nhiêu cạnh trong đồ thị có 10 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 6?

*Giải:* Vì tổng các bậc của đồ thị là 10.6 = 60, nên $2e = 60$. Do vậy, $e = 30$.

■

Định lý 1 chỉ ra rằng tổng các bậc của tất cả các đỉnh của một đồ thị vô hướng là một số chẵn. Sự kiện đơn giản này có rất nhiều hệ quả hay, một trong số đó là Định lý 2.

**ĐỊNH LÝ 2.** Một đồ thị vô hướng có một số chẵn các đỉnh bậc lẻ.

*Chứng minh.:* Giả sử $V_1$ và $V_2$ tương ứng là tập các đỉnh bậc chẵn và tập các đỉnh bậc lẻ của đồ thị vô hướng $G = (V, E)$. Khi đó

$$2e = \sum_{v \in V} deg(v). = \sum_{v \in V_1} deg(v). + \sum_{v \in V_2} deg(v).$$

Vì $deg(v)$ là chẵn với mọi $v \in V_1$, nên tổng đầu tiên trong vế phải là một số chẵn. Do vế trái (bằng $2e$) là số chẵn nên tổng còn lại trong vế phải cũng phải là số chẵn. Vì tất cả các số hạng của tổng này là các số lẻ, nên suy ra số các số hạng này là chẵn. Hay số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn.

■

Có một số thuật ngữ rất hay dùng đối với đồ thị có hướng.

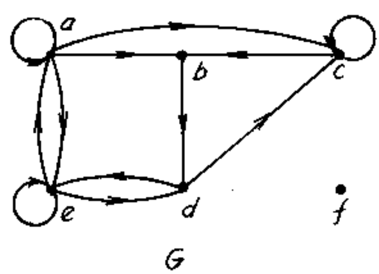
**ĐỊNH NGHĨA 3.** Khi $(u, v)$ là cạnh của đồ thị có hướng $G$, thì $u$ được gọi là *nối tới* $v$, và $v$ được gọi là *được nối từ* $u$. Đỉnh $u$ gọi là *đỉnh đầu*, đỉnh $v$ gọi là *đỉnh cuối* của cạnh $(u, v)$. Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên là trùng nhau.

Vì các cạnh của đồ thị có hướng là các cặp có thứ tự, nên định nghĩa bậc của đỉnh cần phải tinh hơn để phản ánh được số các cạnh nhận đỉnh này là đỉnh đầu (ra khỏi đỉnh này) và số các cạnh nhận đỉnh này là đỉnh cuối (đi vào đỉnh này).

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Trong đồ thị có hướng **bậc – vào** của đỉnh $v$ ký hiệu là $deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là $v$. **Bậc – ra** của đỉnh $v$, ký hiệu là $deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là $v$. (Chú ý, một khuyên tại một đỉnh sẽ góp thêm 1 đơn vị vào bậc – vào và 1 đơn vị vào bậc – ra của đỉnh này).

**Ví dụ 3.** Tìm bậc – vào và bậc – ra của mỗi đỉnh trong đồ thị có hướng $G$ trên Hình 2.

*Giải:* Các bậc-vào là $deg^-(a) = 2$, $deg^-(b) = 2$, $deg^-(c) = 3$, $deg^-(d) = 2$, $deg^-(e) = 3$ và $deg^-(f) = 0$. Các bậc – ra là $deg^+(a) = 4$, $deg^+(b) = 1$, $deg^+(c) = 2$, $deg^+(d) = 2$, $deg^+(e) = 3$ và $deg^+(f) = 0$. ■



***Hình 2.*** Đồ thị có hướng G.

Vì mỗi cạnh (hay còn gọi là cung) có một đỉnh đầu và một đỉnh cuối nên tổng các bậc – vào và tổng các bậc – ra của tất cả các đỉnh trong một đồ thị có hướng là như nhau và bằng số cạnh của nó. Đó chính là nội dung của Định lý sau.

**ĐỊNH LÝ 3.** Gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Khi đó

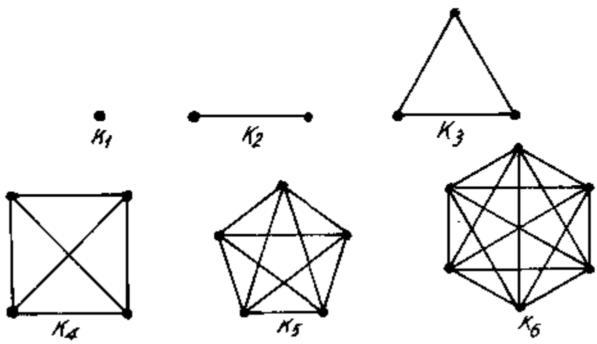
$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|.$$

Một số tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng của các cạnh của nó. Do đó, sẽ có lợi hơn khi ta lờ đi các hướng này. Đồ thị vô hướng nhận được bằng cách này được gọi là **đồ thị vô hướng nền**. Đồ thị có hướng và đồ thị vô hướng nền của nó có cùng số cạnh.

## NHỮNG ĐỒ THỊ ĐƠN ĐẶC BIỆT

Bây giờ chúng ta sẽ xét một vài lớp đồ thị đơn thường gặp trong các ứng dụng.

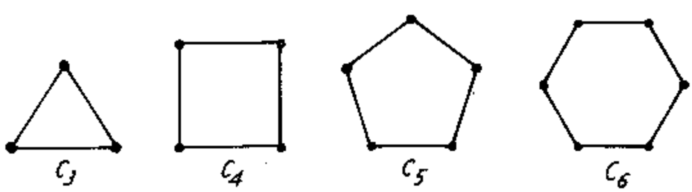
**Ví dụ 4.** *Đồ thị đầy đủ*. Đồ thị đầy đủ $n$ đỉnh, ký hiệu là $K_n$, là một đơn đồ thị chứa đúng một cạnh nối mỗi cặp đỉnh phân biệt. Các đồ thị $K_n$, với $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ được biểu diễn trên Hình 3.




***Hình 3.*** Các đồ thị $K_n$, $1 \leqslant n \leqslant 6$.

■

**Ví dụ 5.** *Chu trình (vòng)*. Chu trình $C_n$, $n \geqslant 3$ là một đồ thị có $n$ đỉnh $v_1, v_2, \ldots, v_n$ và các cạnh $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}, \ldots$ , $\{v_{n-1}, v_n\}$ và $\{v_n, v_1\}$. Các chu trình $C_3$, $C_4$, $C_5$, và $C_6$ biểu diễn trên Hình 4.



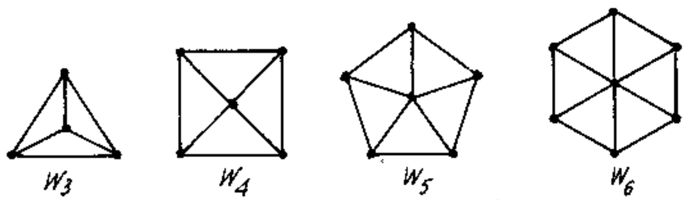

***Hình 4.*** Các chu trình $C_3$, $C_4$, $C_5$ và $C_6$.

■

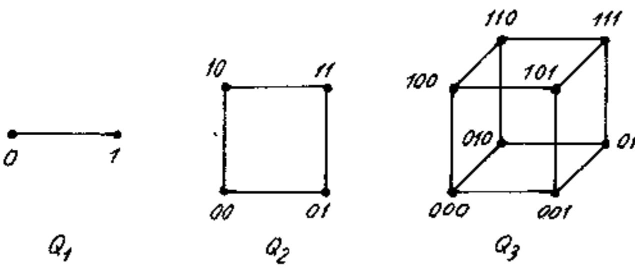
**Ví dụ 6.** *Đồ thị hình bánh xe*. Khi thêm một đỉnh vào chu trình $C_n$ với $n \geqslant 3$ và nối đỉnh này với mỗi một trong $n$ đỉnh của $C_n$ bằng những cạnh mới, ta sẽ nhận được đồ thị hình bánh xe. Các bánh xe $W_3$, $W_4$, và $W_6$ biểu diễn trên Hình 5.

■

**Ví dụ 7.** *Các khối n chiều*. Các khối $n$ chiều, ký hiệu là $Q_n$, là các đồ thị có $2^n$ đỉnh mỗi đỉnh được biểu diễn bằng xâu nhị phân độ dài $n$. Hai đỉnh là liền kề nếu và chỉ nếu các xâu nhị phân biểu diễn chúng khác nhau đúng một bit. Các đồ thị $Q_1$, $Q_2$ và $Q_3$ được biểu diễn trên Hình 6.




*Hình 5.* Các bánh xe $W_3$, $W_4$, $W_5$, và $W_6$.




*Hình 6.* Các khối $n$ chiều $Q_n$ với $n = 1$, 2 và 3.

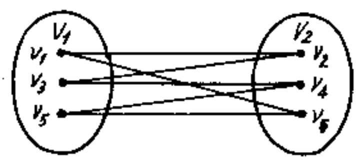
## ĐỒ THỊ PHÂN ĐÔI

Đôi khi các đỉnh của đồ thị có thể chia làm hai tập con sao cho mỗi cạnh nối một đỉnh của tập con này với một đỉnh của tập con kia. Ví dụ, đồ thị biểu diễn quan hệ hôn nhân của một làng, trong đó mỗi người được biểu diễn bằng một đỉnh còn cạnh biểu thị quan hệ vợ chồng giữa hai người. Tập các đỉnh có thể chia thành hai tập con, một tập gồm đàn ông và một tập gồm toàn đàn bà.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Một đồ thị đơn $G$ được gọi là đồ thị **phân đôi** nếu tập các đỉnh $V$ có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau $V_1$ và $V_2$ sao cho mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của $V_1$ với một đỉnh của $V_2$.

Trong Ví dụ 8 ta sẽ chỉ ra $C_6$ là phân đôi, và trong Ví dụ 9 thì $K_3$ là không phân đôi.

**Ví dụ 8.** $C_6$ là phân đôi như chỉ ra trên Hình 7, vì các đỉnh của nó có thể chia làm hai tập con $V_1 = \{v_1, v_3, v_5\}$ và $V_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ và mỗi cạnh của $C_6$ nối một đỉnh của $V_1$ với một đỉnh của $V_2$.

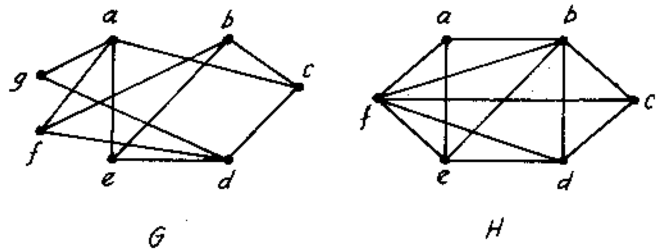



*Hình 7.* Minh họa $C_6$ là đồ thị phân đôi.

**Ví dụ 9.** $K_3$ là không phân đôi. Thật vậy, nếu ta chia các đỉnh của nó thành hai phần rời nhau thì một trong hai phần này phải chứa 2 đỉnh. nếu đồ thị là phân đôi thì các đỉnh này không thể nối với nhau bằng một cạnh, nhưng trong $K_3$, mỗi đỉnh được nối với một đỉnh bất kỳ khác bằng một cạnh.

■

**Ví dụ 10.** Các đồ thị $G$, $H$ trên Hình 8 có là đồ thị phân đôi không?



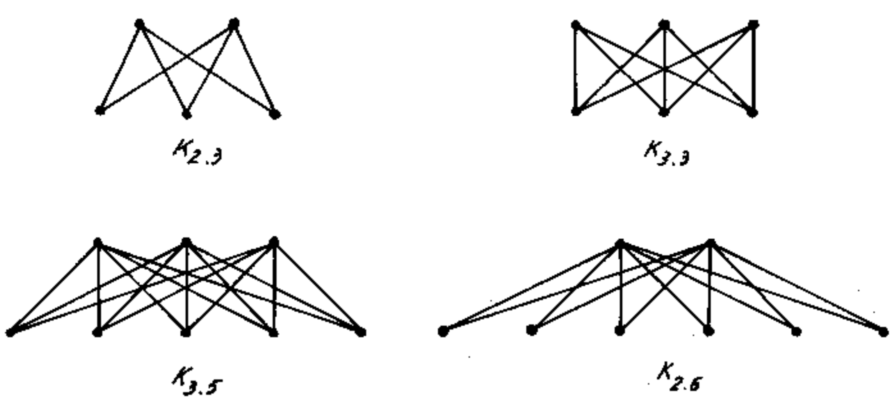

***Hình 8.*** Các đồ thị vô hướng $G$ và $H$.

*Giải*: Đồ thị $G$ là phân đôi, vì các đỉnh của nó là hợp của hai tập rời nhau $\{a, b, c\}$ và $\{c, e, f, g\}$ và mỗi cạnh của đồ thị nối một đỉnh của tập con này với một đỉnh của tập con kia. (Chú ý rằng để G là đồ thị phân đôi thì không nhất thiết mỗi đỉnh của$\{a, b, c\}$ phải được nối với mọi đỉnh của $\{c, e, f, g\}$, chẳng hạn $b$ và $g$ là không kề nhau).

Đồ thị $H$ là không phân đôi vì không thể chia tập các đỉnh của nó thành hai tập con sao cho các cạnh không nối hai đỉnh của cùng một tập con. (Độc giả tự kiểm tra lại điều này với các đỉnh $a$, $b$, $f$).

■

**Ví dụ 11**. Đồ thị phân đôi đầy đủ. *Đồ thị phân đôi đầy đủ* $K_{m,n}$ là đồ thị có tập đỉnh được phân thành hai tập con tương ứng có $m$ đỉnh và $n$




***Hình 9.*** Một số đồ thị phân đôi đầy đủ.

đỉnh và có một cạnh giữa hai đỉnh nếu và chỉ nếu một đỉnh thuộc tập con này và đỉnh thứ hai thuộc tập con kia. Các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,5}$, và $K_{2,6}$ được biểu diễn trên Hình 9.

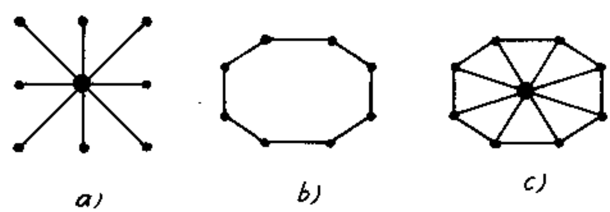
■

## MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra cách dùng các loại đồ thị đặc biệt trong các mô hình truyền dữ liệu và xử lý song song.

**Ví dụ 12.** *Các mạng cục bộ (LAN).* Các máy tính đặt trong một tòa nhà, như các máy tính loại vừa và các máy tính cá nhân cùng với các thiết bị ngoại vi như máy in, máy vẽ được nối với nhau bằng một mạng cục bộ. Một số mạng cục bộ dùng *cấu trúc hình sao,* trong đó tất cả các thiết bị được nối với thiết bị điều khiển trung tâm. Mạng cục bộ có thể biểu diễn bằng một đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{1,n}$ như trên Hình 10(a). Các thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác đều phải qua thiết bị điều khiển trung tâm.

Mạng cục bộ cũng có thể có *cấu trúc vòng tròn,* trong đó mỗi thiết bị nối với đúng hai thiết bị khác. Mạng cục bộ với cấu trúc vòng tròn được mô hình bằng các chu trình $C_n$ như trên Hình 10(b). Thông báo gửi từ thiết bị này tới thiết bị khác được truyền đi theo vòng tròn cho tới khi đến nơi nhận.




*Hình 10.* Các cấu trúc hình sao, vòng tròn và hỗn hợp của mạng cục bộ.

Cuối cùng, một số mạng cục bộ dùng cấu *trúc hỗn hợp* (cấu trúc lai) của hai cấu trúc trên. Các thông báo được truyền vòng quanh theo vòng tròn hoặc có thể qua thiết bị trung tâm. Sự dư thừa này có thể làm cho mạng đáng tin cậy hơn. Mạng cục bộ với sự dư thừa này có thể mô hình hóa bằng đồ thị hình bánh xe $W_n$ như chỉ ra trên Hình 10.

■

**Ví dụ 13.** Cho tới gần đây, các máy tính mới thực hiện được các chương trình có một phép toán tại một thời điểm. Do đó các thuật toán để giải các bài toán được thiết kế để thực hiện một bước tại mỗi thời điểm. Đó là các thuật toán **nối tiếp**. (Phần lớn các thuật toán mô tả trong cuốn sách này là thuật toán nối tiếp). Tuy nhiên, nhiều bài toán với số lượng tính toán rất lớn như bài toán mô phỏng thời tiết, tạo hình trong y học, hay phân tích mật mã không thể giải được trong một khoảng thời gian hợp lý nếu dùng thuật toán nối tiếp ngay cả khi dùng các siêu máy tính. Ngoài ra, do những giới hạn về mặt vật lý đối với tốc độ thực hiện các phép toán cơ sở, nên thường gặp các bài toán không thể giải trong khoảng thời gian hợp lý bằng các thao tác nối tiếp.

Khi **xử lý song song**, người ta dùng các máy tính có nhiều bộ xử lý riêng biệt, mỗi bộ xử lý có bộ nhớ riêng, nhờ đó có thể khắc phục được những hạn chế của các máy nối tiếp. Các **thuật toán song song** phân chia bài toán chính thành một số bài toán con sao cho có thể giải đồng thời được. Do vậy, bằng các thuật toán song song và nhờ việc sử dụng các máy tính có bộ đa xử lý người ta hy vọng có thể giải nhanh các bài toán phức tạp. Trong thuật toán song song có một dãy các chỉ thị theo dõi việc thực hiện thuật toán, gửi các bài toán con tới các bộ xử lý khác nhau, chuyển các thông tin vào, thông tin ra tới các bộ xử lý thích hợp.

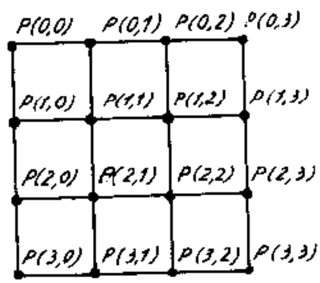
Khi dùng cách xử lý song song, mỗi bộ xử lý có thể cần các thông tin ra của các bộ xử lý khác. Do đó chúng cần phải được kết nối với nhau. Người ta có thể dùng loại đồ thị thích hợp để biểu diễn mạng kết nối các bộ xử lý trong một máy tính có nhiều bộ xử lý. Bây giờ chúng ta sẽ mô tả các kiểu mạng kết nối thường dùng nhất cho các máy xử lý song song. Kiểu mạng kết nối thường dùng để thực hiện một thuật toán song song cụ thể phụ thuộc vào những yêu cầu đối với việc trao đổi dữ liệu giữa các bộ xử lý, phụ thuộc vào tốc độ mong muốn, và tất nhiên vào phần cứng hiện có.

Mạng kết nối các bộ xử lý đơn giản nhất và cũng đắt nhất có các liên kết hai chiều giữa mỗi cặp bộ xử lý. Các mạng này có thể mô hình bằng $K_n$, đồ thị đầy đủ $n$ đỉnh, trong đó $n$ là số bộ xử lý. Tuy nhiên, với các mạng liên kết này cũng có những vấn đề hết sức nghiêm túc đặt ra, chẳng hạn, số kết nối quá nhiều. Thực ra, số các kết nối cần phải có giới hạn. Khi có nhiều bộ xử lý thì mỗi bộ không thể nối trực tiếp với tất cả các bộ xử lý khác. Ví dụ, nếu ta có 64 bộ xử lý thì có $C(64,2) = 2016$ kết nối, mỗi bộ xử lý nối trực tiếp với 63 bộ xử lý khác.

Mặt khác, hình như cách đơn giản nhất để kết nối $n$ bộ xử lý với nhau là sắp xếp chúng như một **bảng một chiều** hay **mảng một chiều**. Mỗi bộ xử lý $P_i$, khác $P_1$ và $P_n$, được nối với các bộ xử lý cạnh nó $P_{i-1}$ và $P_{i+1}$ bằng các đường hai chiều. $P_1$ được nối với $P_2$ và $P_n$ nối với $P_{n-1}$. Mảng một chiều có 6 bộ xử lý được biểu diễn trên Hình 11. Ưu điểm của mảng một chiều là mỗi bộ xử lý có nhiều nhất 2 đường nối trực tiếp với các bộ xử khác. Nhược điểm là nhiều khi cần có rất nhiều các **kết nối trung gian** để các bộ xử lý trao đổi thông tin với nhau.

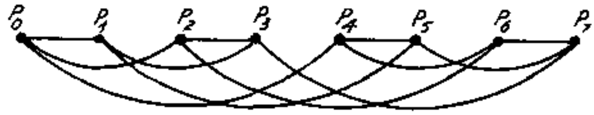

***Hình 11.*** Mảng một chiều đối với sáu bộ xử lý.

**Mạng kiểu lưới** (hoặc **mảng hai chiều**) rất hay được dùng cho các mạng liên kết. Trong một mạng như thế, số các bộ xử lý là một số chính phương, $n = m^2$. Các bộ xử lý được gán nhãn $P(i, j)$, $0 \leq i \leq m - 1$, $0 \leq j \leq m - 1$. Các kết nối 2 chiều sẽ nối bộ xử lý $P(i, j)$ với 4 bộ xử lý bên cạnh, tức là với $P(ij \pm 1)$ và $P(i \pm 1, j)$ chừng nào mà các bộ xử lý còn ở trong lưới. (Chú ý, các bộ xử lý ở các góc chỉ có 2 bộ xử lý liền cạnh, còn các bộ xử lý ở trên biên chỉ nối với 3 bộ xử lý. Đôi khi người ta còn dùng các lưới mà mỗi bộ xử lý đều nối với đúng 4 bộ xử lý khác. (Xem Bài tập 44 ở cuối tiết này). Mạng kiểu lưới cũng hạn chế số liên kết cho mỗi bộ xử lý. Sự truyền thông giữa một số cặp bộ xử lý đòi hỏi $O(\sqrt{n}) = O(m)$ các kết nối trung gian. (Xem Bài tập 45 ở cuối mục này). Một đồ thị cho mạng kiểu lưới gồm 16 bộ xử lý được biểu diễn trên Hình 12.




***Hình 12.*** Mạng kiểu lưới có 16 bộ xử lý.

Có lẽ mạng kết nối quan trọng nhất là mạng kiểu siêu khối. Với các mạng loại này số các bộ xử lý là lũy thừa của 2, $n = 2^m$. Các bộ xử lý được gán nhãn là $P_0$, $P_1$, ..., $P_{n-1}$. Mỗi bộ xử lý có liên kết 2 chiều với $m$ bộ xử lý khác. Bộ xử lý $P_i$ nối với bộ xử lý có chỉ số biểu diễn bằng dãy nhị phân khác với dãy nhị phân biểu diễn $i$ tại đúng một bit. Mạng kiểu siêu khối cân bằng số các kết nối trực tiếp của mỗi bộ xử lý và số các kết nối gián tiếp sao cho các bộ xử lý có thể truyền thông được. Nhiều máy tính đã chế tạo theo mạng kiểu siêu khối và nhiều thuật toán đã được thiết kế để sử dụng mạng kiểu siêu khối. Đồ thị $Q_n$ – khối $n$ chiều, biểu diễn mạng kiểu siêu khối có $n$ bộ xử lý. Hình 13 biểu diễn mạng siêu khối có 8 bộ xử lý. (Hình 13 thể hiện một cách vẽ $Q_3$ khác so với Hình 6). ■




***Hình 13.*** Mạng siêu khối có 8 bộ xử lý.

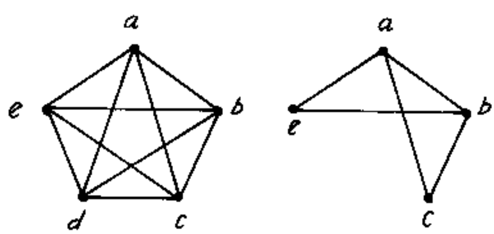
## CÁC ĐỒ THỊ MỚI TỪ ĐỒ THỊ CŨ

Đôi khi để giải quyết một bài toán chúng ta chỉ cần một phần của đồ thị. Ví dụ, chúng ta có thể chỉ quan tâm tới một phần của mạng máy tính lớn, phần này chỉ bao gồm bốn trung tâm máy tính tại New York, Denver, Detroit và Atlanta. Khi đó ta có thể lờ đi các trung tâm, các đường điện thoại không kết nối 2 trong 4 trung tâm kể trên. Trong mô hình đồ thị của mạng rộng, ta có thể loại bỏ các đỉnh ứng với các trung tâm không thuộc 4 trung tâm mà chúng ta quan tâm, và cũng loại bỏ tất cả các cạnh liên kết với các đỉnh bị xóa. Khi đó ta nhận được một đồ thị bé hơn. Đồ thị như vậy được gọi là **đồ thị con** của đồ thị ban đầu.

**ĐỊNH NGHĨA 6.** *Đồ thị con* của đồ thị $G = (V,H)$ là đồ thị $H = (W, F)$ trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.

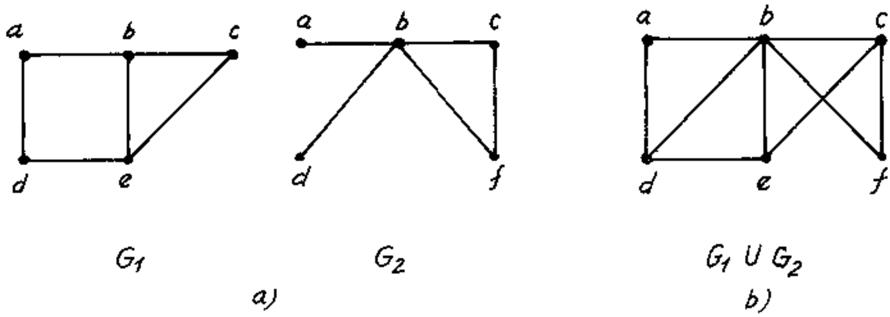
**Ví dụ 14**. Đồ thị $G$ trên Hình 14 đồ thị con của đồ thị $K_5$.

Hai hay nhiều đồ thị có thể kết hợp theo các cách khác nhau. Một đồ thị mới gồm tất cả các đỉnh và cạnh của các đồ thị này được gọi là **đồ thị hợp** của các đồ thị đã cho. Ta có định nghĩa tổng quát sau.




***Hình 14.*** Đồ thị con của $K_5$.

**ĐỊNH NGHĨA 7.** *Hợp* của hai đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là một đồ thị đơn có tập các đỉnh là $V_1 \cup V_2$ và tập các cạnh là $E_1 \cup E_2$. Ta ký hiệu hợp của các đồ thị $G_1$ và $G_2$ là $G_1 \cup G_2$.




*Hình 15.* (a) Các đồ thị đơn $G_1$ và $G_2$ và b) Hợp của chúng $G_1 \cup G_2$

**Ví dụ 15.** Tìm đồ thị hợp của các đồ thị trên Hình 15 (a).

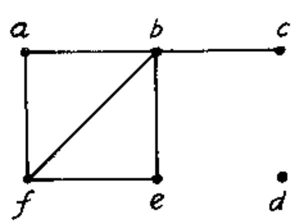
*Giải:* Tập các đỉnh của hợp $G_1 \cup G_2$ là hợp hai tập đỉnh, tức là $\{a, b, c, d, e, f\}$. Tập các cạnh là hợp hai tập cạnh. Đồ thị hợp được thể hiện trên Hình 15 (b).

■

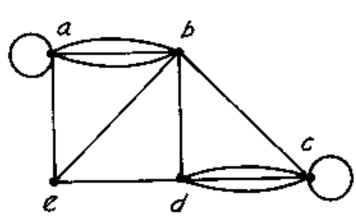
## BÀI TẬP

*Trong các Bài tập 1 – 3 hãy tìm số đỉnh, số cạnh, và số bậc của mỗi đỉnh trong các đồ thị vô hướng đã cho. Hãy xác định tất cả các đỉnh cô lập và các đỉnh treo.*

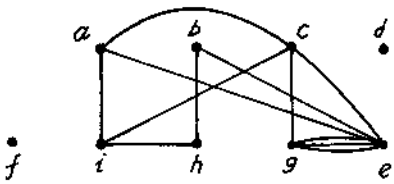
1.




2.



**3.**



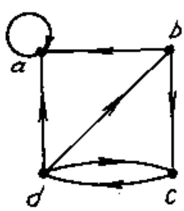

**4.** Tìm tổng bậc của các đỉnh trên các đồ thị trong các Bài tập 1 – 3. Hãy kiểm tra xem nó có bằng hai lần số cạnh không?

**5.** Có thể tồn tại đồ thị đơn có 15 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc bằng 5 không?

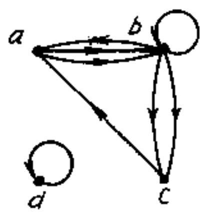
**6.** Trong một cuộc liên hoan mọi người bắt tay nhau. Hãy chỉ ra rằng tổng số lượt người được bắt tay là một số chẵn, giả sử rằng không ai tự bắt tay mình.

*Trong các Bài tập 7 – 9 hãy xác định số đỉnh, số cạnh, số bậc vào và số bậc ra của mỗi đỉnh đối với các đa đồ thị có hướng.*

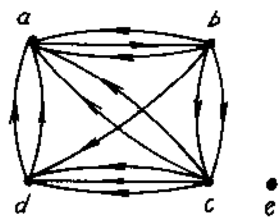
**7.**




**8.**




**9.**




$deg^-(a) = 2$ ; $deg^+(a) = 1$ . $deg^-(b) = 3$
$deg^-(b) = 1$ ; $deg(b) = 2$ $deg^+(b) = 4$ .
$deg^-(c) = 2$ ; $deg^+(c) = 1$ $deg^-(d) = 1$

**10.** Với mỗi đồ thị trong các Bài tập 7 – 9 hãy tính trực tiếp tổng các bậc vào và bậc ra của các đỉnh. Chỉ ra rằng chúng bằng tổng các cạnh của đồ thị.

**11.** Xây dựng các đồ thị vô hướng nền cho các đồ thị có hướng trên Hình 2.

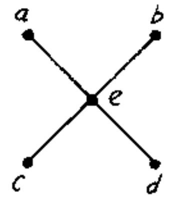
**12.** Hãy vẽ các đồ thị sau đây :

a) $K_7$  b) $K_{1,8}$  c) $K_{4,4}$

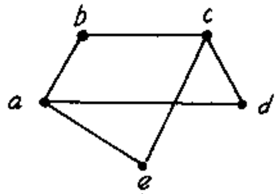
d) $C_7$  e) $W_7$  f) $Q_4$.

*Trong các Bài tập 13–17 các đồ thị đã cho có là phân đôi không.*

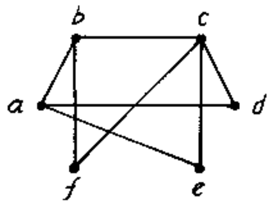
**13.**



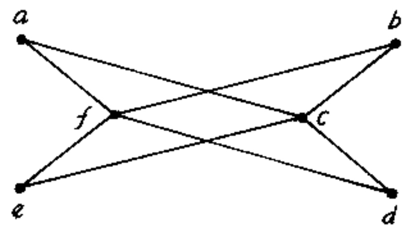

**14.**



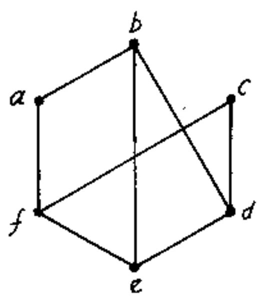

**15.**




**16.**




**17.**




**18.** Với các giá trị nào của $n$ các đồ thị sau là đồ thị phân đôi?

a) $K_n$ b) $C_n$

c) $W_n$ d) $Q_n$.

**19.** Các đồ thị sau đây có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

a) $K_n$ b) $C_n$

c) $W_n$ d) $K_{m,n}$ e) $Q_n$.

**20.** Cho biết các đỉnh của đồ thị có bậc là 4, 3, 3, 2, 2. Tính số cạnh của đồ thị và vẽ đồ thị này.

**21.** Có tồn tại đồ thị đơn có 5 đỉnh với số bậc sau đây không? Nếu có hãy vẽ đồ thị đó.

a) 3, 3, 3, 3, 2 b) 1, 2, 3, 4, 5

c) 1, 2, 3, 4, 4 d) 3, 4, 3, 4, 3

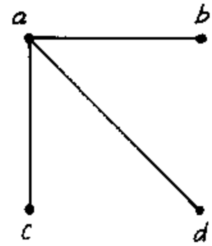
e) 0, 1, 2, 2, 3 f) 1, 1, 1, 1, 1.

**22.** Đồ thị $K_2$ có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

**23.** Đồ thị $K_3$ có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

**24.** Đồ thị $W_3$ có bao nhiêu đồ thị con có ít nhất một đỉnh?

**25.** Hãy vẽ tất cả đồ thị con của đồ thị bên.




**26.** Gọi $G$ là đồ thị có $v$ đỉnh và $e$ cạnh, còn $M$, $m$ tương ứng là bậc lớn nhất và nhỏ nhất của các đỉnh của $G$. Chỉ ra rằng

a) $\dfrac{2e}{v} \geqslant m$, b) $\dfrac{2e}{v} \leqslant M$.

*Đồ thị đơn được gọi là* **chính qui** *nếu mọi đỉnh của nó có bậc như nhau. Đồ thị được gọi là n –* **chính qui** *nếu mọi đỉnh của nó có bậc n.*

**27.** Với các giá trị nào của $n$ đồ thị sau đây là chính qui?

a) $K_n$ b) $C_n$

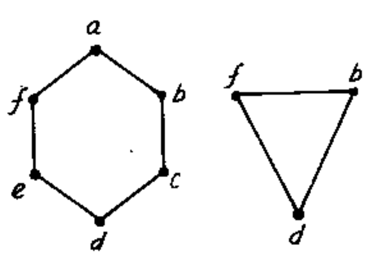
c) $W_n$ d) $Q_n$.

**28.** Với các giá trị nào của $m$ và $n$ đồ thị $K_{m,n}$ là chính qui?

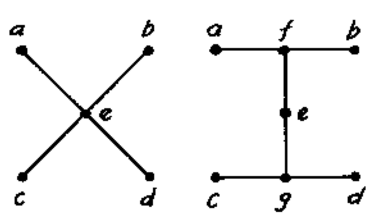
**29.** Tính số đỉnh của một đồ thị chính qui bậc 4 và có 10 cạnh.

*Trong các Bài tập 30–32 hãy tìm hợp của cặp hai đồ thị đơn (giả sử các cạnh có các đầu mút trùng nhau là như nhau).*

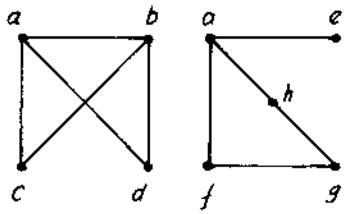
**30.**




**31.**



**32.**




**33.** **Đồ thị bù** $\overline{G}$ của đồ thị đơn $G$ có cùng số đỉnh như $G$. Hai đỉnh là liền kề trong $\overline{G}$ nếu và chỉ nếu nó không là liền kề trong $G$. Hãy tìm

a) $\overline{K_n}$ b) $\overline{K_{m,n}}$
c) $\overline{C_n}$ d) $\overline{Q_n}$

**34.** Nếu đồ thị đơn $G$ có 15 cạnh và $\overline{G}$ có 13 cạnh khi đó $G$ có bao nhiêu đỉnh?

**35.** Nếu đồ thị đơn $G$ có $v$ đỉnh và $e$ cạnh khi đó $\overline{G}$ có bao nhiêu cạnh ?

**36*.** Chứng minh rằng nếu $G$ là đồ thị đơn phân đôi có $v$ đỉnh và $e$ cạnh, khi đó $e \leqslant v^2/4$.

**37.** Chứng minh rằng nếu $G$ là đồ thị đơn có $n$ đỉnh, khi đó hợp của $G$ và $\overline{G}$ là $K_n$.

**38*.** Mô tả thuật toán dùng để xác định một đồ thị đơn có là phân đôi hay không.

**Nghịch đảo** *của đồ thị có hướng* $G = (V, E)$, *được ký hiệu là* $G^c$, *là đồ thị có hướng* $(V, F)$ *trong đó* $(u, v) \in F$ *nếu và chỉ nếu* $(v, u) \in E$.

**39.** Hãy vẽ đồ thị nghịch đảo của mỗi đồ thị trong các Bài tập 7–9 của tiết 7.1.

**40.** Chứng tỏ rằng $(G^c)^c = G$ với mọi đồ thị có hướng $G$.

**41.** Chứng minh rằng đồ thị $G$ là nghịch đảo của chính nó nếu và chỉ nếu quan hệ được biểu diễn bởi $G$ (xem Tiết 6.3) là đối xứng.

**42.** Hãy mở rộng định nghĩa nghịch đảo của đồ thị có hướng cho đa đồ thị có hướng.

**43.** Hãy vẽ mạng kiểu lưới kết nối 9 bộ xử lý song song.

**44.** Trong một phương án mạng kiểu lưới kết nối $n = m^2$ bộ xử lý song song, bộ xử lý $P(i,j)$ được kết nối với 4 bộ xử lý $P((i \pm 1)$ **mod** $m, j)$, $P(i, (j \pm 1)$ **mod** $m)$, sao cho các kết nối bao xung quanh các cạnh của lưới. Hãy vẽ mạng kiểu lưới có 16 bộ xử lý theo phương án này.

**45.** Hãy chỉ ra mỗi cặp bộ xử lý trong mạng lưới với $n = m^2$ bộ xử lý có thể truyền thông được bằng cách dùng $O(\sqrt{n}) = O(m)$ các kết nối trung gian giữa các bộ xử lý được nối trực tiếp.

# 7.3. BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ VÀ SỰ ĐẲNG CẤU

## MỞ ĐẦU

Có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Đọc xong chương này các bạn sẽ thấy khi làm việc với đồ thị nếu có thể chọn được cách biểu diễn thích hợp nhất thì sẽ rất có lợi. Trong tiết này ta sẽ chỉ ra các cách khác nhau để biểu diễn đồ thị.

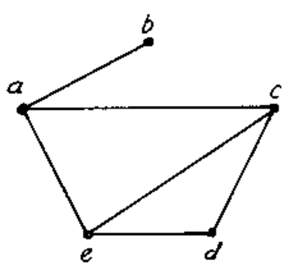
Đôi khi, hai đồ thị có dạng đúng như nhau, theo nghĩa có phép tương ứng một – một giữa các đỉnh của chúng mà vẫn bảo tồn các cạnh. Trong trường hợp đó ta nói rằng hai đồ thị là **đẳng cấu**. Việc xác định xem hai đồ thị có là đẳng cấu với nhau hay không là một bài toán quan trọng của lý thuyết đồ thị sẽ được nghiên cứu trong tiết này.

## BIỂU DIỄN ĐỒ THỊ

Một cách biểu điễn đồ thị không có cạnh bội là liệt kê tất cả các cạnh của đồ thị. Nói cách khác để biểu diễn đồ thị không có cạnh bội ta dùng **danh sách liền kề**. Danh sách này chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi đỉnh của đồ thị.

**Ví dụ 1.** Dùng danh sách liền kề để mô tả đồ thị đơn trên Hình 1.

*Giải:* Bảng 1 liệt kê tất cả các đỉnh liền kề với mỗi đỉnh của đồ thị.



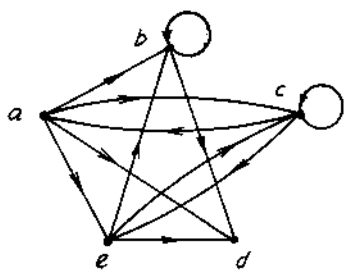

*Hình 1.* Đồ thị đơn

**BẢNG 1. Danh sách cạnh của một đồ thị đơn**

| Đỉnh | Đỉnh liền kề |
|---|---|
| *a* | b, c, e |
| *b* | a |
| *c* | a, d, e |
| *d* | c, e |
| *e* | a, c, d |

**Ví dụ 2.** Hãy biểu diễn đồ thị có hướng trên Hình 2 bằng cách liệt kê tất cả các đỉnh cuối của các cung xuất phát từ mỗi đỉnh của đồ thị.

*Giải:* Bảng 2 biểu diễn đồ thị có hướng trên Hình 2.




*Hình 2.* Đồ thị có hướng.

**BẢNG 2. Danh sách các cạnh của đồ thị có hướng**

| Đỉnh đầu | Đỉnh cuối |
|---|---|
| *a* | *b, c, d, e* |
| *b* | *b, d* |
| *c* | *a, c, e* |
| *d* | |
| *e* | *b, c, d* |

■

## MA TRẬN LIỀN KỀ

Khi biểu diễn đồ thị bởi danh sách các cạnh hay danh sách liền kề, thì việc thực hiện một thuật toán có thể sẽ rất cồng kềnh, nếu đồ thị có nhiều cạnh. Để đơn giản việc tính toán ta có thể biểu diễn đồ thị bằng ma trận. Có hai kiểu ma trận thường được dùng để biểu diễn đồ thị sẽ được giới thiệu dưới đây.

Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị đơn trong đó $|V| = n$ và các đỉnh được liệt kê một cách tùy ý $v_1,...,v_n$. **Ma trận liền kề A** (hay $\mathbf{A}_G$) của $G$ ứng với danh sách các đỉnh này là ma trận không-một cấp $n \times n$ có phần tử hàng $i$ cột $j$ bằng 1 nếu $v_i$ và $v_j$ liền kề nhau, và bằng 0 nếu chúng không được nối với nhau. Nói cách khác ma trận liền kề của đồ thị là ma trận $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ trong đó

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } \{v_i, v_j\} \text{ là một cạnh của } G, \\ 0 & \text{nếu không có cạnh nối đỉnh } v_i \text{ với đỉnh } v_j. \end{cases}$$

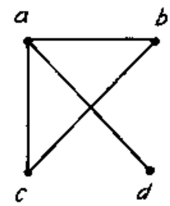
Lưu ý là ma trận liền kề của một đồ thị tùy thuộc vào thứ tự liệt kê các đỉnh. Do vậy có tới $n!$ ma trận kề liền khác nhau của một đồ thị $n$ đỉnh vì có $n$ ! cách sắp xếp $n$ đỉnh.

Ma trận liền kề của một đồ thị đơn là đối xứng, tức là $a_{ij} = a_{ji}$ vì nếu $v_i$ được nối với $v_j$ thì $v_j$ cũng được nối với $v_i$ và ngược lại, nếu $v_i$ không liền kề với $v_j$ thì $v_j$ cũng không liền kề với $v_i$. Hơn thế nữa, vì đồ thị đơn không có khuyên nên $a_{ii} = 0$ với $i = 1, 2, ..., n$.

**Ví dụ 3.** Dùng ma trận liền kề hãy biểu diễn đồ thị trên Hình 3.

*Giải:* Ta sắp xếp các đỉnh theo thứ tự *a, b, c, d*. Ma trận biểu diễn đồ thị này là :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

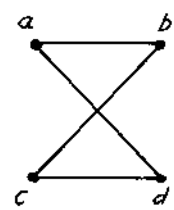



***Hình 3.*** Đồ thị đơn.

■

**Ví dụ 4.** Hãy vẽ đồ thị có ma trận liền kề theo thứ tự của các đỉnh là *a, b, c, d*.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$




***Hình 4.*** Đồ thị ứng với ma trận liền kề cho trước.

*Giải:* Đồ thị ứng với ma trận liền kề này được biểu diễn trên Hình 4.

■

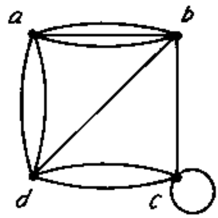
Ma trận liền kề cũng có thể dùng để biểu diễn đồ thị vô hướng có khuyên và có cạnh bội. Khuyên tại đỉnh $a_i$ được biểu diễn bằng 1 tại vị trí *(i, i)* của ma trận liền kề. Khi có cạnh bội ma trận liền kề không còn là ma trận không – một nữa, vì phần tử ở vị trí thứ *(i, j)* của ma trận này bằng số cạnh nối các đỉnh $a_i$ và $a_j$. Tất cả các đồ thị vô hướng, kể cả đa đồ thị và giả đồ thị đều có ma trận trận liền kề đối xứng.

■

**Ví dụ 5.** Dùng ma trận liền kề biểu diễn giả đồ thị trên Hình 5.

*Giải:* Ma trận liền kề với thứ tự các đỉnh *a, b, c, d là*

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$




***Hình** 5.* Giả đồ thị.

■

Chúng ta đã dùng ma trận không–một trong Chương 6 để biểu diễn các đồ thị có hướng. Ma trận liền kề của đồ thị có hướng $G = (V, E)$ có giá trị bằng 1 tại vị trí $(i, j)$ nếu có một cạnh (cung) từ $v_i$ tới $v_j$ trong đó $v_1, v_2, ..., v_n$ là một danh sách bất kỳ của các đỉnh đồ thị. Nói cách khác nếu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ là ma trận liền kề của đồ thị có hướng theo danh sách này của đỉnh thì

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu có cạnh đi từ } v_i \text{ tới } v_j \\ 0 & \text{ở mọi vị trí khác.} \end{cases}$$

Ma trận liền kề của đồ thị có hướng không có tính đối xứng. Vì có thể không có cạnh từ $a_j$ tới $a_i$ khi có cạnh từ $a_i$ tới $a_j$.

Cũng có thể dùng ma trận kề để biểu diễn đa đồ thị có hướng. Ma trận kề khi đó không là ma trận không–một khi có cạnh bội cùng hướng nối hai đỉnh. Trong ma trận liền kề của đa đồ thị có hướng, $a_{ij}$ bằng số các cung đi từ đỉnh $v_i$ tới đỉnh $v_j$

## MA TRẬN LIÊN THUỘC

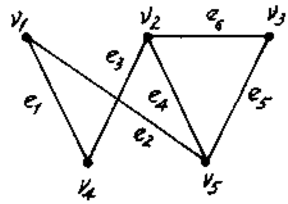
Một cách thường dùng nữa để biểu diễn đồ thị là dùng **ma trận liên thuộc**. Giả sử $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng, $v_1, v_2, ..., v_n$ là tập các đỉnh còn $e_1, e_2, ..., e_m$ là tập các cạnh của nó. Khi đó ma trận liên thuộc theo thứ tự trên của $V$ và $E$ là ma trận $\mathbf{M} = [m_{ij}]$ trong đó

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ nối với đỉnh } v_i \\ 0 & \text{nếu cạnh } e_j \text{ không nối với đỉnh } v_i \end{cases}$$

**Ví dụ 6.** Hãy biểu diễn đồ thị trên Hình 6 bằng ma trận liên thuộc.

***Giải:*** Ma trận liên thuộc có dạng

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$




*Hình 6.* Đồ thị vô hướng.

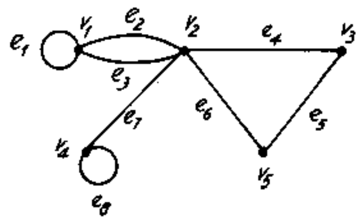
■

Các ma trận liên thuộc cũng có thể được dùng để biểu diễn các các cạnh bội và khuyên. Các cạnh bội được biểu diễn trong ma trận liên thuộc bằng cách dùng các cột có các phần tử giống hệt nhau vì các cạnh này được nối với cùng một cặp các đỉnh. Các khuyên được biểu diễn bằng cách dùng một cột với đúng một phần tử bằng 1 tương ứng với đỉnh nối với khuyên đó.

**Ví dụ 7.** Hãy biểu diễn đồ thị trên Hình 7 bằng ma trận liên thuộc.

*Giải.* Ma trận liên thuộc có dạng

$$\begin{array}{c|cccccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
v_2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
v_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$




*Hình 7.* Giả đồ thị.

■

## SỰ ĐẲNG CẤU CỦA CÁC ĐỒ THỊ

Thường thường người ta cần biết xem có thể vẽ được hai đồ thị theo cùng một cách không. Chẳng hạn, trong hóa học, đồ thị thường để tạo mô hình các hợp chất. Các hợp chất khác nhau có thể có cùng công thức phân tử nhưng cấu trúc có thể khác nhau. Các hợp chất như vậy sẽ được biểu diễn bằng các đồ thị mà ta không thể vẽ được cùng một cách. Những đồ thị biểu diễn các hợp chất đã biết có thể được dùng để xác định xem một hợp chất cho là mới thực ra đã biết từ trước chưa.

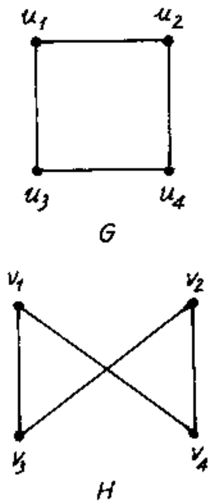
Sau đây là một vài thuật ngữ đối với các đồ thị có cấu trúc như nhau.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Các đồ thị đơn $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ là *đẳng cấu* nếu có hàm song ánh $f$ từ $V_1$ lên $V_2$ sao cho các đỉnh $a$ và $b$ là liền kề trong $G_1$ nếu và chỉ nếu $f(a)$ và $f(b)$ là liền kề trong $G_2$ với mọi $a$ và $b$ trong $V_1$. Hàm $f$ như thế được gọi là *một đẳng cấu*.

Nói cách khác khi hai đơn đồ thị là đẳng cấu, sẽ tồn tại một phép tương ứng một-một giữa các đỉnh của hai đồ thị bảo toàn quan hệ liền kề.

**Ví dụ 8.** Hãy chỉ ra rằng các đồ thị $G = (V, E)$ và $H = (W, F)$ trên Hình 8 là đẳng cấu.

*Giải:* Hàm $f$ với $f(u_1) = v_1$, $f(u_2) = v_4$, $f(u_3) = v_3$ và $f(u_4) = v_2$ là phép tương ứng một – một giữa V và W . Để thấy phép tương ứng này bảo toàn quan hệ liền kề ta thấy trong $G$ các đỉnh liền kề là $u_1$ và $u_2$, $u_1$ và $u_3$, $u_2$ và $u_4$, $u_3$ và $u_4$, và mỗi cặp $f(u_1) = v_1$ và $f(u_2) = v_4$, $f(u_1) = v_1$ và $f(u_3) = v_3$, $f(u_2) = v_4$ và $f(u_4) = v_2$ cuối cùng $f(u_3) = v_3$ và $f(u_4) = v_2$ là liền kề trong $H$. ■



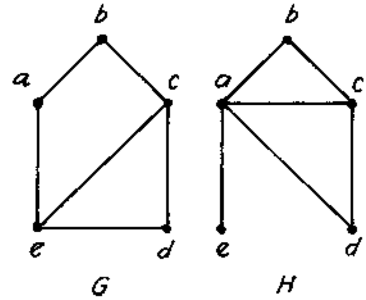
*Hình 8.* Đồ thị $G$ và $H$.

Thông thường việc xác định xem hai đồ thị có là đẳng cấu hay không là rất khó khăn. Có tới $n!$ phép tương ứng một-một giữa hai tập đỉnh của hai đơn đồ thị có $n$ đỉnh. Thử mỗi phép tương ứng xem nó có bảo toàn tính liền kề hay không là không thực tế, nhất là khi $n$ đủ lớn.

Tuy nhiên, thường người ta chứng tỏ hai đồ thị đơn là không đẳng cấu bằng cách chỉ ra chúng không có chung một tính chất mà các đơn đồ thị đẳng cấu cần phải có. Tính chất như thế gọi là **một bất biến** đối với phép đẳng cấu của các đơn đồ thị. Chẳng hạn, các đơn đồ thị đẳng cấu có cùng số đỉnh. Hơn thế nữa, các đơn đồ thị đẳng cấu có cùng số cạnh, bởi vì phép tương ứng một-một giữa các đỉnh sẽ tạo ra phép tương ứng một-một giữa các cạnh. Và sau nữa, bậc của các đỉnh của các đơn đồ thị đẳng cấu phải như nhau. Tức là, đỉnh $v$ bậc $d$ trong $G$ phải tương ứng với đỉnh $f(v)$ bậc $d$ trong $H$, vì đỉnh $w$ trong $G$ là nối với đỉnh $v$ nếu và chỉ nếu $f(v)$ và $f(w)$ là liền kề trong $H$.

**Ví dụ 9.** Hãy chỉ ra rằng các đồ thị trên Hình 9 là không đẳng cấu.

*Giải:* Cả hai đồ thị $G$ và $H$ đều có 5 đỉnh và 6 cạnh. Tuy nhiên $H$ có đỉnh $e$ bậc 1 còn $G$ thì không có đỉnh nào bậc 1 cả. Từ đó suy ra $G$ và $H$ là không đẳng cấu. ■

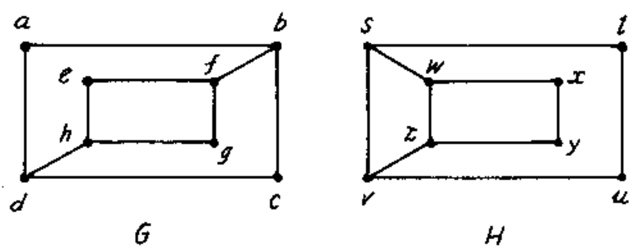



*Hình 9.* Các đồ thị $G$ và $H$.

Số đỉnh, số cạnh, bậc của đỉnh là các bất biến đối với phép đẳng cấu. Nếu bất kỳ đại lượng nào trong các đại lượng này của hai đồ thị là khác nhau thì chúng là không đẳng cấu. Tuy nhiên, khi các đại lượng này như nhau, điều đó cũng không có nghĩa hai đồ thị này là đẳng cấu. Không có các bất biến mà nhờ chúng có thể xác định được hai đơn đồ thị là đẳng cấu.

**Ví dụ 10.** Hãy xác định xem hai đồ thị trên Hình 10 có đẳng cấu hay không.

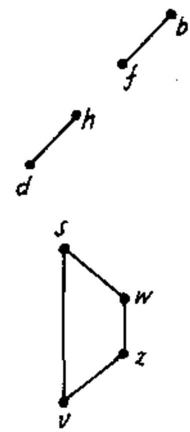
*Giải:* Cả hai đồ thị $G$ và $H$ đều có 8 đỉnh và 10 cạnh. Chúng cũng có 4 đỉnh bậc 2 và 4 đỉnh bậc 3. Vì các bất biến này là như nhau nên ta vẫn còn hy vọng các đồ thị này là đẳng cấu.




*Hình 10.* Các đồ thị $G$ và $H$.

Tuy nhiên các đồ thị này là không đẳng cấu. Thật vậy, vì $deg(a) = 2$ trong $G$ nên $a$ phải ứng với một trong các đỉnh $t$, $u$, $x$ hoặc $h$ của $H$, vì đó là các đỉnh bậc 2 trong $H$. Nhưng cả 4 đỉnh này đều nối với một đỉnh bậc 2 khác trong $H$, mà điều này không đúng với đỉnh $a$ trong $G$.

Có thể chứng minh $G$ và $H$ là không đẳng cấu bằng cách khác. Nếu hai đồ thị $G$ và $H$ là đẳng cấu thì các đồ thị con tạo nên từ các đỉnh bậc 3 và các cạnh nối chúng lại của hai đồ thị cũng phải đẳng cấu (độc giả tự chứng minh). Tuy nhiên các đồ thị con này, thể hiện trên Hình 11 là không đẳng cấu. ■

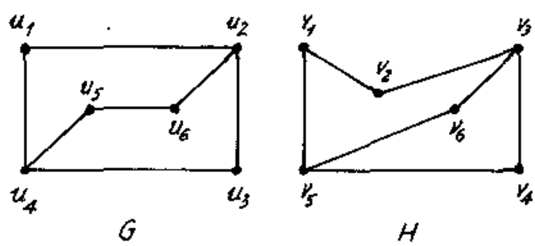



*Hình 11.* Các đồ thị con của $G$ và $H$ tạo nên từ các đỉnh bậc 3 và các cạnh nối chúng.

Để chứng minh hàm $f$ từ tập các đỉnh của đồ thị $G$ lên tập các đỉnh của đồ thị $H$ là một phép đẳng cấu, chúng ta cần phải chỉ ra rằng $f$ bảo tồn các cạnh. Một cách rất thuận tiện là sử dụng ma trận liền kề. Đặc biệt để chỉ ra $f$ là đẳng cấu chúng ta có thể chỉ ra *rằng ma trận liền kề của* $G$ là giống như ma trận liền kề của $H$ với hàng và cột được gán nhãn tương ứng với ảnh qua $f$ của các đỉnh trong $G$, đó là nhãn của hàng và cột tương ứng trong ma trận kề của $G$. Chúng ta minh họa cách chứng minh đó qua ví dụ sau.

**Ví dụ 11.** Hãy xác định xem hai đồ thị trên Hình 12 có đẳng cấu hay không.

*Giải*: Cả hai đồ thị $G$ và $H$ có 6 đỉnh và 7 cạnh. Cả hai đều có 4 đỉnh bậc 2 và 2 đỉnh bậc 3. Cũng dễ chỉ ra rằng các đồ thị con của $G$ và H gồm các đỉnh bậc 2 và các cạnh nối chúng là đẳng cấu (độc giả hãy tự kiểm tra lại điều này). Vì các đồ thị $G$ và $H$ là phù hợp đối với các bất biến này, nên hợp lý hơn là ta cố gắng tìm phép đẳng cấu $f$.




*Hình 12.* Các đồ thị $G$ và $H$.

Bây giờ ta định nghĩa hàm $f$ sau đó kiểm tra xem nó có là một phép đẳng cấu hay không. Vì $\deg(u_1) = 2$ và vì $u_1$ không nối với một đỉnh bậc 2 nào khác nên ảnh của $u_1$ cần phải là hoặc $v_4$ hoặc là $v_6$ vì chỉ các đỉnh này mới không nối với các đỉnh bậc 2 khác trong $H$. Ta chọn $f(u_1) = v_6$ (nếu sau đó ta thấy rằng việc chọn này không dẫn đến một đẳng cấu thì ta sẽ chọn lại $f(u_1) = v_4$). Vì $u_2$ nối với $u_1$ nên ảnh của $u_2$ có thể là $v_3$ hoặc $v_5$. Chúng ta chọn chẳng hạn, $f(u_2) = v_3$. Cứ tiếp tục theo cách này, dùng tính liền kề của các đỉnh và bậc của các đỉnh như dấu hiệu dẫn đường chúng ta sẽ có $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ và $f(u_6) = v_2$. Vậy là chúng ta đã lập được phép tương ứng một–một giữa các đỉnh của hai đồ thị $G$ và $H$, cụ thể là : $f(u_1) = v_6$, $f(u_2) = v_3$, $f(u_3) = v_4$, $f(u_4) = v_5$, $f(u_5) = v_1$ và $f(u_6) = v_2$. Bây giờ để kiểm tra xem $f$ có bảo tồn các cạnh hay không, ta lập ma trận liền kề của $G$.

$$\mathbf{A}_G = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

và ma trận liền kề của $H$ với các nhãn của hàng và cột tương ứng là ảnh của các đỉnh của $G$ qua $f$. Cụ thể là :

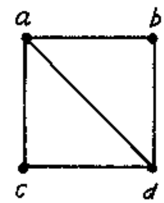
$$\mathbf{A}_H = \begin{array}{c} \\ v_6 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_6 & v_3 & v_4 & v_5 & v_1 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vì $\mathbf{A}_G = \mathbf{A}_H$ ta suy ra $f$ bảo tồn các cạnh. Vậy ta kết luận $f$ là một phép đẳng cấu, hay $G$ và $H$ là đẳng cấu. Lưu ý là nếu $f$ không là đẳng cấu chúng ta cũng không thể kết luận $G$ và $H$ là không đẳng cấu, vì có thể tồn tại phép tương ứng một–một khác giữa các đỉnh của $G$ và $H$ là phép đẳng cấu.

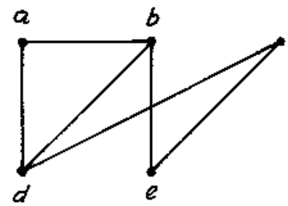
## BÀI TẬP

*Trong các Bài tập 1–4 hãy dùng danh sách liền kề biểu diễn các đồ thị sau*

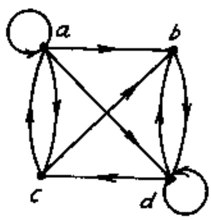
**1.**



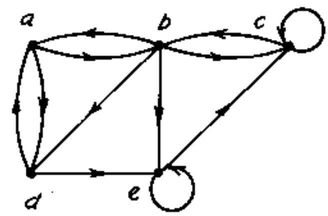

**2.**




**3.**




**4.**




**5.** Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 1 bằng ma trận liền kề.

**6.** Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 2 bằng ma trận liền kề.

**7.** Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 3 bằng ma trận liền liền kề.

**8.** Biểu diễn đồ thị trong Bài tập 4 bằng ma trận liền kề.

**9.** Hãy biểu diễn các đồ thị sau đây bằng ma trận liền kề.

a) $K_4$ b) $K_{1,4}$ c) $K_{2,3}$

d) $C_4$ e) $W_4$ f) $Q_3$.

*Trong các Bài tập 10–12 hãy vẽ đồ thị có các ma trận liền kề sau :*

**10.**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**11.**

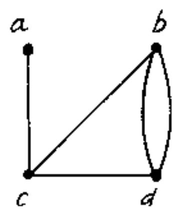
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**12.**

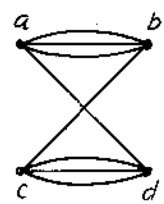
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Trong các Bài tập 13-15 hãy biểu diễn đồ thị đã cho bằng ma trận liền kề.*

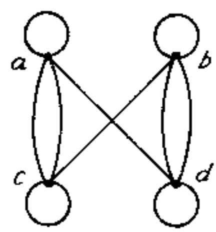
**13.**




**14.**




**15.**




*Trong các Bài tập 16-18 hãy vẽ các đồ thị vô hướng được biểu diễn bởi các ma trận liền kề sau:*

**16.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

**17.**

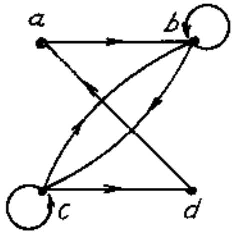
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**18.**

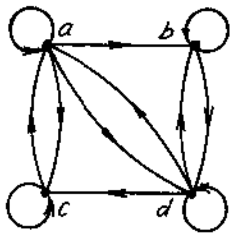
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

*Trong các Bài tập 19-21 hãy tìm ma trận kề của các đa đồ thị có hướng.*

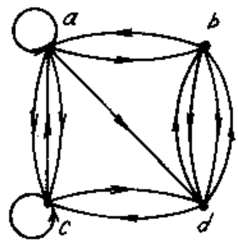
**19.**




**20.**




**21.**




*Trong các Bài tập 22-24 hãy vẽ đồ thị được biểu diễn bằng ma trận liền kề*

**22.** $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**23.** $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

**24.** $$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**25.** Có phải mọi ma trận vuông không–một đối xứng, có các số 0 trên đường chéo đều là ma trận liền kề của đồ thị đơn?

**26**. Dùng ma trận liên thuộc hãy biểu diễn các đồ thị trong các Bài tập 1 và 2.

**27.** Dùng ma trận liên thuộc hãy biểu diễn các đồ thị trong các Bài tập 13–15.

**28*.** Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng của một ma trận liền kề đối với một đồ thị vô hướng? Đối với đồ thị có hướng?

**29*.** Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một cột của một ma trận liền kề đối với một đồ thị vô hướng? Đối với đồ thị có hướng?

**30**. Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một hàng của một ma trận liên thuộc đối với một đồ thị vô hướng.

**31.** Nêu ý nghĩa của tổng các phần tử trên một cột của một ma trận liên thuộc đối với một đồ thị vô hướng.

**32*.** Tìm ma trận liền kề cho các đồ thị sau :

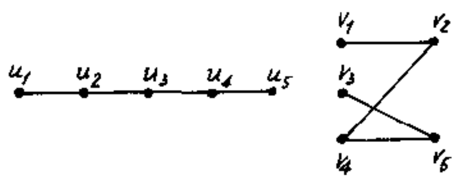
a) $K_n$ b) $C_n$ c) $W_n$

d) $K_{m,n}$ e) $Q_n$

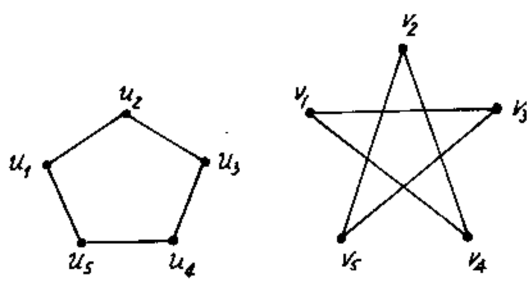
**33*.** Tìm ma trận liên thuộc của các đồ thị trong các phần a) – d) của Bài tập 32.

*Trong các Bài tập 34-44 hãy xác định xem các cặp đồ thị đã cho có là đẳng cấu không.*

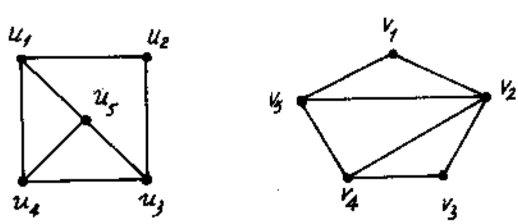
**34.**



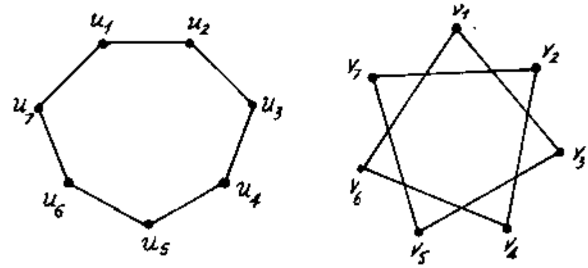

**35.**



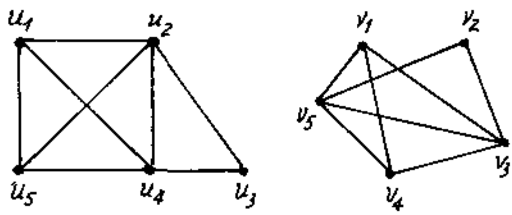

**36.**



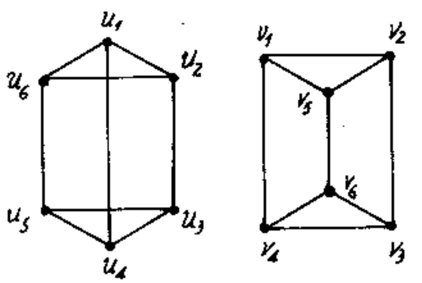
**37.**


u1
u2
u3
u4
u5
u6
u7
v1
v2
v3
v4
v5
v6
v7

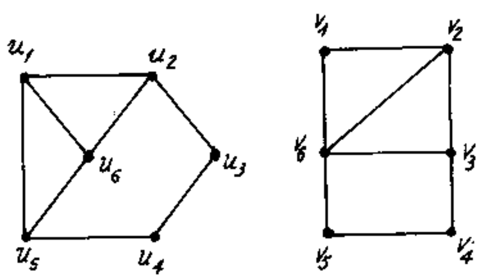
**38.**


u1
u2
u3
u4
u5
v1
v2
v3
v4
v5

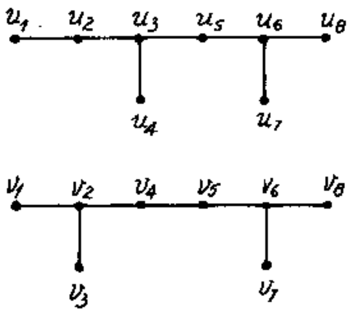
**39.**


u1
u2
u3
u4
u5
u6
v1
v2
v3
v4
v5
v6

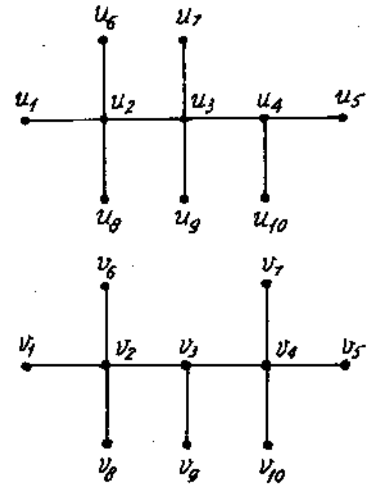
**40.**


u1
u2
u3
u4
u5
u6
v1
v2
v3
v4
v5
v6

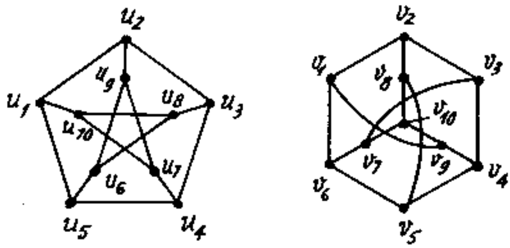
**41.**



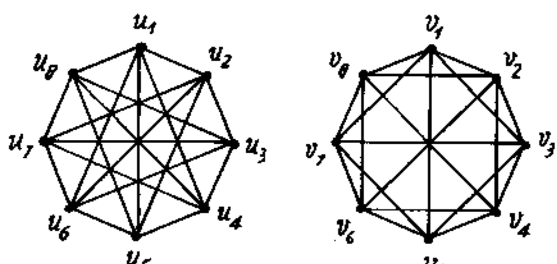

**42.**




**43.**




**44.**




**45.** Chứng minh rằng phép đẳng cấu của các đồ thị đơn là một quan hệ tương đương.

**46.** Giả sử $G$ và $H$ là các đồ thị đơn đẳng cấu. Chỉ ra rằng các đồ thị bù $\overline{G}$, $\overline{H}$ cũng là đẳng cấu.

**47.** Hãy mô tả hàng và cột của ma trận liền kề của đồ thị tương ứng với đỉnh cô lập.

**48.** Hãy mô tả hàng và cột của ma trận liên thuộc của đồ thị tương ứng với đỉnh cô lập.

**49.** Chỉ ra rằng có thể sắp xếp các đỉnh của một đồ thị phân đôi với số đỉnh lớn hơn hoặc bằng hai sao cho ma trận liền kề của nó có dạng.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

trong đó 4 phần tử là các ma trận chữ nhật.

*Một đơn đồ thị được gọi là* **tự-bù** *nếu G và $\overline{G}$ là đẳng cấu.*

**50.** Chỉ ra rằng đồ thị bên là tự–bù.

**51.** Hãy tìm đồ thị đơn tự–bù có 5 đỉnh.

**52*.** Chỉ ra rằng nếu $G$ là đồ thị đơn tự-bù với $v$ đỉnh khi đó $v \equiv 0$ hoặc 1 (mod 4).

**53.** Với số nguyên $n$ nào thì $C_n$ là tự bù?

**54.** Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu với $n$ đỉnh khi $n$ bằng

a) 2 ? b) 3 ? c) 4 ?

**55.** Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu với 5 đỉnh và 3 cạnh?

**56.** Có bao nhiêu đồ thị đơn không đẳng cấu với 6 đỉnh và 4 cạnh?

**57.** Các đồ thị đơn với ma trận liền kề sau đây có là đẳng cấu không?

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

**58.** Hãy xác định xem các đồ thị không có khuyên với ma trận liên thuộc sau đây có là đẳng cấu không.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

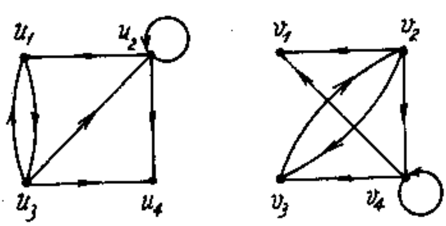
b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**59.** Hãy mở rộng định nghĩa đẳng cấu của đơn đồ thị cho các đồ thị vô hướng có khuyên và cạnh bội.

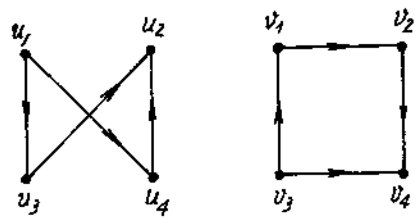
**60.** Định nghĩa đẳng cấu cho các đồ thị có hướng.

*Trong các Bài tập 61-46 xác định xem cặp đồ thị có hướng đã cho có là đẳng cấu không.*

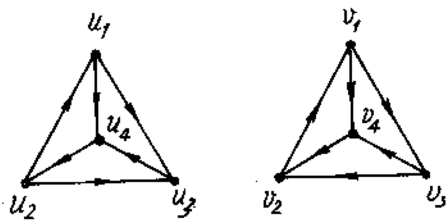
**61.**



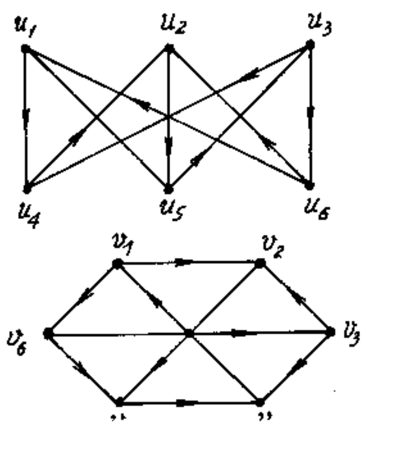

**62.**




**63.**




**64.**



**65.** Chỉ ra rằng nếu $G$ và $H$ là các đồ thị có hướng đẳng cấu thì nghịch đảo của $G$ và $H$ (theo định nghĩa cho ở trước Bài tập 39 của Tiết 7.2) cũng là đẳng cấu.

**66*.** Có bao nhiêu đơn đồ thị có hướng không đẳng cấu với $n$ đỉnh khi $n$ bằng

a) 2 ? b) 3 ? c) 4 ?

**67*.** Tích của ma trận liên thuộc và chuyển vị của nó đối với một đồ thị vô hướng là gì?

**68*.** Cần bao nhiêu số nguyên để biểu diễn một đồ thị đơn có $v$ đỉnh và $e$ cạnh nếu dùng

a) danh sách liền kề b) ma trận liền kề

c) ma trận liên thuộc.

# 7.4. TÍNH LIÊN THÔNG

## MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán có thể được mô hình với các đường đi dọc theo các cạnh của đồ thị. Ví dụ, người ta dùng đồ thị để nghiên cứu bài toán xác định xem có thể gửi một thông báo giữa hai máy tính qua đường truyền thông trung gian được hay không. Dùng mô hình có đường đi trong đồ thị cũng có thể giải được các bài toán tìm đường tối ưu cho xe phát thư, xe đổ rác, cho việc chẩn đoán trong mạng máy tính.

## ĐƯỜNG ĐI

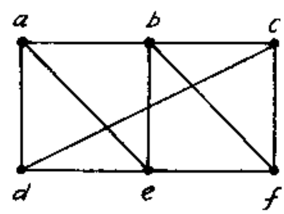
Chúng ta bắt đầu bằng định nghĩa thuật ngữ cơ sở của lý thuyết đồ thị có liên quan tới đường đi.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Đường đi độ dài $n$* từ $u$ tới $v$, với $n$ là một số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng là một dãy các cạnh $e_1, e_2, ..., e_n$ của đồ thị sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1, x_2\}, ..., f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, với

$x_0 = u$ và $x_n = v$. Khi đồ thị là đơn ta ký hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ..., x_n$ (vì danh sách các đỉnh này xác định duy nhất đường đi). Đường đi được gọi là một *chu trình* nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, tức là $u = v$. Đường đi hoặc chu trình khi đó gọi là đi qua các đỉnh $x_1, x_2, ... x_{n-1}$. Đường đi hay chu trình gọi là *đơn* nếu nó không chứa cùng một cạnh quá một lần.

Khi không cần phân biệt các cạnh bội ta sẽ ký hiệu đường đi $e_1, e_2, ... e_n$ trong đó $f(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ với $i = 1, 2, ..., n$ bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ... x_n$. Ký hiệu này xác định đường đi chỉ theo các đỉnh mà nó đi qua. Có thể có nhiều đường đi qua dãy các đỉnh này.

**Ví dụ 1.** Trong đồ thị đơn trên Hình 1,a, $d, c, f, e$ là đường đi đơn độ dài 4 vì $\{a, d\}$, $\{d, c\}$, $\{c, f\}$ và $\{f, e\}$ đều là các cạnh. Tuy vậy, $d, e, c, a$ không là đường đi vì $\{e, c\}$ không là cạnh của đồ thị. Còn $b, c, f, e, b$ là một chu trình độ dài 4 vì $\{b, c\}$, $\{c, f\}$, $\{f, e\}$ và $\{e, b\}$ là các cạnh và đường đi này bắt đầu và kết thúc tại $b$. Đường đi $a, b, e, d, a, b$ độ dài 5 không là đường đi đơn vì nó chứa cạnh $\{a, b\}$ hai lần.



*Hình 1.* Đồ thị đơn.

Đường đi và chu trình trong đồ thị có hướng cũng đã được đưa vào từ Chương 5. Bây giờ ta định nghĩa đường đi như thế cho đa đồ thị có hướng.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** *Đường đi* độ dài $n$, với $n$ nguyên dương, từ $u$ tới $v$ trong đa đồ thị có hướng là dãy các cạnh $e_1, e_2, ..., e_n$ của đồ thị sao cho $f(e_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(e_2) = \{x_1, x_2\}$, ..., $f(e_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, với $x_0 = u$ và $x_n = v$. Khi không có cạnh bội trong đồ thị ta ký hiệu đường đi này bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ..., x_n$. Đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh được gọi là một *chu trình*. Đường đi hay chu trình gọi là *đơn* nếu nó không chứa cùng một cạnh quá một lần.

Khi không cần phân biệt các cạnh bội ta sẽ ký hiệu đường đi $e_1, e_2, ..., e_n$ trong đó $f(e_i) = \{x_{i-1}, x_i\}$ với $i = 1, 2, ..., n$ bằng dãy các đỉnh $x_0, x_1, ... x_n$. Ký hiệu này xác định đường đi chỉ theo các đỉnh mà nó đi qua. Có thể có nhiều đường đi qua dãy các đỉnh này.

## TÍNH LIÊN THÔNG TRONG ĐỒ THI VÔ HƯỚNG

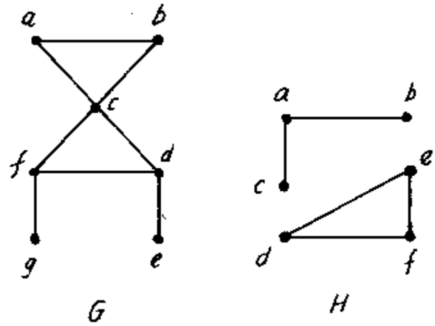
Khi nào mọi cặp máy tính trong một mạng có thể trao đổi thông tin với nhau, nếu các thông báo có thể gửi qua một hay nhiều máy trung gian?

Nếu mạng máy tính này được biểu diễn bằng một đồ thị trong đó mỗi máy được biểu thị bằng một đỉnh còn mỗi đường truyền thông được biểu diễn bằng một cạnh, thì câu hỏi trên có dạng : Có phải luôn luôn tồn tại một đường đi giữa hai đỉnh trong một đồ thị không?

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Một đồ thị vô hướng được gọi là *liên thông* nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

Như vậy, hai máy tính bất kỳ trong mạng có thể truyền thông với nhau được nếu và chỉ nếu đồ thị của mạng này là liên thông.

**Ví dụ 2.** Đồ thị $G$ trên hình 2 là liên thông, vì giữa mọi cặp đỉnh phân biệt đều có đường đi (độc giả tự kiểm tra lại điều này). Tuy vậy đồ thị $H$ trên Hình 2 là không liên thông. Chẳng hạn giữa các đỉnh $a$ và $d$ là không có đường đi trong $H$.




***Hình** 2.* Đồ thị $G$ và $H$.

■

Trong Chương 8 chúng ta sẽ cần tới Định lý sau đây.

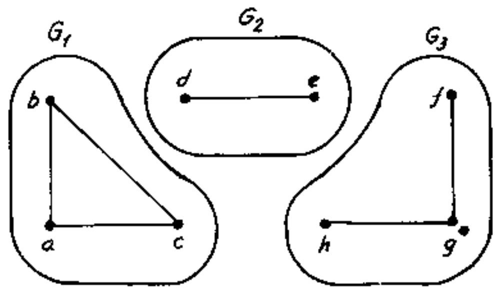
**ĐỊNH LÝ 1.** Giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông luôn có đường đi đơn.

***Chứng minh:*** Giả sử $u$ và $v$ là hai đỉnh phân biệt của một đồ thị vô hướng liên thông $G = (V, E)$. Vì $G$ là liên thông nên có ít nhất một đường đi giữa $u$ và $v$. Gọi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ với $x_0 = u$ và $x_n = v$, là dãy các đỉnh của đường đi có độ dài ngắn nhất. Đây chính là đường đi đơn cần tìm. Thật vậy, giả sử nó không là đường đi đơn, khi đó, $x_i = x_j$ với $0 \leq i < j$. Điều này có nghĩa là giữa các đỉnh $u$ và $v$ có đường đi ngắn hơn qua các đỉnh $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_n$ nhận được bằng cách xoá đi các cạnh tương ứng với dãy các đỉnh $x_i, \ldots, x_{j-1}$.

■

Một đồ thị không liên thông là hợp của hai hay nhiều đồ thị con liên thông, mỗi cặp các đồ thị con này không có đỉnh chung. Các đồ thị con liên thông rời nhau như vậy được gọi là các **thành phần liên thông** của đồ thị đang xét.

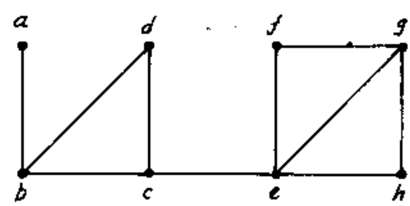
**Ví dụ 3.** Đồ thị $G$ là hợp của ba đồ thị con liên thông rời nhau $G_1$, $G_2$ và $G_3$ như chỉ ra trên Hình 3. Ba đồ thị con này là 3 thành phần liên thông của $G$. ■




*Hình 3.* Đồ thị $G$ và các thành phần liên thông $G_1$, $G_2$ và $G_3$ của nó.

Đôi khi, việc xóa đi một đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với nó sẽ tạo ra một đồ thị con mới có nhiều thành phần liên thông hơn đồ thị xuất phát. Các đỉnh như thế gọi là các **đỉnh cắt** hay các **điểm khớp**. Việc xóa đỉnh cắt khỏi một đồ thị liên thông sẽ tạo ra một đồ thị con không liên thông. Hoàn toàn tương tự, một cạnh mà khi ta hỏ nó đi sẽ tạo ra một đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn so với đồ thị xuất phát được gọi là một **cạnh cắt** hay một **cầu**.

**Ví dụ 4.** Tìm các đỉnh cắt và cạnh cắt của đồ thị $G$ trên Hình 4.




*Hình 4.* Đồ thị $G$

*Giải:* Đỉnh cắt của $G$ là $b$, $c$ và $e$. Xóa một trong các đỉnh này (và các cạnh nối với nó) sẽ làm mất tính liên thông của đồ thị. Các cạnh cắt (cầu) là $\{a, b\}$ và $\{c, e\}$. Xóa một trong các cầu này sẽ làm đồ thị mất tính liên thông. ■

## TÍNH LIÊN THÔNG TRONG ĐỒ THỊ CÓ HƯỚNG

Có hai khái niệm về tính liên thông của đồ thị có hướng tuỳ theo chúng ta có quan tâm tới hướng của các cạnh hay không.

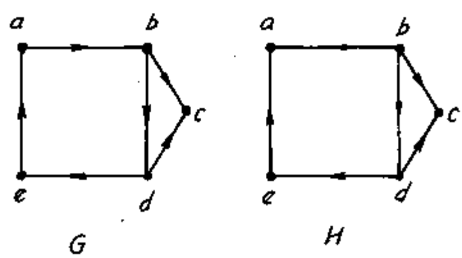
**ĐỊNH NGHĨA 4.** Đồ thị có hướng gọi là *liên thông mạnh* nếu có đường đi từ $a$ tới $b$ và từ $b$ tới $a$ với mọi đỉnh $a$ và $b$ của đồ thị.

Trong đồ thị có hướng liên thông mạnh luôn tồn tại dãy các cạnh có hướng từ một đỉnh bất kỳ tới một đỉnh bất kỳ khác của đồ thị. Đồ thị có hướng có thể không là liên thông mạnh nhưng vẫn còn liên thông theo một nghĩa nào đó. Để chính xác điều này ta có định nghĩa sau.

**ĐỊNH NGHĨA 5.** Đồ thị có hướng gọi là *liên thông yếu* nếu có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị vô hướng nền.

Do vậy đồ thị có hướng là liên thông yếu nếu và chỉ nếu luôn tồn tại đường đi giữa hai đỉnh khi ta không quan tâm tới hướng của các cạnh. Rõ ràng mọi đồ thị có hướng liên thông mạnh cũng là đồ thị liên thông yếu.

**Ví dụ 5.** Các đồ thị có hướng trên Hình 5 có là liên thông mạnh không? Có là liên thông yếu không?




*Hình 5.* Các đồ thị có hướng $G$ và $H$.

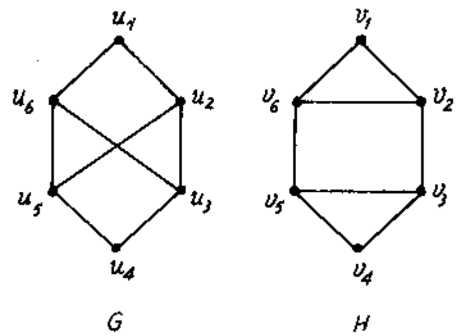
*Giải:* $G$ là liên thông mạnh vì có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị có hướng này. Vì vậy $G$ cũng là liên thông yếu. Còn $H$ không là liên thông mạnh. Không có đường đi có hướng từ $a$ tới $b$ trong đồ thị này. Tuy vậy $H$ là liên thông yếu vì có đường đi giữa bất kỳ hai đỉnh của thị vô hướng nền của $H$ (Độc giả tự kiểm tra điều này).

■

## ĐƯỜNG ĐI VÀ SỰ ĐẲNG CẤU

Có một số cách dùng đường đi và chu trình để xác định xem hai đồ thị có đẳng cấu hay không. Chẳng hạn sự tồn tại chu trình đơn với độ dài đặc biệt là một bất biến rất có ích để chỉ ra hai đồ thị là không đẳng cấu. Thêm vào đó, đường đi có thể dùng để xây dựng các ánh xạ có khả năng là các phép đẳng cấu.

Như chúng tôi đã nói, một bất biến đẳng cấu rất có ích đối với các đơn đồ thị là sự tồn tại chu trình đơn với độ dài $k$ lớn hơn 2 (chứng minh điều này là Bài tập 36 ở cuối tiết này). Ví dụ 6 minh họa cách dùng bất biến này để chứng tỏ hai đồ thị là không đẳng cấu.




*Hình 6.* Các đồ thị $G$ và $H$.

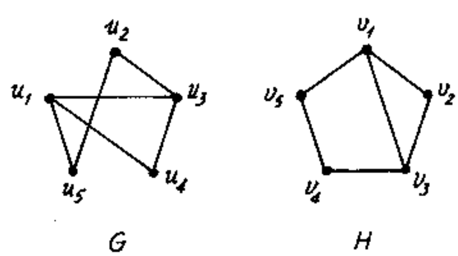
**Ví dụ 6.** Xác định xem hai đồ thị trên Hình 6 có là đẳng cấu với nhau không?

*Giải:* Cả hai đồ thị $G$ và $H$ đều có 6 đỉnh và 8 cạnh. Mỗi đồ thị có bốn đỉnh bậc 3, hai đỉnh bậc 2. Vì thế ba bất biến – số đỉnh, số cạnh, bậc của các đỉnh – của hai đồ thị là như nhau. Tuy nhiên $H$ có chu trình đơn độ dài 3, cụ thể là $v_1$, $v_2$, $v_6$, $v_1$ trong khi đó $G$ không có chu trình đơn độ dài 3 (ta có thể kiểm tra trực tiếp điều khẳng định này và dễ thấy tất các chu trình đơn của $G$ đều có độ dài 4). Vì sự tồn tại chu trình đơn độ dài 3 là một bất biến đối với phép đẳng cấu nên các đồ thị $G$ và $H$ là không đẳng cấu.

■

Chúng ta đã chỉ ra cách dùng sự tồn tại của một loại đường đi, cụ thể là chu trình đơn độ dài đặc biệt, để chứng minh hai đồ thị là không đẳng cấu. Chúng ta cũng có thể dùng đường đi để tìm các ánh xạ có khả năng là các đẳng cấu.

**Ví dụ 7.** Xác định xem hai đồ thị $G$ và $H$ trên Hình 7 có là đẳng cấu với nhau không?




*Hình 7.* Các đồ thị $G$ và $H$.

*Giải:* Cả hai đồ thị $G$ và $H$ đều có 5 đỉnh và 6 cạnh, cả hai đều có hai đỉnh bậc 3 và ba đỉnh bậc 2, cả hai đều có một chu trình đơn độ dài 3, một chu trình đơn độ dài 4, và chu trình đơn độ dài 5. Vì tất cả các bất biến đều phù hợp nên $G$ và $H$ có thể là đẳng cấu. Để tìm phép đẳng cấu có thể này chúng ta sẽ đi theo đường đi qua tất cả các đỉnh sao cho các đỉnh tương ứng trong hai đồ thị có cùng bậc. Ví dụ, các đường đi $u_1$, $u_4$, $u_3$, $u_2$, $u_5$ trong $G$ và $v_3$, $v_2$, $v_1$, $v_5$, $v_4$ trong

$H$, cả hai đều đi qua mọi đỉnh của đồ thị xuất phát từ đỉnh bậc 3, đi qua các đỉnh bậc 2, 3, 2 và kết thúc ở đỉnh bậc 2. Theo các đường này, trên đồ thị ta có ánh xạ $f$ sao cho $f(u_1) = v_3$, $f(u_4) = v_2$, $f(u_3) = v_1$, $f(u_2) = v_5$, và $f(u_5) = v_4$. Độc giả có thể chỉ ra rằng ánh xạ này là một đẳng cấu, và như vậy $G$ và $H$ là hai đồ thị đẳng cấu hoặc bằng cách chỉ ra $f$ bảo tồn các cạnh hoặc chỉ ra với một cách sắp xếp các đỉnh thích hợp hai ma trận liền kề của các đồ thị $G$ và $H$ là như nhau.

■

## ĐẾM ĐƯỜNG ĐI GIỮA CÁC ĐỈNH

Số đường đi giữa hai đỉnh của đồ thị có thể xác định được khi sử dụng ma trận liền kề.

**ĐỊNH LÝ 2.** Cho $G$ là một đồ thị với ma trận liền kề $\mathbf{A}$ theo thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ (với các cạnh vô hướng hoặc có hướng hay là cạnh bội, có thể có khuyên). Số các đường đi khác nhau độ dài $r$ từ $v_i$ tới $v_j$ trong đó $r$ là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử $(i, j)$ của ma trận $\mathbf{A}^r$.

***Chứng minh.*** Ta sử dụng quy nạp toán học để chứng minh định lý này. Gọi $G$ là đồ thị với ma trận liền kề $\mathbf{A}$ (giả sử sắp xếp các đỉnh theo thứ tự $v_1, v_2, \ldots, v_n$). Giả sử số các đường đi có độ dài 1 đến $v_j$ là phần tử $(i, j)$ của $\mathbf{A}$, vì phần tử này là số cạnh từ $v_i$ tới $v_j$.

Giả sử phần tử $(i, j)$ của ma trận $\mathbf{A}^r$ là số các đường đi khác nhau độ dài $r$ từ $v_i$ tới $v_j$. Đây là giả thiết quy nạp. Vì $\mathbf{A}^{r+1} = \mathbf{A}^r\mathbf{A}$, nên phần tử $(i,j)$ của $\mathbf{A}^{r+1}$ bằng $b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \ldots + b_{in}a_{nj}$

trong đó $b_{ik}$ là phần tử $(i, k)$ của $\mathbf{A}^r$. Theo giả thiết quy nạp $b_{ik}$ là số đường đi độ dài $r$ từ $v_i$ tới $v_k$.

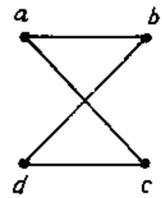
Đường đi độ dài $r + 1$ từ $v_i$ tới $v_j$ sẽ được tạo nên từ đường đi độ dài $r$ từ $v_i$ tới đỉnh trung gian $v_k$ nào đó và một cạnh từ $v_k$ tới $v_j$. Theo quy tắc nhân số các đường đi như thế là tích của số đường đi độ dài $r$ từ $v_i$ tới $v_k$, tức là $b_{ik}$, và số các cạnh từ $v_k$ tới $v_j$ tức là $a_{kj}$. Khi cộng các tích này lại theo tất cả các đỉnh trung gian $v_k$ có thể ta sẽ nhận được kết quả mong muốn.

■

**Ví dụ 8.** Bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ $a$ tới $d$ trong đồ thị đơn $G$ trên Hình 8?

*Giải:* Ma trận liền kề của đồ thị $G$ (theo thứ tự $a$, $b$, $c$, $d$) là

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$




***Hình 8.*** Đồ thị $G$.

Vì thế, số đường đi độ dài 4 từ $a$ tới $d$ là giá trị của phần tử $(i,j)$ của $\mathbf{A}^4$. Vì

$$\mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

nên có đúng 8 đường đi độ dài 4 từ $a$ tới $d$. Kiểm tra trực tiếp trên đồ thị ta được 8 đường đi độ dài 4 từ $a$ tới $d$ là : $a$, $b$, $a$, $b$, $d$ ; $a$, $b$, $a$, $c$, $d$ ; $a$, $b$, $d$, $b$, $d$ ; $a$, $b$, $d$, $c$, $d$ ; $a$, $c$, $a$, $b$, $d$ ; $a$, $c$, $a$, $c$, $d$ ; $a$, $c$, $d$, $b$, $d$ ; và $a$, $c$, $d$, $c$, $d$.

■

Định lý 2 có thể dùng để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của đồ thị (xem Bài tập 32), và cũng có thể dùng để xác định xem đồ thị có liên thông hay không (xem Bài tập 37 và 38).

## BÀI TẬP

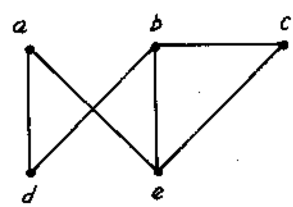
**1.** Mỗi danh sách các đỉnh sau đây có tạo nên đường đi trong đồ thị đã cho không? Đường đi nào là đơn? Đường đi nào là chu trình? Độ dài của các đường đi này là bao nhiêu?

a) $a$, $e$, $b$, $c$, $b$

c) $e$, $b$, $a$, $d$, $b$, $e$

b) $a$, $e$, $a$, $d$, $b$, $c$, $a$

d) $c$, $b$, $d$, $a$, $e$, $c$



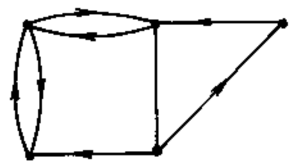

**2.** Mỗi danh sách các đỉnh sau đây có tạo nên đường đi trong đồ thị đã cho không? Đường đi nào là đơn? Đường đi nào là chu trình? Độ dài của các đường đi này là bao nhiêu?

a) $a,\ b,\ e,\ c,\ b$

c) $a,\ d,\ b,\ e,\ a$

b) $a,\ d,\ a,\ d,\ a$

d) $a,\ b,\ e,\ c,\ b,\ d,\ a$

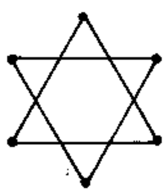


*Trong các Bài tập 3-5 hãy xác định xem các đồ thị sau có liên thông không.*

**3.**

**4.**

**5.**



**6.** Mỗi một đồ thị trong các Bài tập 3–5 có bao nhiêu thành phần liên thông? Hãy tìm các thành phần liên thông đó.

**7*.** Hãy tìm số đường đi độ dài $n$ giữa hai đỉnh khác nhau trong $K_4$ nếu $n$ là

a) 2 b) 3

c) 4 d) 5

**8*.** Hãy tìm số đường đi độ dài $n$ giữa hai đỉnh liền kề tùy ý trong $K_{3,3}$ với mỗi giá trị của $n$ trong Bài 7.

**9*.** Hãy tìm số đường đi độ dài $n$ giữa hai đỉnh không liền kề tùy ý trong $K_{3,3}$ với mỗi giá trị của $n$ trong Bài 7.

**10.** Hãy tìm số đường đi giữa hai đỉnh $c$ và $d$ trong đồ thị trên Hình 1 có độ dài :

a) 2 b) 3 c) 4

d) 5 e) 6 f) 7

**11.** Hãy tìm số đường đi từ $a$ tới $e$ của đồ thị có hướng trong Bài tập 2 có độ dài :

a) 2 b) 3 c) 4

d) 5 e) 6 f) 7

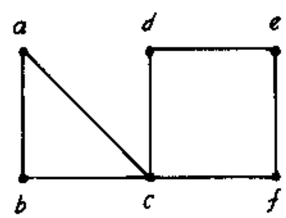
**12*.** Chứng tỏ rằng đồ thị liên thông với $n$ đỉnh có ít nhất $n-1$ cạnh.

**13.** Cho $G = (V, E)$ là một đơn đồ thị, $R$ là một quan hệ trên $V$ gồm các cặp đỉnh $(u, v)$ sao cho có đường đi từ $u$ tới $v$ hoặc $u = v$. Chứng tỏ rằng $R$ là quan hệ tương đương.

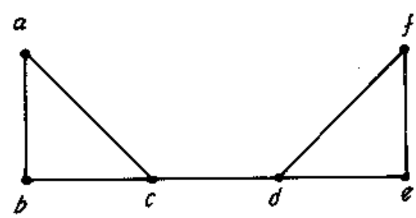
**14*.** Chỉ ra rằng trong mọi đơn đồ thị luôn luôn tồn tại đường đi từ một đỉnh bậc lẻ tới một đỉnh bậc lẻ khác.

*Trong các Bài tập 15–17 hãy tìm tất cả các đỉnh cắt của đồ thị.*

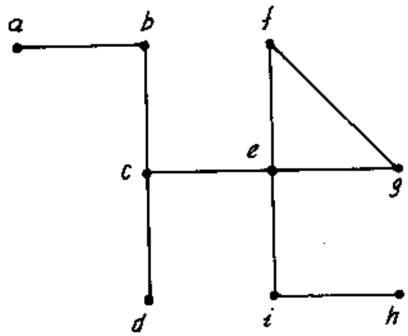
**15.**




**16.**




**17.**




**18.** Hãy tìm tất cả các cạnh cắt (hay cầu) của các đồ thị trong các Bài 15–17.

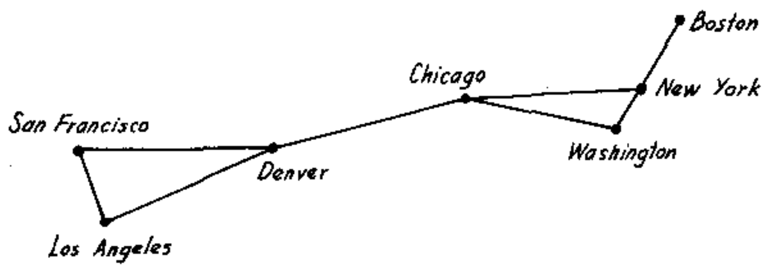
**19*.** Giả sử $v$ là đỉnh đầu mút của một cạnh cắt. Chỉ ra rằng $v$ là đỉnh cắt nếu và chỉ nếu nó không là đỉnh treo.

**20*.** Chỉ ra rằng đỉnh $c$ trong đơn đồ thị liên thông $G$ là đỉnh cắt nếu và chỉ nếu có các đỉnh $u$ và $v$ cả hai đều khác $c$ sao cho mọi đường đi giữa $u$ và $v$ đều qua $c$.

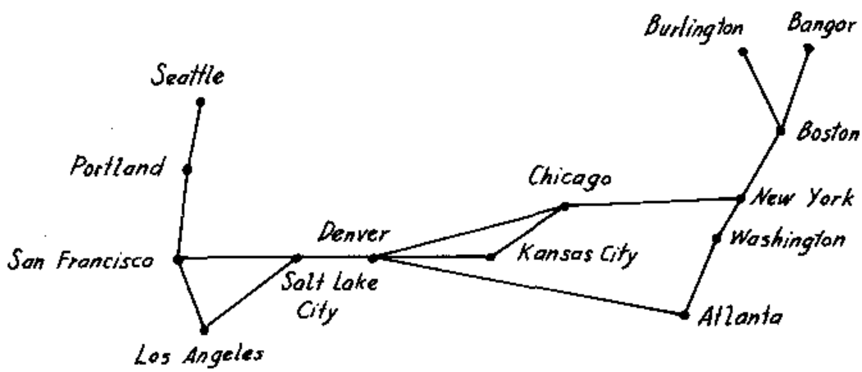
**21*.** Chỉ ra rằng một đơn đồ thị với ít nhất hai đỉnh sẽ có ít nhất hai đỉnh không là đỉnh cắt.

**22*.** Chứng tỏ một cạnh trong đơn đồ thị là cạnh cắt nếu và chỉ nếu cạnh này không có mặt trong bất kỳ chu trình đơn nào của đồ thị.

**23.** Đường truyền thông trong mạng máy tính sẽ được cung cấp đường dự phòng nếu có sự cố làm cho không thể gửi một thông báo nào đi được. Với mỗi mạng truyền thông sau đây hãy xác định các đường cần phải được dự phòng.




a)




b)

**Các đỉnh cơ sở** *trong một đồ thị có hướng là tập S các đỉnh sao cho từ một đỉnh nào đó thuộc S có đường đi tới mọi đỉnh của đồ thị không thuộc và không có đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ thuộc tập S.*

**24.** Hãy tìm các đỉnh cơ sở cho mỗi đồ thị có hướng cho trong các Bài tập 7–9 ở Tiết 7.2.

**25.** Hãy nêu ý nghĩa của các đỉnh cơ sở trong đồ thị ảnh hưởng (Ví dụ 2, Tiết 7.1). Hãy tìm các đỉnh cơ sở của đồ thị ảnh hưởng trong Ví dụ này.

**26.** Chứng tỏ rằng nếu đơn đồ thị liên thông $G$ là hợp của các đồ thị $G_1$ và $G_2$, khi đó $G_1$ và $G_2$ có ít nhất một đỉnh chung.

**27*.** Chỉ ra rằng nếu đơn đồ thị $G$ có $k$ thành phần liên thông và các thành phần liên thông này tương ứng có $n_1, n_2, ..., n_k$ đỉnh, khi đó số các cạnh của $G$ không vượt quá $\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2)$

**28*.** Sử dụng Bài tập 27 hãy chỉ ra rằng một đơn đồ thị với $n$ đỉnh và $k$ thành phần liên thông có nhiều nhất $(n - k)(n - k + 1)/2$ cạnh. (*Gợi ý* : Trước tiên hãy chỉ ra rằng

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^2 \leq n^2 - (k - 1)(2n - k)$$

trong đó $n_i$ là số đỉnh của thành phần liên thông thứ *i*).

**29*.** Chỉ ra rằng đơn đồ thị $n$ đỉnh là liên thông nếu nó có nhiều hơn $(n - 1)(n - 2)/2$ cạnh.

**30.** Hãy mô tả ma trận liền kề của đồ thị với $n$ thành phần liên thông khi các đỉnh của đồ thị được liệt kê sao cho các đỉnh trong mỗi thành liên thông được liệt kê liên tiếp.

**31.** Có bao nhiêu đơn đồ thị liên thông không đẳng cấu với $n$ đỉnh, khi $n$ bằng

a) 2? b) 3?

c) 4? d) 5?

**32.** Hãy giải thích cách dùng Định lý 2 để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh $v$ tới đỉnh $w$ trong một đồ thị.

**33.** Dùng Định lý 2 tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa đỉnh $a$ và đỉnh $f$ trong đa đồ thị trên Hình 1.

**34.** Dùng Định lý 2 tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh $a$ tới đỉnh $c$ trong đồ thị có hướng trong Bài tập 2.

**35.** Cho $P_1$ và $P_2$ là hai đường đi đơn giữa các đỉnh $u$ và $v$ trong đơn đồ thị $G$ không chứa cùng một tập các cạnh. Chỉ ra rằng có một chu trình đơn trong $G$.

36. Chứng tỏ rằng sự tồn tại của chu trình đơn độ dài $k$, trong đó $k$ là nguyên dương lớn hơn 2, là một bất biến đẳng cấu.

37. Hãy giải thích cách dùng Định lý 2 để xác định xem một đồ thị có là liên thông hay không.

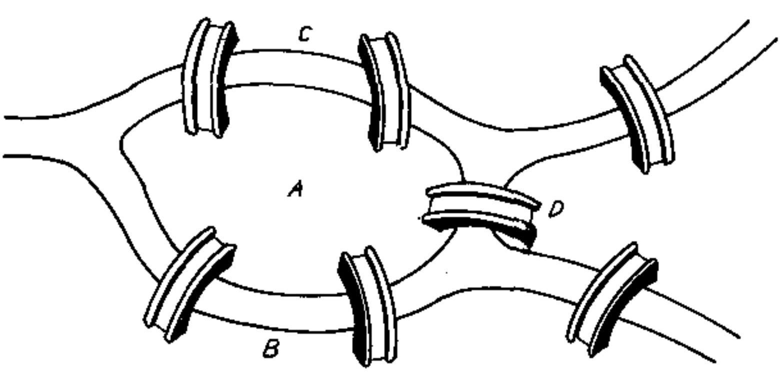
38. Dùng Bài tập 37 chỉ ra rằng đồ thị $G$ trong Hình 2 là liên thông còn đồ thị $H$ trên hình này thì không liên thông.

# 7.5. ĐƯỜNG ĐI EULER VÀ ĐƯỜNG ĐI HAMILTON

## MỞ ĐẦU

Thành phố Konigsberg thuộc Phổ (bây giờ gọi là Kaliningrad thuộc Cộng hòa Nga), được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel. Các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ thứ 18 người ta đã xây bẩy chiếc cầu nối các vùng này với nhau. Hình 1 vẽ các vùng và các cầu qua sông của thành phố.

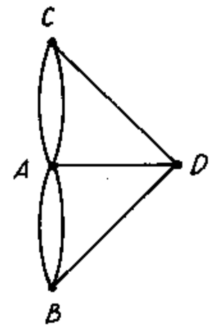
Vào chủ nhật, người dân ở đây thường đi bộ dọc theo các phố. Họ tự hỏi không biết có thể xuất phát tại một địa điểm nào đó trong thành




*Hình 1.* Thành phố Konigsberg ở thế kỷ 18.

phố đi qua tất cả các cầu, mỗi chiếc cầu không đi qua nhiều hơn một lần, rồi lại trở về điểm xuất phát được không.

Nhà toán học Thụy sỹ, Leonhard Euler, đã giải bài toán này. Lời giải của ông công bố năm 1736, có thể là một ứng dụng đầu tiên của lý thuyết đồ thị. Euler đã nghiên cứu bài toán này, mô hình nó bằng một đa đồ thị, bốn vùng được biểu diễn bằng 4 đỉnh, các cầu là các cạnh, như trên Hình 2.




*Hình 2.* Mô hình đa đồ thị của thành phố Konigsberg.

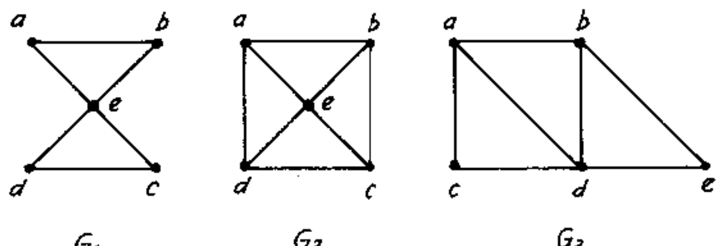
Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu mỗi cầu đi qua không quá một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình này như sau: Có tồn tại chu trình đơn trong đa đồ thị chứa tất cả các cạnh?

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Chu trình đơn chứa tất cả các cạnh của đồ thị $G$ được gọi là *chu trình Euler. Đường đi Euler* trong $G$ là đường đi đơn chứa mọi cạnh của $G$.

Các ví dụ sau minh họa khái niệm chu trình và đường đi Euler.

**Ví dụ 1.** Đồ thị nào trên Hình 3 có chu trình Euler? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler không?

*Giải:* Đồ thị $G_1$ có chu trình Euler, ví dụ $a, e, c, d, e, b, a$. Cả hai đồ thị $G_2$ và $G_3$ đều không có chu trình Euler (độc giả tự kiểm tra lại điều

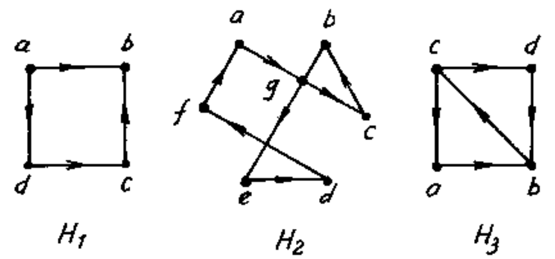



*Hình 3.* Các đồ thị vô hướng $G_1$, $G_2$ và $G_3$.

này). Tuy nhiên $G_3$ có đường đi Euler, cụ thể là *a, c, d, e, b, d, a, b*. $G_2$ không có đường đi Euler (độc giả tự kiểm tra lại).

■

**Ví dụ 2.** Đồ thị nào trên Hình 4 có chu trình Euler? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler không?




***Hình 4.*** Các đồ thị có hướng $H_1$, $H_2$ và $H_3$.

*Giải:* Đồ thị $H_2$ có chu trình Euler, ví dụ *a, g, c, b, g, e, d, f, a*. Cả hai đồ thị $H_1$ và $H_3$ đều không có chu trình Euler (độc giả tự kiểm tra lại điều này). $H_3$ có đường đi Euler, cụ thể là *c, a, b, c, d, b*, nhưng $H_1$ không có đường đi Euler (độc giả tự kiểm tra lại).

## CÁC ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO CHU TRÌNH VÀ ĐƯỜNG ĐI EULER

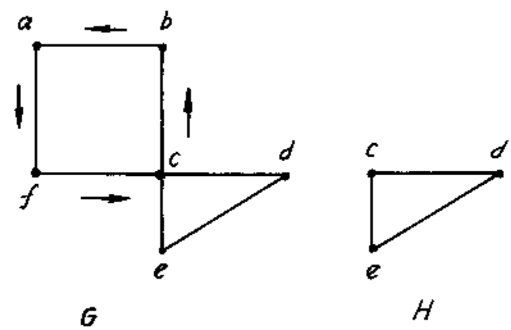
Có các tiêu chuẩn rất đơn giản để khẳng định một đa đồ thị có chu trình hoặc đường đi Euler hay không. Euler đã phát hiện ra các tiêu chuẩn này khi giải bài toán cầu Konigsberg. Chúng ta giả sử trong mục này chỉ xét các đồ thị hữu hạn, tức là các đồ thị có một số hữu hạn các đỉnh và các cạnh.

Chúng ta có thể nói gì nếu một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler? Khi đó ta có thể chỉ ra mọi đỉnh của nó có bậc chẵn. Thật vậy, trước tiên ta thấy chu trình Euler bắt đầu bằng đỉnh *a* và tiếp tục bằng cạnh liên thuộc với *a*, tức là cạnh $\{a, b\}$. Cạnh $\{a, b\}$ góp 1 vào *deg(a)*. Mỗi lần khi chu trình đi qua một đỉnh, nó tăng thêm 2 đơn vị cho bậc của đỉnh đó, vì chu trình đi vào một đỉnh bằng một cạnh liên thuộc và rời khỏi đỉnh này bằng một cạnh liên thuộc khác. Cuối cùng chu trình kết thúc ở đỉnh mà nó xuất phát, do vậy nó tăng thêm 1 vào *deg(a)*. Do đó *deg(a)* phải là một số chẵn, bởi vì chu trình góp 1 khi bắt đầu và 1 khi kết thúc, góp 2 mỗi lần đi qua *a*. Đỉnh khác *a* cũng có bậc chẵn vì chu trình góp 2 đơn vị vào bậc của nó mỗi lần nó đi qua đỉnh này. Do đó ta kết luận, nếu đồ thị liên thông có chu trình Euler thì mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

Có phải điều kiện cần để tồn tại chu trình Euler này cũng là điều kiện đủ? Tức là, có phải nếu tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn thì nhất định tồn tại chu trình Euler trong một đa đồ thị liên thông?

Giả sử $G$ là một đa đồ thị liên thông và bậc của mỗi đỉnh đều là một số chẵn. Chúng ta sẽ xây dựng một chu trình đơn bắt đầu từ đỉnh $a$ tùy ý của $G$. Gọi $x_o = a$. Trước tiên ta chọn tùy ý cạnh $\{x_o, x_1\}$, $\{x_1, x_2\}$, ..., $\{x_{n-1}, x_n\}$ càng dài càng tốt. Ví dụ trong đồ thị $G$ trên Hình 5 ta bắt đầu tại $a$ và chọn liên tiếp các cạnh $\{a,f\}$, $\{f, c\}$, $\{c, b\}$ và $\{b, a\}$.

Đường đi sẽ kết thúc vì đồ thị có một số hữu hạn các đỉnh. Nó bắt đầu tại $a$ với cạnh có dạng $\{a, x\}$ và kết thúc tại $a$ với cạnh dạng $\{y, a\}$. Điều này xảy ra là bởi vì mỗi lần đường đi qua một đỉnh bậc chẵn nó chỉ dùng một cạnh để vào đỉnh này như vậy ít nhất vẫn còn một cạnh nữa để ra khỏi đỉnh này. Đường này có thể dùng tất cả các cạnh hoặc có thể không.




***Hình*** *5.* Xây dựng chu trình Euler trong G.

Nếu tất cả các cạnh được sử dụng thì ta nhận được chu trình Euler. Trong trường hợp ngược lại, ta gọi $H$ là đồ thị con nhận được từ $G$ bằng cách xóa các cạnh đã dùng và các đỉnh không liên thuộc với các cạnh còn lại. Chẳng hạn khi xóa đi chu trình $a$, $f$, $c$, $b$, $a$ khỏi đồ thị trên Hình 5, chúng ta nhận được đồ thị con đặt tên là $H$.

Vì $G$ là liên thông, $H$ có ít nhất một đỉnh chung với chu trình đã bị xóa. Gọi $w$ là đỉnh như vậy. (Trong ví dụ của ta đó là đỉnh $c$).

Mỗi đỉnh của $H$ có bậc chẵn (vì tất cả các đỉnh của $G$ bậc chẵn, và với mỗi đỉnh ta xóa đi từng cặp liên thuộc với nó để tạo ra $H$). Lưu ý rằng $H$ có thể là không liên thông. Bắt đầu từ $w$ ta xây dựng đường đi đơn trong $H$ bằng cách chọn càng nhiều cạnh càng tốt như đã làm đối với $G$. Đường này phải kết thúc tại $w$. Chẳng hạn, trên Hình 5, $c$, $d$, $e$, $c$ là một đường đi trong $H$. Tiếp theo ta tạo một chu trình trong $G$ bằng cách ghép chu trình trong $H$ và chu trình ban đầu trong $G$ (điều này làm được vì $w$ là một đỉnh của chu trình này). Thực hiện điều này trên đồ thị của Hình 5 ta được chu trình $a$, $f$, $c$, $d$, $e$, $c$, $b$, $a$.

Tiếp tục quá trình này cho tới khi tất cả các đỉnh được sử dụng (Quá trình này phải kết thúc vì chỉ có một số hữu hạn các cạnh trong đồ thị). Và do vậy ta đã xây dựng được chu trình Euler. Cách xây dựng chu trình đã chứng tỏ nếu các đỉnh của một đa đồ thị liên thông có bậc chẵn thì đồ thị có chu trình Euler.

Tổng kết những kết quả này ta có Định lý 1.

**ĐỊNH LÝ 1.** Một đa đồ thị liên thông có chu trình Euler nếu và chỉ nếu mỗi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.

Bây giờ chúng ta giải bài toán cầu Konigsberg. Vì đa đồ thị biểu diễn các cầu này như trên Hình 2, có 4 đỉnh bậc lẻ, nên không tồn tại chu trình Euler. Không có cách nào để một người có thể xuất phát tại một điểm nào đó, đi qua mỗi chiếc cầu đúng một lần và lại trở về điểm xuất phát.

Thuật toán 1 đưa ra một thủ tục xây dựng chu trình Euler theo cách đã bàn luận ở trên. (Vì chu trình được chọn tùy ý nên có một vài điều không rõ ràng. Chúng ta không khó khăn mà loại bỏ sự mập mờ này bằng cách chỉ rõ mỗi bước của thủ tục một cách chính xác hơn).

---

THUẬT TOÁN 1. Xây dựng chu trình Euler.

**procedure** *Euler* (G : đa đồ thị liên thông với tất cả các đỉnh bậc chẵn)
    *chu trình* := chu trình trong *G* bắt đầu tại một đỉnh được chọn
        tùy ý và các cạnh được thêm vào để xây dựng đường
        đi qua các đỉnh và cuối cùng quay lại đỉnh này.

    *H* := *G* với các cạnh của *G* sau khi bỏ đi chu trình

**while** *H* còn các cạnh

**begin**

    *Chu trình con* := chu trình trong *H* bắt đầu tại đỉnh trong *H* cũng
        là đỉnh đầu mút của một cạnh thuộc chu trình.

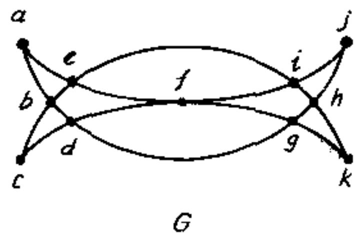
    *H* : = *H* với các cạnh của *chu trình con*, và tất cả các đỉnh cô
        lập bị loại bỏ.

    *chu trình* : = *chu trình* với *chu trình con* được chèn vào tại một
        đỉnh thích hợp

**end** {*chu trình* là chu trình Euler}

Trong ví dụ sau cho ta cách dùng đường đi và chu trình Euler để giải các bài toán trò chơi.

**Ví dụ 3.** Nhiều trò chơi yêu cầu bạn vẽ một bức tranh bằng sự chuyển động liên tục và không được nâng bút khỏi mặt giấy, sao cho không phần nào của bức tranh được vẽ lại. Chúng ta có thể giải bài toán này bằng chu trình và đường đi Euler. Ví dụ có thể vẽ **thanh mã tấu của Mohammed** trên Hình 6 bằng cách như vậy được không, nếu bắt đầu và kết thúc vẽ tại cùng một điểm?




***Hình 6.*** Thanh mã tấu của Mohammed.

*Giải:* Chúng ta có thể dễ dàng giải bài toán này. Vì tất cả các đỉnh của đồ thị trên Hình 6 có bậc chẵn nên nó có chu trình Euler. Bây giờ ta sẽ dùng Thuật toán 1 để xây dựng chu trình đó. Trước tiên ta xây dựng chu trình $a$, $b$, $d$, $c$, $b$, $e$, $i$, $f$, $e$, $a$. Để nhận được đồ thị con $H$ ta xóa các cạnh trong chu trình này và tất cả các đỉnh trở thành cô lập khi ta xóa các cạnh đó. Sau đó ta lại xây dựng được chu trình $d$, $g$, $h$, $j$, $i$, $h$, $k$, $g$, $f$, $d$ trong $H$. Khi đó tất cả các cạnh của đồ thị $G$ đã được sử dụng. Ghép chu trình mới vào chu trình trước tại các vị trí thích hợp, ta sẽ nhận được chu trình Euler $a$, $b$, $d$, $g$, $h$, $j$, $i$, $h$, $k$, $g$, $f$, $d$, $c$, $b$, $e$, $i$, $f$, $e$, $a$. Chu trình này cho cách vẽ thanh mã tấu không nâng bút khỏi mặt giấy hoặc vẽ lại một phần của bức vẽ.

■

Một thuật toán khác để xây dựng chu trình Euler, gọi là thuật toán Fleury, được mô tả trong các bài tập ở cuối mục này.

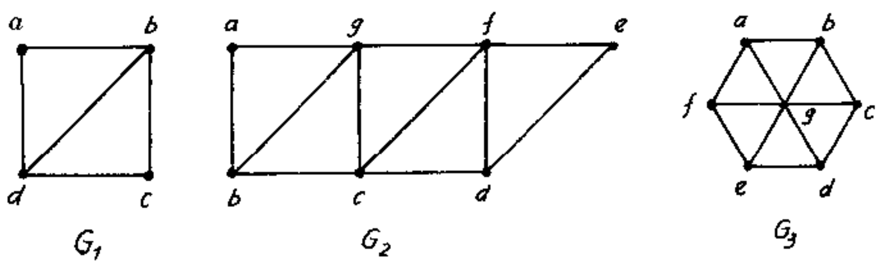
Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng một đa đồ thị liên thông có đường đi Euler (và không có chu trình Euler) nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ. Trước tiên, ta giả sử đồ thị đã cho có đường đi Euler từ $a$ tới $b$, nhưng không có chu trình Euler. Cạnh đầu tiên của đường đi góp 1 vào $deg(a)$. Sau đó mỗi lần đường đi lại qua đỉnh $a$ thì nó tăng thêm 2 đơn vị cho $deg(a)$. Do vậy, $a$ là một đỉnh bậc lẻ. Cạnh cuối cùng của đường đi góp 1 cho $deg(b)$ và mỗi lần đi qua $b$ nó cũng tăng thêm 2 cho $deg(b)$. Vì thế bậc của $b$ là lẻ. Các đỉnh trung gian đều có bậc chẵn vì mỗi lần đường đi tới rồi lại rời nó nên tăng 2 đơn vị cho bậc của nó. Vậy, đồ thị đã cho có đúng 2 đỉnh bậc lẻ.

Bây giờ ta giả sử ngược lại, đồ thị có đúng hai đỉnh bậc lẻ, chẳng hạn $a$ và $b$. Ta xét đồ thị rộng hơn tạo nên bằng cách thêm một cạnh nối $a$ với $b$ vào đồ thị xuất phát. Khi đó bậc của tất cả các đỉnh của đồ thị mới này đều là số chẵn, theo Định lý 1, nó có chu trình Euler. Xóa cạnh mới vẽ thêm vào ta sẽ nhận được đường đi Euler của đồ thị xuất phát.

Định lý sau đây sẽ tổng kết những kết quả này.

**ĐỊNH LÝ 2.** Đa đồ thị liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

**Ví dụ 4.** Đồ thị nào trên Hình 7 có đường đi Euler?




***Hình*** *7.* Ba đồ thị vô hướng.

***Giải:*** $G_1$ có đúng hai đỉnh bậc lẻ là $b$ và $d$. Do đó, nó có đường đi Euler nhận $b$ và $d$ là các điểm đầu mút. Một trong các đường đi Euler là $d$, $a$, $b$, $c$, $d$, $b$. Tương tự $G_2$ cũng có đúng hai đỉnh bậc lẻ là $b$ và $d$. Do đó nó có đường đi Euler nhận $b$ và $d$ là các điểm đầu mút. Một trong các đường đi Euler là $b$, $a$, $g$, $b$, $c$, $g$, $f$, $c$, $d$, $f$, $e$, $d$. Còn $G_3$ không có đường đi Euler vì nó có 6 đỉnh bậc lẻ.

■

Bây giờ trở lại bài toán cầu Konigsberg : Có thể xuất phát từ một địa điểm nào đó trong thành phố đi qua tất cả các cầu (mỗi cầu đi qua đúng một lần) và kết thúc hành trình tại một điểm nào đó trong thành phố được không? Như đã thấy đa đồ thị biểu diễn các cầu ở Konigsberg có 4 đỉnh bậc lẻ, theo Định lý 2 không có đường đi Euler trong đồ thị này. Vì vậy không thể có hành trình như bài toán nêu ra.

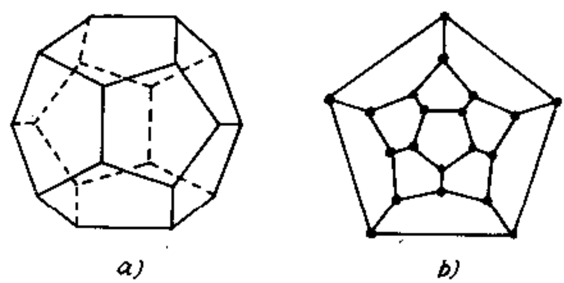
Điều kiện cần và đủ để tồn tại đường đi và chu trình Euler trong một đồ thị có hướng sẽ được bàn luận trong các Bài tập ở cuối Tiết này.

## ĐƯỜNG ĐI VÀ CHU TRÌNH HAMILTON

Chúng ta đã nghiên cứu điều kiện cần và đủ để tồn tại đường đi và chu trình đi qua mọi cạnh của đồ thị, mỗi cạnh qua đúng một lần. Liệu ta có thể làm tương tự đối với đường đi và chu trình chứa mọi đỉnh của đồ thị đúng một lần không?

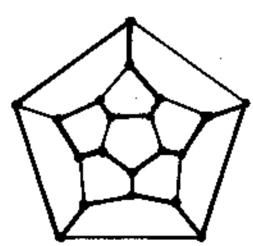
**ĐỊNH NGHĨA 2.** Đường đi $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là *đường đi Hamilton* nếu $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ và $x_i \neq x_j$ với $0 \leq i < j \leq n$. Chu trình $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ $(n > 1)$ trong đồ thị $G = (V, E)$ được gọi là **chu trình Hamilton** nếu $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ là đường đi Hamilton.

Những thuật ngữ này xuất phát từ trò chơi đố vui do William Rowan Hamilton,, nhà toán học người Ailen, nghĩ ra năm 1857. Giả sử ta có một khối 12 mặt, mỗi mặt là một hình ngũ giác đều như trên Hình 8a). Mỗi đỉnh trong 20 đỉnh của khối này được đặt bằng tên của một thành phố. Hãy tìm một đường xuất phát từ một thành phố, đi dọc theo các cạnh của khối, ghé thăm mỗi một trong 19 thành phố còn lại đúng một lần, cuối cùng lại trở về thành phố ban đầu.



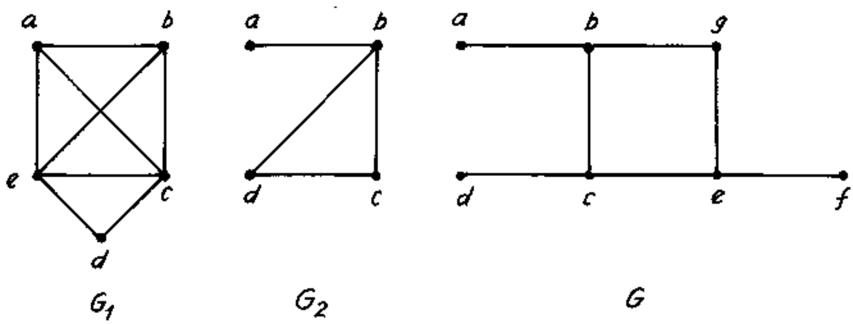

*Hình 8.* Trò chơi "Vòng quanh thế giới" của Hamilton.

Chúng ta xét bài toán dưới dạng tương đương : Trong đồ thị trên Hình 8b có tồn tại hay không một chu trình đi qua mọi đỉnh, mỗi đỉnh đúng một lần? Lời giải của trò chơi đố vui Hamilton được hiểu diễn trên Hình 9.



*Hình 9.* Lời giải của trò chơi "Vòng quanh thế giới".

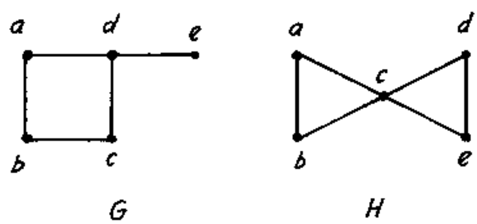
**Ví dụ 5.** Đồ thị nào trong các đồ thị đơn trên Hình 10 có chu trình Hamilton ? Nếu không, có đường đi Hamilton không?




***Hình 10.*** Ba đơn đồ thị.

*Giải:* $G_1$ có chu trình Hamilton $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $a$. Không có chu trình Hamilton trong $G_2$ (vì bất cứ chu trình nào chứa mọi đỉnh cũng phải chứa cạnh $\{a, b\}$ hai lần). Nhưng $G_2$ có đường đi Hamilton $a$, $b$, $c$, $d$. $G_3$ không có cả chu trình Hamilton lẫn đường đi Hamilton, vì bất kỳ đường đi nào chứa mọi đỉnh cũng phải chứa một trong các cạnh $\{a, b\}$, $\{d, c\}$ và $\{e, f\}$ quá một lần.

**Ví dụ 6.** Hãy chỉ ra rằng không một đồ thị nào trên Hình 11 có chu trình Hamilton.




***Hình 11.*** Hai đồ thị không có chu trình Hamilton.

*Giải:* Không có chu trình Hamilton trong đồ thị $G$ vì $G$ có đỉnh bậc 1, đó là đỉnh $e$.

Bây giờ xét $H$. Vì bậc của các đỉnh $a$, $b$, $d$ và $e$ đều bằng 2 nên mọi cạnh liên thuộc với các đỉnh này phải thuộc chu trình Hamilton nào đó. Dễ dàng thấy rằng không tồn tại chu trình Hamilton trong $H$ vì nếu ngược lại thì chu trình đó phải chứa cả 4 cạnh liên thuộc với $c$, điều này là không thể xảy ra.

**Ví dụ 7.** Chỉ ra rằng $K_n$ có chu trình Hamilton với mọi $n \geq 3$.

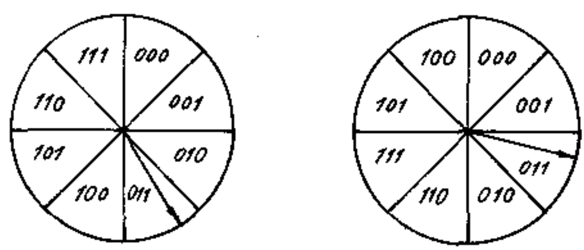
*Giải:* Chúng ta có thể xây dựng chu trình Hamilton trong $K_n$ xuất phát từ bất kỳ đỉnh nào. Một chu trình như thế có thể xây dựng bằng cách ghé thăm các đỉnh theo một thứ tự tùy chọn, sao cho đường đi bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, mọi đỉnh đều được ghé thăm đúng một lần. Điều đó là có thể vì giữa hai đỉnh bất kỳ của $K_n$ đều có các cạnh.

Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu định lý cho ta điều kiện đủ để tồn tại chu trình Hamilton. Đây là một trong số các định lý quen biết.

**ĐỊNH LÝ 3.** Giả sử $G$ là một đơn đồ thị liên thông với $n$ đỉnh trong đó $n \geq 3$, khi đó $G$ có chu trình Hamilton nếu bậc của mỗi đỉnh ít nhất bằng $n/2$.

Bây giờ ta sẽ đưa ra một ứng dụng của chu trình Hamilton để mã hóa.

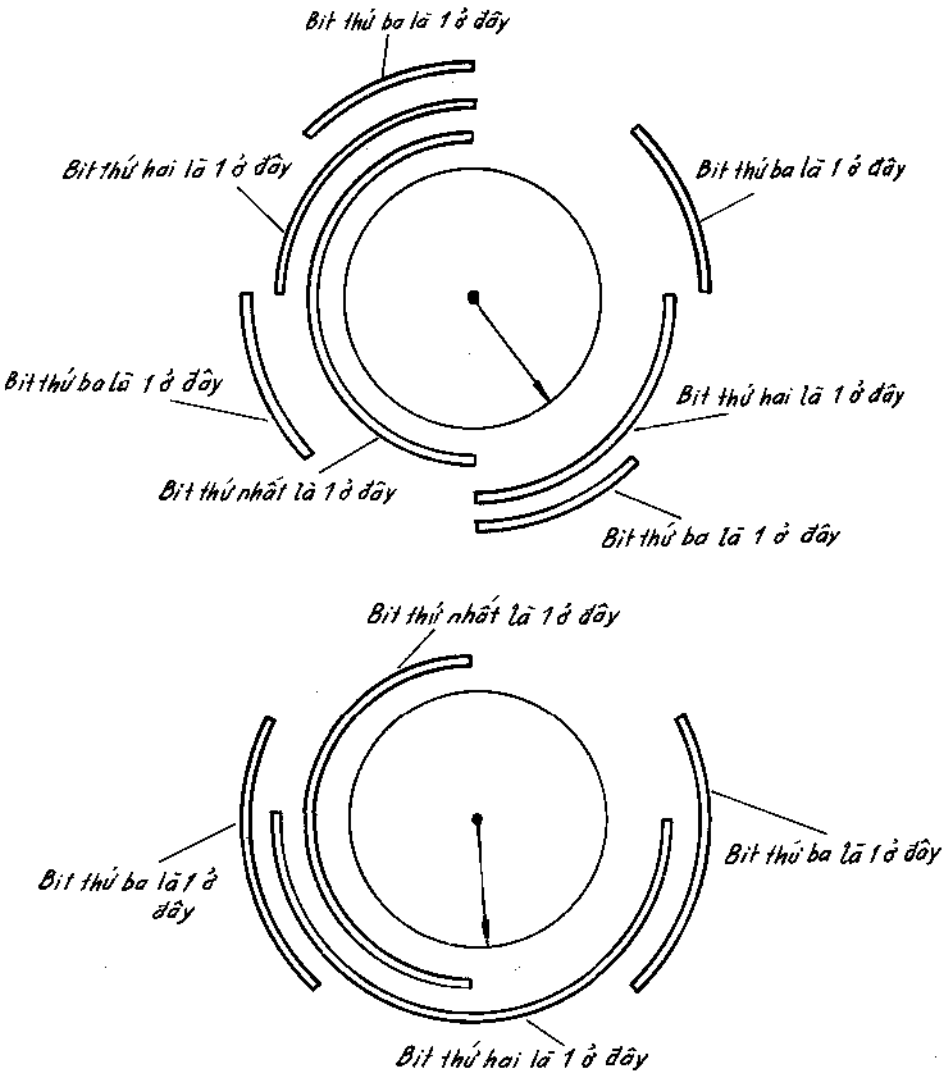
**Ví dụ 8.** *Mã Gray.* Vị trí của kim chỉ thị xoay tròn có thể được biểu diễn dưới dạng số. Một cách thể hiện là chia đường tròn thành $2^n$ cung có độ dài hằng nhau và cho mỗi cung ứng với một xâu nhị phân độ dài $n$. Trên Hình 12 biểu diễn 2 cách chuyển đổi nhờ các xâu nhị phân độ dài 3.




*Hình 12.* Chuyển đổi vị trí của kim chỉ thị thành dạng số.

Biểu diễn số của vị trí của kim chỉ thị có thể xác định bằng $n$ chỗ tiếp xúc. Mỗi tiếp xúc được dùng để đọc một bit trong biểu diễn số của vị trí. Điều này được minh họa trên Hình 13.

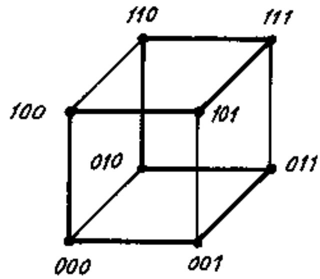
Khi kim ở gần giáp ranh của hai cung, có thể dễ lầm lẫn khi đọc vị trí của nó. Điều này có thể gây nên các lỗi lớn khi đọc các xâu nhị phân. Ví dụ, theo sơ đồ mã hóa ở Hình 12a, nếu có một lỗi nhỏ khi xác định vị trí của kim, xâu nhị phân 100 được đọc thay cho 011. Cả 3 bit đều sai.




***Hình 13.*** Biểu diễn số của vị trí kim chỉ thị.

Để giảm đến mức tối thiểu ảnh hưởng của lỗi xác định vị trí của kim, người ta gán các xâu nhị phân cho $2^n$ cung sao cho hai xâu biểu diễn bằng hai cung kề nhau chỉ sai khác nhau một bit. Điều này được thể hiện trong sơ đồ mã hóa trên Hình 12b. Lỗi khi xác định vị trí của kim chỉ thị cho xâu 010 thay cho xâu 011. Chỉ một bit bị sai.

**Mã Gray** là cách gán nhãn cho các cung của đường tròn sao cho các cung kề nhau được gán bằng các xâu khác nhau đúng một bit. Cách gán trong Hình 12b là một mã Gray. Chúng ta có thể tìm mã Gray bằng cách liệt kê tất cả các xâu nhị phân độ dài $n$ sao cho mỗi xâu chỉ khác xâu trước nó tại đúng một vị trí. Và xâu cuối cùng khác với xâu đầu tiên cũng chỉ ở một vị trí. Chúng ta có thể mô hình bài toán này bằng khối $n$ chiều $Q_n$. Cái mà chúng ta cần để giải bài toán này là một chu trình Hamilton trong $Qn$. Các chu trình Hamilton như thế dễ dàng tìm được. Ví dụ, chu trình Hamilton cho $Q_3$ được thể hiện trên Hình 14. Dãy các xâu nhị phân sai khác nhau đúng một bit được sinh bởi chu trình Hamilton là 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100. ■

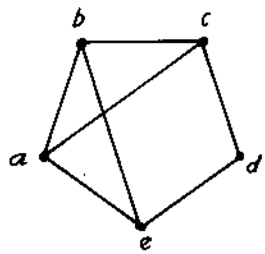



***Hình 14.*** Chu trình Hamilton đối với $Q_3$

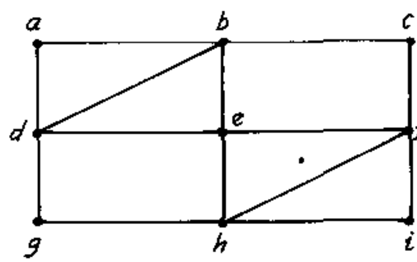
## BÀI TẬP

*Trong các Bài tập 1–7 hãy xác định xem mỗi đồ thị có chu trình Euler hay không. Xây dựng chu trình đó, nếu nó tồn tại.*

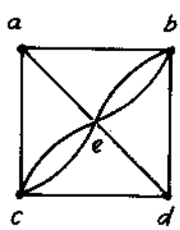
**1.**



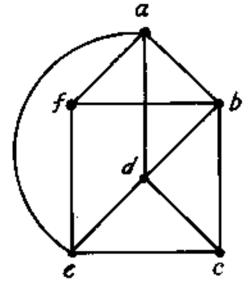

**2.**



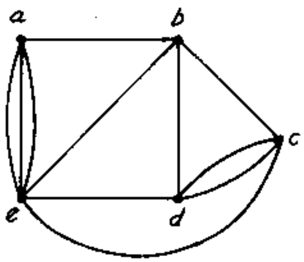

**3.**



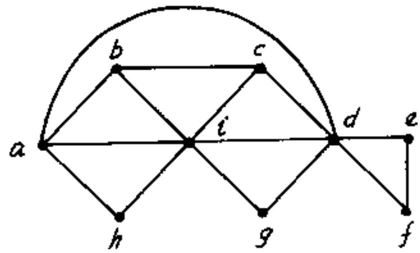

**4.**



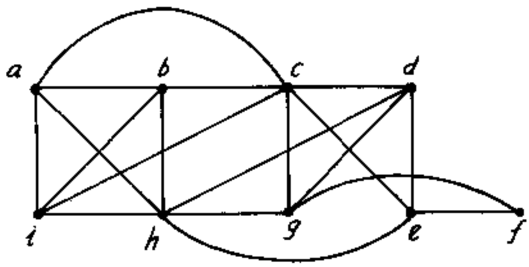
**5.**




**6.**




**7.**




**8.** Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 1 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

**9.** Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 2 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

**10.** Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 3 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

**11.** Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 4 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

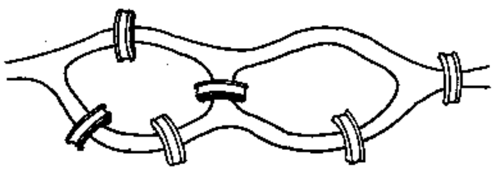
**12.** Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 5 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

**13.** Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 6 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

**14.** Hãy xác định xem đồ thị trong Bài tập 7 có đường đi Euler không. Hãy xây dựng đường đi như thế, nếu có.

**15.** Ngoài 7 chiếc cầu đã xây dựng từ thế kỷ thứ 18, ở Kaliningrad (Konigsberg), người ta xây thêm hai chiếc nữa nối khu $B$ với khu $C$ và khu $B$ với khu $D$. Một người nào đó có thể đi qua 9 chiếc cầu, mỗi chiếc đi qua đúng một lần, và lại trở về nơi xuất phát được không?

**16.** Một người nào đó có thể đi qua những chiếc cầu như trên hình vẽ sau, mỗi chiếc cầu đi qua đúng một lần, và lại trở về nơi xuất phát được không?

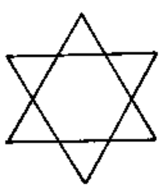


**17.** Khi nào có thể sơn vạch phân đôi các đường phố trong một thành phố mà không cần đi qua một phố quá một lần? (Giả sử tất cả các phố đều là đường hai chiều)

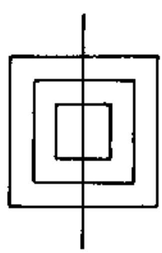
**18.** Hãy lập một thủ tục tương tự như Thuật toán 1 để xây dựng các đường đi Euler trong một đa đồ thị.

*Trong các Bài tập 19-21 hãy xác định xem có thể vẽ bức tranh bằng một nét liền, không nâng bút khỏi giấy vẽ hoặc vẽ lại một phần bức tranh đó hay không.*

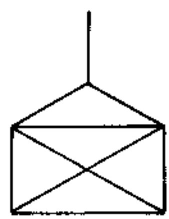
**19.**



**20.**



**21.**

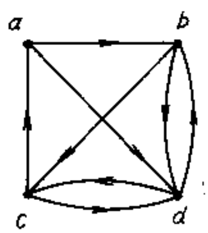


**22*.** Chỉ ra rằng trong một đa đồ thị có hướng không có đỉnh cô lập luôn tồn tại chu trình Euler nếu và chỉ nếu đồ thị là liên thông yếu đồng thời bậc–vào và bậc–ra của mỗi đỉnh là bằng nhau.

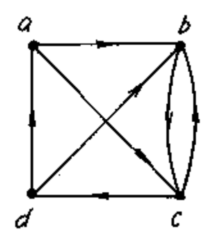
**23*.** Giả sử $G$ là một đa đồ thị có hướng không có đỉnh cô lập. Chỉ ra rằng $G$ có đường đi Euler, nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu đồ thị là liên thông yếu đồng thời bậc–vào và bậc–ra của tất cả các đỉnh là bằng nhau, trừ hai đỉnh, một đỉnh có bậc–vào lớn hơn bậc–ra một đơn vị, còn đỉnh kia có bậc–ra lớn hơn bậc–vào một đơn vị.

*Trong các Bài tập 24–28 hãy xác định xem các đồ thị có hướng đã cho có chu trình Euler hay không. Xây dựng các chu trình này, nếu chúng tồn tại.*

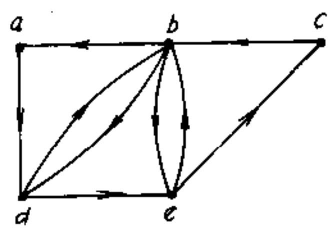
**24.**



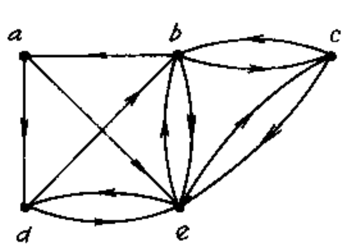

**25.**



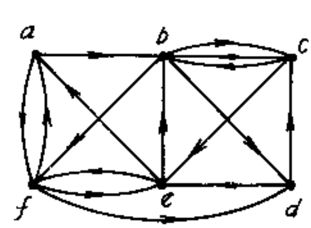

**26.**




**27.**




**28.**




**29.** Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 24 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

**30.** Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 25 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

**31.** Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 26 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

**32.** Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 27 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

**33.** Xác định xem đồ thị có hướng trong Bài tập 28 có đường đi Euler hay không. Xây dựng đường đi Euler này, nếu nó tồn tại.

**34*.** Hãy thiết kế một thuật toán để xây dựng một chu trình Euler trong đồ thị có hướng.

**35.** Hãy thiết kế một thuật toán để xây dựng một đường đi Euler trong đồ thị có hướng.

**36.** Với giá trị nào của $n$ các đồ thị sau đây có chu trình Euler?

a) $K_n$ b) $C_n$

c) $W_n$ d) $Q_n$

**37.** Với giá trị nào của $n$ các đồ thị trong Bài 36 có đường đi nhưng không có chu trình Euler?

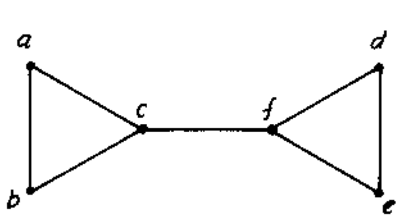
**38.** Với giá trị nào của $m$ và $n$ các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có :

a) chu trình Euler? b) đường đi Euler?

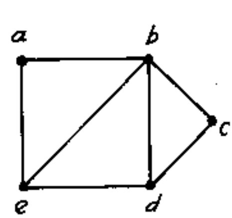
**39.** Hãy xác định số lần nhỏ nhất cần phải nâng bút khỏi giấy khi vẽ các đồ thị trong các Bài tập 1–7, mà không được vẽ lại bất kỳ phần nào của đồ thị.

*Trong các Bài tập từ 40–46 hãy xác định xem các đồ thị đã cho có chu trình Hamilton hay không. Nếu có hãy tìm các chu trình như thế. Nếu không, hãy giải thích lý do vì sao không tồn tại.*

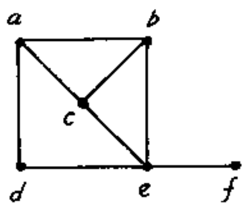
**40.**



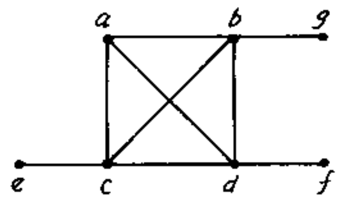

**41.**



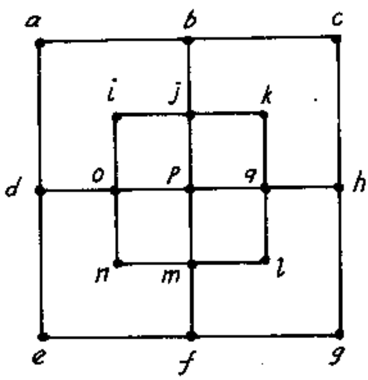
**42.**



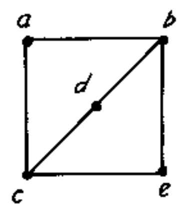

**43.**



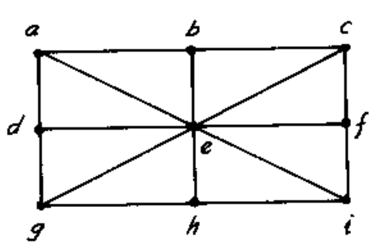

**44.**




**45.**




**46.**




**47.** Đồ thị trong Bài 40 có đường đi Hamilton không ? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

**48.** Đồ thị trong bài 41 có đường đi Hamilton không? Nếu có hãy tìm đường đi đó. Nếu không hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

**49.** Đồ thị trong bài 42 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

**50.** Đồ thị trong Bài 43 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

**51.** Đồ thị trong Bài 44 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

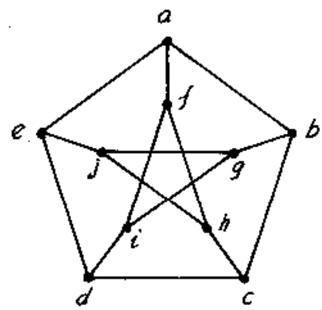
**52.** Đồ thị trong Bài 45 có đường đi Hamilton không? Nếu có hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

**53*.** Đồ thị trong Bài 46 có đường đi Hamilton không? Nếu có, hãy tìm đường đi đó. Nếu không, hãy đưa ra nguyên nhân vì sao đường đi như thế không tồn tại.

**54.** Với giá trị nào của $n$ các đồ thị trong Bài 36 có đường đi Hamilton?

**55.** Với giá trị nào của $m$ và $n$ các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$ có chu trình Hamilton?

**56*.** Chỉ ra rằng đồ thị Petersen biểu diễn trên hình vẽ bên không có chu trình Hamilton, nhưng đồ thị con nhận được bằng cách xóa một đỉnh $v$ và tất cả các đỉnh liền thuộc với $v$ sẽ có chu trình Hamilton.




**57*.** Chỉ ra rằng có mã Gray bậc $n$, với $n$ nguyên dương. Hay cũng vậy, chứng minh khối $n$ chiều, $n > 1$ luôn luôn có chu trình Hamilton (*Gợi ý* : Dùng quy nạp toán học. Chỉ ra cách tạo mã Gray bậc $n$ từ bậc $n - 1$).

**Thuật toán Fleury** *xây dựng chu trình Euler bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của một đa đồ thị liên thông và tạo chu trình bằng cách chọn lần lượt các cạnh. Mỗi lần một cạnh được chọn, nó được xóa đi. Các cạnh được chọn liên tiếp sao cho mỗi cạnh bắt đầu tại nơi mà cạnh liền trước kết thúc và chỉ chọn cầu nếu không còn cạnh nào khác để chọn.*

**58.** Dùng thuật toán Feleury để tìm chu trình trong đồ thị $G$ của Ví dụ 5.

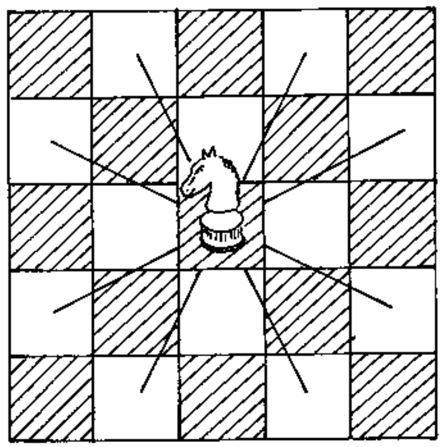
**59*.** Biểu diễn thuật toán Fleury dưới dạng giả mã.

**60*.** Chứng minh rằng thuật toán Fleury luôn luôn tạo ra chu trình Euler.

**61*.** Hãy đưa ra một biến thể của thuật toán Fleury để xây dựng đường đi Euler.

**62.** Một thông báo có thể gửi qua mạng máy tính để thực hiện các cuộc trắc nghiệm các đường truyền thông và các thiết bị. Các loại đường đi nào có thể được dùng để thử các đường truyền thông? Để thử các thiết bị?

**63.** Chứng tỏ rằng đồ thị phân đôi với một số lẻ các đỉnh không có chu trình Hamilton



**Con mã** có thể di chuyển hoặc là hai ô theo chiều ngang và một ô theo chiều dọc hoặc là hai ô theo chiều dọc và một ô theo chiều ngang, tức là nếu nó đang ở ô có tọa độ $(x, y)$ thì nó có thể di chuyển tới một ô bất kỳ trong 8 ô $(x\pm 2, y\pm 1)$, $(x\pm 1, y\pm 2)$, nếu các ô đó vẫn còn nằm trong bàn cờ (Xem hình vẽ bên).

**Hành trình của con mã** *là dãy các di chuyển hợp lệ từ một ô nào đó đến tất cả các ô, mỗi ô đúng một lần. Hành trình của con mã được gọi là* **tái lập** *nếu có một di chuyển đưa quân mã từ ô cuối cùng của hành trình về ô xuất phát. Chúng ta có thể mô hình các hành trình bằng đồ thị với các đỉnh là các ô của bàn cờ, và các cạnh nối hai đỉnh nếu quân mã có thể di chuyển hợp lệ giữa các ô biểu diễn bằng các đỉnh này.*

**64.** Vẽ đồ thị biểu diễn các di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ $3 \times 3$.

**65.** Vẽ đồ thị biểu diễn các di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ $3 \times 4$.

**66.** a) Chứng minh rằng việc tìm hành trình trên bàn cờ $m \times n$ là tương đương với việc tìm đường đi Hamilton trên đồ thị biểu diễn các di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ này.

b) Chứng minh rằng việc tìm hành trình tái lập trên bàn cờ $m \times n$ là tương đương với việc tìm chu trình Hamilton trên đồ thị tương ứng.

**67***. Chứng tỏ có hành trình của quân mã trên bàn cờ $3 \times 4$.

**68***. Chứng tỏ không có hành trình của quân mã trên bàn cờ $3 \times 3$.

**69***. Chứng tỏ không có hành trình của quân mã trên bàn cờ $4 \times 4$.

**70**. Chứng tỏ đồ thị biểu diễn di chuyển hợp lệ của quân mã trên bàn cờ $m \times n$, với mọi $m$, $n$ nguyên dương là đồ thị phân đôi.

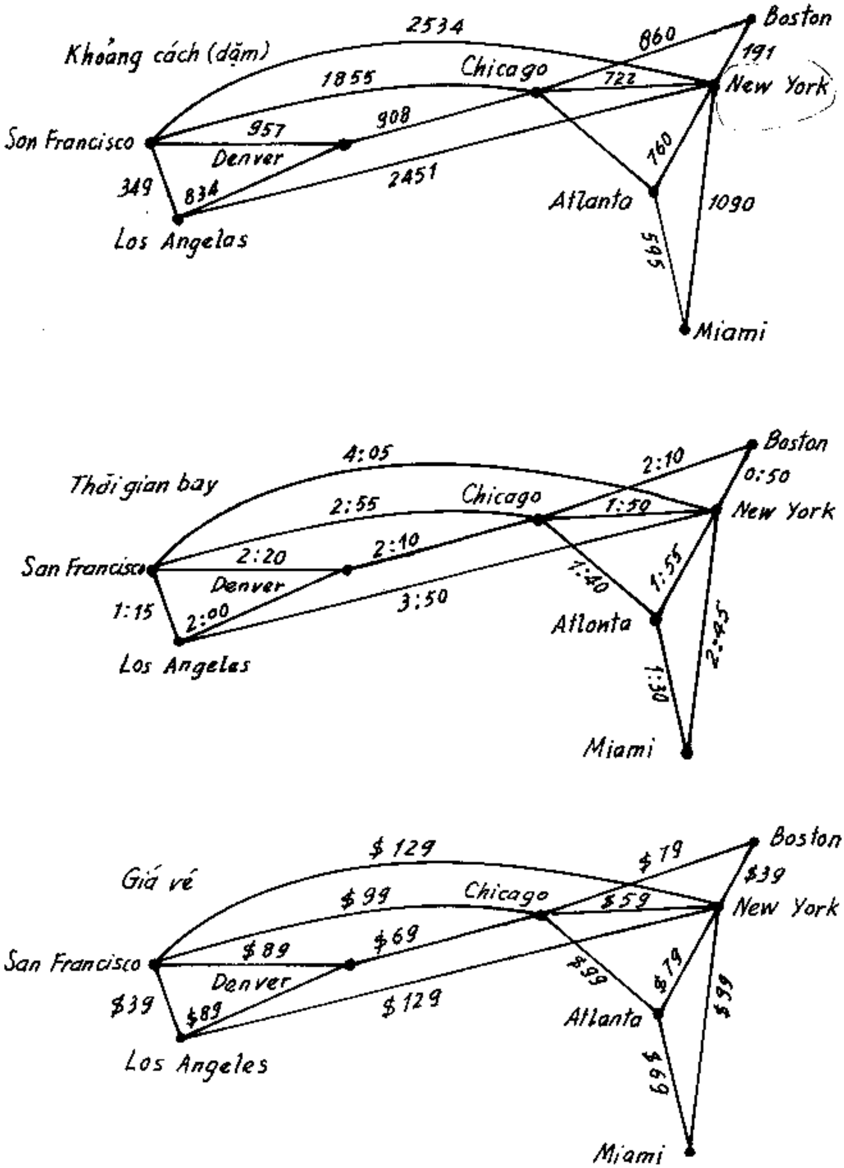
**71**. Chứng tỏ rằng không có hành trình tái lập của quân mã trên bàn cờ $m \times n$, với mọi $m$, $n$ lẻ.
*(Gợi ý* : Dùng các Bài tập 63, 66b và 70).

**72***. Chứng tỏ rằng có hành trình của quân mã trên bàn cờ $8 \times 8$.
*(Gợi ý* : Ta có thể xây dựng hành trình bằng phương pháp Warnsdorff Xuất phát từ ô bất kỳ và luôn luôn di chuyển tới ô mà số ô chưa dùng nối với nó là nhỏ nhất. Bằng cách này có thể xây dựng được hành trình của quân mã nếu nó tồn tại).

## 7.6. BÀI TOÁN ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

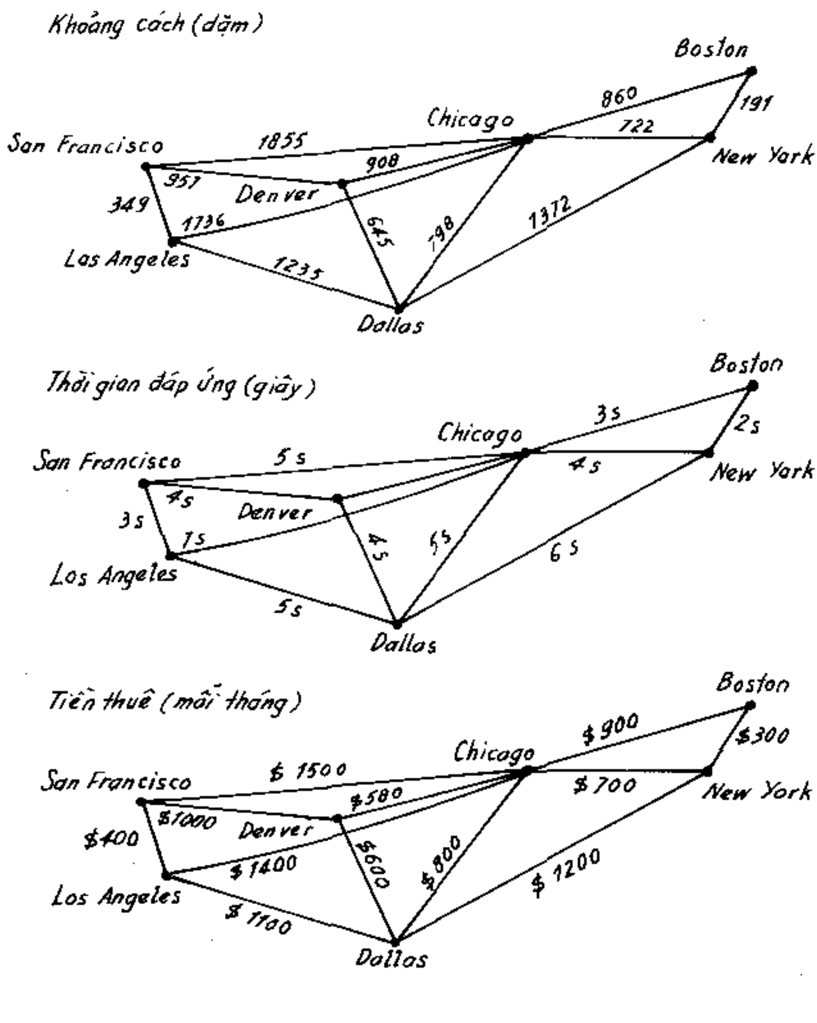
### MỞ ĐẦU

Nhiều bài toán có thể mô hình bằng **đồ thị có trọng số**. Đó là đồ thị mà mỗi cạnh của nó được gán một con số (nguyên hoặc thực) gọi là **trọng số** ứng với cạnh đó. Ví dụ ta cần mô hình một hệ thống đường hàng không. Trong mô hình cơ sở trước đây, mỗi thành phố được biểu diễn bằng một đỉnh, mỗi chuyến bay là một cạnh nối hai đỉnh tương ứng. Nếu trong bài toán đang xét ta cần tính đến khoảng cách giữa các thành phố thì ta cần gán cho mỗi cạnh của đồ thị cơ sở trên khoảng cách giữa các thành phố tương ứng. Nếu quan tâm tới đến thời gian của mỗi chuyến bay thì ta sẽ gán các thời lượng này cho mỗi cạnh của đồ thị cơ sở. Nếu trong bài toán đang xét chúng ta lại tính đến tiền vé của mỗi chuyến bay thì ta gán tiền vé như trọng số ứng với cạnh nối hai thành phố tương ứng. Trên Hình 1 biểu diễn các cách gán trọng số khác nhau cho các cạnh của đồ thị tùy theo mục đích của bài toán đặt ra.




***Hình 1.*** Các đồ thị có trọng số dùng để lập mô hình hệ thống hàng không.

Các đồ thị có trọng số cũng được dùng để lập mô hình các mạng máy tính. Chi phí truyền thông (chẳng hạn, tiền thuê bao đường điện thoại hàng tháng), thời gian đáp ứng của các máy tính qua các đường truyền thông này, hoặc là khoảng cách giữa các máy tính, tất cả đều có thể được nghiên cứu bằng cách dùng một đồ thị có trọng số. Hình 2 trình diễn đồ thị có trọng số ứng với ba cách gán trọng số cho mỗi cạnh của đồ thị mạng máy tính : khoảng cách, thời gian đáp ứng qua mạng và chi phí thuê bao hàng tháng.




***Hình* 2.** Các đồ thị có trọng số mô hình mạng máy tính.

Trong các ứng dụng chúng ta gặp nhiều loại bài toán liên quan tới đồ thị có trọng số. Chẳng hạn, xác định đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một mạng, trong đó ta coi **độ dài** của đường đi trong đồ thị có trọng số là tổng các trọng số ứng với các cạnh của đường đi này. (Độc giả cần lưu ý khái niệm *độ dài* ở đây khác với khái niệm *độ dài* là *số các cạnh* trong một đường đi của đồ thị không trọng số). Một vấn đề được đặt ra là xác định đường đi ngắn nhất, tức là đường đi có độ dài ngắn nhất, giữa hai đỉnh của đồ thị. Chẳng hạn, trong hệ thống hàng không được biểu diễn bằng đồ thị cho trên Hình 1, thì đường đi ngắn nhất trên không có giữa Boston và Los Angeles là bao nhiêu? Tổ hợp các chuyến bay nào giữa Boston và Los Angeles có tổng thời gian bay (tổng thời gian ở trên trời, không kể thời gian chờ giữa hai chuyến bay) là nhỏ nhất? Hành trình nào giữa hai thành phố này là rẻ nhất? Trên mạng máy tính ở Hình 2, trong các đường điện thoại nối các máy ở San Francisco và các máy ở New York đường nào có chi phí rẻ nhất? Đường nào cho thời gian trả lời nhanh nhất cho một cuộc truyền thông giữa các máy ở San Francisco và các máy New York? Đường nào có khoảng cách không gian ngắn nhất?

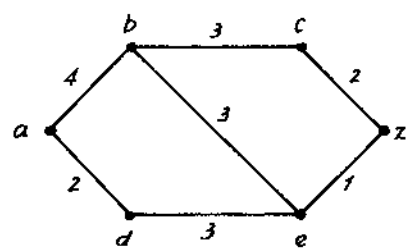
## THUẬT TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT

Có một số thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số. Chúng ta sẽ giới thiệu thuật toán do E.Dijkstra, nhà toán học người Hàlan, đề xuất năm 1959. Trong phiên bản mà ta sẽ trình bày, người ta giả sử đồ thị là vô hướng, các trọng số là dương. Chỉ cần thay đổi đôi chút là có thể giải được bài toán đường đi ngắn nhất trong đồ thị có hướng.

Trước khi trình bày thuật toán ta xét một ví dụ minh họa.

**Ví dụ 1.** Tính độ dài của đường đi ngắn nhất giữa $a$ và $z$ trong đồ thị có trọng số cho trên Hình 3.

*Giải:* Mặc dù đường đi ngắn nhất dễ dàng tìm được bằng cách kiểm tra trực tiếp, nhưng chúng ta sẽ phát triển một số ý tưởng giúp ta dễ hiểu thuật toán Dijkstra hơn. Ta sẽ tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ a tới các đỉnh kế tiếp cho tới khi đạt tới đỉnh $z$.




***Hình** 3.* Đơn đồ thị có trọng số.

Chỉ có 2 đỉnh $b$ và $d$ liên thuộc với $a$ nên chỉ có hai đường đi xuất phát từ $a$ là $a$, $b$ và $a$, $d$, với các độ dài tương ứng là 4 và 2. Do đó $d$ là đỉnh gần $a$ nhất.

Bây giờ ta tìm đỉnh tiếp theo gần $a$ nhất trong tất cả các đường đi qua $a$ và $d$ (cho đến khi đạt tới đỉnh cuối cùng). Đường đi như thế ngắn nhất tới $b$ là $a$, $b$ với độ dài 4, và đường đi như thế ngắn nhất tới $e$ là $a$, $d$, $e$, độ dài 5. Do vậy đỉnh tiếp theo gần $a$ nhất là $b$.

Để tìm đỉnh thứ ba gần $a$ nhất, ta chỉ xét các đường đi qua $a$, $d$ và $b$ (cho đến khi đạt tới đỉnh cuối cùng). Đó là đường đi $a$, $b$, $c$ độ dài 7 và đường đi $a$, $d$, $e$, $z$ độ dài 6. Vậy $z$ là đỉnh tiếp theo gần $a$ nhất và độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $z$ là 6.

■

Ví dụ 1 minh họa những nguyên tắc chung dùng trong thuật toán Đijkstra. Đường đi ngắn nhất từ đỉnh $a$ tới $z$ có thể tìm được cách bằng kiểm tra trực tiếp. Nhưng cách làm này là hoàn toàn không dùng được cho cả người và máy khi đồ thị có nhiều cạnh.

Bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa $a$ và $z$ trong đơn đồ thị liên thông, vô hướng có trọng số. Thuật toán Đijkstra được thực hiện bằng cách tìm độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới đỉnh đầu tiên, độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới đỉnh thứ hai, v.v, cho tới khi tìm được độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới đỉnh $z$.

Thuật toán này dựa trên một dãy các bước lặp. Một tập đặc biệt các đỉnh được xây dựng bằng cách cộng thêm một đỉnh trong mỗi bước lặp. Thủ tục gán nhãn được thực hiện trong mỗi lần lặp đó. Trong thủ tục gán nhãn này, đỉnh $w$ được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $w$ và chỉ đi qua các đỉnh đã thuộc tập đặc biệt. Một đỉnh được thêm vào tập này là đỉnh có nhãn nhỏ nhất so với các đỉnh chưa có trong tập đó.

Bây giờ ta sẽ đưa ra các chi tiết của thuật toán Dijkstra. Đầu tiên gán cho đỉnh $a$ nhãn bằng 0 và các đỉnh khác là $\infty$. Ta ký hiệu $L_0(a) = 0$ và $L_0(v) = \infty$ cho tất cả các đỉnh khác (bước lặp thứ 0). Các nhãn này là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh $a$ tới các đỉnh này, trong đó đường đi này chỉ chứa đỉnh $a$. (Vì không có đường đi từ $a$ tới các đỉnh khác $a$ nên $\infty$ là độ dài đường đi ngắn nhất giữa $a$ và các đỉnh này).

Theo thuật toán Dijkstra ta sẽ xây dựng tập đặc biệt các đỉnh. Gọi $S_k$ là tập này sau bước lặp thứ $k$ của thủ tục gán nhãn. Chúng ta bắt đầu bằng $S_0 = \varnothing$. Tập $S_k$ được tạo thành từ $S_{k-1}$ bằng cách thêm vào đỉnh $u$ không thuộc $S_{k-1}$ có nhãn nhỏ nhất. Khi đỉnh $u$ được gộp vào $S_k$ chúng ta sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc $S_k$ sao cho $L_k(v)$, nhân của $v$ tại bước $k$, là độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $v$ mà đường đi này chỉ chứa các đỉnh thuộc $S_k$ (tức là các đỉnh đã thuộc tập đặc biệt các đỉnh cùng với $u$).

Giả sử $v$ là một đỉnh không thuộc $S_k$. Để sửa nhãn của $v$ ta thấy $L_k(v)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $v$ và chỉ chứa các đỉnh thuộc $S_k$. Để sửa đổi nhãn ta lưu ý rằng đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $v$ chứa chỉ các phần tử của $S_k$ hoặc là đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $v$ chỉ chứa các phần tử của $S_{k-1}$ hoặc là đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $u$ ở bước $k - 1$ cùng với cạnh $(u, v)$. Nói cách khác ta có.

$$L_k(a,v) = \min \{L_{k-1}(a,v),\ L_{k-1}(a,u) + w(u,v)\}.$$

Thủ tục này được lặp bằng cách liên tiếp thêm các đỉnh vào tập đặc biệt các đỉnh cho tới khi đạt tới đỉnh $z$. Khi thêm $z$ vào tập đặc biệt các đỉnh thì nhãn của nó bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $z$. Thuật toán Dijkstra được cho trong Thuật toán 1. Sau này chúng ta sẽ chứng minh thuật toán này là đúng.

---

THUẬT TOÁN 1. THUẬT TOÁN DIJKSTRA.

**procedure** *Dijkstra* (G : đơn đồ thị liên thông có trọng số, với trọng số dương)

{G có các đỉnh $a = v_0, v_1, ..., v_n = z$ và trọng số $w(v_i, v_j)$, với $w(v_i,v_j) = \infty$ nếu $\{v_i,v_j\}$ không là một cạnh trong G}

**for** $i$ := 1 **to** $n$

$L(v_i) := \infty$

$L(a) := 0$

$S := \phi$

{Ban đầu các nhãn được khởi tạo sao cho nhân của $a$ bằng không, các đỉnh khác bằng $\infty$, tập $S$ là rỗng}

**while** $z \notin S$

```
begin
    u := đỉnh không thuộc S có nhãn L(u) nhỏ nhất.
        S := S ∪ {u}
        for tất cả các đỉnh v không thuộc S
            if L(u) + w(u,v) < L(v) then L(v) := L(u) + w(u,v)
                {thêm vào S đỉnh có nhãn nhỏ nhất, và sửa
                đổi nhãn của các đỉnh không thuộc S}
end {L(z) = độ dài đường đi ngắn nhất từ a tới z}.
```

Ví dụ sau minh họa cách hoạt động của thuật toán Dijkstra. Sau đó chúng ta sẽ chỉ ra rằng thuật toán này luôn luôn cho độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số.

**Ví dụ 2.** Dùng thuật toán Dijkstra hãy tìm độ dài của đường đi ngắn giữa hai đỉnh $a$ và $z$ của đồ thị có trọng số trên Hình 4a.

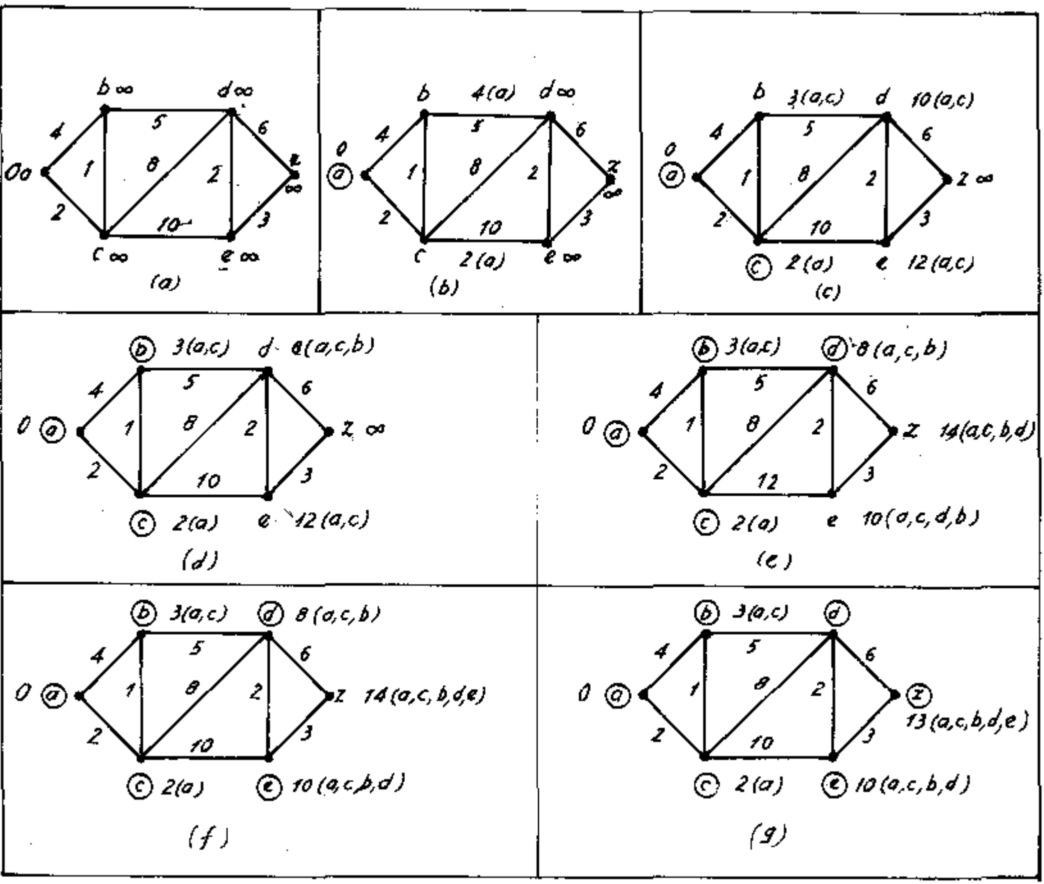
*Giải:* Các bước dùng thuật toán Dijkstra tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh $a$ và $z$ được biểu diễn trên Hình 4. Tại mỗi bước lặp của thuật toán các đỉnh của tập $S$ được khoanh tròn. Đường đi ngắn nhất chỉ chứa các đỉnh đã thuộc $S_k$ từ $a$ tới mỗi đỉnh được in ra cho mỗi bước lặp. Thuật toán kết thúc khi $z$ được khuyên tròn. Ta nhận được đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $z$ là $a$, $c$, $b$, $d$, $e$, $z$ với độ dài bằng 13.

Bây giờ chúng ta dùng lý luận quy nạp để chứng minh thuật toán Dijkstra luôn cho độ dài đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh $a$ và $z$ trong một đồ thị vô hướng liên thông có trọng số. Tại bước $k$ ta có giả thiết quy nạp là :

(i) nhãn của đỉnh $v$ trong $S$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh $a$ tới đỉnh này và

(ii) nhãn của đỉnh $v$ không thuộc $S$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ đỉnh $a$ tới đỉnh này và đường đi này chỉ chứa các đỉnh (ngoài chính đỉnh này) thuộc $S$.

Khi $k = 0$, tức là khi chưa có bước lặp nào được thực hiện, $S = \{a\}$, vì thế độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới các đỉnh khác $a$ là $\infty$ và độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới chính nó bằng 0 (ở đây chúng ta cho phép đường đi không có cạnh). Vì thế bước cơ sở là đúng.




***Hình 4.*** Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh $a$ tới $z$.

Giả sử giả thiết quy nạp là đúng với bước $k$. Gọi $v$ là đỉnh thêm vào $S$ ở bước lặp $k+1$, vì vậy $v$ là đỉnh không thuộc $S$ ở cuối bước $k$ có nhãn nhỏ nhất (nếu có nhiều đỉnh có nhãn nhỏ nhất thì có thể chọn một đỉnh nào đó làm $v$). Từ giả thiết quy nạp ta thấy rằng trước khi vào vòng lặp thứ $(k+1)$ các đỉnh thuộc $S$ đã được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$. Đỉnh $v$ cũng vậy phải được gán nhãn bằng độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$. Nếu điều này không xảy ra, thì ở cuối bước lặp thứ $k$ sẽ có đường đi với độ dài nhỏ hơn $L_k(v)$ chứa cả đỉnh không thuộc $S$ (vì $L_k(v)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $v$ chứa chỉ các đỉnh thuộc $S$ sau bước lặp thứ $k$). Gọi $u$ là đỉnh đầu tiên của đường đi này không thuộc $S$. Đó là đường đi với độ dài nhỏ hơn $L_k(v)$ từ $a$ tới $u$ chứa chỉ các đỉnh của $S$. Điều này trái với cách chọn $v$. Vì thế, $(i)$ vẫn còn đúng ở cuối bước lặp $(k+1)$.

Gọi $u$ là đỉnh không thuộc $S$ sau bước $(k+1)$. Đường đi ngắn nhất từ $a$ tới $u$ chứa chỉ các đỉnh thuộc $S$ sẽ hoặc là chứa $v$ hoặc là không. Nếu nó không chứa $v$ thì theo giả thiết quy nạp độ dài của nó là $L_k(u)$. Nếu nó chứa $v$ thì nó sẽ tạo thành đường đi từ $a$ tới $v$ với độ dài có thể ngắn nhất và chứa chỉ các đỉnh của $S$ khác $v$, kết thúc bằng cạnh từ $v$ tới $u$. Khi đó độ dài của nó sẽ là $L_k(v) + w(v, u)$. Điều này chứng tỏ (ii) là đúng, vì $L_{k+1}(u) = \min\{L_k(u), L_k(v) + w(v,u)\}$.

Định lý sau đây đã được chứng minh.

**ĐỊNH LÝ 1.** Thuật toán Dijkstra tìm được đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị đơn vô hướng liên thông có trọng số.

Bây giờ chúng ta có thể đánh giá độ phức tạp tính toán của thuật toán Dijkstra (qua các phép cộng và so sánh). Thuật toán dùng không quá $n - 1$ bước lặp, vì một đỉnh thêm vào tập đặc biệt tại mỗi bước lặp. Bây giờ ta sẽ ước tính số phép toán dùng trong mỗi bước lặp. Ta có thể xác định một đỉnh không thuộc $S_k$ có nhãn nhỏ nhất nhờ không quá $n - 1$ phép so sánh. Sau đó ta dùng các phép cộng và so sánh để sửa đổi nhãn của các đỉnh không thuộc $S_k$. Từ đó suy ra rằng có không hơn $2(n - 1)$ phép toán được dùng trong mỗi bước lặp, vì có không quá $n-1$ nhãn cần sửa đổi trong mỗi bước lặp. Vì ta dùng không quá $n - 1$ bước lặp, mỗi bước dùng không quá $2(n-1)$ phép toán, nên ta có định lý sau.

**ĐỊNH LÝ 2.** Thuật toán Dijkstra dùng $O(n^2)$ phép toán (cộng và so sánh) để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị đơn vô hướng liên thông có trọng số.

## BÀI TẬP

1. Với mỗi một bài toán sau đây về hệ thống giao thông, hãy mô tả một mô hình đồ thị có trọng số có thể dùng để giải quyết các bài toán đó.

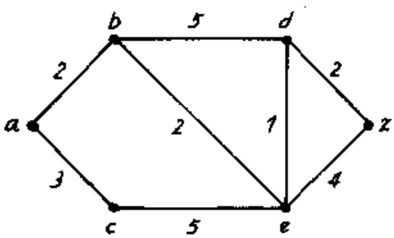
   a) tính tổng thời gian nhỏ nhất cần để đi giữa hai bến đỗ ?

   b) Xác định khoảng cách ngắn nhất từ bến này tới bến khác?

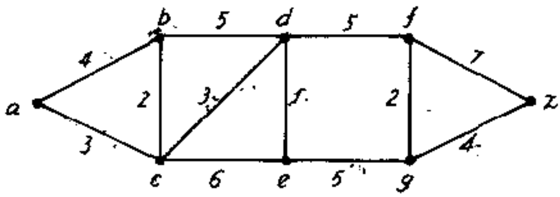
   c) Giá rẻ nhất phải trả cho một hành trình giữa hai bến xe, nếu giá vé giữa các bến đỗ bằng tổng các giá vé giữa các bến trung gian?

*Trong các Bài tập 2-4 hãy tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa a và z trong đồ thị có trọng số đã cho.*

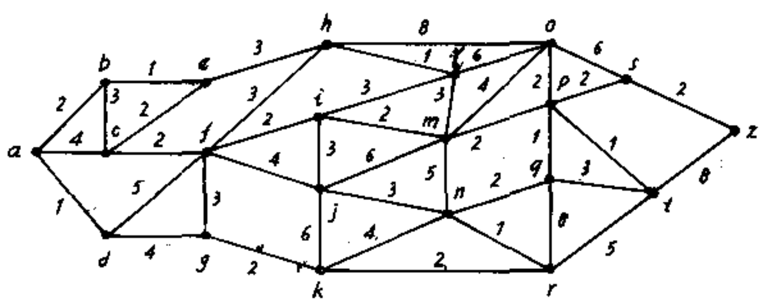
**2.**




**3.**




**4.**




5. Tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh $a$ và $z$ trong mỗi đồ thị đơn có trọng số của các Bài tập 2–4.

6. Tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa các cặp đỉnh sau đây của đồ thị trong Bài tập 3.

a) $a$ và $d$ b) $a$ và $f$

c) $c$ và $f$ d) $b$ và $z$

**7.** Tìm đường đi ngắn nhất của đồ thị trong Bài tập 3, giữa các cặp đỉnh trong Bài tập 6.

**8.** Tìm đường đi ngắn nhất (ra dặm) giữa mỗi một cặp thành phố trong mạng hàng không cho trên Hình 1.

a) New York và Los Angeles c) Miami và Denver

b) Boston và San Francisco d) Miami và Los Angeles.

**9.** Tìm một tổ hợp các chuyến bay với tổng thời gian bay ít nhất giữa các cặp thành phố trong Bài tập 8, thời gian bay cho trên Hình 1.

**10.** Tìm một tổ hợp các chuyến bay với giá vé rẻ nhất giữa các cặp thành phố trong Bài tập 8, giá vé cho trên Hình 1.

**11.** Tìm đường ngắn nhất (khoảng cách) giữa hai trung tâm máy tính ở mỗi cặp thành phố sau của mạng truyền thông trên Hình 2.

a) Boston và Los Angeles c) Dalas và San Francisco

b) New York và San Francisco d) Denver và New York.

**12.** Tìm đường có thời gian đáp ứng ít nhất giữa hai trung tâm máy tính ở mỗi cặp thành phố như Bài tập 11, với thời gian đáp ứng cho trên Hình 2.

**13.** Tìm đường có giá chi phí ít nhất giữa hai trung tâm máy tính ở mỗi cặp thành phố như Bài tập 11, với giá chi phí cho trên Hình 2.

**14.** Hãy giải thích cách tìm đường đi với số các cạnh nhỏ nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị vô hướng bằng cách coi nó như một bài toán đường đi ngắn nhất của đồ thị có trọng số.

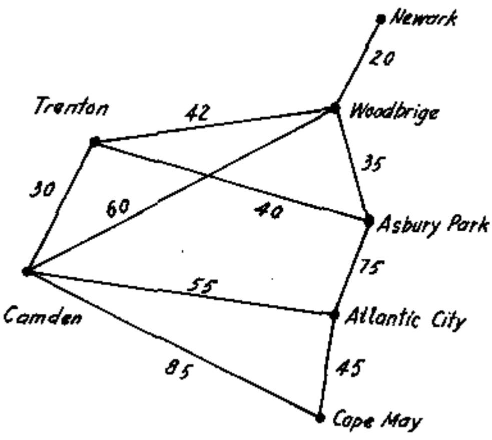
**15.** Hãy mở rộng thuật toán Dijkstra tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị đơn liên thông có trọng số để tìm chiều dài của đường đi ngắn nhất giữa một đỉnh $a$ và tất cả các dỉnh khác của đồ thị.

**16.** Hãy mở rộng thuật toán Dijkstra tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị đơn liên thông có trọng số sao cho có thể xây dựng được đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh này.

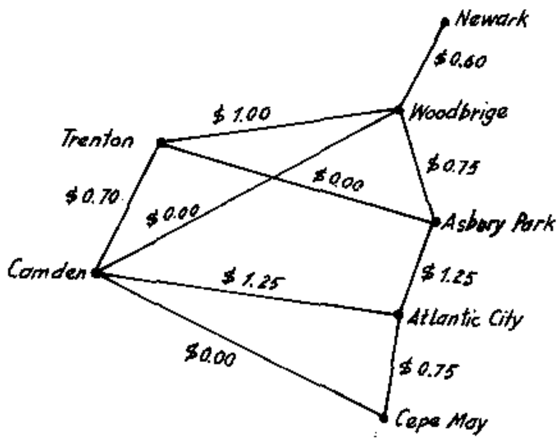
**17.** Các đồ thị có trọng số trong hình vẽ sau đây biểu diễn một số đường chính ở bang New Jersey. Trong hình a) cho khoảng cách giữa các thành phố trên các con đường này. Hình b) cho tiền thuế đường.

a) Hãy tìm đường đi có khoảng cách ngắn nhất giữa Newark và Camden, và giữa Newark và Cape May, khi sử dụng các con đường này.

b) Tìm đường đi với tiền thuếđường ít nhất giữa các cặp thành phố như trong câu a).




a)




b)

**18.** Đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh trong đồ thị có trọng số có là duy nhất không, nếu trọng số của các cạnh phân biệt là khác nhau.

**19.** Hãy kể một số ứng dụng trong đó cần phải tìm độ dài của đường đi đơn dài nhất trong đồ thị có trọng số.

**20.** Xác định độ dài của đường đi dài nhất trong đồ thị có trọng số trên Hình 4 giữa $a$ và $z$? Giữa $c$ và $z$?

**Thuật toán Floyd** *có thể dùng để tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa tất cả các cặp đỉnh trong một đồ thị đơn liên thông có trọng số. Tuy nhiên, thuật toán này không thể dùng để xây dựng các đường đi ngắn nhất này. (Dưới đây, ta gán trọng số bằng vô cùng lớn cho các cặp đỉnh không nối bởi một cạnh của đồ thị).*

THUẬT TOÁN 2. THUẬT TOÁN FLOYD.

**procedure** *Floyd* (*G* : đơn đồ thị có trọng số)
{*G* có các đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ và các trọng số $w(v_i, v_j) = \infty$ nếu $(v_i, v_j)$ không là một cạnh}

**for** $i$ := 1 to $n$

  **for** $j$ := 1 **to** $n$

    $d(v_i, v_j) := w(v_i, v_j)$

**for** $i$ := 1 **to** $n$

  **for** $j$ := 1 **to** $n$

    **for** $k$ := 1 **to** $n$

    **if** $d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k) < d(v_j, v_k)$ **then**

      $d(v_j, v_k) := d(v_j, v_i) + d(v_i, v_k)$

  {$d(v_i, v_j)$ là độ dài của đường đi ngắn nhất giữa $v_i$ và $v_j$}

---

**21.** Dùng thuật toán Floyd tìm khoảng cách giữa tất cả các cặp đỉnh trong đồ thị có trọng số trên Hình 4.

**22*.** Chứng minh rằng thuật toán Floyd xác định được khoảng cách ngắn nhất giữa các cặp đỉnh trong một đơn đồ thị có trọng số.

**23*.** Hãy cho đánh giá big – *O* của số phép toán (so sánh và cộng) dùng trong thuật toán Floyd xác định khoảng cách ngắn nhất giữa các cặp đỉnh trong một đơn đồ thị có trọng số và $n$ đỉnh.

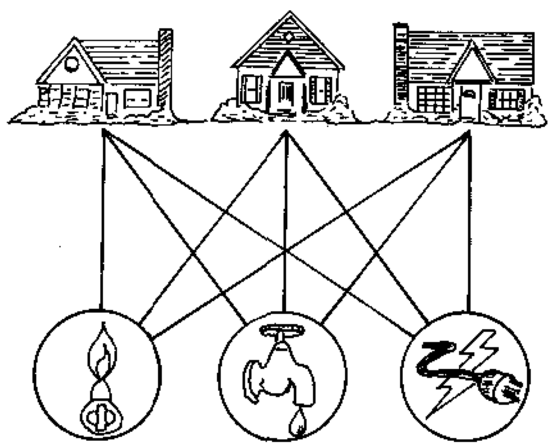
**24*.** Chỉ ra rằng thuật toán Dijkstra có thể không hoạt động nếu các cạnh có thể có trọng số âm.

# 7.7. ĐỒ THỊ PHẲNG

## MỞ ĐẦU

Chúng ta nghiên cứu bài toán nối ba ngôi nhà với ba thiết bị sinh hoạt riêng rẽ, như trên Hình 1. Có thể nối các ngôi nhà với các thiết bị này sao cho không có đường nối nào cắt nhau? Bài toán này có thể được mô hình bằng đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$. Câu hỏi ban đầu có thể diễn đạt như sau :

Có thể vẽ $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau?



*Hình 1*. Ba ngôi nhà và ba thiết bị sinh hoạt.

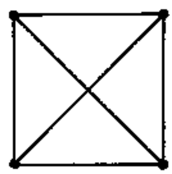
Trong tiết này chúng tế sẽ nghiên cứu bài toán : có thể vẽ một đồ thị trên một mặt phẳng không có các cạnh nào cắt nhau không. Đặc biệt chúng ta sẽ trả lời bài toán nhà – thiết bị sinh hoạt. Thường có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Khi nào có thể tìm được ít nhất một cách biểu diễn đồ thị không có cạnh cắt nhau?

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Một đồ thị được gọi là *phẳng* nếu nó có thể vẽ được trên một mặt phẳng mà không có các cạnh nào cắt nhau (ở một điểm không phải là điểm mút của các cạnh). Hình vẽ như thế gọi là một *biểu diễn phẳng* của đồ thị.

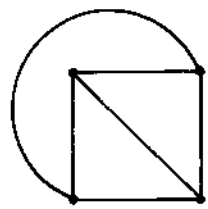
Một đồ thị có thể là phẳng ngay cả khi nó thường được vẽ với những cạnh cắt nhau, vì có thể vẽ nó bằng cách khác không có các cạnh cắt nhau.

**Ví dụ 1.** $K_4$ trên Hình 2 với hai cạnh cắt nhau có là đồ thị phẳng không?

*Giải:* $K_4$ là đồ thị phẳng bởi vì có thể vẽ lại như trên Hình 3 không có đường cắt nhau.



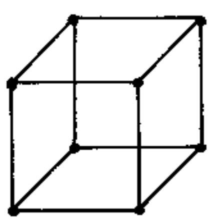
***Hình** 2.* Đồ thị $K_4$.



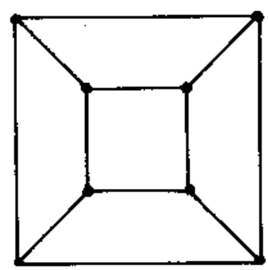
***Hình** 3.* $K_4$ vẽ không có đường cắt nhau.

■

**Ví dụ 2.** $Q_3$ trên Hình 4 có là đồ thị phẳng không?



***Hình** 4.* Đồ thị $Q_3$.



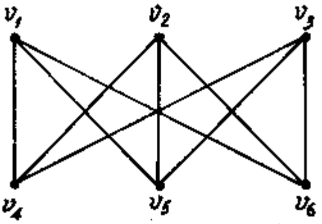
***Hình** 5.* Biểu diễn phẳng.

*Giải:* $Q_3$ là phẳng vì có thể vẽ lại như trên Hình 5 không có cạnh nào cắt nhau.

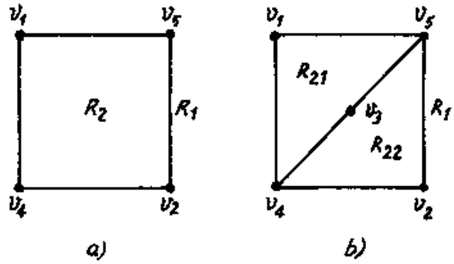
■

Chúng ta có thể chỉ ra một đồ thị là phẳng bằng cách thể hiện biểu diễn phẳng của nó. Chứng tỏ một đồ thị là không phẳng sẽ khó khăn hơn nhiều. Chúng ta sẽ đưa ra một ví dụ về cách chứng minh một đồ thị không là phẳng.

**Ví dụ 3.** $K_{3,3}$ trên Hình 6 có là đồ thị phẳng không?




*Hình 6.* Đồ thị $K_{3,3}$.




*Hình 7.* Chứng minh $K_{3,3}$ là không phẳng.

*Giải:* Mọi ý định vẽ $K_{3,3}$ trong một mặt phẳng không có cạnh cắt nhau đều thất bại. Ta sẽ chỉ ra nguyên nhân. Trong một biểu diễn phẳng bất kỳ của $K_{3,3}$, các đỉnh $v_1$, $v_2$ đều phải nối với $v_4$ và $v_5$. Bốn đỉnh này tạo thành một đường cong kín chia mặt phẳng thành hai miền $R_1$ và $R_2$ như trên Hình 7(a). Đỉnh $v_3$ nằm trong $R_1$ hoặc $R_2$. Khi $v_3$ nằm trong $R_2$, tức là bên trong của đường cong khép kín, cạnh giữa $v_3$ và $v_4$, cạnh giữa $v_3$ và $v_5$ chia $R_2$ thành 2 miền con $R_{21}$ và $R_{22}$ như trên Hình 7(b).

Tiếp theo, rõ ràng không có cách nào đặt đỉnh $v_6$ mà không tạo ra các cạnh cắt nhau. Ví dụ nếu $v_6$ nằm trong $R_1$ thì cạnh nối $v_6$ với $v_3$ sẽ cắt ít nhất một cạnh khác. Nếu $v_6$ nằm trong $R_{21}$ thì cạnh $(v_6, v_1)$ sẽ cắt một cạnh nào đó.

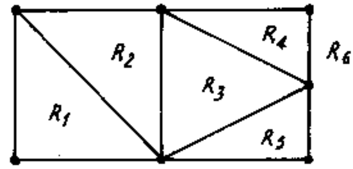
Tương tự ta có thể chứng tỏ rằng không thể vẽ được đồ thị phẳng nếu $v_3$ nằm trong $R_1$. Độc giả tự chứng minh phần này (xem bài tập cuối tiết này). Từ đó suy ra $K_{3,3}$ là không phẳng.

■

Ví dụ 3 chính là bài toán nhà–thiết bị sinh hoạt được mô tả trong đầu tiết này. Ba ngôi nhà và ba thiết bị sinh hoạt không thể nối với nhau trên một mặt phẳng mà không cắt nhau. Hoàn toàn tương tự, có thể chứng minh $K_5$ là không phẳng. (Xem Bài tập 9 cuối tiết này).

## CÔNG THỨC EULER

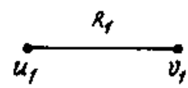
Biểu diễn phẳng của một đồ thị chia mặt phẳng thành các miền, kể cả miền vô hạn. Ví dụ biểu diễn phẳng của đồ thị trên Hình 8 chia mặt phẳng thành 6 miền. Chúng được gán nhãn như hình vẽ. Euler đã chứng minh rằng tất cả các biểu diễn phẳng của một đồ thị đều chia mặt phẳng thành cùng một số miền như nhau. Để làm điều này ông ta đã tìm mối quan hệ giữa số miền, số đỉnh, số cạnh của một đồ thị phẳng.




*Hình 8.* Các miền trong biểu diễn phẳng một đồ thị.

**ĐỊNH LÝ 1.** *Công thức Euler.* Gọi $G$ là một đồ thị đơn phẳng liên thông với $e$ cạnh và $v$ đỉnh. Gọi $r$ là số miền trong biểu diễn phẳng của $G$. Khi đó $r = e - v + 2$.

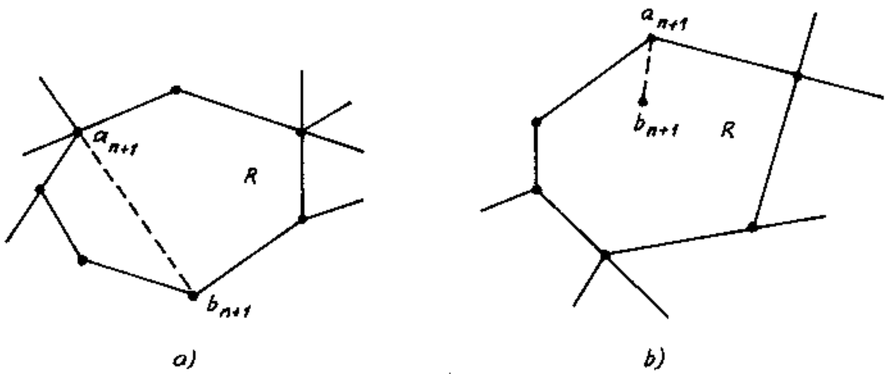
***Chứng minh.*** Trước tiên ta xác định biểu diễn phẳng của $G$. Ta sẽ chứng minh định lý bằng cách xây dựng một dãy các đồ thị con $G_1$, $G_2$, ...,$G_e = G$, mỗi bước ghép thêm một cạnh vào đồ thị ở bước trước. Điều này làm được khi sử dụng định nghĩa đệ quy như sau. Lấy tùy ý một cạnh của $G$ để nhận được $G_1$. Để nhận được $G_n$ từ $G_{n-1}$ ta thêm tuỳ ý một cạnh liền thuộc với một đỉnh của $G_{n-1}$ và thêm một đỉnh khác liên thuộc với cạnh mới đó, nếu nó chưa có trong $G_{n-1}$. Điều này làm được vì $G$ là liên thông. $G$ sẽ nhận được sau khi $e$ cạnh được ghép thêm vào các đồ thị tạo ra trước. Gọi $r_n$, $e_n$, và $v_n$ tương ứng là số miền, số cạnh, số đỉnh của biểu diễn phẳng của $G_n$ do biểu diễn phẳng của $G$ sinh ra.




*Hình 9.* Trường hợp cơ sở của chứng minh Định lý Euler.

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp. Hệ thức $r_1 = e_1 - v_1 + 2$ là đúng với $G_1$ vì $e_1 = 1$, $v_1 = 2$ và $r_1 = 1$. Điều này thể hiện trên Hình 9.

Bây giờ giả sử rằng $r_n = e_n - v_n + 2$. Gọi $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ là cạnh gộp vào $G_n$ để được $G_{n+1}$. Có hai khả năng xảy ra. Trường hợp đầu cả hai đỉnh $a_{n+1}$, $b_{n+1}$ đã thuộc $G_n$. Khi đó chúng phải ở trên biên của miền chung $R$ nếu không thì không thể gộp cạnh $\{a_{n+1}, b_{n+1}\}$ vào $G_n$ mà không có các cạnh cắt nhau ($G_{n+1}$ là phẳng). Cạnh mới này sẽ chia miền $R$ thành hai miền con. Do đó $r_{n+1} = r_n + 1$, $e_{n+1} = e_n + 1$ *và* $v_{n+1} = v_n$. Do vậy ta có công thức $r_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$. Trường hợp này được minh họa trên Hình 10a.




**Hình 10.** Thêm một cạnh vào $G_n$ để tạo $G_{n+1}$.

Trường hợp thứ hai, một trong hai đỉnh của cạnh mới chưa thuộc $G_n$. Giả sử $a_{n+1}$ thuộc $G_n$ còn $b_{n+1}$ thì không. Thêm cạnh này không sinh ra một miền mới nào, vì $b_{n+1}$ phải ở trong miền có $a_{n+1}$ ở trên biên của nó. Do đó, $r_{n+1} = r_n$. Nhưng $e_{n+1} = e_n + 1$, và $v_{n+1} = v_n + 1$. Mỗi vế của công thức không đổi nên công thức vẫn đúng. Nói cách khác $r_{n+1} = e_{n+1} - v_{n+1} + 2$. Trường hợp này được minh họa trên Hình 10b.

Vậy với mọi $n$ ta đều có $r_n = e_n - v_n + 2$. Vì đồ thị gốc là $G_e$ nhận được sau khi thêm $e$ cạnh, định lý được chứng minh.

■

Công thức Euler được minh họa trong ví dụ sau.

**Ví dụ 4.** Giả sử rằng đơn đồ thị phẳng liên thông có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc bằng 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

*Giải:* Đồ thị phẳng này có 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc bằng 3, do vậy $v = 20$. Vì tổng số bậc của các đỉnh, $3v = 3.20 = 60$, bằng hai lần số cạnh, tức là $2e$, chúng ta có $e = 60 : 2 = 30$. Do vậy theo công thức Euler, số các miền là

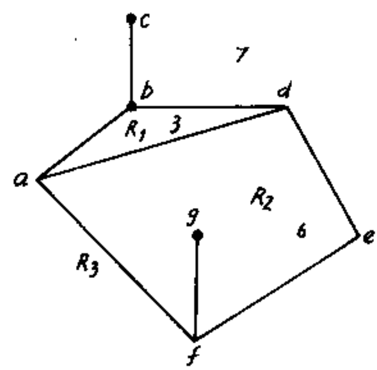
$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12.$$

■

Công thức Euler có thể dùng để lập một số bất đẳng thức đối với các đồ thị phẳng. Hệ quả sau cho ta một bất đẳng thức như vậy.

**HỆ QUẢ 1.** Nếu $G$ là một đơn đồ thị phẳng liên thông với $e$ cạnh, $v$ đỉnh trong đó $v \geq 3$, khi đó $e \leq 3v - 6$.

Chứng minh bổ đề 1 dựa trên khái niệm **bậc của miền**. Đó là số cạnh trên biên của miền đó. Khi một cạnh xuất hiện hai lần trên biên (tức là nó được vẽ hai lần khi vẽ biên) nó sẽ góp 2 đơn vị vào bậc của miền. Bậc của các miền của đồ thị trên Hình 11 được thể hiện ngay trên hình vẽ.




*Hình 11.* Bậc của miền.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh Hệ quả 1.

*Chứng minh.* Một đơn đồ thị phẳng liên thông khi vẽ trên một mặt phẳng sẽ chia mặt phẳng thành $r$ miền. Bậc của mỗi miền ít nhất bằng 3. (Vì ta chỉ xét đồ thị đơn nên không có cạnh bội để tạo ra miền bậc 2, và không có khuyên để tạo ra miền bậc 1). Đặc biệt, bậc của miền vô hạn ít nhất bằng 3 vì có ít nhất 3 đỉnh trong đồ thị. Ta cũng nhận thấy là tổng số bậc của các miền bằng đúng hai lần số cạnh của đồ thị, vì mỗi cạnh xuất hiện trên biên của các miền đúng hai lần (hoặc trên biên của hai miền khác nhau, hoặc hai lần trên biên của cùng một miền). Vì mỗi miền có bậc lớn hơn hoặc bằng ba nên ta suy ra

$$2e = \sum_{R} \deg(R) \geq 3r$$

Vì thế
$$\frac{2e}{3} \geq r.$$

Theo công thức Euler ta có $r = e - v + 2$. Vậy

$$e - v + 2 \leq \frac{2e}{3}.$$

Giải ra ta được :

$$e \leq 3v - 6.$$

Đó là điều cần chứng minh.

■

**Ví dụ 5.** Dùng Hệ quả 1, chứng tỏ rằng $K_5$ là không phẳng.

*Giải:* Đồ thị $K_5$ có 5 đỉnh và 10 cạnh. Vì bất đẳng thức $e \leqslant 3v - 6$ là không thỏa mãn đối với đồ thị này, do $e = 10$, $3v - 6 = 15 - 6 = 9$, do đó $K_5$ không phẳng.

Như đã chỉ ra từ trước $K_{3,3}$ là không phẳng. Đồ thị này có 6 đỉnh và 9 cạnh. Điều đó có nghĩa là bất đẳng thức $e \leqslant 3v - 6$ thoả mãn. Nhưng không thể khẳng định đồ thị là phẳng được. Tuy vậy hệ quả sau có thể dùng để chứng minh $K_{3,3}$ là không phẳng.

**HỆ QUẢ 2.** Nếu một đơn đồ thị phẳng liên thông có $e$ cạnh, $v$ đỉnh trong đó $v \geqslant 3$, và không có chu trình độ dài 3, thì $e \leqslant 2v - 4$

Việc chứng minh Hệ quả 2 tương tự như chứng minh Hệ quả 1, trừ một điều là trong trường hợp này do không có chu trình độ dài 3, nên bậc của một miền ít nhất phải là 4. Các chi tiết của chứng minh xin dành cho bạn đọc (Xem Bài tập 13 ở cuối tiết này)

**Ví dụ 6.** Dùng hệ quả 2 chỉ ra rằng đồ thị $K_{3,3}$ là không phẳng.

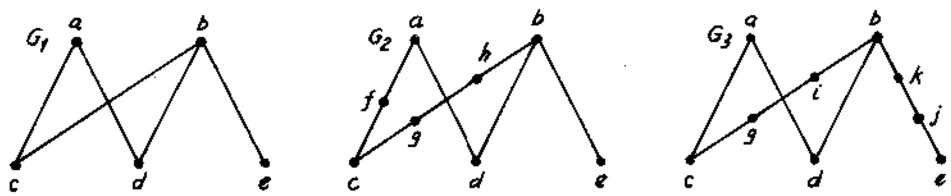
*Giải:* Vì $K_{3,3}$ không có chu trình độ dài 3 (dễ thấy điều này vì nó là đồ thị phân đôi, nên có thể áp dụng Hệ quả 2. $K_{3,3}$ có 6 đỉnh và 9 cạnh. Vì $e = 9$ và $2v - 4 = 8$, Hệ quả 2 không thỏa mãn, vậy đồ thị là không phẳng.

■

## ĐỊNH LÝ KURATOWSKI

Chúng ta đã thấy $K_{3,3}$ và $K_5$ là không phẳng. Rõ ràng, một đồ thị là không phẳng nếu nó chứa cả hai đồ thị này như là các đồ thị con. Hơn thế nữa, tất cả các đồ thị không phẳng cần phải chứa đồ thị con nhận được từ $K_{3,3}$ hoặc $K_5$ bằng một số phép toán cho phép nào đó.

Nếu một đồ thị là phẳng, mọi đồ thị nhận được từ đồ thị này bằng cách bỏ đi cạnh $\{u, v\}$ và thêm vào đỉnh mới $w$ cùng hai cạnh $\{u, w\}$ và $\{w, v\}$ cũng là phẳng. Phép toán như trên gọi là phép **phân chia sơ cấp**. Các đồ thị $G_1 = (V_1, E_1)$ và $G_2 = (V_2, E_2)$ được gọi là **đồng phôi** nếu chúng có thể nhận được từ cùng một đồ thị bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp. Ba đồ thị trên Hình 12 là đồng phôi, vì chúng có thể nhận được từ đồ thị đầu tiên bằng các phép phân chia sơ cấp. (Độc giả hãy xác định các phép phân chia sơ cấp để nhận $G_2$ và $G_3$ từ $G_1$).



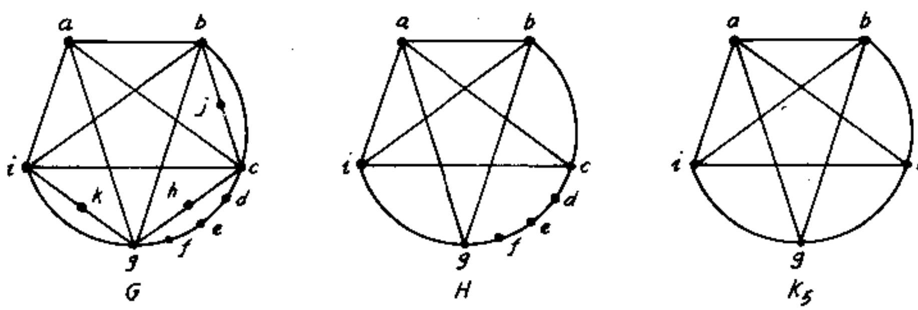

*Hình 12.* Các đồ thị đồng phôi.

Nhà toán học Balan, Kuratowski, đã thiết lập định lý sau đây vào năm 1930. Định lý này đã biểu thị đặc điểm của các đồ thị phẳng nhờ khái niệm đồ thị đồng phôi.

**ĐỊNH LÝ 2.** Đồ thị là không phẳng nếu và chỉ nếu nó chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc $K_5$.

Rõ ràng đồ thị chứa đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc $K_5$ là không phẳng. Tuy nhiên chứng minh điều ngược lại, tức là mọi đồ thị không phẳng đều chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc $K_5$, là rất phức tạp và chúng ta sẽ không trình bày ở đây. Ví dụ sau minh họa cách sử dụng Định lý Kuratowski.

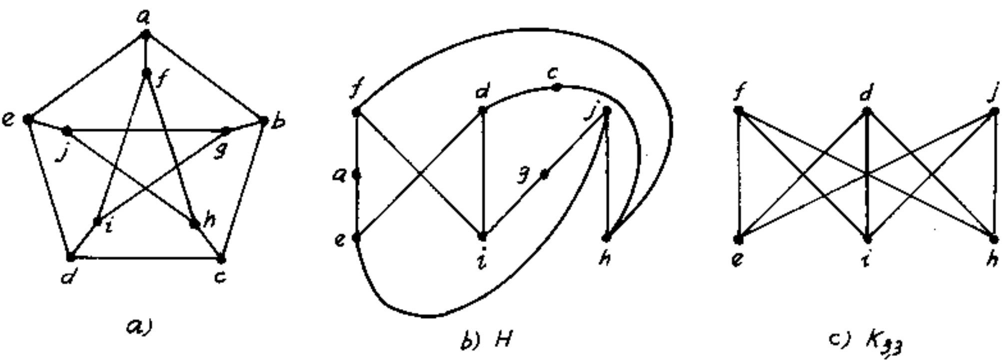
**Ví dụ 7.** Đồ thị $G$ trên Hình 13 có là đồ thị phẳng hay không?




*Hình 13.* Đồ thị vô hướng $G$, đồ thị con $H$ đồng phôi với $K_5$ và $K_5$.

*Giải:* $G$ có một đồ thị con $H$ đồng phôi với $K_5$. $H$ nhận được bằng cách xóa $h$, $j$ và $k$ và tất cả các cạnh liên thuộc với các đỉnh này. $H$ là đồng phôi với $K_5$ vì nó có thể nhận được từ $K_5$ (với các đỉnh $a$, $b$, $c$, $g$ và $i$) bằng một dãy các phép phân chia sơ cấp, thêm vào các đỉnh $d$, $e$ và $f$. (Độc giả tự xây dựng dãy phân chia sơ cấp này). Do đó $G$ là không phẳng.

**Ví dụ 8.** Đồ thị Petersen trên Hình 14a có là đồ thị phẳng không?




*Hình 14.* (a) Đồ thị Peterson, (b) đồ thị con $H$ đồng phôi với $K_{3,3}$ và (c) $K_{3,3}$.

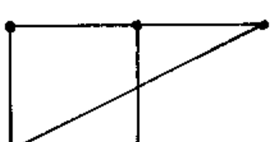
*Giải:* Đồ thị con $H$ của đồ thị Petersen nhận được bằng cách bỏ đỉnh $b$ và 3 cạnh liên thuộc với nó, như trên Hình 14b là đồng phôi với $K_{3,3}$ với các tập đỉnh $\{f, d, j\}$ và $\{e, i, h\}$, vì nó nhận được hằng một dãy các phân chia sơ cấp : xoá $\{d, h\}$ và thêm $\{c, h\}$ và $\{c, d\}$, xóa $\{e, f\}$ và thêm $\{a, e\}$ và $\{a, f\}$, xóa $\{i, j\}$ và thêm $\{g, i\}$ và $\{g, j\}$. Vì thế đồ thị Petersen là không phẳng.

## BÀI TẬP

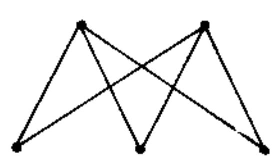
1. Năm ngôi nhà có thể nối với hai thiết bị sinh hoạt với đường nối không cắt nhau được không?

*Trong các Bài tập 2-4 vẽ các đồ thị phẳng đã cho với các cạnh không cắt nhau.*

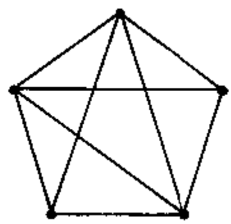
**2.**



**3.**

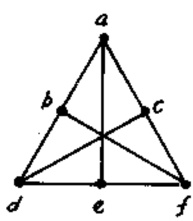


**4.**

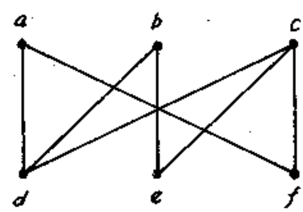


*Trong các Bài tập 5–7 xác định xem đồ thị đã cho có là phẳng không. Nếu có , thì hãy vẽ nó không có các cạnh cắt nhau.*

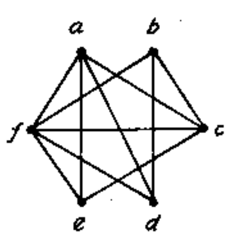
**5.**




**6.**




**7.**




**8.** Hãy hoàn tất chứng minh trong Ví dụ 3.

**9.** Chỉ ra rằng $K_5$ là không phẳng bằng cách sử dụng lý luận tương tự như trong Ví dụ 3.

**10.** Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 8 đỉnh bậc 3. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

**11.** Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 6 đỉnh, mỗi đỉnh đều bậc 4. Biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền?

**12.** Giả sử đồ thị phẳng liên thông có 30 cạnh. Nếu biểu diễn phẳng của đồ thị này chia mặt phẳng thành 20 miền, thì đồ thị này có bao nhiêu đỉnh?

**13.** Chứng minh Hệ quả 2.

**14.** Giả sử một đơn đồ thị phân đôi, phẳng, liên thông có $e$ cạnh và $v$ đỉnh. Chỉ ra rằng $e \leqslant 2v - 4$ nếu $v \geqslant 3$.

**15*.** Giả sử một đơn đồ thị phẳng, liên thông có $e$ cạnh và $v$ đỉnh và không có chu trình độ dài 4 hoặc ít hơn. Chỉ ra rằng $e \leqslant (5/3)v - (10/3)$ nếu $v \geqslant 4$.

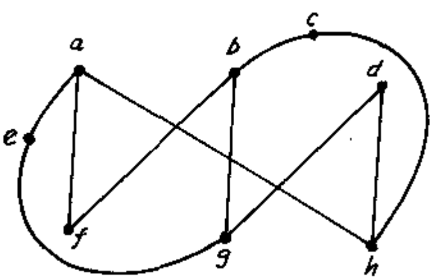
**16.** Giả sử một đồ thị phẳng có $k$ thành phần liên thông, $e$ cạnh và $v$ đỉnh, biểu diễn phẳng của nó chia mặt phẳng thành $r$ miền. Hãy tìm công thức cho $r$ qua $e$, $v$ và $k$.

**17.** Đồ thị nào trong các đồ thị không phẳng sau đây có tính chất : Bỏ một đỉnh bất kỳ và các cạnh liên thuộc với nó tạo ra một đồ thị phẳng.

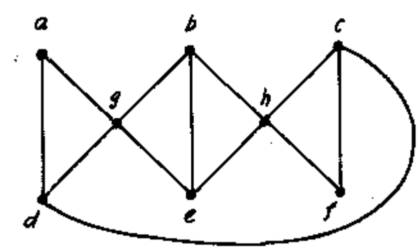
a) $K_5$ b) $K_6$ c) $K_{3,3}$

*Trong các bài tập 18–20 hãy kiểm tra xem đồ thị nào là đồng phôi với $K_{3,3}$.*

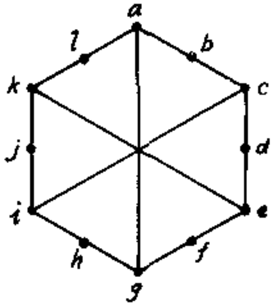
**18.**




**19.**

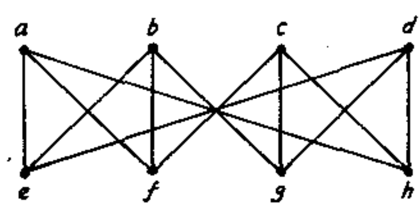



**20.**

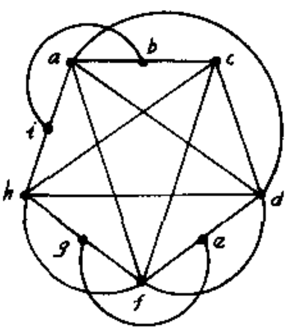



*Trong các Bài tập 21–23 dùng Định lý Kuratowski để xác định xem đồ thị đã cho có là phẳng hay không.*

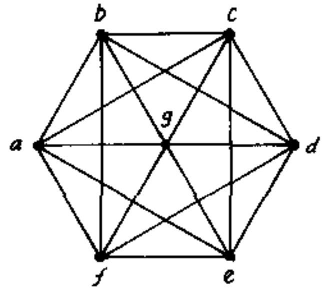
**21.**



**22.**




**23.**




**Số điểm cắt nhau** *của một đơn đồ thị là số điểm cắt nhau nhỏ nhất có thể xuất hiện trong biểu diễn phẳng của đồ thị này, trong đó không có ba cung nào biểu diễn cạnh có thể cắt nhau tại cùng một điểm.*

**24.** Chỉ ra rằng $K_{3,3}$ có số điểm cắt nhau là 1.

**25**.** Tìm số điểm cắt nhau của mỗi một trong các đồ thị không phẳng sau :

a) $K_5$ b) $K_6$ c) $K_7$

b) $K_{3,4}$ e) $K_{4,4}$ f) $K_{5,5}$

**26*.** Tìm số điểm cắt nhau của đồ thị Peterson.

**27*.** Chỉ ra rằng nếu $m$ và $n$ là hai số nguyên dương chẵn thì số điểm cắt nhau của $K_{m,n}$ là nhỏ hơn hay bằng $mn(m - 2)(n - 2)/6$.
(*Gợi ý* : Đặt $m$ đỉnh trên trục $x$ sao cho chúng cách đều và đối xứng qua gốc tọa độ, và $n$ đỉnh dọc theo trục $y$ sao cho chúng cách đều và đối xứng qua gốc tọa độ. Sau đó nối mỗi một trong $m$ đỉnh trên trục $x$ với mỗi một trong $n$ đỉnh trên trục $y$, rồi đếm số chỗ cắt nhau).

**Độ dày** *của đồ thị đơn G là số nhỏ nhất các đồ thị con phẳng của G mà G là hợp của chúng.*

**28.** Chứng tỏ rằng $K_{3,3}$ có độ dày bằng 2

**29*.** Tìm độ dày của các đồ thị trong Bài tập 25.

**30.** Chỉ ra rằng nếu $G$ là đơn đồ thị liên thông có $v$ đỉnh và $e$ cạnh, thì khi đó độ dày của $G$ ít nhất là $[e/(3v - 6)]$.

**31*.** Dùng Bài tập 30 chỉ ra rằng độ dày của $K_n$ ít nhất là $\lfloor (n + 7)/6 \rfloor$ với mọi $n$ nguyên dương.

**32.** Chỉ ra rằng nếu $G$ là đơn đồ thị liên thông có $v$ và $e$ cạnh, và không có chu trình độ dài bằng 3, khi đó độ dày của $G$ ít nhất là $[e/(2v - 4)]$.

**33.** Dùng Bài tập 32 chỉ ra rằng độ dày của $K_{m,n}$ ít nhất là $[mn/(2m + 2n - 4)]$, với mọi $m$, $n$ nguyên dương.

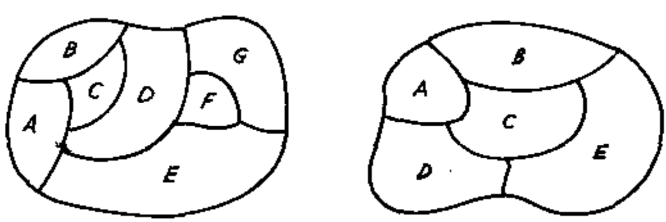
**34*.** Vẽ $K_5$ trên một mặt xuyến (ví dụ như chiếc xăm ô tô bơm căng – ND) sao cho không có cạnh cắt nhau.

**35*.** Vẽ $K_{3,3}$ trên mặt xuyến sao cho không có cạnh cắt nhau.

# 7.8. TÔ MÀU ĐỒ THỊ

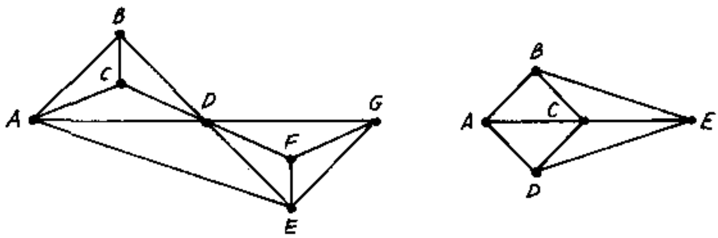
## MỞ ĐẦU

Những bài toán liên quan đến tô màu bản đồ đã dẫn đến rất nhiều kết quả trong lý thuyết đồ thị. Khi một bản đồ được tô màu, hai miền có chung biên giới được tô bằng hai màu tùy ý miễn là khác nhau. Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, chúng ta tô mỗi miền bằng một màu khác nhau. Tuy nhiên điều đó là không thực tế. Nếu bản đồ có nhiều miền thì sẽ rất khó phân biệt những màu gần giống nhau. Do vậy người ta chỉ dùng một số màu cần thiết để tô bản đồ. Một bài toán được đặt ra là : xác định số màu tối thiểu cần có để tô một bản đồ sao cho các miền kề nhau không cùng một màu. Ví dụ, với bản đồ bên trái của Hình 1 bốn màu là đủ, nhưng ba màu là không đủ. (Độc giả tự kiểm tra lại điều này). Trong bản đồ bên phải của Hình 1, ba màu là đủ (nhưng hai là không đủ).




***Hình 1.*** Hai bản đồ.

Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị. Để lập sự tương ứng đó, mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh . Các cạnh nối hai đỉnh, nếu các miền được biểu diễn bằng hai đỉnh này có biên giới chung nhau. Hai miền chung nhau chỉ một điểm không được coi là kề nhau. Đồ thị nhận được bằng cách như vậy gọi là **đồ thị đối ngẫu** của bản đồ đang xét. Rõ ràng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có đồ thị đối ngẫu phẳng. Hình 2 biểu diễn các đồ thị đối ngẫu với các bản đồ trên Hình 1.




*Hình 2.* Các đồ thị đối ngẫu của các bản đồ trên Hình 1.

Bài toán tô màu các miền của bản đồ là tương đương với bài toán tô màu các đỉnh của đồ thị đối ngẫu sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau có cùng một màu. Chúng ta có định nghĩa sau.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Tô màu* một đơn đồ thị là sự gán màu cho các đỉnh của nó sao cho không có hai đỉnh liền kề được gán cùng một màu.

Một đồ thị có thể được tô màu bằng cách gán các màu khác nhau cho mỗi đỉnh của nó. Tuy vậy, với hầu hết các đồ thị, ta có thể tô màu chúng với số màu ít hơn số đỉnh. Vậy số màu ít nhất cần thiết là bao nhiêu?

**ĐỊNH NGHĨA 2.** *Số màu* của một đồ thị là số tối thiểu các màu cần thiết để tô màu đồ thị này.

Chúng ta thấy rằng câu hỏi về số màu lớn nhất của các đồ thị phẳng chính là câu hỏi về số cực đại các màu cần thiết để tô các bản đồ phẳng sao cho không có hai miền kề nhau được gán cùng một màu. Bài toán này đã được nghiên cứu từ hơn 100 năm nay. Câu trả lời chính là một trong các định lý nổi tiếng nhất trong toán học.

**ĐỊNH LÝ 1**. *Định lý Bốn Màu*. Số màu của một đồ thị phẳng là không lớn hơn bốn.

**Định lý Bốn màu** đầu tiên được đưa ra như một phỏng đoán vào năm 1850. Và cuối cùng đã được hai nhà toán học Mỹ là Kenneth Appel và Wolfgang Haken chứng minh năm 1976. Trước năm 1976 cũng đã có nhiều chứng minh sai, mà thông thường rất khó tìm thấy chỗ sai, đã được công bố. Hơn thế nữa đã có nhiều cố gắng một cách vô ích để tìm phản ví dụ bằng cách cố vẽ bản đồ cần hơn bốn màu để tô nó.

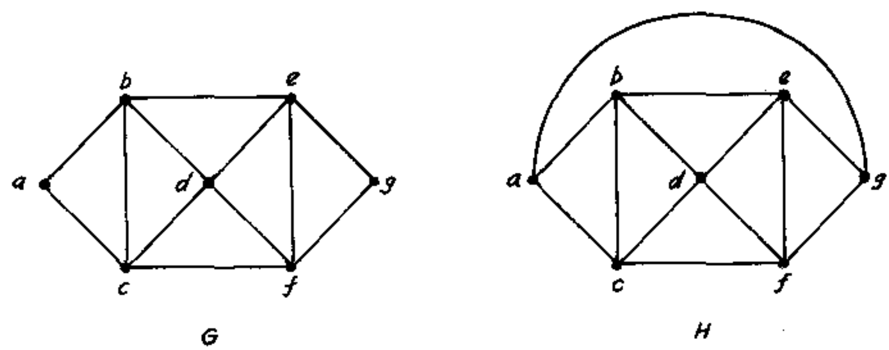
Có lẽ một chứng minh sai nổi tiếng nhất trong toán học là chứng minh sai bài toán bốn màu được công bố năm 1879 bởi luật sư, nhà toán học nghiệp dư Luân-đôn tên là Alfred Kempe. Các nhà toán học chấp nhận cách chứng minh của ông ta cho tới năm 1890, khi Percy Heawood phát hiện ra sai lầm trong chứng minh của Kempe. Tuy nhiên, cách lập luận của Kempe lại là cơ sở cho chứng minh của Appel và Haken. Chứng minh của họ dựa trên sự phân tích từng trường hợp một cách cẩn thận nhờ máy tính. Họ đã chỉ ra rằng nếu bài toán bốn màu là sai thì sẽ có một phản ví dụ thuộc một trong gần 2000 loại khác nhau và đã chỉ ra không có loại nào dẫn tới phản ví dụ cả. Trong chứng minh của mình họ đã dùng hơn 1000 giờ máy. Cách chứng minh này đã gây ra nhiều cuộc tranh cãi vì máy tính đã đóng vai trò quan trọng biết bao. Chẳng hạn, liệu có thể có sai lầm trong chương trình và điều đó dẫn đến kết quả sai không? Lý luận của họ có thực sự là một chứng minh hay không, nếu nó phụ thuộc vào thông tin ra từ một máy tính không đáng tin cậy?

Bài toán bốn màu áp dụng chỉ cho các đồ thị phẳng. Các đồ thị không phẳng có thể có số màu lớn tùy ý như sẽ được chỉ ra trong Ví dụ 2.

Cần phải làm hai điều khi chứng minh số màu của đồ thị là $n$. Trước tiên chúng ta phải chứng tỏ rằng đồ thị có thể được tô màu bằng $n$ màu. Điều này có thể thực hiện bằng cách tô màu đồ thị đó. Sau đó chúng ta phải chứng tỏ rằng không thể tô màu đồ thị với số màu ít hơn . Ví dụ sau đây minh họa cách tìm số màu.

**Ví dụ 1.** Số màu của đồ thị $G$ và $H$ trên Hình 3 bằng bao nhiêu?

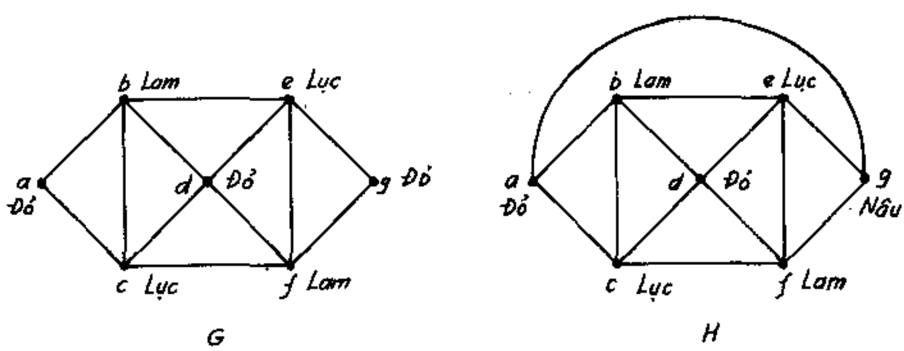
***Giải:*** Số màu của $G$ ít nhất là 3, vì các đỉnh $a$, $b$ và $c$ phải được gán các màu khác nhau. Để thấy $G$ có thể tô bằng 3 màu ta gán màu đỏ cho $a$, màu lam cho $b$ và màu lục cho $c$. Khi đó $d$ có thể (và phải) tô màu đỏ vì nó liền kề với $b$ và $c$. Tiếp theo $e$ có thể (và phải) tô màu




*Hình 3.* Các đơn đồ thị $G$ và $H$.

lục vì nó liền kề với các đỉnh màu đỏ và lam, đỉnh $f$ có thể (và phải) tô màu lam vì nó liền kề với các đỉnh màu đỏ và màu lục. Cuối cùng, $g$ có thể (và phải) tô màu đỏ vì nó liền kề với các đỉnh màu lam và màu lục. Vậy là ta đã tô màu đồ thị $G$ bằng đúng 3 màu. Hình 4 thể hiện cách tô màu như thế.

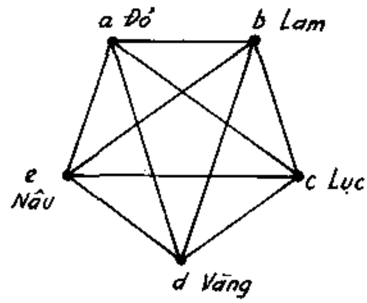
Đồ thị $H$ được tạo nên từ đồ thị G bằng cách thêm vào một cạnh nối $a$ với $g$. Mọi ý định tô $H$ bằng 3 màu cần phải tuân theo lý luận đã dùng khi tô màu $G$, trừ giai đoạn cuối cùng, khi các đỉnh khác $g$ đã được tô màu. Vì $g$ liền kề (trong $H$) với các đỉnh màu đỏ, màu lam và màu lục nên ta buộc phải dùng màu thứ tư, chẳng hạn màu nâu. Vì thế $H$ có số màu bằng 4. Cách tô màu $H$ thể hiện trên Hình 4.




*Hình 4.* Tô màu đồ thị $G$ và $H$.

**Ví dụ 2.** Tìm số màu của đồ thị $K_n$.

*Giải:* Có thể xây dựng cách tô màu đồ thị $K_n$ với $n$ màu khác nhau. Có cách tô màu nào dùng ít màu hơn không? Câu trả lời là không. Không có hai đỉnh nào có thể gán cùng màu vì mọi cặp đỉnh của đồ thị này đều liền kề. Vì thế số màu của $K_n$ bằng $n$. (Nhớ lại rằng $K_n$ là không phẳng nếu $n \geq 5$, vì thế kết quả này không mâu thuẫn với Định lý bốn màu). Cách tô màu $K_5$ bằng 5 màu được thể hiện trên Hình 5.

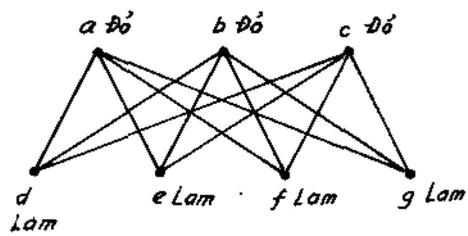



*Hình 5.* Tô màu đồ thị $K_5$.

■

**Ví dụ 3.** Tìm số màu của đồ thị phân đôi, đầy đủ $K_{m,n}$, trong đó $m$ và $n$ là các số nguyên dương.

*Giải:* Hình như số màu cần thiết phụ thuộc vào $m$ và $n$. Tuy nhiên, ta chỉ cần 2 màu. Tô tập $m$ đỉnh bằng một màu, và tập $n$ đỉnh bằng màu khác. Vì mỗi cạnh chỉ nối các đỉnh từ tập $m$ đỉnh tới đỉnh thuộc tập $n$ đỉnh nên không có hai đỉnh liền kề nào cùng màu. Hình 6 thể hiện cách tô màu đồ thị $K_{3,4}$.



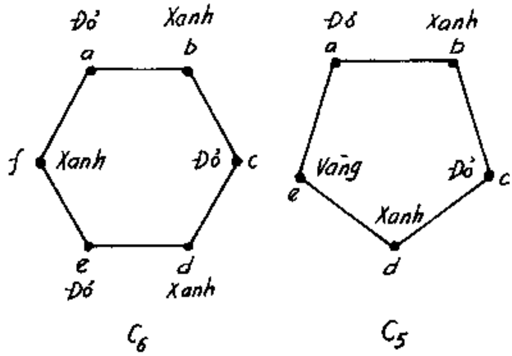

*Hình 6.* Tô màu đồ thị $K_{3,4}$.

■

Mọi đơn đồ thị phân đôi liên thông có số màu bằng 2 hoặc 1, vì lý lẽ như trong Ví dụ 3 áp dụng được cho mọi đồ thị như thế. Ngược lại, mọi đồ thị có số màu bằng 2 đều là đồ thị phân đôi. (Xem các Bài tập 23 và 24 cuối tiết này).

**Ví dụ 4.** Số màu của đồ thị $C_n$ là bao nhiêu? (Nhớ lại rằng $C_n$ là chu trình với $n$ đỉnh).

*Giải:* Trước tiên ta nghiên cứu một vài trường hợp cụ thể. Giả sử $n = 6$. Lấy ra một đỉnh và tô nó bằng màu đỏ. Đi theo chiều kim đồng hồ của đồ thị phẳng trên Hình 7, cần gán màu thứ hai, chẳng hạn màu xanh cho đỉnh tiếp theo, cứ tiếp tục như thế theo chiều kim đồng hồ, đỉnh thứ ba có thể tô màu đỏ, đỉnh thứ tư tô màu xanh, đỉnh thứ năm tô màu đỏ và cuối cùng đỉnh thứ 6 có thể tô màu xanh. Vậy số màu của $C_6$ là 2.




***Hình** 7.* tô màu đồ thị $C_5$ và $C_6$.

Tiếp theo, cho $n = 5$, xét đồ thị $C_5$. Lấy một đỉnh và tô nó bằng màu đỏ. Đỉnh tiếp theo chiều kim đồng hồ tô màu xanh, cứ tiếp tục ta được đỉnh $d$ màu xanh. Đỉnh thứ 5, đỉnh $e$, không thể tô màu đỏ hoặc xanh được vì nó liền kề với các đỉnh có màu xanh và đỏ. Do đó cần màu thứ ba cho đỉnh này, chẳng hạn màu vàng. Vậy số màu của $C_5$ là 3. Xem Hình 7.

Nói chung, cần hai màu nếu $n$ chẵn để tô màu đồ thị $C_n$ và nếu $n$ lẻ thì số màu của $C_n$ bằng 3. Độc giả có thể tự chứng minh điều này một cách không có gì khó khăn.

## NHỮNG ỨNG DỤNG CỦA BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ

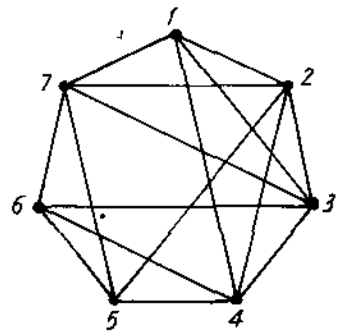
Bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng khác nhau để xếp lịch và gán nhãn. Các ví dụ ứng dụng như vậy sẽ được xét ở đây. Ứng dụng đầu tiên liên quan tới việc sắp lịch thi.

**Ví dụ 5.** *Lập lịch thi.* Hãy lập lịch thi trong trường đại học sao cho không có sinh viên nào có hai môn thi cùng một lúc.

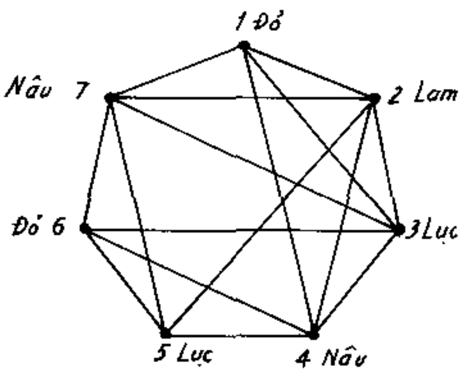
*Giải:* Có thể giải bài toán lập lịch bằng mô hình đồ thị, với các đỉnh là các môn thi, có một cạnh giữa hai đỉnh nếu có sinh viên phải thi cả hai môn được biểu diễn bằng hai đỉnh này. Thời gian thi của mỗi môn được biểu thị bằng các màu khác nhau. Như vậy việc lập lịch thi sẽ tương ứng với việc tô màu đồ thị này.

Ví dụ có 7 môn thi cần xếp lịch. Giả sử các môn học được đánh số từ 1 tới 7, và các cặp môn thi sau có chung sinh viên : 1 và 2, 1 và 3, 1 và 4, 1 và 7, 2 và 3, 2 và 4, 2 và 5, 2 và 7, 3 và 4, 3 và 7, 4 và 5, 4 và 6, 5 và 7, 6 và 7. Trên Hình 8 biểu diễn đồ thị tương ứng. Việc lập lịch thi chính là việc tô màu đồ thị này.

Vì số màu của đồ thị này là 4 (độc giả tự kiểm tra lại điều này), nên cần có 4 đợt thi. Cách tô đồ thị bằng 4 màu và lịch thi được biểu diễn trên Hình 9.




*Hình 8.* Đồ thị biểu diễn bài toán lập lịch thi.




| Đợt thi | Môn thi |
|---|---|
| I | 1,6 |
| II | 2 |
| III | 3,5 |
| IV | 4,7 |

*Hình 9.* Dùng bài toán tô màu để lập lịch thi.

■

Bây giờ ta xét bài toán phân chia kênh truyền hình.

**Ví dụ 6**. *Phân chia tần số.* Các kênh truyền hình từ số 2 tới số 13 được phân chia cho các đài truyền hình ở Bắc Mỹ sao cho không có hai đài phát nào cách nhau không quá 150 dặm lại dùng cùng một kênh. Có thể chia kênh truyền hình như thế nào bằng mô hình tô màu đồ thị?

*Giải:* Ta xây dựng đồ thị bằng cách coi mỗi đài phát là một đỉnh. Hai đỉnh được nối với nhau bằng một cạnh nếu chúng ở cách nhau không quá 150 dặm. Việc phân chia kênh tương ứng với việc tô màu đồ thị, trong đó mỗi màu biểu thị một kênh.

■

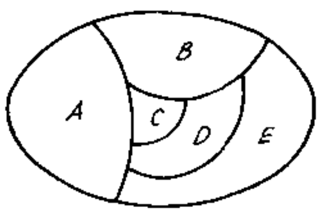
Áp dụng bài toán tô màu đồ thị với bộ dịch.

**Ví dụ 7.** *Các thanh ghi chỉ số.* Trong các bộ dịch hiệu quả cao việc thực hiện các vòng lặp được tăng tốc khi các biến dùng thường xuyên được lưu tạm thời trong các thanh ghi chỉ số của Bộ xử lý trung tâm (*CPU*) mà không phải ở trong bộ nhớ thông thường. Với một vòng lặp cho trước cần bao nhiêu thanh ghi chỉ số? Bài toán này có thể giải bằng mô hình tô màu đồ thị. Để xây dựng mô hình ta coi mỗi đỉnh của đồ thị là một biến trong vòng lặp. Giữa hai đỉnh có một cạnh nếu các biến biểu thị bằng các đỉnh này phải được lưu trong các thanh ghi chỉ số tại cùng thời điểm khi thực hiện vòng lặp. Như vậy số màu của đồ thị chính là số thanh ghi cần có vì những thanh ghi khác nhau được phân cho các biến khi các đỉnh biểu thị các biến này là liền kề trong đồ thị.

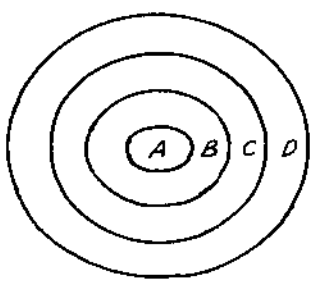
## BÀI TẬP

1. Hãy xây dựng đồ thị đối ngẫu với mỗi bản đồ sau.

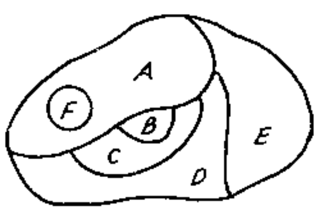
a)




b)



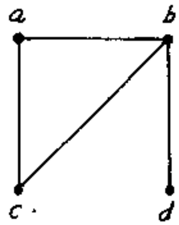

c)



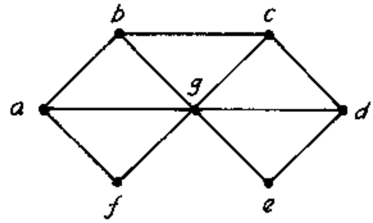

2. Tìm số màu cần để tô bản đồ trong Bài tập 1 sao cho không có hai miền kề nhau có cùng một màu.

*Trong các bài tập 3-9 hãy tìm số màu của đồ thị đã cho.*

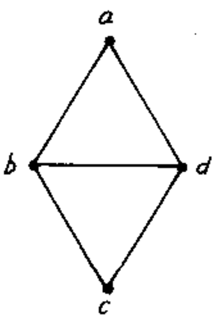
**3.**



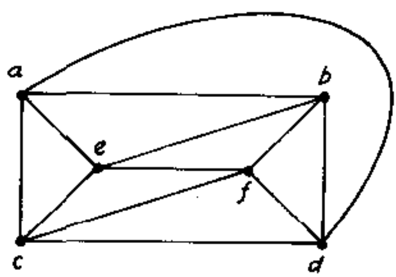

**4.**



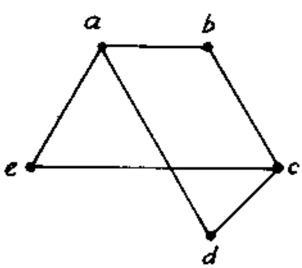

**5.**



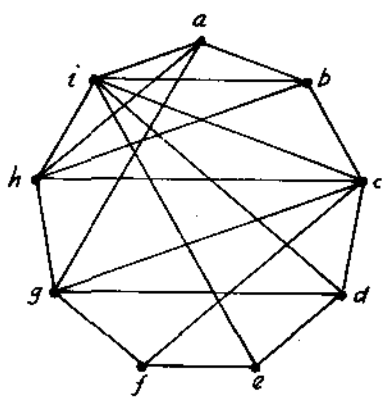

**6.**



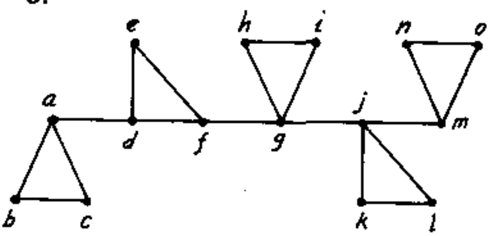

**7.**




**8.**




**9.**




**10.** Với các đồ thị trong các Bài tập 3–9, hãy xét xem có thể giảm số màu bằng cách xóa một đỉnh và tất cả các cạnh liên thuộc với nó không.

**11.** Những đồ thị nào có số màu bằng 1?

**12.** Số màu tối thiểu cần thiết để tô bản đồ nước Mỹ là bao nhiêu? Không coi hai bang là liền kề nếu chúng chỉ gặp nhau ở góc. Giả sử Michigan là một bang. Coi các đỉnh biểu thị Alaska và Hawaii là các đỉnh cô lập.

**13.** Tính số màu của đồ thị *Wn*

**14.** Chứng minh rằng một đơn đồ thị có chu trình và có một số lẻ các đỉnh không thể tô bằng hai màu.

**15.** Hãy lập lịch thi các môn Toán 115, Toán 116, Toán 185, Toán 195, *CS* 101, *CS* 102, *CS* 273, và *CS* 473 (CS – Tin học) với số ít nhất các đợt thi, nếu không có sinh viên nào thi cả hai môn Toán 115 và *CS* 473, Toán 116 và *CS* 473, Toán 195 và *CS* 101, Toán 195 và *CS* 102, Toán 115 và Toán 116, Toán 115 và Toán 185, và Toán 185 và Toán 195, nhưng có sinh viên thi trong mọi tổ hợp khác của các môn.

**16.** Sáu đài truyền hình ở cách nhau như đã cho trong bảng dưới đây. Hỏi phải cần bao nhiêu kênh khác nhau để phát sóng, nếu hai đài không thể dùng cùng một kênh khi chúng cách nhau không quá 150 dặm?

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | 85 | 175 | 200 | 50 | 100 |
| 2 | 85 | - | 125 | 175 | 100 | 160 |
| 3 | 175 | 125 | - | 100 | 200 | 250 |
| 4 | 200 | 175 | 100 | - | 210 | 220 |
| 5 | 50 | 100 | 200 | 210 | - | 100 |
| 6 | 100 | 160 | 250 | 220 | 100 | - |

**17.** Khoa toán có **6** hội đồng họp mỗi tháng một lần. Cần có bao nhiêu thời điểm họp khác nhau để đảm bảo rằng không ai bị xếp lịch họp hai hội đồng cùng một lúc, nếu các hội đồng là :

$C_1$ = {Arlinghaus, Brand, Zaslavsky},

$C_2$ = {Brand, Lee, Rosen},

$C_3$ = {Arlinghaus, Rosen, Zaslavsky}.

**18.** Một vườn bách thú muốn xây dựng chuồng tự nhiên để trưng bày các con thú. Không may, một số loại thú sẽ ăn thịt các con thú khác nêu có cơ hội. Có thể dùng mô hình đồ thị và tô màu đồ thị như thế nào để xác định số chuồng khác nhau cần có và cách nhốt các con thú vào các chuồng thú tự nhiên này?

**Tô màu cạnh** *đồ thị là gán các màu cho các cạnh sao cho các cạnh liên thuộc với một đỉnh chung được gán các màu khác nhau.* **Số màu cạnh** *của một đồ thị là số nhỏ nhất các màu cần dùng để tô màu các cạnh của nó.*

**19.** Hãy tìm số màu cạnh của đồ thị trong các Bài tập 3–9.

**20*.** Hãy tìm số màu cạnh của các đồ thị

a) $K_n$ b) $K_{m,n}$ c) $C_n$ d) $W_n$

**21.** Bảy biến xuất hiện trong vòng lặp của một chương trình. Các biến và các bước trong đó chúng cần phải lưu là : $t$ : các bước từ 1 tới 6; $u$ : bước 2 ; $v$ : các bước từ 2 tới 4 ; $w$ : các bước 1, 3 và 5 ; $x$ : các bước 1 và 6 ; $y$ : các bước từ 3 tới 6 ; và $z$ : các bước 4 và 5. Cần bao nhiêu thanh ghi chỉ số khác nhau để lưu các biến trên khi thực hiện vòng lặp này?

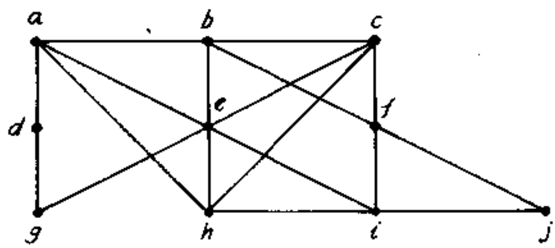
**22.** Có thể nói gì về số màu của đồ thị có $K_n$ như một đồ thị con?

**23.** Chỉ ra rằng một đơn đồ thị với số màu bằng 2 là đồ thị phân đôi.

**24.** Chỉ ra rằng một đồ thị phân đôi liên thông có số màu bằng 2.

*Thuật toán sau đây có thể dùng để tô màu đồ thị đơn. Trước tiên liệt kê các đỉnh* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *theo thứ tự bậc giảm dần, tức là* $deg(v_1) \geqslant deg(v_2) \geqslant deg(v_2 \geqslant \ldots \geqslant deg(v_n)$. *Gán màu 1 cho* $v_1$ *và cho đỉnh tiếp theo trong danh sách mà không liền kề với* $v_1$ *(nếu nó tồn tại), và lần lượt cho mỗi đỉnh không kề với các đỉnh có màu 1. Sau đó gán màu 2 cho đỉnh đầu tiên trong danh sách còn chưa được tô màu. Lần lượt gán màu 2 cho các đỉnh trong danh sách nếu các đỉnh này chưa được tô màu và không nối với các đỉnh có màu 2. Nếu vẫn còn các đỉnh chưa được tô màu hãy gán màu 3 cho đỉnh chưa được tô màu đầu tiên trong danh sách và cho các đỉnh chưa tô màu và không liền kề với các đỉnh có màu 3. Tiếp tục quá trình này cho tới khi tất cả các đỉnh được tô màu.*

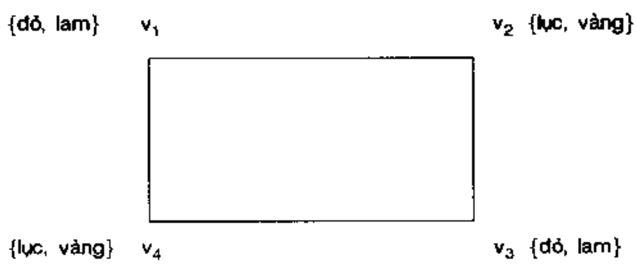
**25.** Xây dựng cách tô màu đồ thị sau đây bằng thuật toán trên.




**26*.** Dùng giả mã mô tả thuật toán tô màu nói trên.

**27*.** Chỉ ra rằng cách tô màu theo thuật toán trên có thể dùng nhiều màu hơn số màu cần thiết để tô màu đồ thị đã cho.

**Tô bộ k-màu** *cho đồ thị G là cách gán một tập k màu khác nhau cho mỗi đỉnh của đồ thị sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau nào có chung một màu. Ta ký hiệu* $X_k(G)$ *là số dương nhỏ nhất n sao cho G có cách tô bộ k-màu bằng n màu. Ví dụ,* $X_2(C_4) = 4$. *Chỉ dùng bốn màu chúng ta có thể gán bộ hai màu cho mỗi đỉnh của* $C_4$, *sao cho không có hai đỉnh kề nào có chung một màu. Hơn nữa, ít hơn 4 màu là không đủ bởi vì hai đỉnh* $v_1$ *và* $v_2$ *mỗi đỉnh cần gán hai màu, và không thể gán một màu chung cho cả hai đỉnh này.*




**28.** Tìm các giá trị sau :

a) $X_2(K_3)$ b) $X_2(K_4)$
c) $X_2(W_4)$ d) $X_2(C_5)$
e) $X_2(K_{3,4})$ f) $X_3(K_5)$
g) $X_3(C_5)$ h) $X_3(K_{4,5})$

**29*.** Cho $G$ và $H$ là các đồ thị trên Hình 3. Hãy tìm

a) $X_2(G)$ b) $X_2(H)$
c) $X_3(G)$ d) $X_3(H)$.

**30.** $X_k(G)$ bằng bao nhiêu nếu $G$ là đồ thị phân đôi và $k$ là một số nguyên dương?

**31.** Các tần số cho điện thoại di động được phân chia theo vùng. Mỗi vùng được phân một tập các tần số để các máy ở vùng đó sử dụng. Một tần số như nhau không thể dùng trong các vùng ở đó xảy ra hiện tượng giao thoa sóng. Hãy giải thích cách dùng tô bộ $k$- màu để phân $k$ tần số cho mỗi vùng điện thoại di động.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

1. a) Hãy định nghĩa đồ thị đơn, đa đồ thị, giả đồ thị, đồ thị có hướng, và đa đồ thị có hướng.

   b) Bằng ví dụ hãy chỉ ra mỗi loại đồ thị trong câu a) có thể dùng để mô hình. Ví dụ hãy giải thích cách lập mô hình các khía cạnh khác nhau của mạng máy tính hay hệ thống hàng không.

**2.** Hãy cho ít nhất 4 ví dụ về cách dùng đồ thị để lập mô hình các bài toán thực tế.

**3.** Hãy nêu mối quan hệ giữa tổng số bậc của các đỉnh trong một đồ thị vô hướng và số cạnh của nó. Hãy giải thích vì sao có mối quan hệ đó.

**4.** Tại sao trong đồ thị vô hướng số các đỉnh bậc lẻ là một số chẵn?

**5.** Hãy nêu mối quan hệ giữa tổng số bậc-vào và tổng các bậc-ra của các đỉnh trong một đồ thị có hướng. Hãy giải thích vì sao có mối quan hệ đó.

**6.** Hãy mô tả họ các đồ thị sau đây :

a) $K_n$ - đồ thị đầy đủ với $n$ đỉnh.
b) $K_{m,n}$ - đồ thị đầy đủ phân đôi thành $m$ đỉnh và $n$ đỉnh.
c) $C_n$ - các chu trình với $n$ đỉnh.
d) $W_n$ - các bánh xe cỡ $n$.
c) $Q_n$ - các khối hộp $n$ chiều.

**7.** Trong mỗi họ đồ thị ở Bài tập 6 có bao nhiêu cạnh, bao nhiêu đỉnh?

**8.** a) Đồ thị phân đôi là gì?
b) Đồ thị nào trong các đồ thị $K_n$, $C_n$, $W_n$ là đồ thị phân đôi?
c) Làm thế nào để xác định được một đồ thị có là phân đôi không?

**9.** a) Hãy mô tả ba phương pháp khác nhau để biểu diễn đồ thị.

h) Hãy vẽ một đơn đồ thị có ít nhất 5 đỉnh và 8 cạnh. Hãy minh họa cách dùng các phương pháp mô tả ở câu a) để biểu diễn đồ thị này.

**10.** a) Thế nào là hai đơn đồ thị đẳng cấu?

b) Bất biến với phép đẳng cấu giữa hai đơn đồ thị là gì?

c) Hãy cho ví dụ về hai đồ thị có cùng số đỉnh, số cạnh, và bậc của các đỉnh nhưng không đẳng cấu.

d) Có tồn tại tập các bất biến có thể dùng để xác định hai đồ thị đơn có là đẳng cấu với nhau không?

**11.** a) Đồ thị liên thông là gì?

b) Thế nào là các thành phần liên thông của một đồ thị.

**12.** a) Hãy giải thích cách dùng ma trận liền kề để biểu diễn đồ thị.

b) Ma trận liền kề có thể dùng như thế nào để xác định xem một hàm từ tập đỉnh của đồ thị $G$ tới tập đỉnh của đồ thị $H$ có là đẳng cấu hay không?

c) Ma trận liền kề có thể dùng như thế nào để xác định số các đường đi độ dài $r$, trong đó $r$ là một số dương, giữa hai đỉnh của một đồ thị.

**13.** a) Hãy xác định chu trình Euler và đường đi Euler trong đồ thị vô hướng.

b) Hãy mô tả bài toán cầu Konigsberg và giải thích cách phát biểu bài toán này dưới dạng chu trình Euler.

c) Làm thế nào để có thể xác định xem một đồ thị vô hướng có đường đi Euler hay không?

d) Làm thế nào để có thể xác định xem một đồ thị vô hướng có chu trình Euler hay không?

**14.** a) Định nghĩa chu trình Hamilton trong đồ thị đơn.

b) Hãy đưa ra một số tính chất của đơn đồ thị để suy ra đồ thị không có chu trình Hamilton.

**15.** Hãy đưa ra ví dụ về các bài toán có thể giải bằng cách tìm đường đi ngắn nhất trong đồ thị có trọng số.

**16.** a) Mô tả thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đồ thị có trọng số.

b) Hãy vẽ đồ thị có trọng số với ít nhất 10 đỉnh, 20 cạnh. Dùng thuật toán Dijkstra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh nào đó của đồ thị.

**17.** a) Đồ thị phẳng là gì?

b) Cho ví dụ về đồ thị không phẳng.

**18.** a) Hãy đưa ra công thức Euler cho đồ thị phẳng.

b) Có thể dùng công thức Euler như thế nào để chỉ ra một đồ thị đơn là không phẳng.

**19.** Hãy phát biểu định lý Kuratowski và giải thích ý nghĩa của nó.

**20.** a) Định nghĩa số màu của đồ thị.

b) Số màu của đồ thị $K_n$, trong đó $n$ là một số nguyên dương, bằng bao nhiêu?

c) Số màu của đồ thị $C_n$, trong đó $n$ là một số nguyên dương lớn hơn 2, bằng bao nhiêu?

d) Số màu của đồ thị $K_{m,n}$, trong đó $m,n$ là các số nguyên dương, bằng bao nhiêu?

**21.** Hãy phát biểu Định lý bốn màu. Có tồn tại các đồ thị không thể tô bằng bốn màu không?

**22.** Hãy giải thích cách dùng bài toán tô màu để lập mô hình các bài toán thực tế. Hãy đưa ra ít nhất hai ví dụ.

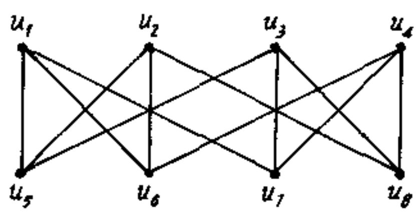
## *BÀI TẬP BỔ SUNG*

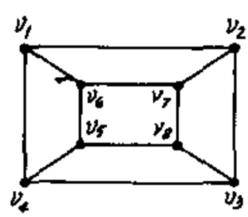
**1.** Một đồ thị có 100 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc 50. Hãy tính số cạnh của nó.

**2.** Đồ thị $K_3$ có bao nhiêu đồ thị con không đẳng cấu?

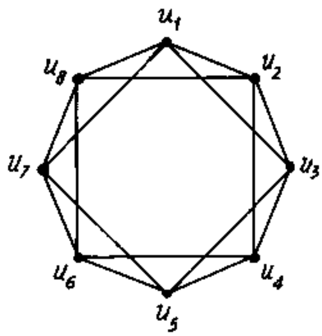
*Trong các Bài tập 3-5, các cặp đồ thị đã cho có đẳng cấu hay không.*

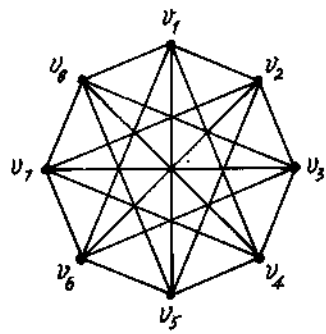
**3.**



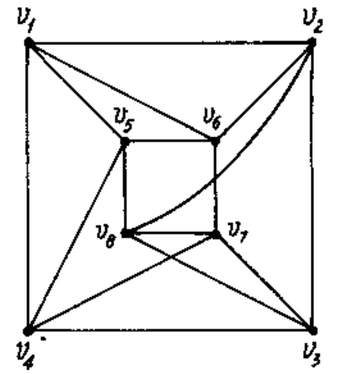



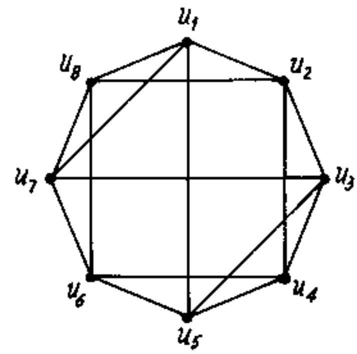
**4.**




**5.**




**Đồ thị đầy đủ m – phần** $K_{n_1, n_2, ..., n_m}$ có các đỉnh được phân thành $m$ tập con trong đó mỗi tập có $n_1$, $n_2$, ..., $n_m$ phần tử và các đỉnh nối với nhau nếu và chỉ nếu chúng thuộc các tập con khác nhau.

**6.** Vẽ các đồ thị sau :

a) $K_{1,2,3}$  b) $K_{2,2,2}$  c) $K_{1,2,2,3}$

**7.** Đồ thị đầy đủ $m$ – phần $K_{n_1, n_2, ..., n_m}$ có bao nhiêu đỉnh, bao nhiêu cạnh?

**8*.** a) Hãy chứng minh hoặc bác bỏ rằng trong một đơn đồ thị hữu hạn có ít nhất hai đỉnh, luôn tồn tại hai đỉnh cùng bậc.

b) Hãy làm như câu a) với một đa đồ thị hữu hạn.

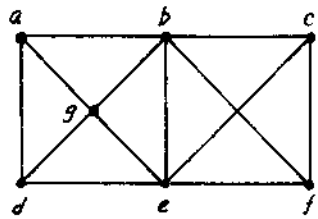
*Cho G = (V,E) là một đơn đồ thị.* **Đồ thị con sinh** *bởi tập con W của tập V là đồ thị (W, F) trong đó F chứa các cạnh của E nếu và chỉ nếu cả hai đầu mút của nó đều thuộc W.*

**9.** Xét các đồ thị trên Hình 3 của Tiết 7.4. Hãy tìm đồ thị con sinh bởi:
a) $\{a, b, c\}$  b) $\{a, e, g\}$  c) $\{b, c, f, g, h\}$.

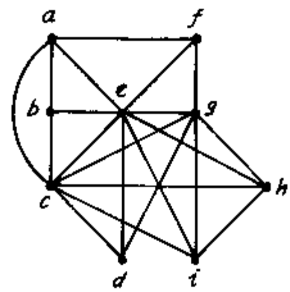
**10.** Cho $n$ là một số nguyên dương. Chỉ ra rằng đồ thị con sinh bởi tập con không rỗng của tập đỉnh của $K_n$ là một đồ thị đầy đủ.

**Clic** *trong một đơn đồ thị vô hướng là một đồ thị con đầy đủ không nằm trong bất cứ đồ thị con đầy đủ nào rộng hơn nó. Trong các Bài tập 11–13 hãy tìm tất cả các clic trong các đồ thị đã cho.*

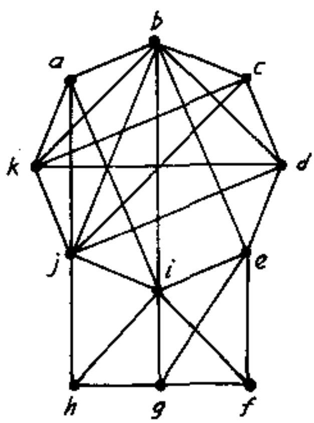
**11.**




**12.**

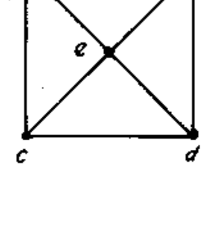



**13.**

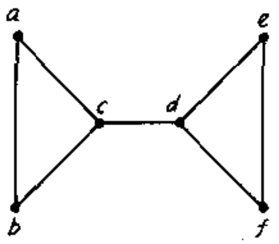



**Tập trội** *của các đỉnh trong một đơn đồ thị là tập gồm các đỉnh sao cho mọi đỉnh khác đều nối với ít nhất một trong các đỉnh của tập này. Tập đỉnh trội với số phần tử nhỏ nhất được gọi là* **tập trội tối thiểu.** *Trong các bài tập 14–16 hãy tìm tập trội tối thiểu cho mỗi đồ thị đã cho*

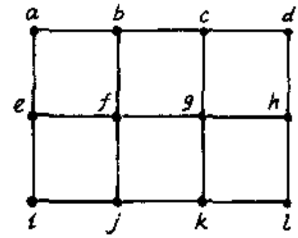
**14.**



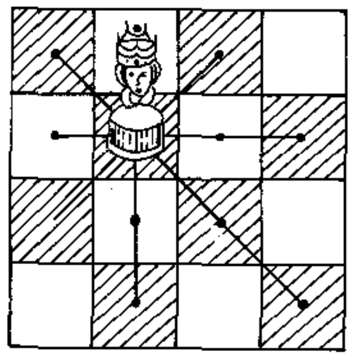
**15.**




**16.**




*Đồ thị đơn có thể dùng để xác định số nhỏ nhất các quân hậu có thể khống chế toàn bàn cờ. Giả sử cho bàn cờ cỡ $n \times n$ có $n^2$ ô vuông. Một đơn đồ thị có $n^2$ đỉnh, mỗi đỉnh ứng với một ô vuông, hai đỉnh được nối với nhau nếu con hậu đứng ở ô được biểu diễn bằng một đỉnh có thể khống chế được ô biểu diễn bằng đỉnh kia.*



**Các ô vuông bị quân hậu khống chế.**

**17.** Hãy xây dựng đơn đồ thị biểu diễn bàn cờ $n \times n$ với các cạnh biểu thị sự khống chế của quân hậu, cho các trường hợp sau :

a) $n = 3$, b) $n = 4$.

**18.** Hãy nói cách áp dụng khái niệm tập trội tối thiểu vào bài toán xác định số nhỏ nhất các quân hậu khống chế toàn bàn cờ $n \times n$.

**19**.** Hãy tìm số tối thiểu các quân hậu khống chế toàn bàn cờ $n \times n$ với

a) $n = 3$ ; b) $n = 4$ c) $n = 5$.

**20.** Cho $G_1$ và $H_1$ là đẳng cấu và $G_2$ và $H_2$ là đẳng cấu. Hãy chứng minh hoặc bác bỏ khẳng định rằng $G_1 \cup G_2$ và $H_1 \cup H_2$ là đẳng cấu.

**21.** Chỉ ra rằng mỗi một trong các tính chất sau đây là một bất biến mà các đồ thị đơn đẳng cấu hoặc là có hoặc là không có tính chất này.

a) Liên thông ; b) Tồn tại chu trình Hamilton

c) Tồn tại chu trình Euler. d) Có số tự cắt $C$

e) Có $n$ đỉnh cô lập ; f) Đồ thị phân đôi.

**22.** Hãy nói cách tìm ma trận liền kề của $\overline{G}$ từ ma trận liền kề của $G$, trong đó $G$ là một đơn đồ thị.

**23.** Có bao nhiêu đơn đồ thị liên thông, phân đôi không đẳng cấu và có 4 đỉnh?

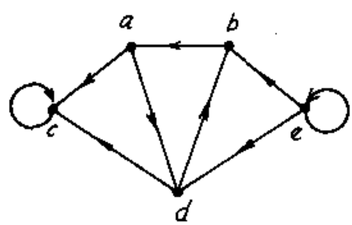
**24*.** Có bao nhiêu đơn đồ thị liên thông, không đẳng cấu với 5 đỉnh và

1. không có đỉnh nào bậc lớn hơn 2?
2. có số màu bằng 4?
3. là đồ thị không phẳng?

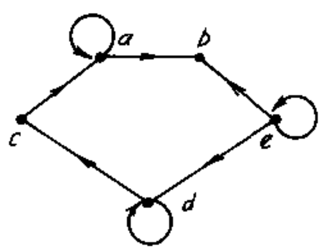
*Đồ thị có hướng được gọi là* **tự nghịch đảo** *nếu nó đẳng cấu với nghịch đảo của nó.*

**25.** Các đồ thị sau có phải là tự nghịch đảo không.

a)



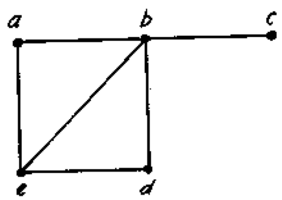

b)



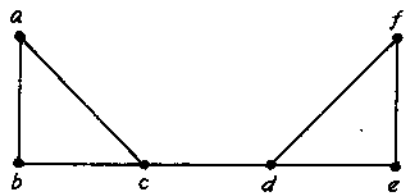

**26.** Chỉ ra rằng nếu $G$ là đồ thị có hướng tự nghịch đảo và $H$ là đồ thị có hướng đẳng cấu với $G$ thì $H$ cũng là tự nghịch đảo.

**Định hướng** *một đồ thị vô hướng đó là việc gán một chiều nào đó cho các cạnh của nó sao cho đồ thị có hướng nhận được là liên thông mạnh. Nếu có thể định hướng được một đồ thị vô hướng thì đồ thị này gọi là đồ thị có* **thể định hướng** *được. Trong các Bài tập từ 27-29 hãy xác định xem các đồ thị đó có thể định hướng được không?*

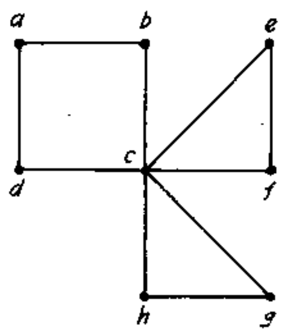
**27.**




**28.**




**29.**




**30.** Vì giao thông ở trung tâm thành phố rất khó khăn, nên các kỹ sư giao thông đã lập nhiều kế hoạch thay đổi tất cả các đường phố, các đường hiện là hai chiều sẽ trở thành đường một chiều. Hãy giải thích cách mô hình bài toán đó.

**31*.** Hãy chỉ ra rằng một đồ thị là không định hướng được nếu nó có cạnh cắt.

**Đồ thị xoay** *là đồ thị có hướng sao cho nếu u và v là các đỉnh của đồ thị thì có đúng một cạnh (u, v) hoặc (v, u) nối hai đỉnh này.*

**32.** Có bao nhiêu đồ thị xoay khác nhau với $n$ đỉnh?

**33.** Tổng các bậc–vào và bậc–ra của một đỉnh trong một đồ thị xoay bằng bao nhiêu?

**34*.** Hãy chỉ ra mọi đồ thị xoay đều có đường đi Hamilton.

**35.** Cho hai con gà trong một đàn gà, một con lớn hơn con kia. Điều này quyết định **thứ tự mổ nhau** của đàn. Có thể dùng đồ thị xoay để mô hình thứ tự mổ nhau như thế nào?

**36.** Giả sử $G$ là một đa đồ thị liên thông với $2k$ đỉnh bậc lẻ. Chứng tỏ rằng tồn tại $k$ đồ thị con nhận $G$ như là hợp của chúng, trong đó mỗi đồ thị con có đường đi Euler và không có hai đồ thị con nào có một cạnh chung.
(*Gợi ý* : Ghép $k$ cạnh vào đồ thị nối các cặp đỉnh bậc lẻ và dùng chu trình Euler cho đồ thị lớn hơn này).

**37*.** Giả sử $G$ là đơn đồ thị với $n$ đỉnh. **Chiều rộng** của $G$ ký hiệu $B(G)$ là số nhỏ nhất của max $\{|i-j| \mid a_i$ và $a_j$ là kề nhau $\}$, đối với tất cả các hoán vị $a_1, a_2, ..., a_n$ của các đỉnh. Điều này có nghĩa là chiều rộng là số nhỏ nhất đối với tất cả các danh sách các đỉnh trong các số lớn nhất của hiệu các chỉ số ứng với các đỉnh kề nhau. Hãy tìm chiều rộng của các đồ thị sau.

a) $K_5$ b) $K_{1,3}$ c) $K_{2,3}$

d) $K_{3,3}$ e) $Q_3$ f) $C_5$

**38*.** **Khoảng cách** giữa hai đỉnh phân biệt $v_1$ và $v_2$ của một đơn đồ thị liên thông là độ dài (số các cạnh) của đường đi ngắn nhất giữa $v_1$ và $v_2$. **Bán kính** của đồ thị là số nhỏ nhất, đối với tất cả các đỉnh $v$, của khoảng cách cực đại từ $v$ tới các đỉnh khác. **Đường kính** của đồ thị là khoảng cách cực đại giữa hai đỉnh phân biệt. Hãy tìm bán kính và đường kính của các đồ thị

a) $K_6$ b) $K_{4,5}$ c) $Q_3$ d) $C_6$

**39*.** a) Chứng tỏ rằng nếu đường kính của đơn đồ thị $G$ ít nhất bằng 4 khi đó đường kính của phần bù của nó không lớn hơn 2.

b) Chứng tỏ rằng nếu đường kính của đơn đồ thị $G$ ít nhất bằng 3 khi đó đường kính của phần bù của nó không lớn hơn 3.

**40*.** Giả sử một đa đồ thị có $2m$ đỉnh bậc lẻ. Chứng tỏ rằng mọi chu trình chứa tất cả các cạnh của đồ thị sẽ chứa ít nhất $m$ cạnh hơn một lần.

**41.** Tìm đường đi ngắn thứ hai giữa hai đỉnh $a$ và $z$ trong Hình 3 của Tiết 7.6.

**42.** Hãy đề xuất thuật toán tìm đường đi ngắn thứ hai giữa hai đỉnh của một đơn đồ thị liên thông, có trọng số.

**43.** Tìm đường đi ngắn thứ hai giữa hai đỉnh $a$ và $z$ đi qua đỉnh $e$ trong Hình 4 của Tiết 7.6.

**44**. Hãy đề xuất thuật toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh của một đơn đồ thị liên thông, có trọng số và đường đi này phải qua một đỉnh thứ ba xác định nào đó.

**45***. Chỉ ra rằng nếu $G$ là đơn đồ thị với ít nhất 11 đỉnh, khi đó hoặc là $G$ hoặc là $\overline{G}$, phần bù của $G$, là không phẳng.

*Tập các đỉnh trong một đồ thị được gọi là* **độc lập** *nếu không có hai đỉnh nào trong tập này được nối với nhau.* **Số độc lập** *của một đồ thị là số cực đại các đỉnh của tập độc lập ứng với đồ thị đó.*

**46***. Tìm số độc lập của :

a) $K_n$ b) $C_n$ c) $Q_n$ d) $K_{m,n}$

**47**. Chỉ ra rằng số đỉnh trong một đơn đồ thị là nhỏ hơn hay bằng tích của số độc lập và số màu của đồ thị đó.

*Một tính chất nào đó vẫn giữ nguyên khi thêm một cạnh vào một đơn đồ thị (không thêm đỉnh) được gọi là* **đơn điệu tăng**, *và một tính chất nào đó vẫn giữ nguyên khi bỏ một cạnh khỏi một đơn đồ thị (không xóa đỉnh) được gọi là* **đơn điệu giảm**.

**48**. Với mỗi đồ thị có tính chất sau hãy xét xem nó là đơn điệu tăng hay đơn điệu giảm.

a) Đồ thị $G$ liên thông.

b) Đồ thị $G$ không liên thông.

c) Đồ thị $G$ có chu trình Euler.

d) Đồ thị $G$ có chu trình Hamilton.

e) Đồ thị $G$ là phẳng.

f) Đồ thị $G$ có số màu bằng 4.

g) Đồ thị $G$ có bán kính bằng 3.

h) Đồ thị $G$ có đường kính bằng 3.

**49**. Chứng minh rằng tính chất $P$ của đồ thị là đơn điệu tăng nếu và chỉ nếu tính chất $Q$ của đồ thị là đơn điệu giảm, trong đó $Q$ là tính chất không có $P$.

## *BÀI TẬP LÀM TRÊN MÁY TÍNH*

***Viết chương trình với các Input và Output sau đây:***

**1.** Cho các cặp đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị vô hướng, hãy xác định bậc của mỗi đỉnh.

**2.** Cho các cặp có thứ tự các đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị có hướng, hãy xác định bậc–vào và bậc–ra của mỗi đỉnh.

**3.** Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị hãy xác định xem đồ thị đó có là phân đôi không.

**4.** Cho các cặp đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị, hãy xây dựng ma trận liền kề cho đồ thị này. (Viết các phiên bản làm việc khi có khuyên, cạnh bội, cạnh có hướng).

**5.** Cho ma trận liền kề của đồ thị, hãy liệt kê các cạnh của đồ thị này và số lần mỗi cạnh xuất hiện.

**6.** Cho các cặp đỉnh ứng với các cạnh của đồ thị vô hướng và số lần mỗi cạnh xuất hiện, hãy xây dựng ma trận liên thuộc của đồ thị.

**7.** Cho ma trận liên thuộc của một đồ thị vô hướng, hãy liệt kê các cạnh của nó và cho số lần xuất hiện của mỗi cạnh.

**8.** Cho số nguyên dương $n$, hãy tạo ra một đồ thị vô hướng bằng cách sinh ra ma trận liền kề cho đồ thị đó sao cho tất cả các đơn đồ thị có khả năng được tạo ra như nhau.

**9.** Cho số nguyên dương $n$, hãy tạo ra một đồ thị có hướng bằng cách sinh ra ma trận liền kề cho đồ thị sao cho tất cả các đồ thị có hướng có khả năng được tạo ra như nhau.

**10.** Cho danh sách các cạnh của hai đơn đồ thị có không quá 6 đỉnh, hãy xác định xem hai đồ thị này có là đẳng cấu không.

**11.** Cho ma trận kề của đồ thị và một số nguyên dương $n$, hãy tìm số đường đi có độ dài $n$ giữa hai đỉnh. (Tạo ra phiên bản cho đồ thị có hướng và vô hướng).

**12*.** Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị hãy xác định xem đồ thị này có liên thông hay không, và tìm số thành phần liên thông nếu nó là không liên thông.

**13.** Cho các cặp đỉnh tương ứng với các cạnh của một đa đồ thị, hãy xác định xem nó có chu trình Euler hay không, nếu không thì nó có đường đi Euler không? Hãy xây dựng đường đi hoặc chu trình Euler nếu chúng tồn tại.

**14*.** Cho các cặp có thứ tự của các đỉnh tương ứng với các cạnh của một đa đồ thị có hướng. Hãy xây dựng đường đi hoặc chu trình Euler nếu chúng tồn tại.

**15**.** Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị, hãy tạo ra chu trình Hamilton hoặc khẳng định đồ thị đó không có chu trình như thế.

**16**.** Cho danh sách các cạnh của một đơn đồ thị hãy tạo ra đường đi Hamilton hoặc khẳng định đồ thị đó không có đường đi như thế.

**17.** Cho danh sách các cạnh và trọng số của chúng trong một đơn đồ thị liên thông có trọng số và hai đỉnh của đồ thị này, hãy tìm độ dài của đường đi ngắn nhất giữa chúng bằng thuật toán Dijkstra. Sau đó tìm đường đi đó.

**18.** Cho danh sách các cạnh của một đồ thị vô hướng hãy tìm cách tô màu đồ thị này bằng thuật toán cho trong tập Bài tập của Tiết 7.8.

**19.** Cho danh sách sinh viên và các môn mà họ theo học. Hãy lập lịch thi.

**20.** Cho khoảng cách giữa các cặp đài truyền hình, hãy phân chia tần số cho các đài này.

## *TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ*

***Sử dụng chương trình mà bạn tự viết để làm các bài tập sau***

**1.** Hãy biểu thị tất cả các đơn đồ thị có 4 đỉnh.

**2.** Hãy biểu thị tất cả các đơn đồ thị không đẳng cấu có 6 đỉnh.

**3.** Hãy biểu thị tất cả các đồ thị có hướng không đẳng cấu có 4 đỉnh.

**4.** Hãy tạo ra một cách ngẫu nhiên 10 đồ thị đơn khác nhau với 20 đỉnh sao cho mỗi đồ thị như thế có khả năng được tạo ra là như nhau.

5. Xây dựng mã Gray trong đó từ mã là các xâu nhị phân độ dài 6.

6. Hãy xây dựng các hành trình của con mã trên bàn cờ có kích thước khác nhau.

7. Hãy xét xem mỗi đồ thị mà bạn tạo ra trong Bài tập 4 có là đồ thị phẳng hay không. Nếu có thể hãy xác định độ dày của mỗi đồ thị không phẳng.

8. Hãy xét xem mỗi đồ thị mà bạn tạo ra trong Bài tập 4 có liên thông hay không. Nếu nó không liên thông, hãy xác định số thành phần liên thông của nó.

9. Hãy tạo ra một cách ngẫu nhiên các đơn đồ thị có 10 đỉnh. Thuật toán dừng khi hạn tạo được một đồ thị có chu trình Euler. Hãy trình diễn chu trình Euler đó.

10. Hãy tạo ra một cách ngẫu nhiên các đơn đồ thị có 10 đỉnh. Thuật toán dừng khi hạn tạo được một đồ thị có chu trình Hamilton. Hãy trình diễn chu trình Hamilton đó.

11. Tìm số màu của mỗi đồ thị mà hạn đã tạo ra trong Bài tập 4.

12**. Tìm đường đi ngắn nhất cho một thương nhân đi thăm mỗi thủ phủ của 50 bang của Mỹ, giả sử giữa chúng đều có đường hàng không.

13**. Đánh giá xác suất để một đơn đồ thị *n* đỉnh được tạo ngẫu nhiên là liên thông, với mỗi số *n* nguyên dương không vượt quá 10 bằng cách tạo ngẫu nhiên một đơn đồ thị rồi kiểm tra tính liên thông của nó.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau***

1. Mô tả nguồn gốc và sự phát triển của lý thuyết đồ thị trước năm 1900.

2. Thảo luận ứng dụng của đồ thị để nghiên cứu hệ sinh thái.

3. Thảo luận ứng dụng của đồ thị trong xã hội học và tâm lý học.

**4.** Mô tả thuật toán vẽ đồ thị trên giấy hoặc trên màn hiển thị với các đỉnh, các cạnh đã cho của đồ thị đó. Vấn đề nào cần chú ý khi vẽ đồ thị sao cho nó có dạng tốt nhất để dễ hiểu các tính chất của nó.

**5.** Các công cụ phần mềm có khả năng làm được những việc nào trong các việc sau : nhập vào, hiển thị, thao tác đồ thị?

**6.** Mô tả một vài thuật toán xác định xem hai đồ thị có là đẳng cấu hay không, và đưa ra độ phức tạp tính toán của các thuật toán này. Thuật toán nào là hiệu quả nhất?

**7.** Hãy định nghĩa các dãy Bruijn và cho biết chúng được áp dụng khi nào. Hãy trình bày cách xây dựng dãy Bruijn khi dùng chu trình Euler.

**8.** Hãy mô tả *Bài toán người đưa thư Trung Quốc* và cách giải bài toán này.

**9.** Hãy nêu ra một vài điều kiện để một đồ thị có chu trình Hamilton.

**10.** Hãy trình bày *Bài toán hành trình của một thương nhân* và một số thuật toán để giải bài toán này.

**11.** Hãy mô tả một số thuật toán xác định tính phẳng của một đồ thị. Độ phức tạp tính toán của các thuật toán này là bao nhiêu?

**12.** Khi lập mô hình các mạch tích hợp rất lớn (*VLSI*) các đồ thị đôi khi được đóng vào một quyển sách với các đỉnh nằm ở gáy sách và các cạnh ở trên các trang. Hãy định nghĩa *số sách* của một đồ thị và tìm số sách của các đồ thị khác nhau kể cả $K_n$ với $n = 3, 4, 5$ và 6.

**13.** Hãy nói sơ qua về lịch sử bài toán bốn màu.

**14.** Hãy kể về vai trò của máy tính trong chứng minh định lý bốn màu. Có thể tin một chứng minh dựa trên máy tính là đúng đắn được không?

**15.** Hãy mô tả và so sánh những thuật toán tô màu đồ thị. Nói rõ chúng tạo ra các cách tô màu với số màu ít nhất có thể được, và độ phức tạp của các thuật toán này.

**16.** Hãy giải thích cách dùng bài toán tô đa màu đồ thị trong các mô hình khác nhau.

**17.** Hãy trình bày cách dùng lý thuyết đồ thị ngẫu nhiên trong chứng minh không kiến thiết về sự tồn tại của các đồ thị có những tính chất nào đó.

*CHUONG 8*

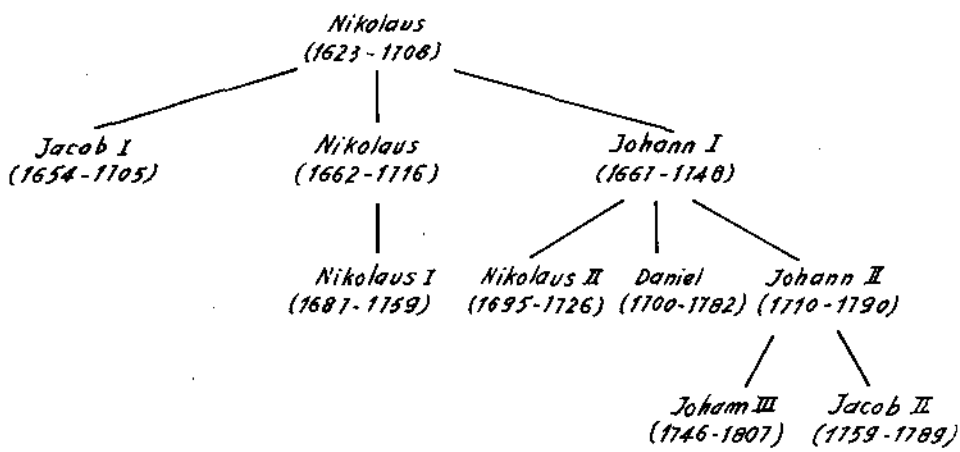
# CÂY

Một đồ thị liên thông và không có chu trình đơn được gọi là *cây*. Cây đã được dùng từ năm 1857, khi nhà toán học Anh tên là Arthur Cayley dùng cây để xác định những dạng khác nhau của hợp chất hóa học. Từ đó cây đã được dùng để giải nhiều bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau, như sẽ chỉ ra trong chương này.

Cây rất hay được sử dụng trong tin học. Chẳng hạn, người ta dùng cây để xây dựng các thuật toán rất có hiệu quả để định vị các phần tử trong một danh sách. Cây cũng dùng để xây dựng các mạng máy tính với chi phí rẻ nhất cho các đường điện thoại nối các máy phân tán. Cây cũng được dùng để tạo ra các mã có hiệu quả để lưu trữ và truyền dữ liệu. Dùng cây có thể mô hình các thủ tục mà để thi hành nó cần dùng một dãy các quyết định. Vì vậy cây đặc biệt có giá trị khi nghiên cứu các thuật toán sắp xếp.

## 8.1. MỞ ĐẦU VỀ CÂY

Biểu đồ phả hệ của dòng họ Bernoulli, một gia đình toán học nổi tiếng người Thuỵ sĩ được biểu thị trên Hình 1. Biểu đồ như vậy cũng được gọi là cây phả hệ. Cây phả hệ là một đồ thị trong đó các đỉnh biểu thị các thành viên, các cạnh biểu thị mối quan hệ cha–con. Đồ thị vô hướng biểu diễn các biểu đồ phả hệ là một ví dụ về một loại đồ thị đặc biệt gọi là **cây**.

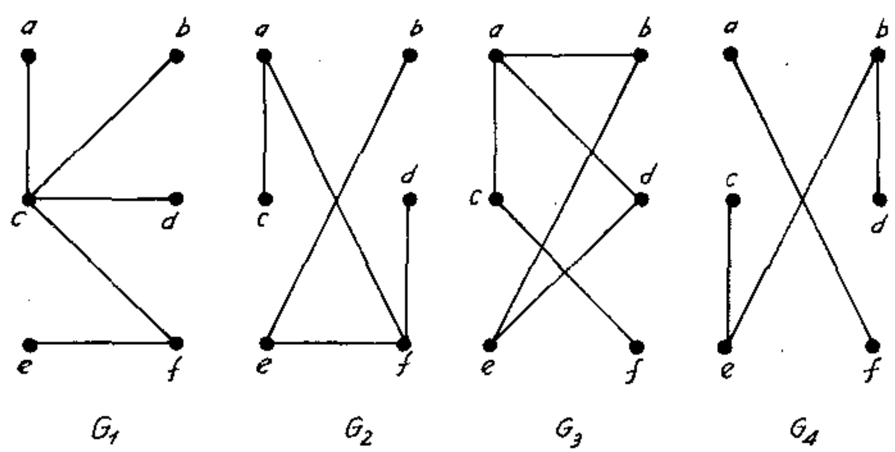



*Hình 1.* Phả hệ nhà toán học Bernoulli.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Cây* là một đồ thị vô hướng, liên thông và không có chu trình đơn.

Vì cây không thể có chu trình đơn, nên cây không thể có cạnh bội và khuyên. Vậy mọi cây đều là đồ thị đơn.

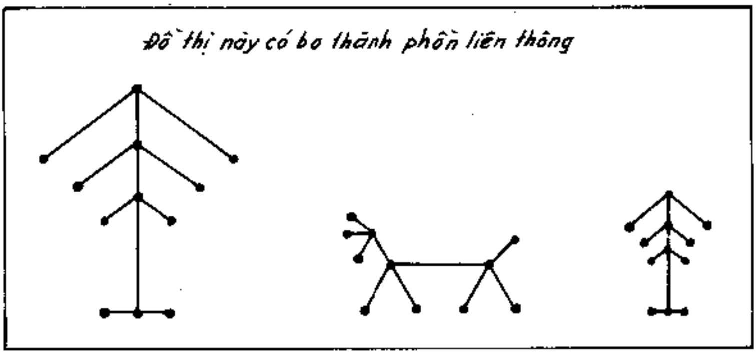
**Ví dụ 1.** Đồ thị nào trong các đồ thị trên Hình 2 là cây?




***Hình 2.*** $G_1$ và $G_2$ là cây, $G_3$ và $G_4$ không là cây.

*Giải:* $G_1$, $G_2$ là các cây, vì chúng đều là các đơn đồ thị liên thông và không có chu trình đơn. $G_3$ không là cây vì *e, b, a, d, e* là một chu trình đơn của đồ thị này. Cuối cùng $G_4$ không là cây bởi vì nó không liên thông.

Mọi đồ thị liên thông và không có chu trình đơn đều là cây. Ta có thể nói gì về đồ thị không có chu trình đơn nhưng không liên thông? Các đồ thị như vậy gọi là **rừng**. Vậy rừng là một đồ thị mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây. Hình 3 biểu diễn một rừng.




***Hình** 3.* Ví dụ về rừng.

Cây thường được định nghĩa như một đồ thị vô hướng, trong đó giữa mọi cặp đỉnh của nó luôn tồn tại đường đi đơn duy nhất. Định lý sau cho thấy định nghĩa này tương đương với định nghĩa của cây cho ở trên.

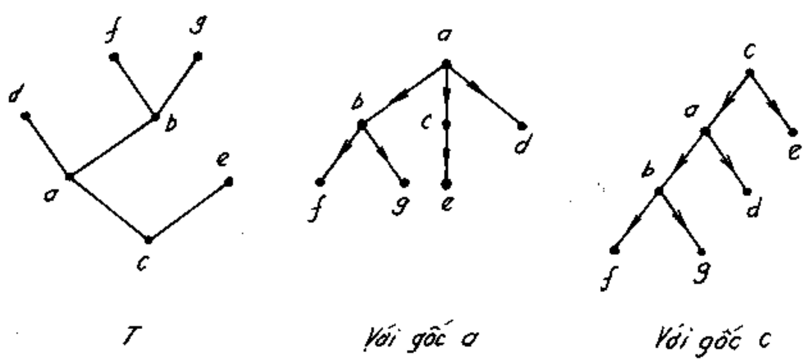
**ĐỊNH LÝ 1.** Một đồ thị vô hướng là một cây nếu giữa mọi cặp đỉnh của nó luôn tồn tại đường đi đơn duy nhất.

*Chứng minh.* Trước tiên giả sử $T$ là một cây. Khi đó $T$ là một đồ thị liên thông không có chu trình. Gọi $x$ và $y$ là hai đỉnh của $T$. Vì $T$ là liên thông nên theo Định lý 1 của Tiết 7.4 có một đường đi đơn giữa hai đỉnh này. Đường đi này là duy nhất vì nếu có đường đi thứ hai từ $x$ tới $y$ thì đường đi tạo bởi hợp của đường đi thứ nhất từ $x$ tới $y$ và đường đi từ $y$ tới $x$ nhận được bằng cách đảo ngược đường đi thứ hai từ $x$ tới $y$ sẽ tạo thành một chu trình. Từ đó theo Bài tập 35 của Tiết 7.4, suy ra có chu trình đơn trong $T$. Vì thế giữa hai đỉnh bất kỳ của cây luôn có đường đi đơn duy nhất.

Bây giờ giả sử ngược lại, giữa hai đỉnh bất kỳ của đồ thị $T$ luôn có đường đi đơn duy nhất. Khi đó $T$ là liên thông. Tiếp theo, $T$ không thể có chu trình đơn. Giả sử ngược lại là có chu trình đơn chứa hai đỉnh $x$

và $y$ của $T$. Khi đó có hai đường đi giữa $x$ và $y$, vì đường đi thứ nhất chính là phần của chu trình từ $x$ tới $y$, đường thứ hai là phần còn lại của chu trình nhưng theo thứ tự ngược lại, tức là giữa $x$ và $y$ có hai đường đi đơn. Vì vậy, $T$ là đồ thị liên thông không có chu trình đơn hay nó là một cây.

Trong rất nhiều ứng dụng, một đỉnh đặc biệt của cây được gọi là **gốc**. Một khi đã định rõ gốc, ta có thể gán cho mỗi cạnh một hướng như sau. Vì có đường đi duy nhất từ gốc tới mỗi đỉnh của đồ thị (Định lý 1), nên ta định hướng mỗi cạnh bằng hướng từ gốc đi ra. Như vậy cây cùng với gốc sinh ra một đồ thị có hướng gọi là **cây có gốc**. Ta có thể chuyển cây không gốc thành cây có gốc bằng cách chọn một đỉnh bất kỳ làm gốc. Lưu ý rằng việc chọn gốc khác nhau sẽ tạo ra các cây có gốc khác nhau. Ví dụ, Hình 4 biểu diễn các cây có gốc khác nhau được tạo ra từ đồ thị $T$ bằng cách chọn $a$ và sau đó là $c$ làm gốc. Thường người ta vẽ cây có gốc cho gốc ở phía trên của đồ thị. Và có thể bỏ mũi tên chỉ hướng trên các cạnh của cây có gốc vì việc chọn gốc đã xác định hướng của các cạnh rồi.

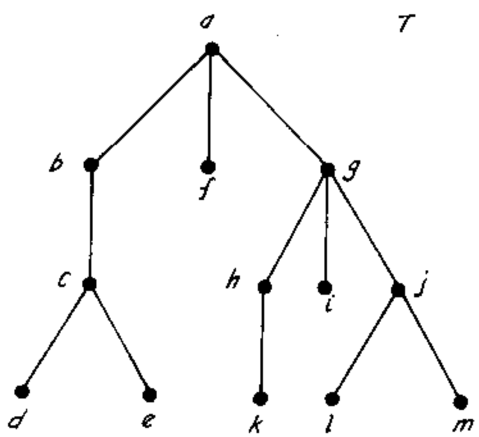



***Hình 4.*** Cây và các cây có gốc.

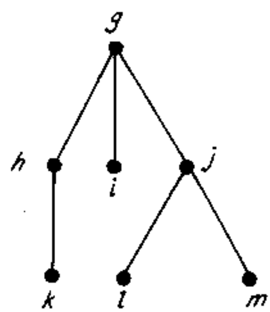
Các thuật ngữ đối với cây có nguồn gốc thực vật học hay nguồn gốc phả hệ. Giả sử $T$ là cây có gốc. Nếu $v$ là một đỉnh khác gốc của $T$, khi đó cha của $v$ là đỉnh $u$ duy nhất sao cho có một cạnh có hướng từ $u$ đến $v$. (Độc giả chứng minh có duy nhất một đỉnh như vậy). Khi đó $u$ được gọi là **cha** của $v$ và $v$ là **con** của $u$. Các đỉnh có cùng cha được gọi là **anh em**. **Tổ tiên** của một đỉnh khác với gốc là các đỉnh trên đường đi từ gốc tới đỉnh này (tức là, cha của nó, ông của nó, v.v., cho tới khi đến gốc). **Con cháu** của đỉnh $v$ là các đỉnh có $v$ như là tổ tiên. Các đỉnh của cây gọi là **lá** nếu nó không có con. Các đỉnh có con được gọi là **đỉnh trong**. Gốc là một đỉnh trong trừ khi nó là một đỉnh duy nhất của đồ thị, trong trường hợp đó nó là lá.

Nếu $a$ là một đỉnh của một cây, thì **cây con** với gốc $a$ là đồ thị con của cây đang xét, bao gồm $a$ và các con cháu của nó cùng tất cả các cạnh liên thuộc với các con cháu của $a$.

**Ví dụ 2.** Trong cây $T$ có gốc $a$ trên Hình 5, hãy tìm cha của $c$, con của $g$, anh em của $h$, các tổ tiên của $e$, con cháu của $b$ tất cả các đỉnh trong và các lá. Đâu là cây con với gốc tại $g$?




*Hình 5.* Cây có gốc $T$.




*Hình 6.* Cây con có gốc tại $g$.

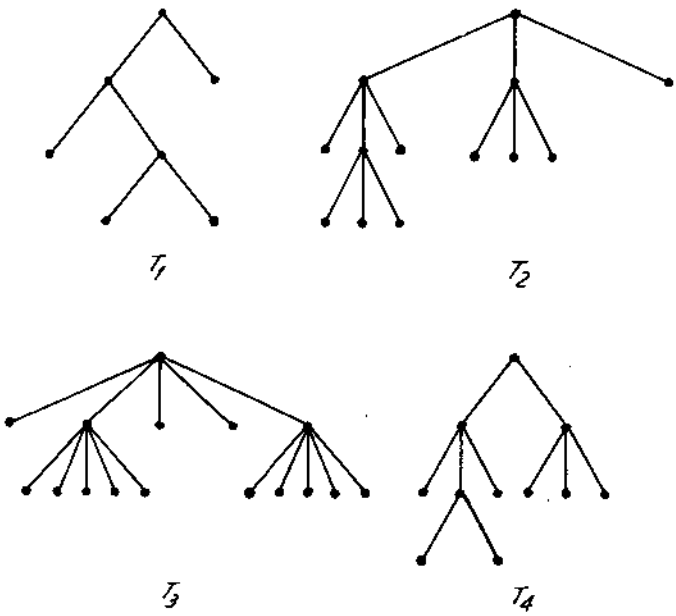
*Giải:* Cha của $c$ là $b$. Con của $g$ là $h$, $i$ và $j$. Anh em của $h$ là $i$ và $j$. Tổ tiên của $e$ là $c$, $b$ và $a$. Con cháu của $b$ là $c$, $d$ và $e$. Các đỉnh trong là $a$, $b$, $c$, $g$, $h$ và $j$. Các lá là $d$, $e$, $f$, $i$, $k$, $l$ và $m$. Cây con có gốc tại $g$ được biểu thị trên Hình 6.

■

Cây có gốc với tất cả các đỉnh trong đều có cùng số con có nhiều ứng dụng khác nhau. Dưới đây, trong chương này, chúng ta sẽ sử dụng các cây để như vậy nghiên cứu các bài toán tìm kiếm, sắp xếp và mã hóa.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Cây có gốc được gọi là *cây m-phân* nếu tất cả các đỉnh trong của nó không có hơn $m$ con. Cây được gọi là *m-phân đầy đủ* nếu mọi đỉnh trong có đúng $m$ con. Cây *m-phân* với $m = 2$, được gọi là cây nhị phân.

**Ví dụ 3.** Các cây trên Hình 7 có là cây $m$ – phân đầy đủ với $m$ là một số nguyên dương nào đó không?




***Hình** 7.* Bốn cây có gốc.

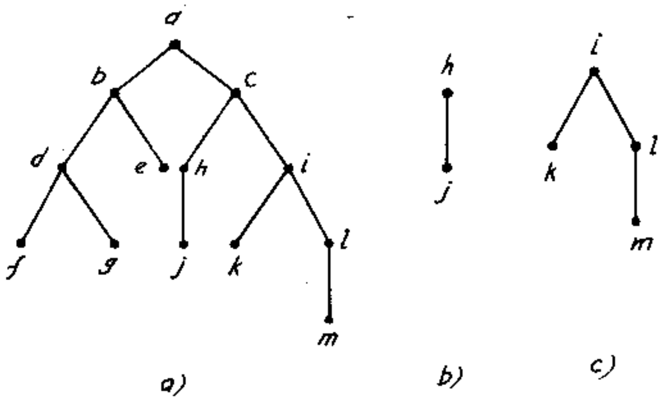
*Giải:* $T_1$ là cây nhị phân đầy đủ, vì mỗi đỉnh trong của nó đều có hai con. $T_2$ là cây tam phân đầy đủ vì mỗi đỉnh trong của nó có ba con. Trong $T_3$ mỗi đỉnh trong đều có 5 con, vì thế mà $T_3$ được gọi là cây ngũ phân đầy đủ. $T_4$ không là cây $m$–phân đầy đủ với một $m$ nào đó vì một số đỉnh trong có hai con một số đỉnh khác lại có ba con.

■

**Cây có gốc được sắp** (hay **có thứ tự**) là cây có gốc trong đó các con của mỗi đỉnh trong được sắp xếp theo một thứ tự nhất định. Cây có gốc được sắp được vẽ sao cho các con của mỗi đỉnh trong được sắp từ trái qua phải. Nhớ rằng biểu diễn của cây có gốc theo cách truyền thống xác định thứ tự của các cạnh của nó. Chúng ta sẽ dùng thứ tự các cạnh như thế trong hình vẽ với ngầm ý là ta đang xét cây có gốc được sắp.

Trong cây nhị phân có thứ tự, các đỉnh trong có hai con, con thứ nhất gọi là **con bên trái** và con thứ hai là **con bên phải**. Cây có gốc tại con bên trái của một đỉnh gọi là cây con bên trái của đỉnh này, và cây có gốc tại con bên phải của một đỉnh gọi là cây con bên phải của đỉnh này. Độc giả cần chú ý rằng trong một số áp dụng, mọi đỉnh của cây nhị phân khác gốc được gọi tên là con bên trái hoặc con bên phải.

**Ví dụ 4.** Xác định con bên trái và con bên phải của $d$ trong cây nhị phân $T$ trên Hình 8a (trong đó thứ tự được suy ra từ hình vẽ). Hãy chỉ ra cây con bên trái và cây con bên phải của $c$.




*Hình 8.* Cây nhị phân $T$ và các cây con bên trái và bên phải của đỉnh $c$.

*Giải:* Con bên trái của $d$ là $f$ và con bên phải của $d$ là $g$. Chúng ta biểu thị cây con bên trái và cây con bên phải của đỉnh $c$ trên Hình 8b và 8c.

■

Cũng hoàn toàn giống như trong đồ thị, không có những thuật ngữ chuẩn để mô tả cây, cây có gốc, cây có gốc có thứ tự, cây nhị phân. Sở dĩ không có các thuật ngữ chuẩn vì cây được dùng rất rộng rãi trong tin học, một ngành khoa học tương đối trẻ. Độc giả hãy kiểm tra cẩn thận ý nghĩa của các từ liên quan tới cây mỗi khi chúng xuất hiện.

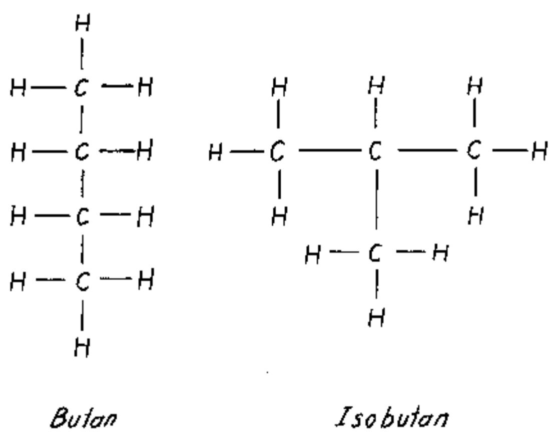
## CÂY NHƯ LÀ CÁC MÔ HÌNH

Cây được dùng để mô hình các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau như tin học, thực vật học và tâm lý học. Chúng ta sẽ mô tả một số mô hình khác nhau có dùng cây.

**Ví dụ 5.** *Hydrocarbon no và Cây.* Đồ thị có thể dùng để biểu diễn một phân tử, trong đó nguyên tử được biểu thị bởi các đỉnh, các liên kết giữa chúng bằng các cạnh. Nhà toán học Anh, Arthur Cayley đã dùng cây vào năm 1857 khi ông ta tìm cách đánh số các đồng phân của hợp chất có dạng $C_nH_{2n+2}$, có tên là các *hydrocarbon no.*

Trong mô hình đồ thị của hydrocarbon no, mỗi nguyên tử các bon được biểu diễn bởi một đỉnh bậc bốn và mỗi nguyên tử hydro được biểu diễn bằng một đỉnh bậc một. Có $3n + 2$ đỉnh trong biểu diễn đồ thị của hợp chất có dạng $C_nH_{2n+2}$. Số các cạnh trong đồ thị như thế bằng một nửa tổng các bậc của các đỉnh. Vì thế có $(4n + 2n + 2)/2 = 3n + 1$ cạnh trong đồ thị này. Vì đồ thị là liên thông và số cạnh nhỏ hơn số đỉnh một đơn vị nên nó là một cây (xem Bài tập 9 ở cuối tiết này).

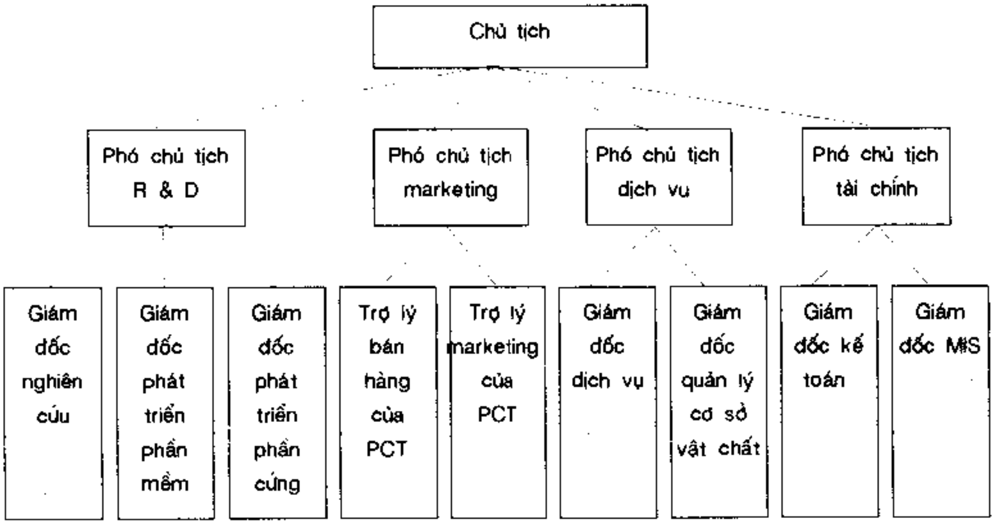
Các cây không đẳng cấu với $n$ đỉnh bậc 4 và $2n + 2$ đỉnh bậc 1 biểu diễn các đồng phân khác nhau dạng $C_nH_{2n+2}$. Ví dụ khi $n = 4$, có đúng 2 cây không đẳng cấu có dạng như thế (độc giả tự kiểm tra). Vì thế có đúng hai đồng phân dạng $C_4H_{10}$. Cấu trúc của nó được biểu thị trên Hình 9. Các đồng phân này được gọi là butane và isobutane.




***Hình 9.*** Hai đồng phân của Butane.

■

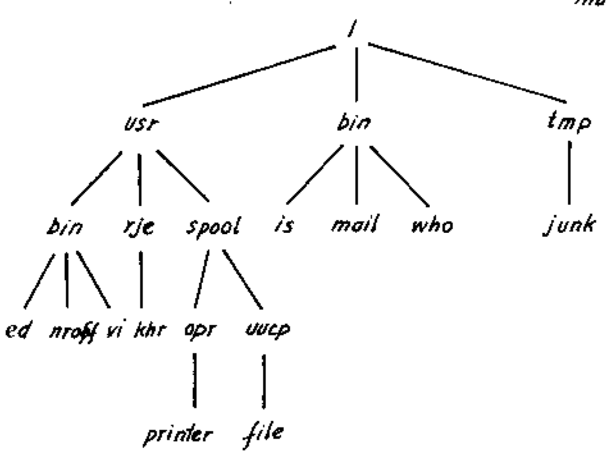
**Ví dụ 6.** *Biểu diễn các tổ chức.* Cấu trúc của một tổ chức lớn có thể mô hình bằng cây có gốc. Mỗi đỉnh biểu thị một chức vụ trong tổ chức này. Một cạnh từ một đỉnh tới một đỉnh khác chỉ ra rằng người biểu thị bằng đỉnh đầu là chủ (lãnh đạo) của người biểu thị bằng đỉnh cuối. Trên Hình 10 là một cây như thế.




***Hình 10.*** Cây tổ chức của một công ty máy tính.

**Ví dụ 7**. *Hệ thống các tệp tin* trong máy tính có thể được tổ chức thành các thư mục. Một thư mục có thể chứa các tệp tin và các thư mục con. Thư mục gốc chứa toàn bộ hệ thống tệp tin. Như vậy hệ các tệp tin có thể biểu diễn bằng cây thư mục, trong đó gốc của cây là thư

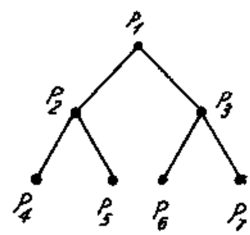
*Gốc là thư mục gốc/ các đỉnh trong là các thư mục. Lá là tệp*




***Hình 11.*** Hệ các tệp tin trong máy tính.

mục gốc, các đỉnh trong là các thư mục con, và các lá là các tệp tin hay thư mục rỗng. Một hệ các tệp tin như thế được biểu diễn trên Hình 11, trong đó tệp tin *khr* ở trong thư mục *rje*.

**Ví dụ 8.** *Các bộ xử lý song song kết nối kiểu cây.* Trong ví dụ 13 của Tiết 7.2 chúng ta đã mô tả một số mạng liên kết để xử lý song song. **Mạng kết nối kiểu cây** là một cách quan trọng khác để nối các bộ xử lý với nhau. Đồ thị biểu diễn mạng như thế là một cây nhị phân đầy đủ. Các mạng này liên kết $n = 2^k - 1$ bộ xử lý với nhau, trong đó $k$ là một số dương. Bộ xử lý biểu diễn bằng đỉnh $v$ không là gốc hoặc lá có 3 liên kết hai chiều – một nối với bộ xử lý được biểu diễn bởi bố của $v$ và hai nối với các bộ xử lý biểu thị bởi hai con của $v$. Bộ xử lý biểu diễn bởi gốc có hai liên kết hai chiều với các bộ xử lý biểu diễn bởi hai con của nó. Bộ xử lý biểu diễn bằng một lá $v$ chỉ có một liên kết hai chiều với cha của $v$. Hình 12 giới thiệu một mạng liên kết kiểu cây với 7 bộ xử lý.



*Hình 12.* Mạng kết nối kiểu cây với 7 bộ xử lý.

Bây giờ ta sẽ minh họa cách dùng mạng kết nối kiểu cây để tính toán song song. Đặc biệt ta sẽ chỉ ra cách dùng mạng trên Hình 12 để cộng 8 số bằng ba bước. Trong bước đầu tiên ta dùng $P_4$ để cộng $x_1$ với $x_2$, dùng $P_5$ để cộng $x_3$ với $x_4$, dùng $P_6$ để cộng $x_5$ với $x_6$, dùng $P_7$ để cộng $x_7$ với $x_8$. Bước thứ hai dùng $P_2$ để cộng $x_1 + x_2$ với $x_3 + x_4$, dùng $P_3$ để cộng $x_5 + x_6$ với $x_7 + x_8$. Cuối cùng, dùng $P_1$ để cộng $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ với $x_5 + x_6 + x_7 + x_8$. Ba bước để cộng 8 số thật có lợi so với phải dùng bảy bước để cộng liên tiếp 8 số, trong đó mỗi bước cộng một số với tổng các số đã cộng trước đó.

■

## NHỮNG TÍNH CHẤT CỦA CÂY

Chúng ta thường cần các kết quả liên quan tới số đỉnh và số cạnh của các loại cây.

**ĐỊNH LÝ 2.** Cây với $n$ đỉnh có đúng $n - 1$ cạnh.

***Chứng minh.*** Chọn đỉnh $r$ làm gốc của cây. Ta sẽ xây dựng phép tương ứng một - một giữa các cạnh với các đỉnh khác $r$ bằng cách gán đỉnh cuối của một cạnh với chính cạnh này. Vì có $n - 1$ đỉnh khác $r$ nên ta có $n - 1$ cạnh.

■

Số các đỉnh trong một cây $m$ - phân đầy đủ với một số xác định các đỉnh trong sẽ được cho trong định lý sau.

**ĐỊNH LÝ 3.** Cây $m$ - phân đầy đủ với $i$ đỉnh trong sẽ có tất cả $n = m.i + 1$ đỉnh.

***Chứng minh.*** Mỗi đỉnh trừ gốc là con của một đỉnh trong. Vì mỗi một trong $i$ đỉnh trong có $m$ con nên có $m.i$ đỉnh khác gốc. Do đó cây có tất cả $n = m.i + 1$ đỉnh.

■

Giả sử $T$ là cây $m$ - phân đầy đủ. Gọi $i$ là số các đỉnh trong và $l$ là số các lá của cây này. Khi biết một trong các đại lượng $n$, $i$ và $l$ thì hai đại lượng kia cũng được xác định. Chúng ta có định lý sau.

**ĐỊNH LÝ 3.** Cây $m$ - phân đầy đủ với

(i) $n$ đỉnh có $i = \dfrac{n-1}{m}$ đỉnh trong và $l = \dfrac{(m-1)n+1}{m}$ lá,

(ii) $i$ đỉnh trong có $n = mi + 1$ đỉnh và $l = (m - 1)i + 1$ lá,

(iii) có $n = \dfrac{ml-1}{m-1}$ đỉnh và $i = \dfrac{l-1}{m-1}$ đỉnh trong.

***Chứng minh.*** Gọi $n$ là số đỉnh, $i$ số đỉnh trong và $l$ là số lá. Ba phần của định lý này có thể chứng minh bằng cách dùng đẳng thức trong Định lý 3, tức là $n = mi + 1$, cùng với đẳng thức $n = l + i$, sở dĩ có điều này vì mỗi đỉnh hoặc là lá hoặc là đỉnh trong. Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh (i).

Hai phần sau độc giả tự chứng minh lấy.

Giải đối với $i$ từ đẳng thức $n = mi + 1$ ta được $i = \dfrac{n-1}{m}$. Thế biểu thức này của $i$ vào phương trình $n = l + i$ ta có

$$l = n - i = n - \frac{n-1}{m} = \frac{(m-1)n+1}{m}.$$

■

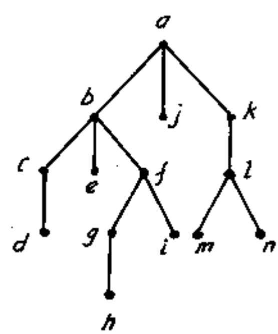
Ví dụ sau minh họa cách dùng Định lý 4.

**Ví dụ 9.** Giả sử ta có trò chơi viết thư dây chuyền. Ban đầu có một người nhận được một bức thư và giả sử rằng mỗi người khi nhận được một bức thư hoặc sẽ viết thư cho 4 người khác hoặc không viết thư cho ai cả. Hỏi có bao nhiêu người nhận được thư kể cả người đầu tiên nếu không có ai nhận được nhiều hơn một bức thư và trò chơi kết thúc khi có 100 người nhận thư mà không viết cho ai?

*Giải:* Trò chơi gửi thư này có thể biểu diễn bằng cây tứ phân. Các đỉnh trong ứng với những người gửi thư cho người khác còn lá là những người nhận thư mà không viết cho ai. Vì có 100 người không viết thư nên số lá của cây có gốc này là $l = 100$. Vì thế theo phần (iii) của Định lý 4 ta có số người nhận thư $n = (4.100 - 1)/(4 - 1) = 133$. Số các đỉnh trong là $133 - 100 = 33$, tức là có 33 người viết thư.

■

Trong ứng dụng ta thường gặp cây có gốc "cân đối". Đó là cây mà các cây con tại mỗi đỉnh có đường đi với độ dài gần như nhau. Một vài định nghĩa sẽ làm rõ hơn khái niệm này. **Mức** của đỉnh $v$ trong cây có gốc là độ dài của đường đi duy nhất từ gốc tới nó. Mức của gốc được định nghĩa bằng không. **Độ cao** của cây là mức cao nhất của tất cả các đỉnh. Nói cách khác độ cao của cây có gốc là chiều dài của đường đi dài nhất từ gốc tới một đỉnh bất kỳ.



*Hình 13.* Cây có gốc.

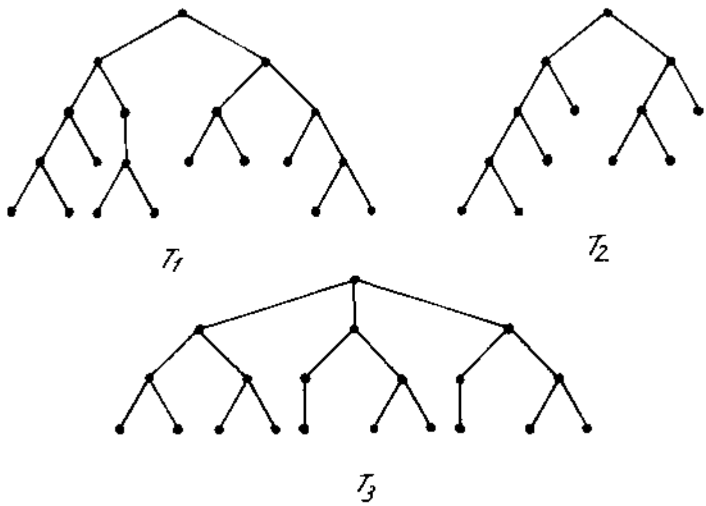
**Ví dụ 10.** Hãy tìm mức của mỗi đỉnh trong cây có gốc trên Hình 13. Độ cao của cây này bằng bao nhiêu?

*Giải:* Gốc $a$ có mức bằng 0. Đỉnh $b$, $j$ và $k$ có mức bằng 1, các đỉnh $c$, $e$, $f$ và $l$ có mức bằng 2. Các đỉnh $d$, $g$, $i$, $m$ và $n$ ở mức 3. Cuối cùng, mức của đỉnh $h$ bằng 4. Vì mức lớn nhất của tất cả các đỉnh là 4 nên độ cao của cây là 4.

■

Cây $m$ – phân có gốc và độ cao $h$ được gọi là **cân đối** nếu tất cả các lá đều ở mức $h$ hoặc $h - 1$.

**Ví dụ 11.** Cây nào trong các cây có gốc trên Hình 14 là cân đối?




***Hình 14.*** Một vài cây có gốc.

*Giải:* $T_1$ là cân đối vì các lá của nó đều ở mức 3 và 4. Tuy vậy, $T_2$ là không cân đối vì nó có các lá ở mức 2, 3 và 4. Cuối cùng, $T_3$ là cân đối vì tất cả các lá đều ở mức 3.

■

Những kết quả sau đây liên quan tới độ cao và số lá của cây $m$ – phân.

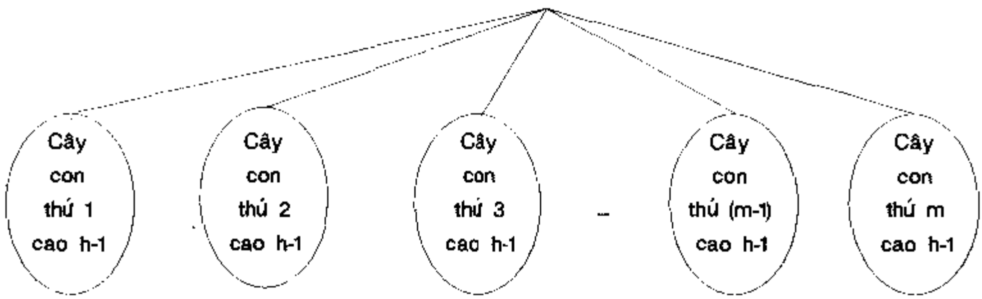
**ĐỊNH LÝ 5.** Có nhiều nhất $m^h$ lá trong cây $m$–phân với độ cao $h$.

***Chứng minh.*** Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo chiều cao. Trước tiên, hãy xét cây *m-phân* có chiều cao 1. Những cây này có gốc và không quá $m$ con, mỗi con là một lá. Vì thế có không quá $m^1 = m$ lá trong cây $m$–phân có chiều cao $h = 1$. Đó chính là bước cơ sở của chứng minh quy nạp.

Bây giờ ta giả sử kết quả là đúng với cây $m$–phân có chiều cao nhỏ hơn $h$. Đây là giả thiết quy nạp. Giả sử $T$ là cây $m$ – phân cao $h$. Các lá của $T$ là các lá của các cây con nhận được từ $T$ bằng cách xóa các cạnh nối từ gốc tới các đỉnh ở mức 1, như đã chỉ ra trên Hình 15.

Mỗi một trong các cây con này có chiều cao không quá $h$ – 1. Vì vậy theo giả thiết quy nạp mỗi cây con có nhiều nhất $m^{h-1}$ lá. Vì có nhiều nhất $m$ cây con như thế, mỗi cây có nhiều nhất $m^{h-1}$ lá, nên có nhiều nhất $m.m^{h-1} = m^h$ lá trong cây có gốc $T$. Đó là điều cần chứng minh.

■



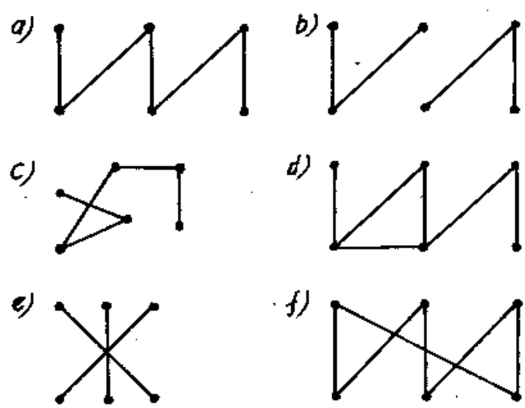

***Hình 15.*** Bước qui nạp trong chứng minh.

**HỆ QUẢ 1.** Nếu cây $m$-phân cao $h$ có $l$ lá, khi đó $h \geq \lceil \log_m l \rceil$. Nếu cây $m$-phân đầy đủ và cân đối, khi đó $h = \lceil \log_m l \rceil$. (Nhớ lại là $\lceil x \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hay bằng $x$).

***Chứng minh.*** Từ Định lý 5 ta có $l \leq m^h$. Lấy lôgarit cơ số $m$ ta được $\log_m l \leq h$. Vì $h$ là số nguyên dương nên $h \geq \lceil \log_m l \rceil$. Bây giờ giả sử cây là cân đối. Khi đó mọi lá đều ở mức $h$ hoặc $h - 1$, và vì chiều cao của nó là $h$, nên có ít nhất một lá ở mức $h$. Từ đó suy ra phải có hơn $m^{h-1}$ lá (xem Bài tập 24 ở cuối tiết). Vì $l \leq m^h$ ta có $m^{h-1} < l \leq m^h$. Lấy lôgarit cơ số $m$ ta được $h - 1 < \log_m l \leq h$. Vậy $h = \lceil \log_m l \rceil$ ■

## *BÀI TẬP*

1. Trong các đồ thị sau đồ thị nào là cây?



**2.** Hãy trả lời các câu hỏi sau về cây có gốc cho ở hình bên.

a) Đỉnh nào là gốc?

b) Đỉnh nào là đỉnh trong?

c) Đỉnh nào là lá?

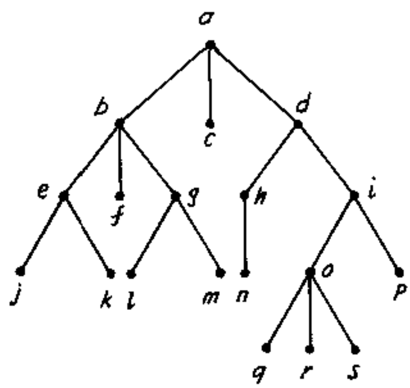
d) Đỉnh nào là con của *i*?

e) Đỉnh nào là cha của *h*?

f) Đỉnh nào là anh em của *o*?

g) Đỉnh nào là tổ tiên của *m*?

h) Đỉnh nào là con cháu của *b*?




**3.** Cây có gốc trong Bài tập 2 có là cây $m$–phân đầy đủ với một số dương $m$ nào đó không?

**4.** Tìm mức của mỗi đỉnh trong cây ở Bài tập 2.

**5.** Vẽ cây con của cây trong Bài tập 2 có gốc tại

a) a. b) c. c) e.

**6*.** Có bao nhiêu cây không gốc không đẳng cấu với $n$ đỉnh nếu

a) $n = 3$? b) $n = 4$? c) $n = 5$?

**7*.** Câu hỏi như Bài tập 6 với cây có gốc (dùng sự đẳng cấu của các đồ thị có hướng).

**8*.** Chỉ ra rằng một đồ thị đơn là cây nếu và chỉ nếu nó liên thông nhưng khi xóa một cạnh bất kỳ sẽ nhận được một đồ thị không liên thông.

**9*.** Gọi $G$ là một đơn đồ thị với $n$ đỉnh. Chỉ ra rằng $G$ là cây nếu và chỉ nếu $G$ liên thông và có $n-1$ cạnh.

**10.** Trong các đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{m,n}$, với $m,n$ nguyên dương, đồ thị nào là cây?

**11.** Cây với 10000 đỉnh có bao nhiêu cạnh?

**12.** Cây ngũ phân đầy đủ với 100 đỉnh trong có bao nhiêu đỉnh?

**13.** Cây nhị phân đầy đủ với 1000 đỉnh trong có bao nhiêu cạnh?

**14.** Cây tam phân đầy đủ với 100 đỉnh có bao nhiêu lá?

**15.** Giả sử có 1000 người tham gia vào một cuộc đấu cờ. Hãy dùng cây lập mô hình cuộc thi đấu và xác định xem có bao nhiêu trận đấu xảy ra để chọn người giữ chức vô địch, nếu một vận động viên sẽ bị loại sau một trận thua và các trận đấu được tiến hành cho tới khi chỉ có một người không thua. (Giả sử không có trận hòa).

**16.** Trò chơi gửi thư dây chuyền bắt đầu khi một người nhận được một bức thư và giả sử rằng mỗi người khi nhận được một bức thư hoặc sẽ viết thư cho 5 người khác chưa bao giờ nhận được thư hoặc không viết thư cho ai cả. Giả sử rằng có 10 000 người gửi thư trước khi trò chơi kết thúc và không có ai nhận được nhiều hơn một bức thư. Có bao nhiêu người nhận thư và bao nhiêu người không gửi thư cho người khác?

**17.** Trò chơi gửi thư dây chuyền bắt đầu khi một người gửi thư cho 10 người khác. Giả sử rằng mỗi người được yêu cầu viết thư cho 10 người khác nữa và mỗi bức thư có một danh sách gồm 6 người trước đó trong dây chuyền. Trừ khi có ít hơn 6 người trong danh sách, còn mỗi người sẽ gửi một đô-la cho người đầu tiên trong danh sách và xoá tên người đó đi, dịch 5 tên còn lại mỗi tên lên một vị trí, rồi chèn tên của mình vào cuối danh sách. Nếu không có ai làm gián đoạn dây chuyền và không có ai nhận được hơn một bức thư, thì người trong dây chuyền sẽ nhận được tối hậu bao nhiêu đô la?

**18*.** Hoặc là vẽ cây $m$-phân đầy đủ với 76 lá và có chiều cao bằng 3 trong đó $m$ là số nguyên dương hoặc chỉ ra rằng không tồn tại cây như thế.

**19*.** Hoặc là vẽ cây $m$-phân đầy đủ với 84 lá và có chiều cao bằng 3 trong đó $m$ là số nguyên dương hoặc chỉ ra rằng không tồn tại cây như thế.

**20*.** Cây $m$-phân đầy đủ $T$ với 81 lá và có chiều cao bằng 4 :

a) Hãy tìm cận trên và cận dưới của $m$.

b) Giá trị của $m$ bằng bao nhiêu nếu $T$ cũng là cây cân đối.

**Cây** $m$ **– phân hoàn toàn** *là cây m-phân đầy đủ trong đó mọi lá ở cùng một mức.*

**21**. Xây dựng cây nhị phân hoàn toàn có chiều cao bằng 4, và cây tam phân hoàn toàn có chiều cao bằng 3.

**22**. Cây $m$–phân hoàn toàn có chiều cao bằng $h$ có bao nhiều đỉnh và bao nhiêu lá?

**23.** Hãy chứng minh :

a) phần (ii) của Định lý 4.

b) phần (iii) của Định lý 4.

**24**. Hãy chỉ ra rằng cây $m$–phân đầy đủ cân đối chiều cao $h$ có hơn $m^{h-1}$ lá.

**25.** Có bao nhiêu cạnh trong rừng với $t$ cây và có tất cả $n$ đỉnh?

**26**. Nói rõ cách dùng cây để biểu diễn bảng mục lục của một cuốn sách được tổ chức thành các chương trong đó mỗi chương được tổ chức thành các tiết, mỗi tiết được tổ chức thành các mục.

**27**. Các hydrocacbon sau đây có bao nhiêu đồng phân khác nhau?

a) $C_3H_8$ b) $C_5H_{12}$ c) $C_6H_{14}$

**28**. Mỗi một trong các phần sau đây biểu diễn cái gì trong một cây biểu thị một tổ chức?

a) Cha của một đỉnh,

b) Con của một đỉnh,

c) Anh em của một đỉnh,

d) Tổ tiên của một đỉnh,

e) Con cháu của một đỉnh,

f) Mức của một đỉnh,

g) Chiều cao của một cây.

**29**. Hãy trả lời những câu hỏi như trong Bài tập 28 đối với một cây có gốc biểu diễn một hệ các tệp tin lưu trữ trên máy tính.

**30.** a) Hãy vẽ cây nhị phân hoàn toàn có 15 đỉnh biểu thị mạng nối kết kiểu cây có 15 bộ xử lý.

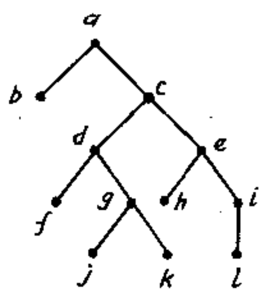
b) Hãy chứng tỏ chỉ cần 4 bước có thể cộng 16 số bằng 15 bộ xử lý được tổ chức như trong phần a).

31. Gọi $n$ là lũy thừa của 2. Chỉ ra rằng có thể cộng n số bằng logn bước khi dùng một mạng nối kết kiểu cây gồm $n - 1$ bộ xử lý.

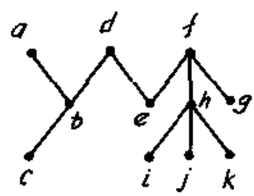
**32*. Cây có gán nhãn** là cây trong đó mỗi đỉnh được gán một nhãn. Hai cây có gán nhãn được coi là đẳng cấu nếu giữa chúng có phép đẳng cấu bảo toàn nhãn của các đỉnh. Có bao nhiêu cây không đẳng cấu có ba đỉnh được gán nhãn bằng các số nguyên khác nhau của tập hợp {1, 2, 3} ? Có bao nhiêu cây không đẳng cấu có bốn đỉnh được gán nhãn bằng các số nguyên khác nhau của tập hợp {1, 2, 3, 4}?

**Tâm sai** *của một đỉnh trong cây không gốc là độ dài của đường đi đơn dài nhất bắt đầu từ đỉnh này. Một đỉnh gọi là tâm nếu không có đỉnh nào trong cây có tâm sai nhỏ hơn tâm sai của đỉnh này. Trong các Bài tập từ 33 – 35 hãy tìm mọi đỉnh là tâm trong cây đã cho.*

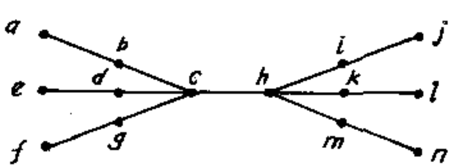
**33.**




**34.**




**35.**



**36**. Chứng minh rằng nếu chọn tâm làm gốc thì cây có gốc đó có chiều cao bé nhất so với tất cả các cây có gốc nhận được từ một cây không gốc.

**37***. Chứng tỏ rằng một cây hoặc có một tâm hoặc có hai tâm liền kề nhau.

**38**. Chứng tỏ ràng mọi cây đều có thể tô bằng hai màu.

**Cây Fibonacci có gốc** $T_n$ *được định nghĩa bằng hồi quy như sau.* $T_1$ *và* $T_2$ *đều là cây có gốc chỉ gồm một đỉnh và với* $n = 3,4, \ldots$ *cây có gốc* $T_n$ *được xây dựng từ gốc với* $T_{n-1}$ *như là cây con bên trái và* $T_{n-2}$ *như là cây con bên phải.*

**39**. Hãy vẽ bảy cây Fibonacci có gốc đầu tiên.

**40***. Cây Fibonacci có gốc $T_n$ với $n$ là số nguyên dương, có bao nhiêu đỉnh, lá, và bao nhiêu đỉnh trong. Chiều cao của nó bằng bao nhiêu?

# 8.2. CÁC ỨNG DỤNG CỦA CÂY

## MỞ ĐẦU

Chúng ta sẽ nghiên cứu ba bài toán bằng mô hình cây. Bài toán đầu như sau : Các phần tử trong một danh sách được lưu trữ như thế nào để có thể dễ dàng định vị được chúng? Bài toán thứ hai : Hãy xác định dãy các quyết định để tìm một đối tượng có tính chất nào đó trong tập hợp các đối tượng thuộc một loại nào đó. Bài toán thứ ba : Cần phải mã hóa tập các chữ cái bằng các dãy nhị phân như thế nào để có hiệu quả nhất?

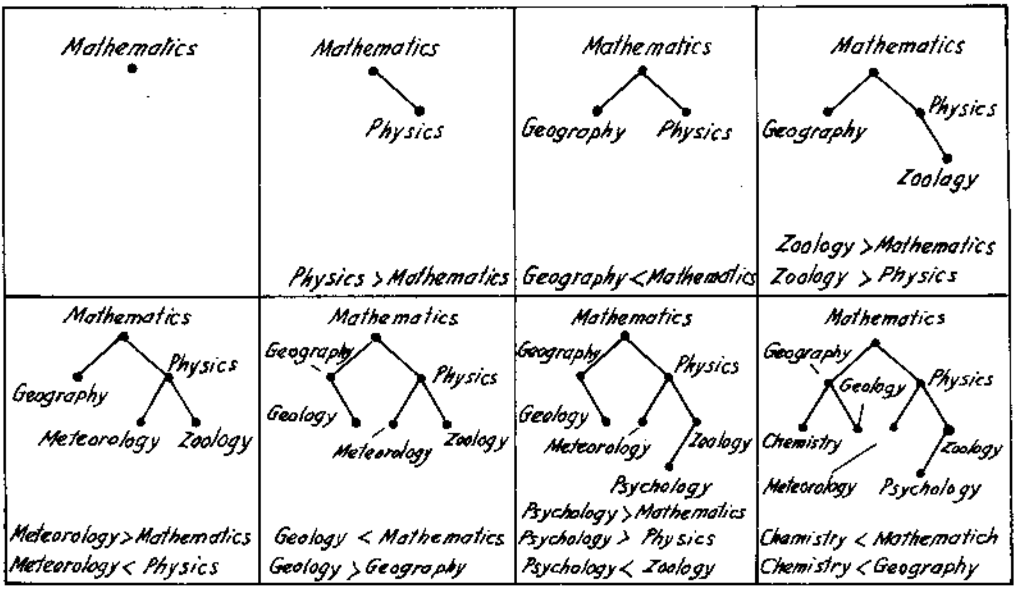
## CÂY TÌM KIẾM NHỊ PHÂN

Tìm kiếm một phần tử trong một danh sách là một trong những công việc quan trọng nhất trong tin học. Mục đích hàng đầu của chúng ta là đưa ra một thuật toán tìm kiếm có hiệu quả nhất một phần tử khi các phần tử được sắp xếp theo một thứ tự nào đó. Điều đó có thể thực hiện được bằng **cây tìm kiếm nhị phân**. Đó là một cây nhị phân trong đó mỗi con của một đỉnh hoặc là con bên phải hoặc là con bên trái, không có đỉnh nào có hơn một con bên phải hay hơn một con bên trái, và mỗi đỉnh được gán một khóa (mỗi giá trị của khóa xác định chỉ một phần tử). Hơn thế nữa, các đỉnh được gán khóa sao cho khóa của đỉnh lớn hơn khóa của tất cả các đỉnh thuộc cây con bên trái, và nhỏ hơn khóa của tất cả các đỉnh thuộc cây con bên phải của nó.

Thủ tục đệ quy sau đây dùng để tạo lập cây tìm kiếm nhị phân cho một danh sách các phần tử. Bắt đầu là cây có đúng một đỉnh, tức là gốc. Phần tử đầu tiên trong danh sách được dùng làm khóa của gốc. Để thêm một phần tử mới ta so sánh nó với khóa của các đỉnh đã có trên cây, bắt đầu từ gốc và đi sang trái nếu phần tử nhỏ hơn khóa của đỉnh tương ứng nếu đỉnh này có con bên trái hoặc đi sang bên phải nếu phần tử lớn hơn khóa của đỉnh tương ứng nếu đỉnh này có con bên phải. Khi phần tử nhỏ hơn khóa của đỉnh tương ứng và đỉnh này không có con bên trái khi đó ta tạo một đỉnh mới cho phần tử này như là con bên trái của đỉnh đang xét. Phần tử được chọn làm khóa của đỉnh mới này. Tương tự khi phần tử lớn hơn khóa của đỉnh đang xét và đỉnh này không có con bên phải ta tạo một đỉnh mới cho phần tử này như là con bên phải với khóa là phần tử đang xét. Ta minh họa thủ tục này bằng ví dụ sau đây.

**Ví dụ 1**. Hãy tạo cây tìm kiếm nhị phân cho các từ sau : *mathematics, physics, geography, zoology, meteology, geology, psychology* và *chemistry* (dùng thứ tự từ điển).

*Giải.* Hình 1 cho thấy các bước xây dựng tìm kiếm nhị phân. Từ *mathematics* là khóa của gốc. Vì *physics* đi sau *mathematics* (theo thứ tự từ điển) nên ta thêm một con bên phải với khoá là *physics*. Vì *geography* đứng trước *mathematics*, ta thêm một con bên trái của gốc với khóa là *geography*. Tiếp theo ta thêm vào con bên phải của đỉnh với khóa *physics* và gán cho nó khóa là *zoology* vì *zoology* đi sau *mathematics* và *physics*. Tương tự, thêm con bên trái của đỉnh với khóa là *physics* và gán cho đỉnh mới này khóa *meteology*. Thêm vào phải của đỉnh với khóa *geography* gán cho nó khóa là *geology* Thêm vào một con bên trái của đỉnh với khóa *zoology* và gán cho nó khóa là *psychology*. Thêm vào con bên trái của đỉnh với khóa *geography* cho nó khóa là *chemistry*. (Độc giả tự kiểm tra việc so sánh tại mỗi bước).




***Hình 1.*** Xây dựng cây tìm kiếm nhị phân.

Để định vị một phần tử ta thử thêm nó vào cây tìm kiếm nhị phân. Chúng ta sẽ định vị được nó nếu nó đã có trong cây. Thuật toán 1 dưới dạng giả mã cho phép định vị một phần tử trong cây tìm kiếm nhị phân và thêm đỉnh mới với phần tử này là khoá của nó nếu nó chưa có trong cây. Thuật toán sẽ định vị được $x$ nếu nó là khóa của một đỉnh. Khi x không là khóa của bất cứ đỉnh nào thì một đỉnh mới với khóa $x$ được thêm vào cây. Trong dạng giả mã đỉnh $v$ có khóa là $x$ và label ($v$) biểu thị khóa của đỉnh $v$.

---

THUẬT TOÁN 1. THUẬT TOÁN TÌM KIẾM NHỊ PHÂN.

**procedure** *insertion* ($T$ : cây tìm kiếm nhị phân, $x$ : phần tử)

$v$ : = gốc của $T$

{đỉnh không có trong $T$ sẽ có giá trị bằng *null*}

**while** $v \neq$ *null* và *label*($v$) $\neq x$

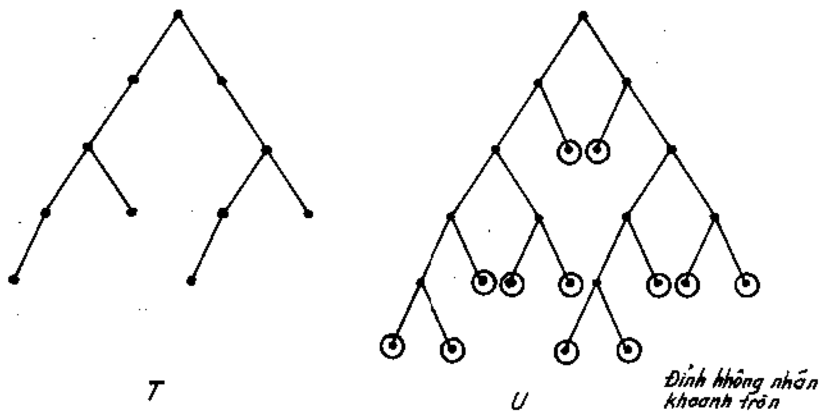
**begin**

  **if** $x <$ label($v$) **then**

**if** con bên trái của $v \neq$ null **then** $v :=$ con bên trái của $v$
**else** thêm *đỉnh mới* là con trái của $v$ và đặt $v :=$ *null*
**else**
**if** con bên phải của $v \neq$ *null* **then** $v :=$ con bên phải của $v$
**else** thêm *đỉnh mới* là con bên phải của $v$ và đặt $v :=$ *null*
**end**
**if** gốc của $T =$ *null* **then** thêm đỉnh $r$ vào cây và gán cho nó nhãn là $x$
**else if** label $(v) \neq x$ **then** gán nhãn cho *đỉnh mới* là $x$.
$\{v =$ vị trí của $x\}$

Bây giờ ta sẽ xác định độ phức tạp tính toán của thủ tục này. Giả sử ta có cây tìm kiếm nhị phân $T$ ứng với danh sách $n$ phần tử. Ta có thể xây dựng cây nhị phân đầy đủ $U$ từ $T$ bằng cách thêm vào các đỉnh không có nhãn, nếu cần, sao cho mọi đỉnh có khóa đều có hai con. Điều này được minh họa trên hình 2. Làm như vậy ta có thể dễ dàng định vị hoặc thêm một phần tử mới như là khóa của đỉnh mà không phải thêm vào một đỉnh mới.

Số phép so sánh nhiều nhất cần có để thêm một phần tử mới là độ dài của đường đi dài nhất trong $U$ từ gốc tới một lá. Các đỉnh trong của $U$ là các đỉnh của $T$. Vậy $U$ có $n$ đỉnh trong. Bây giờ ta có thể dùng phần (ii) của Định lý 4 ở Tiết 8.1 để kết luận rằng $U$ có $n + 1$ lá. Sử dụng Hệ quả 1 của Tiết 8.1 ta thấy chiều cao của $U$ lớn hay bằng $h = \lceil log(n+1) \rceil$. Vậy phải thực hiện ít nhất $\lceil log(n + 1) \rceil$ phép so sánh để thêm một phần tử mới vào cây. Lưu ý rằng $U$ là cân đối và chiều cao của nó là $\lceil log(n + 1) \rceil$ (theo Hệ quả 1 của Tiết 8.1). Như vậy nếu cây tìm kiếm nhị phân là cân đối việc định vị hay thêm một phần tử đòi hỏi không quá $\lceil log(n+1) \rceil$ phép so sánh. Cây tìm kiếm nhị phân có thể trở thành không cân đối khi các phần tử được thêm vào. Vì cây tìm kiếm nhị phân cân đối là trường hợp có độ phức tạp tối ưu trong những trường hợp tồi tệ nhất, nên những thuật toán được tạo ra đã tái cân đối các cây tìm kiếm nhị phân khi các phần tử được thêm vào. Những độc giả quan tâm vấn đề này có thể tham khảo các tài liệu về cấu trúc dữ liệu liên quan tới các thuật toán như thế.




*Hình 2*. Thêm các đỉnh không nhãn để tạo cây tìm kiếm nhị phân đầy đủ.

## CÂY QUYẾT ĐỊNH

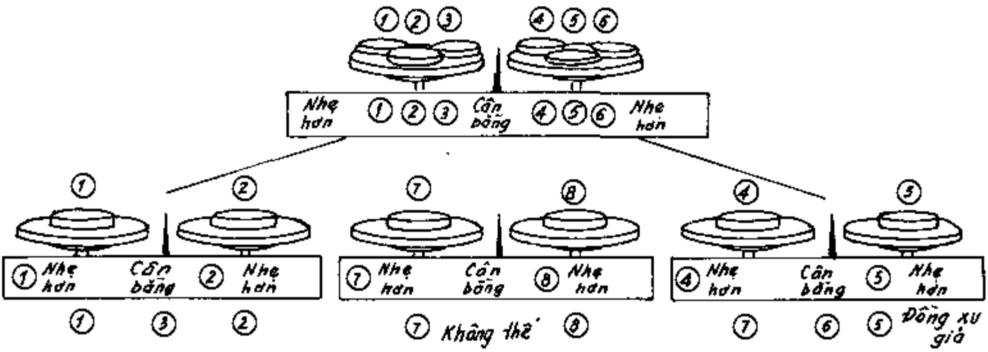
Các cây có gốc có thể dùng để mô hình các bài toán trong đó có một dãy các quyết định dẫn đến lời giải. Chẳng hạn, cây tìm kiếm nhị phân có thể dùng để định vị các phần tử dựa trên một loạt các so sánh, trong đó mỗi so sánh cho biết ta có định vị được phần tử đó hay chưa, hoặc ta sẽ đi theo cây con bên phải hay bên trái. Cây có gốc trong đó mỗi đỉnh trong ứng với một quyết định và mỗi cây con tại các đỉnh này ứng với mỗi một kết cục có thể của quyết định được gọi là **cây quyết định**. Những lời giải có thể của bài toán tương ứng với các đường đi tới các lá của cây có gốc này. Ví dụ sau sẽ minh họa một áp dụng của cây quyết định.

**Ví dụ 2.** Giả sử có bảy đồng xu, tất cả có trọng lượng như nhau, và một đồng giả có trọng lượng nhỏ hơn các đồng khác. Nếu dùng một chiếc cân có hai đĩa cân thì phải cần bao nhiêu lần cân để xác định đồng xu nào trong tám đồng xu này là đồng xu giả. Hãy đề xuất một thuật toán tìm đồng xu giả.

*Giải*: Có ba khả năng xảy ra đối với mỗi lần cân. Hai đĩa có trọng lượng bằng nhau, đĩa thứ nhất nặng hơn, đĩa thứ hai nặng hơn. Do đó cây quyết định cho một dãy các lần cân là cây tam phân. Có ít nhất tám lá trong cây quyết định vì có tám kết cục có thể (vì mỗi một trong tám đồng xu có thể là đồng xu giả) và mỗi kết cục có thể cần phải được biểu diễn bằng ít nhất một lá. Số lần cân nhiều nhất để xác định đồng xu giả là chiều cao của cây quyết định. Từ Hệ quả 1 trong Tiết 8.1 ta suy ra chiều cao của cây quyết định là $\lceil log_3 8 \rceil = 2$. Vì thế cần ít nhất hai lần cân.

Có thể xác định đồng xu giả bằng hai lần cân. Cây quyết định biểu diễn trên Hình 3.

■




***Hình 3.*** Cây quyết định để xác định đồng xu giả.

Trong Tiết 4 của chương này chúng ta sẽ nghiên cứu thuật toán sắp xếp bằng cây quyết định.

## CÁC MÃ TIỀN TỐ

Bây giờ chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán mã hóa các chữ cái tiếng Anh bằng các dãy nhị phân (trong đó không phân biệt chữ thường với chữ hoa). Dễ thấy là chúng ta có thể biểu diễn mỗi chữ cái bằng một xâu nhị phân độ dài bằng 5 vì chỉ có 26 chữ cái mà ta có 32 xâu nhị phân độ dài 5. Tổng số các bit dùng để mã hóa các dữ liệu bằng năm lần số các ký tự dùng trong văn bản khi mỗi ký tự được mã bằng 5 bit. Liệu có thể tìm được một lược đồ mã hóa sao cho khi dữ liệu được mã hóa, thì chỉ cần dùng một số ít bit hơn không? Nếu câu trả lời là khẳng định thì ta có thể tiết kiệm bộ nhớ và giảm thời gian truyền dữ liệu.

Ta sẽ nghiên cứu cách dùng các xâu nhị phân có độ dài khác nhau để mã hóa các chữ cái tiếng Anh. Các chữ cái xuất hiện thường xuyên hơn sẽ được mã hóa bằng các xâu nhị phân ngắn, các xâu nhị phân dài hơn dùng để mã các chữ xuất hiện ít hơn. Khi các chữ được mã bằng số bit thay đổi cần phải có cách xác định xem các bit ứng với mỗi chữ bắt đầu và kết thúc ở đâu. Chẳng hạn, nếu chữ *e* được mã bằng 0, chữ *a* bằng 1 và *t* bằng 01, khi đó xâu nhị phân 0101 có thể tương ứng với *eat*, *eaea* hoặc *tt*.

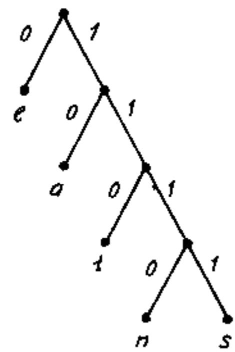
Để đảm bảo không có xâu nhị phân nào ứng với hơn một dãy các chữ cái, xâu nhị phân ứng với một chữ không bao giờ xuất hiện như là phần đầu của xâu nhị phân ứng với chữ khác. Mã có tính chất như vậy gọi là **mã tiền tố**. Ví dụ, mã *e* bằng 0, *a* bằng 10 còn *t* bằng 11 là mã tiền tố. Một từ có thể tìm lại được từ một xâu nhị phân mã các chữ cái của nó. Ví dụ xâu 10110 là mã của từ *ate*. Để giải mã ta thấy số 1 đầu tiên không biểu diễn một chữ nào nhưng 10 lại biểu diễn chữ *a* (và không thể là phần đầu của xâu nhị phân biểu diễn chữ khác). Khi đó số 1 tiếp theo không biểu diễn một chữ, nhưng 11 là chữ t. Số 0 cuối cùng biểu diễn chữ *e*.

Mã tiền số có thể biểu diễn bằng cây nhị phân, trong đó các ký tự là nhãn của lá trên cây. Các cạnh của cây được gán nhãn sao cho cạnh dẫn tới con bên trái được gán số 0, còn cạnh dẫn tới con bên phải được gán số 1. Xâu nhị phân mã hóa một chữ là dãy các nhãn của các cạnh thuộc đường đi duy nhất từ gốc tới lá có nhãn là chữ cái này. Ví dụ cây trên Hình 4 biểu diễn mã của các chữ *e bằng 0*, *a* bằng 10, *t* bằng 110, *n* bằng 1110 và *s* bằng 1111.

Cây biểu diễn mã được dùng để giải mã một dãy nhị phân. Ví dụ, ta nghiên cứu một từ được mã bởi 11111011100 nhờ mã trên Hình 4. Có thể giải mã xâu này bắt đầu từ gốc, dùng dãy các bit để tạo đường đi khi tới lá thì kết thúc. Mỗi khi gặp bit 0 ta chọn đường đi xuống theo cạnh dẫn tới con trái của đỉnh vừa đi qua và khi gặp bit 1 ta đi tới con phải của đỉnh này. Do đó, 1111 ứng với đường đi từ gốc đi theo nhánh phải bốn lần tới lá có nhãn là *s*, vì xâu 1111 là mã của chữ *s*. Tiếp tục, với bit thứ năm, ta đi theo cạnh phải rồi rẽ trái, tới lá có nhãn là chữ *a* là chữ có mã là 10. Xuất phát từ bit thứ bảy chúng ta đi tới lá tiếp theo sau khi đi theo nhánh phải ba lần liên tiếp, sau đó rẽ trái tới đỉnh có nhãn là *n* được mã bằng 1110. Bit 0 cuối cùng dẫn tới chữ *e* theo nhánh trái. Do đó từ được mã là *sane.*

Chúng ta có thể xây dựng mã tiền tố bằng bất kỳ cây nhị phân nào có cạnh trái của mỗi đỉnh trong được gán nhãn 0, cạnh phải gán nhãn 1 và các lá là các chữ cái. Các ký tự được mã bằng các xâu nhị phân tạo thành bởi các cạnh của đường đi duy nhất từ gốc tới lá.

Có các thuật toán như mã Huffman được dùng để tạo ra các mã có hiệu quả cao dựa trên tần xuất của các ký tự. Chúng ta không trình bày chi tiết của thuật toán này ở đây.




***Hình 4.*** Cây nhị phân với mã tiền tố

## BÀI TẬP

1. Hãy xây dựng cây tìm kiếm nhị phân cho các từ *banana, peach, apple, pear, coconut, mango* và *papaya* theo thứ tự từ điển.

2. Hãy xây dựng cây tìm kiếm nhị phân cho các từ *oenology, phrenology, campanology, ornithology, ichthyology, limnology, alchemy* và *astrology* theo thứ tự từ điển.

3. Cần bao nhiêu phép so sánh để định vị hay thêm các từ sau đây vào cây nhị phân trong Bài tập 1, với mỗi lần bắt đầu tìm kiếm từ đầu?

   a) *pear* b) *banana*

   c) *kumquat* d) *orange.*

4. Cần bao nhiêu phép so sánh để định vị hay thêm các từ sau đây vào cây nhị phân trong Bài tập 2 với mỗi lần bắt đầu tìm kiếm từ đầu?

   a) *palmistry* b) *etymology*

   c) *paleontology* d) *glaciology.*

5. Dùng thứ tự từ điển, hãy xây dựng cây tìm kiếm nhị phân cho câu "*The quick brown fox jumps over the lazy dog*".

6. Cần phải cân bao nhiêu lần bằng một chiếc cân hai đĩa để tìm một đồng xu giả trong bốn đồng xu? Biết rằng đồng xu giả có trọng lượng nhẹ hơn các đồng xu thật. Mô tả thuật toán tìm đồng xu nhẹ với số lần cân tìm được.

7. Cần phải cân bao nhiêu lần bằng một chiếc cân hai đĩa để tìm một đồng xu giả trong bốn đồng xu? Biết rằng đồng xu giả có trọng lượng nhẹ hơn hoặc nặng hơn các đồng xu thật. Mô tả thuật toán tìm đồng xu giả với số lần cần tìm được.

8*. Cần phải cân bao nhiêu lần bằng một chiếc cân hai đĩa để tìm một đồng xu giả trong 8 đồng xu? Biết rằng đồng xu giả có trọng lượng nhẹ hơn hoặc nặng hơn các đồng xu thật. Mô tả thuật toán tìm đồng xu giả với số lần cần tìm được.

9*. Cần phải cân bao nhiêu lần cân bằng một chiếc cân hai đĩa để tìm đồng xu giả trong mười hai đồng xu? Biết rằng đồng xu giả có trọng lượng nhẹ hơn các đồng xu thật. Mô tả thuật toán tìm đồng xu giả với số lần cân tìm được.

10*. Một trong bốn đồng xu là giả thì nó phải có trọng lượng nhẹ hơn hoặc nặng hơn các đồng xu thật. Cần phải cân bao nhiêu lần bằng một chiếc cân hai đĩa để xác định xem có đồng xu giả không, nếu có thì nó nhẹ hơn hay nặng hơn các đồng xu thật? Mô tả thuật toán tìm đồng xu giả với số lần cân tìm được và xác định xem nó nhẹ hơn hay nặng hơn các đồng xu thật.

11. Xác định cái nào là mã tiền tố trong các sơ đồ mã sau đây :

a) $a$ : 11, $e$ : 00, $t$ : 10, $s$ : 01

b) $a$ : 0, $e$ : 1, $t$ : 01, $s$ : 001

c) $a$ : 101, $e$ : 11, $t$ : 001, $s$ : 011, $n$ : 010

d) $a$ : 010, $e$ : 11, $t$ : 011, $s$ : 1011, $n$ : 1001, $i$ : 10101

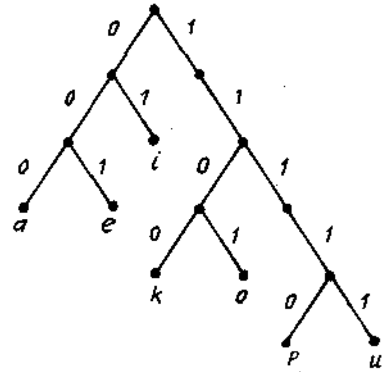
12. Dựng cây nhị phân với mã tiền tố biểu diễn các lược đồ mã hoá sau :

a) a : 11, e : 0, t : 101, s :100

b) a : 1, e : 01, t : 001, s = 0001, n = 00001

c) a : 1010, e : 0, t : 11, s : 1011, n : 1001, i : 100001

13. Hãy xác định mã của $a$, $e$, $i$, $k$, $o$, $p$ và $u$ nếu sơ đồ mã được biểu diễn bằng cây ở hình bên.



14. Cho sơ đồ mã $a$ : 001, $b$ : 0001, $e$ : 1, $r$ : 0000, $s$ : 0100, $t$ : 011,

$x$ : 01010 hãy tìm các từ được biểu diễn bởi

a) 01110100011.

b) 0001110000.

c) 0100101010.

d) 01100101010.

# 8.3. CÁC PHƯƠNG PHÁP DUYỆT CÂY

## MỞ ĐẦU

Cây có gốc và được sắp thứ tự thường được dùng để lưu trữ thông tin. Chúng ta cần có các thủ tục "viếng thăm" các đỉnh của cây để truy nhập dữ liệu. Sau đây chúng ta sẽ mô tả một số thuật toán viếng thăm tất cả các đỉnh của cây. Cây có gốc và được sắp thứ tự cũng có thể dùng để biểu diễn các loại hiểu thức khác nhau, như biểu thức số học chứa các số, các hiến và các phép toán. Những cách liệt kê khác nhau các đỉnh của cây có gốc và được sắp biểu diễn các biểu thức sẽ rất có ích khi tính giá trị của các biểu thức này.

## HỆ ĐỊA CHỈ PHỔ DỤNG

Các thủ tục duyệt tất cả các đỉnh của cây có gốc và được sắp thứ tự đều dựa trên việc sắp thứ tự các đỉnh con. Trong các cây có gốc và được sắp thứ tự, khi vẽ đồ thị có hướng của chúng, các con của một đỉnh trong được thể hiện từ trái sang phải.

Dưới đây sẽ giới thiệu một cách sắp thứ tự toàn bộ các đỉnh của một cây có gốc và được sắp. Để làm điều này trước tiên ta cần phải gán nhãn cho tất cả các đỉnh bằng phương pháp truy hồi như sau :

1. Gán nhãn cho gốc bằng số nguyên 0. Sau đó $k$ đỉnh con của nó (ở mức 1) từ trái sang phải được gán các nhãn là 1, 2, 3,..., $k$.

2. Với mọi đỉnh $v$ ở mức $n$ có nhãn là $A$, thì $k_v$ đỉnh con của nó từ trái qua phải được gán nhãn là $A.1$, $A.2$,..., $A.k_v$.

Theo thủ tục này, đỉnh $v$ ở mức $n$ với $n \geq 1$, có nhãn là $x_1x_2. \dots x_n$, trong đó đường đi duy nhất từ gốc tới $v$ sẽ đi qua đỉnh thứ $x_1$ ở mức 1, đỉnh thứ $x_2$ ở mức 2, v.v. Cách gán nhãn như vậy được gọi là **hệ địa chỉ phổ dụng** của một cây có gốc và được sắp.

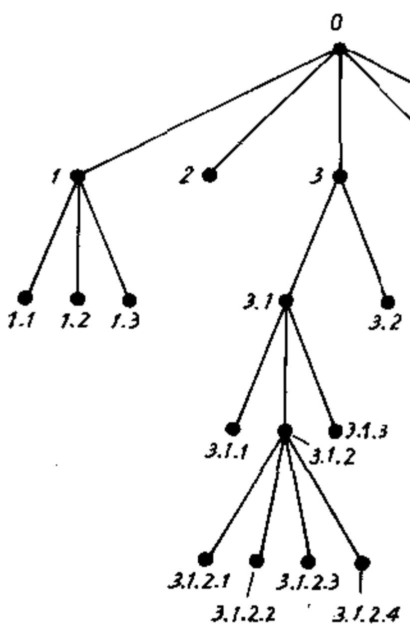
Bây giờ ta có thể sắp tất cả các đỉnh của cây theo thứ tự từ điển của các nhãn của chúng trong hệ địa chỉ phổ dụng. Đỉnh có nhãn $x_1x_2 \dots x_n$ là nhỏ hơn đỉnh có nhãn $y_1y_2 \dots y_m$ nếu có một giá trị của $i$, $0 \leq i \leq n$, sao cho $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}$ và $x_i < y_i$ hoặc nếu $n < m$ và $x_i = y_i$ với $i = 1,2,\dots,n$.

**Ví dụ 1**. Chúng ta sẽ gán nhãn theo địa chỉ phổ dụng cho tất cả các đỉnh của cây trên Hình 1. Thứ tự từ điển của các nhãn là :

0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.3 < 2 < 3 < 3.1 < 3.1.1. < 3.1.2 <

< 3.1.2.1 < 3.1.2.2 < 3.1.2.3 < 3.1.2.4 < 3.1.3 < 3.2 < 4 < 4.1 <

< 5 < 5.1 < 5.1.1 < 5.2 < 5.3



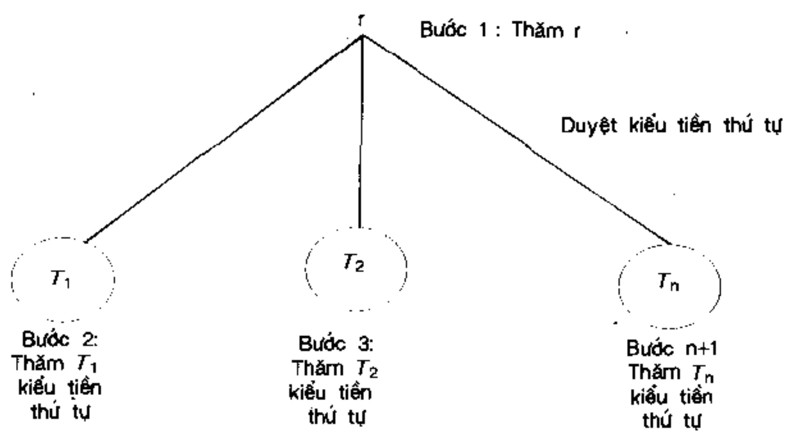

***Hình 1***. Hệ địa chỉ phổ dụng của cây có gốc được sắp thứ tự

## CÁC THUẬT TOÁN DUYỆT CÂY

Các thủ tục viếng thăm một cách có hệ thống tất cả các đỉnh của một cây có gốc và được sắp thứ tự được gọi là các **thuật toán duyệt cây**. Dưới đây sẽ giới thiệu ba thuật toán được sử dụng thường xuyên nhất : **duyệt tiền thứ tự, duyệt trung thứ tự** và **duyệt hậu thứ tự**.

**ĐỊNH NGHĨA 1**. Giả sử $T$ là một cây có gốc và được sắp thứ tự với gốc $r$. Nếu $T$ chỉ có $r$ thì $r$ là cách *duyệt tiền thứ tự* của $T$. Nếu không thì gọi $T_1$, $T_2$ ... $T_n$ là các cây con tại $r$ từ trái qua phải của $T$. *Duyệt tiền thứ tự* sẽ viếng thăm $r$ đầu tiên. Tiếp tục duyệt $T_1$ theo kiểu tiền thứ tự, sau đó duyệt $T_2$ theo kiểu tiền thứ tự, cứ như vậy cho đến khi $T_n$ được duyệt theo kiểu tiền thứ tự.

Độc giả hãy tự kiểm tra rằng cách duyệt kiểu tiền thứ tự một cây có gốc và được sắp cho ta một thứ tự các đỉnh hệt như là thứ tự nhận được theo hệ địa chỉ phổ dụng. Hình 2 biểu thị cách duyệt theo kiểu tiền thứ tự.

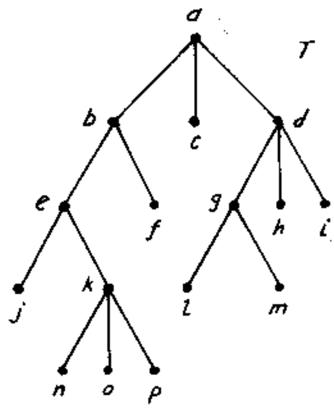



*Hình 2.* Duyệt cây kiểu tiền thứ tự.

**Ví dụ 2**. Cách duyệt tiền thứ tự sẽ viếng thăm các đỉnh của cây có gốc và được sắp trên Hình 3 theo thứ tự nào?

*Giải:* Các bước duyệt tiền thứ tự cây $T$ được biểu thị trên Hình 4. Chúng ta duyệt $T$ theo cách tiền thứ tự bằng việc viếng thăm gốc $a$ đầu tiên. Sau đó là duyệt tiền thứ tự cây con có gốc $b$, duyệt tiền thứ tự cây con có gốc $c$ (nó chỉ gồm $c$) và duyệt tiền thứ tự cây con có gốc $d$.

Duyệt tiền thứ tự cây con có gốc $b$ bắt đầu bằng cách liệt kê $b$ sau đó là các đỉnh của cây con có gốc $e$ theo kiểu tiền thứ tự và sau đó là cây con có gốc $f$ theo kiểu tiền thứ tự (nó chỉ có $f$). Liệt kê theo kiểu tiền thứ tự của cây con gốc $d$ bắt đầu bằng việc liệt kê $d$ sau đó là duyệt cây con có gốc $g$ theo kiểu tiền thứ tự, tiếp theo là cây con có gốc $h$ (nó chỉ có $h$) và duyệt cây con có gốc $i$ (nó chính là $i$).




***Hình 3.*** Cây có gốc và được sắp $T$

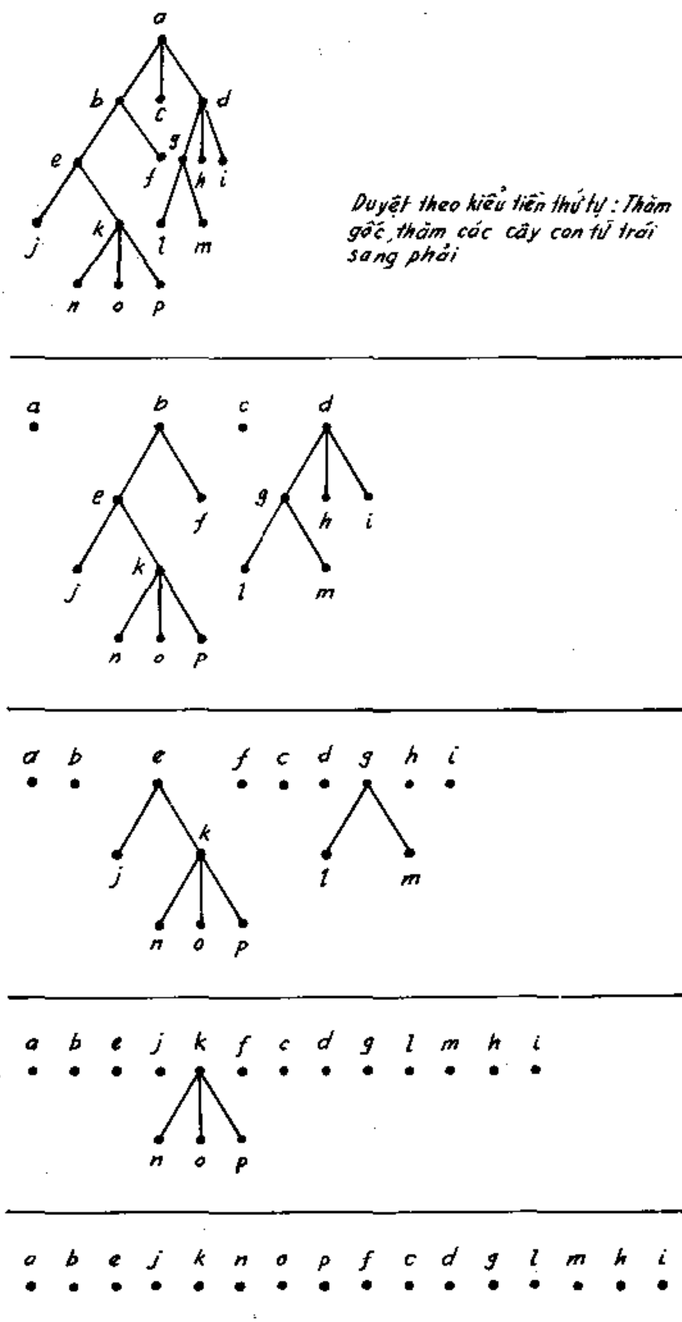
Duyệt theo kiểu tiền thứ tự cây con với gốc $e$ bắt đầu bằng liệt kê $e$, tiếp theo là duyệt theo kiểu tiền thứ tự cây con có gốc $j$ (nó chính là $j$), tiếp sau là duyệt theo kiểu tiền thứ tự cây con có gốc $k$. Liệt kê theo kiểu tiền thứ tự cây con có gốc $g$ là $g$ tiếp sau là $l$, rồi $m$. Duyệt theo kiểu tiền thứ tự cây con có gốc $k$ là $k$, $n$, $o$, $p$. Do đó duyệt theo kiểu tiền thứ tự cây $T$ là $a$, $b$, $e$, $j$, $k$, $n$, $o$, $p$, $f$, $c$, $d$, $g$, $l$, $m$, $h$, $i$.

**ĐỊNH NGHĨA 2**. Giả sử $T$ là một cây có gốc và được sắp với gốc $r$. Nếu $T$ chỉ có $r$ thì $r$ là cách *duyệt trung thứ tự* của $T$. Nếu không, thì gọi $T_1$, $T_2$,... $T_n$ là các cây con tại $r$ từ trái qua phải của $T$. *Duyệt trung thứ tự* sẽ bắt đầu bằng việc duyệt $T_1$ theo kiểu trung thứ tự, sau đó viếng thăm $r$. Tiếp tục duyệt $T_2$ theo kiểu trung thứ tự, tiếp tục duyệt $T_3$ theo kiểu trung thứ tự, và cứ tiếp tục cho đến khi $T_n$ được duyệt theo kiểu trung thứ tự.

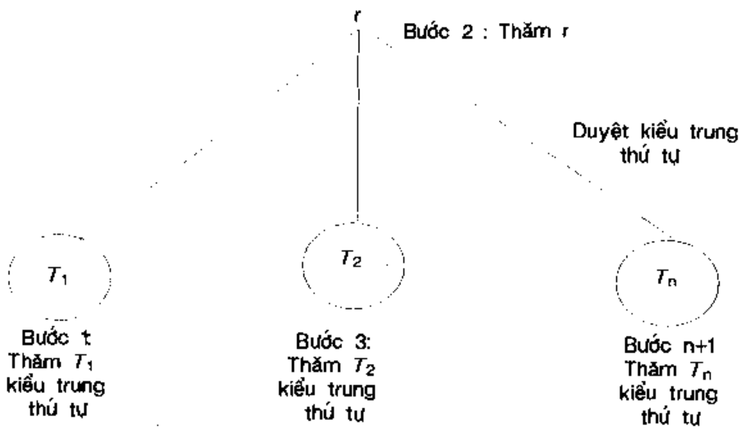
Hình 5 biểu thị cách duyệt theo kiểu trung thứ tự.

**Ví dụ 3.** Cách duyệt trung thứ tự sẽ viếng thăm các đỉnh của cây có gốc và được sắp trên Hình 3 theo thứ tự nào?

*Giải:* Các bước duyệt kiểu trung thứ tự cây có gốc và được sắp $T$ được biểu diễn trên Hình 6. Duyệt kiểu trung thứ tự bắt đầu bằng cách duyệt kiểu trung thứ tự cây con với gốc $b$, sau đó là gốc $a$, duyệt kiểu trung thứ tự cây con với gốc $c$ (chính là $c$), và duyệt kiểu trung thứ tự cây con gốc $d$.




***Hình 4.*** Duyệt cây $T$ theo kiểu tiền thứ tự.




***Hình 5.*** Duyệt cây theo kiểu trung thứ tự.

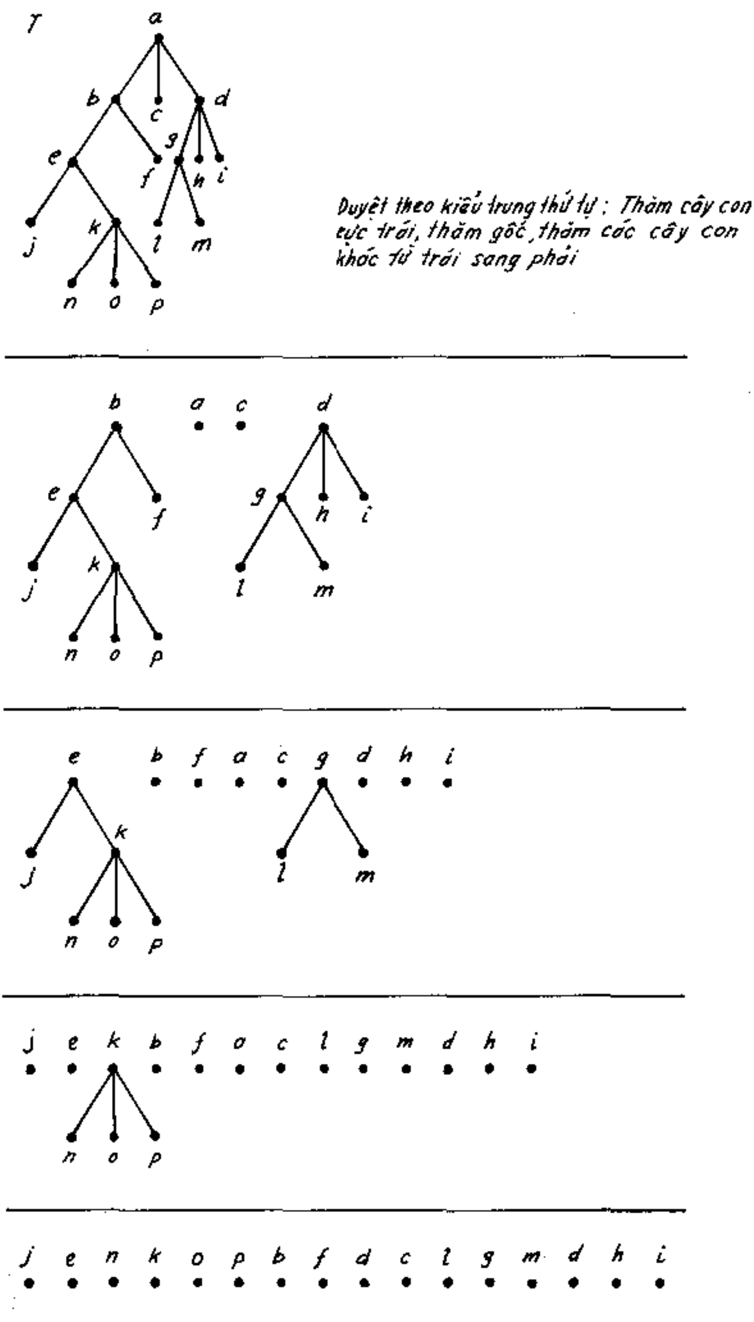
Duyệt kiểu trung thứ tự cây con với gốc $b$ bắt đầu bằng duyệt trung tự cây con với gốc $e$, gốc $b$ và $f$. Duyệt kiểm trung thứ tự cây con $d$ bắt đầu bằng liệt kê trung thứ tự cây con với gốc $g$, tiếp theo là gốc $d$, sau nữa là $h$ và $i$.

Duyệt kiểu trung thứ tự cây con với gốc $e$ là $j$ sau là gốc $e$, tiếp theo liệt kê kiểu trung thứ tự cây con với gốc $k$. Duyệt kiểu trung thứ tự cây con với gốc $k$ là $n$, $k$, $o$, $p$. Do đó, danh sách liệt kê theo kiểu trung thứ tự của cây con có gốc và được sắp $T$ là $j$, $e$, $n$, $k$, $o$, $p$, $b$, $f$, $a$, $c$, $l$, $g$, $m$, $d$, $h$, $i$.

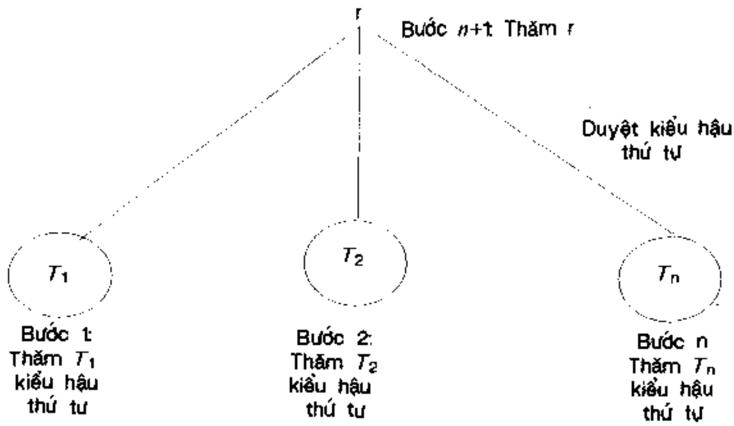
■

Định nghĩa duyệt theo kiểu hậu thứ tự như sau.

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Giả sử $T$ là một cây có gốc và được sắp với gốc $r$. Nếu $T$ chỉ có $r$ thì $r$ là cách *duyệt hậu thứ tự* của $T$. Nếu không, thì gọi $T_1$, $T_2$, ..., $T_n$ là các cây con tại $r$ từ trái qua phải của $T$. *Duyệt hậu thứ tự* sẽ bắt đầu bằng việc duyệt $T_1$ theo kiểu hậu thứ tự, sau đó duyệt $T_2$ theo kiểu hậu thứ tự và cứ tiếp tục cho đến khi $T_n$ được duyệt theo kiểu hậu thứ tự, và cuối cùng kết thúc bằng việc viếng thăm $r$.




*Hình 6.* Duyệt cây $T$ theo kiểu trung thứ tự.




***Hình*** *7.* Duyệt cây theo kiểu hậu thứ tự.

Hình 7 biểu thị cách duyệt theo kiểu hậu thứ tự.

**Ví dụ 4.** Cách duyệt kiểu hậu thứ tự sẽ viếng thăm các đỉnh của cây có gốc và được sắp trên Hình 3 theo thứ tự nào?

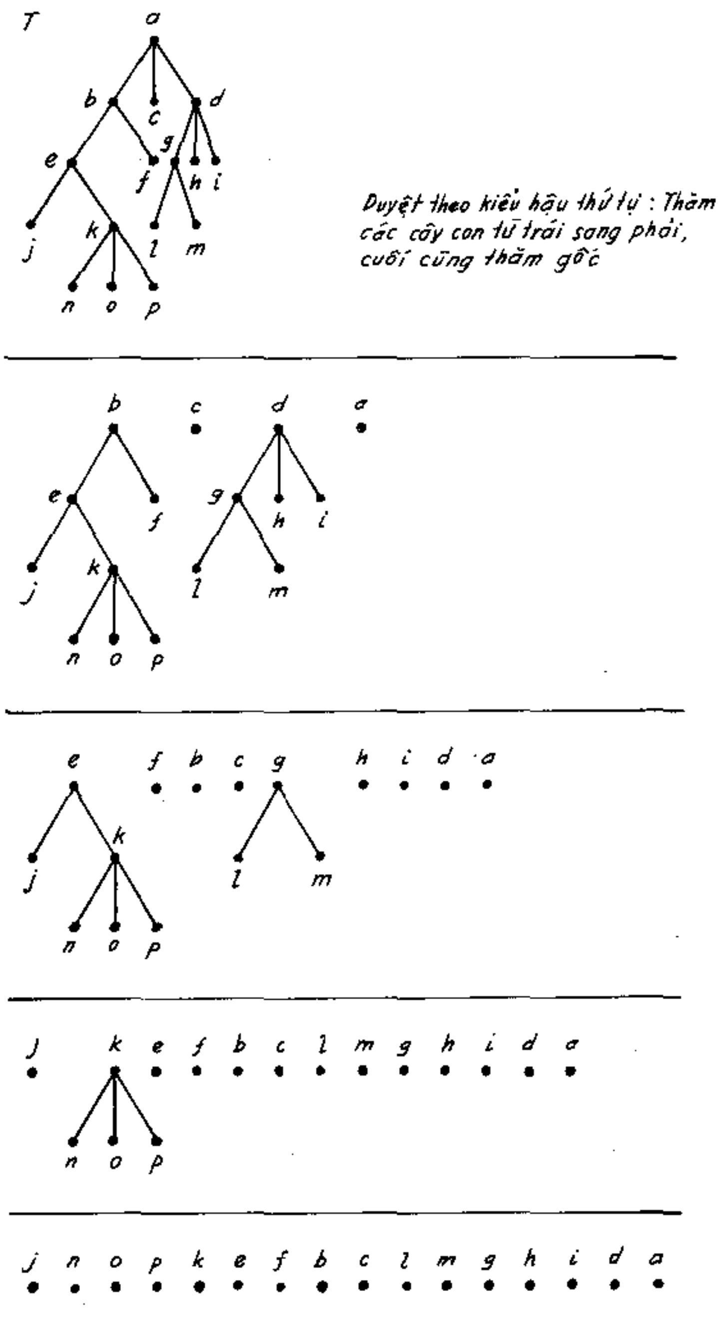
*Giải:* Các bước duyệt kiểu hậu thứ tự cây có gốc và được sắp $T$ được biểu diễn trên Hình 8. Duyệt kiểu hậu thứ tự bắt đầu bằng cách duyệt hậu thứ tự cây con với gốc $b$, duyệt kiểu hậu thứ tự cây con với gốc $c$ (chính là $c$), và duyệt kiểu hậu thứ tự cây con gốc $d$, cuối cùng là gốc $a$.

Duyệt kiểu hậu thứ tự cây con với gốc $b$ bắt đầu bằng duyệt hậu thứ tự cây con với gốc $e$, $f$ và tiếp theo là gốc $b$. Duyệt kiểu hậu thứ tự cây con $d$ bắt đầu bằng liệt kê kiểu hậu thứ tự cây con với gốc $g$, *tiếp theo là* $h$ và $i$, sau nữa là gốc $d$.

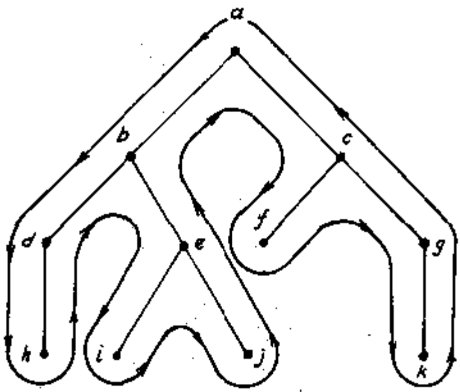
Duyệt kiểu hậu thứ tự cây con với gốc $e$ bắt đầu bằng $j$ sau đó liệt kê kiểu hậu thứ tự cây con với gốc $k$, tiếp theo là gốc $e$. Duyệt kiểu hậu thứ tự cây con với gốc $g$ là $l$, $m$, $g$. Duyệt kiểu hậu thứ tự cây con với gốc $k$ là $n$, $o$, $p$, $k$. Do đó, danh sách liệt kê theo kiểu hậu thứ tự của cây con có gốc và được sắp $T$ là $j$, $n$, $o$, $p$, $k$, $e$, $f$, $b$, $c$, $l$, $m$, $g$, $h$, $i$, $d$, $a$.

■

Có nhiều cách dễ dàng liệt kê các đỉnh của cây có gốc và được sắp theo kiểu tiền, trung hay hậu thứ tự. Trước tiên ta vẽ một đường cong bao quanh cây đang xét, xuất phát từ gốc chuyển động dọc theo các cạnh như trên Hình vẽ 9. Ta có thể liệt kê các đỉnh của cây theo kiểu tiền




***Hình 8.*** Duyệt cây $T$ theo kiểu hậu thứ tự.




*Hình 9.* Cách dễ nhớ các cách duyệt cây theo các kiểu tiền, trung, hậu thứ tự.

thứ tự bằng cách liệt kê mỗi đỉnh khi đường cong đi qua nó. Ta có thể nhận được danh sách các đỉnh theo kiểu trung thứ tự bằng cách liệt kê các lá khi đi ngang qua nó lần đầu và liệt kê các đỉnh trong khi đi ngang qua nó lần thứ hai. Ta có thể nhận được danh sách các đỉnh theo kiểu hậu thứ tự bằng cách liệt kê các đỉnh khi đi ngang qua nó lần thứ hai để trở về cha của nó. Theo quy tắc này với cây có gốc trên Hình 9 kiểu duyệt tiền thứ tự cho ta *a, b, d, h, e, i, j, c, f, g, k*, kiểu duyệt trung thứ tự cho ta *h, d, b, i, e, j, a, f, c, k, g* còn theo kiểu duyệt hậu thứ tự thì ta được *h, d, i, j, e, b, f, k, g, c, a*.

THUẬT TOÁN 1. DUYỆT KIỂU TIỀN THỨ TỰ.

**procedure** *preorder* (*T* : cây có gốc và được sắp)

*r* : = gốc của *T*

liệt kê *r*

**for** mỗi cây con *c* của *r* từ trái sang phải

**begin**

  *T(c)* : = Cây con với gốc *c*

  *preorder* (*T(c)*)

**end**

---

THUẬT TOÁN 2. DUYỆT KIỂU TRUNG THỨ TỰ.

**procedure** *inorder (T)* : cây có gốc và được sắp) ;

*r* : = gốc của *T*
**if** *t* là lá **then** liệt kê *r*

**else**

**begin**

*l* : = con đầu tiên từ trái sang phải của *r*
T *(l)* : = Cây con với gốc *l*
inorder *(T(l))*

liệt kê *r*

**for** mỗi cây con *c* của *r* từ trái sang phải trừ *l*

*T (c)* : = Cây con với gốc *c*

*inorder (T(c))*

**end.**

---

THUẬT TOÁN 3. DUYỆT KIỂU HẬU THỨ TỰ.
**procedure** *postorder (T* : cây có gốc và được sắp)
*r* : = gốc của *T*

**for** mỗi cây con *c* của *r* từ trái sang phải

**begin**

*T (c)* : = Cây con với gốc *c*
*postorder(T(c))*

**end.**

liệt kê *r*

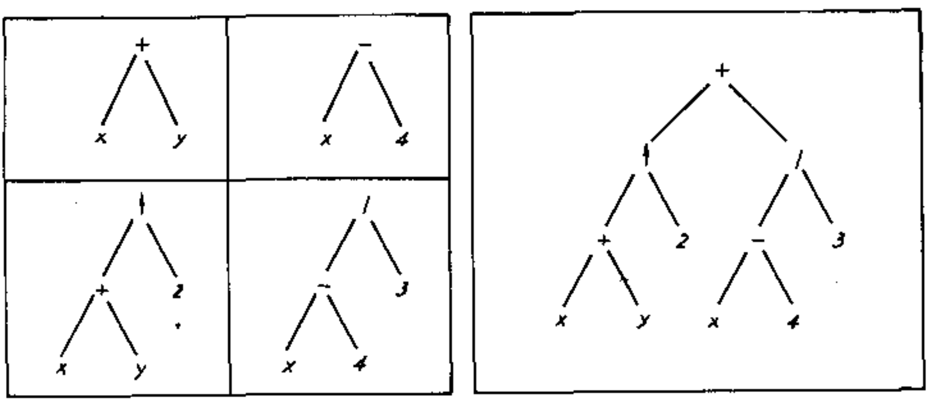
---

## CÁC KÝ PHÁP TRUNG TỐ, TIỀN TỐ VÀ HẬU TỐ

Chúng ta có thể biểu diễn các biểu thức phức tạp như các mệnh đề phức hợp, những tổ hợp của các tập hợp, các biểu thức số học bằng cây có gốc và được sắp. Ví dụ, chúng ta nghiên cứu cách biểu diễn các biểu thức số học có chứa các toán tử + (cộng), − (trừ), * (nhân), / (chia) và ↑(lũy thừa). Chúng ta sẽ dùng các dấu ngoặc để biểu thị thứ tự các phép toán. Những biểu thức như thế có thể được biểu diễn bằng các cây có gốc và được sắp, trong đó các đỉnh trong biểu thị các phép toán các lá biểu thị các số hay các biến. Mỗi một phép toán tác động lên các cây con bên trái và cây con bên phải của nó (theo thứ tự này).

**Ví dụ 5**. Tìm cây có gốc biểu diễn biểu thức

$$((x + y)\uparrow 2) + ((x - 4)/3).$$

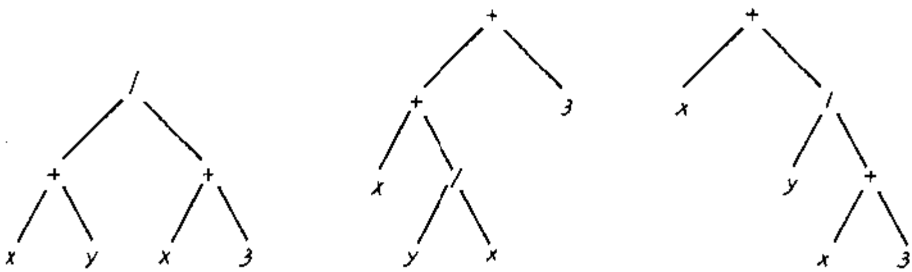



*Hình 10.* Cây nhị phân biểu diễn $((x + y)\uparrow 2) + ((x - 4)/3)$.

*Giải:* Cây nhị phân cho biểu thức này có thể được xây dựng từ dưới lên. Trước tiên xây dựng cây con cho biểu thức $x + y$. Sau đó kết hợp thành cây con lớn hơn $(x + y)\uparrow 2$. Cũng như vậy, ta xây dựng cây con $(x - 4)$ và sau đó kết hợp thành cây con $(x - 4)/3$. Cuối cùng hai cây con biểu thị $(x + y)\uparrow 2$ và $(x - 4)/3$ kết hợp với nhau để nhận được cây có gốc và được sắp biểu diễn $((x + y)\uparrow 2) + ((x - 4)/3)$. Các bước này được thể hiện trên Hình 10.

■

Cách duyệt cây nhị phân biểu điễn biểu thức đã cho theo kiểu trung thứ tự sẽ tạo ra biểu thức có các số hạng và các phép toán theo đúng thứ tự như là đã có trong biểu thức ban đầu trừ các phép toán một ngôi thay vì đi ngay sau các toán hạng của chúng. Ví dụ, duyệt kiểu trung thứ tự các cây nhị phân trên Hình 11 biểu diễn các biểu thức $(x + y)/(x + 3)$, $(x + (y/x)) + 3$ và $x + (y/(x + 3))$ tất cả đều dẫn tới biểu thức trung tố $x + y/a + 3$. Để cho các biểu thức này rõ ràng cần phải dùng các dấu ngoặc trong cách duyệt trung thứ tự mỗi khi ta gặp một phép toán. Biểu thức có đầy đủ dấu ngoặc đơn nhận được bằng cách như vậy được gọi là ở **dạng trung tố.**




*Hình 11.* Cây có gốc biểu diễn $(x + y)/(x + 3)$, $(x + (y/x)) + 3$, và $x + (y/x + 3)$.

Chúng ta nhận được **dạng tiền tố** của biểu thức khi ta duyệt cây có gốc theo kiểu tiền thứ tự. Các biểu thức được viết dưới dạng tiền tố được gọi là **ký pháp Ba lan**. Một biểu thức ở dạng tiền tố (trong đó mỗi phép toán đều có một số xác định các toán hạng) là rõ ràng tức là không cần dùng các dấu ngoặc trong các biểu thức này. Độc giả tự kiểm tra lại điều này như một bài tập.

**Ví dụ 6.** Tìm dạng tiền tố của biểu thức $((x + y) \uparrow 2) + ((x - 4)/3)$.

*Giải:* Chúng ta nhận được dạng tiền tố của biểu thức này bằng cách duyệt cây nhị phân biểu diễn nó trên Hình 10 theo kiểu tiền thứ tự. Từ đó

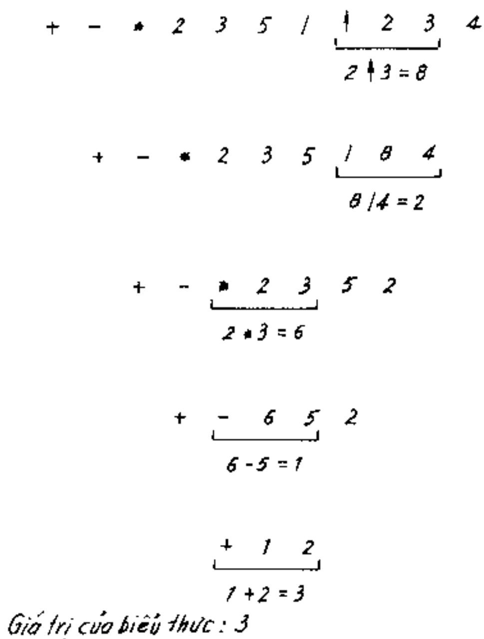
nhận được $+ \uparrow + x\ y\ 2 / - x\ 4\ 3$.

Trong dạng tiền tố của một biểu thức một toán tử hai ngôi, như phép cộng, đi trước hai toán hạng của nó. Vì thế, chúng ta có thể đánh giá một biểu thức ở dạng tiền tố bằng cách đi từ phải sang trái. Khi chúng ta gặp một toán tử ta thực hiện phép toán tương ứng có hai toán hạng đi liền bên phải của toán tử này. Cũng vậy mỗi khi một phép toán được thực hiện chúng ta coi kết quả như một toán hạng mới.

**Ví dụ 7.** Tính giá trị của biểu thức tiền tố $+ - * 2\ 3\ 5 / \uparrow 2\ 3\ 4$.

*Giải:* Các bước để tính giá trị của biểu thức này được tiến hành từ phải sang trái và thực hiện các phép toán với các toán hạng ở bên phải nó, như chỉ ra trên Hình 12. Kết quả nhận được là 3.

Chúng ta nhận được **dạng hậu tố** của một biểu thức bằng cách duyệt cây nhị phân theo kiểu hậu thứ tự. Biểu thức viết dưới dạng hậu tố đượ c gọi là **ký pháp Ba lan ngược**. Các biểu thức dưới dạng ký pháp Ba lan ngược là rõ ràng (không mập mờ), vì vậy không cần dùng dấu ngoặc. Độc giả tự kiểm tra điều này.




***Hình 12.*** Tính giá trị của biểu thức tiền tố.

**Ví dụ 8**. Tìm dạng hậu tố của biểu thức $((x + y) \uparrow 2) + ((x - 4)/3)$.

*Giải.* Dạng hậu tố của biểu thức này nhận được bằng cách duyệt theo kiểu hậu thứ tự cây nhị phân ứng với biểu thức này, như trên Hình 10. Ta nhận được biểu thức hậu tố $x\ y\ +\ 2\ \uparrow\ \ x\ 4\ -\ 3\ /\ +$.

Trong dạng hậu tố này của một biểu thức các toán tử hai ngôi đi sau hai toán hạng của chúng. Vì thế để đánh giá một biểu thức ở dạng hậu tố ta phải tiến hành từ trái sang phải và thực hiện một phép toán mỗi khi có một toán tử đi sau hai toán hạng. Sau khi mỗi phép toán được thực hiện kết quả của phép toán này trở thành toán hạng của phép toán mới.

■

**Ví dụ 9.** Tìm giá trị của biểu thức hậu tố $7\ 2\ 3\ *\ -\ 4\ \uparrow\ 9\ 3\ /\ +$ .

*Giải.* Các bước tính giá trị của biểu thức này được tiến hành từ bên trái và thực hiện các phép toán với hai toán hạng ở bên trái toán tử, như chỉ ra trên Hình 13. Kết quả nhận được là 4.

Cây có gốc có thể dùng để biểu diễn các biểu thức có dạng khác, ví dụ như các mệnh đề phức hợp hay tổ hợp các tập hợp. Trong các ví dụ này có các toán tử một ngôi, chẳng hạn như phép phủ định một mệnh đề. Để biểu diễn các toán tử và các toán hạng loại này, chúng ta coi các đỉnh là các toán tử, con của các đỉnh này là các toán hạng mà nó sẽ sử dụng.

$$7\ \underbrace{2\ 3\ *}_{2*3=6}\ -\ 4\ \uparrow\ 9\ 3\ /\ +$$

$$\underbrace{7\ 6\ -}_{7-6=1}\ 4\ \uparrow\ 9\ 3\ /\ +$$

$$\underbrace{1\ 4\ \uparrow}_{1^4=1}\ 9\ 3\ /\ +$$

$$1\ \underbrace{9\ 3\ /}_{9/3=3}\ +$$

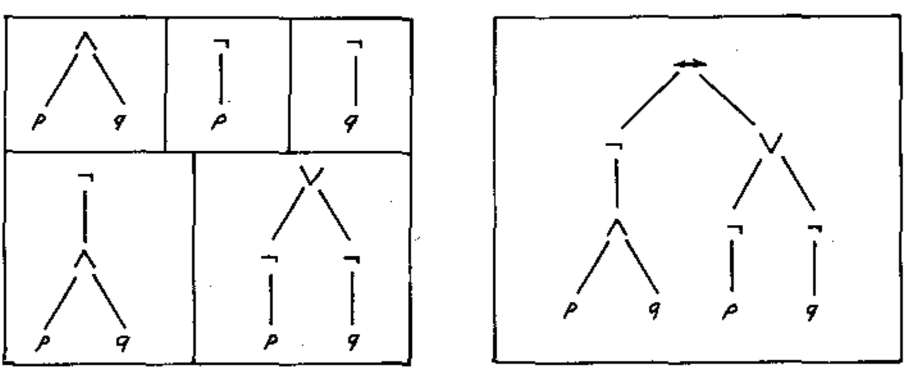
$$\underbrace{1\ 3\ +}_{1+3=4}$$

***Hình 13.*** Tính giá trị của biểu thức hậu tố.

**Ví dụ 10**. Hãy tìm cây có gốc và được sắp biểu diễn mệnh đề lôgic phức hợp :

$(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$. Sau đó dùng cây nhị phân này hãy tìm dạng tiền tố, hậu tố và trung tố của biểu thức này.

*Giải:* Cây có gốc ứng với mệnh đề phức hợp này được xây dựng từ dưới lên. Trước tiên ta tạo các cây con $\neg p$ và $\neg q$ (trong đó $\neg$ là toán tử phủ định). Tương tự ta xây dựng cây con $p \wedge q$. Sau đó là các cây con $\neg(p \wedge q)$ và $(\neg p) \vee (\neg q)$ được xây dựng. Cuối cùng dùng hai cây con này để tạo cây có gốc cần tìm. Từng bước của thủ này được thể hiện trên Hình 14.



***Hình 14.*** Xây dựng cây có gốc cho mệnh đề phức hợp.

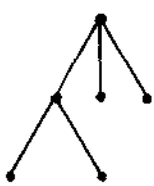
Dạng tiền tố, hậu tố và trung tố của biểu thức này được tìm bằng cách duyệt cây có gốc vừa xây dựng ở trên tương ứng theo kiểu tiền, hậu và trung thứ tự (kể cả các dấu ngoặc). Kết quả chúng ta nhận được $\leftrightarrow \neg \wedge pq \vee \neg p \neg q$, $pq \wedge \neg p \neg q \neg \vee \leftrightarrow$, và $(\neg(p \wedge q)) \leftrightarrow ((\neg p) \vee (\neg q))$, tương ứng.

Vì các biểu diễn tiền tố và hậu tố là rõ ràng, không nhập nhằng nước đôi và bởi vì có thể dễ dàng tính giá trị của chúng mà không phải quét tới quét lui, nên chúng được sử dụng rất nhiều trong tin học. Các biểu diễn như thế đặc biệt có lợi khi xây dựng các bộ dịch.

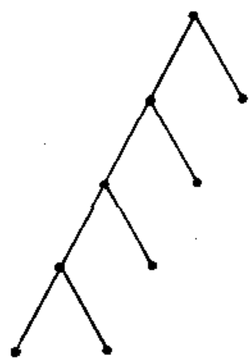
## *BÀI TẬP*

*Trong các bài tập 1–3 hãy xây dựng các hệ địa chỉ phổ dụng cho các cây có gốc được sắp đã cho. Sau đó dùng chúng để sắp xếp các đỉnh của cây theo thứ tự từ điển của các nhãn.*

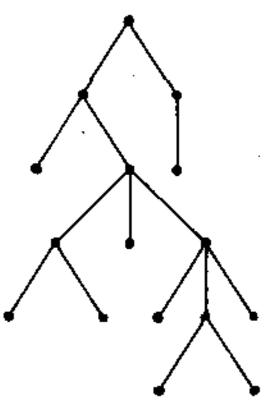
**1.**



**2.**



**3.**



**4.** Giả sử địa chỉ của đỉnh $v$ trong cây $T$ là 3.4.5.2.4.

a) $v$ ở mức nào?

b) Tìm địa chỉ của cha của $v$.

c) $v$ có tối thiểu mấy anh em?

d) $T$ có ít nhất bao nhiêu đỉnh?

e) Hãy tìm các địa chỉ khác phải có.

**5.** Giả sử đỉnh có địa chỉ lớn nhất trong cây $T$ có địa chỉ là 2.3.4.3.1. Có thể xác định được số đỉnh trong $T$ hay không?

**6** Các lá của cây có gốc và được sắp có thể có danh sách địa chỉ phổ dụng như sau được không? Nếu có, hãy xây dựng cây có gốc đó.

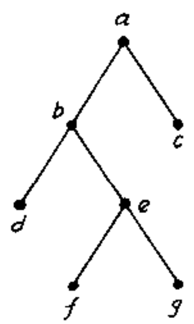
a) 1.1.1, 1.1.2, 1.2, 2.1.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.2, 3.1.1, 3.1.2.1, 3.1.2.2, 3.2

b) 1.1, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 2.1, 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.4.2.1, 2.4.2.2, 3.1, 3.2.1, 3.2.2

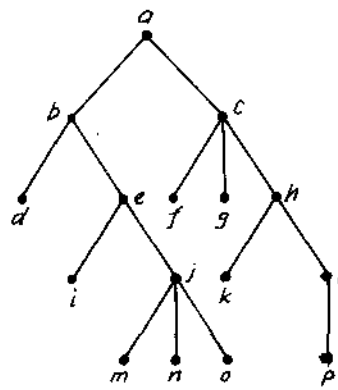
c) 1.1, 1.2.1, 1.2.2, 1.2.2.1, 1.3, 1.4, 2, 3.1, 3.2, 4.1.1.1

*Trong các Bài tập từ 7-9 hãy xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu tiền thứ tự.*

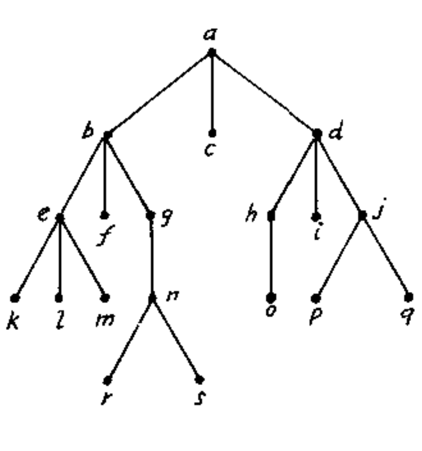
**7.**




**8.**




**9.**




**10.** Xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc trong Bài tập 7 được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu trung thứ tự.

**11.** Xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc trong Bài tập 8 được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu trung thứ tự.

**12.** Xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc trong Bài 9 được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu trung thứ tự.

**13**. Xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc trong Bài tập 7 được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu hậu thứ tự.

**14.** Xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc trong Bài tập 8 được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu hậu thứ tự.

**15.** Xác định thứ tự mà các đỉnh của cây có gốc trong Bài tập 9 được viếng thăm nếu ta duyệt nó theo kiểu hậu thứ tự.

**16**. Hãy biểu diễn biểu thức $((x + 2) \uparrow 3) * (y - (3 + x)) - 5$ bằng cây nhị phân.

**17.** Hãy viết biểu thức trong Bài tập 16 dưới dạng :

a) ký pháp tiền tố

b) ký pháp hậu tố

c) ký pháp trung tố.

**18.** Hãy biểu diễn các biểu thức $(x + xy) + (x/y)$ và $x + ((xy + x)/y)$ bằng cây nhị phân.

**19.** Hãy viết biểu thức trong Bài 18 dưới dạng :

a) ký pháp tiền tố

b) ký pháp hậu tố

c) ký pháp trung tố.

**20.** Hãy biểu diễn các mệnh đề phức hợp $(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ và $(\neg p \wedge (q \leftrightarrow \neg p)) \vee \neg q$ bằng cây có gốc và được sắp.

**21**. Hãy viết biểu thức trong Bài tập 20 dưới dạng :

a) ký pháp tiền tố

b) ký pháp hậu tố

c) ký pháp trung tố.

**22**. Hãy biểu diễn $(A \cap B) - (A \cup (B - A))$ bằng cây có gốc được sắp.

**23**. Hãy viết hiểu thức trong Bài tập 22 dưới dạng :

a) ký pháp tiền tố

h) ký pháp hậu tố

c) ký pháp trung tố.

**24*.** Xâu $\neg p \land q \leftrightarrow \neg p \lor \neg q$ có thể được đặt trong ngoặc đơn theo bao nhiêu cách để sinh ra một biểu thức trung tố?

**25*.** Xâu $A \cap B - A \cap B - A$ có thể được đặt trong ngoặc đơn theo bao nhiêu cách để sinh ra một biểu thức trung tố?

**26.** Hãy vẽ cây có gốc được sắp xếp ứng với mỗi biểu thức số học được viết ở dạng ký pháp tiền tố sau đây. Sau đó hãy viết biểu thức bằng ký pháp trung tố.

a) + * + − 5 3 2 1 4

b) ↑ + 2 3 − 5 1

c) */9 3 + * 2 4 − 7 6

**27.** Hãy tính giá trị của các biểu thức tiền tố sau đây :

a) − * 2/8 4 3

b) ↑ * 3 3 * 4 2 5

c) + − ↑ 3 2 ↑ 2 3 / 6 − 4 2

d) * + 3 + 3 ↑ 3 + 3 3 3

**28.** Hãy tính giá trị của các biểu thức hậu tố sau đây :

a) 5 2 1 − − 3 1 4 + + *

b) 9 3 / 5 + 7 2 − *

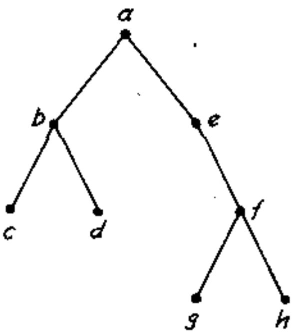
c) 3 2 * 2 ↑ 5 3 − 8 4 / * −

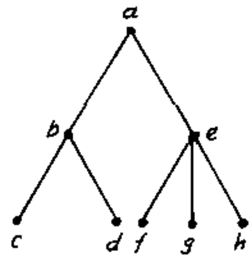
**29.** Hãy xây dựng cây có gốc được sắp sao cho khi duyệt nó theo kiểu tiền thứ tự ta được $a$, $b$, $f$, $c$, $g$, $h$, $i$, $d$, $e$, $j$, $k$, $l$ trong đó $a$ có 4 con, $c$ có 3 con, $j$ có 2 con, $b$ và $e$ đều có 1 con còn tất cả các đỉnh khác đều là lá.

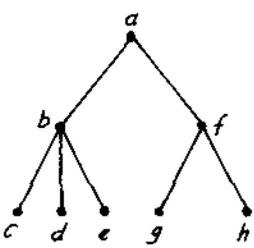
**30*.** Hãy chứng tỏ rằng cây có gốc được sắp là xác định duy nhất khi cho danh sách các đỉnh của nó sinh ra bằng cách duyệt tiền thứ tự và số con của mỗi đỉnh là được cho trước.

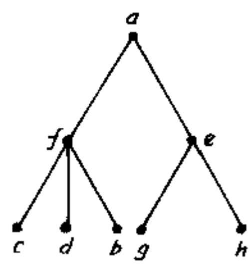
**31*.** Hãy chứng tỏ rằng cây có gốc được sắp là xác định duy nhất khi cho danh sách các đỉnh của nó sinh ra bằng cách duyệt hậu thứ tự và số con của mỗi đỉnh là được cho trước.

**32.** Hãy chỉ ra rằng khi duyệt hai cây dưới đây (hình bên trái) theo kiểu tiền thứ tự sẽ tạo ra cùng một danh sách các đỉnh. Lưu ý là điều này không mâu thuẫn với Bài tập 30, vì số con của các đỉnh trong của hai cây này là khác nhau.




**33.** Hãy chỉ ra rằng khi duyệt hai cây (hình trên, bên phải) theo kiểu hậu thứ tự sẽ tạo ra cùng một danh sách các đỉnh. Lưu ý là điều này không mâu thuẫn với Bài tập 31, vì số con của các đỉnh trong của hai cây này là khác nhau.

**Các công thức được tạo đúng** *ở dạng ký pháp tiền tố từ tập các ký hiệu và tập các toán tử hai ngôi được định nghĩa dệ quy theo quy tắc sau đây :*

*(i) Nếu x là một ký hiệu, thì x là công thức được tạo đúng ở dạng ký pháp tiền tố ;*

*(ii) Nếu X và Y là các công thức được tạo đúng và * là một toán tử thì * XY là một công thức được tạo đúng.*

**34.** Trong các công thức sau đây công thức nào là được tạo đúng từ tập các ký hiệu $\{x, y, z\}$ và tập các toán tử hai ngôi $\{\times, +, \text{o}\}$?

a) $\times + + x\ y\ x$ b) $\text{o}\ x\ y \times x\ z$

c) $\times\ \text{o}\ x\ z \times \times\ x\ y$ d) $\times + \text{o}\ x\ x\ \text{o}\ x\ x\ x$

**35*.** Chỉ ra rằng một công thức được tạo đúng bất kỳ ở dạng ký pháp tiền tố từ tập các ký hiệu và tập các toán tử hai ngôi có số ký hiệu nhiều hơn số toán tử đúng một đơn vị.

**36.** Đưa ra định nghĩa công thức được tạo đúng ở dạng ký pháp hậu tố từ một tập các ký hiệu và tập các toán tử hai ngôi.

**37.** Hãy đưa ra sáu ví dụ về công thức được tạo đúng có ba hay nhiều hơn các toán tử ở dạng hậu tố từ tập các ký hiệu $\{x, y, z\}$ và tập các toán tử hai ngôi $\{\times, +, \circ\}$.

**38.** Hãy mở rộng định nghĩa công thức được tạo đúng ở dạng ký pháp tiền tố từ một tập các ký hiệu và tập các toán tử trong đó các toán tử có thể không là hai ngôi.

# 8.4. CÂY VÀ BÀI TOÁN SẮP XẾP

## MỞ ĐẦU

Bài toán sắp xếp các phần tử của một tập hợp xuất hiện trong rất nhiều lĩnh vực. Ví dụ, để lập danh bạ điện thoại cần phải sắp xếp tên của những người thuê bao theo thứ tự từ điển.

Giả sử cần sắp xếp toàn bộ các phần tử của một tập hợp. Ban đầu các phần tử của tập có thể được sắp đặt theo một trật tự nào đó. **Sắp xếp** (sorting) là sự sắp đặt lại các phần tử này vào một danh sách theo thứ tự tăng dần. Ví dụ, sắp xếp danh sách 7, 2, 1, 4, 5, 9 sẽ tạo ra danh sách 1, 2, 4, 5, 7, 9, Sắp xếp danh sách *d, h, c, a, f* (theo thứ tự từ điển) sẽ cho danh sách *a, c, d, f, h*.

Phần lớn các công việc của máy tính là dành cho việc sắp xếp các đối tượng thuộc các loại khác nhau. Vì thế, người ta đã dành rất nhiều công sức cho việc phát triển các thuật toán sắp xếp có hiệu quả. Trong mục này chúng ta sẽ trình bày một vài thuật toán sắp xếp và độ phức tạp tính toán của chúng. Cũng trong tiết này chúng ta sẽ thấy cây được dùng để mô tả các thuật toán sắp xếp và dùng để phân tích độ phức tạp của chúng như thế nào.

## ĐỘ PHỨC TẠP CỦA SẮP XẾP

Hiện nay có khá nhiều thuật toán sắp xếp. Để đánh giá tính hiệu quả của mỗi thuật toán người ta cần xác định độ phức tạp của nó. Bằng mô hình cây có thể tìm được cận dưới cho trường hợp có độ phức tạp tồi tệ nhất của thuật toán sắp xếp.

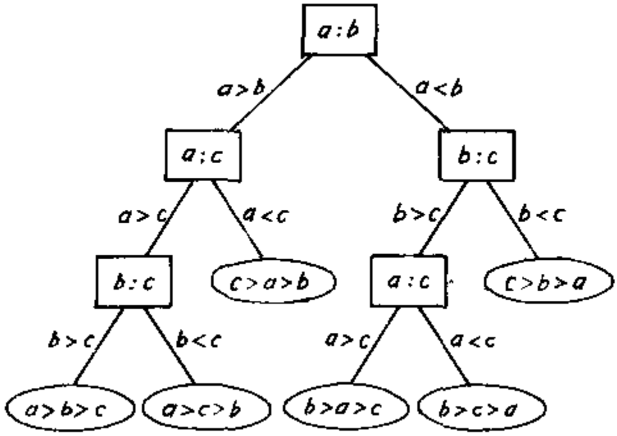
Giả sử ta có một tập gồm $n$ phần tử. Khi đó ta sẽ có $n$ ! cách sắp xếp các phần tử này, đó là số hoán vị của chúng. Các thuật toán sắp xếp mà chúng ta sẽ nghiên cứu đều dựa trên các phép so sánh nhị nguyên, tức là mỗi lần so sánh hai phần tử với nhau. Kết quả của mỗi phép so sánh như thế sẽ thu hẹp tập các cách sắp xếp có thể. Như vậy, thuật toán sắp xếp dựa trên so sánh nhị nguyên có thể được biểu diễn bằng cây quyết định nhị phân với các đỉnh trong là các phép so sánh hai phần tử, mỗi lá là một trong $n!$ hoán vị của $n$ phần tử.

**Ví dụ 1.** Trên Hình 1 chúng ta biểu diễn cây quyết định để sắp xếp các phần tử của danh sách $a$, $b$, $c$.

Độ phức tạp sắp xếp dựa trên so sánh nhị nguyên được đo bằng số các phép so sánh được sử dụng. Số tối đa các phép so sánh cần dùng để sắp xếp một danh sách có $n$ phần tử chính là trường hợp tồi tệ nhất của thuật toán. Số tối đa các phép so sánh cần dùng sẽ bằng độ dài của đường đi dài nhất trong cây quyết định biểu diễn thủ tục sắp xếp. Nói cách khác số tối đa các phép so sánh cần dùng sẽ bằng chiều cao của cây quyết định. Vì chiều cao của cây nhị phân với $n!$ lá tối thiểu bằng $\lceil \log n! \rceil$ (dùng Hệ quả 1 trong Tiết 8.1) nên cần ít nhất $\lceil \log n! \rceil$ phép so sánh, như Định lý 1 sau khẳng định.

**ĐỊNH LÝ 1.** Thuật toán sắp xếp dựa trên so sánh nhị nguyên đòi hỏi ít nhất $\lceil \log n! \rceil$ phép so sánh.

Theo Ví dụ 6 của Tiết 1.8 ta suy ra $\lceil \log n! \rceil$ là $O(n\log n)$. Thật vậy, vì $\log n!$ lớn hơn $(n\log n)/4$ với mọi $n > 4$ (xem Bài tập 18) ta suy ra không có thuật toán sắp xếp nào dùng các phép so sánh như là một phương pháp sắp xếp có thể có độ phức tạp về thời gian trong trường hợp tồi tệ nhất lại tốt hơn $O(n\log n)$. Do đó thuật toán sắp xếp là có hiệu quả tốt nhất có thể nếu độ phức tạp thời gian của nó là $O(n\log n)$.




*Hình 1.* Cây quyết định để sắp xếp ba phần tử khác nhau.

## SẮP XẾP KIỂU NỔI BỌT

**Sắp xếp kiểu nổi bọt** là một thuật toán sắp xếp đơn giản nhất nhưng không phải là một trong những thuật toán có hiệu quả nhất. Thuật toán này đặt danh sách theo thứ tự tăng dần bằng cách so sánh liên tiếp các phần tử kề nhau, đổi chỗ chúng cho nhau nếu chúng chưa có thứ tự tăng dần. Để tiến hành sắp xếp kiểu nổi bọt chúng ta thực hiện một thao tác cơ bản, đó là sự đổi chỗ phần tử lớn hơn với phần tử nhỏ hơn đi sau, bắt đầu từ đầu danh sách và duyệt qua toàn bộ danh sách. Chúng ta lặp thủ tục này cho tới khi việc sắp xếp được hoàn thành. Ta hãy tưởng tượng các phần tử được đặt vào một cột. Trong sắp xếp kiểu nổi bọt các phần tử nhỏ hơn sẽ "nổi" lên trên vì chúng đổi chỗ với các phần tử lớn hơn. Các phần tử lớn hơn sẽ "chìm" xuống đáy. Điều này được minh họa trong ví dụ sau.

**Ví dụ 2.** Hãy sắp xếp 3, 2, 4, 1, 5 theo thứ tự tăng dần bằng cách dùng thuật toán nổi bọt.

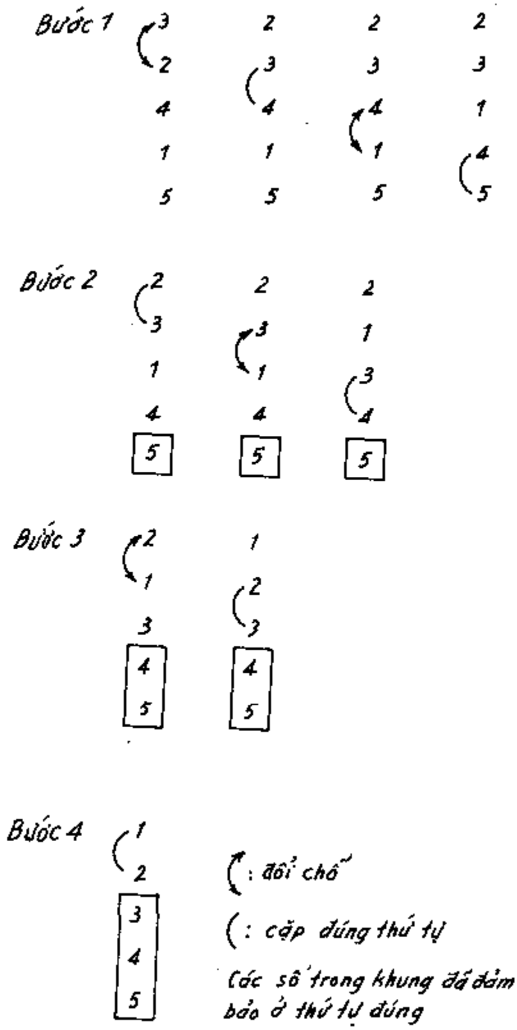
*Giải:* Trước tiên ta so sánh hai phần tử 3 và 2. Vì 3 > 2 nên đổi chỗ 3 với 2, ta được danh sách 2, 3, 4, 1, 5. vì 3 < 4 ta tiếp tục so sánh 4 với 1. Vì 4 > 1 nên đổi chỗ 4 với 1, ta nhận được danh sách 2, 3, 1, 4, 5. Vì 4 < 5 nên vòng duyệt thứ nhất được hoàn thành. Vòng này đảm bảo phần tử lớn nhất, 5, được đặt vào đúng vị trí của nó.

Vòng duyệt thứ hai bắt đầu bằng việc so sánh 2 và 3. Vì chúng ở đúng thứ tự cần sắp nên ta so sánh 3 và 1. Vì 3 > 1 nên đổi chỗ chúng cho nhau ta được danh sách 2, 1, 3, 4, 5. Vì 3 < 4 nên các số này đã ở đúng thứ tự. Không cần so sánh thêm vì 5 đã được đặt đúng vị trí.

Vòng thứ ba bắt đầu bằng việc so sánh 2 với 1. Cần phải đổi chỗ chúng cho nhau vì 2 > 1. kết quả ta được 1, 2, 3, 4, 5. Vì 2 < 3 nên hai phần tử này đã ở đúng thứ tự. Không cần so sánh tiếp vì các phần tử 4 và 5 đã ở đúng vị trí của chúng.

Vòng thứ tư chỉ cần một phép so sánh giữa 1 và 2. Vì 1 < 2 nên chúng đã ở đúng thứ tự. Thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt kết thúc.

Các bước của thuật toán này được biểu thị trên Hình 2. ■




***Hình 2.*** Các bước sắp xếp kiểu nổi bọt

Mô tả giả mã của cách sắp xếp kiểu nổi bọt được cho trong Thuật toán 1.

Bây giờ ta xem xét mức độ hiệu quả của sắp xếp kiểu nổi bọt. Vì trong vòng thứ $i$ cần phải thực hiện $(n - i)$ phép so sánh, nên tổng các phép so sánh trong sắp xếp kiểu nổi bọt là :

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1.$$

Dễ dàng thấy tổng này có giá trị bằng $n(n - 1)/2$. Do đó, sắp xếp kiểu nổi bọt dùng $n(n - 1)/2$ phép so sánh để sắp thứ tự một danh sách $n$

phần tử. (Ta nhận thấy rằng sắp xếp kiểu nổi bọt dùng quá nhiều phép so sánh vì nó tiếp tục cả khi danh sách đã được sắp hoàn toàn tại một bước trung gian nào đó). Vì thế thuật toán sắp xếp nổi bọt có độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất là $O(n^2)$. Vì với mọi số dương thực $c$, ta luôn có $n(n-1)/2 > cn\log n$, với $n$ đủ lớn, ta suy ra sắp xếp kiểu nổi bọt không có $O(n\log n)$ như là độ phức tạp thời gian trong trường hợp xấu nhất.

---

THUẬT TOÁN 1. SẮP XẾP NỔI BỌT.

**procedure** *bubblesort* $(a_1, a_2, ..., a_n)$

**for** $i := 1$ **to** $n - 1$

**begin**

    **for** $j := 1$ *to* $n - i$

        **if** $a_j > a_{j+1}$ **then** đổi chỗ $a_j$ và $a_{j+1}$

**end**

    $\{a_1, a_2, ..., a_n$ được sắp theo thứ tự tăng dần$\}$

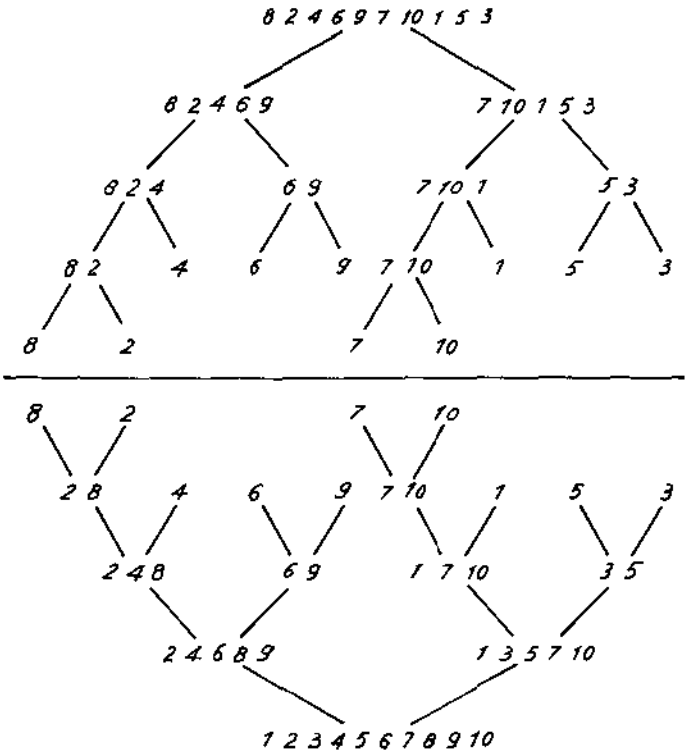
---

## SẮP XẾP KIỂU HOÀ NHẬP

Nhiều thuật toán sắp xếp có độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất đạt được giá trị tối ưu, tức là $O(n\log n)$ phép so sánh để sắp xếp $n$ phần tử. Chúng ta sẽ trình bày một trong những thuật toán này, đó là thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập. Trước tiên ta sẽ minh họa thuật toán này bằng một ví dụ.

**Ví dụ 3.** Chúng ta sẽ sắp xếp danh sách 8, 2, 4, 6, 9, 7, 10, 1, 5, 3 theo thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập. Theo thuật toán này trước tiên ta chia đôi liên tiếp danh sách đã cho thành hai danh sách con. Dãy các danh sách con ứng với ví dụ này được biểu diễn bằng cây nhị phân cân đối có chiều cao hằng 4 (Xem nửa trên của Hình 3).

Việc sắp xếp được tiến hành bằng cách hoà nhập lần lượt các cặp danh sách. Ở bước đầu tiên, hai phần tử được hòa vào một danh sách theo thứ tự tăng dần. Sau đó sẽ lần lượt hoà nhập các cặp danh sách cho tới khi toàn bộ danh sách được xếp đặt theo thứ tự tăng dần. Dãy các danh sách được hoà nhập theo thứ tự tăng dần được hiểu diễn bằng cây nhị phân cân đối chiều cao bằng 4 (Cây này được trình diễn lộn ngược ở nửa dưới của Hình 3).




*Hình 3.* Sắp xếp kiểu hoà nhập danh sách 8, 2, 4, 6, 9, 7, 10, 1, 5, 3.

Nói chung, sắp xếp kiểu hoà nhập được thực hiện bằng cách phân đôi liên tiếp các danh sách thành hai danh sách con có độ dài bằng nhau (hoặc hơn kém nhau một phần tử) cho tới khi mỗi danh sách con chỉ gồm một phần tử. Dãy danh sách con này có thể biểu diễn bằng cây nhị phân cân đối. Thủ tục tiếp tục bằng cách hoà nhập lần lượt các cặp danh sách đã có thứ tự tăng dần thành một danh sách lớn với các phần tử được sắp xếp theo thứ tự tăng dần cho tới khi toàn bộ danh sách ban đầu được sắp theo thứ tự tăng dần. Dãy danh sách hoà nhập được biểu diễn bằng cây nhị phân cân đối.

Chúng ta có thể mô tả bằng đệ quy thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập. Để sắp xếp theo kiểu hoà nhập, ta chia danh sách thành hai danh sách con có số phần tử bằng nhau hoặc gần bằng nhau, sắp xếp mỗi danh sách con bằng thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập và sau đó hoà nhập hai danh sách này lại. Chúng tôi để lại cho dọc giả hoàn thành phiên bản hồi quy của thủ tục sắp xếp kiểu hoà nhập.

Thuật toán có hiệu quả để hoà nhập hai danh sách có thứ tự thành một danh sách có thứ tự lớn hơn là rất cần cho thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập. Bây giờ ta sẽ mô tả thuật toán như vậy.

**Ví dụ 4.** Chúng ta sẽ mô tả cách hoà nhập danh sách có thứ tự 2, 3, 5, 6 và 1, 4. Bảng 1 minh họa các bước chúng ta sử dụng.

Trước tiên so sánh hai phần tử nhỏ nhất trong hai danh sách là 2 và 1. Vì 1 nhỏ hơn nên đặt nó vào đầu của danh sách hoà nhập và xóa nó khỏi danh sách thứ hai. Cuối giai đoạn này danh sách đầu là 2, 3, 5, 6 và danh sách thứ hai là 4 còn danh sách trộn là 1.

Tiếp theo so sánh 2 và 4, hai phần tử nhỏ nhất của hai danh sách. Vì 2 là nhỏ hơn nên gộp 2 vào danh sách hoà nhập và xóa nó khỏi danh sách thứ nhất. Cuối giai đoạn này danh sách đầu là 3, 5, 6 và danh sách thứ hai là 4 còn danh sách hoà nhập là 1, 2.

**BẢNG 1. Hoà nhập hai danh sách 2, 3, 5, 6 và 1, 4**

| Danh sách 1 | Danh sách 2 | Danh sách hoà nhập | So sánh |
|---|---|---|---|
| 2 3 5 6 | 1 4 | | 1 < 2 |
| 2 3 5 6 | 4 | 1 | 2 < 4 |
| 3 5 6 | 4 | 1 2 | 3 < 4 |
| 5 6 | 4 | 1 2 3 | 4 < 5 |
| 5 6 | | 1 2 3 4 | |
| | | 1 2 3 4 5 6 | |

Tiếp tục so sánh 3 và 4 là hai phần tử nhỏ nhất của hai danh sách. Vì 3 nhỏ hơn nên thêm 3 vào danh sách hoà nhập, rồi xóa nó khỏi danh sách 1. Cuối giai đoạn này danh sách đầu là 5, 6 và danh sách thứ hai là 4 còn danh sách hòa nhập là 1, 2, 3.

Bây giờ tiếp tục so sánh 4 và 5 là hai phần tử nhỏ nhất của hai danh sách. Vì 4 là nhỏ hơn nên thêm 4 vào danh sách hoà nhập, rồi xóa nó khỏi danh sách 2. Cuối giai đoạn này danh sách đầu là 5, 6, danh sách thứ hai rỗng còn danh sách hoà nhập là 1, 2, 3, 4.

Cuối cùng vì danh sách thứ hai rỗng nên tất cả các phần tử của danh sách 1 được nối vào cuối của danh sách hoà nhập theo thứ tự mà chúng có ở danh sách 1. Kết quả chúng ta nhận được danh sách được sắp theo thứ tự tăng dần 1, 2, 3, 4, 5, 6.

■

Bây giờ chúng ta nghiên cứu bài toán tổng quát về việc hoà nhập hai danh sách có thứ tự $L_1$ và $L_2$ vào một danh sách có thứ tự $L$. Thủ tục hoà nhập như sau. $L$ được khởi tạo là một danh sách rỗng. So sánh hai phần tử nhỏ nhất của hai danh sách. Đặt phần tử nhỏ hơn trong hai phần tử này vào cuối danh sách $L$, và xóa nó khỏi danh sách mà nó đã có mặt. Tiếp theo, nếu một trong hai danh sách $L_1$ và $L_2$ là rỗng thì nối danh sách kia (danh sách không rỗng) vào cuối $L$. Thủ tục hoà nhập kết thúc. Nếu cả $L_1$ và $L_2$ đều không rỗng thì lặp lại quá trình trên. Dạng giả mã của thủ tục này được cho trong Thuật toán 2.

Bây giờ chúng ta sẽ đánh giá số phép so sánh cần dùng trong thủ tục hoà nhập hai danh sách có thứ tự, một thủ tục cơ bản của thuật toán sắp xếp hoà nhập. Mỗi lần có một phép so sánh một phần tử của $L_1$ với một phần tử của $L_2$ và ghi một phần tử vào danh sách hoà nhập $L$. Tuy nhiên khi $L_1$ hoặc $L_2$ là rỗng thì không cần phải so sánh nữa. Vì thế Thuật toán có 2 hiệu lực kém nhất khi có $m + n - 2$ phép so sánh được thực hiện, trong đó $m$ và $n$ tương ứng là số các phần tử của $L_1$ và $L_2$, mà mỗi danh sách vẫn còn một phần tử. Ta cần phải làm một so sánh nữa thì sẽ có một danh sách rỗng. Vì thế Thuật toán 2 dùng không quá $m + n - 1$ phép so sánh. Tất cả những điều vừa nói trên là nội dung của bổ đề sau.

**BỔ ĐỀ 1.** Hai danh sách được sắp với $m$ và $n$ phần tử có thể được hoà nhập vào một danh sách được sắp khi dùng không quá $m + n - 1$ phép so sánh.

Đôi khi hai danh sách được sắp với độ dài $m$ và $n$ có thể được hoà nhập với nhau mà chỉ cần số phép so sánh ít hơn $m + n$ rất nhiều. Chẳng hạn khi $m = 1$ thủ tục tìm kiếm nhị phân có thể dùng để đặt một phần tử của danh sách đầu vào danh sách thứ hai. Khi đó chỉ cần $\lceil \log n \rceil$ phép so sánh, nhỏ hơn nhiều so với $m + n - 1 = n$, với $m = 1$. Mặt khác, với một số giá trị của $m$ và $n$, Bổ đề 1 cho ta một giới hạn khả dĩ tốt nhất. Điều này có nghĩa là có những danh sách với những giá trị của $m$ và $n$ nào đó không thể sắp xếp theo kiểu hoà nhập với ít hơn $(m + n - 1)$ phép so sánh. (Xem Bài tập 7 ở cuối tiết này).

THUẬT TOÁN 2. HOÀ NHẬP HAI DANH SÁCH.

**procedure** *merge* ($L_1$, $L_2$ : danh sách)

$L$ : = danh sách rỗng.

**while** cả $L_1$ và $L$ đều không rỗng

**begin**

xóa phần tử nhỏ hơn trong hai phần tử đầu của $L_1$ va $L_2$ khỏi danh sách chứa nó, và đặt nó vào cuối của danh sách hoà nhập $L$.

**if** việc xóa một phần tử làm cho một danh sách trở thành rỗng

**then** xóa tất cả các phần tử khỏi danh sách kia, và nối chúng vào cuối $L$.

**end**

{$L$ là danh sách hoà nhập với các phần tử được sắp theo thứ tăng dần}

Bây giờ chúng ta có thể phân tích độ phức tạp của thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập. Thay cho việc nghiên cứu bài toán tổng quát chúng ta giả sử số phần tử của danh sách là lũy thừa của 2, tức là $n = 2^m$. Điều đó làm cho việc phân tích bớt cồng kềnh hơn, nhưng khi $n \neq 2^m$, dùng những thay đổi khác nhau cũng sẽ cho một đánh giá như thế.

Đầu tiên ta chia danh sách làm hai danh sách con ở mức 1 của cây nhị phân, mỗi danh sách có $2^{m-1}$ phần tử. Tiếp tục chia hai danh sách con này thành bốn danh sách con ở mức 2, mỗi danh sách có $2^{m-2}$ phần tử, cứ như thế ta lại phân đôi tiếp. Nói chung , sẽ có $2^{k-1}$ danh sách ở mức $k - 1$, mỗi danh sách có $2^{m-k+1}$ phần tử. Các danh sách ở mức $k - 1$ được phân chia thành $2^k$ danh sách ở mức $k$, mỗi danh sách có $2^{m-k}$ phần tử. Kết thúc quá trình phân chia, ở mức $m$ ta có $2^m$ danh sách, mỗi danh sách có đúng một phần tử.

Chúng ta bắt đầu hoà nhập mỗi cặp của $2^m$ danh sách có 1 phần tử thành $2^{m-1}$ danh sách ở mức $(m - 1)$ mỗi danh sách có 2 phần tử. Việc hoà nhập mỗi cặp cần đúng 1 phép so sánh.

Thủ tục tiếp tục sao cho ở mức $k$ ($k = m, m - 1, m - 2, \ldots, 3, 2, 1$), $2^k$ danh sách, mỗi danh sách có $2^{m-k}$ phần tử, được hoà nhập thành $2^{k-1}$ danh sách mỗi danh sách có $2^{m-k+1}$ phần tử ở mức $k - 1$. Khi đó ta cần tất cả $2^{k-1}$ phép hoà nhập hai danh sách, mỗi danh sách có $2^{m-k}$ phần tử. Theo bổ đề 1 mỗi phép hoà nhập cần nhiều nhất $2^{m-k} + 2^{m-k} - 1 = 2^{m-k+1} - 1$ phép so sánh. Vì thế để chuyển từ mức $k$ xuống mức $k - 1$ cần $2^{k-1}(2^{m-k+1} - 1)$ phép so sánh. Lấy tổng tất cả các đánh giá này ta sẽ nhận được số các phép so sánh cần thiết cho thuật toán hoà nhập, nhiều nhất là

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} 2^{k-1}(2^{m-k+1} - 1) &= \sum_{k=1}^{m} 2^m - \sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} \\ &= m\, 2^m - (2^m - 1) \\ &= n\log n - n + 1.\end{aligned}$$

vì $m = \log n$ và $n = 2^m$.

Vậy thuật toán hoà nhập đạt được đánh giá big – *O* tốt hơn về số các phép so sánh cần thiết. Điều này được phát biểu bằng định lý sau.

**ĐỊNH LÝ 2.** Số các phép so sánh cần thiết trong thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập một danh sách $n$ phần tử là $O(n\log n)$.

Trong phần bài tập chúng ta sẽ mô tả thuật toán nữa, cũng rất có hiệu quả, đó là thuật toán sắp xếp nhanh (quick sort).

## *BÀI TẬP*

1. Dùng thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt hãy sắp xếp danh sách 3, 1, 5, 7, 4. Hãy chỉ rõ các danh sách nhận được ở mỗi bước.

2. Dùng thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt hãy sắp xếp danh sách *d, f, m, k, a, b*. Hãy chỉ rõ các danh sách nhận được ở mỗi bước.

3*. Hãy sửa lại thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt sao cho nó dừng khi không cần sự đổi chỗ nào nữa. Hãy chỉ ra rằng phiên bản này hiệu quả hơn phiên bản của thuật toán đã cho ở dạng giả mã.

4. Dùng thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập hãy sắp xếp danh sách 4, 3, 2, 5, 1, 8, 7, 6. Hãy chỉ rõ tất cả các bước được sử dụng trong thuật toán.

5. Dùng thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập hãy sắp xếp danh sách *b, d, a, f, g, h, z, p, o, k*. Hãy chỉ rõ tất cả các bước được sử dụng trong thuật toán.

6. Cần bao nhiêu phép so sánh để hoà nhập các danh sách sau đây bằng Thuật toán 2?

   a) 1, 3, 5, 7, 9 ; 2, 4, 6, 8, 10

   b) 1, 2, 3, 4, 5 ; 6, 7, 8, 9, 10

   c) 1, 5, 6, 7, 8 ; 2, 3, 4, 9 10

7. Chỉ ra rằng có những danh sách với $m$ và $n$ phần tử sao cho chúng không thể hoà nhập thành một danh sách được sắp bằng Thuật toán 2 với ít hơn $m + n - 1$ phép so sánh.

8*. Tính số các phép so sánh ít nhất cần thiết để hoà nhập hai danh sách bất kỳ đã có thứ tự tăng dần thành một danh sách cũng theo thứ tự tăng dần, nếu số phần tử của chúng là :

   a) 1, 4? b) 2, 4?

   c) 3, 4? d) 4, 4?

**Sắp xếp kiểu chọn lọc** *bắt đầu bằng việc tìm phần tử nhỏ nhất trong danh sách. Phần tử này được chuyển lên đầu danh sách. Sau đó ta lại tìm phần tử nhỏ nhất trong các phần tử còn lại rồi đặt nó ở vị trí thứ hai. Thủ tục này được lặp lại cho tới khi toàn bộ danh sách được sắp xếp.*

9. Sắp xếp danh sách sau đây bằng thuật toán sắp xếp kiểu chọn lọc :

   a) 3, 5, 4, 1, 2. b) 5, 4, 3, 2, 1.

   c) 1, 2, 3, 4, 5.

10. Hãy viết thuật toán sắp xếp kiểu chọn lọc ở dạng giả mã.

11. Cần bao nhiêu phép so sánh để sắp xếp $n$ phần tử bằng cách sắp xếp kiểu chọn lọc.

**Sắp xếp nhanh** *là một thuật toán có hiệu quả tốt. Để sắp xếp* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, *thuật toán này bắt đầu bằng việc lấy phần tử đầu tiên* $a_1$ *và tạo hai danh sách con, danh sách đầu chứa các phần tử nhỏ hơn* $a_1$ *theo thứ tự xuất hiện của chúng, danh sách thứ hai chứa các phần tử lớn hơn* $a_1$ *theo thứ tự xuất hiện của chúng. Khi đó* $a_1$ *được đặt ở cuối của danh sách đầu. Thủ tục này được lặp lại một cách đệ quy cho mỗi danh sách con cho tới khi mỗi danh sách chứa chỉ một phần tử theo thứ tự xuất hiện của chúng.*

12. Sắp xếp danh sách 3, 5, 7, 8, 1, 9, 2, 4, 6 bằng thuật toán sắp xếp nhanh.

**13.** Giả sử $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ là danh sách $n$ số thực phân biệt. Cần bao nhiêu phép so sánh để tạo ra hai danh sách con từ danh sách ban đầu sao cho danh sách con thứ nhất chứa các phần tử nhỏ hơn $a_1$, danh sách con thứ hai bao gồm các phần tử lớn hơn $a_1$?

**14.** Mô tả thuật toán sắp xếp nhanh dưới dạng giả mã.

**15.** Tính số lớn nhất các phép so sánh cần thiết để sắp xếp một danh sách có 4 phần tử bằng thuật toán sắp xếp nhanh.

**16.** Tìm số ít nhất các phép so sánh cần thiết để sắp xếp một danh sách có 4 phần tử bằng thuật toán sắp xếp nhanh.

**17.** Xác định độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất của thuật toán sắp xếp nhanh phụ thuộc vào số các phép so sánh được dùng.

**18*.** Hãy chỉ ra rằng $\log n!$ là lớn hơn $(n\log n)/4$ với $n > 4$. (*Gợi ý* :Bắt đầu hằng bất đẳng thức $n! > n(n-1)(n-2) \ldots \lceil n/2 \rceil$).

**19*.** Hãy viết thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập dưới dạng giả mã.

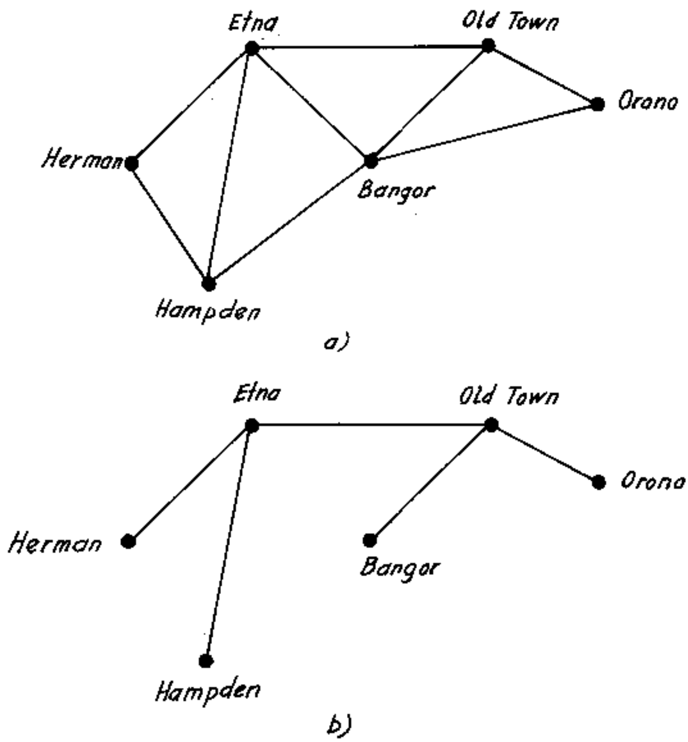
# 8.5. CÂY KHUNG

## MỞ ĐẦU

Hệ thống đường giao thông ở Maine được hiểu thị bằng đồ thị đơn trên Hình 1($a$). Cách duy nhất để những con đường có thể đi lại được vào mùa đông là phải cào tuyết thường xuyên. Chính quyền địa phương muốn cào tuyết một số ít nhất các con đường sao cho luôn luôn có đường thông suốt nối hai thành phố bất kỳ. Có thể làm điều đó bằng cách nào?

Cần phải cào tuyết ít nhất năm con đường mới đảm bảo có đường đi giữa hai thành phố bất kỳ. Hình 1(b) biểu thị một tập hợp các con đường như vậy. Ta nhận thấy đồ thị con biểu diễn các con đường này là một cây, vì nó liên thông và chứa sáu đỉnh, năm cạnh.

Bài toán trên được giải bằng một đồ thị con có một số tối thiểu các cạnh và chứa tất cả các đỉnh của đồ thị xuất phát. Đồ thị như thế phải là một cây.



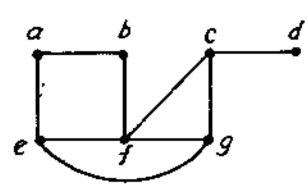

*Hình 1.* (a) Hệ thống đường và (b) Tập các con đường phải cào tuyết

**ĐỊNH NGHĨA 1**. Cho $G$ là một đơn đồ thị. Một cây được gọi là *cây khung* của $G$ nếu nó là một đồ thị con của $G$ và chứa tất cả các đỉnh của $G$.

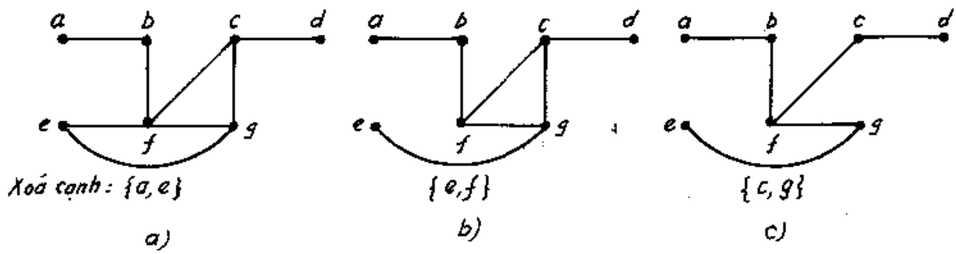
Một đơn đồ thị có cây khung sẽ là một đồ thị liên thông vì có đường đi trong cây khung giữa hai đỉnh bất kỳ. Điều ngược lại cũng đúng, tức là mọi đồ thị liên thông đều có cây khung. Chúng ta xét một ví dụ trước khi chứng minh kết quả này.

**Ví dụ 1.** Tìm cây khung của đồ thị $G$ trên Hình 2.

*Giải:* Đồ thị $G$ liên thông, nhưng không là một cây vì nó chứa chu trình đơn. Xóa cạnh $\{a, e\}$. Điều đó loại được một chu trình, đồ thị con nhận được vẫn còn liên thông và chứa tất cả các đỉnh của $G$. Tiếp theo, xóa cạnh $\{e, f\}$ sẽ loại được một chu trình nữa. Cuối cùng xóa cạnh $\{c, g\}$ sẽ sinh được một đơn đồ thị không có chu trình. Đồ thị này



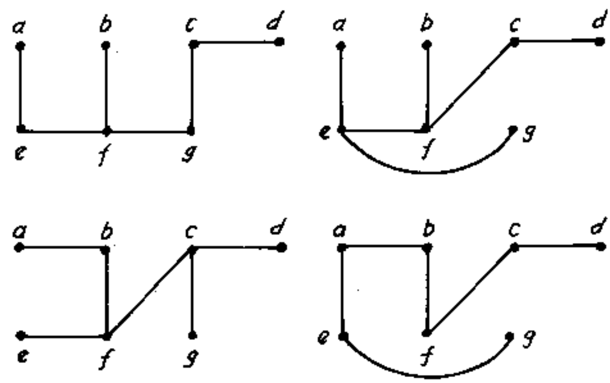

*Hình 2.* Đồ thị đơn $G$




***Hình** 3.* Tạo ra cây khung của $G$ bằng cách xóa các cạnh tạo ra chu trình đơn.

là cây khung vì nó là cây và chứa tất cả các đỉnh của $G$. Dãy các cạnh bị xóa đi khi tạo ra cây khung được minh họa trên Hình 3.

Cây trên Hình 3 không phải là cây khung duy nhất của $G$. Ví dụ, mỗi một trong bốn cây trên Hình 4 đều là cây khung của $G$.




***Hình** 4.* Các cây khung của $G$.

**ĐỊNH LÝ 1**. Một đơn đồ thị là liên thông nếu và chỉ nếu nó có cây khung.

*Chứng minh.* Trước tiên giả sử đồ thị $G$ có cây khung $T.T$ chứa tất cả các đỉnh của $G$. Hơn nữa có đường đi trong $T$ giữa hai đỉnh bất kỳ. Vì $T$ là đồ thị con của $G$ nên có đường đi trong $G$ giữa hai đỉnh bất kỳ của nó. Do đó, $G$ là liên thông.

Bây giờ chúng ta sử dụng $G$ là liên thông. Nếu $G$ không phải là một cây thì nó phải có chu trình đơn. Xóa đi một cạnh của một trong các chu trình đơn này. Đồ thị nhận được chứa một số cạnh ít hơn nhưng vẫn còn chứa tất cả các đỉnh của $G$ và vẫn liên thông. Nếu đồ thị con này không là cây thì nó còn chứa chu trình đơn. Cũng giống như trên, ta lại xóa đi một cạnh của chu trình đơn. Lặp lại quá trình này cho đến khi không còn chu trình đơn. Điều này là có thể vì chỉ có một số hữu hạn các cạnh trong đồ thị. Quá trình kết thúc khi không còn chu trình đơn trong đồ thị nhận được. Cây được tạo ra vì đồ thị vẫn còn liên thông khi xóa đi các cạnh. Cây này là cây khung vì nó chứa tất cả các đỉnh của $G$.

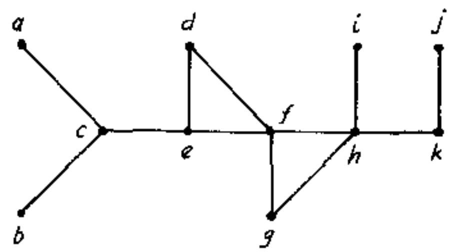
## NHỮNG THUẬT TOÁN XÂY DỰNG CÂY KHUNG

Cách chứng minh Định lý 1 cho ta một thuật toán tìm cây khung bằng cách xóa đi các cạnh khỏi các chu trình đơn. Thuật toán này là không hiệu quả vì nó đòi hỏi phải nhận biết được các chu trình đơn. Thay cho việc xây dựng cây khung bằng cách loại bỏ các cạnh, cây khung có thể được xây dựng bằng cách lần lượt ghép các cạnh. Chúng ta sẽ giới thiệu hai thuật toán dựa trên nguyên tắc này.

Chúng ta sẽ xây dựng cây khung của một đồ thị liên thông bằng phương pháp **tìm kiếm ưu tiên chiều sâu**. Chúng ta sẽ tạo một cây có gốc và cây khung sẽ là đồ thị vô hướng nền của cây có gốc này. Chọn tùy ý một đỉnh của đồ thị làm gốc. Xây dựng đường đi từ đỉnh này bằng cách lần lượt ghép các cạnh vào sao cho mỗi cạnh mới ghép sẽ nối đỉnh cuối cùng trên đường đi với một đỉnh còn chưa thuộc đường đi. Tiếp tục ghép thêm các cạnh vào đường đi chừng nào không thể thêm được nữa thì thôi. Nếu đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị thì cây do đường đi này tạo nên sẽ là cây khung. Nhưng nếu đường đi không đi qua tất cả các đỉnh thì cần thêm các cạnh khác vào đường đi. Lùi lại đỉnh trước đỉnh cuối cùng của đường đi, và nếu có thể, xây dựng đường đi mới xuất phát từ đỉnh này đi qua các đỉnh còn chưa thuộc đường đi. Nếu điều đó không thể làm được thì lùi thêm một đỉnh nữa trên đường đi, tức là lùi lại hai đỉnh trên đường đi và thử xây dựng đường đi mới. Lặp lại thủ tục này, bắt đầu từ đỉnh cuối cùng được viếng thăm lùi theo đường đi mỗi lần một đỉnh, xây dựng đường đi mới càng dài càng tốt cho tới khi nào không thể thêm được một cạnh nào nữa. Vì đồ thị có hữu hạn cạnh và là liên thông nên quá trình đó sẽ kết thúc và tạo được cây khung. Mỗi đỉnh mà tại đó đường đi kết thúc ở mỗi giai đoạn của thuật toán sẽ là lá trong cây có gốc. Mỗi đỉnh tại đó đường đi bắt đầu từ đó sẽ là một đỉnh trong. Độc giả cần nhận thấy bản chất đệ quy của thủ tục này. Cũng lưu ý là nếu các đỉnh của đồ thị là được sắp thì việc chọn các cạnh ở mỗi giai đoạn của thủ tục là hoàn toàn xác định khi chúng ta luôn chọn đỉnh đầu tiên của dãy sắp nếu có thể. Tuy nhiên, chúng ta thường không sắp xếp các đỉnh của đồ thị.

Tìm kiếm ưu tiên chiều sâu cũng được gọi là thủ tục **quay lui (hay lần ngược)**, vì nó quay lại đỉnh đã viếng thăm trước trên đường đi. Ví dụ sau đây minh họa thủ tục quay lui.

**Ví dụ 2.** Dùng thuật toán ưu tiên chiều sâu, tìm cây khung của đồ thị $G$ trên Hình 5.

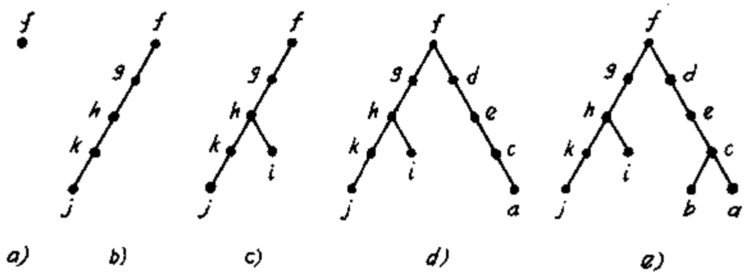



*Hình 5.* Đồ thị $G$

*Giải.* Các bước dùng trong thuật toán ưu tiên chiều sâu để xây dựng cây khung của $G$ được biểu thị trên Hình 6. Chúng ta xuất phát từ một đỉnh tùy ý chẳng hạn đỉnh $f$. Đường đi được xây dựng bằng cách lần lượt ghép, càng nhiều càng tốt, các cạnh liên thuộc với các đỉnh còn chưa thuộc đường đi. Điều đó tạo ra được đường đi $f$, $g$, $h$, $k$, $j$ (lưu ý là có thể đường đi khác được xây dựng). Lùi lại $k$. Không có đường đi bắt đầu từ $k$ chứa các đỉnh chưa được viếng thăm. Vì thế lùi tới $h$. Từ $h$ có đường đi $h$, $i$. Sau đó lùi về $h$ và tiếp tục lùi về $f$. Từ $f$ có đường đi $f$, $d$, $e$, $c$, $a$. Ta lại lùi về $c$ và xây dựng đường đi $c$, $b$. Thủ tục này đã xây dựng được cây khung.

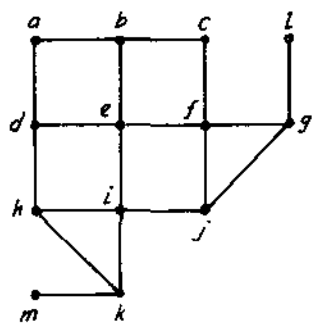
■

Chúng ta có thể xây dựng cây khung của một đơn đồ thị bằng thuật toán **tìm kiếm ưu tiên chiều rộng**. Một lần nữa, cây có gốc sẽ được xây dựng, và đồ thị vô hướng nền của cây có gốc sẽ tạo nên cây khung. Chọn một đỉnh bất kỳ của đồ thị làm gốc. Sau đó ghép vào tất cả các cạnh liên thuộc với đỉnh này. Các đỉnh mới ghép vào trong giai đoạn này trở thành các đỉnh ở mức 1 của cây khung. Sắp xếp chúng theo một thứ tự tùy ý. Tiếp theo, với mỗi đỉnh ở mức 1, được viếng thăm theo thứ tự vừa sắp ở trên, ta ghép tất cả các cạnh liên thuộc với nó vào cây mà không tạo ra chu trình. Sắp xếp các đỉnh con của mỗi đỉnh ở mức 1 theo một trật tự nào đó. Quá trình này tạo ra các đỉnh ở mức 2 của cây. Tiếp tục làm lại thủ tục này cho tới khi tất cả các đỉnh của đồ thị được ghép vào cây. Thủ tục này kết thúc vì chỉ có một số hữu hạn các cạnh của đồ thị. Cây khung được tạo ra vì xây dựng được cây chứa tất cả các đỉnh của đồ thị. Dưới đây là một ví dụ minh họa thuật toán tìm kiếm ưu tiên chiều rộng.



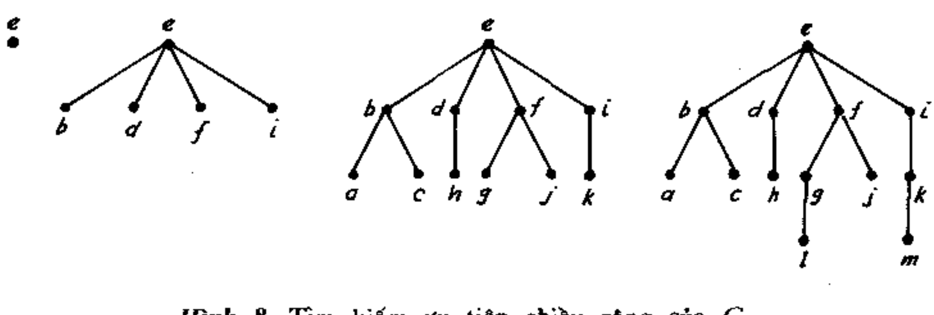

*Hình 6.* Tìm kiếm ưu tiên chiều sâu của $G$.

**Ví dụ 3.** Dùng thuật toán ưu tiên chiều rộng, tìm cây khung của đồ thị trên Hình 7.




*Hình 7.* Đồ thị $G$.

*Giải:* Các bước của thủ tục tìm kiếm ưu tiên chiều rộng được biểu diễn trên Hình 8. Ta chọn đỉnh $e$ làm gốc của cây. Sau đó ta thêm các cạnh liên thuộc và tất cả các đỉnh liền kề với $e$, tức là các cạnh từ $e$ tới $b$, $d$, $f$, và $i$ được ghép vào. Vậy ở mức 1 của cây có 4 đỉnh. Tiếp theo ghép các cạnh từ các đỉnh ở mức 1 nối với các đỉnh còn chưa ở trong cây. Vì thế các cạnh từ $b$ tới $a$ và $c$ được ghép vào, cũng như thế các cạnh từ $d$ tới $h$, từ $f$ tới $j$ và $g$, và từ $i$ tới $k$. Các đỉnh mới $a$, $c$, $h$, $g$, $j$, $k$ ở mức 2 của cây. Tiếp theo ghép các cạnh từ các đỉnh này nối với các đỉnh còn chưa thuộc vào cây. Tức là ghép thêm các cạnh từ $g$ tới $l$ và từ $k$ tới $m$.




*Hình 8.* Tìm kiếm ưu tiên chiều rộng của $G$.

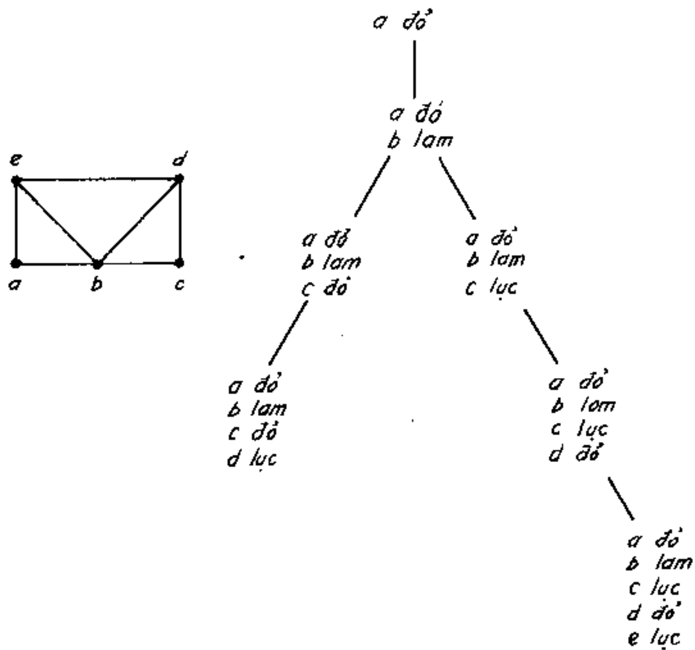
## KỸ THUẬT QUAY LUI

Có nhiều bài toán chỉ có thể giải được bằng cách nghiên cứu thấu đáo tất cả các lời giải có thể. Một phương pháp nghiên cứu một cách có hệ thống các lời giải là dùng cây quyết định, trong đó mỗi đỉnh trong biểu thị một quyết định, và mỗi lá biểu thị một lời giải có thể. Để tìm nghiệm bằng kỹ thuật quay lui, trước tiên ta tạo ra một dãy quyết định, càng dài càng tốt, để tiến tới lời giải. Dãy các quyết định có thể được biểu diễn bằng một đường đi trong cây quyết định. Mỗi khi biết được không thể có lời giải từ bất kỳ dãy quyết định tiếp theo nào đó, ta quay lui lại đỉnh cha của đỉnh hiện thời, hướng tới lời giải bằng dãy các quyết định khác, nếu có thể, Thủ tục tiếp tục cho tới khi tìm được lời giải hoặc là kết luận không có lời giải. Những ví dụ sau đây minh họa ích lợi của kỹ thuật quay lui.

**Ví dụ 4.** *Tô màu đồ thị*. Kỹ thuật quay lui có thể được sử dụng như thế nào để khẳng định xem một đồ thị có thể được tô bằng $n$ màu hay không ?

*Giải:* Ta có thể giải bài toán này bằng kỹ thuật quay lui như sau. Trước tiên ta chọn một đỉnh $a$ và gán cho nó màu 1. Sau đó chọn đỉnh $b$ và nếu $b$ không liền kề với $a$ thì gán cho nó màu 1. Còn không thì gán màu 2 cho $b$. Tiếp theo ta đi tới đỉnh $c$. Dùng màu 1 cho $c$ nếu có thể, còn không thì dùng màu 2 nếu có thể. Chỉ khi cả màu 1 và màu 2 đều không thể dùng được thì ta sẽ dùng màu 3. Tiếp tục quá trình này tới chừng nào còn có thể, để gán một trong n màu cho mỗi đỉnh mới lấy thêm, luôn dùng màu đầu tiên có thể dùng được trong danh sách. Nếu một đỉnh không thể tô bằng bất cứ màu nào trong $n$ màu thì lùi lại đỉnh vừa được gán màu, thay đổi màu tô bằng màu có thể tiếp theo trong danh sách. Nếu không thể thay đổi cách tô màu cho đỉnh này thì ta lại lùi tới đỉnh được tô màu trước đó, mỗi lần lùi một bước, cho tới khi còn có thể thay đổi cách tô màu cho một đỉnh. Nếu tồn tại cách tô bằng $n$ màu thì kỹ thuật quay lui sẽ sinh ra nó. (Tiếc thay thủ tục này lại cực kỳ không hiệu quả)

Đặc biệt, ta xem xét bài toán tô màu đồ thị trên Hình 9 bằng ba màu. Cây trên Hình 9 minh họa cách dùng kỹ thuật quay lui để tạo ra cách tô bằng ba màu. Theo thủ tục này màu đỏ được dùng đầu tiên, sau đó là màu lục cuối cùng là màu lam. Ví dụ đơn giản này tất nhiên là có thể giải mà không dùng thủ tục quay lui, nhưng nó là một minh họa tốt cho kỹ thuật này.



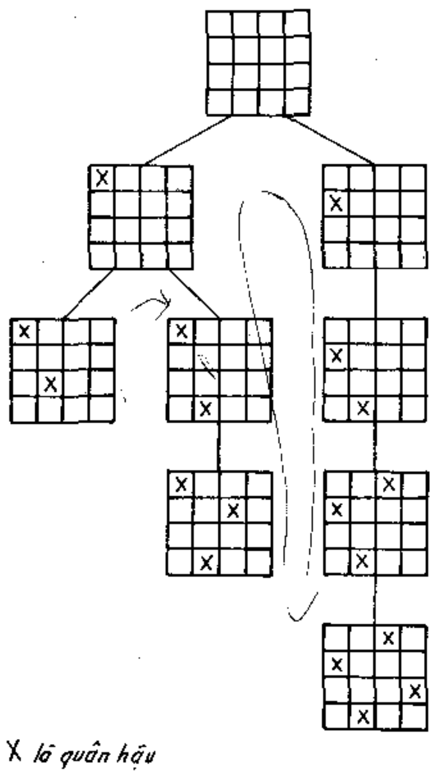

***Hình 9.*** Tô màu đồ thị bằng kỹ thuật lần ngược.

Trong cây này đường đi xuất phát từ gốc $a$ được gán màu đỏ, dẫn tới cách tô $a$ đỏ, $b$ lam, $c$ đỏ, $d$ lục. Không thể tô $e$ bằng bất kỳ màu nào trong ba màu này khi $a$, $b$, $c$ và $d$ đã được tô màu bằng cách đó. Vì thế ta quay lui lại cha của đỉnh biểu thị cách tô này, nhưng không có cách nào khác để tô $d$, ta lần lên mức trên nữa. Khi đó thay đổi cách tô đỉnh $c$ bằng màu lục. Chúng ta nhận được cách tô màu đồ thị bằng cách tô $d$ đỏ và $e$ lục.

**Ví dụ 5.** *Bài toán n quân hậu.* Hãy dặt $n$ quân hậu lên bàn cờ $n \times n$ sao cho không có hai quân nào tấn công lẫn nhau. Có thể dùng kỹ thuật quay lui để giải bài toán này như thế nào?

*Giải:* Để giải bài toán này ta phải tìm $n$ vị trí trên bàn cờ $n \times n$ sao cho không có hai trong các vị trí này trên cùng một hàng, cùng một cột hoặc trên cùng một đường chéo (đường chéo bao gồm tất cả các vị trí

$(i, j)$ trong đó $i + j = m$ với $m$ nào đó, hoặc $i - j = m$ với $m$ nào đó). Chúng ta sẽ dùng kỹ thuật quay lui để giải bài toán này. Xuất phát từ bàn cờ trống. Tại bước $k + 1$ ta thử đặt thêm một quân hậu vào cột $k + 1$ của bàn cờ, trong đó $k$ quân hậu đã được đặt vào $k$ cột đầu tiên. Trong các ô vuông ở cột $k + 1$ bắt đầu từ ô ở hàng 1, chúng ta tìm vị trí để đặt quân hậu này sao cho nó không nằm cùng hàng hoặc cùng đường chéo với các quân hậu đã có ở trên bàn cờ. (Ta đã biết chúng không thể nằm trên cùng cột). Nếu không thể tìm được vị trí để đặt quân hậu vào cột $k + 1$ thì ta trở lại cách đặt quân hậu ở cột $k$. Ta đặt nó vào vị trí có thể tiếp theo thuộc cột đó nếu một ô như vậy tồn tại. Nếu không tìm được một ô như thế ta tiếp tục quay lui lại cột trước nữa. Ví dụ, trên Hình 10 biểu diễn quá trình tìm nghiệm bằng kỹ thuật quay lui, trong trường hợp có 4 quân hậu. Trước tiên ta đặt một quân hậu vào hàng 1 cột 1. Sau đó đặt quân hậu thứ 2 vào cột 2 hàng 3. Khi đó không thể đặt quân hậu vào cột 3 được. Vì thế ta quay lại cột 2 và đặt lại quân hậu thứ 2 vào hàng 4 cột 2. Và do vậy có thể đặt quân hậu thứ 3 vào hàng 2 cột 3. Nhưng không thể tìm được chỗ cho quân hậu thứ 4. Điều này chứng tỏ không thể nhận được lời giải nào nếu đặt quân hậu thứ nhất ở hàng 1, cột 1. Quay lại bàn cờ trống, và đặt quân hậu ở hàng 2, cột 1. Tiếp tục quá trình ta tìm được lời giải như trên Hình 10.

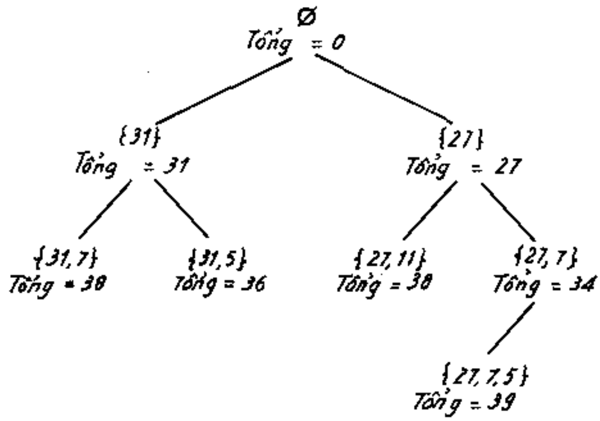



***Hình 10.*** Giải bài toán 4 quân hậu bằng kỹ thuật lần ngược.

■

**Ví dụ 6.** *Tổng các tập con.* Ta xét bài toán sau. Cho tập các số nguyên dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$, hãy tìm tập con của tập này sao cho tổng các phần tử của nó bằng $M$. Giải bài toán này bằng kỹ thuật quay lui.

*Giải:* Chúng ta xuất phát từ tập con chưa có số hạng nào. Tiếp tục xây dựng tập con này bằng cách lần lượt thêm các số hạng. Một số nguyên trong dãy đã cho được gộp vào tập con nếu tổng các phần tử của nó khi thêm phần tử này vào vẫn còn nhỏ hơn *M*. Nếu tổng đạt tới giá trị sao cho việc thêm bất kỳ phần tử nào nữa vào tập con ta đều nhận được tổng lớn hơn *M*, thì ta quay lui trở lại bằng cách trả lại phần tử cuối cùng vừa đặt vào tập con.




***Hình 11.*** Tìm tập con có tổng bằng 39 nhờ kỹ thuật lần ngược.

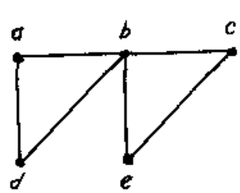
Hình 11 biểu thị kỹ thuật quay lui tìm tập con của dãy {31, 27, 15, 11, 7, 5} có tổng bằng 39.

## BÀI TẬP

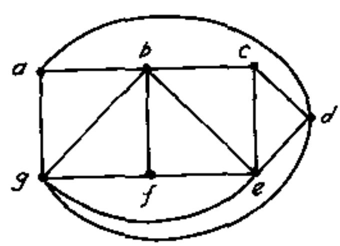
1. Cần phải xóa đi bao nhiêu cạnh khỏi đồ thị liên thông với *n* đỉnh và *m* cạnh để nhận được một cây khung?

*Trong các Bài tập 2–6 hãy tìm cây khung của đồ thị đã cho bằng cách xóa đi các cạnh trong các chu trình đơn.*

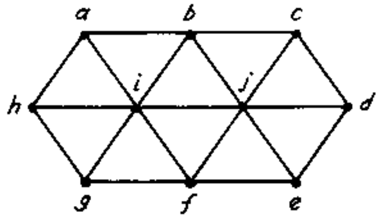
**2.**



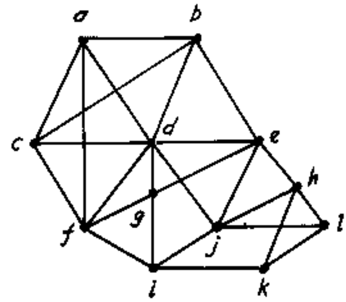

**3.**



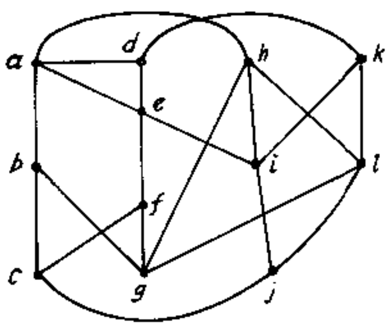
**4.**




**5.**




**6.**



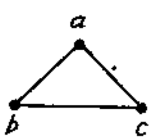

**7**. Hãy tìm cây khung cho mỗi đồ thị sau.

a) $K_5$ b) $K_{4,4}$ c) $K_{1,6}$

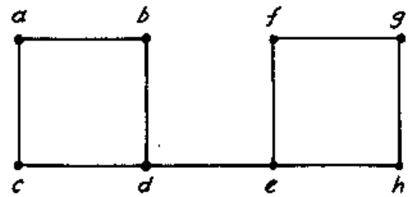
d) $Q_3$ e) $C_5$ f) $W_5$

*Trong các Bài tập 8–10 hãy vẽ tất cả các cây khung của đồ thị đơn tương ứng.*

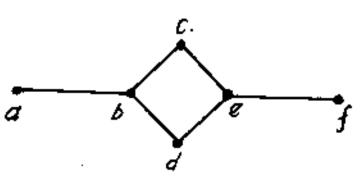
**8.**




**9.**




**10.**



**11***. Mỗi đồ thị sau có bao nhiêu cây khung khác nhau?

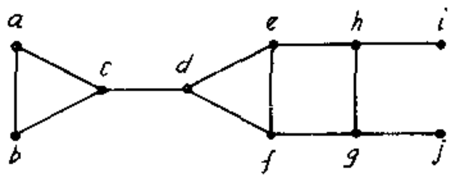
a) $K_3$ b) $K_4$ c) $K_{2,2}$ d) $C_5$

**12***. Mỗi đồ thị sau có bao nhiêu cây khung không đẳng cấu?

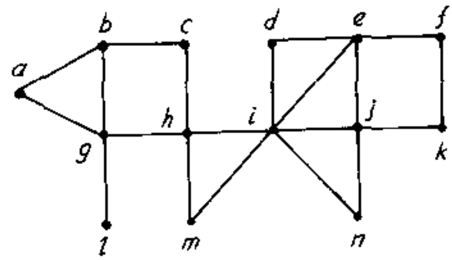
a) $K_3$ b) $K_4$ c) $K_5$

*Trong các Bài tập* 13–15 *dùng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu hãy xác định cây khung cho các đồ thị đơn đã cho. Chọn a làm gốc của cây, và giả sử rằng các đỉnh được sắp theo thứ tự từ điển.*

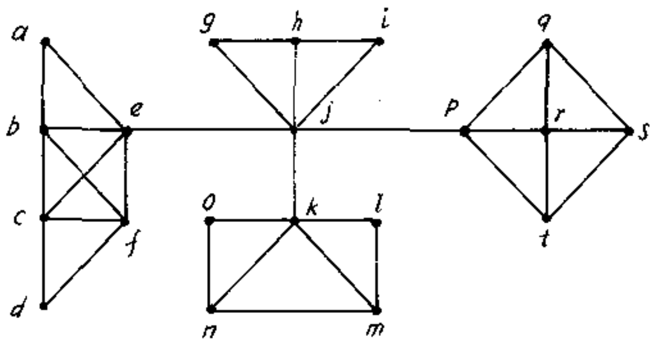
**13.**




**14.**

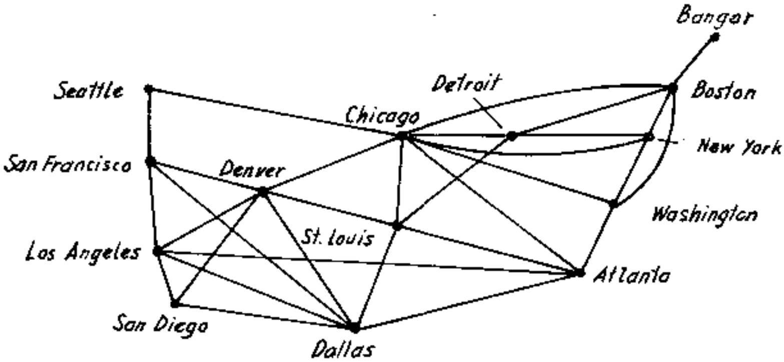



**15.**




**16**. Dùng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều rộng hãy tạo cây khung cho các đồ thị đơn đã cho trong các Bài tập 13–15. Chọn $a$ làm gốc của cây.

**17**. Giả sử rằng hãng hàng không cần giảm bớt lịch bay để tiết kiệm tiền. Nếu ban đầu các đường bay được minh họa trên hình vẽ dưới đây. Có thể hủy bỏ các chuyến bay nào mà vẫn giữ được giao thông giữa hai thành phố bất kỳ. (Nếu cần có thể tổ hợp các chuyến bay từ thành phố này đến thành phố khác)?




**18**. Khi nào một cạnh của đơn đồ thị liên thông cần phải có trong mọi cây khung của đồ thị này?

**19**. Đơn đồ thị liên thông nào có đúng một cây khung?

**20**. Hãy giải thích cách dùng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu và tìm kiếm ưu tiên chiều rộng để sắp xếp các đỉnh của một đồ thị liên thông.

**21***. Hãy viết thủ tục tìm kiếm ưu tiên chiều sâu dưới dạng giả mã.

**22***. Hãy viết thủ tục tìm kiếm ưu tiên chiều rộng dưới dạng giả mã.

**23***. Hãy chứng minh rằng độ dài của đường đi ngắn nhất giữa các đỉnh $v$ và $u$ trong một đơn đồ thị liên thông bằng số mức của $u$ trong cây khung ưu tiên chiều rộng của $G$ với gốc $v$.

**24**. Dùng kỹ thuật quay lui, hãy tìm cách tô mỗi một trong các đồ thị trong các Bài tập 5–7 của Tiết 7.8 bằng ba màu.

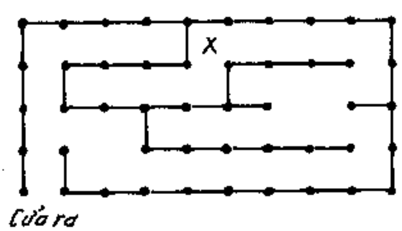
**25**. Dùng kỹ thuật quay lui để giải bài toán $n$ quân hậu với các giá trị sau của $n$ :

a) $n = 3$ b) $n = 5$ c) $n = 6$.

**26**. Dùng kỹ thuật quay lui tìm tập con, nếu nó tồn tại, của tập $\{27, 24, 19, 14, 11, 8\}$ có tổng bằng :

a) 20 b) 41 c) 60

**27**. Hãy giải thích cách dùng kỹ thuật quay lui để tìm đường đi hoặc chu trình Hamilton trong một đồ thị.




**28**. a) Hãy giải thích cách dùng kỹ thuật quay lui để tìm đường ra khỏi mê cung, nếu cho biết vị trí xuất phát và vị trí cửa ra. Coi mê cung được chia thành các vị trí, trong đó tại mỗi vị trí tập các chuyển động có thể là {lên, xuống, phải, trái}.

b) Hãy tìm đường đi từ vị trí xuất phát được đánh dấu bằng $X$ tới cửa ra (exit) trong mê cung ở hình bên.

**Rừng khung** *của đồ thị* G *là rừng chứa mọi đỉnh của* G *sao cho hai đỉnh thuộc cùng một cây của rừng nếu giữa chúng có một đường đi trong G.*

**29.** Chứng minh rằng mọi đơn đồ thị hữu hạn đều có rừng khung.

**30.** Trong rừng khung của một đồ thị có bao nhiêu cây?

**31.** Cần phải bỏ đi bao nhiêu cạnh để tạo ra rừng khung của một đồ thị có $n$ đỉnh $m$ cạnh và $c$ thành phần liên thông?

**32.** Hãy đề xuất một thuật toán xây dựng rừng khung của một đồ thị bằng cách xóa các cạnh tạo thành các chu trình đơn.

**33.** Hãy đề xuất một thuật toán xây dựng rừng khung của một đồ thị bằng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu.

**34.** Hãy đề xuất một thuật toán xây dựng rừng khung của một đồ thị bằng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều rộng.

*Gọi $T_1$ và $T_2$ là hai cây khung của một đồ thị.* **Khoảng cách** *giữa $T_1$ và $T_2$ được định nghĩa là số các cạnh trong $T_1$ và $T_2$ mà không là cạnh chung của chúng.*

**35.** Hãy tìm khoảng cách giữa mỗi cặp cây khung trên Hình 3 và Hình 4 của đồ thị $G$.

**36*.** Giả sử $T_1$, $T_2$ và $T_3$ là các cây khung của đơn đồ thị $G$. Chứng minh rằng khoảng cách giữa $T_1$ và $T_3$ không vượt quá tổng khoảng cách giữa $T_1$ và $T_2$ và khoảng cách giữa $T_2$ và $T_3$.

**37**.** Giả sử rằng $T_1$ và $T_2$ là cây khung của đơn đồ thị $G$, còn $e_1$ là một cạnh trong $T_1$ mà không là một cạnh trong $T_2$. Chứng minh rằng trong $T_2$ có cạnh $e_2$ không thuộc $T_1$ sao cho $T_1$ vẫn còn là một cây nếu xóa $e_1$ khỏi nó và thêm $e_2$ vào nó, và $T_2$ vẫn còn là một cây nếu xóa $e_2$ khỏi nó và thêm $e_1$ vào nó.

**38*.** Chỉ ra rằng có thể tìm được một dãy cây khung sao cho từ một cây khung bất kỳ này chuyển sang cây khung khác bằng cách lần lượt xóa một cạnh và ghép vào một cạnh khác.

**Cây khung có gốc** *của một đồ thị có hướng được định nghĩa là cây có gốc chứa các cạnh của đồ thị sao cho mọi đỉnh của đồ thị đều là một điểm đầu mút của một trong các cạnh của cây.*

**39.** Trong mỗi một đồ thị có hướng của các Bài tập 24–28 của Tiết 7.5 hoặc là tìm cây khung có gốc của các đồ thị đó hoặc chứng tỏ rằng không tồn tại cây như thế.

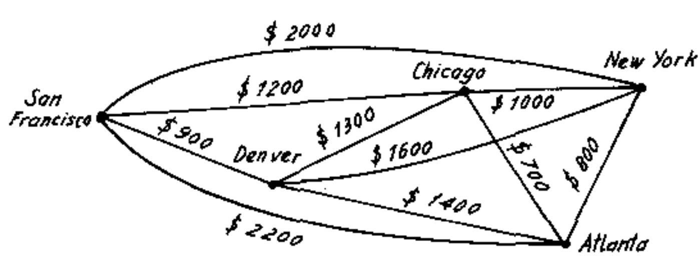
**40*.** Chỉ ra rằng đồ thị có hướng liên thông trong đó mỗi đỉnh có bậc–ra và bậc–vào như nhau, sẽ có cây khung có gốc.
(*Gợi ý* : Dùng chu trình Euler).

**41*.** Hãy đề xuất một thuật toán xây dựng cây khung có gốc của một đồ thị có hướng liên thông trong đó mỗi đỉnh có bậc ra và bậc vào bằng nhau.

# 8.6. CÂY KHUNG NHỎ NHẤT

## MỞ ĐẦU

Một công ty lập kế hoạch xây dựng một mạng truyền thông nối năm trung tâm máy tính với nhau. Bất kỳ hai trung tâm nào cũng có thể được nối kết với nhau bằng đường điện thoại. Cần phải kết nối như thế nào để đảm bảo giữa hai trung tâm máy tính bất kỳ luôn có đường truyền thông




*Hình 1.* Đồ thị có trọng số biểu thị tiền thuê bao hàng tháng đường truyền thông trong mạng máy tính.

sao cho tổng số tiền thuê bao của toàn mạng là tối thiểu? Chúng ta cần mô hình bài toán này bằng đồ thị có trọng số như trên Hình 1, trong đó mỗi đỉnh là một trung tâm máy tính, mỗi cạnh là một đường truyền thông được thuê bao, còn trọng số của mỗi cạnh là tiền thuê bao hàng tháng của đường truyền thông được biểu thị bằng cạnh đó. Chúng ta có thể giải bài toán này bằng cách tìm cây khung sao cho tổng các trọng số của các cạnh của cây đạt cực tiểu. Cây khung như thế được gọi là **cây khung nhỏ nhất.**

## THUẬT TOÁN TÌM CÂY KHUNG NHỎ NHẤT

Một lớp rất rộng các bài toán có thể giải bằng cách tìm cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị có trọng số sao cho tổng trọng số của các cạnh của cây là nhỏ nhất.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Cây khung nhỏ nhất* trong một đồ thị liên thông, có trọng số là một cây khung có tổng trọng số trên các cạnh của nó là nhỏ nhất.

Chúng ta sẽ giới thiệu hai thuật toán xây dựng cây khung nhỏ nhất. Cả hai đều được tiến hành bằng cách ghép các cạnh có trọng số nhỏ nhất trong số các cạnh có một tính chất nào đó mà chưa được dùng. Những thuật toán này là những ví dụ về các **thuật toán tham lam**. Thuật toán tham lam là một thủ tục thực hiện một lựa chọn tối ưu ở mỗi giai đoạn. Tối ưu hóa ở mỗi giai đoạn của thuật toán không đảm bảo tạo ra lời giải tối ưu toàn cục. Nhưng hai thuật toán giới thiệu trong mục này để xây dựng cây khung nhỏ nhất là các thuật toán tham lam tạo ra các lời giải tối ưu.

Thuật toán đầu tiên mà chúng ta sẽ thảo luận bây giờ là do Robert Prim đưa ra vào năm 1957, mặc dù ý tưởng cơ bản của nó đã có từ sớm hơn rất nhiều. Để thực hiện **thuật toán Prim**, ta bắt đầu bằng việc chọn một cạnh bất kỳ có trọng số nhỏ nhất, đặt nó vào cây khung. Lần lượt ghép vào cây các cạnh có trọng số tối thiểu liên thuộc với một đỉnh của cây và không tạo ra chu trình trong cây. Thuật toán sẽ dừng khi $n - 1$ cạnh đã được ghép vào cây.

Cuối mục này, chúng ta chứng minh rằng thuật toán này tạo ra cây khung nhỏ nhất cho đồ thị liên thông có trọng số. Thuật toán 1 mô tả thuật toán Prim ở dạng giả mã.

Lưu ý rằng việc chọn một cạnh ghép vào cây trong mỗi giai đoạn của thuật toán là không xác định khi có nhiều hơn một cạnh cùng trọng số và thỏa mãn những tiêu chuẩn nào đó. Chúng ta cần sắp xếp các cạnh theo một thứ tự nào đó để việc chọn một cạnh được xác định. Khi đó chúng ta sẽ không phải lo lắng gì về điều này. Cũng vậy cần lưu ý là có nhiều hơn một cây khung nhỏ nhất ứng với một đồ thị liên thông và có trọng số. (Xem Bài tập 9). Ví dụ sau minh họa cách dùng thuật toán Prim.

---

THUẬT TOÁN 1. THUẬT TOÁN PRIM.

**procedure** *Prim* (*G* : đồ thị liên thông có trọng số với *n* đỉnh)

*T* : = cạnh có trọng số nhỏ nhất.

**for** *i* := 1 **to** *n* − 2

**begin**

e : = cạnh có trọng số tối thiểu liên thuộc với một đỉnh trong *T* và không tạo ra chu trình trong *T* nếu ghép nó vào *T*

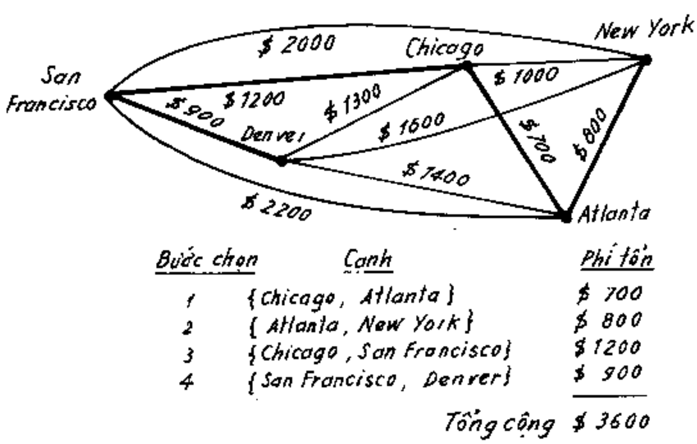
*T* : = *T* với e được ghép vào.

**end** {*T* là cây khung nhỏ nhất của *G*}

---

**Ví dụ 1.** Dùng thuật toán Prim để thiết kế một mạng truyền thông có giá tối thiểu để nối các trung tâm máy tính được biểu diễn trên Hình 1.

*Giải:* Chúng ta sẽ giải bài toán này bằng cách tìm cây khung nhỏ nhất trong đồ thị trên Hình 1. Thuật toán Prim được tiến hành bằng cách chọn cạnh đầu tiên là cạnh có trọng số nhỏ nhất và lần lượt ghép thêm một cạnh có trọng số nhỏ nhất trong số những cạnh nối với một đỉnh của cây và không tạo thành một chu trình. Các cạnh được

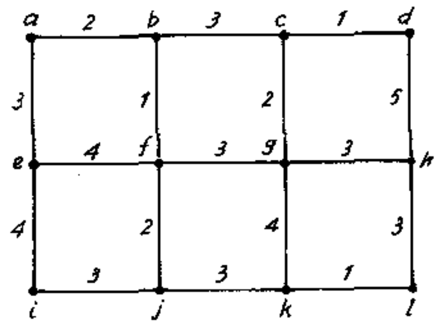



***Hình 2*** Cây khung nhỏ nhất đối với đồ thị có trọng số ở hình 1

tô đậm trên Hình 2 là cây khung nhỏ nhất nhận được bằng thuật toán Prim, từng bước chọn cạnh của cây cũng được biểu diễn trên hình đó. ■

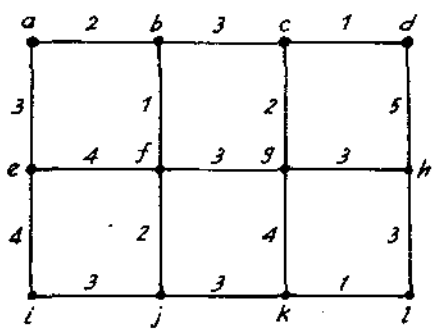
**Ví dụ 2.** Dùng thuật toán Prim, hãy tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị trên Hình 3.

*Giải:* Cây khung nhỏ nhất được xây dựng bằng thuật toán Prim được thể hiện trên Hình 4. Thứ tự chọn các cạnh cũng được biểu diễn trong bảng bên cạnh.




*Hình 3.* Đồ thị có trọng số.

Thuật toán thứ hai mà chúng ta sẽ thảo luận do Joseph Kruskal phát minh vào năm 1956, mặc dù ý tưởng cơ bản của nó đã được biết từ sớm hơn nhiều. Để thực hiện **thuật toán Kruskal** ta chọn cạnh có trọng số nhỏ nhất của đồ thị. Lần lượt ghép thêm vào cạnh có trọng số tối thiểu, và không tạo thành chu trình với các cạnh đã được chọn. Thuật toán dừng sau khi $n - 1$ cạnh đã được chọn.




a)

| *Bước chọn* | *Cạnh* | *Trọng số* |
|---|---|---|
| 1 | *b, f* | 1 |
| 2 | *a, b* | 2 |
| 3 | *f, j* | 2 |
| 4 | *a, e* | 3 |
| 5 | *i, j* | 3 |
| 6 | *f, g* | 3 |
| 7 | *c, g* | 2 |
| 8 | *c, d* | 1 |
| 9 | *g, h* | 3 |
| 10 | *h, l* | 3 |
| 11 | *k. l* | 1 |
| | Tổng cộng | 24 |

b)

***Hình 4.*** Cây khung nhỏ nhất nhận được bằng thuật toán Prim.

Trong một bài tập ở cuối Tiết này chúng tôi yêu cầu độc giả chứng minh rằng thuật toán Kruskal sẽ tạo ra cây khung nhỏ nhất cho một đồ thị liên thông, có trọng số. Dạng giả mã của thuật toán này được cho trong Thuật toán 2.

THUẬT TOÁN 2. THUẬT TOÁN KRUSKAL.

**procedure** *Kruskal* (*G* : đồ thị *n* đỉnh. liên thông có trọng số)

*T* : = đồ thị rỗng

**for** *i* := 1 **to** *n* − 1

**begin**

e : = một cạnh bất kỳ của *G* với trọng số nhỏ nhất và không tạo ra chu trình trong *T*, khi ghép nó vào *T*.

*T* : = *T* với cạnh *e* đã được ghép thêm vào.

**end** { *T* là cây khung nhỏ nhất}

Độc giả sẽ nhận thấy sự khác nhau giữa thuật toán Prim và thuật toán Kruskal. Trong thuật toán Prim ta chọn các cạnh có trọng số tối thiểu, liên thuộc với các đỉnh đã thuộc cây và không tạo ra chu trình. Trong khi đó theo thuật toán Kruskal sẽ là chọn các cạnh có trọng số tối thiểu mà không nhất thiết phải liên thuộc với các đỉnh của cây và không tạo ra chu trình. Chú ý rằng cũng như trong thuật toán Prim nếu các cạnh là không được sắp thứ tự có thể có nhiều cách chọn trong mỗi bước của thuật toán này. Do đó để cho thủ tục xác định cần sắp xếp các cạnh theo một trật tự nào đó. Ví dụ sau đây sẽ minh họa cách dùng thuật toán Kruskl.

**Ví dụ 3**. Dùng thuật toán Kruskal, hãy tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị trên Hình 3.

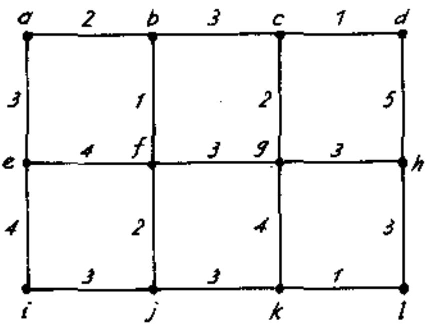
***Giải:*** Cây khung nhỏ nhất và cách chọn các cạnh trong mỗi bước của thuật toán Kruskal được thể hiện trên Hình 5.

■

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh rằng thuật toán Prim tạo ra cây khung nhỏ nhất của đồ thị liên thông có trọng số.

***Chứng minh:*** Gọi $G$ là một đồ thị liên thông có trọng số. Giả sử các cạnh lần lượt được chọn theo thuật toán Prim là $e_1$, $e_2$, ..., $e_{n-1}$. Gọi $S$ là cây với $e_1$, $e_2$, ..., $e_{n-1}$ là các cạnh của nó, và $S_k$ là cây với các cạnh $e_1$, $e_2$, ..., $e_k$. Gọi $T$ là cây khung nhỏ nhất của $G$ có chứa các cạnh $e_1$, $e_2$, ..., $e_k$, trong đó $k$ là số nguyên lớn nhất sao cho tồn tại cây khung nhỏ nhất có chứa $k$ cạnh đầu tiên được chọn bằng thuật toán Prim. (*Chú ý* : Vì $T$ là cây khung của $G$ nên có n đỉnh. Do đó theo Định lý 2 ở Tiết 8.1

$T$ có $n$–1 cạnh – ND). Định lý được chứng minh nếu ta chỉ ra được $S = T$.




a)

b)

| Bước chọn | Cạnh | Trọng số |
|---|---|---|
| 1 | c, d | 1 |
| 2 | k, l | 1 |
| 3 | b, f | 1 |
| 4 | c, g | 2 |
| 5 | a, b | 2 |
| 6 | f, j | 2 |
| 7 | b, c | 3 |
| 8 | j, k | 3 |
| 9 | g, h | 3 |
| 10 | i, j | 3 |
| 11 | a, e | 3 |
| | Tổng cộng | 24 |

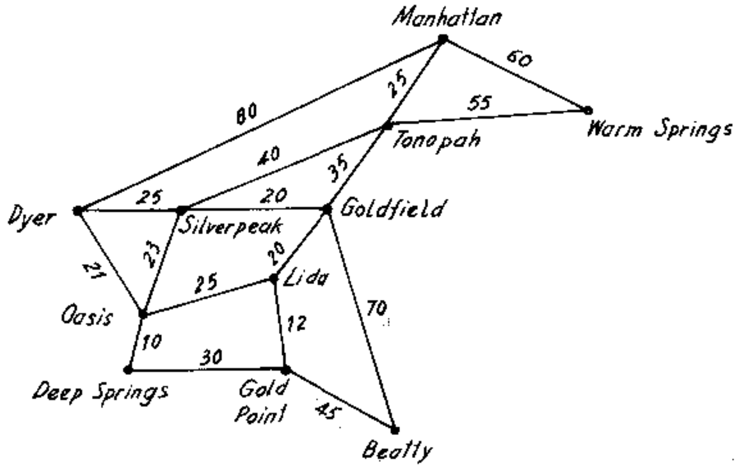
***Hình** 5.* Cây khung nhỏ nhất nhận được bằng thuật toán Kruskal.

Giả sử $S \neq T$, với $k < n - 1$. Do đó, $T$ chứa $e_1, e_2, ..., e_k$ nhưng không chứa $e_{k+1}$. Xét đồ thị tạo bởi $T$ cùng với $e_{k+1}$. Vì đồ thị này liên thông và có $n$ cạnh, quá nhiều cạnh để là một cây, vậy tồn tại một chu trình đơn. Chu trình này phải chứa cạnh $e_{k+1}$ vì trong cây $T$ không có chu trình. Hơn nữa trong chu trình đơn này phải có một cạnh không thuộc $S_{k+1}$ vì $S_{k+1}$ là cây. Xuất phát từ điểm đầu mút của cạnh $e_{k+1}$ và cũng là điểm đầu mút của một trong các cạnh $e_1, e_2, ... e_k$, đi dọc theo chu trình cho tới khi gặp một cạnh không thuộc $S_{k+1}$. Bằng cách đó chúng ta có thể tìm được cạnh $e$ không thuộc $S_{k+1}$ và có một đầu mút là đầu mút của một trong các cạnh $e_1, e_2, ... e_k$. Xóa $e$ khỏi $T$ và thêm vào $e_{k+1}$ chúng ta nhận được cây $T'$ có $n - 1$ cạnh (nó là cây vì nó không có chu trình). Chú ý là $T'$ chứa các cạnh $e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}$. Hơn nữa ta thấy vì $e_{k+1}$ được chọn bằng thuật toán Prim ở bước $k + 1$ và $e$ cũng có thể được chọn tại bước này nên trọng số của $e_{k+1}$ là nhỏ hơn hay bằng trọng số của $e$. Vì thế ta suy ra rằng $T'$ cũng là cây khung nhỏ nhất vì tổng trọng số các cạnh của nó không vượt quá tổng trọng số của các cạnh của $T$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn $k$ như là số nguyên lớn nhất sao cho cây khung nhỏ nhất chứa $e_1, e_2, ..., e_k$. Vì thế, $k = n - 1$ và $S = T$, tức là thuật toán Prim tạo ra cây khung nhỏ nhất.

## BÀI TẬP

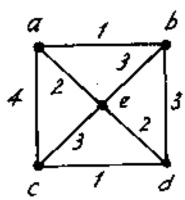
1. Các con đường được biểu diễn trên đồ thị sau là hoàn toàn chưa được trải nhựa. Độ dài của các con đường được biểu thị bằng trọng số của các cạnh. Cần phải trải nhựa những đường nào để vẫn có

đường đi được trải nhựa giữa hai thành phố bất kỳ mà độ dài trải nhựa là tối thiểu?

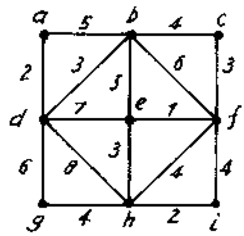



*Trong các Bài tập 2-4 hãy dùng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của các đồ thị đã cho.*

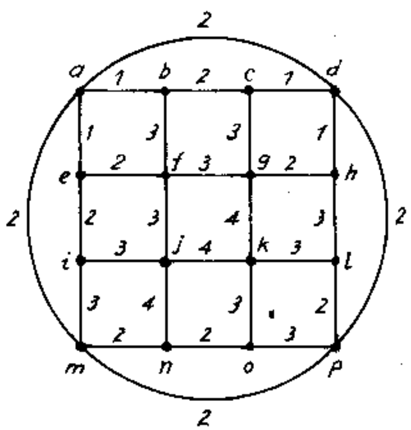
**2.**




**3.**




**4.**




**5.** Dùng thuật toán Kruskal hãy thiết kế mạng truyền thông được mô tả ở đầu Tiết này.

**6.** Dùng thuật toán Kruskal hãy tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị có trọng số trong Bài tập 2.

**7.** Dùng thuật toán Kruskal hãy tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị có trọng số trong Bài tập 3.

8. Dùng thuật toán Kruskal hãy tìm cây khung nhỏ nhất cho đồ thị có trọng số trong Bài tập 4.

9. Hãy tìm một đơn đồ thị liên thông có trọng số với một số tối thiểu các cạnh sao cho nó có nhiều hơn một cây khung nhỏ nhất.

10. **Rừng khung nhỏ nhất** trong một đồ thị có trọng số là một rừng khung có trọng số nhỏ nhất. Hãy sửa đổi các thuật toán Prim và thuật toán Kruskal để xây dựng rừng khung nhỏ nhất.

**Cây khung cực đại** *của một đồ thị vô hướng, liên thông, có trọng số là cây khung có trọng số lớn nhất.*

11. Hãy đề xuất một thuật toán tương tự thuật toán Prim xây dựng cây khung cực đại của một đồ thị liên thông có trọng số.

12. Hãy đề xuất một thuật toán tương tự thuật toán Kruskal xây dựng cây khung cực đại của một đồ thị liên thông có trọng số.

13. Hãy tìm cây khung cực đại cho đồ thị có trọng số trong Bài tập 2.

14. Hãy tìm cây khung cực đại cho đồ thị có trọng số trong Bài tập 3.

15. Hãy tìm cây khung cực đại cho đồ thị có trọng số trong Bài tập 4.

16. Hãy tìm mạng truyền thông rẻ thứ hai nối các trung tâm máy tính trong bài toán ở đầu Tiết này.

17*. Hãy đề xuất một thuật toán tìm cây khung ngắn thứ hai trong một đồ thị liên thông có trọng số.

18*. Hãy chỉ ra rằng cạnh với trọng số nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông có trọng số phải có mặt trong một cây khung nhỏ nhất bất kỳ.

19. Chỉ ra rằng có duy nhất một cây khung nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông có trọn số nếu trọng số của tất cả các cạnh đều khác nhau.

20. Giả sử mạng máy tính nối các thành phố trên Hình 1 phải chứa một đường trực tiếp giữa New York và Denver. Cần phải thêm các kết nối nào để có đường truyền thông giữa hai trung tâm máy tính bất kỳ và giá thành thấp nhất.

**21.** Hãy tìm cây khung có tổng trọng số tối thiểu và chứa các cạnh $\{e, i\}$ và $\{g, k\}$ trong đồ thị có trọng số trên Hình 3.

**22.** Hãy mô tả thuật toán tìm cây khung với trọng số tối thiểu chứa một tập xác định các cạnh trong một đồ thị đơn vô hướng liên thông và có trọng số.

**23.** Hãy viết thuật toán đề xuất trong Bài tập 22 dưới dạng giả mã.

**Thuật toán Sollin** *sinh ra cây khung nhỏ nhất từ một đơn đồ thị liên thông có trọng số $G = (V, E)$, bằng cách lần lượt ghép một nhóm các cạnh. Giả sử các đỉnh trong V là được sắp thứ tự. Điều đó tạo ra một cách sắp xếp các cạnh trong đó $\{u_0, v_0\}$ đi trước $\{u_1, v_1\}$ nếu $u_0$ đi trước $u_1$, hoặc nếu $u_0 = u_1$ và $v_0$ đi trước $v_1$. Thuật toán bắt đầu bằng việc chọn đồng thời cạnh có trọng số nhỏ nhất liên thuộc với mỗi đỉnh. Cạnh đầu tiên trong thứ tự sẽ được chọn trong trường hợp ngang nhau. Thủ tục này tạo được một đồ thị không có chu trình, tức là được một rừng. Tiếp theo, chọn đồng thời cho mỗi cây của rừng một cạnh ngắn nhất nối một đỉnh của cây này với một đỉnh ở cây khác. Một lần nữa ta lại lấy cạnh đầu tiên trong thứ tự nếu có sự ngang nhau. (Điều đó tạo ra đồ thị không có chu trình đơn, và chứa ít cây hơn so với các đồ thị tạo ra ở bước trước, xem Bài tập 24). Tiếp tục quá trình ghép đồng thời các cạnh nối các cây cho tới khi chọn được $n - 1$ cạnh. Cây khung nhỏ nhất được tạo ra ở cuối bước này.*

**24*.** Chứng tỏ rằng việc ghép thêm mỗi cạnh ở mỗi giai đoạn của thuật toán Sollin tạo ra rừng.

**25.** Dùng thuật toán Sollin hãy tạo ra cây khung nhỏ nhất cho đồ thị có trọng số cho trên.

a) Hình 1 b) Hình 3.

**26*.** Viết thuật toán Sollin dưới dạng giả mã.

**27**.** Chứng tỏ rằng thuật toán Sollin tạo ra cây khung nhỏ nhất trong đồ thị liên thông vô hướng và có trọng số.

**28*.** Chỉ ra rằng bước 1 của thuật toán Sollin tạo ra rừng chứa ít nhất $\lceil n/2 \rceil$ cạnh.

**29***. Chứng tỏ rằng nếu có $r$ cây trong một rừng ở một bước trung gian nào đó của thuật toán Sollin thì ít nhất có $\lceil r/2 \rceil$ cạnh được ghép thêm vào sau bước lặp tiếp theo của thuật toán Sollin.

**30***. Chỉ ra rằng có không quá $\lceil n/2^k \rceil$ cây còn lại sau khi bước lặp thứ nhất được thực hiện và sau khi bước lặp thứ hai được thực hiện $k - 1$ lần.

**31***. Chỉ ra rằng thuật toán Sollin đòi hỏi nhiều nhất $\log n$ phép lặp để tạo ra cây khung nhỏ nhất từ một đồ thị liên thông, vô hướng và có trọng số với $n$ đỉnh.

**32.** Chứng minh rằng thuật toán Kruskal tạo ra cây khung nhỏ nhất.

## CÂU HỎI ÔN TẬP

**1.** a) Định nghĩa cây, b) Định nghĩa rừng.

**2.** Có thể có hai đường đi đơn khác nhau giữa hai đỉnh của một cây không?

**3.** Hãy đưa ra ít nhất ba ví dụ dùng cây để mô hình bài toán thực tế.

**4.** a) Định nghĩa cây có gốc và gốc của một cây như thế.

b) Hãy định nghĩa đỉnh cha và đỉnh con của một đỉnh trong cây có gốc.

c) Đỉnh trong, lá, đồ thị con của một cây có gốc là gì?

d) Hãy vẽ cây có gốc có ít nhất 10 đỉnh, trong đó bậc của mỗi đỉnh không vượt quá 3. Hãy định rõ gốc, cha của mỗi đỉnh, con của mỗi đỉnh, các đỉnh trong và lá.

**5.** a) Cây với $n$ đỉnh có bao nhiêu lá?

b) Để xác định số cạnh trong rừng với $n$ đỉnh bạn cần phải biết những gì?

**6.** a) Định nghĩa cây $m$-phân đầy đủ.

b) Cây $m$ - phân đầy đủ có bao nhiêu đỉnh nếu nó có $i$ đỉnh trong? Cây này có bao nhiêu lá?

**7.** a) Chiều cao của một cây có gốc là gì?

b) Cây cân đối là gì?

c) Cây $m$-phân với chiều cao $h$ có bao nhiêu lá?

**8.** a) Cây tìm kiếm nhị phân là gì?

b) Hãy mô tả thuật toán xây dựng cây tìm nhị phân.

c) Hãy xây dựng cây tìm kiếm nhị phân cho các từ *vireo, warbler, egret, grosbeak, nuthatch*, và *kingfisher*.

**9.** a) Mã tiền tố là gì?

b) Mã tiền tố có thể biểu diễn bằng cây nhị phân như thế nào?

**10.** a) Hãy định nghĩa cách duyệt cây theo kiểu tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự.

b) Hãy đưa ra ví dụ về các cách duyệt theo kiểu tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự một cây nhị phân mà bạn chọn với ít nhất 12 đỉnh.

**11.** a) Hãy giải thích cách dùng các kiểu duyệt tiền thứ tự, trung thứ tự và hậu thứ tự để tìm dạng tiền tố, trung tố và hậu tố của một biểu thức số học.

b) Vẽ cây có gốc và được sắp biểu diễn biểu thức :

$((x - 3) + ((x/4) + (x - y) \uparrow 3))$.

c) Tìm dạng tiền tố và hậu tố của biểu thức trong phần *b*).

**12.** Chứng tỏ rằng số phép so sánh dùng thuật toán sắp xếp ít nhất bằng $\lceil \log n! \rceil$.

**13.** a) Mô tả thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt.

b) Dùng thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt hãy sắp danh sách 5, 2, 4, 1, 3 theo thứ tự tăng dần.

c) Hãy đưa ra một đánh giá bậc lớn big − $O$ cho các phép so sánh dùng trong thuật toán sắp xếp kiểu nổi bọt.

**14.** a) Mô tả thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập.

b) Dùng thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập hãy sắp danh sách 5, 2, 4, 1, 3 theo thứ tự tăng dần.

c) Hãy đưa ra một dánh giá bậc lớn big − $O$ cho các phép so sánh dùng trong thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập.

**15.** a) Cây khung của một đơn đồ thị là gì?

b) Những đơn đồ thị nào có cây khung?

c) Hãy mô tả ít nhất hai ứng dụng khác nhau yêu cầu tìm cây khung của một đơn đồ thị.

**16.** a) Hãy mô tả hai thuật toán khác nhau tìm cây khung của một đơn đồ thị.

b) Hãy minh họa cách dùng hai thuật toán mà bạn mô tả trong câu a) để tìm cây khung của một đơn đồ thị, dùng đồ thị mà bạn chọn có ít nhất 8 đỉnh, 15 cạnh.

**17.** a) Hãy giải thích cách dùng kỹ thuật quay lui để xác định xem có thể tô một đơn đồ thị bằng $n$ màu hay không?

b) Hãy chỉ ra, bằng ví dụ, rằng kỹ thuật quay lui có thể dùng để chứng minh một đồ thị với số màu bằng 4 không thể tô bằng ba màu, nhưng có thể tô bằng bốn màu.

**18.** a) Thế nào là cây khung nhỏ nhất của một đơn đồ thị?

b) Hãy đưa ra ít nhất hai ứng dụng khác nhau yêu cầu tìm cây khung nhỏ nhất của một đơn đồ thị.

**19.** a) Hãy mô ta thuật toán Prim và thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất.

b) Hãy minh họa cách dùng thuật toán Prim và thuật toán Kruskal để tìm cây khung nhỏ nhất cho một đồ thị có trọng số và có ít nhất 8 đỉnh và 15 cạnh.

## *BÀI TẬP BỔ SUNG*

**1*.** Chỉ ra rằng một đơn đồ thị là cây nếu và chỉ nếu nó không chứa chu trình đơn và khi thêm một cạnh nối hai đỉnh không liền kề sẽ tạo ra một đồ thị mới có đúng một chu trình đơn (trong đó những chu trình chứa các cạnh như nhau không coi là khác nhau).

**2*.** Có bao nhiêu cây có gốc không đẳng cấu với 6 đỉnh.

**3.** Chỉ ra rằng mọi cây có ít nhất một cạnh phải có ít nhất hai đỉnh treo.

**4.** Chỉ ra rằng một cây với $n$ đỉnh có $n-1$ đỉnh treo sẽ đẳng cấu với $K_{1,n-1}$.

**5.** Tính tổng bậc của các đỉnh của một cây với $n$ đỉnh.

**6*.** Giả sử rằng $d_1$, $d_2$, ..., $d_n$ là các số nguyên dương với tổng là $2n-2$. Hãy chỉ ra rằng tồn tại một cây có $n$ đỉnh sao cho bậc của mỗi đỉnh là $d_1$, $d_2$,..., $d_n$.

**7.** Chứng tỏ rằng mọi cây là một đồ thị phẳng.

**8.** Chỉ ra rằng mọi cây là đồ thị phân đôi.

**9.** Chỉ ra rằng mọi rừng đều có thể tô bằng hai màu.

**Một B-cây bậc k** *là một cây có gốc sao cho tất cả các lá của nó ở cùng một mức, gốc của nó có ít nhất hai con, nhiều nhất k con trừ khi nó là lá và mỗi đỉnh trong không phải gốc có ít nhất* $\lceil k/2 \rceil$, *nhưng không hơn k con. Các tệp tin có thể truy nhập rất hiệu quả khi dùng các B-cây để biểu diễn chúng.*

**10.** Hãy vẽ ba $B$–cây bậc 3 khác nhau và có chiều cao bằng 4.

**11*.** Hãy đưa ra cận trên và cận dưới của số các lá trong $B$–cây bậc $k$ và có chiều cao $h$.

**12*.** Hãy đưa ra cận trên và cận dưới của chiều cao của $B$–cây bậc $k$ và có $n$ lá.

*Cây có gốc T được gọi là* **$S_k$-cây** *nếu nó thỏa mãn định nghĩa truy hồi sau đây. Cây chỉ có một đỉnh là $S_0$-cây. Với $k > 0$, T là $S_k$-cây nếu có thể được xây dựng từ hai $S_{k-1}$-cây bằng cách lấy gốc của một $S_{k-1}$-cây làm gốc của $S_k$-cây và lấy gốc của cây kia là con của gốc của $S_k$-cây đầu tiên đó.*

**13.** Hãy vẽ $S_k$–cây với $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

**14.** Hãy chỉ ra $S_k$–cây có $2^k$ đỉnh và một đỉnh duy nhất ở mức $k$. Đỉnh duy nhất ở mức $k$ này gọi là *tay lái*.

**15*.** Giả sử $T$ là $S_k$–cây với *tay lái* $v$. Hãy chỉ ra rằng $T$ có thể nhận được từ các cây rời nhau $T_0, T_1, ..., T_{k-1}$, trong đó $v$ không thuộc bất kỳ cây nào trong các cây này, và $T_i$ là $S_i$–cây ($i = 1, 2, ..., k-1$) bằng cách nối $v$ với $r_0$ và $r_i$ với $r_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, ..., k-2$).

*Liệt kê các đỉnh của một cây có gốc được sắp theo* **thứ tự mức**, *bắt đầu từ gốc sau đó là các đỉnh ở mức 1, mức 2,..., và trong cùng một mức thì các đỉnh được liệt kê từ trái sang phải.*

**16.** Hãy liệt kê của cây có gốc được sắp trên Hình 3 và 9 của Tiết 8.3 theo thứ tự mức.

**17.** Hãy đề xuất một thuật toán để liệt kê các đỉnh của cây có gốc được sắp theo thứ tự mức.

**18*.** Hãy đề xuất một thuật toán để xác định một tập các địa chỉ phổ dụng có thể là địa chỉ các lá của một cây có gốc hay không.

**19.** Hãy đề xuất một thuật toán để xây dựng một cây có gốc từ địa chỉ phổ dụng của các lá của nó.

**Sắp xếp kiểu chèn** *thực hiện bằng cách xét các phần tử của danh sách, mỗi lần một phần tử bắt đầu từ phần tử thứ hai. Mỗi phần tử được so sánh với những phần tử trước nó trong danh sách, đó là những phần tử đã được đặt theo đúng thứ tự. Phần tử đang xét sẽ được đặt vào vị trí đúng của nó bằng cách dịch chuyển phần tử đang ở vị trí này và tất cả các phần tử bên phải nó về bên phải một vị trí.*

**20.** Sắp xếp danh sách 3, 2, 4, 5, 2, 1 bằng thuật toán sắp xếp kiểu chèn.

**21.** Hãy viết thuật toán sắp xếp kiểu chèn bằng giả mã.

**22.** Hãy xác định độ phức tạp trong trường hợp xấu nhất của thuật toán sắp kiểu chèn theo số phép so sánh cần dùng.

**23.** Giả sử trong một đơn đồ thị, $e$ là một cạnh liên thuộc với một đỉnh treo. Chứng minh rằng $e$ phải nằm trong một cây khung nào đó.

**Tập cắt** *của một đồ thị là tập các cạnh sao cho việc xóa chúng sẽ tạo ra một đồ thị con có số thành phần liên thông nhiều hơn đồ thị xuất phát, nhưng một tập con thực sự của nó không có tính chất này.*

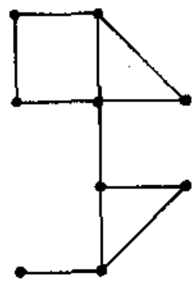
**24.** Chỉ ra rằng tập cắt của đồ thị phải có ít nhất một cạnh chung với bất kỳ cây khung nào của đồ thị này.

**Cactus** *là đồ thị liên thông trong đó không có cạnh nào thuộc nhiều hơn một chu trình đơn không đi qua một đỉnh bất kỳ khác đỉnh xuất phát nhiều hơn một lần hoặc đỉnh ban đầu của nó khác với đỉnh kết thúc (trong đó hai chu trình chứa cùng số cạnh như nhau không được coi là khác nhau).*

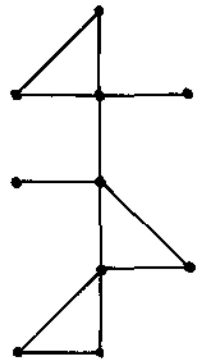
**25.** Đồ thị nào trong các đồ thị sau là cactus?

a)

b)



c)



**26.** Một cây có nhất thiết là cactus không?

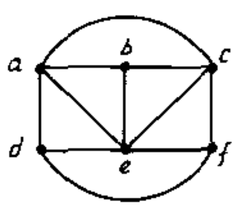
**27.** Hãy chỉ ra rằng một cactus sẽ được tạo thành nếu ta thêm một chu trình chứa các cạnh mới bắt đầu và kết thúc tại một đỉnh của cây.

**28*.** Chỉ ra rằng nếu mọi chu trình không đi qua bất kỳ đỉnh nào khác với đỉnh đầu tiên của nó quá một lần trong một đồ thị liên thông chứa một số lẻ các cạnh thì đồ thị này phải là một cactus.

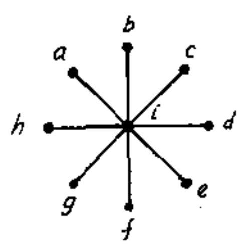
**Cây khung với bậc hạn chế** *của một đồ thị đơn G là cây khung có tính chất sau. Bậc của một đỉnh trong cây này không thể vượt quá một giới hạn xác định nào đó. Cây khung với bậc hạn chế rất có lợi khi mô hình các hệ thống vận tải trong đó số các con đường cắt nhau là có giới hạn, hay mô hình các mạng truyền thông trong đó số các kết nối đi tới một nút là bị hạn chế, v.v.*

*Trong các Bài tập 29–31 hãy tìm cây khung với bậc hạn chế của các đồ thị đã cho trong đó mỗi đỉnh có bậc nhỏ hơn hay bằng 3, hoặc chỉ ra rằng không tồn tại cây khung như thế.*

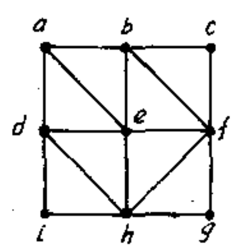
**29.**




**30.**

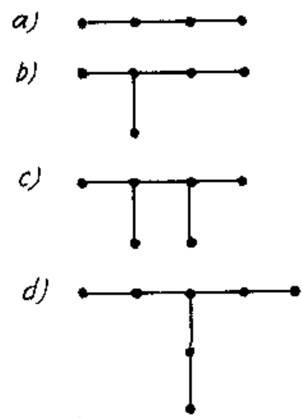



**31.**



**32.** Hãy chỉ ra rằng cây khung có số bậc hạn chế của một đơn đồ thị trong đó mỗi đỉnh có bậc không quá 2 bao gồm một đường đi Hamilton trong đồ thị.

**33.** Một cây với $n$ đỉnh được gọi là **duyên dáng** nếu các đỉnh của nó có thể gán nhãn bằng các số tự nhiên 1, 2, ..., $n$ sao cho giá trị tuyệt đối của hiệu các nhãn tại các đỉnh liền kề đều khác nhau. Hãy chỉ ra các cây ở hình bên là các cây duyên dáng.




**Cây dây xích** *là cây chứa đường đi đơn sao cho mọi đỉnh không thuộc đường đi là liền kề với đỉnh thuộc đường đi*

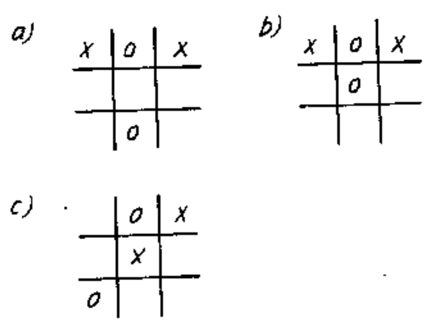
**34.** Đồ thị nào trong Bài tập 33 là dây xích?

**35.** Có bao nhiêu cây dây xích không đẳng cấu với 6 đỉnh?

**36*.** a) Chứng minh hoặc bác bỏ rằng tất cả các cây mà các cạnh của chúng tạo thành một đường đi đơn đều là cây duyên dáng.

** b) Chứng minh hoặc bác bỏ rằng tất cả các cây dây xích đều là các cây duyên dáng.

**37.** Giả sử rằng bốn nước đi đầu tiên của trò chơi cờ carô như đã chỉ ra trên hình vẽ. Hãy giải thích cách dùng cây để chỉ ra những nước đi kế tiếp của trò chơi này. Nếu người chơi dùng dấu $X$ đi trước, anh ta có chiến thuật để luôn luôn thắng không?



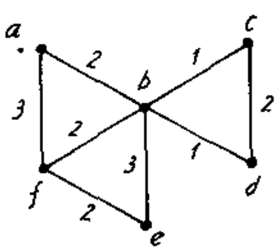

**38.** Ba cặp vợ chồng đi tới bờ một con sông. Mỗi bà vợ đều hay ghen và không tin chồng mình khi để anh ta đứng một mình với một trong các bà kia, mà không cùng với mình. Làm thế nào sáu người có thể qua sông bằng một chiếc thuyền chỉ chở được không quá hai người sao cho không có ông chồng nào ở một mình với các bà không là vợ mình? Hãy dùng lý thuyết đồ thị để lập mô hình.

**39*.** Giả sử *e* là một cạnh của một đồ thị có trọng số, cạnh này liên thuộc với đỉnh *v* sao cho trọng số của *e* không vượt quá trọng số của bất kỳ cạnh nào khác liên thuộc với *v*. Chỉ ra rằng có cây khung nhỏ nhất chứa cạnh này.

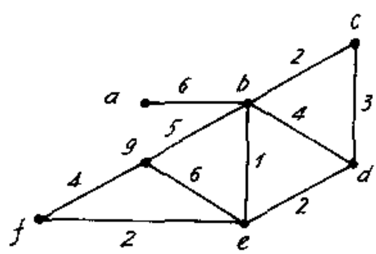
**40*.** Hãy chỉ ra rằng trong đồ thị có trọng số, nếu không có hai cạnh nào có cùng trọng số khi đó cạnh với trọng số nhỏ nhất liên thuộc với đỉnh *v* đều được gộp vào mọi cây khung nhỏ nhất.

**41.** Hãy tìm cây khung nhỏ nhất của mỗi một trong các đồ thị có trọng số sau đây, trong đó bậc của mỗi đỉnh trong cây khung nhỏ nhất không vượt quá 2.

a)




b)




## BÀI TẬP TRÊN MÁY TÍNH

***Viết chương trình với các input và output cho dưới đây.***

**1.** Cho ma trận liền kề của một đơn đồ thị vô hướng, hãy xác định đồ thị nào là cây.

**2.** Cho ma trận liền kề của một cây có gốc và một đỉnh của cây, hãy tìm cha, con, tổ tiên, con cháu và mức của đỉnh này.

**3.** Cho danh sách các cạnh của một cây có gốc và một đỉnh của cây, hãy tìm cha, con, tổ tiên, con cháu và mức của đỉnh này.

**4.** Cho danh sách các phần tử, xây dựng cây tìm kiếm nhị phân chứa các phần tử này.

**5.** Cho cây tìm kiếm nhị phân và một phần tử hãy định vị nó hoặc thêm nó vào cây tìm kiếm nhị phân này.

**6.** Cho danh sách có thứ tự các cạnh của một cây có gốc và được sắp, hãy tìm địa chỉ phổ dụng các đỉnh của nó.

**7.** Cho danh sách có thứ tự các cạnh của một cây có gốc và được sắp, hãy liệt kê các đỉnh của nó theo kiểu tiền thứ tự, trung thứ tự, và hậu thứ tự.

**8.** Cho một biểu thức số học dưới dạng tiền tố, hãy tìm giá trị của nó.

**9.** Cho một biểu thức số học dưới dạng hậu tố, hãy tìm giá trị của nó.

**10.** Cho một tập $n$ số nguyên, hãy sắp xếp chúng bằng thuật toán sắp xếp kiiểu nổi bọt.

**11.** Cho hai danh sách được sắp các số nguyên hãy hoà nhập chúng thành một danh sách được sắp, và theo dõi số các phép so sánh đã dùng.

**12.** Cho một tập $n$ số nguyên, hãy sắp xếp chúng bằng thuật toán sắp xếp kiểu hoà nhập.

**13.** Cho ma trận liền kề của một đơn đồ thị vô hướng liên thông, hãy tìm cây khung của đồ thị này bằng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều sâu.

**14.** Cho ma trận liền kề của một đơn đồ thị vô hướng liên thông, hãy tìm cây khung của đồ thị này bằng kỹ thuật tìm kiếm ưu tiên chiều rộng.

**15.** Cho một tập các số nguyên dương và một số nguyên dương $N$, hãy dùng kỹ thuật quay lui tìm tập con của các số nguyên này có tổng bằng $N$.

**16*.** Cho ma trận liền kề của một đơn đồ thị vô hướng, hãy dùng kỹ thuật quay lui tô đồ thị này bằng ba màu nếu có thể.

**17*.** Cho só dương $n$ hãy giải bài toán $n$ quân hậu bằng kỹ thuật quay lui.

**18.** Cho danh sách các cạnh và trọng số của chúng trong một đồ thị liên thông có trọng số, hãy dùng thuật toán Prim tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị này.

**19.** Cho danh sách các cạnh và trọng số của chúng trong một đồ thị liên thông có trọng số, hãy dùng thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị này.

## TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

***Dùng các chương trình mà bạn đã viết giải các bài tập sau.***

**1.** Hãy biểu diễn tất cả các cây có sáu đỉnh.

**2.** Hãy biểu diễn tất cả các cây không đẳng cấu có bảy đỉnh.

**3*.** Hãy xây dựng mã Huffman cho các chữ cái tiếng Anh dựa trên tần số xuất hiện của chúng trong một văn bản tiếng Anh thông thường.

**4.** Hãy tính số cây khung khác nhau của $K_n$ với $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Hãy phỏng đoán công thức cho số cây khung như thế với $n$ là một số nguyên dương tùy ý.

**5.** Hãy so sánh số các phép so sánh cần thiết để sắp xếp một danh sách $n$ phần tử với $n = 100, 1000, 10\ 000$ trong đó các phần tử là các số nguyên dương được chọn ngẫu nhiên bằng sắp xếp kiểu chèn, sắp xếp kiểu hoà nhập, và sắp xếp nhanh.

**6.** Tính số các cách khác nhau để sắp $n$ quân hậu trên một bàn cờ $n \times n$ sao cho không có hai quân nào tấn công lẫn nhau, với $n$ nguyên dương không vượt quá 10.

**7*.** Tìm cây khung nhỏ nhất của một đồ thị nối thủ đô của 50 bang của nước Mỹ với nhau, trong đó trọng số của mỗi cạnh là khoảng cách giữa các thành phố đó.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau :***

**1.** Hãy trình bày cách Cayley dùng cây để tính số các đồng phân của hydrocarbon.

**2.** Định nghĩa cây *AVL* (đôi khi cũng được gọi là cây có độ cao cân đối). Mô tả cách dùng và tại sao *AVL* – cây được dùng trong nhiều thuật toán.

**3.** Định nghĩa cây quad và giải thích cách dùng cây quad để biểu diễn hình ảnh. Hãy mô tả cách quay hình ảnh, cách phóng to thu nhỏ và biến đổi hình ảnh bằng các thao tác đối với cây quad tương ứng.

**4.** Hãy định nghĩa *heap* và giải thích cây có thể biến thành heap như thế nào, tại sao heap rất có lợi khi sắp xếp?

**5.** Hãy mô tả các thuật toán nén dữ liệu dựa trên tần số chữ cái, kể cả mã Huffman, và các thuật toán liên quan dựa trên tần số của các khối chữ cái.

**6.** Hãy bàn về việc cây đã được dùng như thế nào để lập mô hình các trò chơi và tìm chiến lược thắng. Hãy giải thích người ta đã nghiên cứu các trò chơi như cờ caro, nim, hex, và một vài trò chơi khác bằng cây như thế nào?

**7.** Hãy định nghĩa một loại đồ thị có tên là *mạng các cây*. Hãy giải thích cách dùng đồ thị này trong các ứng dụng của hệ thống tích hợp cực lớn và tính toán song song rất lớn.

**8.** Mô tả thuật toán tìm cây khung nhỏ nhất của một đồ thị sao cho bậc cực đại của một đỉnh bất kỳ trong cây khung nhỏ nhất đó không vượt quá hằng số $k$ cố định.

**9.** Hãy so sánh và đối chiếu một số thuật toán sắp xếp quan trọng nhất về độ phức tạp của chúng và khi dùng chúng.

**10.** Hãy thảo luận về lịch sử và nguồn gốc của các thuật toán xây dựng cây khung nhỏ nhất.

**11.** Hãy mô tả các thuật toán tạo cây ngẫu nhiên.

CHƯƠNG 9

# ĐẠI SỐ BOOLE

Các mạch điện trong máy tính và các dụng cụ điện tử khác đều có các đầu vào, mỗi đầu vào là số 0 hoặc số 1, và tạo ra các đầu ra cũng là các số 0 và 1. Các mạch điện đó đều có thể được xây dựng bằng cách dùng bất kỳ một phần tử cơ bản nào có hai trạng thái khác nhau. Chúng bao gồm các chuyển mạch có thể ở hai vị trí mở hoặc đóng và các dụng cụ quang học có thể là sáng hoặc tối. Năm 1938 Claude Shannon chứng tỏ rằng có thể dùng các qui tắc cơ bản của logic do George Boole đưa ra vào năm 1854 trong cuốn "*Các qui luật của tư duy*" của ông để thiết kế các mạch điện. Các qui tắc này đã tạo nên cơ sở của đại số Boole. Trong chương này chúng ta sẽ phát triển các tính chất cơ bản của đại số Boole. Sự hoạt động của một mạch điện được xác định bởi một hàm Boole chỉ rõ giá trị của đầu ra đối với mỗi tập đầu vào. Bước đầu tiên trong việc xây dựng một mạch điện là biểu diễn hàm Boole của nó bằng một biểu thức được lập bằng cách dùng các phép toán cơ bản của đại số Boole. Chúng ta cũng sẽ đưa ra một thuật toán để tạo các biểu thức như vậy. Biểu thức mà chúng ta sẽ nhận được có thể chứa nhiều phép toán hơn mức cần thiết để biểu diễn hàm đó. Ở phần cuối của chương chúng ta sẽ mô tả các phương pháp để tìm một biểu thức với số tối thiểu các phép tổng và tích được dùng để biểu diễn một hàm Boole. Các thủ tục mà chúng ta sẽ mô tả – đó là các bản đồ Karnaugh và các phương pháp Quine – McCluskey – là rất quan trọng trong việc thiết kế các mạch điện có hiệu quả cao.

# 9.1. HÀM BOOLE

## MỞ ĐẦU

Đại số Boole đưa ra các phép toán và qui tắc làm việc với tập {0, 1}. Các chuyển mạch điện tử và quang học có thể được nghiên cứu bằng cách dùng tập này và các qui tắc của đại số Boole. Ba phép toán trong đại số Boole mà chúng ta sẽ dùng nhiều nhất, đó là phép lấy phần bù, phép lấy tổng Boole và tích Boole. **Phần bù** của một phần tử được ký hiệu bằng một gạch ngang trên đầu và được định nghĩa bởi $\overline{0} = 1$ và $\overline{1} = 0$. Tổng Boole được ký hiệu là + hoặc *OR* (hoặc) có các giá trị sau :

$$1 + 1 = 1 \ ; \ 1 + 0 = 1, \ 0 + 1 = 1, \ 0 + 0 = 0$$

Tích Boole được ký hiệu là . hoặc AND (và) có các giá trị như sau :

$$1.1 = 1 \ ; \ 1.0 = 0 \ ; \ 0.1 = 0 \ ; \ 0.0 = 0$$

Khi không có nguy cơ nhầm lẫn ký hiệu dấu• có thể được bỏ đi như cách viết các tích đại số thông thường. Nếu không dùng các dấu ngoặc thì thứ tự thực hiện các phép toán Boole như sau : trước hết, thực hiện tất cả các phép lấy phần bù, sau đó đến tích Boole rồi mới đến tổng Boole. Điều này được minh họa trong ví dụ sau :

**Ví dụ 1**. Tìm giá trị của $1.0 + \overline{(0 + 1)}$

*Giải.* Dùng các định nghĩa của phép lấy phần bù, phép lấy tổng và tích Boole, ta suy ra :

$$(1.0) + \overline{(0 + 1)} = 0 + \overline{1}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

■

Phép lấy phần bù, lấy tổng và tích Boole tương ứng với các toán tử logic $\neg$, $\vee$ và $\wedge$, trong đó 0 tương ứng với *F* (sai) và 1 tương ứng với *T* (đúng). Các kết quả của đại số Boole có thể được dịch trực tiếp thành các kết quả về các mệnh đề. Ngược lại, các kết quả về các mệnh đề cũng có thể được dịch thẳng thành các khẳng định của đại số Boole.

## BIỂU THỨC BOOLE VÀ HÀM BOOLE

Cho $B = \{0, 1\}$. Biến $x$ được gọi là một **biến Boole** nếu nó nhận các giá trị chỉ từ $B$. Một hàm từ $B^n$ – tức là từ tập $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in B, 1 \leq i \leq n\}$ – tới $B$ được gọi là **hàm Boole bậc n**. Các giá trị của hàm Boole thường được cho trong các bảng. Ví dụ, hàm Boole $F(x, y)$ với giá trị bằng 1 khi $x = 1$ và $y = 0$ và bằng 0 với mọi lựa chọn khác đối với các giá trị của $x$ và $y$ có thể được biểu diễn bởi Bảng 1.

**BẢNG 1**

| $x$ | y | F(x,y) |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

Các hàm Boole cũng có thể được biểu diễn bằng cách dùng các biểu thức được tạo bởi các biến và các phép toán Boole. Các **biểu thức Boole** với các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ được định nghĩa một cách đệ qui như sau :

0, 1, $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biểu thức Boole.

Nếu $E_1$ và $E_2$ là các biểu thức Boole thì $\overline{E}$, $(E_1 E_2)$ và $(E_1 + E_2)$ cũng là các biểu thức Boole.

Mỗi một biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Các giá trị của hàm này nhận được bằng cách thay 0 và 1 cho các biến trong biểu thức đó. Trong Tiết 9.2 chúng ta sẽ chứng minh rằng mỗi một hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng một biểu thức Boole.

**Ví dụ 2.** Tìm các giá trị của hàm Boole được biểu diễn bởi $F(x,y,z) = xy + \overline{z}$

*Giải*. Các giá trị của hàm này được cho trong Bảng 2

**BẢNG 2**

| $x$ | y | z | xy | $\overline{z}$ | $F(x,y,z) = xy + \overline{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Hai hàm $n$ biến $F$ và $G$ được gọi là bằng nhau nếu $F(b_1, b_2, \ldots b_n) = G(b_1, b_2, \ldots b_n)$ với mọi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ thuộc $B$. Hai biểu thức Boole khác nhau biểu diễn cùng một hàm được gọi là **tương đương**. Ví dụ, các biểu thức Boole $xy$, $xy + 0$ và $xy.1$ là tương đương. **Phần bù** của hàm Boole $F$ là hàm $\overline{F}$ với $\overline{F}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1, \ldots, x_n)}$. Giả sử $F$ và $G$ là các hàm Boole bậc $n$. **Tổng Boole** $F + G$ và **Tích Boole** $FG$ được định nghĩa bởi :

$$(F + G)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) + G(x_1, \ldots, x_n)$$

$$(FG)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)\, G(x_1, \ldots, x_n).$$

Một hàm Boole bậc 2 là hàm từ tập 4 phần tử, cụ thể là các cặp phần tử từ tập $B = \{0,1\}$, đến $B$ là tập có hai phần tử. Từ đó suy ra có 16 hàm Boole bậc 2. Bảng 2 cho giá trị của 16 hàm Boole bậc 2 khác nhau mà ta ký hiệu là $F_1, F_2, \ldots, F_{16}$.

**BẢNG 3**

| $x$ | $y$ | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | $F_6$ | $F_9$ | $F_{10}$ | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{13}$ | $F_{14}$ | $F_{15}$ | $F_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

**Ví dụ 3.** Có bao nhiêu hàm Boole khác nhau bậc $n$ ?

*Giải.* Theo qui tắc nhân của phép đếm ta suy ra rằng có $2^n$ bộ $n$ phần tử khác nhau gồm các số 0 và 1. Vì hàm Boole là sự gán 0 hoặc 1 cho mỗi bộ trong số $2^n$ bộ n phần tử đó, nên lại theo qui tắc nhân sẽ có $2^{2^n}$ các hàm Boole khác nhau.

**BẢNG 4. Số các hàm Boole bậc n**

| Bậc | Số các hàm Boole |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 16 |
| 3 | 256 |
| 4 | 65.536 |
| 5 | 4.294.967.296 |
| 6 | 18.446.744.073.709.551.616 |

Bảng 4 cho số các hàm Boole khác nhau từ bậc 1 cho tới bậc 6. Số các hàm này tăng cực kỳ nhanh.

## CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC CỦA ĐẠI SỐ BOOLE

Trong đại số Boole có nhiều hằng đẳng thức. Các hằng đẳng thức quan trọng nhất được cho trong bảng 5. Các hằng đẳng thức này đặc biệt tiện ích trong việc làm đơn giản hóa việc thiết kế các mạch. Mỗi một hằng đẳng thức trong bảng 5 đều có thể được chứng minh bằng cách lập bảng. Ta sẽ chứng minh một trong số hai luật phân phối bằng cách đó trong ví dụ dưới đây. Việc chứng minh các hằng đẳng thức còn lại xin dành cho bạn đọc.

**BẢNG 5 CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC BOOLE**

| Hằng đẳng thức | Tên gọi |
|---|---|
| $x = x$ | Luật phần bù kép |
| $x + x = x$<br>$x \cdot x = x$ | Luật lũy đẳng (idempotent) |
| $x + 0 = x$<br>$x \cdot 1 = x$ | Luật đồng nhất |
| $x + 1 = 1$<br>$x \cdot 0 = 0$ | Luật nuốt |
| $x + y = y + x$<br>$xy = yx$ | Luật giao hoán |
| $x + (y+z) = (x+y) + z$<br>$x(yz) = (xy)z$ | Luật kết hợp |
| $x + yz = (x + y)(x + z)$<br>$x(y+z) = xy + xz$ | Luật phân phối |
| $\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$<br>$\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$ | Luật De Morgan |

**Ví dụ 4**. Chứng minh sự đúng đắn của luật phân phối $x(y+z) = xy + xz$.

*Giải.* Sự chứng minh hằng đẳng thức này được cho trong Bảng 6. Hằng đẳng thức này đúng vì hai cột sau cùng của bảng hoàn toàn phù hợp với nhau.

**BẢNG 6**

| x | y | z | y+z | xy | xz | x (y+z) | xy + xz |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Các hằng đẳng thức trong Bảng 5 cũng có thể được dùng để chứng minh các hằng đẳng thức khác. Ta sẽ minh họa điều này bằng ví dụ sau.

**Ví dụ 5.** Chứng minh **luật hút thu** $x(x+y) = x$ bằng cách dùng các hằng đẳng thức của đại số Boole. (Hằng đẳng thức này được gọi là luật hút thu vì sự hút thu của $x + y$ vào $x$ để cho $x$ không thay đổi).

*Giải.* Các bước được dùng để rút ra hằng đẳng thức trên và các luật được sử dụng ở mỗi bước đó như sau :

$x(x + y) = (x + 0)(x + y)$ – luật đồng nhất đối với tổng Boole

$= x + 0.y$ – luật phân phối của tổng Bool đối với tích Boole

$= x + y.0$ – luật giao hoán của tích Boole

$= x + 0$ – luật nuốt đối với tích Boole

$= x$ – luật đồng nhất đối với tổng Boole.

■

## TÍNH ĐỐI NGẪU

Các hằng đẳng thức trong Bảng 5 xuất hiện theo từng cặp (trừ luật phần bù kép). Để giải thích mối quan hệ giữa hai hằng đẳng thức trong mỗi cặp đó chúng ta phải dùng khái niệm đối ngẫu. **Đối ngẫu** của một biểu thức Boole nhận được bằng cách các tổng và tích Boole đổi chỗ cho nhau, các số 0 và 1 đổi chỗ cho nhau.

**Ví dụ 6.** Tìm các đối ngẫu của $x(y + 0)$ và $\overline{x} . 1 + (\overline{y} + z)$.

*Giải:* Đổi chỗ các dấu . và + cho nhau, các số 0 và 1 cho nhau trong các biểu thức trên ta sẽ nhận được các đối ngẫu của chúng. Các đối ngẫu đó là $x + (y.1)$ và $(\overline{x} + 0)(\overline{y} . z)$, tương ứng.

■

Đối ngẫu của một hàm Boole được biểu diễn bởi một biểu thức Boole là một hàm Boole được biểu diễn bởi đối ngẫu của biểu thức đó. Hàm đối ngẫu này được ký hiệu bởi $F^d$ – không phụ thuộc vào biểu thức Boole đặc biệt nào đó được dùng để biểu diễn $F$. Một hằng đẳng thức giữa các hàm được biểu diễn bởi các biểu thức Boole vẫn còn đúng nếu ta lấy đối ngẫu hai vế của nó (xem Bài tập 22). Kết quả này – được gọi là **nguyên lý đối ngẫu** – rất tiện ích để nhận được các hằng đẳng thức mới.

**Ví dụ 7.** Hãy lập một hằng đẳng thức từ luật hút thu $x(x + y) = x$ được cho trong Ví dụ 5 bằng cách lấy đối ngẫu.

*Giải:* Lấy đối ngẫu hai vế hằng đẳng thức trên ta được hằng đẳng thức $x + xy = x$. Hằng đẳng thức này cũng được gọi là luật hút thu.

■

## ĐỊNH NGHĨA TRỪU TƯỢNG CỦA ĐẠI SỐ BOOLE

Trong tiết này ta sẽ tập trung xem xét các hàm và biểu thức Boole. Tuy nhiên, các kết quả mà chúng ta xác lập được có thể chuyển thành các kết quả cho các mệnh đề hoặc kết quả cho các tập hợp. Vì thế, sẽ rất tiện ích nếu chúng ta định nghĩa đại số Boole một cách trừu tượng. Một khi đã chứng minh được rằng một cấu trúc đặc biệt nào đó là một đại số Boole, thì khi đó mọi kết quả đã được thiết lập cho các đại số Boole tổng quát sẽ được áp dụng cho cấu trúc đặc biệt đó.

Các đại số Boole có thể được định nghĩa bằng nhiều cách. Tuy nhiên, cách phổ biến nhất là chỉ ra những tính chất mà các phép toán cần phải thỏa mãn, như được làm trong định nghĩa dưới đây :

**ĐỊNH NGHĨA 1. Đại số Boole** là một tập B có hai phần tử 0 và 1 với hai phép toán hai ngôi $\vee$ và $\wedge$, và một phép toán một ngôi $\bar{}$ sao cho các tính chất dưới đây đúng với mọi $x$, $y$, $z$ thuộc $B$.

$$\left.\begin{array}{l} x \vee 0 = x \\ x \wedge 1 = x \end{array}\right\} \qquad \text{Luật đồng nhất}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \vee \overline{x} = 1 \\ x \wedge \overline{x} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Luật nuốt}$$

$$\left.\begin{array}{l} (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \\ (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \end{array}\right\} \quad \text{Luật kết hợp}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x \end{array}\right\} \quad \text{Luật giao hoán}$$

$$\left.\begin{array}{l} x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \end{array}\right\} \quad \text{Luật phân phối}$$

Dùng các luật được cho trong Định nghĩa 1 có thể chứng minh được nhiều luật khác đúng với mọi đại số Boole như luật lũy đẳng và luật De Morgan (xem các Bài tập 25 – 32).

Từ thảo luận ở trên của chúng ta, tập $B = \{0,1\}$ với các phép toán *OR và AND* cùng với toán tử bù thỏa mãn tất cả các tính chất đó. Tập hợp các mệnh đề $n$ biến với các phép toán $\vee$ và $\wedge$, cùng với **F** (sai) và **T** (đúng), và toán tử phủ định cũng thỏa mãn tất cả các tính chất của đại số Boole như có thể thấy qua Bảng 5 trong Tiết 1.2. Tương tự, tập các tập con của tập vũ trụ U với các phép toán hợp và giao, cùng với tập rỗng và tập vũ trụ, và toán tử lấy phần bù của tập hợp cũng là một đại số Boole như dễ dàng thấy qua Bảng 1 của Tiết 1.5. Như vậy, để thiết lập các kết quả cho mỗi một biểu thức Boole, cho các mệnh đề hoặc tập hợp ta chỉ cần chứng minh các kết quả cho các đại số Boole trừu tượng.

## *BÀI TẬP*

**1.** Tìm giá trị của các biểu thức sau :

a) $1 \cdot \overline{0}$  b) $1 + \overline{1}$

c) $\overline{0} \cdot 0$  d) $\overline{(1 + 0)}$

**2.** Tìm các giá trị, nếu có, của biến Boole $x$ thỏa mãn các phương trình sau :

a) $x \cdot 1 = 0$  b) $x + x = 0$

c) $x \cdot 1 = x$  d) $x \overline{x} = 1$.

**3.** Tìm giá trị của các biến Boole $x$ và $y$ thỏa mãn phương trình $xy = x + y$

**4.** Có bao nhiêu hàm Boole bậc 7 khác nhau ?

**5.** Chứng minh luật hút thu $x + xy = x$ bằng cách dùng các hằng đẳng thức cho trong Bảng 5.

**6.** Chứng minh rằng $F(x,y,z) = xy + xz + yz$ có giá trị 1 nếu và chỉ nếu ít nhất hai trong số các biến $x$, $y$, $z$ có giá trị 1.

**7.** Chứng minh rằng $x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z = \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z}$

*Các bài tập từ 8 đến 15 liên quan đến đại số Boole được định nghĩa bởi tổng Boole và tích Boole trên tập $\{0,1\}$.*

**8.** Chứng minh luật phần bù kép

**9.** Chứng minh luật lũy đẳng

**10.** Chứng minh luật đồng nhất

**11.** Chứng minh luật nuốt

**12.** Chứng minh luật giao hoán

**13.** Chứng minh luật kết hợp

**14.** Chứng minh luật phân phối thứ nhất trong Bảng 5

**15.** Chứng minh luật De Morgan.

*Toán tử Boole $\oplus$, được gọi là toán tử XOR, được định nghĩa như sau : $1 \oplus 1 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$ và $0 \oplus 0 = 0$.*

**16.** Rút gọn các biểu thức sau :

a) $x \oplus 0$ b) $x \oplus 1$

c) $x \oplus x$ d) $x \oplus \bar{x}$

**17.** Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $x \oplus y = (x + y)(\overline{xy})$

b) $x \oplus y = (x\bar{y}) + (\bar{x}y)$

**18.** Chứng minh rằng $x \oplus y = y \oplus x$

**19.** Chứng minh hoặc bác bỏ các đẳng thức sau :

a) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$

b) $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$

c) $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$

**20.** Tìm đối ngẫu của các biểu thức sau :

a) $x + y$ b) $\bar{x}\,\bar{y}$

c) $xyz + \bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}$ d) $x\bar{z} + x\ .\ 0 + \bar{x}\ .\ 1$

**21*.** Cho $F$ là hàm Boole được biểu diễn bởi một biểu thức Boole với các biến $x_1, ..., x_n$. Chứng minh rằng $F^d(x_1, ..., x_n) = \overline{F(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)}$

**22*.** Chứng minh rằng nếu $F$ và $G$ là các hàm Boole được biểu diễn bởi các biểu thức Boole $n$ biến và $F = G$ thì $F^d = G^d$ với $F^d$ và $G^d$ là các hàm Boole được biểu diễn bởi đối ngẫu của các biểu thức Boole biểu diễn các hàm $F$ và $G$ tương ứng (*Gợi ý* : dùng kết quả của Bài tập 21).

**23*.** Có bao nhiêu hàm Boole $F(x,y,z)$ khác nhau sao cho $F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = F(x,y,z)$ đối với mọi giá trị của các biến Boole $x, y, z$ ?

**24*.** Có bao nhiêu hàm Boole $F(x,y,z)$ khác nhau sao cho $F(\bar{x},y,z) = F(x,\bar{y},z) = F(x,y,\bar{z})$ đối với mọi giá trị của các biến Boole $x, y, z$ ?

*Trong các Bài tập từ 25 đến 32, hãy dùng các luật trong Định nghĩa 1 để chứng tỏ rằng các tính chất nêu trong đầu bài đúng với mọi đại số Boole.*

**25.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole các **tính chất lúy đẳng** $x \vee x = x$ và $x \wedge x = x$ đúng với mọi $x$.

**26.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole, mọi phần tử $x$ đều có một phần bù $\bar{x}$ duy nhất sao cho $x \vee \bar{x} = 1$ và $x \wedge \bar{x} = 0$.

**27.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole, phần bù của phần tử 0 là phần tử 1 và ngược lại.

**28.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole đúng **luật phần bù kép**, tức là $\bar{\bar{x}} = x$ với mọi $x$.

**29.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole, **luật De Morgan** luôn luôn đúng, tức là $\overline{(x \vee y)} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ và $\overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \vee \bar{y}$ với mọi $x$ và $y$.

**30.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole các **tính chất modular** sau đây luôn luôn đúng :

+ $x \wedge (y \vee (x \wedge z)) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

+ $x \vee (y \wedge (x \vee z)) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

**31.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole, nếu $x \vee y = 0$ thì $x = 0$ và $y = 0$ và nếu $x \wedge y = 1$ thì $x = 1$ và $y = 1$.

**32.** Chứng minh rằng trong một đại số Boole **đối ngẫu** của một hằng đẳng thức nhận được bằng cách đổi chỗ các phép toán $\vee$ và $\wedge$ và đổi chỗ các phần tử 0 và 1 cũng là một hằng đẳng thức.

## 9.2. BIỂU DIỄN CÁC HÀM BOOLE

Hai bài toán quan trọng của đại số Boole sẽ được nghiên cứu trong tiết này. Bài toán thứ nhất là : cho các giá trị của một hàm Boole, làm thế nào tìm được biểu thức Boole biểu diễn hàm đó ? Bài toán này sẽ được giải bằng cách chứng minh rằng mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bởi tổng các tích Boole của các biến và phần bù của chúng. Lời giải của bài toán này chứng tỏ rằng mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng cách dùng ba toán tử Boole ., + và $^{-}$. Bài toán thứ hai là : liệu có thể dùng một tập nhỏ hơn các toán tử để biểu diễn các hàm Boole không ? Chúng ta sẽ trả lời bài toán này bằng cách chứng minh rằng mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng cách dùng chỉ một toán tử. Cả hai bài toán trên đều có tầm quan trọng thực tiễn trong việc thiết kế các mạch.

### KHAI TRIỂN TỔNG CÁC TÍCH

Chúng ta sẽ dùng các ví dụ để minh họa một phương pháp quan trọng để tìm biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole.

**Ví dụ 1.** Tìm các biểu thức Boole biểu diễn các hàm $F(x,y,z)$ và $G(x,y,z)$ có các giá trị được cho trong Bảng 1.

**BẢNG 1**

| $x$ | $y$ | $z$ | $F$ | $G$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

*Giải:* Cần phải có một biểu thức có giá trị 1 khi $x = z = 1$ và $y = 0$ và có giá trị 0 trong mọi trường hợp còn lại để biểu diễn hàm $F$. Có thể lập một biểu thức như vậy bằng cách lấy tích Boole của $x$, $\overline{y}$ và $z$. Tích này, tức $x\overline{y}z$, có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = \overline{y} = z = 1$, mà điều này đúng nếu và chỉ nếu $x = z = 1$ và $y = 0$.

Để biểu diễn hàm $G$, ta cần có một biểu thức bằng 1 khi $x = y = 1$ và $z = 0$ *hoặc khi* $x = z = 0$ và $y = 1$. Chúng ta có thể lập một biểu thức với các giá trị đó bằng cách lấy tổng Boole của hai tích Boole khác nhau. Tích Boole $xy\overline{z}$ có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = y = 1$ và $z = 0$. Tương tự, tích Boole $\overline{x}y\overline{z}$ có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = z = 0$ và $y = 1$. Tổng Boole của hai tích này, tức $xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$, biểu diễn hàm $G$ vì nó có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = y = 1$ và $z = 0$ hoặc $x = z = 0$ và $y = 1$.

■

Ví dụ 1 minh họa một thủ tục xây dựng biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole có các giá trị đã cho. Mỗi một tổ hợp giá trị của các biến làm cho hàm có giá trị 1 sẽ dẫn tới một tích Boole của các biến hoặc các phần bù của chúng.

**ĐỊNH NGHĨA 1**. Một biến Boole hoặc phần bù của nó được gọi là một *tục biến*. Tích Boole $y_1y_2 \dots y_n$ trong đó $y_i = x_i$ hoặc $y_i = \overline{x_i}$ với $x_1, x_2 \dots x_n$ là các biến Boole được gọi là một *tiểu hạng* (minterm). Do đó, tiểu hạng là tích của $n$ tục biến.

Một tiểu hạng có giá trị 1 đối với một và chỉ một tổ hợp giá trị của các biến của nó. Nói một cách chính xác hơn, tiểu hạng $y_1y_2 \dots y_n$ bằng

1 nếu và chỉ nếu mọi $y_i = 1$ và điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $x_i = 1$ khi $y_i = x_i$ và $x_i = 0$ khi $y_i = \bar{x}_i$

**Ví dụ 2**. Tìm tiểu hạng có giá trị bằng 1 nếu $x_1 = x_3 = 0$ và $x_2 = x_4 = x_5 = 1$ và bằng 0 trong mọi trường hợp còn lại.

*Giải:* Tiểu hạng $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5$ có tập các giá trị đúng theo yêu cầu của đầu bài.

■

Bằng cách lấy tổng Boole của các tiểu hạng phân biệt chúng ta có thể lập được biểu thức Boole với tập các giá trị đã được cho trước. Đặc biệt, tổng Boole của các tiểu hạng có giá trị 1 chỉ khi một trong các tiểu hạng của tổng có giá trị bằng 1. Tiểu hạng đó có giá trị 0 đối với mọi tổ hợp giá trị còn lại của các biến. Do đó, với một hàm Boole đã cho, ta có thể lập một tổng Boole các tiểu hạng có giá trị 1 khi hàm đó có giá trị 1 và có giá trị 0 khi hàm đó có giá trị 0. Các tiểu hạng của tổng Boole này tương ứng với các tổ hợp giá trị làm cho hàm có giá trị 1. Tổng các tiểu hạng biểu diễn hàm được gọi là **khai triển tổng các tích** hay **dạng tuyển chuẩn tắc** của hàm Boole.

**Ví dụ 3**. Tìm khai triển tổng các tích của hàm $F(x,y,z) = (x + y)\bar{z}$

*Giải:* Bước đầu tiên là tìm các giá trị của hàm $F$. Các giá trị này được cho trong bảng 2.

**BẢNG 2**

| $x$ | $y$ | $z$ | $x + y$ | $\bar{z}$ | $(x + y)\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Khai triển tổng các tích của $F$ là tổng của ba tiểu hạng tương ứng với ba dòng của bảng cho giá trị 1 của hàm đó. Từ đó, ta có :

$$F(x,y,z) = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$$

Cũng có thể tìm biểu thức biểu diễn một hàm Boole bằng cách lấy tích Boole của các tổng Boole. Biểu thức tìm được được gọi là **dạng hội chuẩn tắc** hay **khai triển tích các tổng**. Các khai triển này có thể tìm được từ khai triển tổng các tích bằng cách lấy các đối ngẫu. Việc tìm các biểu thức này như thế nào sẽ được mô tả trực tiếp trong Bài tập 10 ở cuối tiết này.

## TÍNH ĐẦY ĐỦ

Tất cả các hàm Boole đều có thể được biểu diễn như tổng Boole của các tiểu hạng. Mỗi tiểu hạng là một tích Boole của các biến Boole hoặc các phần bù của chúng. Điều này chứng tỏ rằng mỗi hàm Boole có thể được biểu diễn bằng cách dùng các phép toán Boole ., + và $\bar{\ }$ . Vì tất cả các hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng cách dùng các phép toán đó, nên ta nói rằng tập hợp { ., +, $\bar{\ }$ } là **đầy đủ**. Liệu ta có thể tìm được một tập đầy đủ các phép toán nhỏ hơn thế không ? Chúng ta có thể làm được điều đó nếu một trong ba phép toán của tập đó có thể được biểu diễn qua hai phép toán kia. Và điều này có thể làm được bằng cách dùng một trong hai luật De Morgan. Chúng ta có thể loại tất cả các tổng Boole bằng cách dùng hằng đẳng thức :

$$x + y = \overline{\bar{x}\,\bar{y}}$$

hằng đẳng thức này nhận được bằng cách lấy phần bù cả hai vế của luật De Morgan thứ hai được cho trong Bảng 5 ở Tiết 9.1, rồi sau đó áp dụng luật phần bù kép. Điều này có nghĩa là tập { . ; $\bar{\ }$ } là đầy đủ. Tương tự, ta cũng có thể loại tất cả các tích Boole bằng cách dùng hằng đẳng thức :

$$xy = \overline{\bar{x} + \bar{y}},$$

hằng đẳng thức này nhận được bằng cách lấy phần bù cả hai vế của luật De Morgan thứ nhất được cho trong Bảng 5, Tiết 9.1 và sau đó áp dụng luật phần bù kép. Do đó, tập {+ ; $\bar{\ }$} cũng là đầy đủ. Chú ý rằng tập {+, .} không phải là đầy đủ vì nó không thể biểu diễn hàm Boole $F(x) = \bar{x}$ bằng cách dùng các phép toán đó (xem Bài tập 19).

Ở trên chúng ta đã tìm được các tập đầy đủ chứa hai phép toán. Liệu chúng ta còn có thể tìm được tập đầy đủ các phép toán nhỏ hơn nữa, cụ thể là chỉ chứa một phép toán thôi không ? Những tập như vậy có tồn tại. Ta sẽ định nghĩa hai phép toán : phép $|$ hay NAND và phép $\downarrow$ hay NOR như sau :

$$1 \mid 1 = 0,\ 1 \mid 0 = 0 \mid 1 = 0 \mid 0 = 1 \text{ và}$$

$$1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0,\ 0 \downarrow 0 = 1.$$

Cả hai tập $\{ | \}$ và $\{ \downarrow \}$ đều là đầy đủ.

Vì $\{ . ; \bar{\ } \}$ là đầy đủ, nên để thấy $\{ | \}$ là đầy đủ, tất cả những thứ mà ta cần phải làm là chứng tỏ rằng cả hai phép toán . và $\bar{\ }$ đều có thể được biểu diễn bằng cách chỉ dùng phép toán $|$. Điều này được làm như sau:

$$\bar{x} = x \mid x$$

$$xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$$

Độc giả nên tự chứng minh hai hằng đẳng thức đó (xem Bài tập 14).

Chúng tôi cũng dành việc chứng minh $\{ \downarrow \}$ là tập đầy đủ cho bạn đọc như một bài tập (xem các Bài tập 15 và 16).

## *BÀI TẬP*

1. Tìm tích Boole của các biến $x$, $y$, $z$ hoặc phần bù của chúng, biết rằng tích đó có giá trị 1 nếu và chỉ nếu :

   a) $x = y = 0,\ z = 1$ b) $x = 0,\ y = 1,\ z = 0$

   c) $x = 0,\ y = z = 1$ d) $x = y = z = 0$.

2. Tìm khai triển tổng các tích của các hàm Boole sau :

   a) $F(x,y) = \bar{x} + y$ b) $F(x,y) = x\bar{y}$

   c) $F(x,y) = 1$ d) $F(x,y) = \bar{y}$

3. Cũng hỏi như trên với các hàm Boole sau :

   a) $F(x,y,z) = x + y + z$ b) $F(x,y,z) = (x + z)\ y$

   c) $F(x,y,z) = x$ d) $F(x,y,z) = x\ \bar{y}$

4. Tìm khai triển tổng các tích của hàm Boole $F(x,y,z)$ biết rằng $F$ bằng 1 nếu và chỉ nếu :

   a) $x = 0$ b) $xy = 0$

   c) $x + y = 0$ d) $xyz = 0$.

**5.** Tìm khai triển tổng các tích của hàm Boole $F(\omega,x,y,z)$, biết rằng $F$ bằng 1 nếu và chỉ nếu một số lẻ của w, x, y, z có giá trị 1.

**6.** Tìm khai triển tổng các tích của hàm Boole $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ biết rằng $F$ nhận giá trị 1 nếu và chỉ nếu ba hoặc nhiều hơn các biến $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ có giá trị 1.

*Có một cách khác để tìm biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole là lập tích các tổng Boole của các tục biến. Các Bài tập từ 7 đến 11 liên quan tới các biểu diễn thuộc loại đó.*

**7.** Tìm một tổng Boole chứa $x$ hoặc $\overline{x}$, $y$ hoặc $\overline{y}$ và $z$ hoặc $\overline{z}$ có giá trị 0 nếu và chỉ nếu

a) $x = y = 1, z = 0$

b) $x = y = z = 0$

c) $x = z = 0, y = 1$.

**8.** Tìm tích Boole các tổng Boole của các tục biến, biết rằng tích đó có giá trị 0 nếu và chỉ nếu $x = y = 1$ và $z = 0$ hoặc $x = z = 0$ và $y = 1$ hoặc $x = y = z = 0$ (*Gợi ý* : lấy tích Boole của các tổng Boole tìm được trong các câu (a), (b) và (c) của Bài tập 7).

**9.** Chứng minh rằng tổng $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ trong đó $y_i = x_i$ hoặc $y_i = \overline{x}_i$ có giá trị 0 đối với chỉ một tổ hợp giá trị của các biến, cụ thể là khi $x_i = 0$ nếu $y_i = x_i$ và $x_i = 1$ nếu $y_i = \overline{x}_i$. Tổng Boole này được gọi là một **đại hạng** (maxterm).

**10.** Chứng minh rằng một hàm Boole có thể được biểu diễn như tích các đại hạng. Biểu diễn này được gọi là **khai triển tích các tổng** hay **dạng hội chuẩn tắc** của hàm đó. (*Gợi ý* : Đưa một đại hạng vào tích này đối với mỗi tổ hợp giá trị của các biến làm cho hàm đó nhận giá trị 0).

**11.** Tìm khai triển tính các tổng của các hàm Boole cho trong Bài tập 3.

**12.** Biểu diễn các hàm Boole sau bằng cách dùng các phép toán . và $^{-}$:

a) $x + y + z$ b) $x + \overline{y}(\overline{x} + z)$

c) $\overline{(x + \overline{y})}$ d) $\overline{x}\,(x + \overline{y} + \overline{z})$

**13.** Biểu diễn các hàm Boole cho trong Bài tập 12 bằng cách dùng các phép toán + và $^{-}$.

**14.** Chứng minh rằng

a) $\bar{x} = x \mid x$

b) $xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$

c) $x + y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$

**15.** Chứng minh rằng

a) $\bar{x} = x \downarrow x$

b) $xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

c) $x + y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

**16.** Dùng kết quả của Bài tập 15 chứng minh rằng tập $\{\downarrow\}$ là đầy đủ.

**17**. Biểu diễn các hàm Boole cho trong Bài tập 3 bằng cách chỉ dùng phép toán $\mid$.

**18.** Cũng hỏi như trên nhưng đối với phép toán $\downarrow$.

**19**. Chứng minh rằng tập các phép toán $\{+, .\}$ là không đầy đủ.

**20**. Các tập sau có là đầy đủ không

a) $\{+, \oplus\}$ b) $\{\bar{\ }, \oplus\}$ c) $\{., \oplus\}$.

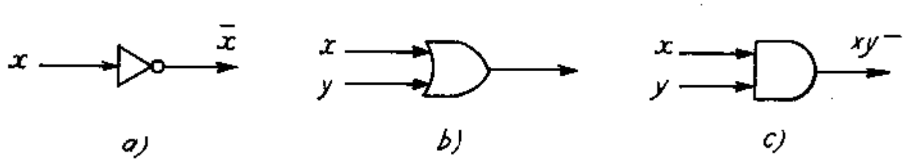
## 9.3. CÁC CỔNG LOGIC

### MỞ ĐẦU

Đại số Boole được dùng để mô hình hóa sơ đồ các mạch trong các dụng cụ điện tử. Mỗi một đầu vào và mỗi một đầu ra của một dụng cụ như vậy có thể được xem như một phần tử của tập $\{0,1\}$. Một máy tính cũng như một dụng cụ điện tử khác được tạo bởi nhiều mạch. Mỗi một mạch có thể được thiết kế bằng cách dùng các qui tắc của đại số Boole đã được đề cập tới trong Tiết 9.1 và 9.2. Các phần tử cơ bản của các mạch được gọi là các **cổng**. Mỗi một loại cổng thực hiện một phép toán Boole. Trong tiết này, chúng ta sẽ định nghĩa một số loại cổng. Dùng các cổng này, chúng ta sẽ áp dụng các qui tắc của đại số Boole để thiết kế các mạch thực hiện các nhiệm vụ khác nhau. Các mạch mà chúng ta sẽ nghiên cứu trong chương này sẽ cho đầu ra chỉ phụ thuộc vào đầu vào chứ không phụ thuộc vào trạng thái hiện thời của mạch. Nói một cách khác, các mạch này không có khả năng nhớ. Những mạch như vậy được gọi là **mạch tổ hợp**.

Chúng ta sẽ xây dựng các mạch tổ hợp bằng cách dùng ba loại phần tử. Loại thứ nhất là **bộ đảo**, nó chấp nhận giá trị của một biến Boole như đầu vào và tạo phần bù của giá trị đó như đầu ra. Ký hiệu được dùng để biểu diễn bộ đảo được cho trên hình 1a. Đầu vào của bộ đảo được cho ở phía trái, đi vào và đầu ra được cho ở phía phải, đi ra từ bộ đảo đó.

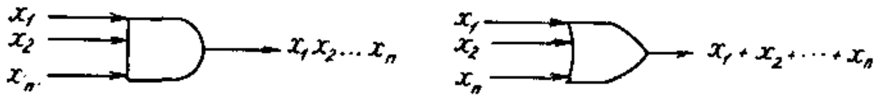
Loại phần tử thứ hai mà chúng ta sẽ dùng là cổng *OR*. Đầu vào cổng này là các giá trị của hai hoặc nhiều hơn biến Boole. Đầu ra là tổng Boole của các giá trị đó. Ký hiệu được dùng để biểu diễn cổng *OR* được cho trên hình 1b. Đầu vào cổng *OR* được cho ở phía trái, đi vào và đầu ra được cho ở phía phải, đi ra khỏi phần tử đó.




***Hình 1.*** Các loại cổng cơ bản.

Loại phần tử thứ ba mà chúng ta sẽ dùng là cổng *AND*. Đầu vào cổng này là các giá trị của hai hoặc nhiều hơn biến Boole. Đầu ra là tích Boole của các giá trị đó. Ký hiệu được dùng để biểu diễn cổng *AND* được cho trên hình 1c. Đầu vào cổng *AND* được cho ở phía trái, đi vào và đầu ra được cho ở phía phải, đi ra từ cổng đó.

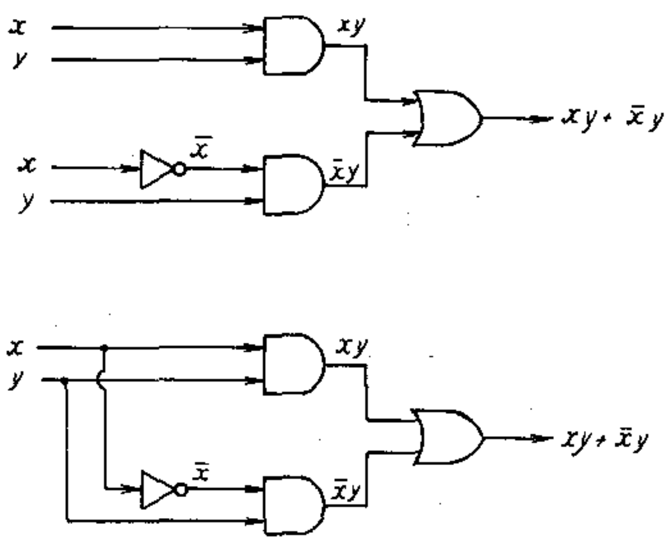
Chúng ta sẽ cho phép có nhiều đầu vào đối với các cổng *OR* và *AND*. Các đầu vào đối với mỗi cổng này được cho ở bên trái, đi vào cổng và đầu ra cho ở bên phải. Ví dụ về các cổng *AND* và *OR* với *n* đầu vào được cho trong Hình 2.




*Hình 2.* Các cổng có $n$ đầu vào.

## TỔ HỢP CÁC CỔNG

Các mạch tổ hợp có thể được xây dựng bằng cách dùng tổ hợp các bộ đảo, các cổng *OR* và *AND*. Khi lập tổ hợp các mạch, một số cổng có thể dùng chung đầu vào. Điều này được chỉ rõ ở một trong hai cách vẽ mạch dưới đây. Một cách dùng các phân nhanh để chỉ tất cả các cổng cùng dùng một đầu vào đã cho. Còn cách thứ hai chỉ đầu vào này một cách riêng biệt đối với mỗi cổng. Hình 3 minh họa hai cách biểu diễn các cổng cùng dùng chung các giá trị đầu vào. Cũng cần chú ý rằng đầu ra từ một cổng có thể được dùng như đầu vào đối với một hoặc nhiều phần tử như được chỉ rõ trên hình 3. Cả hai hình vẽ trên hình 3 đều vẽ mạch cho cùng đầu ra là $xy + \bar{x}y$.



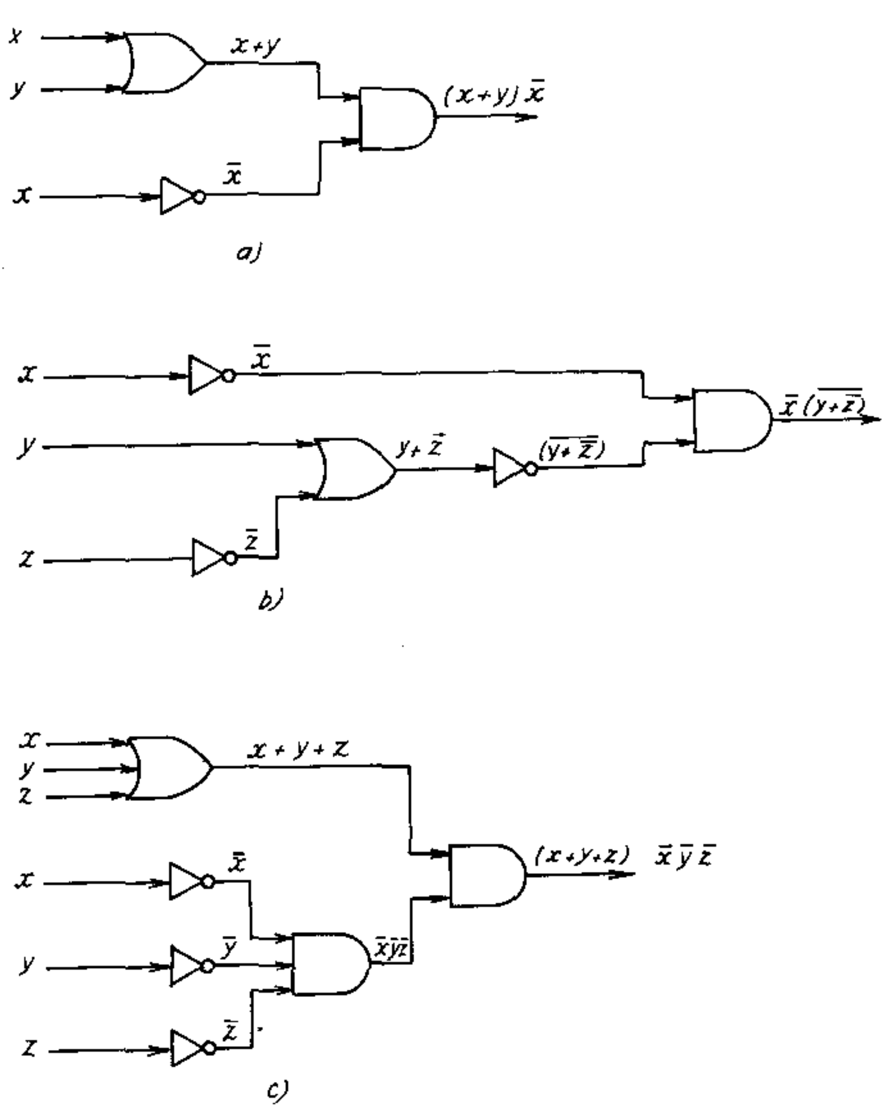

*Hình 3.* Hai cách vẽ cùng một mạch.

**Ví dụ 1.** Dựng các mạch tạo các đầu ra sau :

(a) $(x + y)\overline{x}$ ;

(b) $\overline{x}(\overline{y + \overline{z}})$ và (c) $(x + y + z)(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})$

*Giải:* Các mạch tạo các đầu ra như trên được cho trên Hình 4. ∎



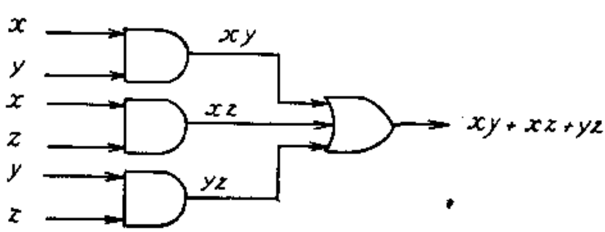

*Hình 4.* Các mạch tạo đầu ra cho trong ví dụ 1.

## VÍ DỤ VỀ CÁC MẠCH

Chúng ta sẽ cho một số ví dụ về các mạch thực hiện một số hàm tiện ích.

**Ví dụ 2**. Một ủy ban gồm ba thành viên phải quyết định các vấn đề của một tổ chức. Mỗi một thành viên bỏ phiếu tán thành hoặc không cho mỗi một đề nghị được đưa ra. Một đề nghị sẽ được thông qua nếu nó nhận được ít nhất hai phiếu tán thành. Hãy thiết kế một mạch cho phép xác định được một đề nghị có được thông qua hay không.

*Giải:* Cho $x = 1$ nếu thành viên thứ nhất bỏ phiếu tán thành và $x = 0$ nếu thành viên đó không tán thành ; cho $y = 1$ nếu thành viên thứ hai bỏ phiếu tán thành và $y = 0$ nếu thành viên đó không tán thành ; cho $z = 1$ nếu thành viên thứ ba bỏ phiếu tán thành và $z = 0$ nếu thành viên đó không tán thành. Khi đó mạch cần được thiết kế sao cho nó tạo đầu ra bằng 1 từ các đầu vào $x$, $y$ và $z$ khi có hai hoặc nhiều hơn các biến $x$, $y$, $z$ có giá trị là 1. Một biểu diễn của hàm Boole có giá trị đầu ra đó là $xy + xz + yz$ (xem Bài tập 6 ở Tiết 9.1). Mạch thực hiện hàm này được cho trên Hình 5.




*Hình 5.* Mạch bỏ phiếu theo đa số.

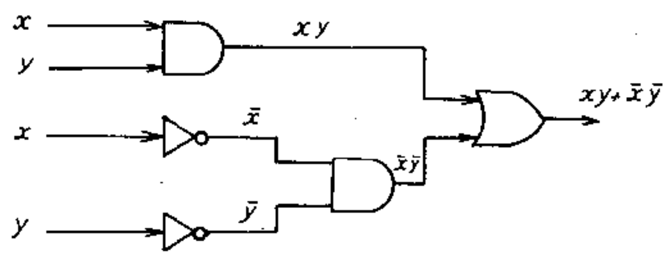
■

**Ví dụ 3.** Đôi khi các hệ thống đèn cố định được điều khiển bởi nhiều công tắc. Các mạch cần được thiết kế sao cho khi ấn (hoặc gạt) một công tắc bất kỳ hệ thống đèn đang tắt sẽ bật và đang bật sẽ tắt. Hãy thiết kế một mạch thực hiện điều đó khi có hai công tắc và khi có ba công tắc.

*Giải:* Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc thiết kế mạch điện điều khiển hệ thống đèn khi dùng hai công tắc khác nhau. Giả xử $x = 1$ khi công tắc thứ nhất đóng và $x = 0$ khi nó mở, giả sử $y = 1$ khi công tắc thứ hai đóng và $y = 0$ khi nó mở. Giả sử $F(x,y) = 1$ khi đèn sáng và $F(x,y) = 0$ khi đèn tắt. Chúng ta hoàn toàn có thể tùy chọn để đèn sẽ sáng khi hai công tắc đều đóng, tức là $F(1,1) = 1$. Điều này sẽ xác định các giá trị khác cùng hàm $F$. Khi một trong hai công tắc mở đèn sẽ tắt, tức là $F(1,0) = F(0,1) = 0$. Khi công tắc còn lại cũng mở nốt đèn lại sáng, tức $F(0,0) = 1$. Các giá trị đó được cho trong Bảng 1. Chúng ta thấy rằng $F(x,y) = xy + \bar{x}\,\bar{y}$. Hàm này được thực hiện bởi mạch được cho trên Hình 6.

**BẢNG 1**

| x | y | F |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

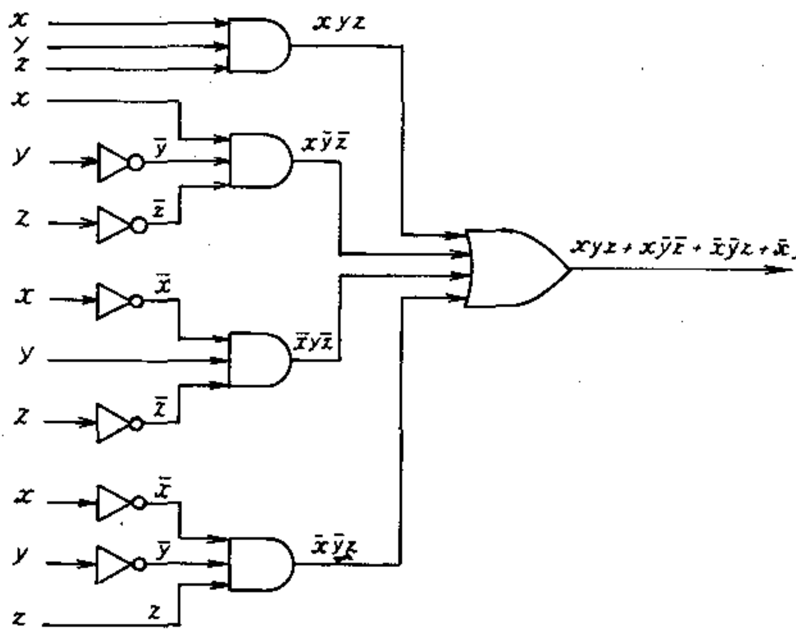



***Hình 6.*** Mạch đèn được điều khiển bởi hai công tắc.

Bây giờ chúng ta sẽ thiết kế mạch dùng ba công tắc. Cho $x$, $y$, $z$ là ba biến Boole chỉ sự đóng mở của các công tắc. Giả sử $x = 1$ khi công tắc một đóng và $x = 0$ khi nó mở ; giả sử $y = 1$ khi công tắc hai đóng và $y = 0$ khi nó mở ; giả sử $z = 1$ khi công tắc ba đóng và $z = 0$ khi nó mở. Giả sử $F(x,y,z) = 1$ khi đèn bật và $F(x,y,z) = 0$ khi đèn tắt. Điều này sẽ xác định các giá trị khác của $F$. Khi một công tắc mở đèn sẽ tắt, tức là $F(1,1,0) = F(1,0,1) = F(0,1,1) = 0$. Khi thêm một công tắc nữa mở đèn lại sáng, tức là $F(1,0,0) = F(0,1,0) = F(0,0,1) = 1$. Cuối cùng khi cả ba công tắc đều mở đèn lại tắt, tức là $F(0,0,0) = 0$. Các giá trị của hàm $F$ được cho trong Bảng 2.

| BẢNG 2 | | | |
|---|---|---|---|
| $x$ | y | $z$ | $F(x,y,z)$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

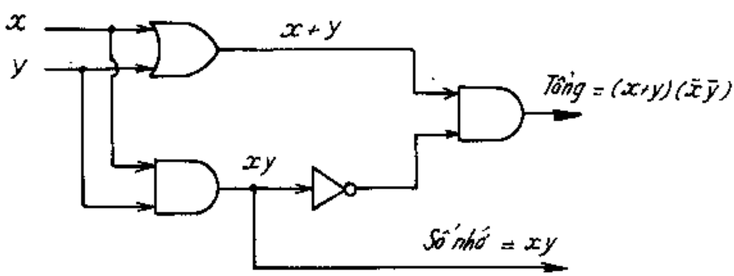
Hàm $F$ có thể được biểu diễn bởi khai triển tổng các tích, cụ thể là $F(x,y,z) = xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$. Mạch thực hiện hàm này được cho trên Hình 7.




***Hình 7.*** Mạch đèn được điều khiển bởi ba công tắc.

## BỘ CỘNG

Chúng ta sẽ minh họa các mạch logic có thể được dùng như thế nào để thực hiện phép cộng hai số nguyên dương từ các khai triển nhị phân của chúng. Chúng ta sẽ xây dựng sơ đồ mạch để làm việc này từ một số mạch thành phần. Trước hết, chúng ta sẽ xây dựng một mạch có thể được dùng để tìm $x + y$ với $x$ và $y$ là hai bit. Đầu vào mạch này sẽ là $x$ và $y$ vì mỗi chúng đều có giá trị 0 hoặc 1. Đầu ra sẽ gồm hai bit, cụ thể là $s$ và $c$, trong đó s là bit tổng và $c$ là bit nhớ. Mạch này được gọi là mạch **nhiều đầu ra** vì nó có hơn một đầu ra. Mạch mà chúng ta đang thiết kế được gọi là **bộ nửa cộng**, vì nó cộng hai bit mà không xét đến số nhớ từ phép cộng trước. Chúng ta biểu diễn đầu vào và đầu ra của bộ nửa cộng trong Bảng 3. Từ Bảng 3 ta thấy rằng $c = xy$ và $s = x\bar{y} + \bar{x}y = (x + y)(\overline{xy})$. Do đó, mạch cho trên Hình 8 sẽ tính bit tổng s và bit nhớ $c$ từ các bit $x$ và $y$.




*Hình 8.* Bộ nửa cộng.

**BẢNG 3. Đầu vào và đầu ra đối với bộ nửa cộng**

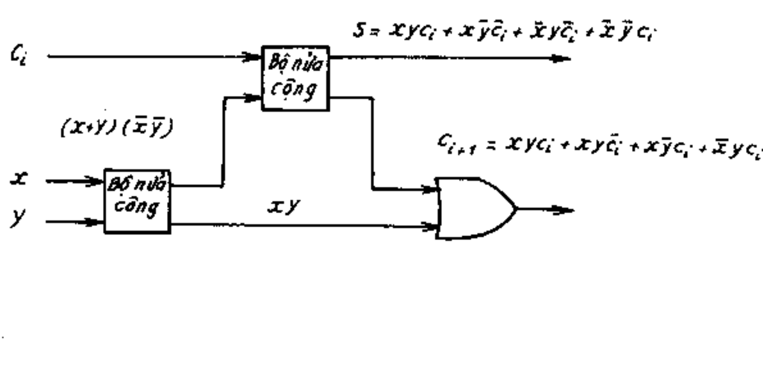
| $x$ | y | $s$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

Chúng ta sẽ dùng **bộ cộng đầy đủ** để tính bit tổng và bit nhớ khi hai bit được cộng cùng với số nhớ. Đầu vào đối với bộ cộng đầy đủ là các bit $x$ *và* $y$ và số nhớ $c_i$. Đầu ra là bit tổng $s$ và bit nhớ mới $c_{i+1}$. Đầu vào và đầu ra của bộ cộng đầy đủ được cho trong Bảng 4.

**BẢNG 4. Đầu vào và đầu ra đối với bộ cộng đầy đủ**

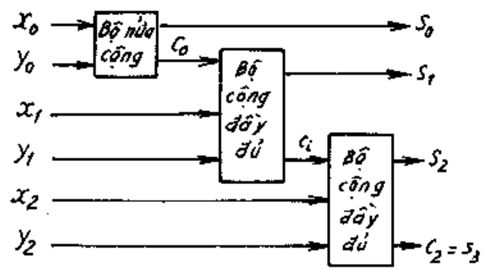
| Đầu vào | | | Đầu ra | |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | y | $c_i$ | $s$ | $c_{i+1}$ |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Hai đầu ra của bộ cộng đầy đủ, tức là bit tổng và bit nhớ $c_{i+1}$ được biểu diễn bởi khai triển tổng các tích $xyc_i + x\bar{y}\bar{c}_i + \bar{x}y\bar{c}_i + \bar{x}\bar{y}c_i$ và $xyc_i + xy\bar{c}_i + x\bar{y}c_i + \bar{x}yc_i$, tương ứng. Tuy nhiên, thay vì thiết kế bộ cộng đầy đủ từ các phần tử cơ bản, ta sẽ dùng các bộ nửa cộng để tạo các đầu ra mong muốn. Mạch bộ cộng đầy đủ dùng các bộ nửa cộng được cho trên Hình 9.




***Hình 9.*** Bộ cộng đầy đủ

Cuối cùng Hình 10 cho thấy các bộ cộng đầy đủ và bộ nửa cộng đã được sử dụng để cộng hai số nguyên dương ba bit $(x_2\ x_1\ x_0)_2$ và $(y_2\ y_1\ y_0)_2$ để tạo tổng $(s_3\ s_2\ s_1\ s_0)_2$ như thế nào. Chú ý rằng $s_3$ là bit bậc cao nhất trong tổng được cho bởi số nhớ $c_2$.

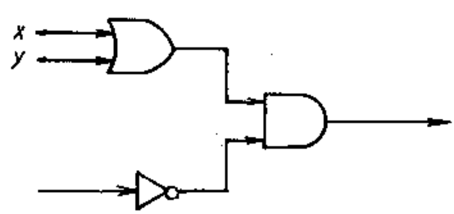



***Hình 10.*** Cộng hai số nguyên ba bit bằng các bộ cộng đầy đủ và bộ nửa cộng.

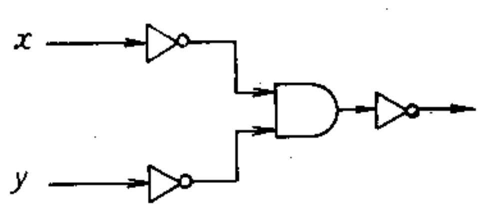
## BÀI TẬP

*Trong các bài tập từ 1 đến 5 hãy tìm đầu ra của các mạch đã cho*

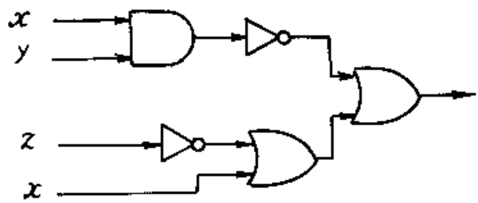
**1.**



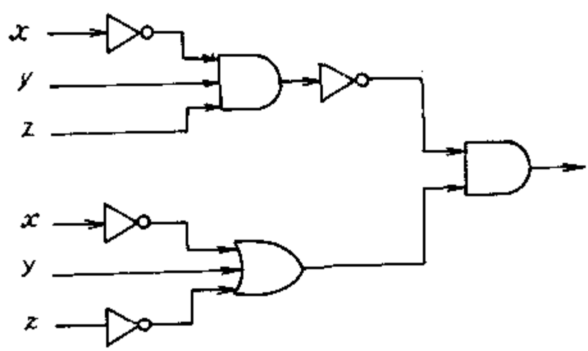

**2.**



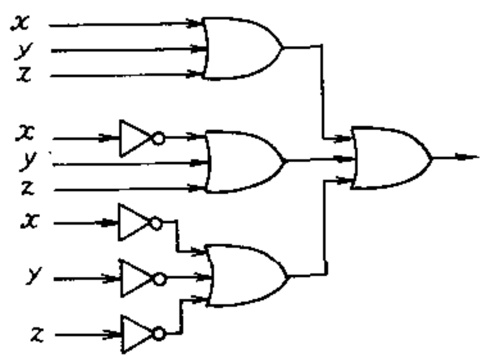
**3.**




**4.**




**5.**




**6.** Dựng các mạch gồm các bộ đảo, các cổng *AND* và *OR* để tạo các đầu ra sau :

a) $\overline{x} + y$ b) $\overline{(x + y)}\,x$

c) $xyz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ d) $\overline{(\overline{x} + z)(y + \overline{z})}$

**7.** Thiết kế một mạch thực hiện sự bỏ phiếu theo đa số cho năm thành viên.

**8.** Thiết kế một mạch cho hệ thống đèn được điều khiển bởi bốn công tắc trong đó chỉ cần ấn (hoặc gạt) một công tắc bất kỳ cũng làm cho đèn đang tắt bật sáng và đèn đang sáng sẽ tắt.

**9.** Hãy chỉ ra cách tìm tổng của hai số nguyên năm bit khi dùng các bộ cộng đầy đủ và bộ nửa cộng.

**10.** Hãy xây dựng một mạch cho bộ nửa trừ bằng cách dùng các bộ đảo, các cổng *AND* và *OR*. Bộ nửa trừ có hai bit là đầu vào và tạo đầu ra gồm hiệu và phần mượn.

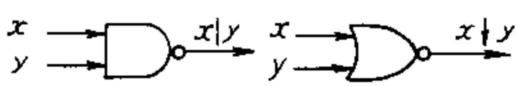
**11.** Hãy xây dựng một mạch cho **bộ trừ đầy đủ** bằng cách dùng các bộ đảo và các cổng *AND* và *OR*. Bộ **trừ đầy đủ** có đầu vào là hai bit và phần mượn và tạo đầu ra gồm bit hiệu và phần mượn.

**12.** Dùng các mạch từ các Bài tập 10 và 11 tìm hiệu của hai số nguyên bốn bit trong đó số nguyên thứ nhất lớn hơn số nguyên thứ hai.

**13*.** Xây dựng một mạch có nhiệm vụ so sánh hai số nguyên hai bit $(x_1x_0)_2$ và $(y_1y_0)_2$ và cho đầu ra bằng 1 khi số thứ nhất lớn hơn và bằng 0 trong trường hợp còn lại.

**14*.** Xây dựng một mạch tính tích của hai số nguyên hai bit $(x_1x_0)_2$ và $(y_1y_0)_2$. Mạch này cần có bốn bit đầu ra cho các bit trong tích đó.

*Có hai cổng thường được dùng trong các mạch là các cổng NAND và NOR. Khi dùng các cổng NAND hoặc NOR để biểu diễn các mạch, người ta không cần phải sử dụng các loại cổng khác. Ký hiệu được dùng để biểu diễn các cổng này như sau :*




**15*.** Hãy dùng các cổng *NAND* xây dựng các mạch với các đầu ra như sau :

a) $\bar{x}$ b) $x + y$

c) $xy$ d) $x \oplus y$.

**16*.** Hãy dùng các cổng *NOR* để dựng các mạch có đầu ra được cho trong Bài tập 15.

**17*.** Hãy dùng các cổng *NAND* để dựng bộ nửa cộng.

**18*.** Hãy dùng các cổng *NOR* để dựng bộ nửa cộng.

*Một bộ* **dồn tín hiệu** *(multiplexer) là một mạch chuyển tạo một đầu ra từ tập các bit đầu vào dựa trên các giá trị của các bit điều khiển.*

**19.** Xây dựng một bộ dồn tín hiệu bằng cách dùng các bộ đảo, các cổng *AND* và *OR*, biết rằng nó có bốn bit đầu vào $x_0$, $x_1$, $x_2$ và $x_3$ và hai bit điều khiển $c_0$ và $c_1$. Lập một mạch sao cho $x_i$ là đầu vào với $i$ là giá trị thập phân của số nguyên hai bit $(c_1c_0)_2$.

## 9.4. CỰC TIỂU HÓA CÁC MẠCH

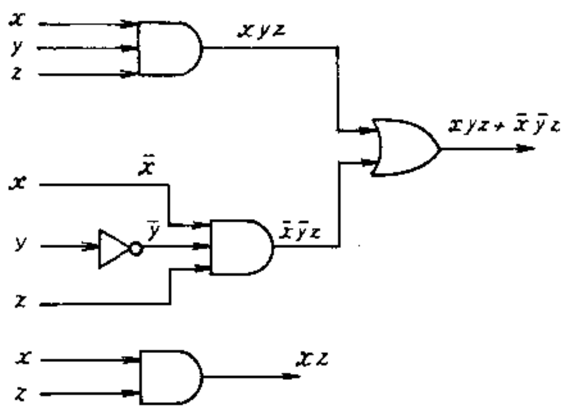
### MỞ ĐẦU

Hiệu quả của một mạch tổ hợp phụ thuộc vào số các cổng và sự bố trí các cổng đó. Quá trình thiết kế một mạch tổ hợp được bắt đầu bằng một bảng chỉ rõ các giá trị đầu ra đối với mỗi một tổ hợp các giá trị đầu vào. Chúng ta luôn luôn có thể sử dụng khai triển tổng các tích của mạch để tìm tập các cổng logic thực hiện mạch đó. Tuy nhiên, khai triển tổng các tích có thể chứa các số hạng nhiều hơn mức cần thiết. Các số hạng trong khai triển tổng các tích chỉ khác nhau ở một biến, sao cho trong số hạng này xuất hiện biến đó và trong số hạng kia xuất hiện phần bù của nó, đều có thể được tổ hợp lại. Ví dụ, xét mạch có đầu ra bằng 1 nếu và chỉ nếu $x = y = z = 1$ *hoặc* $x = z = 1$ và $y = 0$. Khai triển tổng các tích của mạch này là $xyz + x\bar{y}z$. Hai tích trong khai triển này chỉ khác nhau chỉ ở một biến, đó là biến $y$. Chúng có thể được tổ hợp lại như sau :

$$xyz + x\bar{y}z = (y + \bar{y})xz$$
$$= 1xz$$
$$= xz.$$

Do đó, $xz$ là biểu thức với ít phép toán hơn biểu diễn mạch đã cho. Hai thực hiện khác nhau của mạch đó được cho trên Hình 1. Mạch thứ hai chỉ dùng một cổng, trong khi đó mạch thứ nhất phải dùng ba cổng và một bộ đảo.

Ví dụ trên chứng tỏ rằng sự tổ hợp các số hạng trong khai triển tổng các tích sẽ dẫn đến một biểu thức đơn giản hơn đối với mạch. Chúng ta sẽ mô tả dưới đây hai thủ tục làm đơn giản hóa các khai triển tổng các tích. Mục đích của hai thủ tục này là tạo tổng Boole của các tích Boole chứa một số nhỏ nhất tích các tục biến sao cho các tích này lại chứa một số ít nhất các tục biến trong số tất cả những tổng các tích biểu diễn cùng một hàm Boole.




*Hình 1.* Hai mạch có cùng đầu ra.

Các kỹ thuật được mô tả trong tiết này dùng để đơn giản hóa những khai triển tổng các tích vẫn còn giữ nguyên giá trị thực tiễn. Tuy nhiên, các mạch hiện đại thường được xây dựng từ các loại phần tử phức tạp hơn các cổng *AND*, *OR* và các bộ đảo. Và có rất nhiều thủ tục được dùng để đơn giản hóa các mạch được xây dựng từ các loại phần tử phức tạp đó. Tuy nhiên, nhiều phương pháp đó đều dùng những ý tưởng tương tự như những ý tưởng được mô tả trong tiết này.

## BẢN ĐỒ KARNAUGH

Để làm giảm số các số hạng trong một biểu thức Boole biểu diễn một mạch, ta cần phải tìm các số hạng để tổ hợp lại. Có một phương pháp đồ thị – được gọi là **bản đồ Karnaugh** hay **bìa Karnaugh** – được dùng để tìm các số hạng tổ hợp được đối với các hàm Boole có số biến tương đối nhỏ. Phương pháp mà chúng ta sắp mô tả dưới đây đã được Maurice Karnaugh đưa ra vào năm 1953. Phương pháp của ông dựa trên một công trình trước đó của E.W.Veitch. (Phương pháp này thường chỉ được áp dụng khi hàm có sáu biến hoặc ít hơn). Các bản đồ Karnaugh cho chúng ta một phương pháp trực quan để rút gọn các khai triển tổng các tích, nhưng chúng không thích hợp với việc cơ khí hóa quá trình này. Trước hết chúng ta sẽ minh họa cách dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn biểu thức của các hàm Boole hai biến.

Có bốn tiểu hạng khả dĩ trong khai triển tổng các tích của một hàm Boole có hai biến $x$ và $y$. Một bản đồ Karnaugh đối với một hàm Boole hai biến này gồm bốn ô vuông, trong đó hình vuông biểu diễn tiểu hạng có mặt trong khai triển được ghi số 1. Các hình ô được gọi là **kề nhau** nếu các tiểu hạng mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một tục biến. Ví dụ, ô vuông biểu diễn $\bar{x}y$ kề với các ô vuông biểu biểu diễn $xy$ và $\bar{x}\bar{y}$. Bốn ô vuông và các tiểu hạng mà chúng biểu diễn dược cho trên Hình 2.

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | $xy$ | $x\bar{y}$ |
| $\bar{x}$ | $\bar{x}y$ | $\bar{x}\bar{y}$ |

*Hình 2.* Bản đồ Karnaugh hai biến.

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | 1 | |
| $\bar{x}$ | 1 | |

a)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | |

b)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | 1 |

c

*Hình 3.* Các bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích trong Ví dụ 1.

**Ví dụ 1.** Tìm các bản đồ Karnaugh cho

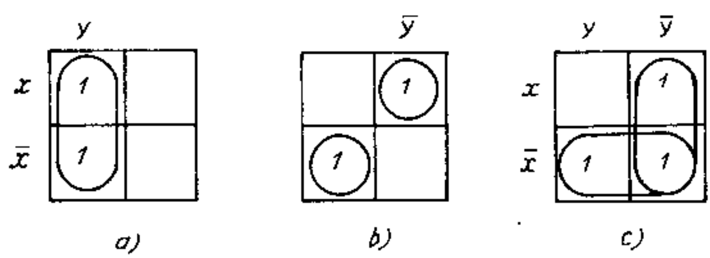
(a) $xy + \bar{x}y$ (b) $x\bar{y} + \bar{x}y$ và (c) $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

*Giải:* Chúng ta ghi số 1 vào ô vuông khi tiểu hạng được biểu diễn bởi ô đó có mặt trong khai triển tổng các tích. Ba bản đồ Karnaugh được cho trên Hình 3.

■

Chúng ta có thể nhận dạng được các tiểu hạng có thể tổ hợp được từ bản đồ Karnaugh. Bất cứ khi nào có các số 1 ở hai ô kề nhau, thì các tiểu hạng được biểu diễn bởi các ô đó đều có thể được tổ hợp lại thành một tích chỉ có một biến. Ví dụ, $x\overline{y}$ và $\overline{x}\,\overline{y}$ được biểu diễn bởi hai ô kề nhau và có thể tổ hợp lại thành $\overline{y}$, vì $x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} = (x + \overline{x})\overline{y} = \overline{y}$. Hơn nữa, nếu các số 1 có trong tất cả bốn ô, thì bốn tiểu hạng có thể tổ hợp lại thành một số hạng, cụ thể là biểu thức Boole 1, không có liên quan đến một biến nào. Chúng ta sẽ khoanh các khối ô trong bản đồ Karnaugh, đó là những ô biểu diễn các tiểu hạng có thể tổ hợp lại và sau đó tìm tổng tương ứng của các tích. Mục tiêu là phải nhận dạng các khối khả dĩ lớn nhất và phủ tất cả các ô chứa số 1 bằng số ít nhất các khối bằng cách dùng trước hết các khối lớn nhất và luôn luôn dùng các khối khả dĩ lớn nhất.

**Ví dụ 2.** Rút gọn các khai triển tổng các tích được cho trong Ví dụ 1.




*Hình 4.* Đơn giản hóa khai triển tổng cách tích từ Ví dụ 1.

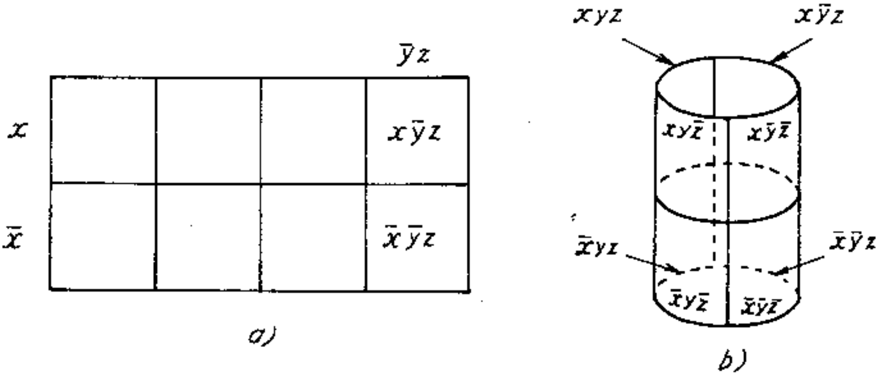
*Giải:* Việc nhóm các tiểu hạng được chỉ ra trong Hình 4 bằng cách sử dụng các bản đồ Karnaugh cho các khai triển đó. Khai triển cực tiểu của tổng các tích này tương ứng là :

(a) $y$ ; (b) $x\overline{y} + \overline{x}y$ và (c) $\overline{x} + \overline{y}$ .

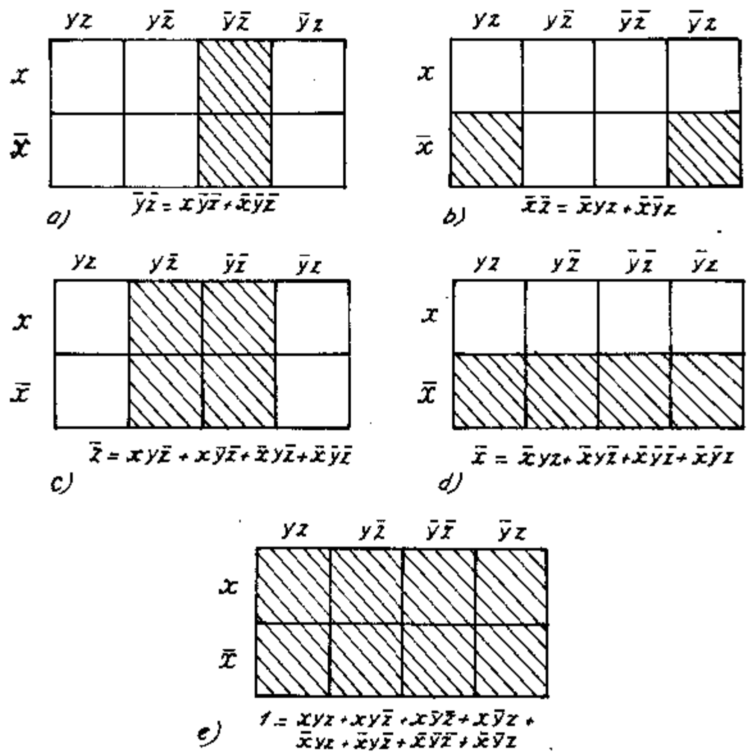
■

Bản đồ Karnaugh ba biến là một hình chữ nhật được chia thành tám ô. Các ô đó biểu diễn tám tiểu hạng ba biến khả dĩ. Hai ô được gọi là kề nhau nếu các tiểu hạng mà chúng biểu diễn chỉ khác nhau một tục biến.

Một trong các cách để lập bản đồ Karnaugh ba biến được cho trên hình 5(a). Bản đồ Karnaugh này có thể được xem như nằm trên một mặt trụ, như được biểu diễn trên hình 5(b). Trên mặt trụ, hai ô có biên chung nếu và chỉ nếu chúng là kề nhau.




*Hình 5.* Bản đồ Karnaugh ba biến.




*Hình 6.* Các khối trong bản đồ Karnaugh ba biến.

Để rút gọn khai triển tổng các tích ba biến, chúng ta sẽ dùng bản đồ Karnaugh để nhận dạng các tiểu hạng có thể tổ hợp lại. Các khối gồm hai ô kề nhau biểu diễn cặp các tiểu hạng có thể được tổ hợp lại thành một tích của hai tục biến ; các khối $2 \times 2$ và $4 \times 1$ biểu diễn các tiểu hạng có thể tổ hợp lại thành một tục biến duy nhất ; còn khối gồm tất cả tám ô biểu diễn một tích không có một tục biến nào, cụ thể, đây là biểu thức 1. Hình 6 cho biểu diễn các khối $1 \times 2$, $2 \times 1$, $2 \times 2$, $4 \times 1$ và $4 \times 2$ và các tích mà chúng biểu diễn.

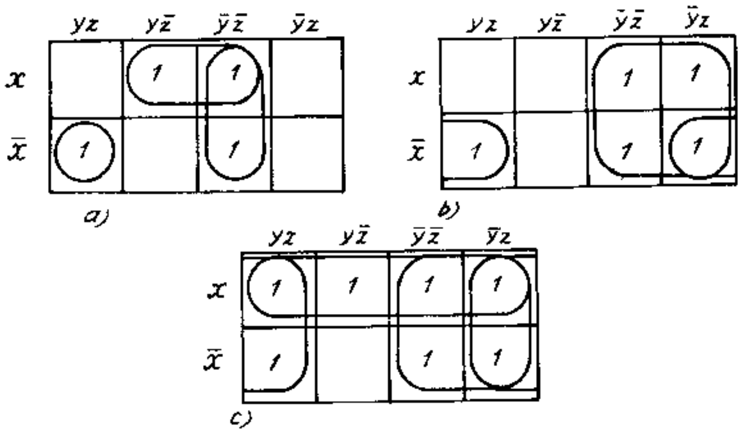
Mục tiêu là phải nhận dạng các khối khả dĩ lớn nhất trong bản đồ và phủ tất cả các ô chứa số 1 bằng một số nhỏ nhất các khối mà trước hết là khối lớn nhất. Luôn luôn phải chọn các ô khả dĩ lớn nhất. Chú ý rằng không chỉ có một cách để làm điều này. Ví dụ sau cho thấy các bản đồ Karnaugh ba biến được sử dụng như thế nào.

**Ví dụ 3.** Dùng các bản đồ Karnaugh ba biến để rút gọn các khai triển tổng các tích sau :

a) $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ,

b) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.




*Hình 7.* Dùng các bản đồ Karnaugh ba biến.

*Giải:* Bản đồ Karnaugh cho những khai triển tổng các tích này được cho trên hình 7. Việc nhóm thành các khối cho thấy rằng các khai triển cực tiểu thành các tổng Boole của các tích Boole là :

a) $x\bar{z} + \bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz$ , b) $\bar{y} + \bar{x}z$ và c) $x + \bar{y} + z$.

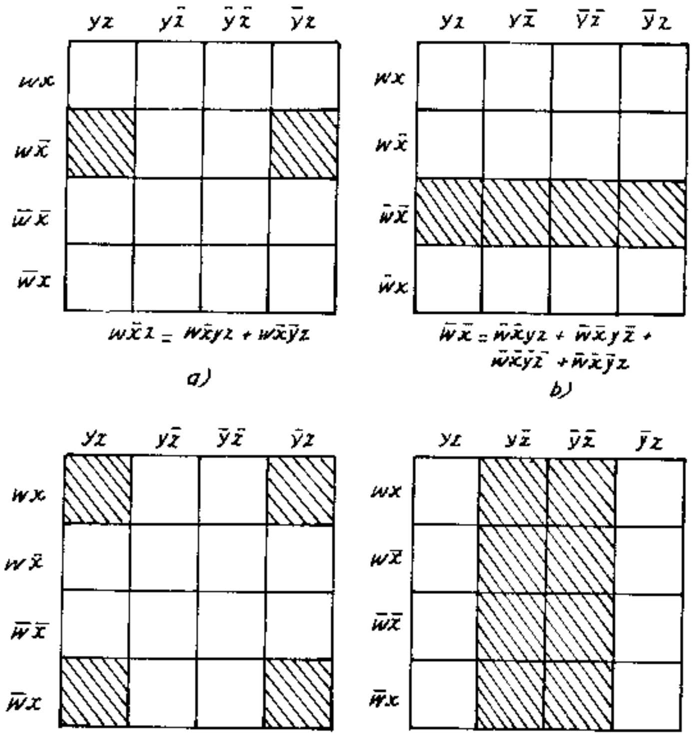
■

Bản đồ Karnaugh bốn biến là một hình vuông được chia làm 16 ô. Các ô này biểu diễn 16 tiểu hạng khả dĩ. Một trong những cách lập bản đồ Karnaugh bốn biến được cho trên Hình 8.

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega x$ | $\omega xyz$ | $\omega xy\bar{z}$ | $\omega x\bar{y}\bar{z}$ | $\omega x\bar{y}z$ |
| $\omega\bar{x}$ | $\omega\bar{x}yz$ | $\omega\bar{x}y\bar{z}$ | $\omega\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $\omega\bar{x}\bar{y}z$ |
| $\bar{\omega}\bar{x}$ | $\bar{\omega}\bar{x}yz$ | $\bar{\omega}\bar{x}y\bar{z}$ | $\bar{\omega}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{\omega}\bar{x}\bar{y}z$ |
| $\bar{\omega}x$ | $\bar{\omega}xyz$ | $\bar{\omega}xy\bar{z}$ | $\bar{\omega}x\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{\omega}x\bar{y}z$ |

***Hình 8.*** Bản đồ Karnaugh bốn biến

Hai ô được gọi là kề nhau nếu và chỉ nếu các tiểu hạng mà chúng biểu



$w\bar{x}z = w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z$

*a)*

$\bar{w}\bar{x} = \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z$

*b)*

$wz = wxyz + wx\bar{y}z + \bar{w}xyz + \bar{w}x\bar{y}z$

*c)*

$\bar{z} = wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}\bar{z}$

*d)*

***Hình 9.*** Các khối trong bản đồ Karnaugh bốn biến.

diễn chỉ khác nhau một tục biến. Do đó, mỗi một ô kề với bốn ô khác. Bản đồ Karnaugh của một khai triển tổng các tích bốn biến có thể được xem như nằm trên mặt một hình xuyến (giống như chiếc xăm ô tô – ND), sao cho các ô kề nhau đều có biên chung (xem Bài tập 20). Sự rút gọn một khai triển tổng các tích bốn biến được thực hiện bằng cách nhận dạng các khối gồm 2, 4, 8 hoặc 16 ô biểu diễn các tiểu hạng có thể tổ hợp lại được. Mỗi ô biểu diễn một tiểu hạng hoặc được dùng để lập một tích có ít tục biến hơn hoặc được đưa vào trong khai triển. Hình 9 cho một số ví dụ về các khối biểu diễn các tích có ba tục biến, các tích có hai tục biến, và một tục biến duy nhất.

Cũng như trong trường hợp bản đồ Karnaugh hai và ba biến, mục tiêu là cần phải nhận dạng các khối lớn nhất có chứa các số 1 trong bản đồ và phủ tất cả các số 1 bằng cách dùng một số ít nhất các khối, mà trước hết là các khối lớn nhất. Ví dụ sau minh họa các bản đồ Karnaugh bốn biến được dùng như thế nào.

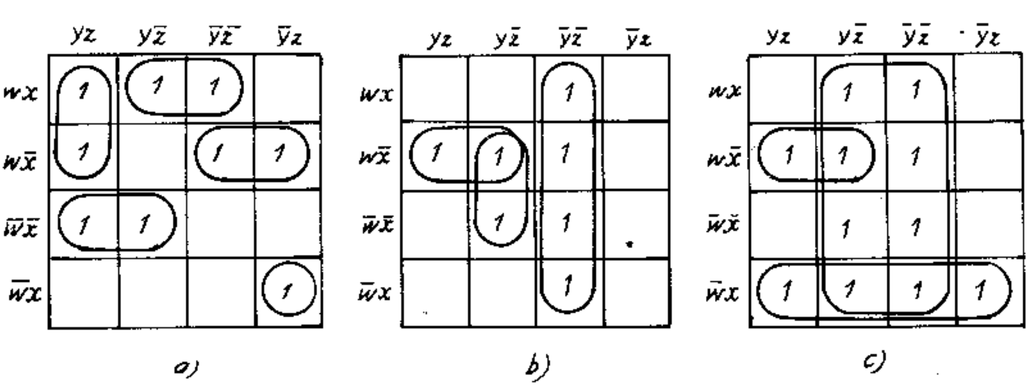
**Ví dụ 4.** Dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn các khai triển tổng các tích sau :

(a) $\omega xyz + \omega xy\bar{z} + \omega x\bar{y}\bar{z} + \omega\bar{x}yz + \omega\bar{x}\bar{y}z + \omega\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{\omega}x\bar{y}z + \bar{\omega}\bar{x}yz + \bar{\omega}\bar{x}y\bar{z}$

(b) $\omega x\bar{y}\bar{z} + \omega\bar{x}yz + \omega\bar{x}y\bar{z} + \omega\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{\omega}x\bar{y}\bar{z} + \bar{\omega}\bar{x}y\bar{z} + \bar{\omega}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

(c) $\omega xy\bar{z} + \omega x\bar{y}\bar{z} + \omega\bar{x}yz + \omega\bar{x}y\bar{z} + \omega\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{\omega}xyz + \bar{\omega}xy\bar{z} + \bar{\omega}x\bar{y}\bar{z} + \bar{\omega}x\bar{y}z + \bar{\omega}\bar{x}y\bar{z} + \bar{\omega}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

*Giải:* Bản đồ Karnaugh cho các khai triển trên được cho trên Hình 10. Dùng các khối đã vạch trên hình có thể dẫn tới tổng các tích sau




***Hình 10.*** Dùng các bản đồ Karnaugh bốn biến.

a) $\omega yz + \omega x\bar{z} + \omega\bar{x}\,\bar{y} + \overline{\omega}\,\bar{x}y + \overline{\omega}\,x\,\bar{y}\,z$, b) $\bar{y}\,\bar{z} + \omega\bar{x}y + \bar{x}\,y\,\bar{z}$ và c) $\bar{z} + \overline{\omega}x + \omega\bar{x}y$. Độc giả nên xác định xem có còn cách chọn các khối khác trong mỗi câu, dẫn đến những tổng khác của các tích biểu diễn các hàm Boole hay không.

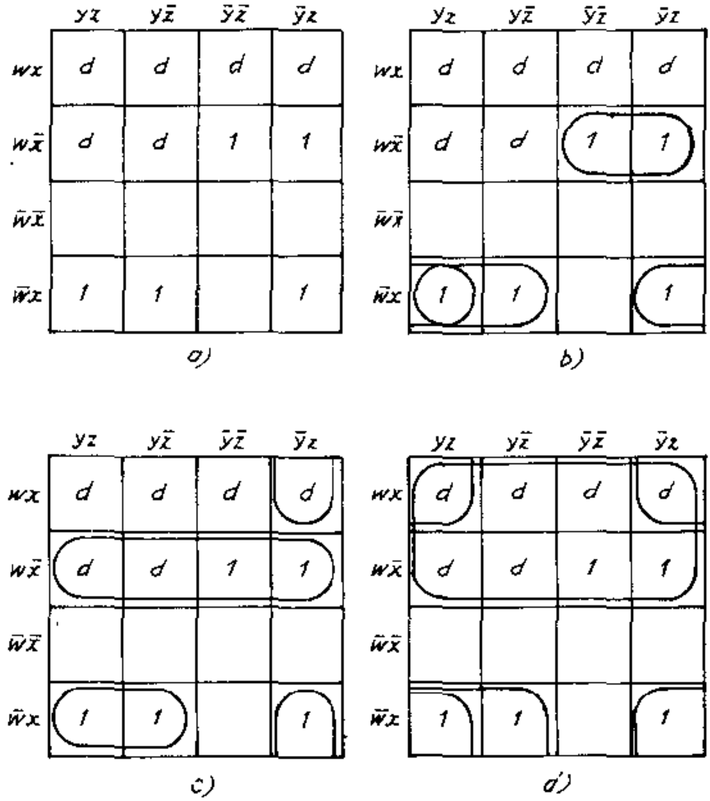
■

## CÁC ĐIỀU KIỆN *"KHÔNG CẦN QUAN TÂM"*

Trong một số mạch, chúng ta chỉ quan tâm đầu ra đối với một số tổ hợp của các giá trị đầu vào, vì những tổ hợp khác của các giá trị đầu vào không bao giờ xảy ra. Điều này cho phép chúng ta tự do tạo một mạch đơn giản với đầu ra đúng như mong muốn, vì các giá trị đầu ra đối với tất cả các tổ hợp không bao giờ xảy ra có thể được chọn một cách tùy ý. Các giá trị của hàm đối với những tổ hợp này được gọi là các **điều kiện** *không cần quan tâm*. Người ta sẽ dùng chữ cái $d$ (hoặc dấu $\times$) trong bản đồ Karnaugh để đánh dấu tổ hợp các giá trị của các biến mà đối với chúng hàm có thể được gán tùy ý. Trong quá trình rút gọn, chúng ta có thể gán giá trị 1 cho những tổ hợp các giá trị đầu vào đó và điều này sẽ dẫn tới các khối lớn nhất trong bản đồ Karnaugh. Điều này được minh họa trong ví dụ sau.

**Ví dụ 5.** Một cách để mã các khai triển thập phân là dùng bốn bit của khai triển nhị phân đối với mỗi chữ số trong khai triển thập phân. Ví dụ, số 873 được mã thành 1000 0111 0011. Sự mã hóa này của khai triển thập phân được gọi là **khai triển thập phân mã nhị phân**. Vì có 16 khối bốn bit mà chỉ có 10 chữ số thập phân, nên có sáu tổ hợp của bốn bit không được dùng để mã hóa các chữ số. Giả sử rằng cần phải dựng một mạch cho đầu ra là 1 nếu chữ số thập phân là 5 hoặc lớn hơn và cho đầu ra là 0 nếu chữ số thập phân nhỏ hơn 5. Làm thế nào có thể xây dựng một cách đơn giản mạch này bằng cách dùng các cổng OR, AND và các bộ đảo ?

*Giải:* Giả sử $F(\omega,x,y,z)$ là đầu ra của mạch, trong đó $\omega xyz$ là khai triển nhị phân của một chữ số thập phân. Các giá trị của $F$ được cho trong Bảng 1. Bản đồ Karnaugh cho $F$ với chữ $d$ ghi ở các vị trí (ô) *không cần quan tâm* được cho trên Hình 11a. Chúng ta có thể bao hàm hoặc loại trừ các ô này ra khỏi các khối. Điều này cho phép chúng ta có nhiều khả năng lựa chọn các khối. Ví dụ, việc loại trừ tất cả các ô có ghi chữ $d$ và tạo các khối như được chỉ ra trên Hình 11b sẽ cho ta biểu thức $\omega\bar{x}\,\bar{y} + \overline{\omega}xy + \overline{\omega}x\,z$. Còn việc bao hàm một số ô có ghi chữ $d$ và loại đi




***Hình 11.*** Bản đồ Karnaugh cho hàm $F$ có chỉ rõ các vị trí *không cần quan tâm.*

**BẢNG 1**

| Chữ số | $w$ | $x$ | $y$ | $z$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 9 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |

một số ô khác, rồi tạo các khối như được chỉ ra trên hình 11c sẽ cho ta biểu thức $\omega\bar{x}\bar{y} + \bar{\omega}xy + x\bar{y}z$. Cuối cùng, nếu bao hàm tất cả các ô có ghi chữ d và dùng các khối được chỉ ra trên hình 11d sẽ cho ta biểu thức đơn giản nhất có thể được, cụ thể là, $F(\omega,x,y,z) = \omega + xy + xz$. ■

## PHƯƠNG PHÁP QUINE – McCLUSKEY

Chúng ta đã thấy rằng các bản đồ Karnaugh có thể được dùng để tạo biểu thức cực tiểu của các hàm Boole như tổng của các tích Boole. Tuy nhiên, các bản đồ Karnaugh sẽ rất khó dùng khi số biến lớn hơn bốn. Hơn nữa, việc dùng các bản đồ Karnaugh lại dựa trên việc rà soát trực quan để nhận dạng các số hạng cần được nhóm lại. Vì những nguyên nhân đó, cần phải có một thủ tục rút gọn những khai triển tổng các tích có thể cơ khí hóa được. Phương pháp Quine–McCluskey là một thủ tục như vậy. Nó có thể được dùng cho các hàm Boole có số biến bất kỳ. Phương pháp này được W.V.Quine và E.J. McCluskey con phát triển vào những năm 1950. Về cơ bản, phương pháp Quine–McCluskey có hai phần. Phần đầu là tìm các số hạng là ứng viên để đưa vào khai triển cực tiểu như một tổng các tích Boole. Phần thứ hai là xác định xem trong số các ứng viên đó, các số hạng nào là thực sự dùng được. Chúng ta sẽ lấy một ví dụ để minh họa thủ tục này được tiến hành như thế nào.

**Ví dụ 6.** Chúng ta sẽ dùng phương pháp Quine–McCluskey để tìm biểu thức cực tiểu tương đương với

$$xyz + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Ta sẽ biểu diễn các tiểu hạng trong khai triển trên bằng các xâu bit. Bit đầu tiên sẽ là 1 nếu xuất hiện x và là 0 nếu xuất hiện $\bar{x}$. Bit thứ hai sẽ là 1 nếu xuất hiện $y$ và là 0 nếu xuất hiện $\bar{y}$. Bit thứ ba sẽ là 1 nếu xuất hiện $z$ và là 0 nếu xuất hiện $\bar{z}$. Sau đó chúng ta sẽ nhóm các số hạng theo số các số 1 trong các xâu bit tương ứng. Thông tin này được cho trong Bảng 2.

Các tiểu hạng có thể được tổ hợp lại là những số hạng chỉ khác nhau một tục biến. Do đó, hai số hạng có thể tổ hợp được sẽ chỉ khác nhau một con số 1 trong các xâu bit biểu diễn các số hạng đó. Khi hai tiểu hạng được tổ hợp thành một tích, tích này sẽ chứa hai tục biến. Tích có hai tục biến được biểu diễn bằng một dấu gạch ngang để chỉ biến không xuất hiện. Ví dụ, tiểu hạng $x\bar{y}z$ và $\bar{x}\bar{y}z$ được biểu diễn bằng các xâu bit 101 và 001 có thể được tổ hợp thành $\bar{y}z$ được biểu diễn bằng xâu −01. Tất cả các cặp tiểu hạng tổ hợp được và tích tạo thành từ các tổ hợp đó được cho trong Bảng 3.

| BẢNG 2 | | |
|---|---|---|
| **Tiểu hạng** | **Xâu bit** | **Số các số 1** |
| $xyz$ | 111 | 3 |
| $x\bar{y}z$<br>$\bar{x}yz$ | 101<br>011 | 2<br>2 |
| $\bar{x}\bar{y}z$ | 001 | 1 |
| $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | 000 | 0 |

Tiếp theo, tất cả các cặp tích có hai tục biến có thể tổ hợp được sẽ được tổ hợp thành số hạng có một tục biến. Hai tích như vậy có thể tổ hợp được nếu chúng chứa tục hiến của cùng hai biến. Các tục biến này chỉ khác nhau đối với một trong hai biến đó. Nói theo ngôn ngữ các xâu biểu diễn các tích đó, thì hai xâu đó phải có cái gạch ngang ở cùng một vị trí và chỉ khác nhau ở một trong hai vị trí còn lại. Chúng ta có thể tổ hợp các tích $yz$ và $\bar{y}z$ được biểu diễn bởi các xâu −11 và −01 thành $z$ – được biểu diễn bởi xâu −−1. Tất cả những tổ hợp có thể được tạo theo cách đó được cho trong bảng 3.

| BẢNG 3 | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | **Bước 1** | | | **Bước 2** | |
| | Số Hạng | Xâu bit | | Số Hạng | Xâu bit | | Số Hạng | Xâu bit |
| 1 | $xyz$ | 111 | (1,2) | $xz$ | 1-1 | (1,2,3,4) | $z$ | --1 |
| 2 | $x\bar{y}z$ | 101 | (1,3) | $yz$ | -11 | | | |
| 3 | $\bar{x}yz$ | 011 | (2,4) | $\bar{y}z$ | -01 | | | |
| 4 | $\bar{x}\bar{y}z$ | 001 | (3,4) | $\bar{x}z$ | 0-1 | | | |
| 5 | $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ | 000 | (4,5) | $\bar{x}\bar{y}$ | 00- | | | |

Trong Bảng 3 chúng ta cũng chỉ ra những số hạng đã được dùng để tạo ra các tích có số tục biến nhỏ hơn nhưng không nhất thiết có mặt trong biểu thức cực tiểu. Bước tiếp sau là nhận dạng tập cực tiểu các tích cần thiết để biểu diễn hàm Boole. Chúng ta sẽ bắt đầu với tất cả các tích chưa được dùng để xây dựng các tích có số tục biến ít hơn (Ví dụ, $z$ và $\bar{x}\bar{y}$ trong ví dụ này). Tiếp sau, chúng ta lập Bảng 4, trong đó có một dòng dành cho mỗi tích ứng viên đã được tạo ra bằng cách tổ hợp các số hạng gốc (ban đầu) và một cột dành cho mỗi số hạng gốc. Chúng ta sẽ ghi dấu X ở vị trí nếu số hạng gốc trong khai triển tổng các tích đã được dùng để tạo tích ứng viên đó. Trong trường hợp này ta nói tích ứng viên đã **phủ** tiểu hạng gốc. Chúng ta cần phải bao hàm ít nhất một tích phủ mỗi một tiểu hạng gốc. Do đó, bất cứ khi nào chỉ có một dấu *X trong một cột trong bảng, thì tích tương ứng với hàng có X* đó sẽ cần phải được sử dụng. Từ Bảng 4 ta thấy rằng cả $z$ lẫn $\bar{x}\bar{y}$ đều là cần thiết. Do đó đáp số cuối cùng sẽ là $z + \bar{x}\bar{y}$.

■

**BẢNG 4**

| | $xyz$ | $x\bar{y}z$ | $\bar{x}yz$ | $\bar{x}\bar{y}z$ | $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | X | X | X | X | |
| $\bar{x}\bar{y}$ | | | | X | X |

Như đã được minh họa trong ví dụ 6, phương pháp Quine – McCluskey dùng các bước theo trình tự sau để rút gọn một khai triển tổng các tích :

1. Biểu diễn mỗi tiểu hạng $n$ bit bằng một xâu bit có chiều dài $n$ với số 1 ở vị trí thứ $i$ nếu $x_i$ xuất hiện và với số 0 nếu $\bar{x}_i$ xuất hiện.

2. Nhóm các xâu bit theo số các số 1 trong chúng.

3. Xác định tất cả các tích $n - 1$ biến có thể tạo thành bằng cách lấy tổng Boole các tích trong khai triển đó. Các tiểu hạng có thể tổ hợp được biểu diễn bằng các xâu bit chỉ khác nhau ở một vị trí. Biểu diễn các tích $n - 1$ biến này bằng các xâu chuỗi có số 1 ở vị trí thứ $i$ nếu ở đó có $x_i$ hoặc số 0 nếu vị trí đó có $\bar{x}_i$ hoặc là một dấu gạch ngang nếu ở đó không có một tục biến nào liên quan đến biến $x_i$ trong tích.

4. Xác định tất cả các tích $n-2$ biến có thể được tạo thành bằng cách lấy tổng Boole của các tích $n-1$ biến đã tìm được ở bước trước. Các tích $n-1$ biến có thể tổ hợp được biểu diễn bằng các xâu bit có dấu gạch ngang ở cùng vị trí và khác nhau chỉ ở một vị trí.

5. Tiếp tục tổ hợp các tích Boole thành các tích có số biến ít hơn dài mãi có thể được.

6. Tìm tất cả các tích Boole xuất hiện nhưng không được dùng để lập tích Boole với số tục biến bớt đi 1.

7. Tìm tập nhỏ nhất các tích Boole sao cho tổng các tích này biểu diễn được hàm Boole đã cho ban đầu. Điều này được làm bằng cách lập bảng chỉ rõ các tiểu hạng nào đã được phủ bởi các tích nào. Mỗi một tiểu hạng cần phải được phủ ít nhất bởi một tích. (Đây là phần khó khăn nhất của thủ tục. Nó có thể được cơ khí hóa bằng cách dùng thủ tục quay lui).

Ví dụ cuối cùng sẽ minh họa thủ tục này được dùng như thế nào để rút gọn một khai triển tổng các tích có bốn biến.

**Ví dụ 7**. Dùng phương pháp Quine – McCluskey để rút gọn tổng các tích $\omega xy\bar{z} + \omega\bar{x}yz + \omega\bar{x}y\bar{z} + \bar{\omega}xyz + \bar{\omega}x\bar{y}z + \bar{\omega}\,\bar{x}yz + \bar{\omega}\,\bar{x}\,\bar{y}z$

*Giải.* Trước hết chúng ta sẽ biểu diễn các tiểu hạng bằng các xâu bit, rồi nhóm các số hạng theo số các số 1 trong các xâu bit đó. Điều này được thể hiện trong Bảng 5. Tất cả các tích Boole được tạo thành bằng cách lấy tổng Boole của các tích đó được cho trong Bảng 6.

**BẢNG 5**

| Số hạng | Xâu bit | Số các số 1 |
|---|---|---|
| $\omega xy\bar{z}$ | 1110 | 3 |
| $\omega\bar{x}yz$ | 1011 | 3 |
| $\bar{\omega}xyz$ | 0111 | 3 |
| $\omega\bar{x}y\bar{z}$ | 1010 | 2 |
| $\bar{\omega}x\bar{y}z$ | 0101 | 2 |
| $\bar{\omega}\,\bar{x}yz$ | 0011 | 2 |
| $\bar{\omega}\,\bar{x}\,\bar{y}z$ | 0001 | 1 |

**BẢNG 6**

| | | | Bước 1 | | | Bước 2 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Số hạng | Xâu bit | Số hạng | | Xâu | Số hạng | | Xâu |
| 1 | $\omega xy\bar{z}$ | 1110 | (1,4) | $\omega y\bar{z}$ | 1 - 10 | (3,5,6,7) | $\bar{\omega}z$ | 0 - - 1 |
| 2 | $\omega\bar{x}yz$ | 1011 | (2,4) | $\omega\bar{x}y$ | 101 - | | | |
| 3 | $\bar{\omega}xyz$ | 0111 | (2,6) | $\bar{x}yz$ | - 011 | | | |
| 4 | $\omega\bar{x}y\bar{z}$ | 1010 | (3,5) | $\bar{\omega}xz$ | 01 - 1 | | | |
| 5 | $\bar{\omega}x\bar{y}z$ | 0101 | (3,6) | $\bar{\omega}yz$ | 0 - 11 | | | |
| 6 | $\bar{\omega}\,\bar{x}yz$ | 0011 | (5,7) | $\bar{\omega}\,\bar{y}z$ | 0 - 01 | | | |
| 7 | $\bar{\omega}\,\bar{x}\,\bar{y}z$ | 0001 | (6,7) | $\bar{\omega}\,\bar{x}z$ | 00 - 1 | | | |

Các tích duy nhất không được dùng để tạo các tích có ít biến hơn là $\bar{\omega}z$, $\omega y\bar{z}$, $\omega\bar{x}y$ và $\bar{x}yz$. Bảng 7 cho thấy các tiểu hạng được phủ bởi các tích đó. Để phủ các tiểu hạng này, trước hết cần phải đưa vào $\bar{\omega}z$ và $\omega y\bar{z}$ vì các tích này là các tích duy nhất phủ $\bar{\omega}xyz$ và $\omega xy\bar{z}$, tương ứng. Một khi các tích này đã được đưa vào, chúng ta thấy rằng chỉ cần phải đưa vào một trong hai tích còn lại. Do đó ta có thể lấy $\bar{\omega}z + \omega y\bar{z} + \omega\bar{x}y$ hoặc $\bar{\omega}z + \omega y\bar{z} + \bar{x}yz$ như đáp số cuối cùng

■

**BẢNG 7**

| | $\omega xy\bar{z}$ | $\omega\bar{x}yz$ | $\bar{\omega}xyz$ | $\omega\bar{x}y\bar{z}$ | $\bar{\omega}x\bar{y}z$ | $\omega xyz$ | $\bar{\omega}\,\bar{x}\,\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{\omega}z$ | | | x | | x | x | x |
| $\omega y\bar{z}$ | x | | | x | | | |
| $\omega\bar{x}y$ | | x | | x | | | |
| $\bar{x}yz$ | | x | | | | x | |

## *BÀI TẬP*

1. a) Vẽ bản đồ Karnaugh đối với một hàm hai biến và ghi số 1 vào ô biểu diễn $\bar{x}y$.

   b) Các tiểu hạng nào được biểu diễn bởi các ô kề với ô nói trên.

2. Tìm khai triển tổng các tích được biểu diễn bởi các bản đồ Karnaugh sau :

a)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | 1 | |
| $\bar{x}$ | 1 | 1 |

b)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ | | |

c)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | 1 |

**3.** Vẽ các bản đồ Karnaugh của những khai triển tổng các tích hai biến sau :

a) $x\bar{y}$  b) $xy + \bar{x}\,\bar{y}$  c) $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\,\bar{y}$

**4.** Dùng bản đồ Karnaugh để tìm khai triển cực tiểu của các hàm hai biến sau :

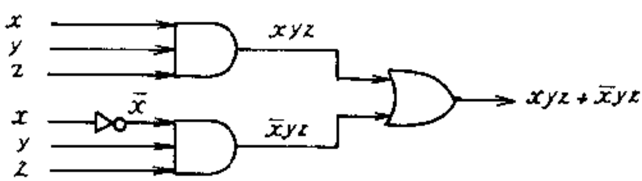
a) $\bar{x}y + \bar{x}\,\bar{y}$  b) $xy + x\bar{y}$  c) $xy + x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\,\bar{y}$.

**5.** a) Vẽ bản đồ Karnaugh cho một hàm ba biến. Ghi số 1 vào ô biểu diễn $\bar{x}y\bar{z}$.

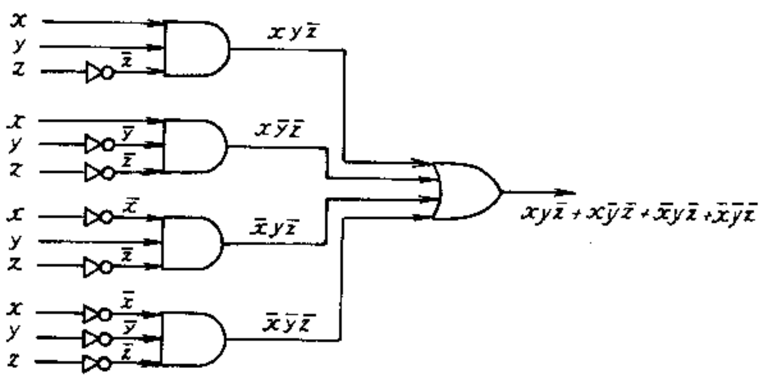
b) Các tiểu hạng nào được biểu diễn bởi các ô kề với ô nói trên.

**6.** Dùng các bản đồ Karnaugh để tìm các mạch đơn giản hơn có cùng đầu ra đối với các mạch sau :

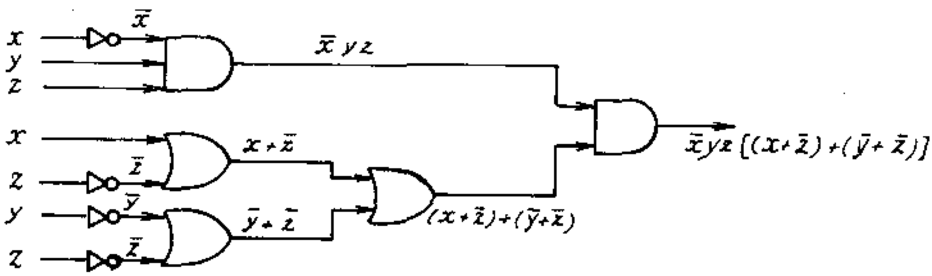
a)




b)



c)




**7.** Vẽ các bản đồ Karnaugh của những khai triển tổng các tích Boole ba biến sau

a) $x\bar{y}\bar{z}$

b) $\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

c) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ .

**8.** Dùng các bản đồ Karnaugh tìm khai triển cực tiểu của các hàm ba biến sau :

a) $\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

b) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z}$

c) $xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$

d) $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .

**9.** a) Vẽ bản đồ Karnaugh cho một hàm bốn biến. Ghi số 1 ở ô biểu diễn số hạng $\bar{\omega}xy\bar{z}$ .

b) Các tiểu hạng nào được biểu diễn bởi các ô kề với ô nói trên.

**10.** Dùng bản đồ Karnaugh tìm khai triển cực tiểu của các hàm bốn biến sau :

a) $\omega xyz + \omega x\bar{y}z + \omega x\bar{y}\bar{z} + \omega\bar{x}y\bar{z} + \omega\bar{x}\bar{y}z$

b) $\omega xy\bar{z} + \omega x\bar{y}z + \omega\bar{x}yz + \bar{\omega}x\bar{y}z + \bar{\omega}\bar{x}y\bar{z} + \bar{\omega}\bar{x}\bar{y}z$

c) $\omega xyz + \omega xy\bar{z} + \omega x\bar{y}z + \omega\bar{x}\bar{y}z + \omega\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{\omega}x\bar{y}z + \bar{\omega}\bar{x}y\bar{z} + \bar{\omega}\bar{x}\bar{y}z$

d) $\omega xyz + \omega xy\bar{z} + \omega x\bar{y}z + \omega\bar{x}yz + \omega\bar{x}y\bar{z} + \bar{\omega}xyz + \bar{\omega}\bar{x}yz + \bar{\omega}\bar{x}y\bar{z} + \bar{\omega}\bar{x}\bar{y}z$

**11.** a) Một bản đồ Karnaugh năm biến có bao nhiêu ô ?

b) Trong một bản đồ Karnaugh năm biến có bao nhiêu ô kề với một ô đã cho ?

**12*.** Dùng các bản đồ Karnaugh tìm khai triển cực tiểu của các hàm Boole có đầu vào là mã nhị phân của các chữ số thập phân và tạo một đầu ra là 1 nếu và chỉ nếu chỉ số tương ứng với đầu vào là :

a) một số lẻ

b) là số không chia hết cho 3

c) không phải là 4, 5 hoặc 6.

**13*.** Giả sử một ủy ban có năm thành viên, nhưng Smith và Jones luôn bỏ phiếu ngược với Marcus. Hãy thiết kế một mạch thực hiện việc bỏ phiếu theo đa số của ủy ban đó, có dùng đến quan hệ nói trên giữa các lá phiếu.

**14.** Dùng phương pháp Quine – McCluskey để rút gọn các khai triển tổng các tích Boole cho trong Ví dụ 3.

**15.** Cũng hỏi như trên đối với các khai triển cho trong Bài tập 8.

**16.** Cũng hỏi như trên đối với các khai triển cho trong Ví dụ 4.

**17.** Cũng hỏi như trên đối với các khai triển cho trong Bài tập 10.

**18*.** Hãy giải thích làm thế nào có thể dùng các bản đồ Karnaugh để rút gọn khai triển tích các tổng ba biến. (*Gợi ý* : Đánh dấu bằng số 0 tất cả các đại hạng trong khai triển và tổ hợp các khối của các đại hạng).

**19.** Dùng phương pháp ở Bài tập 18, hãy rút gọn khai triển tích các tổng $(x + y + z)(x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + z)(x + \overline{y} + z)(\overline{x} + y + z)$.

**20*.** Vẽ bản đồ Karnaugh cho 16 tiểu hạng bốn biến trên bề mặt của hình xuyến.

**21.** Dùng các cổng *OR, AND* và các bộ đảo để dựng một mạch cho đầu ra bằng 1 nếu chữ số thập phân được mã hóa nhị phân chia hết cho 3 và bằng 0 trong các trường hợp còn lại.

*Trong các Bài tập từ 22 đến 24, hãy tìm khai triển cực tiểu của tổng các tích Boole tương ứng với bản đồ Karnaugh đã cho, có chỉ rõ các điều kiện không cần quan tâm bằng các chữ d.*

**22.**

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega x$ | $d$ | 1 | $d$ | 1 |
| $\omega\bar{x}$ | | $d$ | $d$ | |
| $\bar{\omega}\bar{x}$ | | $d$ | 1 | |
| $\bar{\omega}x$ | | 1 | $d$ | |

**23.**

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega x$ | 1 | | | 1 |
| $\omega\bar{x}$ | | $d$ | 1 | |
| $\bar{\omega}\bar{x}$ | | 1 | $d$ | |
| $\bar{\omega}x$ | $d$ | | | $d$ |

**24.**

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $\omega x$ | | $d$ | $d$ | 1 |
| $\omega\bar{x}$ | $d$ | $d$ | 1 | $d$ |
| $\bar{\omega}\bar{x}$ | | | | |
| $\bar{\omega}x$ | 1 | 1 | 1 | $d$ |

## *CÂU HỎI ÔN TẬP*

**1.** Định nghĩa hàm Boole bậc $n$

**2.** Có bao nhiêu hàm Boole bậc 2 ?

**3.** Cho một định nghĩa đệ qui về tập các biểu thức Boole

**4.** a) Đối ngẫu của biểu thức Boole là gì ?

b) Nguyên lý đối ngẫu là gì ? Dùng nó như thế nào để tìm các hằng đẳng thức mới từ các biểu thức Boole.

**5.** Giải thích cách xây dựng khai triển tổng các tích của một hàm Boole.

**6.** a) Thế nào là tập đầy đủ các phép toán ?

b) Tập {+, .} có là đầy đủ không ?

c) Có các tập gồm chỉ một phép toán là đầy đủ không ?

**7.** Hãy giải thích làm thế nào có thể dùng các cổng *OR, AND* và các bộ đảo để dựng một mạch cho hệ đèn được điều khiển bởi hai công tắc.

**8.** Dựng bộ nửa cộng bằng cách dùng các cổng *OR, AND* và các bộ đảo.

**9.** Có một loại cổng duy nhất nào có thể được dùng để dựng tất cả các mạch đã được dựng từ các cổng *OR, AND* và các bộ đảo không ?

**10.** a) Các bản đồ Karnaugh được dùng như thế nào để rút gọn các khai triển tổng các tích có ba biến Boole ?

b) Dùng bản đồ Karnaugh để rút gọn khai triển tổng các tích $xyz + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ .

**11.** a) Các bản đồ Karnaugh được dùng như thế nào để rút gọn các khai triển tổng các tích có bốn biến Boole ?

b) Dùng bản đồ Karnaugh để rút gọn khai triển tổng các tích $\omega xyz + \omega xy\bar{z} + \omega x\bar{y}z + \omega x\bar{y}\bar{z} + \omega\bar{x}yz + \omega\bar{x}\bar{y}z + \bar{\omega}xyz + \bar{\omega}\bar{x}yz + \bar{\omega}\bar{x}y\bar{z}$

**12.** a) Điều kiện *không cần quan tâm* là gì ?

b) Hãy cho biết điều kiện *không cần quan tâm* được dùng như thế nào để dựng một mạch bằng các cổng *OR*, *AND* và các bộ đảo cho đầu ra là 1 nếu một chữ số thập phân là 6 hoặc lớn hơn và là 0 nếu chữ số đó nhỏ hơn 6.

13. a) Hỏi phải sử dụng phương pháp Quine – McCluskey như thế nào để rút gọn các khai triển tổng các tích ?

b) Dùng phương pháp đó để rút gọn $xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$.

## *BÀI TẬP BỔ SUNG*

**1.** Với các giá trị nào của các biến Boole $x$, $y$, $z$ ta có :

a) $x + y + z = xyz$ ? b) $x(y + z) = x + yz$ ?

c) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} = x + y + z$ ?

**2.** Cho $x$ và $y$ thuộc $\{0,1\}$. Hỏi có nhất thiết phải suy ra $x = y$ không nếu tồn tại một giá trị của $z \in \{0, 1\}$ sao cho

a) $xz = yz$ ? b) $x + z = y + z$ ?

c) $x \oplus z = y \oplus z$ ? d) $x \downarrow z = y \downarrow z$ ?

e) $x \mid z = y \mid z$ ?

*Một hàm Boole F được gọi là* **tự đối ngẫu** *nếu và chỉ nếu*

$$F(x_1, ..., x_n) = \overline{F(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)}$$

**3.** Hãy cho biết các hàm nào dưới đây là tự đối ngẫu ?

a) $F(x, y) = x$ b) $F(x, y) = xy + \bar{x}\bar{y}$

c) $F(x, y) = x + y$ c) $F(x,y) = xy + \bar{x}y$

**4.** Hãy cho một ví dụ về một hàm Boole ba biến tự đối ngẫu.

**5*.** Có bao nhiêu hàm Boole bậc n tự đối ngẫu ?

*Ta định nghĩa quan hệ $\leq$ trên tập các hàm Boole bậc n sao cho $F \leq G$ nếu và chỉ nếu $G(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ với mọi $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$.*

**6.** Hãy xác định xem $F \leqslant G$ hay $G \leqslant F$ đối với các cặp hàm sau :

a) $F(x,y) = x$, $G(x,y) = x + y$

b) $F(x,y) = x + y$, $G(x,y) = xy$

c) $F(x,y) = \bar{x}$, $G(x,y) = x + y$

**7.** Chứng minh rằng nếu $F$ và $G$ là các hàm Boole bậc $n$, thì

a) $F \leqslant F + G$ b) $FG \leqslant F$

**8.** Chứng minh rằng nếu $F$, $G$ và $H$ là các hàm Boole bậc n, thì $F + G \leqslant H$ nếu và chỉ nếu $F \leqslant H$ và $G \leqslant H$.

**9***. Đối với mỗi đẳng thức sau, hãy chứng minh nó là một hằng đẳng thức hoặc tìm được một tập giá trị của các biến mà đẳng thức đó không đúng :

a) $x \mid (y \mid z) = (x \mid y) \mid z$

b) $x \downarrow (y \downarrow z) = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow z)$

c) $x \downarrow (y \mid z) = (x \downarrow y) \mid (x \downarrow z)$.

*Người ta định nghĩa phép toán Boole* $\odot$ *như sau :* $1 \odot 1 = 1$, $1 \odot 0 = 0$, $0 \odot 1 = 0$ *và* $0 \odot 0 = 1$.

**10.** Chứng minh rằng $x \odot y = xy + \bar{x}\bar{y}$ .

**11.** Chứng minh rằng $x \odot y = \overline{x \oplus y}$

**12.** Chứng minh các hằng đẳng thức sau :

a) $x \odot x = 1$ b) $x \odot \bar{x} = 0$

c) $x \odot y = y \odot x$

**13.** Đẳng thức sau có phải là một hằng đẳng thức không

$(x \odot y) \odot z = x \odot (y \odot z)$ ?

**14***. Hãy xác định xem tập $\{\odot\}$ có là đầy đủ không ?

**15***. Trong số 16 hàm Boole với hai biến $x$ và $y$ có bao nhiêu hàm được biểu diễn bởi tập các phép toán sau cùng với các biến $x$, $y$ và các giá trị 0, 1 ?

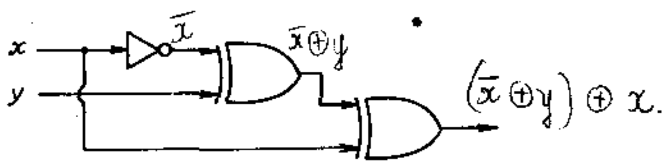
a) $\{^{-}\}$ b) $\{.\}$

c) $\{+\}$ d) $\{., +\}$

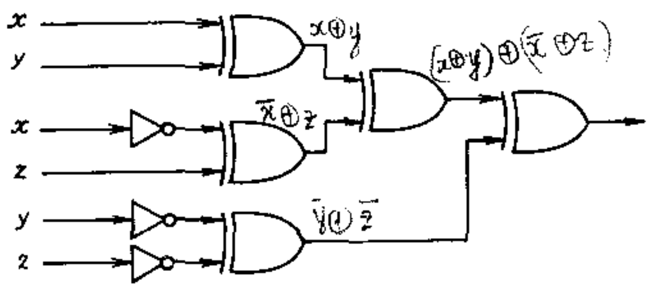
*Ký hiệu của cổng XOR, cổng tạo đầu ra là $x \oplus y$ từ đầu vào là $x$ và $y$, là như sau :*


**16.** Xác định đầu ra của các mạch sau :

a)



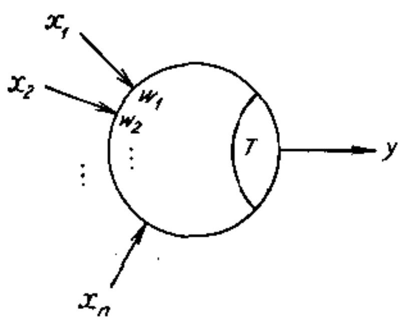

b)



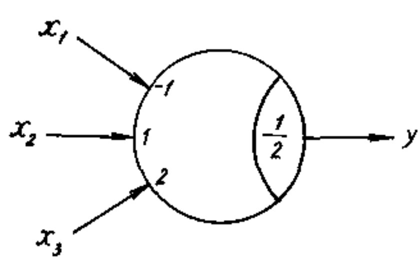

**17.** Hãy cho biết làm thế nào có thể xây dựng bộ nửa cộng với số cổng ít hơn so với cách dựng trên Hình 8 của Tiết 9.3 bằng cách dùng thêm các cổng XOR cùng với các cổng *OR*, *AND* và các bộ đảo ?

**18.** Hãy thiết kế một mạch để xác định xem ba hoặc nhiều hơn thành viên trong số bốn thành viên của một ủy ban có bỏ phiếu tán thành cho một đề nghị hay không, biết rằng mỗi thành viên dùng một công tắc để bỏ phiếu.

**Cổng ngưỡng** *là cổng tạo đầu ra y là 0 hoặc 1 với tập các giá trị đầu vào đã cho đối với các biến Boole* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Cổng ngưỡng có* **giá trị ngưỡng** *T – đó là một số thực và các* **trọng số** $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *cũng là các số thực. Đầu ra y của cổng ngưỡng có giá trị 1 khi và chỉ khi* $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \ldots \omega_n x_n \geqslant T$. *Cổng ngưỡng với giá trị ngưỡng T và các trọng số* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *được biểu diễn bởi giản đồ sau. Các cổng ngưỡng rất tiện ích đối với việc mô hình hóa trong sinh lý học nơron và trí tuệ nhân tạo.*




**19.** Cổng ngưỡng biểu diễn một hàm Boole. Tìm biểu thức Boole cho hàm Boole được biểu diễn bởi cổng ngưỡng sau.




**20.** Hàm Boole có thể được biểu diễn bởi một cổng ngưỡng được gọi là **hàm ngưỡng**. Chứng minh rằng các hàm sau đều là hàm ngưỡng

a) $F(x) = \bar{x}$ b) $F(x,y) = x + y$

c) $F(x,y) = xy$ d) $F(x,y) = x \mid y$

e) $F(x,y) = x \downarrow y$ f) $F(x,y,z) = x + yz$

g) $F(\omega,x,y,z) = \omega + xy + z$ h) $F(\omega,x,y,z) = \omega xz + x\bar{y}z$

**21*.** Chứng minh rằng $F(x,y) = x \oplus y$ không phải là hàm ngưỡng.

22*. Chứng minh rằng $F(\omega,x,y,z) = \omega x + yz$ không phải là hàm ngưỡng.

## BÀI TẬP TRÊN MÁY TÍNH

***Viết chương trình với đầu vào và đầu ra sau :***

**1.** Cho giá trị của hai biến Boole $x$ và $y$, tìm các giá trị của $x + y$, $x \oplus y$, $xy$, $xy$ và $x \downarrow y$.

**2.** Lập bảng liệt kê tập các giá trị của tất cả 256 hàm Boole bậc 3.

**3.** Cho các giá trị của hàm Boole $n$ biến, với n là số nguyên dương, tìm khai triển tổng các tích của hàm này.

**4.** Cho bảng các giá trị của một hàm Boole, hãy biểu diễn hàm này bằng cách chỉ dùng các phép toán $\cdot$ và $^{-}$.

**5.** Cho bảng các giá trị của một hàm Boole, hãy biểu diễn hàm này mà chỉ dùng các phép toán + và $^{-}$.

**6*.** Cho bảng các giá trị của một hàm Boole, hãy biểu diễn hàm đó mà chỉ dùng phép toán $|$.

**7*.** Cũng hỏi như trên với phép toán $\downarrow$.

**8.** Cho bảng các giá trị của một hàm Boole bậc 3, hãy dựng bản đồ Karnaugh của nó.

**9.** Cũng hỏi như trên đối với hàm Boole bậc 4.

**10**.** Cho bảng các giá trị của một hàm Boole, hãy dùng phương pháp Quine – McCluskey để tìm biểu diễn tổng cực tiểu các tích của hàm đó.

**11.** Cho giá trị ngưỡng và tập các trọng số đối với một cổng ngưỡng và các giá trị của $n$ biến Boole ở đầu vào, hãy xác định đầu ra của cổng đó.

**12.** Cho số nguyên dương $n$, hãy dựng một biểu thức Boole ngẫu nhiên $n$ biến dưới dạng tuyển chuẩn tắc.

## TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

***Dùng các chương trình mà bạn đã viết làm các bài tập sau***

**1.** Tính số hàm Boole bậc 7, 8, 9 và 10.

**2.** Lập bảng các hàm Boole bậc 3. Lập bảng các hàm Boole bậc 4.

**4.** Biểu diễn các biểu thức Boole ba biến dưới dạng tuyển chuẩn tắc mà chỉ dùng một phép toán *NAND* với số lượng ít nhất có thể được. Số lớn nhất các phép toán *NAND* khi đó cần phải dùng là bao nhiêu ?

**5.** Hãy biểu diễn các biểu thức Boole bốn biến dưới dạng tuyển chuẩn tắc mà chỉ dùng một phép toán *NOR* với số lượng ít nhất có thể được. Số lớn nhất các phép toán *NOR* khi đó cần phải dùng là bao nhiêu.

**6**. Tạo ngẫu nhiên 10 biểu thức Boole bốn biến khác nhau và xác định số trung bình các bước cần thiết để cực tiểu hóa chúng bằng cách dùng phương pháp Quine – Mc Cluskey.

**7.** Cũng hỏi như trên đối với các biểu thức năm biến.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ở ngoài cuốn sách này viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau đây:***

**1.** Mô tả một số máy tính ở giai đoạn đầu được chế tạo để giải một số bài toán về logic, chẳng hạn như Máy chứng minh Stanhope, Máy logic của Jevon, và Máy Marquand

**2.** Giải thích sự khác nhau giữa mạch tổ hợp và mạch tuần tự. Sau đó hãy giải thích *mạch lật* được dùng như thế nào để dựng các mạch tuần tự.

**3.** Hãy định nghĩa *thanh ghi chuyển dịch* và thảo luận cách dùng thanh ghi này. Hãy cho biết cách dùng các mạch lật và các cổng logic để tạo các thanh ghi chuyển dịch ?

**4.** Hãy cho biết cách dùng các cổng logic để dựng các *bộ nhân*.

**5.** Hãy tìm hiểu cấu trúc vật lý của các cổng logic. Hãy thảo luận xem các cổng *NAND* và *NOR* có được dùng để xây dựng các mạch không.

**6.** Hãy giải thích *khái niệm phụ thuộc* có thể được dùng như thế nào để mô tả các mạch chuyển phức tạp.

**7.** Hãy mô tả việc dùng các bộ dồn tín hiệu để dựng các mạch chuyển

**8.** Hãy giải thích những ưu điểm của việc dùng các cổng ngưỡng để xây dựng các mạch chuyển. Hãy minh họa điều này bằng cách dùng các cổng ngưỡng để xây dựng các bộ nửa cộng và bộ cộng đầy đủ.

**9.** Hãy mô tả khái niệm *mạch chuyển* . . . *không rủi ro* và nêu một số nguyên lý được dùng để thiết kế các mạch đó.

**10.** Hãy giải thích cách dùng các bản đồ Karnaugh để cực tiểu hóa các hàm năm hoặc sáu biến.

**11.** Mô tả **sự phân tích hàm** của một hàm Boole $n$ biến có nghĩa là gì ? Hãy thảo luận các thủ tục phân tích các hàm Boole thành hợp thành của các hàm Boole có số biến ít hơn.

*CHƯƠNG 10*

# MÔ HÌNH TÍNH TOÁN

Các máy tính có thể thực hiện được nhiều nhiệm vụ. Với một nhiệm vụ đã cho, có hai vấn đề được đặt ra. Thứ nhất là: hiện máy tính có thể thực hiện được nhiệm vụ đó không? Một khi đã biết câu trả lời cho câu hỏi này là khẳng định, ta có thể đặt tiếp câu hỏi thứ hai là: Nhiệm vụ này có thể được thực hiện như thế nào? Các mô hình tính toán được dùng sẽ giúp ta trả lời các câu hỏi trên.

Chúng ta sẽ nghiên cứu ba loại cấu trúc được dùng trong các mô hình tính toán, cụ thể đó là các văn phạm, các máy hữu hạn trạng thái và các máy Turing. Các văn phạm được dùng để tạo các từ của một ngôn ngữ và để xác định một từ có ở trong một ngôn ngữ nào đó hay không. Những ngôn ngữ hình thức được sinh ra bởi các văn phạm sẽ cung cấp những mô hình cho cả các ngôn ngữ tự nhiên, như tiếng Anh, lẫn các ngôn ngữ lập trình như Pascal, Fortran, Prolog và C. Đặc biệt, các văn phạm là cực kỳ quan trọng trong việc xây dựng cũng như trong lý thuyết các chương trình dịch. Các văn phạm mà chúng ta sẽ xét ở đây, lần đầu tiên đã được nhà ngôn ngữ Mỹ Noam Chomsky sử dụng vào những năm 1950.

Các loại máy hữu hạn trạng thái được dùng trong việc mô hình hóa. Tất cả các máy hữu hạn trạng thái đều có một tập các trạng thái, kể cả trạng thái xuất phát, một bảng chữ cái các đầu vào và một hàm chuyển có nhiệm vụ gán một trạng thái mới cho mỗi cặp gồm một trạng thái và một đầu vào. Các trạng thái của máy hữu hạn trạng thái cho nó những khả năng nhớ hạn chế. Một số máy hữu hạn trạng thái còn tạo được một ký hiệu đầu ra cho mỗi chuyển tiếp; các máy này có thể được dùng để mô hình hóa nhiều loại máy, như các máy bán hàng, máy trễ, các bộ cộng nhị phân, và các bộ nhận dạng ngôn ngữ. Chúng ta cũng sẽ nghiên cứu cả các máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra nhưng có các trạng thái cuối cùng. Các máy này được dùng rất rộng rãi trong việc nhận dạng ngôn ngữ. Các xâu được nhận dạng là những xâu đưa trạng thái xuất phát tới trạng thái kết thúc. Các khái niệm về văn phạm và các máy hữu hạn trạng thái có quan hệ chặt chẽ với nhau. Chúng ta sẽ đưa ra những đặc trưng cho các tập hợp được chấp nhận bởi một máy hữu hạn trạng thái và chứng tỏ rằng đó chính là các tập hợp được sinh ra bởi một loại văn phạm nào đó.

Cuối cùng, chúng ta sẽ đưa vào khái niệm máy Turing và sẽ chỉ ra các máy Turing được dùng để nhận dạng các tập hợp như thế nào. Chúng ta cũng sẽ cho thấy cách mà các máy Turing được dùng để tính các hàm của lý thuyết số. Cuối cùng, chúng ta sẽ thảo luận luận đề Church – Turing phát biểu rằng mọi tính toán hiệu quả đều có thể được thực hiện bằng cách dùng máy Turing.

## 10.1 NGÔN NGỮ VÀ VĂN PHẠM

### MỞ ĐẦU

Các từ trong tiếng Anh có thể được tổ hợp theo nhiều cách khác nhau. Văn phạm của tiếng Anh cho chúng ta biết một tổ hợp của các từ có phải là một câu đúng hay không. Ví dụ, *the frog writes neatly* là một câu đúng, vì nó được tạo bởi một danh ngữ – the frog (con ếch) – được tạo bởi quán từ the và danh từ frog và tiếp sau là động ngữ – writes neatly (viết rõ ràng) – được tạo bởi động từ writes và trạng từ neatly. Chúng ta không quan tâm tới việc đây là một câu vô nghĩa, vì chúng ta chỉ quan tâm tới **cú pháp** của câu chứ không phải tới **ngữ nghĩa** của nó. Cũng cần lưu ý rằng tổ hợp các từ *swims* (bơi) *quickly* (nhanh) *mathematics* (toán) không phải là một câu đúng vì nó không theo đúng các quy tắc của tiếng Anh.

Cú pháp của một **ngôn ngữ tự nhiên**, tức là ngôn ngữ nói, như tiếng Anh, tiếng Pháp, tiếng Đức hoặc tiếng Tây Ban Nha, đều cực kỳ phức tạp. Và thực tế dường như không thể chỉ ra hết các quy tắc cú pháp đối với một ngôn ngữ tự nhiên. Việc nghiên cứu sự dịch tự động một ngôn ngữ này sang một ngôn ngữ khác đã dẫn tới khái niệm **ngôn ngữ hình thức**, một ngôn ngữ không giống như các ngôn ngữ tự nhiên, nó có một tập hoàn toàn xác định các quy tắc cú pháp. Các quy tắc cú pháp là quan trọng không chỉ trong ngôn ngữ học, trong nghiên cứu các ngôn ngữ tự nhiên, mà cả trong sự nghiên cứu các ngôn ngữ lập trình.

Chúng ta sẽ mô tả các câu của một ngôn ngữ hình thức bằng cách dùng một văn phạm. Việc dùng văn phạm sẽ giúp ích rất nhiều khi ta xét hai lớp các vấn đề được đặt ra rất thường xuyên trong ứng dụng của các ngôn ngữ lập trình: (1) Làm thế nào xác định được một tổ hợp các từ có là một câu đúng trong một ngôn ngữ hình thức hay không? (2) Làm thế nào có thể tạo ra các câu đúng trong một ngôn ngữ hình thức?

Trước khi cho một định nghĩa có tính kỹ thuật về văn phạm, chúng ta sẽ mô tả một ví dụ về một văn phạm tạo ra một tập con của tiếng Anh. Tập con này được định nghĩa bằng cách dùng một bảng liệt kê các quy tắc cho biết một câu đúng có thể được tạo ra như thế nào. Cụ thể là:

1. Một câu được tạo bởi **danh ngữ** và tiếp sau là **động ngữ**

2. Danh ngữ được tạo bởi một **quán từ**, tiếp sau là một **tính từ** và sau đó là một **danh từ** hoặc

3. Một **danh ngữ** tạo bởi một **quán từ** và tiếp sau là một **danh từ**

4. **Động ngữ** được tạo bởi một **động từ** và tiếp theo là một **trạng từ** hoặc

5. **Động ngữ** được tạo bởi một **động từ**

6. Một quán từ là *a* hoặc

7. Một quán từ là *the*

8. Một tính từ là *large* (lớn) hoặc

9. Một tính từ là *hungry* (đói)

10. Một danh từ là *rabbit* (thỏ) hoặc

11. Một danh từ là *mathematician* (nhà toán học)

12. Một động từ là *eats* (ăn) hoặc

13. Một động từ là *hops* (nhảy)

14. Một trạng từ là *quickly* (nhanh), hoặc

15. Một trạng từ là *wildty* (như điên)

Từ những quy tắc trên chúng ta có thể lập các câu đúng bằng cách dùng một loạt các thay thế cho tới khi không còn một quy tắc nào có thể được dùng nữa. Chẳng hạn, chúng ta có thể theo dãy các thay thế sau để nhận được một câu đúng:

**câu**

**danh ngữ động ngữ**

**quán từ tính từ danh từ động ngữ**

**quán từ tính từ danh từ động từ trạng từ**

*the* **tính từ danh từ động từ trạng từ**

*the large* **danh từ động từ trạng từ**

*the large rabbit* **động từ trạng từ**

*the large rabbit hops* **trạng từ**

*the large rabbit hops quickly*

Cũng dễ dàng thấy rằng, một số câu đúng khác là: *a hungry mathemotician eats wildly, a large mathematician hops, the rabbit eats quickly* v.v... Chúng ta cũng thấy ngay rằng *the quickly eats mathematician* không phải là một câu đúng.

## VĂN PHẠM CẤU TRÚC CÂU

Trước khi cho định nghĩa hình thức của một văn phạm, chúng ta sẽ đưa vào một ít thuật ngữ

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Một *từ vựng* (hay một *bộ chữ cái*) V là một tập không rỗng, hữu hạn; các phần tử của tập này được gọi là các *ký hiệu*. Một *từ* (hoặc *một câu*) trên $V$ là một xâu các phần tử của $V$ có chiều dài hữu hạn. *Xâu rỗng*, được ký hiệu là $\lambda$, là xâu không chứa một ký hiệu nào. Tập tất cả các từ trên $V$ được ký hiệu là $V^*$. Một *ngôn ngữ* trên $V$ là một tập con của $V^*$.

Chú ý rằng xâu rỗng $\lambda$ là xâu không chứa một ký hiệu nào. Nó khác với tập rỗng $\varnothing$. Từ đây suy ra rằng $\{\lambda\}$ là tập chỉ chứa đúng một xâu, đó là xâu rỗng.

Các ngôn ngữ có thể được chỉ rõ bằng nhiều cách khác nhau. Một trong những cách đó là liệt kê tất cả các từ trong ngôn ngữ đó. Một cách khác là cho một số tiêu chuẩn mà các từ thuộc ngôn ngữ đó cần phải thỏa mãn. Trong tiết này chúng ta sẽ mô tả một cách quan trọng khác để chỉ rõ một ngôn ngữ, đó là cách thông qua việc dùng một văn phạm, giống như tập các quy tắc mà chúng ta đã cho ở phần Mở đầu của tiết này. Một văn phạm cung cấp một tập các ký hiệu thuộc các loại khác nhau, và một tập các quy tắc để sản sinh ra các từ. Nói một cách chính xác hơn, một văn phạm có một **từ vựng** $V$ - đó là tập hợp các ký hiệu được dùng để dẫn xuất ra các thành phần của một ngôn ngữ. Một số phần tử của từ vựng không thể được thay thế bởi các ký hiệu khác, các phần tử này được gọi là ký hiệu **kết thúc**. Trong khi đó, các phần tử khác của từ vựng có thể được thay thế bởi các ký hiệu khác, chúng được gọi là ký hiệu **không kết thúc**. Tập các từ kết thúc và không kết thúc thường được ký hiệu tương ứng là $T$ và $N$. Trong ví dụ được cho ở cuối phần Mở đầu của tiết này, tập các từ kết thúc là {*a, the, rabbit, mathematician, hops, eats, quickly, wildly*} và tập các từ không kết thúc là {**câu, danh ngữ, động ngữ, tính từ, quán từ, danh từ, động từ, trạng từ**}. Trong từ vựng có một phần tử đặc biệt được gọi là **ký hiệu xuất phát** và được ký hiệu là $S$. Đây là phần tử của từ vựng mà ta luôn bắt đầu từ nó. Trong ví dụ cho ở phần Mở đầu, ký hiệu xuất phát là **câu**. Các quy tắc chỉ rõ khi nào ta có thể thay thế một xâu trong $V^*$ – tập tất cả các xâu gồm các phần tử trong từ vựng – bởi một xâu khác được gọi là **sản xuất** của văn phạm đó. Sản xuất chỉ rõ rằng $w_0$ có thể được thay thế bởi $w_1$ được ký hiệu là $w_0 \to w_1$. Các sản xuất trong văn phạm cho ở phần mở đầu của tiết này đã được liệt kê ra. Sản xuất đầu tiên được viết theo ký hiệu nói trên là **câu** $\to$ **danh ngữ động ngữ**. Chúng ta tổng kết những điều nói trên trong định nghĩa sau.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Một *văn phạm cấu trúc câu* $G = (V, T, S, P)$ gồm một từ vựng $V$, một tập con $T$ của $V$ gồm các phần tử kết thúc, một ký hiệu xuất phát $S$ và tập các sản xuất $P$. Tập $V - T$ được ký hiệu là $N$. Các phần tử thuộc $N$ được gọi là các ký hiệu *không kết thúc*. Mỗi sản xuất trong $P$ cần phải chứa ít nhất một ký hiệu không kết thúc ở vế trái của nó.

**Ví dụ 1.** Cho $G = \{V, T, S, P\}$, trong đó $V = \{a, b, A, B, S\}$, $T = \{a, b\}$, $S$ là ký hiệu xuất phát và $P = \{S \to ABa, A \to BB, B \to ab, AB \to b\}$. $G$ là ví dụ về một văn phạm cấu trúc câu.

■

Chúng ta sẽ quan tâm tới các từ có thể được sinh bởi các sản xuất của một văn phạm cấu trúc câu

**ĐỊNH NGHĨA 3.** Cho $G = \{V, T, S, P\}$ là một văn phạm cấu trúc câu. Cho $w_0 = Iz_0r$ (tức là phép ghép của $I$, $z_0$ và $r$) và $w_1 = Iz_1r$ là các xâu trên $V$. Nếu $z_0 \to z_1$ là một sản xuất của $G$, thì ta nói rằng $w_1$ được dẫn xuất trực tiếp từ $w_0$ và viết $w_0 \Rightarrow w_1$. Nếu $w_0, w_1, \ldots w_n$ với $n \geqslant 0$ là các xâu trên $V$ sao cho $w_0 \Rightarrow w_1$, $w_1 \Rightarrow w_2, \ldots, w_{n-1} \Rightarrow w_n$, thì ta nói rằng $w_n$ được dẫn xuất từ $w_0$ và viết $w_0 \Rightarrow w_n$. Dãy các bước được dùng để nhận được $w_n$ từ $w_0$ được gọi là một *dẫn xuất*.

**Ví dụ 2.** Xâu $Aaba$ được dẫn xuất trực tiếp từ $ABa$ trong văn phạm cho trong Ví dụ 1, vì $B \to ab$ là một sản xuất trong văn phạm đó. Xâu $abababa$ được dẫn xuất từ $ABa$, vì $ABa \Rightarrow Aaba \Rightarrow BBaba \Rightarrow Bababa \Rightarrow abababa$ bằng cách dùng lần lượt $B \to ab$, $A \to BB$, $B \to ab$ và $B \to ab$.

■

**ĐỊNH NGHĨA 4.** Cho $G = \{V, T, S, P\}$ là một văn phạm cấu trúc câu. *Ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm G* (hay *ngôn ngữ của G*), được ký hiệu là $L(G)$, là tập của tất cả các xâu ký hiệu kết thúc được dẫn xuất từ ký hiệu xuất phát $S$. Nói cách khác,

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w\}$$

Trong hai ví dụ sau chúng ta sẽ tìm ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm cấu trúc câu.

**Ví dụ 3.** Cho $G$ là văn phạm với từ vựng $V = \{S, A, a, b\}$, tập các ký hiệu kết thúc $T = \{a, b\}$, ký hiệu xuất phát $S$ và các sản xuất $P = \{S \to aA, S \to b, A \to aa\}$. Xác định ngôn ngữ $L(G)$ của văn phạm đó.

*Giải:* Từ ký hiệu xuất phát $S$ ta có thể dẫn ra $aA$ bằng cách dùng sản xuất $S \to aA$. Ta cũng có thể dùng sản xuất $S \to b$ để dẫn ra $b$. Từ $aA$, sản xuất $A \to aa$ có thể được dùng để dẫn xuất ra $aaa$. Ngoài ra, không thể dẫn thêm một từ nào nữa. Do đó $L(G) = \{b, aaa\}$

■

**Ví dụ 4.** Cho $G$ là văn phạm với từ vựng $V = \{S, 0, 1\}$, tập các ký hiệu kết thúc $T = \{0, 1\}$, ký hiệu xuất phát $S$ và các dẫn xuất $P = \{S \to 11S, S \to 0\}$. Xác định ngôn ngữ $L(G)$ của văn phạm đó.

*Giải:* Từ $S$ có thể dẫn xuất ra 0 bằng cách dùng sản xuất $S \to 0$; hoặc dẫn xuất ra $11S$ bằng cách dùng sản xuất $S \to 11S$. Từ $11S$ ta có thể dẫn xuất ra 110 hoặc $1111S$. Từ $1111S$ lại có thể dẫn xuất ra 11110 hoặc $111111S$. Ở mỗi giai đoạn bất kỳ của một dẫn xuất, ta có thể hoặc thêm hai số 1 ở cuối xâu hoặc kết thúc dẫn xuất bằng cách thêm một số 0 vào cuối xâu đó. Chúng ta phỏng đoán rằng $L(G) = \{0, 110, 11110, 1111110, \ldots\}$ – đó là tập tất cả các xâu bắt đầu bằng một số chẵn các số 1 và kết thúc bằng một số 0. Điều này có thể chứng minh bằng phương pháp quy nạp với lập luận rằng sau khi $n$ sản xuất đã được sử dụng, các xâu duy nhất chứa các ký hiệu kết thúc được sinh ra bởi các sản xuất đó gồm $n-1$ hoặc ít hơn các cặp 11 tiếp theo bởi một số 0. (Điều này dành cho các bạn như một bài tập).

■

Người ta cũng thường gặp bài toán xây dựng một văn phạm sinh ra một ngôn ngữ đã cho. Ba ví dụ sau đây mô tả các bài toán thuộc loại đó.

**Ví dụ 5.** Cho văn phạm sinh ra tập $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$

*Giải:* Có thể dùng hai sản xuất để sinh ra tất cả các xâu gồm một xâu các số 0 và tiếp sau là một số giống như thế các số 1, kể cả xâu rỗng. Sản xuất thứ nhất xây dựng các xâu dài tuần tự trong ngôn ngữ đó bằng cách thêm một số 0 vào đầu của xâu và một số 1 vào cuối của xâu đó. Sản xuất thứ hai là thay $S$ bằng một xâu rỗng. Lời giải là văn phạm $G = \{V, T, S, P\}$ trong đó $V = \{0, 1, S\}$, $T = \{0, 1\}$, $S$ là ký hiệu xuất phát, và các sản xuất là:

$$S \to 0S1$$

$$S \to \lambda$$

Việc chứng minh văn phạm này sinh ra một tập đúng như đầu bài yêu cầu xin dành lại cho bạn đọc như một bài tập.

■

Ví dụ trên liên quan đến tập các xâu tạo bởi các số 0 tiếp sau bởi các số 1 với số lượng các số 0 và các số 1 là như nhau. Ví dụ tiếp sau cũng xét tập các xâu gồm các số 0 tiếp sau bởi các số 1 nhưng số các số 0 và các số 1 có thể khác nhau.

**Ví dụ 6.** Tìm văn phạm cấu trúc câu sinh ra tập $\{0^m1^n \mid m$ và $n$ là các số nguyên không âm$\}$.

*Giải:* Chúng ta sẽ cho hai văn phạm $G_1$ và $G_2$ sinh ra tập này. Điều này sẽ minh họa cho điều là hai văn phạm có thể sinh ra cùng một ngôn ngữ.

Văn phạm $G_1$ có từ vựng $V = \{S, 0, 1\}$, các ký hiệu kết thúc $T = \{0, 1\}$ và các sản xuất $S \to 0S$, $S \to S1$ và $S \to \lambda$. Việc chứng minh chi tiết văn phạm này sinh ra tập đúng như yêu cầu xin dành lại cho độc giả như một bài tập.

■

Đôi khi một tập có thể mô tả dễ dàng lại được sinh ra bởi một văn phạm phức tạp. Điều này được minh họa trong ví dụ sau:

**Ví dụ 7.** Một văn phạm sinh tập $\{0^n1^n2^n \mid n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ là $G =$

$\{V, T, S, P\}$ với $V = \{0, 1, 2, S, A, B\}$, $T = \{0, 1, 2\}$, ký hiệu xuất phát là $S$ và các sản xuất $S \to 0SAB$, $S \to \lambda$, $BA \to AB$, $0A \to 01$, $1A \to 11$, $1B \to 12$, $2B \to 22$. Chúng tôi xin dành cho độc giả việc chứng minh khẳng định trên như một bài tập. Văn phạm được cho ở trên là loại văn phạm đơn giản nhất sinh ra tập đó. Đơn giản nhất ở đây được hiểu theo nghĩa sẽ được làm sáng tỏ ở cuối tiết này. Bạn đọc có thể ngạc nhiên không hiểu lấy đâu ra văn phạm này, vì dường như rất khó mò ra văn phạm đó. Bạn có thể an lòng biết rằng văn phạm này có thể được xây dựng một cách bài bản bằng cách dùng những kỹ thuật từ lý thuyết tính toán vượt ra ngoài phạm vi của cuốn sách này.

■

## CÁC LOẠI VĂN PHẠM CẤU TRÚC CÂU

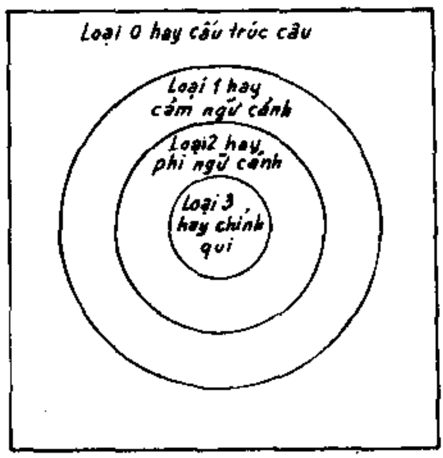
Các văn phạm cấu trúc câu được phân loại theo các loại sản xuất cho phép. Chúng ta sẽ mô tả sơ đồ phân loại do Noam Chomsky đưa ra. Trong tiết 10.4 ta sẽ thấy rằng các loại ngôn ngữ khác nhau được định nghĩa trong sơ đồ này tương ứng với các lớp ngôn ngữ có thể chấp nhận được khi dùng các mô hình máy tính khác nhau.

Một văn phạm **loại 0** không có các hạn chế đối với các sản xuất của chúng. Một văn phạm **loại 1** có thể chỉ có các sản xuất dạng $w_1 \to w_2$ trong đó chiều dài của $w_2$ lớn hơn hoặc bằng chiều dài của $w_1$, hoặc có dạng $w_1 \to \lambda$. Một văn phạm **loại 2** có thể chỉ có các sản xuất dạng $w_1 \to w_2$ với $w_1$ là ký hiệu đơn và không phải là ký hiệu kết thúc. Một văn phạm **loại 3** có thể chỉ có các sản xuất dạng $w_1 \to w_2$ với $w_1 = A$ và $w_2 = aB$ hoặc $w_2 = a$ trong đó $A$ và $B$ là các ký hiệu không kết thúc và $a$ là ký hiệu kết thúc, hoặc với $w_1 = S$ và $w_2 = \lambda$.

Từ các định nghĩa trên, ta thấy rằng mọi văn phạm loại 3 đều là loại 2, mọi văn phạm loại 2 đều là loại 1 và mọi văn phạm loại 1 đều là loại 0. Các văn phạm loại 2 được gọi là **văn phạm phi ngữ cảnh**, vì một ký hiệu không kết thúc ở vế trái của sản xuất có thể được thay bằng một xâu bất cứ khi nào nó xuất hiện, bất chấp còn có gì ở xâu đó. Ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm phi ngữ cảnh được gọi là **ngôn ngữ phi**

**ngữ cảnh**. Khi có một sản xuất dạng $lw_1r \to lw_2r$ (chứ không phải dạng $w_1 \to w_2$) văn phạm được gọi là loại 1 hoặc **cảm ngữ cảnh** vì $w_1$ có thể được thay bằng $w_2$ chỉ khi nó được bao quanh bởi các xâu $l$ và $r$. Các văn phạm loại 3 còn được gọi là các **văn bản chính quy**. Ngôn ngữ được sinh ra bởi một văn phạm chính quy được gọi là **ngôn ngữ chính quy**. Tiết 10.4 sẽ xem xét mối quan hệ giữa các ngôn ngữ chính quy và các máy hữu hạn trạng thái. Giản đồ Venn trong Hình 1 cho mối quan hệ giữa các văn phạm khác nhau.

**Ví dụ 8.** Từ Ví dụ 6 ta biết rằng $\{0^m1^n \mid m, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ là một ngôn ngữ chính quy, vì nó được sinh ra bởi một văn phạm chính quy, đó là văn phạm $G_2$ trong Ví dụ 6. ■




*Hình 1.* Các loại văn phạm

**Ví dụ 9.** Từ Ví dụ 5 suy ra rằng $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ là một ngôn ngữ phi ngữ cảnh, vì các sản xuất trong văn phạm này là $S \to 0S1$ và $S \to \lambda$. Tuy nhiên, nó không phải là ngôn ngữ chính quy. Điều này sẽ được chứng tỏ trong tiết 10.4. ■

Tập $\{0^n1^n2^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ là một ngôn ngữ cảm ngữ cảnh, vì nó có thể được sinh bởi một văn phạm loại 1 như ví dụ 7 cho thấy, nhưng không bởi bất kỳ văn phạm loại 2 nào. (Điều này được chứng minh trong Bài tập 28 thuộc phần các bài tập bổ sung ở cuối chương này).

Bảng 1 tổng kết các thuật ngữ đã được dùng để phân loại các văn phạm cấu trúc câu.

## CÂY DẪN XUẤT

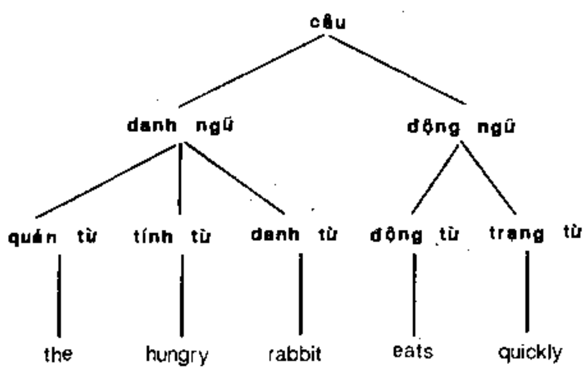
Một dẫn xuất trong ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm phi ngữ cảnh có thể được biểu diễn bằng đồ thị nhờ dùng một cây được gọi là **cây dẫn xuất** hoặc cây **phân tích cú pháp**. Gốc của cây này biểu diễn ký hiệu xuất phát. Các đỉnh trong của cây biểu diễn các ký hiệu không kết thúc xuất hiện trong dẫn xuất đó. Các lá của cây biểu diễn các ký hiệu kết thúc xuất hiện ở cây đó. Nếu sản xuất $A \rightarrow w$ xuất hiện trong dẫn xuất đã cho với $w$ là một từ, thì đỉnh biểu diễn $A$ có các đỉnh con biểu diễn mỗi ký hiệu trong $w$ theo thứ tự từ trái sang phải.

**BẢNG 1. Các loại văn phạm**

| Loại | Những hạn chế đối với các sản xuất $w_1 \rightarrow w_2$ |
|---|---|
| 0 | Không có hạn chế nào |
| 1 | $l(w_1) \leqslant l(w_2)$ hoặc $w_2 = \lambda$ |
| 2 | $w_1 = A$ với $A$ là ký hiệu không kết thúc |
| 3 | $w_1 = A$ và $w_2 = aB$ hay $w_2 = a$ với $A \in N$, $B \in N$, và $a \in T$, hay $S \rightarrow \lambda$ |

**Ví dụ 11.** Dựng cây dẫn xuất cho dẫn xuất *the hungry rabbit eats quickly* (con thỏ đói ăn nhanh) được cho trong phần mở đầu của tiết này.

*Giải*: Cây dẫn xuất cần tìm được cho trên Hình 2 ■




***Hình* 2.** Cây dẫn xuất.

Bài toán xác định một xâu có ở trong ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm phi ngữ cảnh hay không là bài toán thường xuất hiện trong nhiều ứng dụng, chẳng hạn như trong việc xây dựng các chương trình dịch. Có hai cách tiếp cận vấn đề này được chỉ ra trong ví dụ sau.

**Ví dụ 12.** Hãy xác định xem từ $cbab$ có thuộc ngôn ngữ được sinh ra bởi văn phạm $G = (V, T, S, P)$ trong đó $V = \{a, b, c, A, B, C, S\}$, $T = \{a, b, c\}$, $S$ là ký hiệu xuất phát và các sản xuất

$S \to AB$

$A \to Ca$

$B \to Ba$

$B \to Cb$

$B \to b$

$C \to cb$

$C \to b$

*Giải:* Một cách tiếp cận bài toán này là bắt đầu với $S$ và tìm cách dẫn ra $cbab$ bằng cách dùng một loạt các sản xuất. Vì chỉ có một sản xuất với $S$ ở vế trái, ta cần phải bắt đầu với $S \Rightarrow AB$. Sau đó ta dùng sản xuất duy nhất có $A$ ở vế trái, cụ thể là $A \to Ca$ để nhận được $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB$. Vì $cbab$ bắt đầu với các ký hiệu $cb$, nên ta dùng sản xuất $C \to cb$. Kết quả cho $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB$. Cuối cùng, bằng cách dùng sản xuất $B \to b$, ta nhận được $S \Rightarrow AB \Rightarrow CaB \Rightarrow cbaB \Rightarrow cbab$. Cách tiếp cận vừa được dùng ở trên được gọi là **sự phân giải từ trên xuống dưới**, vì nó bắt đầu với ký hiệu xuất phát và phát triển bằng cách áp dụng tuần tự các sản xuất.

Phương pháp thứ hai tiếp cận bài toán này được gọi là **sự phân giải từ dưới lên**. Trong cách tiếp cận này, ta tiến hành theo cách giật lùi. Vì $cbab$ là xâu cần được dẫn xuất ra, nên ta có thể dùng sản xuất $C \to cb$, sao cho $Cab \to cbab$. Sau đó ta có thể dùng sản xuất $A \to Ca$, sao cho $Ab \Rightarrow Cab \Rightarrow cbab$. Bằng cách dùng sản xuất $B \to b$, ta có $AB \Rightarrow Ab \Rightarrow Cab \Rightarrow cbab$. Cuối cùng, dùng $S \to AB$, ta có một dẫn xuất đầy đủ đối với $cbab$, đó là $S \Rightarrow AB \Rightarrow Ab \Rightarrow Cab \Rightarrow cbab$.

## DẠNG BACKUS - NAUR

Có một cách ký hiệu khác đôi khi được dùng để chỉ một văn phạm loại 2, được gọi là *dạng Backus – Naur* theo tên của John Backus – người phát minh ra nó – và Peter Naur người đã sửa sang nó để dùng đặc tả ngôn ngữ lập trình ALGOL. Các sản xuất trong văn phạm loại 2 có một ký hiệu đơn không kết thúc ở vế trái. Thay vì liệt kê tất cả các sản xuất tách biệt nhau, ta có thể gộp tất cả các sản xuất có cùng một ký hiệu không kết thúc ở vế trái thành một mệnh đề. Thay cho ký hiệu → trong một sản xuất, ta dùng ký hiệu :: =. Ta sẽ đưa tất cả các ký hiệu không kết thúc vào trong các dấu ngoặc < >, và liệt kê tất cả vế phải của các sản xuất vào cùng một mệnh đề, ngăn cách giữa chúng là một vạch đứng. Ví dụ, các sản xuất $A \rightarrow Aa$, $A \rightarrow a$ và $A \rightarrow AB$ được gộp thành $<A> ::= <A>a \mid a \mid <A><B>$.

**Ví dụ 13.** Viết dạng Backus – Naur của văn phạm cho tập con của tiếng Anh được mô tả ở phần mở đầu của tiết này.

*Giải*: Dạng Backus – Naur của văn phạm đó là:

*<câu> :: = <danh ngữ><động ngữ>*

*<danh ngữ> :: = <quán từ><tính từ><danh từ> | <quán từ><danh từ>*

*<động ngữ> :: = <động từ><trạng từ> | <động từ>*

*<quán từ> :: = a | the*

*<tính từ> :: = large | hungry*

*<danh từ> :: = rabbit | mathematician*

*<động từ> :: = eats | hops*

*<trạng từ> :: = quickly | wildly*

■

**Ví dụ 14.** Viết dạng Backus – Naur cho sản xuất các số nguyên có dấu trong biểu diễn thập phân. (Một **số nguyên có dấu** là một số nguyên không âm được đặt ở trước một dấu cộng hoặc một dấu trừ).

*Giải:* Dạng Backus – Naur cho văn phạm sản xuất các số nguyên có dấu là:

*<số nguyên có dấu>* :: = *<dấu><số nguyên>*

*<dấu>* :: = + | –

*<số nguyên>* :: = *<chữ số>* | *<chữ số><số nguyên>*

*<chữ số>* :: = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

■

## *BÀI TẬP*

Các bài tập từ 1 – 3 liên quan với văn phạm có ký hiệu xuất phát là **câu**, tập các ký hiệu kết thúc $T$ = {*the, sleepy, happy, tortoise, hare, passes, runs, quickly, slowly*}, tập các ký hiệu không kết thúc $N$ = {**danh ngữ, động ngữ ngoại, động ngữ nội, quán từ, tính từ, danh từ, động từ, trạng từ**} và các sản xuất

**câu** → **danh ngữ** **động ngữ ngoại** **danh ngữ**

**câu** → **danh ngữ** **động ngữ nội**

**danh ngữ** → **quán từ** **tính từ** **danh từ**

**danh ngữ** → **quán từ** **danh từ**

**động ngữ ngoại** → **ngoại động từ**

**động ngữ nội** → **nội động từ** **trạng từ**

**động ngữ nội** → **nội động từ**

**quán từ** → *the*

**tính từ** → *sleepy*

**tính từ** → *happy*

**danh từ** → *tortoise*

**danh từ** → *hare*

**ngoại động từ** → *passes*

**nội động từ** → *runs*

**trạng từ** → *quickly*

**trạng từ** → *slowly*

1. Dùng tập các sản xuất chứng minh rằng các câu cho dưới đây đều là đúng

   a) *the happy hare runs*

   b) *the sleepy tortoise runs quickly*

   c) *the tortoise passes the hare*

   d) *the sleepy hare passes the happy tortoise*

2. Tìm 5 câu đúng khác với những câu cho trong Bài tập 1.

3. Chứng minh rằng câu *the hare runs the sleepy tortoise* không phải là một câu đúng.

*4. Cho $V = \{S, A, B, a, b\}$ và $T = \{a, b\}$. Tìm ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm $\{V, T, S, P\}$ với tập $P$ các sản xuất bao gồm:

   a) $S \to AB$, $A \to ab$, $B = bb$

   b) $S \to AB$, $S \to aA$, $A \to a$, $B \to ba$

   c) $S \to AB$; $S \to AA$, $A \to aB$, $A \to ab$, $B \to b$

   d) $S \to AA$, $S \to B$, $A \to aaA$, $A \to aa$, $B \to bB$, $B \to b$

   e) $S \to AB$, $A \to aAb$, $B \to bBa$, $A \to \lambda$, $B \to \lambda$

5. Dựng một dẫn xuất của $0^3 1^3$ bằng cách dùng văn phạm cho trong Ví dụ 5.

6. Chứng minh rằng văn phạm cho trong Ví dụ 5 sinh ra tập $\{0^n 1^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$

7. a) Dựng một dẫn xuất của $0^2 1^4$ bằng cách dùng văn phạm $G_1$ cho trong Ví dụ 6.

   b) Dựng một dẫn xuất của $0^2 1^4$ bằng cách dùng văn phạm $G_2$ cho trong Ví dụ 6.

**8.** a) Chứng tỏ rằng văn phạm $G_1$ cho trong Ví dụ 6 sinh ra tập $\{0^m1^n \mid m,n = 0, 1, 2,...\}$

b) Chứng minh rằng văn phạm $G_2$ cho trong Ví dụ 6 cũng sinh ra tập trong câu (a).

**9.** Dựng một dẫn xuất của $0^21^22^2$ trong văn phạm được cho trong Ví dụ 7.

***10.** Chứng minh rằng văn phạm cho trong Ví dụ 7 sinh ra tập $\{0^n1^n2^n \mid n = 0, 1, 2,...\}$.

***11.** Tìm văn phạm cấu trúc câu cho từng ngôn ngữ sau:

a) Tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn các số 0 và không chứa số 1 nào.

b) Tập tất cả các xâu nhị phân tạo bởi một số 1 và tiếp sau là một số lẻ các số 0.

c) Tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn các số 0 và một số chẵn các số 1.

d) Tập tất cả các xâu chứa 10 hoặc nhiều hơn các số 0 và không chứa số 1 nào.

e) Tập tất cả các xâu chứa số các số 0 nhiều hơn số các số 1

f) Tập tất cả các xâu chứa số các số 0 và số các số 1 bằng nhau.

g) Tập tất cả các xâu chứa số các số 0 và số các số 1 không bằng nhau.

**12.** Xây dựng các văn phạm cấu trúc câu sinh ra các tập sau:

a) $\{01^{2n} \mid n \geqslant 0\}$

b) $\{0^n1^{2n} \mid n \geqslant 0\}$

c) $\{0^n1^m0^n \mid m \geqslant 0,\ n \geqslant 0\}$

**13.** Cho $V = \{S, A, B, a, b\}$ và $T = \{a, b\}$. Hãy xác định xem $G = \{V, T, S, P\}$ có phải là văn phạm loại 0 nhưng không phải là văn phạm loại 1, là văn phạm loại 1 nhưng không phải là văn phạm loại 2 hay là văn phạm loại 2 nhưng không là văn phạm loại 3 hay không, nếu tập $P$ của các sản xuất là:

a) $S \to aAB,\ A \to Bb,\ B \to \lambda$

b) $S \to aA,\ A \to a,\ A \to b$

c) $S \to ABa,\ AB \to a$

d) $S \to ABA,\ A \to aB,\ B \to ab$

e) $S \to bA,\ A \to B,\ B \to a$

f) $S \to aA,\ aA \to B,\ B \to aA,\ A \to b$

g) $S \to bA,\ A \to b,\ S \to \lambda$

h) $S \to AB,\ B \to aAb,\ aAb \to b$

i) $S \to aA,\ A \to bB,\ B \to b,\ B \to \lambda$

j) $S \to A,\ A \to B,\ B \to \lambda$

**14.** Một xâu được gọi là **thuận nghịch dộc** nếu xâu đó đọc xuôi và ngược đều như nhau, nghĩa là xâu $w$ với $w = w^R$, trong đó $w^R$ là xâu lộn ngược của $w$. Hãy tìm một văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra tập các xâu thuận nghịch dộc trên bộ chữ cái $\{0, 1\}$.

***15.** Cho $G_1$ và $G_2$ là hai văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra hai ngôn ngữ $L(G_1)$ và $L(G_2)$ tương ứng. Chứng minh rằng tồn tại một văn phạm phi ngữ cảnh sinh ra các tập sau:

a) $L(G_1) \cup L(G_2)$

b) $L(G_1)\ L(G_2)$

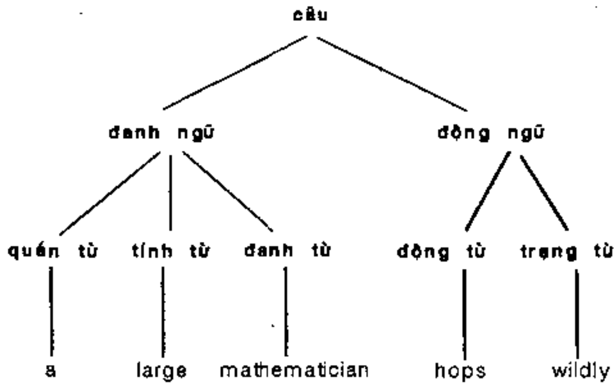
c) $L(G_1)^*$

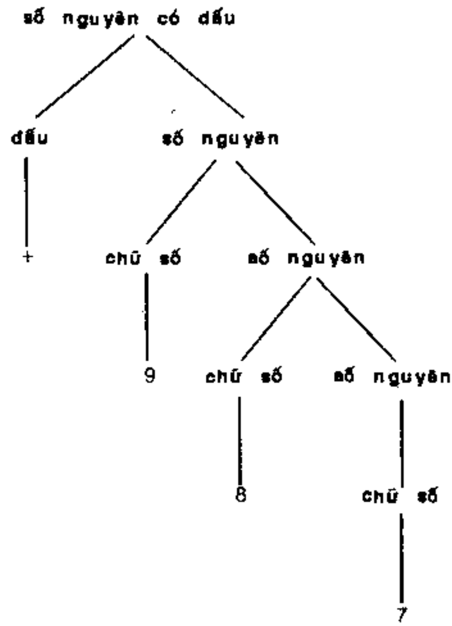
**16.** Tìm các xâu được dựng bằng cách dùng các cây dẫn xuất ở trang sau.

**17.** Dựng các cây dẫn xuất cho các câu trong Ví dụ 1.

**18.** Cho $G$ là văn phạm với $V = \{a, b, c, S\}$, $T = \{a, b, c\}$, ký hiệu xuất phát $S$ và các sản xuất $S \to abS$, $S \to bcS$, $S \to bbS$, $S \to a$, $S \to cb$. Dựng các cây dẫn xuất cho

a) $bcbba$




b) *bbbcbba*

c) *bcabbbbbcb*

***19.** Dùng phép phân tích cú pháp từ trên xuống để xác định xem các xâu sau có thuộc ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm cho trong Ví dụ 12 không

a) *baba*

b) *abab*

c) *cbaba*

d) *bbbcba*

***20.** Dùng phép tính cú pháp từ dưới lên để xác định các xâu cho trong Bài tập 19 có thuộc ngôn ngữ được sinh bởi vặn phạm cho trong Ví dụ 12 không.

**21.** Dựng cây dẫn xuất cho −109 bằng cách dùng văn phạm cho trong Ví dụ 14.

**22.** a) Xác định các sản xuất trong một văn phạm, nếu dạng Backus - Naur đối với các sản xuất đó là

$$<expression> ::= (<expression>) \mid <expression> + <expression> \mid <expression>*<expression> \mid <variable>$$

<variable> ::= $x \mid y$

b) Tìm cây dẫn xuất cho $(x * y) + y$ trong văn phạm đó.

**23.** a) Xây dựng một văn phạm cấu trúc câu sinh ra tất cả các số thập phân có dấu, gồm một dấu hoặc + hoặc −; một phần nguyên không âm và phần thập phân hoặc là một xâu rỗng hoặc là một dấu phẩy thập phân tiếp theo là một số nguyên trong đó các số không ban đầu trong số nguyên đó là được phép.

b) Viết dạng Backus - Naur của văn phạm đó

c) Xây dựng cây dẫn xuất cho −31,4 trong văn phạm đó.

**24.** a) Xây dựng một văn phạm cấu trúc câu cho tập tất cả các phân số có dạng $a/b$ trong đó $a$ là một số nguyên có dấu trong ký hiệu thập phân và $b$ là một số nguyên dương.

b) Xác định dạng Backus - Naur cho văn phạm đó.

c) Xây dựng cây dẫn xuất của +311/17 trong văn phạm đó.

**25.** Cho $G$ là một văn phạm và $R$ là một quan hệ chứa cặp sắp thứ tự $(w_0, w_1)$ nếu và chỉ nếu $w_1$ được dẫn xuất trực tiếp từ $w_0$ trong $G$. Xác định bao đóng phản xạ, bắc cầu của $R$.

# 10.2. CÁC MÁY HỮU HẠN TRẠNG THÁI CÓ ĐẦU RA

## MỞ ĐẦU

Nhiều loại máy, kể cả các linh kiện trong các máy tính, đều có thể được mô hình hóa nhờ dùng một cấu trúc được gọi là các máy hữu hạn trạng thái. Một số loại máy hữu hạn trạng thái được dùng rất rộng rãi trong các mô hình. Tất cả các phiên bản này của các máy hữu hạn trạng thái đều bao gồm một tập hữu hạn các trạng thái, với một trạng thái xuất phát đã được chỉ rõ, một bộ chữ cái đầu vào và một hàm chuyển gán cho mỗi cặp gồm một trạng thái và một đầu vào một trạng thái mới. Trong tiết này ta sẽ nghiên cứu các máy hữu hạn trạng thái có tạo ra đầu ra. Ta sẽ cho thấy các máy hữu hạn trạng thái có thể được dùng để mô hình hóa một máy bán hàng, một máy làm trễ đầu vào, một máy cộng các số nguyên và máy xác định một xâu nhị phân có chứa một cấu hình đặc biệt nào đó hay không.

Trước khi cho một định nghĩa hình thức, ta sẽ xem một máy bán hàng được mô hình như thế nào.

Một máy bán hàng chấp nhận các đồng 5 xu, 10 xu, và 25 xu. Khi ta thả vào máy tổng cộng 30 xu hoặc nhiều hơn, máy sẽ lập tức thối lại số tiền vượt quá 30 xu. Khi 30 xu đã được nằm trong máy và số tiền dư đã được thối lại, người mua có thể ấn núm màu da cam và nhận được cốc nước cam, hoặc ấn núm màu đỏ và nhận được cốc nước táo. Chúng ta có thể mô tả sự hoạt động của máy bằng cách chỉ rõ các trạng thái của nó cùng với sự thay đổi các trạng thái đó khi máy tiếp nhận một đầu vào và đầu ra được tạo ra đối với mỗi tổ hợp của đầu vào và trạng thái hiện thời.

Máy có thể ở trạng thái bất kỳ trong số bảy trạng thái khác nhau $s_i$ với $i = 0, 1, 2, \ldots 6$, ở đó máy đã nhận được $5i$ xu. Các đầu vào khả dĩ là 5 xu, 10 xu, 25 xu, núm màu da cam ($O$) và núm màu đỏ ($R$). Đầu ra có thể là không có gì ($n$), 5 xu, 10 xu, 15 xu, 20 xu, 25 xu, cốc nước cam và cốc nước táo.

Ta minh họa sự hoạt động của mô hình máy bán hàng này bằng ví dụ sau. Giả sử một sinh viên thả vào máy một đồng 10 xu, rồi tiếp theo một đồng 25 xu. Sau khi nhận được 5 xu thối lại, anh ta ấn nút màu da cam để nhận được cốc nước cam.

Máy bắt đầu ở trạng thái $s_0$. Đầu vào đầu tiên là 10 xu làm cho máy chuyển sang trạng thái $s_2$ và không cho đầu ra nào. Đầu vào thứ hai là 25 xu, nó làm thay đổi trạng thái từ $s_2$ đến $s_6$ và cho đầu ra là 5 xu thối lại. Đầu vào tiếp theo là nút màu da cam, nó làm thay đổi trạng thái từ

$s_6$ về $s_0$ (vì máy trở về trạng thái xuất phát) và cho đầu ra là một cốc nước cam.

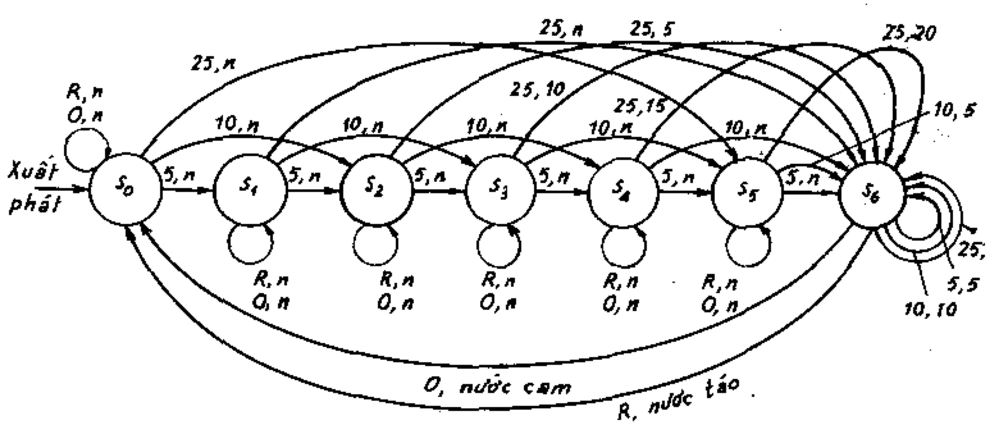
Chúng ta có thể biểu diễn tất cả những thay đổi trạng thái nói trên và đầu ra của máy đó trong một bảng. Để làm điều đó, ta cần phải chỉ rõ trạng thái tiếp theo và đầu ra nhận được đối với mỗi một tổ hợp của trạng thái và đầu vào. Bảng 1 cho thấy các dịch chuyển trạng thái và các đầu ra đối với mỗi cặp gồm một trạng thái và một đầu vào.

**BẢNG 1. Bảng trạng thái của một máy bán hàng**

| Trạng thái | Trạng thái tiếp theo | | | | | Đầu ra | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Đầu vào | | | | | Đầu vào | | | | |
| | 5 | 10 | 25 | O | R | 5 | 10 | 25 | O | R |
| $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_5$ | $s_0$ | $s_0$ | n | n | n | n | n |
| $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_6$ | $s_1$ | $s_1$ | n | n | n | n | n |
| $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | $s_6$ | $s_2$ | $s_2$ | n | n | 5 | n | n |
| $s_3$ | $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_3$ | $s_3$ | n | n | 10 | n | n |
| $s_4$ | $s_5$ | $s_6$ | $s_6$ | $s_4$ | $s_4$ | n | n | 15 | n | n |
| $s_5$ | $s_6$ | $s_6$ | $s_6$ | $s_5$ | $s_5$ | n | 5 | 20 | n | n |
| $s_6$ | $s_6$ | $s_6$ | $s_6$ | $s_0$ | $s_0$ | 5 | 10 | 25 | OJ* | AJ* |

*OJ – cốc nước cam

**AJ – cốc nước táo.




*Hình 1.* Máy bán hàng.

Một cách khác để cho thấy hoạt động của máy là dùng các đồ thị có hướng với các cạnh được đánh dấu, trong đó mỗi trạng thái được biểu diễn bởi một vòng tròn, các cạnh biểu diễn sự chuyển dịch trạng thái và được đánh dấu bằng đầu vào và đầu ra ứng với chuyển dịch đó. Hình 1 cho đồ thị có hướng biểu diễn máy bán hàng.

## MÁY HỮU HẠN TRẠNG THÁI CÓ ĐẦU RA

Bây giờ ta sẽ cho định nghĩa hình thức của một máy hữu hạn trạng thái có đầu ra.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Một máy hữu hạn trạng thái* $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ gồm một tập hữu hạn $S$ các trạng thái, một *bộ chữ cái hữu hạn đầu vào* $I$, *một bộ chữ cái hữu hạn đầu ra* $O$, một *hàm chuyển* $f$ gán cho mỗi cặp gồm một trạng thái và một đầu vào một trạng thái mới, một *hàm đầu ra* $g$ gán cho mỗi cặp gồm một trạng thái và một đầu vào một đầu ra, và một trạng thái ban đầu $s_0$.

Giả sử $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ là một máy hữu hạn trạng thái. Ta sẽ dùng một **bảng trạng thái** để biểu diễn các giá trị của hàm chuyển $f$ và hàm đầu ra $g$ cho tất cả các cặp gồm một trạng thái và một đầu vào. Ở trên ta đã từng xây dựng một bảng như vậy cho máy bán hàng được xét trong phần mở đầu của tiết này.

**Ví dụ 1.** Bảng 2 là bảng trạng thái mô tả một máy hữu hạn trạng thái với $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0, 1\}$ và $O = \{0, 1\}$. Các giá trị của hàm $f$ được cho trong hai cột đầu tiên và các giá trị của hàm $g$ được cho trong hai cột cuối cùng.

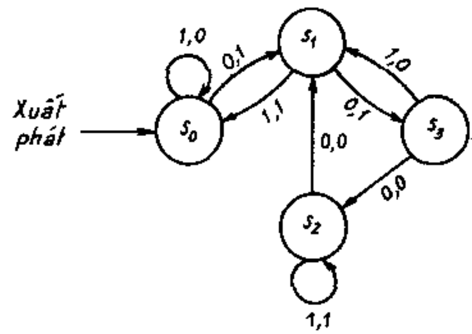
■

Một cách khác để biểu diễn một máy hữu hạn trạng thái là dùng giản đồ trạng thái. Đó là một đồ thị có hướng với các cạnh được đánh dấu. Trong giản đồ này mỗi trạng thái được biểu diễn bởi một vòng tròn, các mũi tên được đánh dấu bởi cặp đầu vào và đầu ra cho mỗi chuyển dịch trạng thái.

**Ví dụ 2.** Dựng giản đồ trạng thái cho một máy hữu hạn trạng thái với bảng trạng thái là Bảng 2.

*Giải:* Giản đồ trạng thái của máy này được cho trên Hình 2. ■

| BẢNG 2 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | f | | g | |
| Trạng thái | Đầu vào | | Đầu vào | |
| | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $s_0$ | $s_1$ | $s_0$ | 1 | 0 |
| $s_1$ | $s_3$ | $s_0$ | 1 | 1 |
| $s_2$ | $s_1$ | $s_2$ | 0 | 1 |
| $s_3$ | $s_2$ | $s_1$ | 0 | 0 |

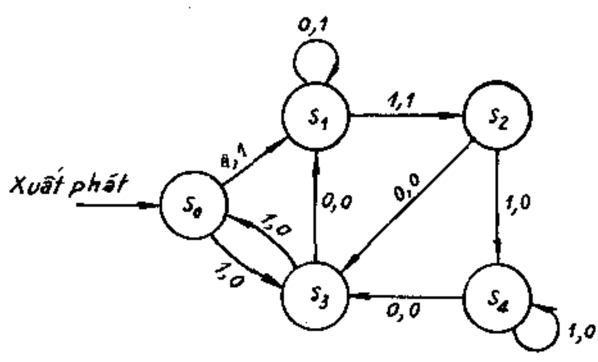



*Hình 2.* Giản đồ trạng thái biểu diễn máy hữu hạn trạng thái cho trong Bảng 2.

**Ví dụ 3.** Lập bảng trạng thái cho một máy hữu hạn trạng thái với giản đồ trạng thái cho trên Hình 3.

*Giải:* Bảng trạng thái cho máy đó là Bảng 3. ■

| BẢNG 3 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | f | | g | |
| Trạng thái | Đầu vào | | Đầu vào | |
| | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $s_0$ | $s_1$ | $s_3$ | 1 | 0 |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_2$ | 1 | 1 |
| $s_2$ | $s_3$ | $s_4$ | 0 | 0 |
| $s_3$ | $s_1$ | $s_0$ | 0 | 0 |
| $s_4$ | $s_3$ | $s_4$ | 0 | 0 |




*Hình 3.* Máy hữu hạn trạng thái.

Một xâu đầu vào đưa trạng thái xuất phát qua một dãy các trạng thái được xác định bởi hàm chuyển. Vì chúng ta đọc xâu đầu vào theo từng ký hiệu một (từ trái sang phải), nên mỗi ký hiệu đầu vào đưa máy từ một trạng thái này sang trạng thái khác. Vì mỗi một chuyển dịch trạng thái tạo ra một đầu ra, nên xâu đầu vào cũng tạo ra một xâu đầu ra.

Giả sử xâu đầu vào là $x = x_1x_2...x_k$. Khi đó việc đọc đầu vào này sẽ đưa máy từ trạng thái $s_0$ đến trạng thái $s_1$ với $s_1 = f(s_0, x_1)$, rồi tới trạng thái $s_2$ với $s_2 = f(s_1, x_2)$, v.v... cho tới khi kết thúc ở trạng thái $s_k$ với $s_k = f(s_{k-1}, x_k)$. Dãy các dịch chuyển trạng thái này tạo ra một xâu đầu ra $y = y_1y_2...y_k$, với $y_1 = g(s_0, x_1)$ là đầu ra tương ứng với chuyển dịch từ $s_0$ đến $s_1$, $y_2 = g(s_1, x_2)$ là đầu ra tương ứng với chuyển dịch từ $s_1$ đến $s_2$, v.v... Nói một cách tổng quát $y_j = g(s_{j-1}, x_j)$ với $j = 1, 2,..., k$. Do đó, ta có thể mở rộng định nghĩa của hàm đầu ra $g$ cho các xâu đầu vào sao cho $g(x) = y$ ở đây $y$ là xâu đầu ra tương ứng với xâu đầu vào $x$. Khái niệm này rất hữu ích trong nhiều ứng dụng.

**Ví dụ 4.** Tìm xâu đầu ra được sinh bởi một máy hữu hạn trạng thái cho trên Hình 3 nếu xâu đầu vào là xâu 101011

*Giải*: Xâu đầu ra nhận được là 001000. Dãy các trạng thái và đầu ra tuần tự được cho trong Bảng 4.

■

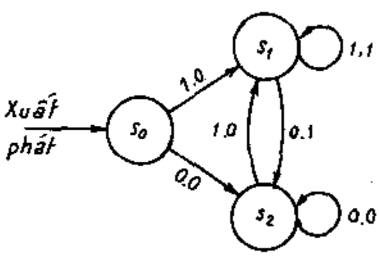
Bây giờ chúng ta có thể cho một số ví dụ về các máy hữu hạn trạng thái hữu ích. Các ví dụ này minh họa cho điều là các trạng thái của máy làm cho nó có một khả năng nhớ hạn chế. Các trạng thái có thể được dùng để nhớ những tính chất của các ký hiệu được đọc bởi máy. Tuy nhiên, vì máy chỉ có một số hữu hạn các trạng thái khác nhau, nên các máy hữu hạn trạng thái không thể được dùng cho một số mục đích quan trọng. Điều này sẽ được minh họa trong Tiết 10.4.

**BẢNG 4**

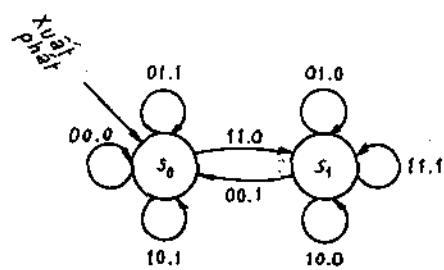
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Đầu vào** | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | – |
| **Trạng thái** | $s_0$ | $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $s_0$ | $s_3$ |
| **Đầu ra** | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | – |

**Ví dụ 5.** Một phần tử quan trọng trong nhiều dụng cụ điện tử là *máy trễ - đơn vị*, đây là máy tạo nên đầu ra chính là xâu đầu vào nhưng bị trễ một lượng thời gian cho trước. Vậy một máy hữu hạn trạng thái có thể được xây dựng như thế nào để nó làm trễ xâu đầu vào một đơn vị thời gian, tức là tạo nên đầu ra là xâu nhị phân $0x_1x_2...x_{k-1}$ từ xâu đầu vào đã cho là $x_1x_2...x_k$?

*Giải:* Một máy trễ có thể được xây dựng sao cho nó có hai đầu vào khả dĩ, cụ thể là 0 và 1. Máy này cần có một trạng thái xuất phát $s_0$. Vì máy cần phải nhớ đầu vào trước đó là 0 hay 1 nên máy này cần có hai trạng thái $s_1$ và $s_2$ trong đó máy sẽ ở trạng thái $s_1$ nếu đầu vào trước đó là 1 và ở trạng thái $s_2$ nếu đầu vào trước đó là 0. Đầu ra 0 sẽ được tạo ra đối với chuyển dịch ban đầu từ $s_0$. Mỗi một dịch chuyển từ $s_1$ sẽ cho đầu ra là 1, và mỗi một dịch chuyển từ $s_2$ sẽ cho đầu ra là 0. Như vậy, đầu ra tương ứng với xâu đầu vào $x_1...x_k$ sẽ là xâu bắt đầu bằng số 0, tiếp theo bởi $x_1$, rồi $x_2$ và kết thúc ở $x_{k-1}$. Giản đồ trạng thái của máy này được cho trên Hình 4. ■




*Hình 4.* Máy trễ-đơn vị




*Hình 5.* Máy cộng

**Ví dụ 6.** Tạo một máy hữu hạn trạng thái để cộng hai số nguyên ở dạng nhị phân

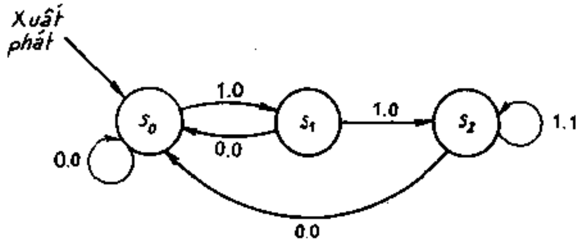
*Giải:* Khi $(x_n...x_1x_0)_2$ và $(y_n...y_1y_0)_2$ được cộng với nhau, thủ tục (như được mô tả ở tiết 2-4) sẽ diễn ra như nhau. Trước hết, $x_0$ và $y_0$ được cộng với nhau tạo thành bit tổng $z_0$ và bit nhớ $c_0$. Bit nhớ này hoặc là 0 hoặc là 1. Sau đó, các bit $x_1$ và $y_1$ được cộng với nhau cùng với bit nhớ $c_0$. Kết quả được bit tổng $z_1$ và bit nhớ $c_1$. Thủ tục này cứ tiếp tục mãi cho tới giai đoạn thứ $n$, ở đó $x_n$, $y_n$ và số nhớ trước $c_{n-1}$ được cộng với nhau cho bit tổng $z_n$ và số nhớ $c_n$, số nhớ này đúng bằng bit tổng $z_{n+1}$.

Một máy hữu hạn trạng thái thực hiện phép cộng này có thể được xây dựng bằng cách chỉ dùng hai trạng thái. Để đơn giản ta giả sử rằng cả hai bit khởi đầu $x_n$ và $y_n$ đều là 0 (vì nếu không ta cần phải có sự bố trí đặc biệt liên quan đến bit tổng $z_{n+1}$). Trạng thái xuất phát $s_0$ được dùng để nhớ rằng bit nhớ trước đó là 0 (hay đối với phép cộng các bit ở bên phải cùng). Một trạng thái khác là $s_1$ được dùng để nhớ rằng bit nhớ trước đó là 1. Vì đầu vào của máy là cặp các bit, nên có bốn đầu vào khả dĩ. Chúng ta biểu diễn các khả năng này là 00 (khi cả hai bit đều là 0), 01 (khi bit thứ nhất là 0, bit thứ hai là 1), 10 (khi bit thứ nhất là 1, bit thứ hai là 0) và 11 (khi cả hai bit đều là 1). Các chuyển dịch trạng thái và đầu ra được xây dựng từ tổng hai bit được biểu diễn bởi đầu vào và bit nhớ được biểu diễn bởi trạng thái. Ví dụ, khi máy ở trạng thái $s_1$ và nhận đầu vào là 01, thì trạng thái tiếp sau vẫn là $s_1$ và đầu ra là 0 vì tổng xuất hiện khi này là $0 + 1 + 1 = (10)_2$. Giản đồ trạng thái của máy này cho trên Hình 5.

■

**Ví dụ 7.** Trong một sơ đồ mã hóa nào đó, khi có ba số 1 liên tiếp xuất hiện trong một thông báo, thì máy thu thông báo biết rằng đã có một sai sót truyền tin. Hãy xây dựng một máy hữu hạn trạng thái cho bit đầu ra là 1 nếu và chỉ nếu ba bit cuối cùng nhận được đều là số 1.

*Giải*: Máy này cần có ba trạng thái. Trạng thái xuất phát $s_0$ nhớ rằng giá trị đầu vào trước đó, nếu có, không phải là 1. Trạng thái $s_1$ nhớ rằng đầu vào trước đó là 1, nhưng đầu vào trước đầu vào trước đó, nếu có, lại không phải là 1. Trạng thái $s_2$ nhớ rằng hai đầu vào trước đó đều là 1. Đầu vào 1 đưa $s_0$ sang $s_1$ vì bây giờ một số 1 chứ không phải hai số 1 liên tiếp đã được đọc. Đầu vào 1 đưa $s_1$ sang $s_2$ vì bây giờ hai số 1 liên tiếp đã được đọc và đưa $s_2$ tới chính nó vì ít nhất có hai số 1 liên tiếp đã được đọc. Đầu vào 0 đưa tất cả các trạng thái về $s_0$ vì nó phá vỡ mọi xâu gồm các số 1 liên tiếp. Đầu ra đối với chuyển dịch từ $s_2$ đến chính nó là 1 khi 1 được đọc, vì tổ hợp gồm đầu vào và trạng thái này cho thấy ba số 1 liên tiếp đã được đọc. Tất cả các đầu ra khác đều là 0. Giản đồ trạng thái của máy này cho trên Hình 6.




*Hình 6.* Máy hữu hạn trạng thái cho đầu ra là 1 nếu và chỉ nếu xâu đầu vào được đọc tới lúc đó kết thúc bởi 111.

Máy trên Hình 6 là một ví dụ của **bộ nhận ngôn ngữ**, bởi vì nó tạo một đầu ra là 1 nếu và chỉ nếu xâu đầu vào được đọc tới lúc này có một tính chất đã được chỉ rõ trước. Sự chấp nhận ngôn ngữ là một ứng dụng quan trọng của các máy hữu hạn trạng thái.

**Các loại máy hữu hạn trạng thái**. Có nhiều loại máy hữu hạn trạng thái khác nhau đã được phát triển để mô hình hóa các máy tính toán. Trong tiết này ta đã cho định nghĩa của một loại máy hữu hạn trạng thái. Trong loại máy này các đầu ra tương ứng với sự chuyển dịch giữa các trạng thái. Những máy thuộc loại này được gọi là các **máy Mealy** vì chúng được nghiên cứu đầu tiên bởi G. H. Mealy vào năm 1955. Còn một loại máy hữu hạn trạng thái có đầu ra quan trọng khác, trong đó đầu ra chỉ được xác định bởi trạng thái. Loại máy này được gọi là các **máy Moore** vì E. F. Moore đã đưa ra loại máy này vào năm 1956. Các máy Moore được xét trong chuỗi các bài tập ở cuối tiết này.

Trong Ví dụ 7 chúng ta đã cho thấy một máy Mealy có thể được dùng để chấp nhận ngôn ngữ như thế nào. Tuy nhiên, một loại máy hữu hạn trạng thái khác, không cho đầu ra, thường được dùng cho mục đích đó. Các máy này cũng còn được gọi là các ôtômat hữu hạn, chúng có một tập các trạng thái kết thúc và chấp nhận một xâu nếu và chỉ nếu xâu đó đưa được trạng thái xuất phát đến một trạng thái kết thúc. Chúng ta sẽ nghiên cứu loại máy hữu hạn trạng thái này trong Tiết 10.3.

## BÀI TẬP

**1.** Vẽ giản đồ trạng thái đối với các mãy hữu hạn trạng thái có bảng trạng thái sau:

a)

| Trạng thái | f: Đầu vàa 0 | f: Đầu vàa 1 | g: Đầu vàa 0 | g: Đầu vàa 1 |
|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | $s_1$ | $s_0$ | 0 | 1 |
| $s_1$ | $s_0$ | $s_2$ | 0 | 1 |
| $s_2$ | $s_1$ | $s_1$ | 0 | 0 |

b)

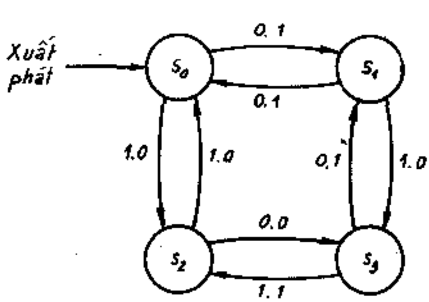
| Trạng thái | f: Đầu vào 0 | f: Đầu vào 1 | g: Đầu vào 0 | g: Đầu vào 1 |
|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | $s_1$ | $s_0$ | 0 | 0 |
| $s_1$ | $s_2$ | $s_0$ | 1 | 1 |
| $s_2$ | $s_0$ | $s_3$ | 0 | 1 |
| $s_3$ | $s_1$ | $s_2$ | 1 | 0 |

c)

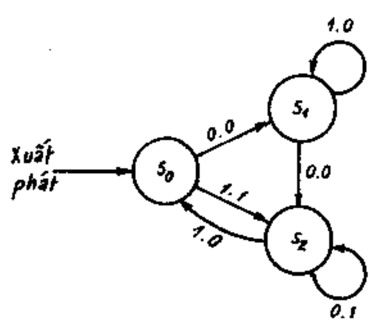
| Trạng thái | f: Đầu vào 0 | f: Đầu vào 1 | g: Đầu vàa 0 | g: Đầu vàa 1 |
|---|---|---|---|---|
| $s_0$ | $s_0$ | $s_4$ | 1 | 1 |
| $s_1$ | $s_0$ | $s_3$ | 0 | 1 |
| $s_2$ | $s_0$ | $s_2$ | 0 | 0 |
| $s_3$ | $s_1$ | $s_1$ | 1 | 1 |
| $s_4$ | $s_1$ | [illegible] | 1 | 0 |

**2.** Lập bảng trạng thái đối với các máy hữu hạn trạng thái có giản đồ trạng thái sau:

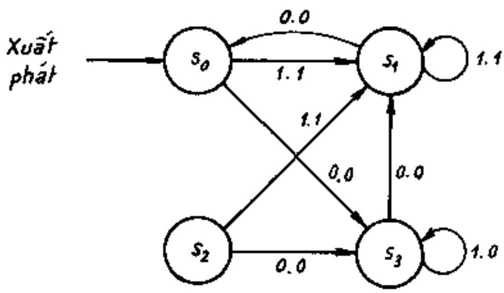
a)




b)



c)




**3.** Cho máy hữu hạn trạng thái nói trong Ví dụ 2, hãy xác định đầu ra ứng với mỗi xâu đầu vào sau:

a) 0111 b) 11011011 c) 01010101010

**4.** Cho máy hữu hạn trạng thái nói trong Ví dụ 3, hãy xác định đầu ra ứng với mỗi xâu đầu vào sau:

a) 0000 b) 101010 c) 11011100010

**5.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái là mô hình của một máy bán đồ uống. Máy này nhận các đồng 5 xu, 10 xu và 25 xu. Máy chấp nhận thay đổi chừng nào có 35 xu được thả vào máy. Nó sẽ thối lại số tiền vượt quá 35 xu. Sau đó, khách hàng ấn các nút có thể nhận được một cốc coca, một cốc bia hoặc một li rượu gừng.

**6.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái là mô hình của máy bán báo. Máy này có một cửa chỉ mở được sau khi đã thả vào máy ba đồng 10 xu (và một số bất kỳ các đồng xu khác) hoặc một đồng 25 xu và một đồng 5 xu (và một số bất kỳ các đồng xu khác). Một khi cửa có thể mở được, khách hàng sẽ mở nó, lấy báo rồi lại đóng cửa lại. Tiền thừa sẽ không được thối lại bất kể số tiền thừa là bao nhiêu. Khách hàng tiếp sau bắt đầu không có nợ nần gì đối với người trước.

**7.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái làm trễ hai bit một xâu đầu vào bằng cách cho hai bit đầu tiên của đầu ra là 00.

**8.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái làm thay đổi mỗi một bit khác, bắt đầu từ bit thứ hai, của một xâu đầu vào để các bit khác không thay đổi.

**9.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái để tăng nhập vào thủ tục đối với một máy tính, trong đó người dùng nối với hệ thống bằng cách đưa vào số định danh (ID) của người dùng – được xem như một đầu vào đơn – và sau đó, đưa vào mật khẩu – cũng được xem như một đầu vào đơn. Nếu mật khẩu không đúng, thì người dùng lại bị hỏi lại số định danh người dùng.

**10.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái cho một khóa tổ hợp chứa các số từ 1 đến 40. Khóa chỉ mở khi đưa vào tổ hợp đúng: 10 bên phải, 8 thứ hai bên trái, 37 bên phải. Mỗi đầu vào là một bộ ba bao gồm một con số, hướng quay và số lần khóa được quay theo hướng đó.

**11.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái cho một máy thu phí cầu đường. Máy sẽ mở cổng sau khi 25 xu (có thể gồm các đồng 5 xu, 10 xu và 25 xu) được thả vào máy. Không có sự trao đổi nào nếu người lái xe trả quá 25 xu và khi đó cũng không có sự gán nợ cho người lái xe tiếp ngay sau.

**12.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái cho đầu ra là 1 nếu số các ký hiệu đầu vào được đọc cho tới lúc này chia hết cho 3 và cho đầu ra là 0 trong các trường hợp còn lại.

**13.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái để xác định xem một xâu đầu vào có một số 1 ở vị trí cuối cùng và một số 0 ở vị trí thứ ba đối với vị trí cuối cùng được đọc tới lúc đó hay không.

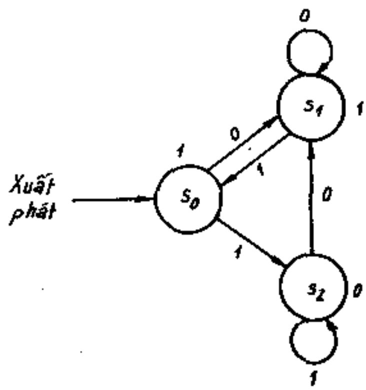
**14.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái để xác định xem xâu đầu vào được đọc cho tới lúc này có kết thúc bằng năm số 1 liên tiếp hay không.

**15.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái để xác định xem từ *computer* đã được đọc như 8 ký tự cuối cùng trong đầu vào được đọc tới lúc này hay không. Biết rằng đầu vào có thể là xâu bất kỳ gồm các chữ cái tiếng Anh.

**Máy Moore** $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ *gồm một tập hữu hạn S các trạng thái, một bảng chữ cái đầu vào I, một bảng chữ cái đầu ra O, một hàm chuyển f gán trạng thái tiếp theo cho mỗi cặp một trạng thái và một đầu vào, một hàm đầu ra g gán một đầu ra cho mỗi trạng thái, và trạng thái* *xuất phát $s_0$. Một máy Moore có thể được biểu diễn bởi một bảng liệt kê các chuyển dịch đối với mỗi cặp trạng thái và đầu vào, và đầu ra đối với mỗi trạng thái. Máy Moore cũng có thể được biểu diễn bởi giản đồ trạng thái trong đó thể hiện các trạng thái, những chuyển dịch giữa các trạng thái và đầu ra đối với mỗi trạng thái. Trong giản đồ trạng thái, các chuyển dịch được chỉ bằng các mũi tên có đánh dấu bằng đầu vào, còn các đầu ra được ghi cạnh các trạng thái tương ứng.*

**16.** Dựng giản đồ trạng thái cho máy Moore có bảng trạng thái sau:

| Trạng thái | f | | g |
|---|---|---|---|
| | Đầu vào | | |
| | 0 | 1 | |
| $s_0$ | $s_0$ | $s_2$ | 0 |
| $s_1$ | $s_3$ | $s_0$ | 1 |
| $s_2$ | $s_2$ | $s_1$ | 1 |
| $s_3$ | $s_2$ | $s_0$ | 1 |




**17.** Dựng bảng trạng thái cho một máy Moore có giản đồ trạng thái cho ở hình trên.

Mỗi xâu đầu vào đối với một máy Moore M sẽ tạo ra một xâu đầu ra. Đặc biệt, đầu ra tương ứng với xâu đầu vào $a_1a_2...a_k$ là xâu $g(s_0)g(s_1)...g(s_k)$, ở đây $s_i = f(s_{i-1}, a_i)$ với $i = 1, 2,..., k$.

**18.** Tìm xâu đầu ra tạo bởi máy Moore trong Bài tập 16 với các xâu đầu vào tương ứng là:

a) 0101 b) 111111 c) 11101110111

**19.** Cũng hỏi như trên cho máy Moore trong Bài tập 17.

**20.** Dựng một máy Moore cho đầu ra là 1 bất kỳ khi nào số các ký hiệu trong xâu đầu vào được đọc tới lúc này chia hết cho 4.

**21.** Dựng một máy Moore để xác định xem một xâu đầu vào chứa một số chẵn hay số lẻ các số 1. Máy sẽ cho đầu ra là 1 nếu trong xâu có một số chẵn các số 1 và đầu ra 0 nếu trong xâu có một số lẻ các số 1.

# 10.3. MÁY HỮU HẠN TRẠNG THÁI KHÔNG CÓ ĐẦU RA

## MỞ ĐẦU

Một trong những ứng dụng quan trọng của các máy hữu hạn trạng thái là sự chấp nhận ngôn ngữ. Ứng dụng này đóng vai trò cơ bản trong việc thiết kế và xây dựng các chương trình dịch cho các ngôn ngữ lập trình. Trong Tiết 10.2, chúng ta đã chứng tỏ rằng một máy hữu hạn trạng thái có đầu ra có thể được dùng để chấp nhận các ngôn ngữ bằng cách cho đầu ra 1 khi một xâu của ngôn ngữ đã được đọc và đầu ra 0 trong trường hợp ngược lại. Tuy nhiên, có các loại máy hữu hạn trạng thái khác được thiết kế chuyên để chấp nhận các ngôn ngữ. Thay vì tạo ra đầu ra, các máy này có những trạng thái kết thúc. Một xâu được chấp nhận nếu và chỉ nếu nó đưa trạng thái xuất phát tới một trạng thái kết thúc.

## TẬP CÁC XÂU

Trước khi thảo luận về các máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra, chúng tôi sẽ giới thiệu một số kiến thức cơ sở quan trọng về tập các xâu. Các phép toán được định nghĩa ở đây sẽ được dùng rộng rãi trong thảo luận của chúng ta về sự chấp nhận ngôn ngữ bởi các máy có hữu hạn trạng thái.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** Cho $A$ và $B$ là hai tập con của $V^*$, với $V$ là một từ vựng. **Phép ghép** của $A$ và $B$, được ký hiệu bởi $AB$, là tập tất cả các xâu có dạng $xy$ trong đó $x$ là xâu thuộc $A$ và $y$ là xâu thuộc $B$.

**Ví dụ 1.** Cho $A = \{0, 11\}$ và $B = \{1, 10, 110\}$. Tìm $AB$ và $BA$.

*Giải:* Tập $AB$ chứa tất cả các phép ghép của một xâu trong $A$ và một xâu trong $B$. Do đó, $AB = \{01, 010, 0110, 111, 1110, 11110\}$. Tập $BA$ chứa tất cả các phép ghép của một xâu trong $B$ và một xâu trong $A$. Do đó, $BA = \{10, 111, 100, 1011, 1100, 11011\}$.

■

Chú ý rằng không nhất thiết phải có $AB = BA$, khi $A$ và $B$ là các tập con của $V^*$, như Ví dụ 1 đã cho thấy.

Từ định nghĩa phép ghép của hai tập các xâu, ta có thể định nghĩa $A^n$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ Điều này được làm một cách đệ quy như sau:

$A^0 = \{\lambda\}$

$A^{n+1} = A^nA$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$

**Ví dụ 2.** Cho $A = \{1, 00\}$. Tìm $A^n$ với $n = 0, 1, 2$ và 3

*Giải:* Ta có $A^0 = \{\lambda\}$ và $A^1 = A^0A = \{\lambda\}A = \{1, 00\}$. Để tìm $A^2$ ta ghép các cặp phần tử của $A$. Kết quả được $A^2 = \{11, 100, 001, 0000\}$. Để tìm $A^3$, ta ghép các phần tử trong $A^2$ và $A$, kết quả cho $A^3 = \{111, 1100, 1001, 10000, 0011, 00100, 00001, 000000\}$.

■

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Cho $A$ là một tập con của $V^*$. Khi đó *bao đóng Kleen* của $A$ – được ký hiệu là $A^*$ – là tập gồm các phép ghép một số tùy ý các xâu thuộc $A$. Điều này có nghĩa là $A^* = \cup_{k=0}^{\infty} A^k$

**Ví dụ 3.** Tìm bao đóng Kleen của các tập sau: $A = \{0\}$, $B = \{0, 1\}$ và $C = \{1, 1\}$.

*Giải:* Bao đóng Kleen của $A$ là phép ghép của xâu 0 với chính nó một số hữu hạn lần tùy ý. Do đó, $A^* = \{0^n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$. Bao đóng Kleen của $B$ là phép ghép một số tùy ý các xâu, trong đó mỗi xâu là 0 hoặc 1. Đây chẳng qua là tập các xâu trên bộ chữ cái $\{0, 1\}$. Tức $B^* = V^*$. Cuối cùng, bao đóng Kleen của $C$ là phép ghép xâu 11 với chính nó một số lần tùy ý. Do đó, $C^*$ là tập các xâu gồm một số chẵn các số 1. Tức là, $C^* = \{1^{2n} \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$.

■

## ÔTÔMAT HỮU HẠN

Bây giờ chúng ta sẽ cho định nghĩa của máy hữu hạn trạng thái không có đầu ra. Những máy này cũng được gọi là các **ôtômat hữu hạn** và từ đây trở đi ta sẽ dùng thuật ngữ này. Các ôtômat hữu hạn khác với các máy hữu hạn trạng thái mà ta đã xét trong Tiết 10.2 ở chỗ chúng không tạo ra đầu ra mà có một tập các trạng thái kết thúc. Như chúng ta sẽ thấy, các ôtômat hữu hạn chấp nhận các xâu đưa trạng thái xuất phát tới một trạng thái kết thúc.

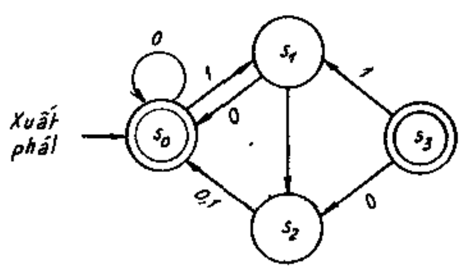
**ĐỊNH NGHĨA 3.** *Một ôtômat hữu hạn* $M = (S, I, f, s_0, F)$ gồm một tập hữu hạn $S$ *các trạng thái*, một *bộ chữ cái đầu vào* $I$, một hàm chuyển $f$ gán trạng thái tiếp theo cho mỗi cặp trạng thái và đầu vào, trạng thái xuất phát $s_0$ và một tập con $F$ của $S$ gồm các trạng thái kết thúc.

Chúng ta có thể biểu diễn một ôtômat hữu hạn bằng cách dùng các bảng trạng thái hoặc các giản đồ trạng thái. Các trạng thái kết thúc được thể hiện bằng các vòng tròn kép trong giản đồ trạng thái.

**Ví dụ 4.** Dựng giản đồ trạng thái của ôtômat hữu hạn $M = (S, I, f, s_0, F)$ với $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3\}$, $I = \{0, 1\}$, $F = \{s_0, s_3\}$ và hàm chuyển $f$ được cho trong Bảng 1.

**BẢNG 1**

| Trạng thái | f: Đầu vào 0 | f: Đầu vào 1 |
|---|---|---|
| $s_0$ | $s_0$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_0$ | $s_2$ |
| $s_2$ | $s_0$ | $s_0$ |
| $s_3$ | $s_2$ | $s_1$ |




*Hình 1.* Giản đồ trạng thái của một ôtômat hữu hạn

*Giải:* Giản đồ trạng thái được cho trên Hình 1. Chú ý rằng vì cả hai đầu vào 0 và 1 đều đưa $s_2$ tới $s_0$, nên ta viết 0, 1 trên cạnh từ $s_2$ đến $s_0$.

Hàm chuyển $f$ có thể được mở rộng sao cho nó được định nghĩa cho mọi cặp gồm một trạng thái và một xâu. Giả sử $x = x_1x_2...x_k$ là xâu trong $I^*$. Khi đó $f(s_1, x)$ là trạng thái nhận được bằng cách dùng tuần tự các ký hiệu trong $x$, từ trái sang phải, làm đầu vào, bắt đầu với trạng thái $s_1$. Từ $s_1$ ta có thể đi tới trạng thái $s_2 = f(s_1, x_1)$, sau đó tới trạng thái $s_3 = f(s_2, x_2)$ v.v... với $f(s_1, x) = f(s_k, x_k)$.

Một xâu $x$ được gọi là **được chấp nhận** bởi máy $M = (S, I, f, s_0, F)$ nếu nó đưa trạng thái xuất phát tới một trạng thái kết thúc, tức là $f(s_0, x)$ là một trạng thái thuộc $F$. **Ngôn ngữ được chấp nhận** bởi máy $M$, được ký hiệu là $L(M)$, là tập tất cả các xâu được chấp nhận bởi $M$. Hai ôtômat hữu hạn được gọi là **tương dương**, nếu chúng cùng chấp nhận một ngôn ngữ.

**Ví dụ 5.** Xác định ngôn ngữ được chấp nhận bởi các ôtômat hữu hạn $M_1$, $M_2$ và $M_3$ trên Hình 2.

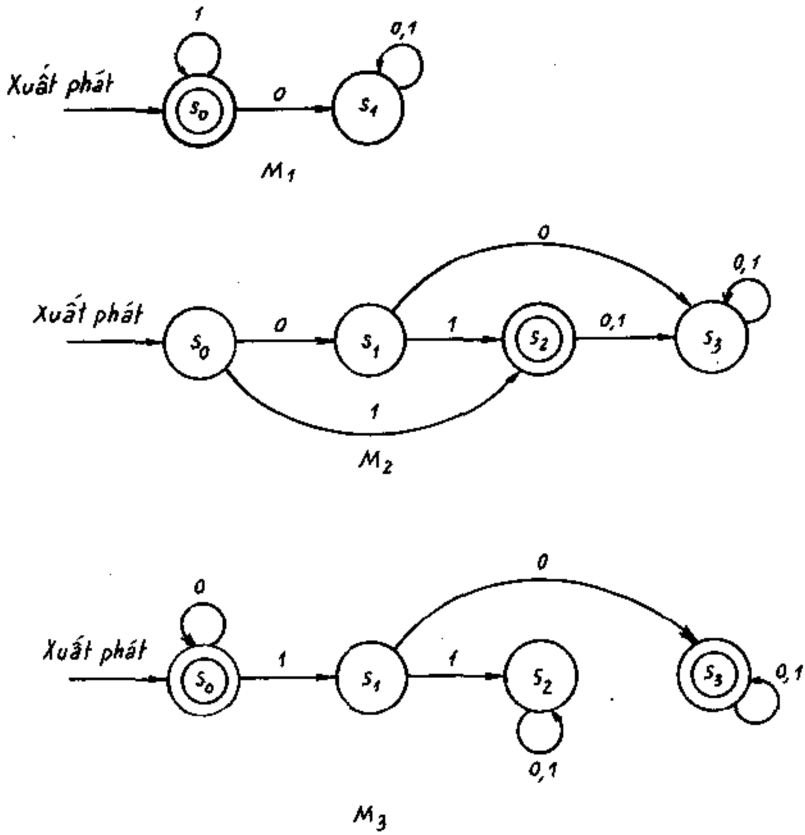
*Giải:* Trạng thái kết thúc duy nhất của $M_1$ là $s_0$. Các xâu đưa $s_0$ tới chính nó là xâu rỗng và các xâu chứa toàn các số 1. Do đó, $L(M_1) = \{1^n \mid n = 0, 1, 2,...\}$

Trạng thái kết thúc duy nhất của $M_2$ là $s_2$. Các xâu duy nhất đưa $s_0$ tới $s_2$ là 1 và 01. Do đó, $\mathbf{L(M_2)} = \{1, 01\}$.

Các trạng thái cuối cùng của $M_3$ là $s_0$ và $s_3$. Các xâu duy nhất đưa $s_0$ đến chính nó là $\lambda$, 0, 00, 000,..., tức là xâu rỗng và các xâu gồm toàn số 0. Còn các xâu duy nhất đưa $s_0$ tới $s_3$ **là xâu** rỗng hoặc các xâu gồm các số 0 liên tiếp, tiếp sau bởi 10 rồi tiếp sau nữa bởi một xâu bất kỳ. Do đó, $L(M_3) = \{0^n, 0^n10x \mid n = 0, 1, 2,...$ và $x$ là xâu bất kỳ$\}$.

■

Các ôtômat được xét cho tới đây đều là các **ôtômat tất định**, vì đối với mỗi cặp trạng thái và giá trị đầu vào có một trạng thái kế tiếp duy nhất được cho bởi hàm chuyển. Tuy nhiên, còn có một loại ôtômat hữu hạn quan trọng khác trong đó có thể có một số trạng thái kế tiếp khả dĩ ứng với mỗi cặp giá trị đầu vào và trạng thái. Những máy này được gọi **là không tất định**. Các ôtômat hữu hạn không tất định đóng vai trò quan trọng trong việc xác định các ngôn ngữ nào là được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn.




***Hình** 2.* Một số ôtômat hữu hạn

**ĐỊNH NGHĨA 4.** *Ôtômat hữu hạn không tất định* $M = (S, I, f, s_0, F)$ gồm tập $S$ các trạng thái, một bộ chữ cái đầu vào $I$, một hàm chuyển $f$ gán cho mỗi cặp gồm trạng thái và đầu vào một tập các trạng thái, trạng thái xuất phát $s_0$ và tập con $F$ của $S$ gồm các trạng thái kết thúc.

Ta cũng có thể biểu diễn các ôtômat hữu hạn không tất định bằng một bảng các trạng thái hoặc giản đồ trạng thái. Khi chúng ta dùng bảng trạng thái, đối với mỗi cặp gồm trạng thái và giá trị đầu vào, ta cho một liệt kê các trạng thái kế tiếp khả dĩ. Còn trong giản đồ trạng thái, chúng ta đưa vào các cạnh từ mỗi trạng thái tới tất cả các trạng thái kế tiếp khả dĩ, và đánh dấu các cạnh đó bằng đầu vào hoặc các đầu vào dẫn tới các chuyển dịch đó.

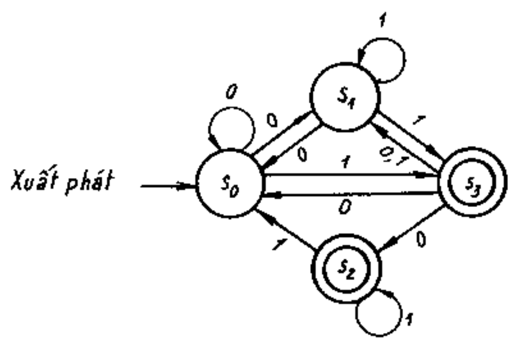
**Ví dụ 6.** Tìm giản đồ trạng thái cho ôtômat hữu hạn không tất định với bảng trạng thái là Bảng 2. Biết các trạng thái kết thúc là $s_2$ và $s_3$.

*Giải*: Giản đồ trạng thái của ôtômat hữu hạn không tất định này được cho trên Hình 3.

■

**BẢNG 2**

| Trạng thái | f: Đầu vào 0 | f: Đầu vào 1 |
|---|---|---|
| $s_0$ | $s_0, s_1$ | $s_3$ |
| $s_1$ | $s_0$ | $s_1, s_3$ |
| $s_2$ | | $s_0, s_2$ |
| $s_3$ | $s_2, s_1, s_2$ | $s_1$ |




*Hình 3.* Ôtômat hữu hạn không tất định với bảng trạng thái là Bảng 2

**Ví dụ 7.** Lập bảng trạng thái đối với ôtômat hữu hạn không tất định có giản đồ trạng thái cho trên Hình 4.

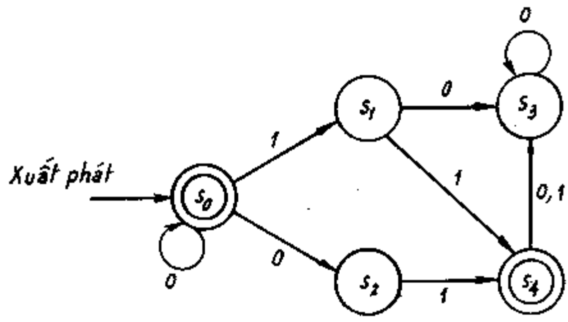
*Giải:* Bảng trạng thái cần tìm được cho trên Bảng 3.

■

Đối với một ôtômat hữu hạn không tất định, việc chấp nhận một xâu $x = x_1x_2...x_k$ có nghĩa là như thế nào? Ký hiệu đầu tiên của đầu vào $x_1$ đưa trạng thái xuất phát $s_0$ tới tập $S_1$ các trạng thái. Ký hiệu thứ hai của đầu vào $x_2$ đưa mỗi một trạng thái của tập $S_1$ tới một tập các trạng thái. Gọi $S_2$ là hợp của các tập này. Chúng ta tiếp tục quá trình này bằng cách ở mỗi giai đoạn gộp vào tất cả các trạng thái nhận được bằng cách dùng một trạng thái nhận được ở giai đoạn trước và ký hiệu đầu vào hiện thời. Chúng ta **chấp nhận** một xâu $x$ nếu có một trạng thái kết thúc trong tập tất cả các trạng thái có thể nhận được từ $s_0$ khi dùng $x$. **Ngôn ngữ**

**được chấp nhận** bởi một ôtômat hữu hạn không tất định là tập tất cả các xâu được chấp nhận bởi ôtômat đó.

| BẢNG 3 | | |
|---|---|---|
| Trạng thái | f | |
| | Đầu vào | |
| | 0 | 1 |
| $s_0$ | $s_0, s_2$ | $s_1$ |
| $s_1$ | $s_3$ | $s_4$ |
| $s_2$ | | $s_4$ |
| $s_3$ | $s_3$ | |
| $s_4$ | $s_3$ | $s_3$ |




*Hình 4.* Một ôtômat hữu hạn không tất định.

**Ví dụ 8.** Tìm ngôn ngữ được chấp nhận bởi ôtômat hữu hạn không tất định được cho trên Hình 4.

*Giải:* Vì $s_0$ là trạng thái kết thúc và có một chuyển dịch $s_0$ đến chính nó khi đầu vào là 0, nên máy này chấp nhận tất cả các xâu là xâu rỗng hoặc xâu chứa toàn các số 0. Hơn nữa, vì $s_4$ cũng là trạng thái kết thúc, nên mọi xâu có $s_4$ ở trong tập các trạng thái có thể đưa tới từ $s_0$ nhờ xâu đầu vào đó, đều được chấp nhận. Những xâu duy nhất có tính chất này là xâu rỗng hoặc các xâu gồm toàn số không tiếp sau bởi 01 hoặc 11. Vì $s_0$ và $s_4$ là các trạng thái kết thúc duy nhất, nên ngôn ngữ được chấp nhận bởi máy là $\{0^n, 0^n01, 0^n11 \mid n \geqslant 0\}$.

■

Có một tính chất quan trọng là: một ngôn ngữ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn không tất định cũng sẽ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn tất định. Chúng ta sẽ sử dụng kết quả này trong tiết sau khi chúng ta xác định các ngôn ngữ nào được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn.

**ĐỊNH LÝ 1.** Nếu ngôn ngữ $L$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn không tất định $M_0$ thì $L$ cũng được chấp nhận bởi một ôtômat tất định $M_1$.

*Chứng minh.* Chúng ta sẽ mô tả cách làm thế nào dựng được một ôtômat hữu hạn tất định $M_1$ chấp nhận $L$ từ $M_0$ là ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận ngôn ngữ này. Mỗi một trạng thái trong $M_1$ sẽ được tạo bởi một tập các trạng thái trong $M_0$. Ký hiệu xuất phát của $M_1$ là $\{s_0\}$ – là tập có chứa trạng thái xuất phát của $M_0$. Tập đầu vào của $M_1$ cũng là tập đầu vào của $M_0$. Cho trạng thái $\{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ik}\}$ của $M_1$, ký hiệu đầu vào $x$ đưa trạng thái này tới hợp các tập của các trạng thái kế tiếp đối với mỗi phần tử của tập đó, tức là hợp của các tập hợp $f(s_{i1}), f(s_{i2}), \ldots, f(s_{ik})$. Các trạng thái của $M_1$ tất thảy đều là các tập con của $S$ – tập các trạng thái của $M_0$ – nhận được bằng cách đó xuất phát từ $s_0$. (Có cả thảy $2^n$ trạng thái trong ôtômat hữu hạn tất định, với $n$ là số trạng thái trong máy không tất định, vì tất cả các tập con đều có thể xuất hiện như các trạng thái, kể cả tập rỗng, mặc dù thông thường số các trạng thái thường gặp ít hơn nhiều). Các trạng thái kết thúc của $M_1$ là các tập nói trên có chứa một trạng thái kết thúc của $M_0$.

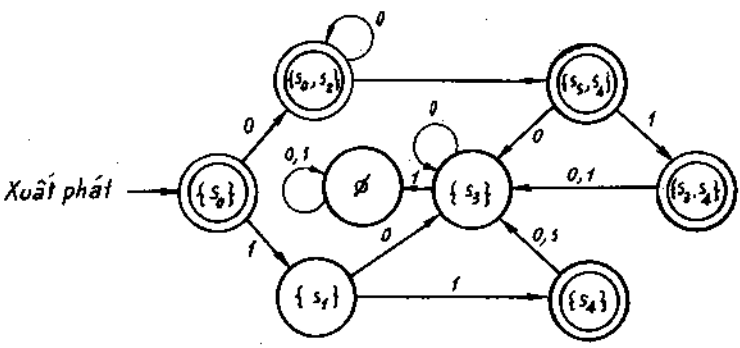
Giả sử một xâu đầu vào được chấp nhận bởi $M_0$. Khi đó một trong số các trạng thái có thể tới được từ $s_0$ nhờ xâu đầu vào này là một trạng thái kết thúc (độc giả có thể chứng minh điều này bằng quy nạp). Điều này có nghĩa là trong $M_1$, xâu đầu vào này dẫn từ $\{s_0\}$ tới một tập các trạng thái của $M_0$ có chứa một trạng thái kết thúc. Tập con này là một trạng thái cuối cùng của $M_1$, vậy xâu này được chấp nhận bởi $M_1$. Cũng như vậy, một xâu đầu vào không được chấp nhận bởi $M_0$ cũng không dẫn tới trạng thái kết thúc nào của $M_0$ (Độc giả nên chứng minh chi tiết khẳng định này). Do đó, xâu đầu vào này không dẫn từ $\{s_0\}$ tới một trạng thái kết thúc nào trong $M_1$.

□

**Ví dụ 9.** Tìm một ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận cùng một ngôn ngữ như ôtômat hữu hạn không tất định cho trong Ví dụ 7.

*Giải*: Ôtômat tất định cho trên Hình 5 được xây dựng từ ôtômat không tất định cho trong Ví dụ 7. Các trạng thái của ôtômat tất định này là các tập con của tập tất cả các trạng thái của ôtômat không tất định. Trạng thái kế tiếp của một tập con dưới tác động của một ký hiệu đầu vào là một tập con chứa các trạng thái kế tiếp trong ôtômat không tất định của tất cả các phần tử trong tập con nói lúc đầu. Ví dụ, với đầu vào 0, $\{s_0\}$ sẽ chuyển tới $\{s_0, s_2\}$, vì $s_0$ có những chuyển dịch tới chính nó và tới $s_2$ trong ôtômat không tất định, tập con $\{s_0, s_2\}$ với đầu vào 1 sẽ chuyển tới $\{s_1, s_4\}$, vì trong máy không tất định với đầu vào 1 $s_0$ chỉ chuyển tới $s_1$ và $s_2$ chỉ chuyển tới $s_4$; với đầu vào 0 tập $\{s_1, s_4\}$ sẽ chuyển tới $\{s_3\}$ vì trong máy không tất định, với đầu vào 0, $s_1$ và $s_4$ đều chỉ chuyển tới $s_3$. Tất cả các tập con nhận được bằng cách đó đều được hạo hàm trong máy tất định. Chú ý rằng tập rỗng cũng là một trong những trạng thái của máy này, vì nó là tập con chứa tất cả các trạng thái kế tiếp của $\{s_3\}$ với đầu vào 1. Trạng thái xuất phát là $\{s_0\}$ và các trạng thái kết thúc là các tập con có chứa $s_0$ hoặc $s_4$.

■




*Hình 5.* Ôtômat tất định tương ứng với ôtômat không tất định cho trong Ví dụ 7

## BÀI TẬP

1. Cho $A = \{0, 11\}$ và $B = \{00, 01\}$. Hãy tìm các tập sau:

   a) $AB$ b) $BA$ c) $A^2$ d) $B^3$

2. Chứng minh rằng nếu $A$ là tập các xâu, thì $A\varnothing = \varnothing A = \varnothing$

3. Tìm tất cả các tập $A$ và $B$ của các xâu sao cho $AB = \{10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000\}$

4. Chứng minh các đẳng tbức sau:

a) $\{\lambda\}^* = \{\lambda\}$

b) $(A^*)^* = A^*$ với mọi tập các xâu $A$

**5.** Mô tả các phần tử của tập $A^*$ với các giá trị sau của $A$

a) $\{10\}$ b) $\{111\}$ c) $\{0, 01\}$ d) $\{1, 101\}$

**6.** Cho $V$ là bộ chữ cái (từ vựng) và $A$ và $B$ là các tập con của $V^*$. Chứng minh rằng $|AB| \leq |A||B|$

**7.** Cho $V$ là bộ chữ cái, $A$ và $B$ là các tập con của $V^*$ với $A \subseteq B$. Chứng minh rằng $A^* \subseteq B^*$.

**8.** Cho $A$ là một tập con của $V^*$ với $V$ là một bộ chữ cái. Hãy chứng minh hoặc bác bỏ các mệnh đề sau:

a) $A \subseteq A^2$ b) nếu $A = A^2$ thì $\lambda \in A$

c) $A\{\lambda\} = A$ d) $(A^*)^* = A^*$

e) $A^*A = A^*$ f) $|A^n| = |A|^n$

**9.** Xác định xem xâu 11101 có nằm trong các tập sau không?

a) $\{0, 1\}^*$ b) $\{1\}^*\{0\}^*\{1\}^*$ c) $\{11\}\{1\}^*\{01\}$

d) $\{11\}^*\{10\}^*$ e) $\{111\}^*\{0\}^*\{1\}$ f) $\{111, 000\}\{00, 01\}$

**10.** Hãy xác định xem các xâu dưới đây có được chấp nhận bởi ôtômat hữu hạn tất định trong Hình 1 không?

a) 010 b) 1101 c) 1111110 d) 010101010

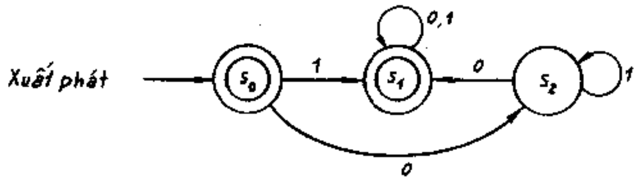
**11.** Hãy xác định xem tất cả các xâu trong các tập sau có được chấp nhận bởi ôtômat hữu hạn tất định trong Hình 1 không?

a) $\{0\}^*$ b) $\{0\}\{0\}^*$ c) $\{1\}\{0\}^*$

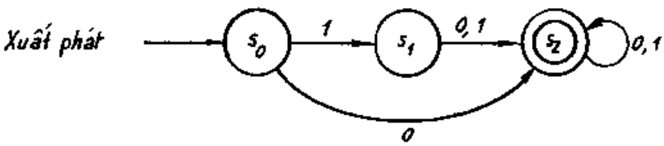
d) $\{01\}^*$ e) $\{0\}^*\{1\}^*$ f) $\{1\}\{0,1\}^*$

Trong các Bài tập từ 12 đến 16, hãy tìm ngôn ngữ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn tất định được cho dưới đây

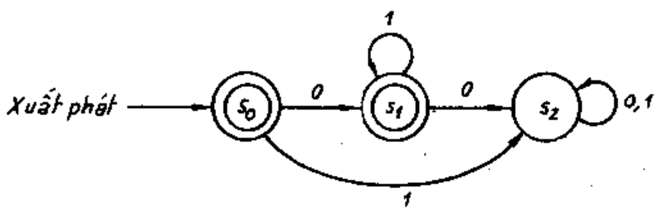
**12.**


Xuất phát
0,1
1
0
1
0

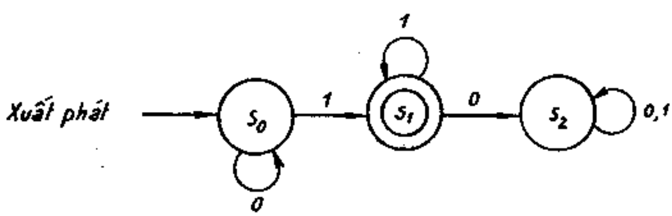
**13.**


Xuất phát
1
0, 1
0,1
0

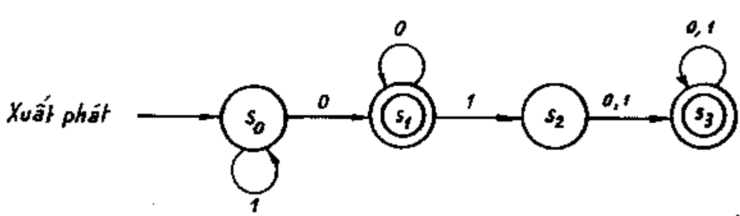
**14.**


Xuất phát
1
0
0
0,1
1

**15.**

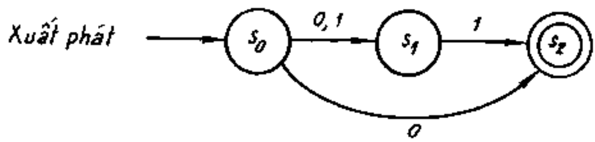

Xuất phát
1
1
0
0,1
0

**16.**

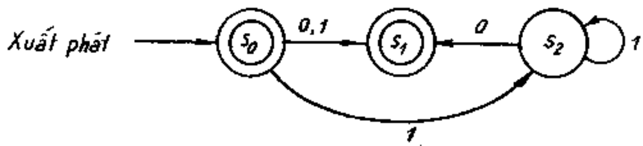

Xuất phát
0
0
1
0,1
0,1
1

Trong các Bài tập từ 17 đến 21, hãy tìm ngôn ngữ được chấp nhận bởi ôtômat hữu hạn không tất định được cho dưới đây

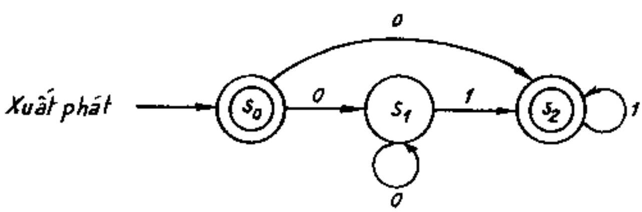
**17.**



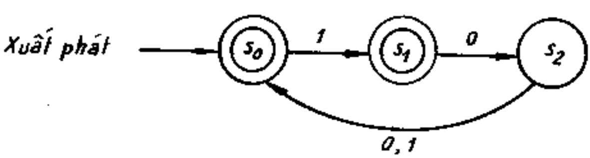

**18.**



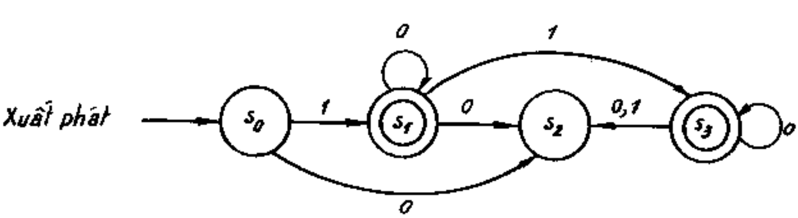

**19.**




**20.**




**21.**



**22.** Tìm ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận cùng một ngôn ngữ như ôtômat hữu hạn không tất định trong Bài tập 17

**23.** Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong Bài tập 18

**24.** Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong Bài tập 19

**25.** Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong Bài tập 20

**26.** Cũng hỏi như trên đối với ôtômat hữu hạn không tất định trong Bài tập 21

**27.** Tìm các ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận các tập sau:

a) $\{0\}$ b) $\{1, 00\}$ c) $\{1^n \mid n = 2, 3, 4...\}$

**28.** Tìm ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận các ngôn ngữ trong Bài tập 27 và có ít trạng thái hơn, nếu có thể, so với ôtômat hữu hạn tất định mà bạn đã tìm được trong bài tập đó.

***29.** Chứng minh rằng không có một ôtômat hữu hạn chấp nhận tập các xâu nhị phân chứa số các số 0 và số các số 1 bằng nhau.

# 10.4. SỰ CHẤP NHẬN NGÔN NGỮ

## MỞ ĐẦU

Như chúng ta đã thấy ở trên, các ôtômat hữu hạn có thể được dùng như các bộ tiếp nhận ngôn ngữ. Vậy các máy này có thể chấp nhận các tập nào? Mặc dù điều này dường như là một bài toán cực kỳ khó, nhưng các tập có thể được chấp nhận bởi các ôtômat hữu hạn lại có một đặc trưng khá đơn giản. Bài toán này lần đầu tiên đã được nhà toán học Mỹ Stephen Kleene giải quyết vào năm 1956. Ông đã chứng minh được rằng tồn tại một ôtômat hữu hạn chấp nhận một tập hợp nếu và chỉ nếu tập đó có thể được xây dựng từ tập rỗng, xâu rỗng và các xâu chỉ chứa một ký hiệu bằng cách ghép, lấy hợp và lấy các bao đóng Kleene theo một trật tự tuỳ ý. Những tập có thể được xây dựng bằng cách như vậy được gọi là các **tập chính quy**.

Các văn phạm chính quy đã được định nghĩa trong Tiết 10.1. Theo thuật ngữ được sử dụng, ta chắc sẽ không có gì ngạc nhiên rằng có một mối quan hệ giữa các tập chính quy được chấp nhận bởi các ôtômat hữu hạn và các văn phạm chính quy. Đặc biệt, một tập là chính quy nếu và chỉ nếu nó được sinh bởi một văn phạm chính quy.

Cuối cùng, có những tập không thể được chấp nhận bởi các ôtômat hữu hạn. Ta sẽ cho một ví dụ về các tập đó. Ta cũng sẽ xem xét một cách ngắn gọn các mô hình tính toán mạnh hơn, như các ôtômat đẩy xuống (push down) và các máy Turing, ở cuối tiết này.

## CÁC TẬP CHÍNH QUY

Các tập chính quy là các tập có thể được tạo bằng cách dùng các phép toán ghép, hợp và bao đóng Kleene theo một trật tự tùy ý xuất phát từ tập rỗng, xâu rỗng và các tập của các xâu chỉ chứa một ký hiệu. Chúng ta sẽ thấy rằng các tập chính quy là các tập có thể được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn. Để định nghĩa các tập chính quy, trước hết ta cần phải định nghĩa các biểu thức chính quy.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Các biểu thức chính quy* trên một tập $I$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau:

ký hiệu $\emptyset$ là một biểu thức chính quy

ký hiệu $\lambda$ là một biểu thức chính quy

ký hiệu $x$ là một biểu thức chính quy, với mọi $x \in I$

các ký hiệu $(\mathbf{AB})$, $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})$ và $\mathbf{A}^*$ là các biểu thức chính quy với mọi $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ là các biểu thức chính quy.

Mỗi biểu thức chính quy biểu diễn một tập được đặc tả bởi các quy tắc sau:

$\emptyset$ biểu diễn tập rỗng, tức là tập không chứa xâu nào;

$\lambda$ biểu diễn tập $\{\lambda\}$, là tập chứa xâu rỗng;

$x$ biểu diễn tập $\{x\}$ chứa xâu chỉ có một ký hiệu $x$;

$(\mathbf{AB})$ biểu diễn sự ghép của các tập được biểu diễn bởi $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$

$\mathbf{A}^*$ biểu diễn bao đóng Kleene của tập được biểu diễn bởi $\mathbf{A}$

Các tập được biểu diễn bởi các biểu thức chính quy được gọi là các **tập chính quy**. Từ đây trở đi, các biểu thức chính quy sẽ được dùng để mô tả các tập chính quy, vì vậy khi ta nói tới tập chính quy $A$ là muốn nói tới tập chính quy được biểu diễn bởi biểu thức chính quy $A$. Ví dụ sau cho thấy các biểu thức chính quy được dùng để đặc tả các tập chính quy như thế nào.

**Ví dụ 1.** Xác định các xâu trong các tập chính quy được đặc tả bởi các biểu thức chính quy sau: $\mathbf{10}^*$, $(\mathbf{10})^*$, $\mathbf{0} \cup \mathbf{01}$, $\mathbf{0}(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})^*$ và $(\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*$

*Giải:* Các tập chính quy được biểu diễn bởi các biểu thức đó được cho trong Bảng 1. (Độc giả nên kiểm tra lại).

■

**BẢNG 1**

| Biểu thức | Xâu |
|---|---|
| $10^*$ | Một số 1 được tiếp theo bởi một số bất kỳ số 0 (kể cả không có số không nào) |
| $(10)^*$ | Một số bất kỳ các cặp 10 (kể cả xâu rỗng) |
| $0 \cup 01$ | Xâu 0 hoặc xâu 01 |
| $0(0 \cup 1)^*$ | Xâu bất kỳ bắt đầu bằng 0 |
| $(0^*1)^*$ | Xâu bất kỳ không kết thúc bằng 0 |

## ĐỊNH LÝ KLEENE

Năm 1956 Kleene đã chứng minh được rằng các tập chính quy là các tập được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn. Do đó kết quả quan trọng này được gọi là định lý Kleene.

**ĐỊNH LÝ 1 – ĐỊNH LÝ KLEENE** Một tập là chính quy nếu và chỉ nếu nó được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn.

Định lý Kleene là một trong những kết quả trung tâm của lý thuyết ôtômat. Ta sẽ chỉ chứng minh phần *chỉ nếu* của định lý này, cụ thể ta sẽ chứng minh rằng mọi tập chính quy đều được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn. Sự chứng minh phần *nếu*, tức là chứng minh một tập được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn là chính quy, xin dành cho bạn đọc như một bài tập.

***Chứng minh.*** Cần nhớ lại rằng một tập chính quy được định nghĩa qua các biểu thức chính quy, mà các biểu thức chính quy lại được định nghĩa một cách đệ quy. Vì vậy, chúng ta có thể chứng minh được rằng mọi tập chính quy đều được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn nếu chúng ta làm được các việc sau:

1. Chứng minh được rằng $\emptyset$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn.

2. Chứng minh được rằng $\lambda$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn.

3. Chứng minh được rằng $\{a\}$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn với mọi $a$ là một ký hiệu trong $I$.

4. Chứng minh được rằng $AB$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn với mọi $A$ và $B$ đều được chấp nhận.

5. Chứng minh được rằng $A \cup B$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn với mọi $A$ và $B$ đều đã được chấp nhận.

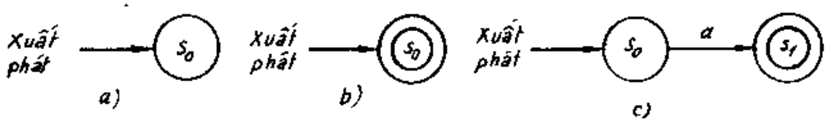
6. Chứng minh được rằng $A^*$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn với mọi $A$ đã được chấp nhận.

□

Bây giờ chúng ta sẽ xét từng nhiệm vụ trên một. Trước hết, ta sẽ chứng tỏ rằng $\emptyset$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn không tất định. Để làm điều này, ta chỉ cần một ôtômat không có các trạng thái kết thúc. Một ôtômat như vậy được cho trên Hình 1(a).

Thứ hai, ta sẽ chứng tỏ rằng $\{\lambda\}$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn. Để làm điều đó, ta chỉ cần một ôtômat chấp nhận $\lambda$ – xâu rỗng, nhưng không chấp nhận một xâu nào khác. Điều này có thể làm được bằng cách làm cho trạng thái xuất phát $s_0$ là trạng thái kết thúc và không có chuyển dịch nào, vì vậy không có xâu nào khác đưa $s_0$ đến trạng thái kết thúc. Ôtômat không tất định cho trên Hình 1(b) là một máy như vậy.

Thứ ba, ta sẽ chứng tỏ rằng $\{a\}$ được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn không tất định. Để làm điều đó, ta có thể dùng một máy có trạng thái xuất phát $s_0$ và trạng thái kết thúc $s_1$. Ta có một chuyển dịch từ $s_0$ đến $s_1$ khi đầu vào là 1 và không có một chuyển dịch nào khác. Xâu duy nhất được chấp nhận bởi máy này là $a$. Máy này được cho trên Hình 1(c)



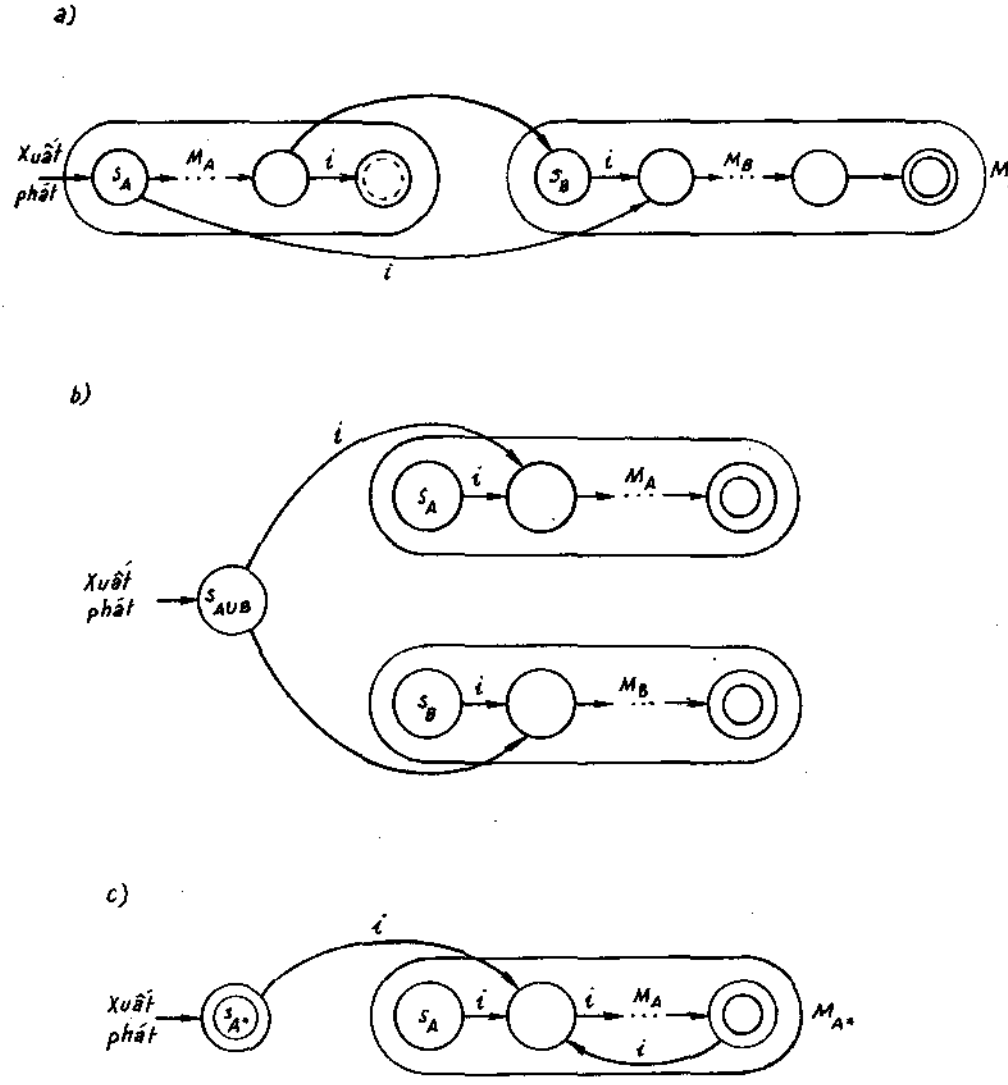

***Hình 1.*** Ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận một số tập cơ sở.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $AB$ và $A \cup B$ đều có thể được chấp nhận bởi các ôtômat hữu hạn nếu $A$ và $B$ là các ngôn ngữ đã được chấp nhận bởi các ôtômat hữu hạn. Giả sử $A$ được chấp nhận bởi $M_A = (S_A, I, f_A, s_A, F_A)$ và $B$ được chấp nhận bởi $M_B = (S_B, I, f_B, s_B, F_B)$

Chúng ta bắt đầu bằng việc dựng máy $M_{AB} = (S_{AB}, I, f_{AB}, s_{AB}, F_{AB})$ chấp nhận $AB$ – ghép của $A$ và $B$. Ta dựng máy này bằng tổ hợp các máy cho $A$ và $B$ nối tiếp với nhau, sao cho một xâu trong $A$ đưa máy tổ hợp từ $s_A$ – trạng thái xuất phát của $M_A$ đến $s_B$ – trạng thái xuất phát của $M_B$. Xâu trong $B$ phải đưa máy tổ hợp này từ $s_B$ đến một trạng thái kết thúc của máy tổ hợp. Do đó, ta phải tiến hành chế tạo như sau: cho $S_{AB} = S_A \cup S_B$. Trạng thái xuất phát $s_{AB}$ như $s_A$. Tập các trạng thái kết thúc $F_{AB}$ là tập các trạng thái kết thúc của $M_B$, có chứa cả $s_{AB}$ nếu và chỉ nếu $\lambda \in A \cap B$. Các chuyển dịch trong $M_{AB}$ bao gồm tất cả các chuyển dịch trong $M_A$ và trong $M_B$, cũng như một số chuyển dịch mới. Đối với mỗi chuyển dịch trong $M_A$ dẫn tới một trạng thái kết thúc, ta tạo được một chuyển dịch trong $M_{AB}$ từ cùng trạng thái đó tới $s_B$ với cùng một đầu vào. Theo cách đó, một xâu trong $A$ đưa $M_{AB}$ từ $s_{AB}$ đến $s_B$, rồi sau đó một xâu trong $B$ đưa $s_B$ đến một trạng thái kết thúc của $M_{AB}$. Hơn nữa, đối với mỗi chuyển dịch từ $s_B$, chúng ta tạo được một dịch chuyển trong $M_{AB}$ từ $s_{AB}$ tới chính trạng thái đó. Hình 2(a) minh họa cho sự xây dựng vừa nói ở trên.

Bây giờ chúng ta sẽ dựng một máy $M_{A\cup B} = (S_{A\cup B}, I, f_{A\cup B}, s_{A\cup B}, F_{A\cup B})$ chấp nhận $A \cup B$. Ôtômat này có thể được xây dựng bằng cách tổ hợp $M_A$ và $M_B$ theo kiểu song song, có dùng một trạng thái xuất phát mới với những chuyển dịch mà cả $s_A$ và $s_B$ đều có. Cho $S_{A\cup B} = S_A \cup S_B \cup \{s_{A\cup B}\}$, ở đây $s_{A\cup B}$ là trạng thái mới và cũng là trạng thái xuất phát của $M_{A\cup B}$. Cho tập các trạng thái kết thúc $F_{A\cup B}$ bằng $F_A \cup F_B \cup \{s_{A\cup B}\}$ nếu $\lambda \in A \cup B$, và bằng $F_A \cup F_B$ trong trường hợp ngược lại. Các chuyển dịch trong $M_{A\cup B}$ bao gồm tất cả các chuyển dịch trong $M_A$ và trong $M_B$. Đối với mỗi chuyển dịch từ $s_A$ đến một trạng thái $s$ dưới tác dụng của đầu vào $i$, ta cũng kể là một chuyển dịch từ $s_{A\cup B}$ đến $s$ cũng dưới tác dụng của đầu vào $i$ và đối với mỗi chuyển dịch từ $s_B$ đến $s$ với đầu vào $i$ ta cũng kể là một chuyển dịch từ $s_{A\cup B}$ đến $s$ với đầu vào $i$. Theo cách đó, một xâu trong $A$ dẫn từ $s_{A\cup B}$ tới một trạng thái kết thúc trong máy mới và một xâu trong $B$ cũng dẫn từ $s_{A\cup B}$ đến một trạng thái kết thúc trong máy mới. Hình 2(b) minh họa sự xây dựng máy $M_{A\cup B}$ vừa nói ở trên.

Cuối cùng, chúng ta sẽ xây dựng $M_{A^*} = (S_{A^*}, I, f_{A^*}, s_{A^*}, F_{A^*})$ – *máy chấp nhận* $A^*$, tức bao đóng Kleene của $A$. Cho $S_{A^*}$ bao gồm tất cả các trạng thái của $A$ và một trạng thái thêm $s_{A^*}$ là trạng thái xuất phát của máy mới. Tập các trạng thái kết thúc $F_{A^*}$ bao gồm tất cả các trạng thái trong $F_A$ cũng như trạng thái xuất phát $s_{A^*}$, vì $\lambda$ cần phải được chấp nhận. Để chấp nhận ghép của một số tùy ý các xâu thuộc $A$, chúng ta sẽ đưa vào tất cả các chuyển dịch trong $M_A$ cũng như các chuyển dịch từ $s_{A^*}$ khớp với các chuyển dịch từ $s_A$ và các chuyển dịch từ mỗi trạng thái kết thúc khớp với các chuyển dịch từ $s_A$. Với tập hợp các chuyển dịch đó, một xâu được tạo bởi phép ghép các xâu trong $A$ sẽ đưa $s_{A^*}$ tới một trạng thái kết thúc khi xâu thứ hai trong $A$ đã được đọc xong và v.v... Hình 2(c) minh họa việc xây dựng mà ta nói ở trên.




*Hình 2.* Xây dựng các ôtômat chấp nhận các phép ghép, hợp và bao đóng Kleene.

Có thể xây dựng được một ôtômat hữu hạn không tất định cho một tập chính quy bất kỳ bằng cách dùng thủ tục mô tả trong chứng minh trên. Chúng ta sẽ minh họa điều này bằng ví dụ sau:

**Ví dụ 2.** Dựng một ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận tập chính quy $\mathbf{1}^* \cup \mathbf{01}$.

*Giải:* Ta bắt đầu bằng việc xây dựng một máy chấp nhận $\mathbf{1}^*$. Điều này được làm bằng cách xây dựng máy chấp nhận **1** rồi sau đó dùng cách dựng cho $M_{A^*}$ đã được mô tả trong chứng minh Định lý 1. Tiếp theo ta dựng máy chấp nhận **01** bằng cách dùng các máy chấp nhận **0** và **1** và cách dựng $M_{AB}$ trong chứng minh Định lý 1. Cuối cùng, dùng cách dựng $M_{A \cup B}$ được dùng trong chứng minh đó, chúng ta sẽ dựng được máy chấp nhận $\mathbf{1}^* \cup \mathbf{01}$. Các ôtômat hữu hạn được dùng để dựng máy này được cho trên Hình 3. Những trạng thái trong các máy kế tiếp được đánh dấu bằng cách dùng các chỉ số dưới khác nhau, thậm chí khi một trạng thái được tạo thành từ một trạng thái đã được dùng trước đó trong một máy khác. Chú ý rằng cách xây dựng nói trên không tạo ra máy đơn giản nhất chấp nhận $\mathbf{1}^* \cup \mathbf{01}$. Máy đơn giản hơn chấp nhận tập này được cho trên Hình 3(b).

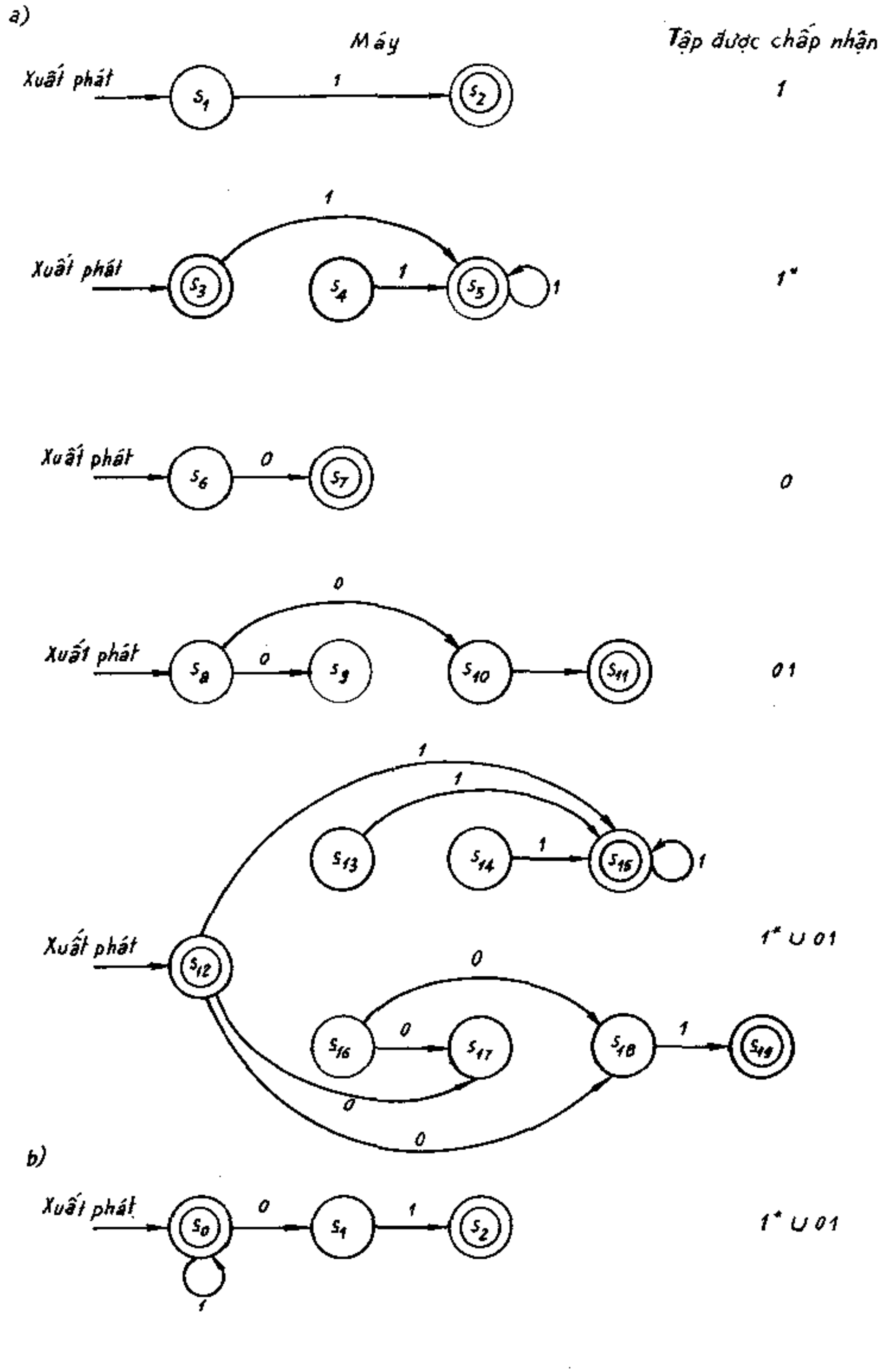
■

## TẬP HỢP CHÍNH QUY VÀ VĂN PHẠM CHÍNH QUY

Trong Tiết 10.1 ta đã giới thiệu các văn phạm cấu trúc câu và định nghĩa các loại văn phạm khác nhau. Đặc biệt, ta đã định nghĩa văn phạm chính quy hay văn phạm loại 3, là văn phạm có dạng $G = (V, T, S, P)$ với mỗi sản xuất có dạng $S \to \lambda$, $A \to a$ hay $A \to aB$, trong đó $a$ là ký hiệu kết thúc, $A$ và $B$ là các ký hiệu không kết thúc. Như tên gọi đã gợi ý, giữa các văn phạm chính quy và các tập (hợp) chính quy có một mối quan hệ khăng khít.

**ĐỊNH LÝ 2**. Một tập sinh bởi một văn phạm chính quy nếu và chỉ nếu nó là một tập chính quy.

***Chứng minh.*** Trước hết, ta chứng minh rằng một tập được sinh bởi một



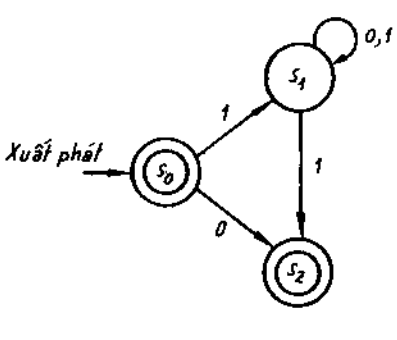

*Hình 3.* Các ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận $\mathbf{1^* \cup 01}$.

văn phạm chính quy là một tập chính quy. Giả sử rằng $G = (V, T, S, P)$ là một văn phạm chính quy sinh ra tập $L(G)$. Để chứng minh $L(G)$ là chính quy ta sẽ xây dựng một máy hữu hạn trạng thái không tất định $M = (S, I, f, s_0, F)$ chấp nhận $L(G)$. Giả sử $S$, tập hợp các trạng thái, có chứa trạng thái $s_A$ đối với mỗi ký hiệu không kết thúc $A$ của $G$ và trạng thái phụ $s_F$ là một trạng thái kết thúc. Trạng thái xuất phát $s_0$ được lập từ ký hiệu xuất phát $S$. Các chuyển dịch trong $M$ được tạo từ các sản xuất của $G$ theo cách sau. Chuyển dịch từ $s_A$ đến $s_F$ ứng với đầu vào $a$ sẽ được đưa vào nếu $A \to a$ là một sản xuất và chuyển dịch từ $s_A$ đến $s_B$ ứng với đầu vào a sẽ được đưa vào nếu $A \to aB$ là một sản xuất. Tập các trạng thái kết thúc bao gồm $s_F$ và cũng bao gồm cả $s_0$ nếu $S \to \lambda$ là một sản xuất trong $G$. Không mấy khó khăn có thể chứng tỏ được rằng ngôn ngữ được chấp nhận bởi $M$ bằng ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm $G$, tức là $L(M) = L(G)$. Điều này có thể được làm bằng cách xác định các từ dẫn tới một trạng thái kết thúc. Các chi tiết xin dành cho độc giả, xem như một bài tập.

□

Trước khi chứng minh phần đảo lại, ta sẽ minh họa cách xây dựng một máy không tất định chấp nhận cùng một tập như một văn phạm chính quy.

**Ví dụ 3.** Dựng một ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm chính quy $G = (V, T, S, P)$ trong đó $V = \{0, 1, A, S\}$, $T = \{0, 1\}$ và các sản xuất trong $P$ là $S \to 1A$, $S \to 0$, $S \to \lambda$, $A \to 0A$, $A \to 1A$ và $A \to 1$.




*Hình 4.* Ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận L(G).

*Giải:* Giản đồ trạng thái của ôtômat không tất định chấp nhận $L(G)$ được cho trên Hình 4. Ôtômat này được xây dựng theo thủ tục được mô tả trong phần chứng minh ở trên. Trong ôtômat này $s_0$ là trạng thái tương ứng với $S$, $s_1$ là trạng thái tương ứng với $A$ và $s_2$ là trạng thái kết thúc.

■

Bây giờ ta sẽ hoàn tất việc chứng minh Định lý 2.

***Chứng minh*** Ta sẽ chứng minh rằng nếu một tập là chính quy, thì tồn tại một văn phạm chính quy sinh ra tập chính quy đó. Giả sử $M$ là một máy hữu hạn trạng thái chấp nhận tập đó với tính chất là $s_0$ – trạng thái xuất phát của $M$ – không bao giờ là trạng thái kế tiếp đối với một chuyển dịch. (Ta sẽ tìm được máy có tính chất này ở Bài tập 14). Văn phạm $G = (V, T, S, P)$ được xác định như sau: Tập $V$ các ký hiệu của $G$ được lập bằng cách gán một ký hiệu cho mỗi trạng thái của $S$ và mỗi ký hiệu đầu vào trong $I$. Ký hiệu xuất phát $S$ là ký hiệu được lập từ trạng thái xuất phát $s_0$. Tập $P$ các sản xuất trong $G$ được lập từ các chuyển dịch trong $M$. Đặc biệt, nếu trạng thái $s$ chuyển tới một trạng thái kết thúc khi đầu vào là $s$ thì sản xuất $A_s \to a$ sẽ được bao hàm trong $P$, ở đây $A_s$ là ký hiệu không kết thúc được tạo từ trạng thái $s$. Nếu trạng thái $s$ chuyển tới trạng thái $t$ khi đầu vào là $a$ thì sản xuất $A_s \to aA_t$ sẽ được bao hàm trong $P$. Sản xuất $S \to \lambda$ được bao hàm trong $P$ nếu và chỉ nếu $\lambda \in L(M)$. Vì các sản xuất của $G$ tương ứng với các chuyển dịch trong $M$ và các sản xuất dẫn tới các ký hiệu kết thúc tương ứng với các chuyển dịch đến trạng thái kết thúc, nên không khó khăn gì ta có thể chứng minh được rằng $L(G) = L(M)$. Các chi tiết xin dành cho bạn đọc như một bài tập.

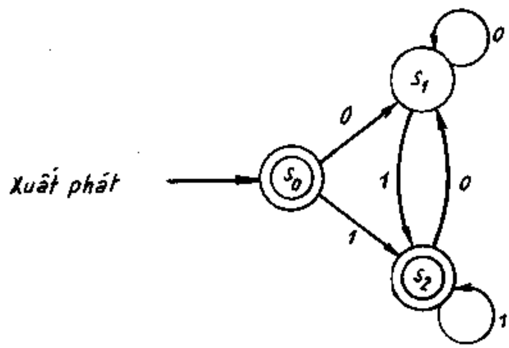
□

Ví dụ sau minh họa cách xây dựng một văn phạm từ một ôtômat chấp nhận ngôn ngữ sinh bởi văn phạm đó.

**Ví dụ 4.** Tìm một văn phạm chính quy sinh tập chính quy được chấp nhận bởi ôtômat cho trên Hình 5.

*Giải:* Văn phạm $G = (V, T, S, P)$ sinh ra tập được chấp nhận bởi ôtômat đó, với $V = \{S, A, B, 0, 1\}$ trong đó $S$, $A$, $B$, tương ứng với các trạng thái $s_0$, $s_1$ và $s_2$, $T = \{0, 1\}$, $S$ là ký hiệu xuất phát và các sản xuất là $S \to 0A$, $S \to 1B$, $S \to 1$, $S \to \lambda$, $A \to 0A$, $A \to 1B$, $A \to 1$, $B \to 0A$, $B \to 1B$ và $B \to 1$.

■




*Hình 5.* Một ôtômat hữu hạn.

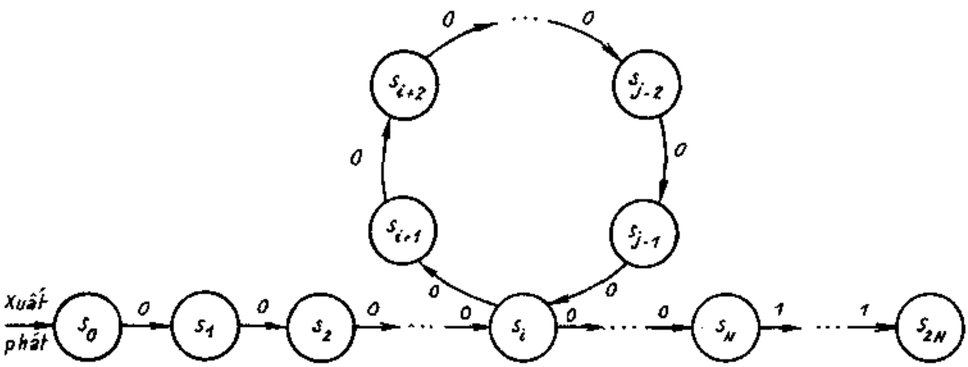
## TẬP KHÔNG ĐƯỢC CHẤP NHẬN BỞI MỘT ÔTÔMAT HỮU HẠN

Chúng ta đã thấy rằng một tập được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn nếu và chỉ nếu nó là một tập chính quy. Bây giờ ta sẽ thấy rằng có những tập không phải là chính quy và ta sẽ cho một ví dụ về tập như vậy. Kỹ thuật được dùng dưới đây để mô tả một tập không phải là chính quy là một phương pháp quan trọng để chỉ ra một số tập không phải là chính quy.

**Ví dụ 5.** Chứng tỏ rằng tập $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2...\}$ tạo bởi tất cả các xâu gồm một khối các số 0 tiếp sau bởi một khối các số 1 với số lượng như nhau là một tập không chính quy.

*Giải*: Giả sử tập này là chính quy. Khi đó sẽ có một ôtômat hữu hạn tất định $M = (S, I, f, s_0, F)$ chấp nhận tập đó. Giả sử $N$ là số trạng thái trong $M$, tức là $N = |S|$. Vì $M$ chấp nhận tất cả các xâu tạo bởi một số các số 0 và tiếp theo bởi một số như thế các số 1, nên $M$ phải chấp nhận $0^N1^N$. Giả sử $s_0, s_1,..., s_{2N}$ là dãy các trạng thái nhận được bắt đầu từ $s_0$ và dùng các ký hiệu $0^N1^N$ như một đầu vào, sao cho $s_1 = f(s_0, 0)$, $s_2 = f(s_1, 0),..., s_N = f(s_{N-1}, 0)$, $s_{N+1} = f(s_N, 1),..., s_{2N} = f(s_{2N-1}, 1)$. Chú ý rằng $s_{2N}$ là trạng thái kết thúc.

Vì chỉ có $N$ trạng thái, nên theo nguyên lý Dirichlet, ít nhất có hai trạng thái trong số $N+1$ trạng thái đầu tiên $s_0, \ldots, s_N$ phải như nhau. Ví dụ, $s_i$ và $s_j$ là hai trạng thái đồng nhất đó, với $0 \leq i < j \leq N$. Điều này có nghĩa là $f(s_i, 0^t) = s_j$ với $t = j - i$. Từ đây suy ra rằng vòng dẫn từ $s_i$ quay lại chính nó nhận được bằng cách dùng đầu vào 0 tổng cộng $t$ lần, như được biểu diễn bởi giản đồ trạng thái trên Hình 6.




***Hình 6.*** Đường đi tạo bởi $0^N1^N$.

Bây giờ ta xét xâu đầu vào $0^N0^t1^N = 0^{N+t}1^N$. Đoạn đầu của xâu này có t số 0 liên tiếp nhiều hơn số các số 1 tiếp sau. Vì xâu này không có dạng $0^n1^n$ (do có số số 0 nhiều hơn số số 1) nên nó không được chấp nhận bởi $M$. Do đó, $f(s_0, 0^{N+t}1^N)$ không phải là trạng thái kết thúc. Tuy nhiên, khi ta dùng xâu $0^{N+t}1^N$ như một đầu vào ta sẽ kết thúc ở chính trạng thái $s_{2N}$ như trước. Đó là bởi vì $t$ số 0 thừa trong xâu đó sẽ đưa chúng ta đi quanh vòng từ $s_i$ trở lại chính nó thêm một lần nữa như cho thấy trên Hình 6. Sau đó phần còn lại của xâu sẽ đưa chúng ta tới đúng trạng thái kết thúc như trước. Mâu thuẫn này chứng tỏ $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2\}$ không phải là tập chính quy.

■

## CÁC LOẠI MÁY MẠNH HƠN

Các ôtômat hữu hạn không thể thực hiện được nhiều tính toán. Hạn chế chủ yếu của các máy này là lượng nhớ hữu hạn của chúng. Chính điều này đã ngăn trở nó chấp nhận các ngôn ngữ không chính quy, như $\{0^n1^n \mid n = 0, 1, 2...\}$. Tuy nhiên, có một văn phạm phi ngữ cảnh chấp nhận tập này. Một văn phạm như vậy đã được cho trong Ví dụ 5 ở Tiết 10.1.

Vì những hạn chế của các ôtômat hữu hạn, nên cần phải dùng các mô hình tính toán khác mạnh hơn. Một mô hình như vậy là **ôtômat đẩy xuống** (push down). Một ôtômat đẩy xuống là một ôtômat hữu hạn kèm theo một băng đẩy xuống tạo một bộ nhớ không hạn chế. Các ký hiệu có thể được đặt vào hoặc lấy ra ở đỉnh của băng đó. Một tập sẽ được một ôtômat đẩy xuống chấp nhận theo hai cách. Thứ nhất, tập sẽ được chấp nhận nếu nó gồm tất cả các xâu tạo ra một băng trống khi các xâu đó được dùng làm đầu vào. Thứ hai, tập sẽ được chấp nhận nếu nó gồm tất cả các xâu dẫn tới một trạng thái kết thúc khi các xâu đó được dùng làm đầu vào. Người ta có thể chứng minh được rằng một tập được chấp nhận bởi một ôtômat đẩy xuống nếu và chỉ nếu nó là ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm phi ngữ cảnh.
Tuy nhiên, có những tập không thể biểu diễn như một ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm phi ngữ cảnh. Một trong những tập như vậy là $\{0^n1^n2^n \mid n = 0, 1, 2...\}$. Ta sẽ chỉ ra tại sao tập này không thể được chấp nhận bởi một ôtômat đẩy xuống, nhưng sẽ không chứng minh vì chúng ta không có đủ các công cụ cần thiết. (Tuy nhiên, một phương pháp chứng minh sẽ được cho trong Bài tập 28 của phần Bài tập bổ sung ở cuối chương này). Băng có thể được dùng để cho thấy rằng xâu bắt đầu với dãy các số 0 được tiếp theo bởi số các số 1 đúng bằng thế bằng cách đặt một ký hiệu lên băng đối với mỗi số 0 (chừng nào chỉ các số 0 còn đang được đọc) và lấy đi một trong số các ký hiệu đó đối với mỗi số 1 (chừng nào chỉ những số 1 tiếp theo các số không còn đang được đọc). Nhưng một khi điều đó đã được làm, băng sẽ là trống và không còn cách nào để xác định xem trong xâu có số các số 2 đúng bằng số các số 0 hay không.

Có những máy khác được gọi là **ôtômat tuyến tính giới nội**. Các máy này mạnh hơn các ôtômat đẩy xuống, chúng có thể chấp nhận các tập như $\{0^n1^n2^n \mid n = 0, 1, 2...\}$. Đặc hiệt, các ôtômat tuyến tính giới nội có thể chấp nhận được cả các ngôn ngữ cảm ngữ cảnh. Tuy nhiên, các máy này lại không thể chấp nhận tất cả các ngôn ngữ được sinh bởi các văn phạm cấu trúc câu. Để tránh những hạn chế của các loại máy trên, người ta sử dụng một mô hình được gọi là **máy Turing**, theo tên nhà toán học Anh Alan Turing. Một máy Turing là một ôtômat hữu hạn có kèm theo một băng vô hạn về cả hai phía. Một máy Turing đọc và viết trên băng và nó có thể chuyển động tới lui dọc theo băng đó. Các máy Turing có thể chấp nhận tất cả các ngôn ngữ được sinh bởi các văn phạm cấu trúc câu. Thêm vào đó, các máy Turing có thể mô hình tất cả các tính toán có thể được thực hiện trên một máy tính. Do sức mạnh của mình, các máy Turing đã được nghiên cứu rộng rãi trong tin học lý thuyết. Chúng ta sẽ nghiên cứu một cách vắn tắt các máy này ở tiết sau.

## *BÀI TẬP*

**1.** Mô tả bằng lời các xâu trong các tập chính quy sau:

a) $\mathbf{1^*0}$ b) $\mathbf{1^*00^*}$

c) $\mathbf{111 \cup 001}$ d) $(\mathbf{1 \cup 00})^*$

e) $(\mathbf{00^*1})^*$ f) $(\mathbf{0 \cup 1})(\mathbf{0 \cup 1})^*\mathbf{00}$

**2.** Xâu 1011 có thuộc các tập chính quy cho dưới đây không?

a) $\mathbf{10^*1^*}$ b) $\mathbf{0^*}(\mathbf{10 \cup 11})^*$

c) $\mathbf{1}(\mathbf{01})^*\mathbf{1^*}$ d) $\mathbf{1^*01}(\mathbf{0 \cup 1})$

e) $(\mathbf{10^*}(\mathbf{11})^*$ f) $\mathbf{1}(\mathbf{00})^*(\mathbf{11})^*$

g) $(\mathbf{10})^*\mathbf{1011}$ h) $(\mathbf{1 \cup 00})(\mathbf{01 \cup 0})\mathbf{1^*}$

**3.** Dùng các biểu thức chính quy biểu diễn các tập sau:

a) Tập các xâu có một hoặc nhiều hơn số 0 được tiếp sau bởi một số 1.

b) Tập các xâu có hai hoặc nhiều hơn ký hiệu được tiếp sau bởi ba hoặc nhiều hơn số 0.

c) Tập các xâu hoặc không có số 1 nào đứng trước một số 0 hoặc không có số 0 nào đứng trước một số 1.

d) Tập các xâu chứa một xâu các số 1 sao cho số các số 1 bằng 2 mođun 3, được tiếp theo bởi một số chẵn các số 0.

4. Dựng một ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận các tập sau từ $I^*$ với I là một bộ chữ cái.

a) $\varnothing$ b) $\{\lambda\}$ c) $\{a\}$ với $a \in I$.

*5. Chứng minh rằng nếu $A$ là một tập chính quy, thì tập tất cả các xâu lộn ngược $A^R$ của các xâu trong $A$ cũng sẽ là chính quy.

6. Tìm một ôtômat hữu hạn chấp nhận

a) $\{\lambda, 0\}$ b) $\{0, 11\}$ c) $\{0, 11, 000\}$

7. Dùng các cách dựng được cho trong phần chứng minh của Định lý Kleene, tìm một ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận các tập sau:

a) $\mathbf{0^*1^*}$ b) $(\mathbf{0} \cup \mathbf{11})^*$ c) $\mathbf{01^* \cup 00^*1}$

8. Dựng một ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận các ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm chính quy $G = (V, T, S, P)$ trong đó $V = \{0, 1, S, A, B\}$, $T = \{0, 1\}$, $S$ là ký hiệu xuất phát, và tập $P$ các sản xuất là:

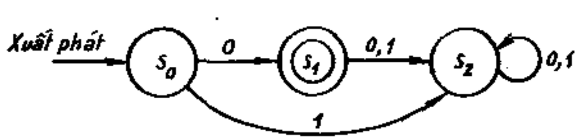
a) $S \rightarrow 0A$, $S \rightarrow 1B$, $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 0$

b) $S \rightarrow 1A$, $S \rightarrow 0$, $S \rightarrow \lambda$, $A \rightarrow 0B$, $B \rightarrow 1B$, $B \rightarrow 1$

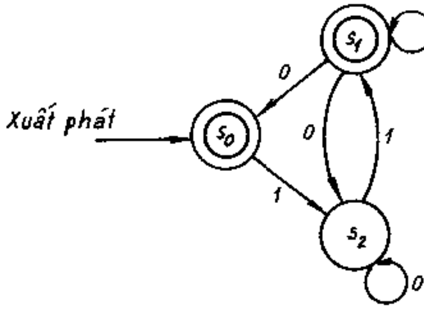
c) $S \rightarrow 1B$, $S \rightarrow 0$, $A \rightarrow 1A$, $A \rightarrow 0B$, $A \rightarrow 1$, $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 1$

*Trong các Bài tập từ 9-11, hãy xây dựng một văn phạm $G = (V, T, S, P)$ sinh ra ngôn ngữ được chấp nhận bởi máy hữu hạn trạng thái đã cho.*

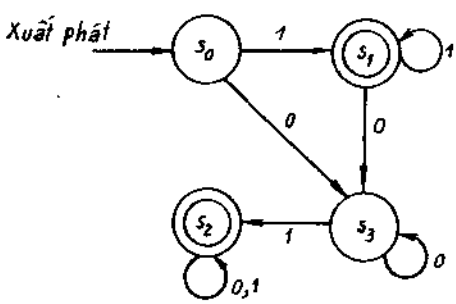
9.



**10.**




**11.**




**12.** Chứng tỏ rằng một ôtômat hữu hạn được xây dựng từ một văn phạm chính quy trong phần chứng minh Định lý 2 chấp nhận tập được sinh bởi văn phạm đó.

**13.** Chứng minh rằng văn phạm chính quy được xây dựng từ một ôtômat hữu hạn trong phần chứng minh của Định lý 2 sẽ sinh ra tập được chấp nhận bởi ôtômat đó.

**14.** Chứng tỏ rằng mỗi một ôtômat hữu hạn tất định đều tương đương với một ôtômat khác có tính chất là trạng thái xuất phát của nó không bao giờ được tái ngộ.

***15.** Cho $M = (S, I, f, s_0, F)$ là một ôtômat hữu hạn tất định. Chứng tỏ rằng ngôn ngữ được chấp nhận bởi $M$, tức $L(M)$, là vô hạn nếu và chỉ nếu có một từ $x$ được chấp nhận bởi $M$ có $l(x) \geq |S|$

***16.** Một kỹ thuật quan trọng để chứng minh một tập nào đó là không chính quy được gọi là **Bổ đề bơm**. Bổ đề bơm phát biểu rằng nếu $M = (S, I, f, s_0, F)$ là một ôtômat hữu hạn tất định và nếu $x$ là một xâu thuộc $L(M)$ - ngôn ngữ được chấp nhận bởi $M$ - với $l(x) \geq |S|$, thì có các xâu $u$, $v$, và $w$ trong $I^*$ sao cho $x = uvw$, $l(uv) \leq |S|$ và $l(v) \geq 1$ và $uv^iw \in L(M)$ với $i = 0, 1, 2...$ Hãy chứng minh Bổ đề bơm. (*Gợi ý*: dùng chính ý tưởng được dùng trong Ví dụ 5).

***17.** Chứng tỏ rằng tập $\{0^{2n}1^n\}$ là không chính quy. Bạn có thể dùng Bổ đề bơm cho trong Bài tập 16.

***18.** Chứng tỏ rằng tập $\{1^{n^2} \mid n = 0, 1, 2...\}$ là không chính quy. Bạn có thể dùng Bổ đề bơm cho trong Bài tập 16.

***19.** Chứng tỏ rằng tập các xâu thuận nghịch đọc trên tập $\{0, 1\}$ là không chính quy. Bạn có thể dùng Bổ đề bơm cho trong Bài tập 16. (*Gợi ý:* Xét các xâu có dạng $0^N10^N$).

****20.** Chứng tỏ rằng tập được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn là một tập chính quy. (Đây là phần *nếu* của Định lý Kleene).

# 10.5. MÁY TURING

## MỞ ĐẦU

Các ôtômat hữu hạn được nghiên cứu ở trên không thể được dùng như các mô hình tính toán tổng quát. Những điều mà các máy đó làm được còn hạn chế. Chẳng hạn, các ôtômat hữu hạn có thể chấp nhận được các tập chính quy, nhưng lại không thể chấp nhận được nhiều tập dễ-mô tả, kể cả tập $\{0^n1^n \mid n \geq 0\}$ mà các máy tính chấp nhận khi dùng bộ nhớ. Ta có thể dùng các ôtômat hữu hạn để tính các hàm tương đối đơn giản như tổng của hai số, nhưng ta không thể dùng chúng để tính các hàm mà các máy tính có thể, chẳng hạn như tích của hàm số. Để khắc phục những thiếu sót đó, chúng ta có thể dùng một loại máy mạnh hơn được biết là máy Turing, gọi theo tên nhà toán học và nhà khoa học về máy tính nổi tiếng Alan Turing, người đã phát minh ra nó vào những năm 1930.

Về cơ bản, máy Turing gồm một đơn vị điều khiển mà tại một bước bất kỳ đơn vị này ở một trong một số hữu hạn các trạng thái kết thúc khác nhau, và kèm theo một băng vô hạn ở hai phía và được chia thành các ô. Các máy Turing đọc và viết các ký hiệu trên băng khi đơn vị điều khiển chạy tới chạy lui dọc theo băng, làm thay đổi các trạng thái tùy thuộc vào ký hiệu được đọc trên băng. Các máy Turing mạnh hơn các máy hữu hạn trạng thái vì chúng có các năng lực nhớ mà các máy hữu hạn trạng thái không có. Chúng ta sẽ chứng tỏ có thể dùng các máy Turing để chấp nhận các tập như thế nào, kể cả các tập không được chấp nhận bởi các máy hữu hạn trạng thái. Chúng ta cũng sẽ cho thấy dùng máy Turing có thể tính được các hàm như thế nào. Các máy Turing là những mô hình tính toán tổng quát nhất, về căn bản nó có thể làm được tất cả những gì mà một máy tính có thể làm được.

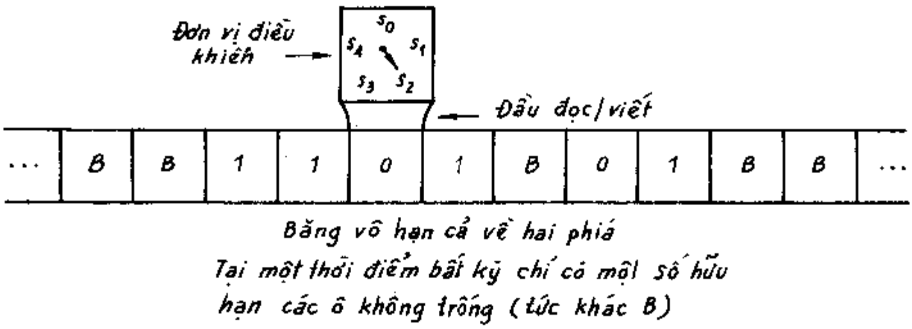
## ĐỊNH NGHĨA MÁY TURING

Bây giờ ta có thể cho một định nghĩa hình thức của máy Turing. Sau đó, ta sẽ giải thích định nghĩa hình thức này có thể được diễn giải như thế nào qua đầu điều khiển, đầu có thể đọc và viết các ký hiệu trên băng và chuyển động hoặc sang phải hoặc sang trái dọc theo băng đó.

**ĐỊNH NGHĨA 1.** *Máy Turing* $T = (S, I, f, s_0)$ gồm một tập hữu hạn $S$ các trạng thái, bộ chữ cái $I$ chứa ký hiệu khoảng trống $B$, một hàm bộ phận $f$ từ $S \times I$ đến $S \times I \times \{R, L\}$ ($R$ là hướng phải, $L$ là hướng trái – ND) và trạng thái xuất phát $s_0$.

Cần nhớ lại phần chú thích cho Bài tập 39 ở Tiết 1.6 trong đó có nói rằng một hàm bộ phận chỉ được xác định đối với các phần tử thuộc miền xác định của nó. Điều này có nghĩa là đối với một số cặp (trạng thái, ký hiệu) hàm $f$ có thể không được xác định; nhưng đối với cặp mà $f$ xác định thì có một bộ ba duy nhất (trạng thái, ký hiệu, hướng) liên kết với cặp đó.

Để giải thích định nghĩa này qua một máy, ta hãy xét đơn vị điều khiển và băng được chia thành các ô, vô hạn ở hai đầu, chỉ có một số hữu hạn các ký hiệu khác $B$ (tức không trống) trên đó ở bất kỳ thời điểm đã cho nào, như được thấy trên Hình 1. Hành động của máy Turing ở mỗi bước hoạt động của nó tùy thuộc vào giá trị của hàm bộ phận $f$ đối với trạng thái và ký hiệu trên băng hiện thời.




***Hình 1.*** Biểu diễn một máy Turing.

Ở mỗi một bước, đơn vị điều khiển đọc ký hiệu $x$ hiện thời trên băng. Nếu đơn vị điều khiển ở trạng thái $s$ và nếu hàm bộ phận xác định đối với cặp $(s, x)$ với $f(s, x) = (s', x', d)$ thì đơn vị điều khiển:

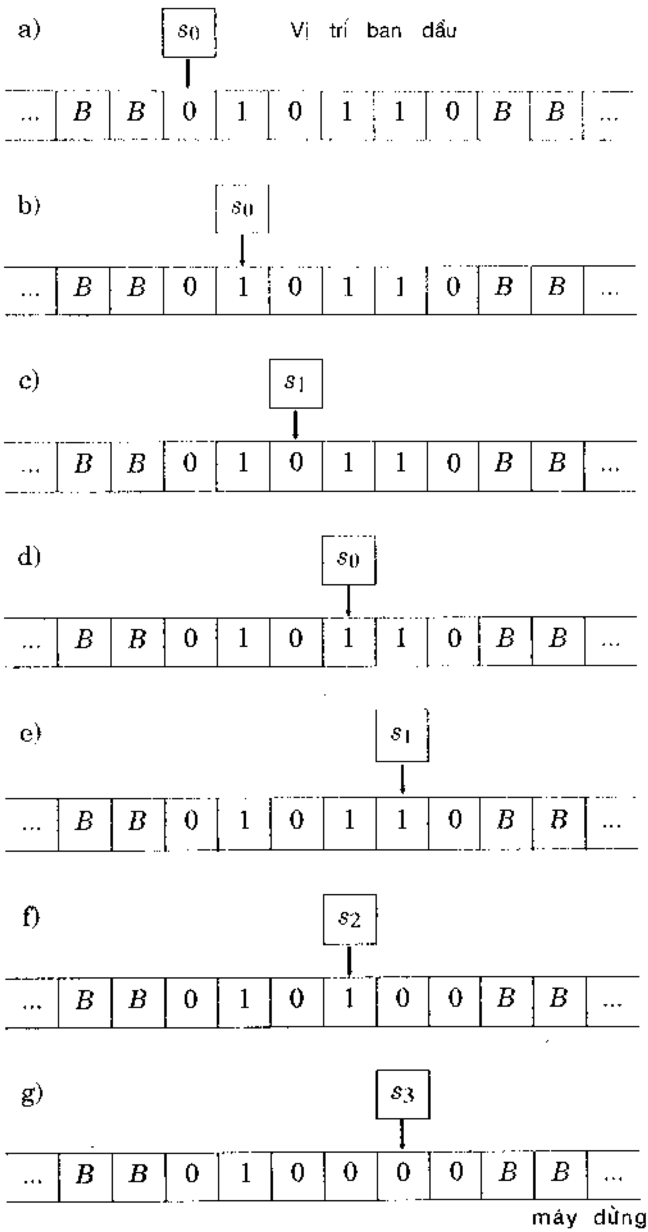
1. chuyển vào trạng thái $s'$
2. viết ký hiệu $x'$ vào ô hiện thời sau khi đã xóa $x$, rồi
3. chuyển sang phải một ô nếu $d = R$ hoặc chuyển trạng trái một ô nếu $d = L$

Ta viết bước này như một bộ năm phần tử $(s, x, s', x', d)$. Nếu hàm bộ phận $f$ không xác định đối với cặp $(s, x)$ thì máy Turing sẽ *dừng lại*.

Một cách thông thường để định nghĩa một máy Turing là đặc tả tập các bộ năm phần tử dạng $(s, x, s', x', d)$. Khi đó tập các trạng thái và bộ chữ cái đầu vào đã ngầm được xác định.

Khi bắt đầu hoạt động, máy Turing được giả thiết là ở trạng thái ban đầu $s_0$ và được đặt hên trên ký hiệu khác $B$ ở bên trái cùng của băng. Nếu băng là khoảng trống hoàn toàn, đầu điều khiển sẽ định vị ở trên một ô bất kỳ. Ta sẽ gọi vị trí của đầu điều khiển ở trên ký hiệu khác $B$ ở bên trái cùng của băng là *vị trí ban đầu* của máy.

Ví dụ sau minh họa sự hoạt động của một máy Turing.




***Hình 2.*** Các bước tạo bởi T chạy trên băng trong Hình 1.

**Ví dụ 1.** Xác định băng kết thúc khi máy Turing T được xác định bởi bảy bộ năm phần tử sau ($s_0$, 0, $s_0$, 0, $R$), ($s_0$, 1, $s_1$, 1, $R$), ($s_0$, $B$, $s_3$, $B$, $R$), ($s_1$, 0, $s_0$, 0, $R$), ($s_1$, 0, $s_0$, 0, $R$), ($s_1$, 1, $s_2$, 0, $L$), ($s_1$, $B$, $s_3$, $B$, $R$), ($s_2$, 1, $s_3$, 0, $R$) chạy trên băng như được cho trên Hình 2(a).

*Giải:* Ta bắt đầu hoạt động với $T$ ở trạng thái $s_0$ và định vị ở trên ký hiệu khác $B$ ở phía trái cùng của băng. Bước đầu tiên là dùng bộ năm phần tử ($s_0$, 0, $s_0$, 0, $R$) đọc số 0 ở ô không trống bên trái cùng, dừng lại ở trạng thái $s_0$, viết một số 0 vào ô đó và dịch sang phải một ô. Bước thứ hai là dùng bộ năm ($s_0$, 1, $s_1$, 1, $R$) đọc số 1 ở ô hiện thời, chuyển sang trạng thái $s_1$, viết số 1 vào ô đó và dịch sang phải một ô. Bước thứ ba là dùng bộ năm ($s_1$, 0, $s_0$, 0, $R$) đọc số 0 ở ô hiện thời, chuyển sang trạng thái $s_0$, viết số 0 vào ô đó và dịch sang phải một ô. Bước thứ tư là dùng bộ năm ($s_0$, 1, $s_1$, 1, $R$) đọc số 1 ở ô hiện thời, chuyển sang trạng thái $s_1$, viết số 1 vào ô đó và dịch sang phải một ô. Bước thứ năm là dùng bộ năm ($s_1$, 1, $s_2$, 0, $L$) đọc số 1 ở ô hiện thời, chuyển sang trạng thái $s_2$, viết số 0 vào ô đó và dịch sang trái một ô. Bước thứ sáu là dùng bộ năm ($s_2$, 1, $s_3$, 0, $R$) đọc số 1 ở ô hiện thời, chuyển sang trạng thái $s_3$, viết số 0 vào ô đó và dịch sang phải một ô. Cuối cùng, ở bước thứ bảy máy dừng lại vì không có bộ năm nào bắt đầu bằng cặp ($s_3$, 0) trong đặc tả của máy. Các bước trên được minh họa trên Hình 2.

Chú ý rằng $T$ đã làm thay đổi cặp số 1 liên tiếp đầu tiên trên băng thành các số 0 và sau đó dừng lại. ■

## DÙNG MÁY TURING ĐỂ CHẤP NHẬN CÁC TẬP

Các máy Turing có thể được dùng để chấp nhận các tập. Để làm như vậy đòi hỏi ta phải định nghĩa khái niệm trạng thái kết thúc như sau. *Trạng thái kết thúc* của một máy Turing $T$ là trạng thái không phải là trạng thái đầu tiên trong bất kỳ bộ năm phần tử nào trong đặc tả của $T$. (Ví dụ, trạng thái $s_3$ trong Ví dụ 1).

Bây giờ chúng ta có thể định nghĩa sự chấp nhận một xâu bởi một máy Turing. Cho một xâu, ta viết các ký hiệu liên tiếp trong xâu đó vào các ô liên tiếp.

**ĐỊNH NGHĨA 2.** Cho $V$ là tập con của bộ chữ cái $I$. Một máy Turing $T = (S, I, f, s_0)$ **chấp nhận** xâu $x$ trong $V^*$ nếu và chỉ nếu $T$ xuất phát từ vị trí ban đầu khi $x$ đã được viết trên băng sẽ dừng lại ở một trạng thái kết thúc. $T$ được nói là chấp nhận một tập con $A$ của $V^*$ nếu và chỉ nếu với mọi $x$ thuộc $A$, $x$ được chấp nhận bởi $T$.

Chú ý rằng để chấp nhận một tập con $A$ của $V^*$, ta có thể dùng các ký hiệu không chứa trong $V$. Điều này có nghĩa là bảng chữ cái đầu vào $I$ có thể chứa các ký hiệu không chứa trong $V$. Các ký hiệu dư này thường được dùng làm phần tử đánh dấu (xem Ví dụ 3).

Khi nào một máy Turing $T$ không chấp nhận một xâu $x$ trong $V^*$? Câu trả lời ở đây là: $x$ không được chấp nhận nếu $T$ không dừng lại hoặc dừng lại không phải ở trạng thái kết thúc khi máy hoạt động trên băng có chứa các ký hiệu của $x$ trong các ô liên tiếp và xuất phát từ vị trí ban đầu. (Độc giả nên hiểu rằng đây chỉ là một trong nhiều cách khả dĩ để định nghĩa sự chấp nhận các tập bởi các máy Turing).

Ta sẽ minh họa khái niệm này bằng ví dụ dưới đây.

**Ví dụ 2.** Tìm một máy Turing chấp nhận tập các xâu nhị phân có số 1 là bit thứ hai của chúng. (Tức là tập chính quy $(\mathbf{0} \vee \mathbf{1})1(\mathbf{0} \vee \mathbf{1})^*$).

*Giải*: Ta muốn có một máy Turing xuất phát ở ô không trống bên trái cùng của băng, dịch chuyển sang phải và xác định ký hiệu thứ hai của xâu có phải là 1 hay không. Nếu ký hiệu thứ hai là 1, máy sẽ phải chuyển tới một trạng thái kết thúc. Nếu ký hiệu thứ hai không phải là 1, máy sẽ không dừng lại hoặc dừng lại không phải ở trạng thái kết thúc.

Để xây dựng một máy như vậy, ta đưa vào hai bộ năm phần tử $(s_0, \mathbf{0}, s_1, \mathbf{0}, R)$ và $(s_0, 1, s_1, 1, R)$ để đọc vào ký hiệu đầu tiên và đưa máy Turing vào trạng thái $s_1$. Tiếp theo, ta đưa vào hai bộ năm $(s_1, \mathbf{0}, s_2, 0, R)$ và $(s_1, 1, s_3, 1, R)$ để đọc vào ký hiệu thứ hai và chuyển tới trạng thái $s_2$ nếu ký hiệu đó là 0 hoặc chuyển tới trạng thái $s_3$ nếu ký hiệu đó là 1. Chúng ta không muốn chấp nhận xâu có số **0** là bit thứ hai, nên $s_2$ sẽ không được là trạng thái kết thúc. Trạng thái kết thúc mà ta muốn là $s_3$. Vì vậy, ta có thể đưa vào bộ năm $(s_2, 1, s_2, 0, R)$. Vì ta cũng không muốn chấp nhận xâu rỗng cũng như xâu chỉ có một bít, ta cũng sẽ đưa vào các bộ năm ($s_0$, B, $s_2$, 0, $R$) và ($s_1$, $B$, $s_2$, 0, $R$).

Máy Turing gồm bảy bộ năm cho ở trên sẽ kết thúc ở trạng thái kết thúc $s_3$ nếu và chỉ nếu xâu nhị phân đầu vào có ít nhất hai bit và bit thứ hai của nó là số 1. Nếu xâu nhị phân chứa ít hơn hai bit hoặc bit thứ hai không phải là 1, thì máy sẽ kết thúc ở trạng thái không kết thúc $s_2$.

■

Cho một tập chính quy, có thể xây dựng một máy Turing luôn dịch chuyển sang phải và chấp nhận tập này (như trong Ví dụ 2). Để xây dựng máy Turing như thế, trước hết phải tìm một ôtômat hữu hạn chấp nhận tập đó, rồi sau đó xây dựng máy Turing có hàm chuyển của ôtômat hữu hạn và luôn dịch chuyển sang phải.

Bây giờ chúng ta sẽ minh họa cách xây dựng một máy Turing chấp nhận một tập không chính quy.

**Ví dụ 3.** Tìm máy Turing chấp nhận tập $\{0^n1^n \mid n \geqslant 1\}$

*Giải:* Để xây dựng một máy như vậy, ta sẽ dùng một ký hiệu phụ $M$ trên băng như một phân tử đánh dấu. Ta có $V = \{0, 1\}$ và $I = \{0, 1, M\}$. Ta chỉ muốn chấp nhận các xâu trong $V^*$. Ta sẽ có một trạng thái kết thúc là $s_6$. Máy Turing sẽ tuần tự thay số 0 ở vị trí trái cùng của xâu bằng $M$ và thay số 1 ở vị trí phải cùng của xâu bằng $M$, khi quét tới quét lui và sẽ kết thúc ở một trạng thái cuối cùng nếu và chỉ nếu xâu gồm một khối các số 0 tiếp theo bởi một khối các số 1 với số lượng như nhau.

Mặc dù điều này dễ mô tả và cũng dễ thực hiện bởi một máy Turing, nhưng máy chúng ta cần dùng lại hơi phức tạp. Chúng ta dùng ký hiệu đánh dấu $M$ để bám sát các ký hiệu trái cùng và phải cùng mà chúng ta đã xem xét. Các bộ năm mà chúng ta dùng ở đây là: ($s_0$, 0, $s_1$, $M$, $R$), ($s_1$, 0, $s_1$, 0, $R$), ($s_1$, 1, $s_1$, 1, $R$), ($s_1$, $M$, $s_2$, $M$, $L$), ($s_1$, $B$, $s_2$, $B$, $L$), ($s_2$, 1, $s_3$, $M$, $L$), ($s_3$, 1, $s_3$, 1, $L$), ($s_3$, 0, $s_4$, 0, $L$), ($s_3$, $M$, $s_5$, $M$, $R$), ($s_4$, 0, $s_4$, 0, $L$), ($s_4$, $M$, $s_0$, $M$, $R$), ($s_5$, $M$, $s_6$, $M$, $R$). Ví dụ, xâu 000111 sẽ liên tiếp trở thành: $M$00111, $M$0011$M$, $MM$011$M$, $MM$01$MM$, $MMM$1$MM$, $MMMMMM$ khi máy hoạt động cho tới khi dừng lại. (Chú ý rằng xâu này không thay đổi ở tất cả các bước hoạt động của máy Turing).

Chúng tôi sẽ dành cho độc giả việc giải thích các hành động của máy Turing và tại sao nó lại chấp nhận tập $\{0^n1^n \mid n \geq 1\}$ (Bài tập 13 ở cuối tiết này).

■

Người ta có thể chứng minh rằng một tập có thể được chấp nhận bởi một máy Turing nếu và chỉ nếu nó được sinh bởi một văn phạm loại 0 hay nói một cách khác nếu tập được sinh bởi một văn phạm cấu trúc câu. Chúng tôi sẽ không trình bày chứng minh của khẳng định đó.

## TÍNH CÁC HÀM BẰNG MÁY TURING

Máy Turing có thể được xem như một máy tính có khả năng tìm được giá trị của các hàm bộ phận. Để thấy điều đó, ta giả sử rằng máy Turing $T$ khi đã cho xâu đầu vào $x$ sẽ dừng lại với xâu $y$ ở trên băng của nó. Khi đó ta có thể định nghĩa $T(x) = y$. Miền xác định của $T$ là tập các xâu làm cho $T$ sẽ dừng lại. $T(x)$ sẽ không xác định nếu $T$ không dừng lại khi $x$ đã cho như một đầu vào. Việc xem một máy Turing như một máy tính được các giá trị của một hàm trên các xâu là rất hữu ích, nhưng làm thế nào dùng máy Turing để tính các hàm được xác định trên các số nguyên, trên các cặp số nguyên, trên bộ ba các số nguyên v.v...?

Để xem một máy Turing như một máy tính các hàm từ tệp các bộ $k$ số nguyên không âm đến tập các số nguyên không âm (những hàm này được gọi là các **hàm lý thuyết số**) chúng ta cần phải có một cách để biểu diễn các bộ $k$ số nguyên trên băng của máy. Muốn vậy, ta sẽ dùng **biểu diễn nhất phân của các số nguyên**. Cụ thể, ta sẽ biểu diễn số nguyên $n$ bằng một xâu gồm $n + 1$ số 1, sao cho, ví dụ, 0 được biểu diễn hằng xâu 1, 5 được biểu diễn bởi xâu 111111. Để biểu diễn bộ **k** số nguyên $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, ta dùng một xâu gồm $n_1 + 1$ số 1, tiếp sau là một dấu sao (*), tiếp sau nữa là xâu gồm $n_2 + 1$ số 1, rồi lại đến một dấu sao, v.v... và cuối cùng kết thúc bằng xâu gồm $n_k + 1$ số 1. Ví dụ, để biểu diễn bộ bốn số nguyên (2, 0, 1, 3) ta dùng xâu 111*1*11*1111.

Bây giờ ta có thể xem một máy Turing $T$ như một máy tính dãy các hàm lý thuyết số $T$, $T^1,...T^k,...$ Các hàm $T^k$ được định nghĩa như tác dụng của $T$ lên các bộ $k$ số nguyên dưới dạng biểu diễn nhất phân và được ngăn cách với nhau bởi các dấu sao.

**Ví dụ 4.** Xây dựng một máy Turing để cộng hai số nguyên

*Giải*: Ta cần phải dựng một máy Turing tính được hàm $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2$. Cặp $(n_1, n_2)$ được biểu diễn bằng xâu gồm $n_1+1$ số 1 tiếp sau là một dấu sao, rồi tiếp sau nữa là xâu gồm $n_2 + 1$ số 1. Máy $T$ cần phải nhận xâu này như đầu vào và tạo đầu ra trên băng là xâu gồm $n_1 + n_2 + 1$ con số 1. Có một cách để làm điều này như sau. Máy xuất phát ở số 1 phía trái cùng của xâu đầu vào và thực hiện các bước để xóa số 1 này (máy sẽ dừng nếu $n_1 = 0$ sao cho không còn số 1 nào trước dấu sao nữa) rồi thay dấu sao bằng số 1 trái cùng còn lại và sau đó dừng lại. Ta có thể dùng các bộ năm phần tử sau để làm điều đó: $(s_0, 1, s_1, B, R)$, $(s_1, *, s_3, B, R)$, $(s_1, 1, s_2, B, R)$, $(s_2, 1, s_2, B, R)$, $(s_2, *, s_3, 1, R)$

■

Không may, việc xây dựng các máy Turing để tính các hàm tương đối đơn giản lại có thể đòi hỏi quá đáng. Ví dụ, một máy Turing để nhân hai số nguyên không âm như được trình bày trong nhiều cuốn sách đòi hỏi tới 31 bộ năm phần tử và 11 trạng thái. Nếu việc xây dựng các hàm Turing để tính các hàm tương đối đơn giản mà đã đầy thách thức như vậy, thì hỏi liệu ta có hy vọng xây dựng các máy Turing để tính các hàm phức tạp hơn không? Một cách để đơn giản hóa bài toán là dùng một máy Turing đa băng, tức là máy dùng đồng thời hơn một băng và dựng các máy Turing đa băng cho hợp thành của các hàm. Người ta chứng minh được rằng đối với một máy Turing đa băng bất kỳ, luôn tồn tại một máy Turing một băng có thể làm được hệt như máy đa băng đó.

Một hàm có thể được tính bởi một máy Turing được gọi là hàm tính được. Không mấy khó khăn có thể chứng tỏ rằng có những hàm lý thuyết số là không tính được. Tuy nhiên, việc tạo ra một hàm như vậy lại không dễ dàng chút nào. Hàm được định nghĩa trong phần chú thích trước Bài tập 23 ở cuối tiết này là một ví dụ của hàm không tính được. Một cách để chứng minh hàm đó là không tính được là chứng tỏ rằng nó tăng nhanh hơn một hàm tính được bất kỳ (xem Bài tập 24).

## CÁC LOẠI MÁY TURING KHÁC

Có nhiều biến tướng đối với định nghĩa của máy Turing. Ta có thể mở rộng các khả năng của máy đó bằng rất nhiều cách. Ví dụ, ta có thể cho nó ở mỗi bước chuyển dịch sang phải, sang trái hoặc không chuyển dịch hoàn toàn. Ta cũng có thể cho phép máy Turing hoạt động đồng thời với nhiều băng. Khi n băng được sử dụng, ta sẽ cần các bộ $(2 + 3n)$ phần tử để đặc tả máy Turing. Ta cũng lại có thể cho băng là hai chiều, trong đó ở mỗi bước ta có thể dịch lên, dịch xuống, sang phải hoặc sang trái chứ không phải chỉ dịch sang phải hoặc sang phải như đối với băng một chiều. Ta cũng có thể cho phép các đầu đọc đa băng đọc các ô khác nhau đồng thời. Hơn thế nữa, ta có thể cho phép máy Turing là không tất định, bằng cách cho phép cặp (trạng thái-ký hiệu trên băng) có thể xuất hiện như các phần tử trong hơn một bộ năm phần tử đặc tả máy Turing. Ta cũng có thể thu bớt các khả năng của máy Turing bằng các cách khác nhau. Chẳng hạn, ta có thể hạn chế băng là vô hạn chỉ theo một hướng hoặc hạn chế bộ chữ cái của băng chỉ có hai ký hiệu. Tất cả những biến tướng đó của máy Turing đều đã được nghiên cứu một cách chi tiết.

Một điểm quan trọng là ở chỗ dù ta có dùng biến tướng hay tổ hợp các biến tướng nào của máy Turing đi nữa, ta cũng không bao giờ làm tăng hoặc giảm sức mạnh của nó. Bất kỳ điều gì mà một biến tướng của máy Turing là được, thì chính máy Turing được định nghĩa trong tiết này cũng làm được và ngược lại. Sở dĩ một số biến tướng này đôi khi tỏ ra hữu ích chỉ bởi vì chúng làm cho việc thực hiện một công việc đặc biệt nào đó trở nên dễ dàng hơn so với máy Turing được định nghĩa theo Định nghĩa 1, chứ chúng không bao giờ làm tăng được sức mạnh của máy đó.

## LUẬN ĐỀ CHURCH - TURING

Các máy Turing tương đối đơn giản. Chúng có thể chỉ có một số hữu hạn trạng thái và có thể chỉ đọc và viết một lần một ký hiệu trên băng một chiều. Tuy thế, nhưng hóa ra các máy Turing lại cực kỳ mạnh. Chúng ta đã thấy rằng các máy Turing có thể được tạo dựng để cộng và nhân các số. Mặc dù có thể là khó dựng được thực sự một máy Turing để tính một hàm đặc biệt nào đó có thể *tính* được nhờ một thuật toán, nhưng một máy Turing như vậy luôn luôn tìm được. Đây chính là mục đích ban đầu của Turing khi ông phát minh ra các máy này.

Hơn thế nữa có rất nhiều bằng chứng ủng hộ cho **luận đề Church - Turing**, luận đề phát biểu rằng: đối với một bài toán đã cho bất kỳ có thể giải được bằng một thuật toán hiệu quả, thì sẽ tồn tại một máy Turing có thể giải được bài toán đó. Lý do để phát biểu trên được gọi là một *luận đề* chứ không phải một định lý là ở chỗ khái niệm giải được bằng một thuật toán là một khái niệm không hình thức và không chính xác, đối lập với khái niệm giải được bằng máy Turing, một khái niệm hình thức và chính xác. Mặc dù một bài toán được giải trên máy tính bằng một chương trình được viết trong một ngôn ngữ nào đó, có thể sử dụng một lượng bộ nhớ không hạn chế, có lẽ cũng có thể được xem là một bài toán giải được một cách hiệu quả.

Nhiều lý thuyết khác nhau đã được phát triển để nắm bắt khái niệm tính được một cách hiệu quả. Đó là các lý thuyết của Turing, của Church, cũng như các lý thuyết được đề xuất bởi Kleene và Post. Các lý thuyết đó nhìn bề ngoài dường như rất khác nhau, nhưng một điều đáng ngạc nhiên là chúng lại được chứng tỏ là tương đương với nhau theo nghĩa chúng xác định chính xác cùng một lớp các hàm. Với bằng chứng đó, dường như những ý tưởng cội nguồn của Turing, được phát biểu trước khi phát minh ra các máy tính hiện đại, đã mô tả được những năng lực tối hậu của máy này.

## BÀI TẬP

1. Cho $T$ là máy Turing được xác định bởi các bộ năm phần tử $(s_0, 0, s_1, 1, R)$, $(s_0, 1, s_1, 0, R)$, $(s_0, B, s_1, 0, R)$, $(s_1, 0, s_2, 1, L)$, $(s_1, 1, s_1, 0, R)$ và $(s_1, B, s_2, 0, L)$. Đối với các băng ban đầu cho dưới đây, hãy xác định băng kết thúc khi $T$ dừng lại. Giả sử rằng $T$ xuất phát từ vị trí ban đầu.

a)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | 0 | 0 | 1 | 1 | $B$ | $B$ | ... |

b)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | 1 | 0 | 1 | $B$ | $B$ | $B$ | ... |

c)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | 1 | 1 | $B$ | 0 | 1 | $B$ | ... |

d)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | ... |

**2.** Cũng hỏi như trên đối với máy Turing được xác định bởi các bộ năm phần tử ($s_0$, 0, $s_1$, 0, $R$), ($s_0$, 1, $s_1$, 0, $L$), ($s_0$, $B$, $s_1$, 1, $R$), ($s_1$, 0, $s_2$, 1, $R$), ($s_1$, 1, $s_1$, 1, $R$), ($s_1$, $B$, $s_2$, 0, $R$) và ($s_2$, $B$, $s_3$, 0, $R$).

a)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | 0 | 1 | 0 | 1 | $B$ | $B$ | ... |

b)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | 1 | 1 | 1 | $B$ | $B$ | $B$ | ... |

b)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | 0 | 0 | $B$ | 0 | 0 | $B$ | ... |

d)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ... | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | $B$ | ... |

**3.** Máy Turing được đặc tả bởi các bộ năm phần tử ($s_0$, 0, $s_0$, 0, $R$), ($s_0$, 1, $s_1$, 0, $R$), ($s_0$, $B$, $s_2$, $B$, $R$), ($s_1$, 0, $s_1$, 0, $R$), ($s_1$, 1, $s_0$, 1, $R$), ($s_1$, $B$, $s_2$, $B$, $R$) sẽ làm gì khi cho đầu vào là một xâu nhị phân?

**4.** Cũng hỏi như trên đối với máy Turing được đặc tả bởi các bộ năm phân tử ($s_0$, 0, $s_1$, $B$, $R$), ($s_0$, 1, $s_1$, 1, $R$), ($s_1$, 0, $s_1$, 0, $R$), ($s_1$, 1, $s_2$, 1, $R$), ($s_2$, 0, $s_1$, 0, $R$), ($s_2$, 1, $s_3$, 0, $L$), ($s_3$, 0, $s_4$, 0, $R$) và ($s_3$, 1, $s_4$, 0, $R$)?

**5.** Xây dựng một máy Turing với các ký hiệu trên băng là 0, 1 và $B$, biết rằng máy thay số 0 đầu tiên bằng số 1 và không làm thay đổi bất cứ một ký hiệu nào khác trên băng.

**6.** Xây dựng một máy Turing với các ký hiệu trên băng là 0, 1, và $B$. Biết rằng với đầu vào là một xâu nhị phân máy sẽ thay tất cả các số 0 trên băng bằng các số 1 và không làm thay đổi bất kỳ một số 1 nào trên băng.

**7.** Cũng cho và hỏi như trên nhưng bây giờ máy thay tất cả các số 1 trừ số 1 bên trái cùng trên băng bằng các số 0 và không thay đổi các ký hiệu khác trên băng.

**8.** Cũng hỏi và cho như trên nhưng bây giờ máy thay hai số 1 liên tiếp đầu tiên trên băng bằng các số 0 và không thay đổi các ký hiệu nào khác trên băng.

**9.** Dựng một máy Turing chấp nhận tập tất cả các xâu nhị phân kết thúc bằng một số **0**.

**10.** Dựng một máy Turing chấp nhận tập tất cả các xâu nhị phân chứa ít nhất hai số 1.

**11.** Dựng một máy Turing chấp nhận tập tất cả các xâu nhị phân chứa một số chẵn con số 1.

**12.** Cho biết nội dung của băng ở mỗi bước của máy Turing cho trong Ví dụ 3 xuất phát từ các xâu sau:

a) 0011 b) **00011** c) **101100** d) **000111**

**13.** Giải thích tại sao máy Turing trong Ví dụ 3 chấp nhận một xâu nhị phân nếu và chỉ nếu xâu đó có dạng $0^n1^n$ với $n$ là một số nguyên dương.

***14.** Dựng một máy Turing chấp nhận tập $\{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$

***15.** Dựng một máy Turing chấp nhận tập $\{0^n1^n2^n \mid n \geq 0\}$

**16.** Dựng một máy Turing tính hàm $f(n) = n + 2$ với mọi số nguyên không âm $n$.

**17.** Dựng một máy Turing tính hàm $f(n) = n - 3$ nếu $n \geq 3$ và $f(n) = 0$ nếu $n = 0, 1, 2$ đối với mọi số nguyên không âm $n$.

**18.** Dựng một máy Turing tính hàm $f(n) = n \textbf{ mod } 3$

**19.** Dựng máy Turing tính hàm $f(n) = 3$ nếu $n \geq 5$ và $f(n) = 0$ nếu $n = 0, 1, 2, 3$, hoặc 4.

**20.** Dựng máy Turing tính hàm $f(n_1, n_2) = n_2 + 2$ đối với mọi cặp số nguyên không âm $n_1$ và $n_2$.

***21.** Dựng máy Turing tính hàm $f(n_1, n_2) = \min(n_1, n_2)$ với mọi cặp số nguyên không âm $n_1$ và $n_2$.

**22.** Dựng một máy Turing tính hàm $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2 + 1$ đối với mọi cặp số nguyên không âm $n_1$ và $n_2$.

*Cho B(n) là số cực đại các số 1 mà một máy Turing có n trạng thái và bộ chữ cái {1, B} có thể in ra trên băng với băng ban đầu là trống hoàn toàn. Bài toán xác định B(n) đối với các giá trị cụ thể của n đã được Tibor Rada nghiên cứu lần đầu tiên vào năm 1962. Hiện nay người ta đã biết rằng B(2) = 4, B(3) = 6 và B(4) = 13 nhưng B(n) với n ⩾ 5 thì chưa ai biết.*

***23.** Chứng tỏ rằng B(2) ít nhất là 4 bằng cách tìm một máy Turing có hai trạng thái và bộ chữ cái $\{1, B\}$, đồng thời máy sẽ dừng khi có bốn số 1 liên tiếp ở trên băng.

***24.** Chứng tỏ rằng hàm $B(n)$ không thể tính được bằng bất cứ máy Turing nào.

(*Gợi ý*: Giả sử có một máy Turing có thể tính được $B(n)$ dưới dạng nhị phân. Hãy xây dựng một máy Turing $T$, xuất phát với băng trống hoàn toàn, viết ra số $n$ dưới dạng nhị phân, rồi tính $B(n)$ dưới dạng nhị phân, sau đó đổi $B(n)$ từ biểu diễn nhị phân sang biểu diễn nhất phân. Chứng tỏ rằng với $n$ đủ lớn, số các trạng thái trong $T$ sẽ nhỏ hơn $B(n)$ và dẫn tới mâu thuẫn).

## CÂU HỎI ÔN TẬP

**1.** a) Nêu định nghĩa của văn phạm cấu trúc câu.

b) Một xâu được dẫn xuất từ xâu $w$ bằng một văn phạm cấu trúc câu $G$ là nghĩa thế nào?

**2.** a) Ngôn ngữ được sinh bởi một văn phạm cấu trúc câu $G$ là gì?

b) Xác định ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm $G$ với từ vựng $\{S, 0, 1\}$, tập các ký hiệu kết thúc $T = \{0, 1\}$, ký hiệu xuất phát $S$ và các sản xuất $S \rightarrow 000S$, $S \rightarrow 1$?

c) Xác định văn phạm cấu trúc câu sinh ra tập $\{01^n \mid n = 0, 1, 2...\}$

3. a) Nêu định nghĩa của văn phạm loại 1

b) Cho một ví dụ về văn phạm không phải loại 1

c) Nêu định nghĩa của văn phạm loại 2

d) Cho một ví dụ về một văn phạm không phải loại 2 nhưng là loại 1

e) Nêu định nghĩa của văn phạm loại 3 hay là văn phạm phi ngữ cảnh.

f) Cho một ví dụ về một văn phạm không phải loại 3 nhưng là loại 2.

4. a) Nêu định nghĩa của văn phạm chính quy

b) Nêu định nghĩa của ngôn ngữ chính quy

c) Cho một ví dụ về văn phạm không chính quy nhưng là văn phạm loại 3

d) Chứng minh rằng tập $\{0^m1^n \mid m, n = 0, 1, 2...\}$ là một ngôn ngữ chính quy

5. a) Dạng Backus – Naur là gì?

b) Cho một ví dụ về dạng Backus – Naur của văn phạm đối với một tập con tiếng Anh mà bạn tùy chọn.

6. a) Máy hữu hạn trạng thái là gì?

b) Cho biết làm thế nào dùng một máy hữu hạn trạng thái có thể lập mô hình một máy bán hàng chỉ nhận các đồng 25 xu và trả cho khách hàng một cốc nước giải khát sau khi đã bỏ 75 xu vào máy.

7. a) Bao đóng Kleene của tập các xâu là gì?

b) Tìm bao đóng Kleene của tập $\{11, 0\}$

8. a) Nêu định nghĩa của một ôtômat hữu hạn

b) Một xâu được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn có nghĩa là gì?

**9.** a) Nêu định nghĩa của ôtômat hữu hạn không tất định

b) Chứng tỏ rằng với một ôtômat hữu hạn không tất định đã cho, tồn tại một ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận cùng một ngôn ngữ.

**10.** a) Nêu định nghĩa của tập các biểu thức chính quy trên một tập I.

b) Hãy cho biết các biểu thức chính quy được dùng để biểu diễn các tập chính quy như thế nào?

**11.** Hãy phát biểu định lý Kleene

**12.** Chứng minh rằng một tập được sinh bởi một văn phạm chính quy nếu và chỉ nếu nó là một tập chính quy

**13.** Cho một ví dụ về một tập không được chấp nhận bởi một ôtômat hữu hạn. Chứng tỏ rằng không có một ôtômat hữu hạn nào chấp nhận tập đó.

**14.** Nêu định nghĩa của máy Turing

**15.** Hãy mô tả một máy Turing được dùng để chấp nhận các tập như thế nào

**16.** Hãy mô tả một máy Turing được dùng để tính các hàm lý thuyết số như thế nào.

## BÀI TẬP BỔ SUNG

***1.** Tìm văn phạm cấu trúc câu sinh ra các ngôn ngữ sau

a) Tập các xâu nhị phân có dạng $0^{2n}1^{3n}$ với $n$ là một số nguyên không âm.

b) Tập các xâu nhị phân có số các số 0 nhiều gấp hai lần số các số 1.

c) Tập các xâu nhị phân có dạng $w^2$ với w là một xâu nhị phân.

***2.** Tìm văn phạm cấu trúc câu sinh ra tập $\{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$

*Đối với các Bài tập 3 và 4, cho $G = (V, T, S, P)$ là một văn phạm phi* *ngữ cảnh với $V = \{(,), S, A, B\}$, $T = \{(,)\}$, ký hiệu xuất phát là $S$ và các sản xuất là $S \to A$, $A \to AB$, $A \to B$, $B \to (A)$ và $B \to (\,)$, $S \to \lambda$*

**3.** Dựng cây dẫn xuất của

a) (()) b) ()(()) c) ((()()))

***4.** Chứng minh rằng L(G) là tập tất cả các xâu gồm các dấu ngoặc đúng đã được định nghĩa trong Chương 3.

*Một văn phạm phi ngữ cảnh là* **không rõ nghĩa** *nếu có một từ trong L(G) có hai dẫn xuất tạo ra các cây dẫn xuất khác nhau.*

**5.** Chứng tỏ rằng văn phạm $G = (V, T, S, P)$ với $V = \{0, S\}$, $T = \{0\}$, ký hiệu xuất phát là $S$ và các sản xuất là $S \to 0S$, $S \to S0$ và $S \to 0$ là không rõ nghĩa bằng cách xây dựng hai cây dẫn xuất khác nhau cho $0^3$.

**6.** Chứng tỏ rằng văn phạm $G = (V, T, S, P)$ với $V = \{0, S\}$, $T = \{0\}$, $S$ là ký hiệu xuất phát và các sản xuất là $S \to 0S$, $S \to 0$ là rõ nghĩa.

**7.** Giả sử $A$ và $B$ là hai tập con hữu hạn của $V^*$ với $V$ là một bộ chữ cái. Hỏi có nhất thiết phải đúng đẳng thức $|AB| = |BA|$?

**8.** Chứng minh hoặc bác bỏ các khẳng định sau đối với các tập con $A$, $B$ và $C$ của $V^*$

a) $A(B \cup C) = AB \cup AC$ b) $A(B \cap C) = AB \cap AC$

c) $(AB)C = A(BC)$ d) $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$

**9.** Cho $A$ và $B$ là các tập con của $V^*$. Hỏi có thể suy ra $A \subseteq B$ nếu $A^* \subseteq B^*$?

**10.** Xác định tập các xâu với các ký hiệu trong tập {0, 1, 2} được biểu diễn bởi biểu thức chính quy $(\mathbf{2}^*)(0 \cup (\mathbf{12}^*))^*$

**Độ cao tinh tú** *h*(**E**) *của một biểu thức chính quy trên tập I được định nghĩa một cách đệ quy như sau:*

$h(\varnothing) = \mathbf{0}$

$h(\mathbf{x}) = 0$ nếu $\mathbf{x} \in I$

$h(\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2) = h(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2) = \max(h(\mathbf{E}_1), h(\mathbf{E}_2))$ nếu $\mathbf{E}_1$ và $\mathbf{E}_2$ là các biểu thức chính quy

$h(\mathbf{E}^*) = h(\mathbf{E}) + 1$ nếu $\mathbf{E}$ là biểu thức chính quy

**11.** Tìm độ cao tính tú của các biểu thức chính quy sau:

a) $\mathbf{0}^*\mathbf{1}$ b) $\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*$ c) $(\mathbf{0}^*\mathbf{01})^*$ d) $((\mathbf{0}^*\mathbf{1})^*)^*$

e) $(\mathbf{010}^*)(\mathbf{1}^*\mathbf{01}^*)^*((\mathbf{01})^*(\mathbf{10})^*)^*$ f) $((((\mathbf{0}^*)\mathbf{1})^*\mathbf{0})^*)\mathbf{1})^*$

***12.** Đối với mỗi biểu thức chính quy sau đây, tìm một biểu thức chính quy biểu diễn cùng một ngôn ngữ nhưng có độ cao tính tú cực tiểu

a) $(\mathbf{0}^*\mathbf{1}^*)^*$ b) $(\mathbf{0}(\mathbf{01}^*\mathbf{0}^*))^*$ c) $(\mathbf{0}^*\cup(\mathbf{01})^*\cup\mathbf{1}^*)^*$

**13.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái có đầu ra tạo một đầu ra là 1, nếu xâu nhị phân được đọc tới lúc này như một đầu vào chứa bốn hoặc nhiều hơn các số 1. Sau đó, dựng một ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận tập đó.

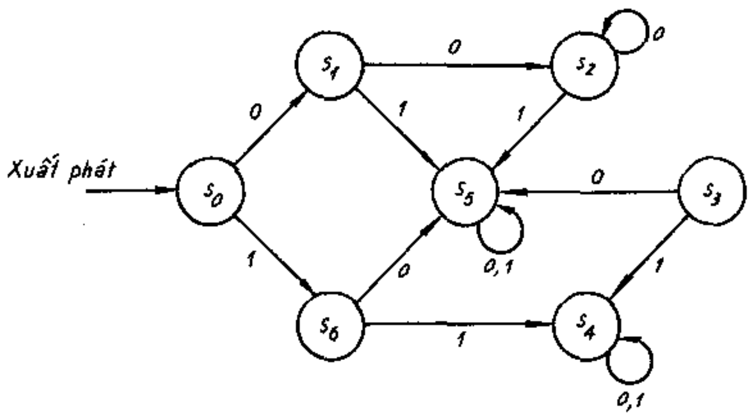
**14.** Dựng một máy hữu hạn trạng thái có đầu ra tạo một đầu ra là 1, nếu xâu nhị phân được đọc tới lúc này như một đầu vào gồm bốn hoặc nhiều hơn các số 1 liên tiếp. Sau đó, dựng một ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận tập đó.

**15.** Cũng cho và hỏi như trên nhưng với xâu đầu vào kết thúc bởi bốn hoặc nhiều hơn các số 1 liên tiếp.

**16.** Trạng thái $s'$ trong một máy hữu hạn trạng thái được nói là **đạt tới được từ** trạng thái $s$, nếu có một xâu đầu vào $x$ sao cho $f(s, x) = s'$. Trạng thái $s$ được gọi là **đệm** nếu có một xâu đầu vào không rỗng $x$ sao cho $f(s, x) = s$. Một trạng thái $s$ được gọi là **chìm** nếu $f(s, x) = s$ với mọi xâu đầu vào $x$.

Hãy trả lời các câu hỏi sau về máy hữu hạn trạng thái có giản đồ trạng thái cho dưới đây.

a) Các trạng thái nào đạt tới được từ $s_0$?




b) Các trạng thái nào đạt tới được từ $s_2$?

c) Các trạng thái nào là đệm?

d) Các trạng thái nào là chìm?

***17.** Cho $S$, $I$ và O là các tập hữu hạn sao cho $|S| = n$, $|I| = k$, và $|O| = m$.

a) Hỏi có thể dựng được bao nhiêu máy hữu hạn trạng thái (máy Mealy) khác nhau $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ với trạng thái xuất phát $s_0$ có thể chọn tùy ý?

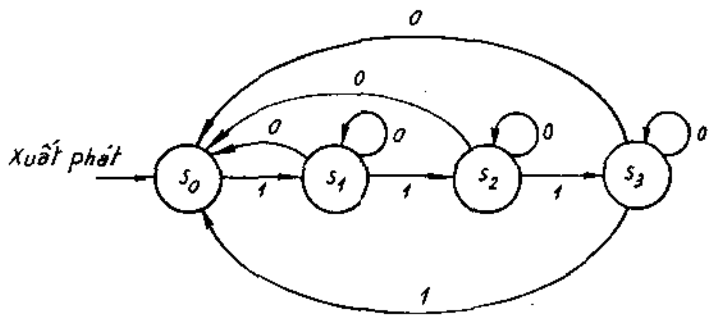
b) Hỏi có thể dựng được bao nhiêu máy Moore khác nhau $M = (S, I, O, f, g, s_0)$ với trạng thái xuất phát $s_0$ có thể chọn tùy ý?

***18.** Cho $S$ và $I$ là các tập hữu hạn sao cho $|S| = n$ và $|I| = k$. Hỏi có bao nhiêu ôtômat hữu hạn khác nhau $M = (S, I, f, s_0, F)$ với trạng thái xuất phát $s_0$ và tập con $F$ của $S$ chứa các trạng thái kết thúc có thể chọn tùy ý

a) nếu ôtômat là tất định

b) nếu ôtômat có thể là không tất định (*chú ý:* điều này có thể bao hàm cả các ôtômat tất định)

**19.** Dựng một ôtômat hữu hạn tất định tương đương với ôtômat không tất định có giản đồ trạng thái cho dưới đây




**20.** Xác định ngôn ngữ được chấp nhận bởi ôtômat cho trong Bài tập 19.

**21.** Dựng các ôtômat hữu hạn chấp nhận các tập sau:

a) $\mathbf{0}^*(\mathbf{10})^*$ b) $(\mathbf{01} \cup \mathbf{111})^*\mathbf{10}^*(\mathbf{0} \cup \mathbf{1})$ c) $(\mathbf{001} \cup (\mathbf{11})^*)^*$

***22.** Tìm các biểu thức chính quy biểu diễn tập tất cả các xâu nhị phân

a) được tạo bởi các khối gồm một số chẵn các con số 1 "rắc" xen kẽ với các khối gồm một số lẻ các con số 0.

b) có ít nhất hai số **0** hoặc ba số 1 liên tiếp

c) không có ba số không hoặc hai số 1 liên tiếp

***23.** Chứng minh rằng nếu $A$ là một tập chính quy thì $\overline{A}$ cũng là một tập chính quy

***24.** Chứng minh rằng nếu $A$ và $B$ là hai tập chính quy, thì $A \cap B$ cũng là chính quy.

***25.** Tìm các ôtômat hữu hạn chấp nhận tập các xâu nhị phân sau:

a) tập hợp các xâu xuất phát với không hơn ba số **0** liên tiếp và chứa ít nhất hai số 1 liên tiếp.

b) tập tất cả các xâu có một số chẵn các ký hiệu và không chứa khối **101**.

c) tập tất cả các xâu có ít nhất ba khối gồm hai hoặc nhiều hơn các số 1 và ít nhất hai số 0.

***26.** Chứng minh rằng $\{0^{2^n} \mid n \in Z\}$ là không chính quy. Bạn có thể dùng Bổ đề bơm được cho trong Bài tập 16 của Tiết 10.4.

***28.** Đối với các ngôn ngữ phi ngữ cảnh có một kết quả tương tự với Bổ đề bơm cho các tập chính quy. Giả sử $L(G)$ là ngôn ngữ phi ngữ cảnh được sinh bởi văn phạm phi ngữ cảnh $G$. Kết quả nói trên phát biểu rằng: tồn tại một hằng số $N$ sao cho nếu $z$ là một từ trong $L(G)$ với $l(z) \geqslant N$, thì $z$ có thể được viết dưới dạng $uvwxy$ trong đó $l(vwx) \leqslant N$, $l(v, x) \geqslant 1$ và $uv^iwx^iy$ thuộc $L(G)$ với $i = 0, 1, 2, 3...$ Dùng kết quả trên chứng minh rằng không có một văn phạm phi ngữ cảnh $G$ nào với $L(G) = \{0^n1^n2^n \mid n = 0, 1, 2...\}$.

## BÀI TẬP TRÊN MÁY TÍNH

***Viết các chương trình với Input và Output sau:***

**1.** Cho các sản xuất trong một văn phạm cấu trúc câu, hãy xác định đó là loại văn phạm nào trong sơ đồ phân loại của Chomsky.

***2.** Cho các sản xuất trong một văn phạm phi ngữ cảnh và một xâu, hãy tạo cây dẫn xuất của xâu đó, nếu nó nằm trong ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm đó.

**3.** Cho bảng trạng thái của máy Moore và một xâu đầu vào, hãy tạo xâu đầu ra được sinh bởi máy đó.

**4.** Cho bảng trạng thái của máy Mealy và một xâu đầu vào, hãy tạo xâu đầu ra sinh bởi máy đó.

**5.** Cho bảng trạng thái của một ôtômat hữu hạn tất định và một xâu, hãy quyết định xem xâu này có được chấp nhận bởi ôtômat đó hay không.

8. Cho bảng trạng thái của một ôtômat hữu hạn không tất định và một xâu, hãy quyết định xem xâu này có được chấp nhận bởi ôtômat đó hay không.

***7.** Cho bảng trạng thái của một ôtômat hữu hạn không tất định, hãy lập bảng trạng thái của một ôtômat hữu hạn tất định chấp nhận cùng một ngôn ngữ.

**8. Cho một biểu thức chính quy, hãy dựng một ôtômat hữu hạn không tất định chấp nhận tập mà biểu thức đó biểu diễn.

9. Cho một văn phạm chính quy, hãy dựng một ôtômat hữu hạn chấp nhận ngôn ngữ được sinh bởi văn phạm đó.

10. Cho một ôtômat hữu hạn, hãy xây dựng một văn phạm chính quy sinh ra ngôn ngữ được chấp nhận bởi ôtômat đó.

*11. Cho một máy Turing, hãy tìm xâu đầu ra tạo bởi xâu đầu vào đã cho.

## TÍNH TOÁN VÀ KHÁM PHÁ

***Dùng các chương trình mà bạn đã viết để làm các bài tập sau***

1. Tìm $B(n)$ (xem Bài tập 23 Tiết 10.5) đối với trường hợp hai trạng thái bằng cách thử tất cả các máy Turing khả dĩ có hai trạng thái và bộ chữ cái $\{1, B\}$.

*2. Cũng hỏi như trên cho trường hợp ba trạng thái.

**3. Cũng hỏi như trên cho trường hợp bốn trạng thái.

**4. Sẽ tiến bộ rất nhiều, nếu bạn có thể tiến tới giải bài toán trên với 5 trạng thái.

**5. Sẽ tiến bộ rất nhiều, nếu bạn có thể tiến tới giải bài toán trên với 6 trạng thái.

## VIẾT TIỂU LUẬN

***Dùng các tư liệu ngoài cuốn sách này, viết các tiểu luận trả lời những câu hỏi sau***

1. Hãy mô tả cách lập mô hình sự tăng trưởng của một số loại cây bằng cách dùng hệ Lidenmeyer. Một hệ như thế dùng văn phạm với các sản xuất mô hình hóa các cách tăng trưởng khả dĩ khác nhau của các cây.

**2.** Hãy giải thích khái niệm cực tiểu hóa các ôtômat hữu hạn. Cho một thuật toán thực hiện sự cực tiểu hóa đó.

**3.** Nêu định nghĩa của ôtômat tế bào. Giải thích các ứng dụng của nó.

**4.** Nêu định nghĩa của ôtômat đẩy xuống. Hãy giải thích các ôtômat đẩy xuống được dùng để chấp nhận các tập như thế nào? Hãy phác thảo chứng minh khẳng định câu trả lời của bạn.

**5.** Nêu định nghĩa của ôtômat tuyến tính – giới nội. Hãy giải thích các ôtômat tuyến tính giới nội được dùng để chấp nhận các tập như thế nào? Các tập nào được chấp nhận bởi một ôtômat tuyến tính giới nội? Hãy phác thảo một chứng minh khẳng định câu trả lời của bạn.

**6.** Tìm lại định nghĩa gốc của Turing về cái mà chúng ta gọi là máy Turing. Động cơ nào của ông để đưa ra định nghĩa đó?

**7.** Mô tả khái niệm máy Turing phổ dụng. Hãy giải thích các máy này được xây dựng như thế nào?

**8.** Hãy giải thích các loại ứng dụng trong đó các máy Turing không tất định được dùng thay cho các máy Turing tất định.

**9.** Chứng minh rằng một máy Turing có thể mô phỏng bất kỳ hành động nào của một máy Turing không tất định.

**10.** Chứng tỏ rằng một tập được chấp nhận bởi một máy Turing nếu và chỉ nếu nó được sinh bởi một văn phạm cấu trúc câu.

**11.** Mô tả những khái niệm cơ bản của giải thích – lamđa và hãy giải thích nó được dùng như thế nào để nghiên cứu tính tính được của hàm.

**12.** Chứng tỏ rằng một máy Turing như được định nghĩa trong chương này có thể làm được tất cả những gì mà một máy Turing n băng làm được.

**13.** Chứng tỏ rằng một máy Turing với băng vô hạn theo một hướng có thể làm được tất cả những gì mà một máy Turing với băng vô hạn theo cả hai hướng làm được.

**14.** Chứng tỏ rằng với một máy Turing và một xâu $x$ đã cho, không tồn tại một thuật toán nào xác định được $T$ sẽ dừng lại với $x$ đã cho như một đầu vào hay không. Bài toán này được biết là *bài toán dừng máy*.

# *Lời giải các bài tập đánh số lẻ*

## CHƯƠNG 1

### *Tiết 1.1*

1. a) là mệnh đề đúng
   b) là mệnh đề sai
   c) là mệnh đề đúng
   d) là mệnh đề sai
   a) không là mệnh đề
   f) không là mệnh đề
   g) là mệnh đề đúng.

3. a) Hôm nay không là thứ năm
   b) Có ô nhiễm ở New Jersey.
   c) $2 + 1 \neq 3$
   d) Mùa hè ở Maine không nóng hoặc không nắng.

5. a) $p \wedge q$
   b) $p \wedge \neg q$
   c) $\neg p \wedge \neg q$
   d) $p \vee q$
   e) $p \rightarrow q$
   f) $(p \vee q) \wedge (p \rightarrow \neg q)$
   g) $q \leftrightarrow p$

7. a) $\neg q$
   b) $p \wedge \neg q$
   c) $p \rightarrow q$
   d) $\neg p \rightarrow \neg q$
   e) $p \rightarrow q$
   f) $q \wedge \neg p$
   g) $q \rightarrow p$

9. a) *Hoặc có nghĩa bao hàm* : Sẽ được phép theo học môn toán rời rạc nếu bạn đã học giải tích hoặc tin học hoặc cả hai. *Hoặc có nghĩa loại trừ*: Sẽ được phép theo học môn toán rời rạc nếu bạn đã học giải tích hoặc tin học, nhưng không được phép nếu bạn đã học cả hai. Ở đây nghĩa bao hàm là hàm định.

   b) *Hoặc có nghĩa bao hàm* : Bạn có thể nhận tiền bớt hoặc bạn có thể vay lãi suất thấp hoặc vừa nhận tiền bớt vừa vay lãi suất thấp. Hoặc *có nghĩa loại trừ:* Bạn có thể nhận tiền bớt hoặc có thể vay lãi suất thấp nhưng bạn không thể vừa nhận tiền bớt vừa vay lãi suất thấp. Ở đây nghĩa loại trừ là hàm định.

   c) *Hoặc có nghĩa bao hàm :* Bạn có thể đặt hai món ở cột *A* và không món nào ở cột *B* hoặc ba món ở cột *B* và không món nào ở cột *A* hoặc đặt năm món bao gồm hai món ở cột *A* và ba món ở cột *B*. *Hoặc có nghĩa loại trừ:*: Bạn có thể đặt hai món ở cột *A* hoặc ba món ở cột *B* chứ không thể cả hai cột. Ở đây hàm chắc chắn là hàm định nghĩa loại trừ.

   d) *Hoặc có nghĩa bao hàm* : Tuyết rơi dày hơn 2m hoặc gió lạnh dưới -100 hoặc cả hai thì trường sẽ đóng cửa. *Hoặc có nghĩa loại trừ* : Tuyết rơi dày hơn 2m hoặc gió lạnh dưới -100, nhưng không phải cả hai thì trường sẽ đóng cửa. Ở đây chắc chắn hàm định nghĩa bao hàm.

11. a) Nếu có gió Đông Bắc thì tuyết sẽ rơi.
    b) Nếu trời ấm kéo dài một tuần, các cây táo sẽ nở hoa.

c) Nếu đội, Pistons giành được chức vô địch thì họ đã đánh bại đội Lakers.

d) Nếu bạn định đi tới đỉnh núi Long, thì bạn cần phải đi 8 dặm nữa.

e) Nếu bạn đã nổi tiếng thế giới, thì bạn sẽ được phong giáo sư.

f) Nếu bạn cho xe chạy hơn 400 dặm, thì bạn cần phải mua xăng.

g) Nếu bạn đã mua chiếc đầu *CD* ít hơn 90 ngày trước đây thì giấy bảo hành của bạn còn hiệu lực.

**13.** a) *Mệnh đề đảo:* "Tôi sẽ đi trượt tuyết ngày mai, chỉ nếu hôm nay tuyết rơi". *Mệnh đề phản đảo*: "Nếu tôi không đi trượt tuyết ngày mai, thì hôm nay tuyết không rơi".

b) *Mệnh đề đảo:* "Nếu tôi tới lớp thì sắp có kỳ thi". *Mệnh đề phản đảo* : "Nếu tôi không tới lớp thì sẽ chưa có kỳ thi".

c) *Mệnh đề đảo:* "Nếu một số nguyên dương là số nguyên tố thì nó không có một ước số nào khác 1 và chính nó". *Mệnh đề phản đảo*: "Nếu một số nguyên dương không là số nguyên tố thì nó có một ước số khác 1 và chính nó".

**15.** a)

| $p$ | $\neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|
| T | F | F |
| F | T | F |

b)

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ |
|---|---|---|
| T | F | T |
| F | T | T |

c)

| $p$ | $q$ | $\neg q$ | $p \vee \neg q$ | $(p \vee \neg q) \to q$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T |
| T | F | T | T | F |
| F | T | F | F | T |
| F | F | T | T | F |

d)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ | $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | T | F | F |
| F | T | T | F | F |
| F | F | F | F | T |

e)

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg q$ | $\neg p$ | $\neg q \to \neg p$ | $(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | T | T |
| T | F | F | T | F | F | T |
| F | T | T | F | T | T | T |
| F | F | T | T | T | T | T |

f)

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $q \to p$ | $(p \to q) \to (q \to p)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |

**17.** a)

| $p$ | $q$ | $p \to \neg q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | T |

b)

| $p$ | $q$ | $\neg p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| T | T | F |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | F |

c)

| $p$ | $q$ | $(p \to q) \vee (\neg p \to q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | T |

d)

| $p$ | $q$ | $(p \to q) \wedge (\neg p \to q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | T |
| F | F | F |

e)

| $p$ | $q$ | $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | T |

f)

| $p$ | $q$ | $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$ |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | T |
| F | T | T |
| F | F | T |

**19.** a)

| $p$ | $q$ | $r$ | $p \to (\neg q \vee r)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

b)

| $p$ | $q$ | $r$ | $\neg p \to (q \to r)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | T | T |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

c)

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \to q) \vee (\neg p \to r)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | T | T |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

d)

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \to q) \wedge (\neg p \to r)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | F |
| T | F | F | F |
| F | T | T | T |
| F | T | F | F |
| F | F | T | T |
| F | F | F | F |

e)

| $p$ | $q$ | $r$ | $(p \leftrightarrow q) \vee (\neg q \leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | F |
| F | T | F | T |
| F | F | T | T |
| F | F | F | T |

f)

| $p$ | $q$ | $r$ | $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | T | F | F |
| T | F | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | T | F |
| F | T | F | T |
| F | F | T | F |
| F | F | F | T |

**21.** a) OR bit là 11 11111; AND bit là 00 00000;
XOR bit là 11 11111

b) OR bit là 111 11010; AND bit là 101 00000;
XOR bit là 010 11010

c) OR bit là 10011 11001; ADN bit là 00010 00000;
XOR bit là 10001 11001

d) OR bit là 11111 11111; AND bit là 00000 00000;
XOR bit là 11111 11111

**23.** 0,2; 0,6

**25.** 0,8; 0,6

**27.** Mâu thuẫn

## Tiết 1.2

**1.** Các tương đương suy ra bằng cách chỉ ra các cặp cột tương ứng trong bảng sau phù hợp với nhau:

| $p$ | $p \wedge T$ | $p \vee F$ | $p \wedge F$ | $p \vee T$ | $p \vee p$ | $p \wedge p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T | T | T |
| F | F | F | T | T | F | F |

3. a)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $q \vee p$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | F | F |

b)

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $q \wedge p$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | F |
| F | T | F | F |
| F | F | F | F |

5.

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \vee r$ | $p \wedge (q \vee r)$ | $p \wedge q$ | $p \wedge r$ | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T | T | T |
| T | T | F | T | T | T | F | T |
| T | F | T | T | T | F | T | T |
| T | F | F | F | F | F | F | F |
| F | T | T | T | F | F | F | F |
| F | T | F | T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | F | F | F | F |
| F | F | F | F | F | F | F | F |

7. a)

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $(p \wedge q) \rightarrow p$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | F | T |
| F | T | F | T |
| F | F | F | T |

b)

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ | $p \rightarrow (p \vee q)$ |
|---|---|---|---|
| T | T | T | T |
| T | F | T | T |
| F | T | T | T |
| F | F | F | T |

c)

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $p \rightarrow q$ | $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | F | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | T | T |
| F | F | T | T | T |

d)

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ | $p \rightarrow q$ | $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | F | T | T |
| F | F | F | T | T |

e)

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg(p \to q)$ | $\neg(p \to q) \to p$ |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | T |
| T | F | F | T | T |
| F | T | T | F | T |
| F | F | T | F | T |

f)

| $p$ | $q$ | $p \to q$ | $\neg(p \to q)$ | $\neg q$ | $\neg(p \to q) \to \neg q$ |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | F | F | T |
| T | F | F | T | T | T |
| F | T | T | F | F | T |
| F | F | T | F | T | T |

9. Trong từng trường hợp ta sẽ chứng minh rằng nếu giả thiết đúng thì kết luận cũng đúng.

a) Nếu giả thiết $p \wedge q$ là đúng, thì theo định nghĩa của hội thì kết luận $p$ cũng phải đúng.

b) Nếu giả thiết $p$ là đúng thì theo định nghĩa của tuyển, kết luận $p \vee q$ cũng đúng.

c) Nếu giả thiết $\neg p$ là đúng, tức nếu $p$ sai, thì kết luận $p \to q$ là đúng.

d) Nếu giả thiết $p \wedge q$ là đúng, thì cả $p$ và $q$ đều đúng, do đó kết luận $p \to q$ cũng là đúng.

e) Nếu giả thiết $\neg(p \to q)$ là đúng, thì $p \to q$ là sai vì vậy kết luận $p$ là đúng (và $q$ là sai).

f) Nếu giả thiết $\neg(p \to q)$ là đúng, thì $p \to q$ là sai, sao cho $p$ đúng và $q$ sai. Do đó kết luận $\neg q$ là đúng.

11. a) Nếu p là đúng, thì $p \vee (p \wedge q)$ là đúng vì mệnh đề thứ nhất trong tuyển là đúng. Trái lại, nếu p là sai, thì $p \wedge q$ là sai, sao cho $p \vee (p \wedge q)$ cũng là sai. Vì p và $p \vee (p \wedge q)$ luôn có cùng giá trị chân lý vậy chúng tương đương với nhau.

b) Nếu p là sai, thì $p \wedge (p \vee q)$ là sai vì mệnh đề thứ nhất trong phép hội là sai. Trái lại, nếu $p$ đúng thì cả hai mệnh đề trong phép hội đều đúng vì $p \vee q$ cũng đúng. Do $p$ và $p \wedge (p \vee q)$ luôn có cùng giá trị chân lý nên chúng tương đương với nhau.

13. Cách duy nhất để phép kéo theo này sai là khi $\neg q \wedge (p \to q)$ là đúng và $\neg q$ là sai. Vì $\neg p$ là sai nên p đúng. Do $\neg q \wedge (p \to q)$ là đúng nên $\neg q$ phải đúng, nghĩa là q là sai. Vì p đúng, nên $p \to q$ sai là không thể được.

15. Các mệnh đề đó không tương đương lôgic vì khi p, q và r đều sai thì $(p \to q) \to r$ là sai, nhưng $p \to (q \to r)$ là đúng.

17. Mệnh đề $\neg p \leftrightarrow q$ là đúng khi $\neg p$ và q cùng giá trị chân lý, mà điều này có nghĩa là p và q có giá trị chân lý khác nhau. Tương tự, $p \leftrightarrow \neg p$ đúng chỉ trong các trường hợp như trên. Do đó, hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

19. Mệnh đề $\neg(p \leftrightarrow q)$ đúng khi $p \leftrightarrow q$ là sai, mà điều này có nghĩa là p và q có các giá trị chân lý khác nhau. Vì điều này cũng xảy ra y như thế khi $\neg(p \leftrightarrow q)$ là đúng, Vậy hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

21. Nếu ta lấy đối ngẫu hai lần, thì mỗi phép ∨ sẽ đổi thành một phép ∧ rồi lại trở về phép ∨ và mỗi phép ∧ sẽ đổi thành một phép ∨ rồi lại trở về phép ∧. Đồng thời mỗi mệnh đề T chuyển thành một mệnh đề F rồi lại trở về T và mỗi mệnh đề F chuyển thành mệnh đề T rồi lại trở về F. Do đó, $(s^*)^* = s$.

22. Cho p và q là hai mệnh đề phức hợp tương đương liên quan chỉ với các phép ∧, ∨ và ¬ và T và F. Chú ý rằng $\neg p$ và $\neg q$ cũng là tương đương. Dùng các luật De Morgan với số lần đủ mức cần thiết để đẩy dấu phủ định vào trong các mệnh đề đó xa nhất có thể được, điều này đồng thời biến các ∨ thành ∧ và ngược lại, biến các T thành F và ngược lại. Điều này chứng tỏ rằng $\neg p$ và $\neg q$ hệt như $p^*$ và $q^*$ chỉ trừ một điều là các mệnh đề nguyên tử $p_i$ trong chúng được thay bằng phủ định của nó. Từ đó ta có thể kết luận rằng $p^*$ và $q^*$ là tương đương vì $\neg p$ và $\neg q$ là tương đương.

25. $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)$.

27. Với mệnh đề phức hợp p đã cho, hãy lập bảng chân lý rồi viết ra một mệnh đề q dưới dạng tuyển chuẩn tắc tà tương đương lôgic với p. Vì q chỉ liên quan với ¬, ∧ và ∨, điều này chứng tỏ rằng tập các phép toán ¬, ∧ và ∨ là một tập đầy đủ.

29. Theo Bài tập 27, với mệnh đề phức hợp p đã cho, có thể viết được một mệnh đề q tương đương lôgic với p và chỉ chứa các phép ¬,∨,∧. Dùng các luật De Morgan ta có thể loại các phép ∧ bằng cách thay mỗi lần xuất hiện $(p_1 \wedge p_2 \wedge .. \wedge p_n)$ thành $\neg(\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee .. \vee \neg p_n)$.

31. $\neg(p \wedge q)$ là đúng khi hoặc p hoặc q hoặc cả hai đều aai và là sai khi cả p và q đều đúng. Vì đây là định nghĩa của $p \mid q$, nên hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

33. $\neg(p \vee q)$ là đúng khi cả p và q là sai, và là sai trong các trường hợp còn lại. Vì đây là định nghĩa của $p \downarrow q$ nên hai biểu thức trên là tương đương lôgic.

35. $((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$

37. Điều này được suy ra ngay lập tức từ bảng chân lý hoặc định nghĩa của $p \mid q$.

39. 16

41. $p \to q$ là sai nếu và chỉ nếu p đúng và q sai. Tương tự, $\neg q \to \neg p$ là sai nếu và chỉ nếu $\neg q$ đúng và $\neg p$ sai, tức là nếu p đúng và q sai. Do đó, $p \to q$ và $\neg q \to \neg p$ là tương đương lôgic.

## Tiết 1.3

1. a) Đúng  b) Đúng  c) Sai

3. a) Đúng  b) Sai  c) Sai  d) Sai

5. a) Có một sinh viên học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.
   b) Mọi sinh viên đều học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.
   c) Có một sinh viên không học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.
   d) Không có sinh viên nào học ở lớp hơn 5 giờ mỗi ngày trong tuần.

7. a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$  b) $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
   c) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  d) $\forall x \neg(P(x) \vee Q(x))$

9. a) $\forall x L(x, Jerry)$  b) $\forall x \exists y\, L(x,y)$
   c) $\exists y\, \forall x L(x,y)$  d) $\forall x\, \exists y\, L(x,y)$
   e) $\exists x \neg L(\text{Lydia}, x)$  f) $\exists x\, \forall y \neg L(x,y)$
   g) $\exists x(\forall y L(y,x) \wedge \forall z\, ((\forall w L(w, z)) \to z = x))$

h) $\exists x\exists y(x \neq y \wedge L(Lynn, x) \wedge L(Lynn, y) \wedge \forall z(L(Lynn, z) \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

i) $\forall x\, L(x,x)$

j) $\exists x\ \forall y\ (L(x,y) \rightarrow x = y)$.

**11.** a) $\forall x P(x)$, ở đây $P(x)$ là "$x$ cần học môn toán rời rạc" và không gian là tập toàn thể sinh viên của ngành tin học.

b) $\exists x P(x)$ với $P(x)$ là "$x$ có máy vi tính" và không gian là tập các sinh viên trong lớp.

c) $\forall x\exists y\ P(x, y)$ với $P(x, y)$ là " $x$ đã học môn $y$ " và không gian đối với x là tập các sinh viên trong lớp và không gian đối với y là tập các môn tin học.

d) $\exists x\exists y\ P(x, y)$ với $P(x, y)$ và các không gian như trong câu c)

e) $\forall x\forall y\ P(x, y)$ với $P(x, y)$ là " $x$ đã ở $y$ " và không gian đối với x là tập các sinh viên tong lớp và không gian đối với $y$ là tập các nhà trong ký túc xá

f) $\exists x\exists y\forall z\ (P(z,y) \rightarrow Q(x,z))$ với $P(z,y)$ là "$z$ thuộc $y$" và $Q(x,z)$ là "$x$ đã ở $z$" với không gian đối với $x$ là tập các sinh viên trong lớp, không gian đối với $y$ là tập các nhà trong ký túc xá và không gian đối với $z$ là tập các phòng.

g) $\forall x\forall y\exists z\ (P(z,y) \wedge Q(x, z))$ với $P(z, y)$, $Q(x,z)$ và các không gian hệt như trong câu (1).

**13.** a) $T$ b) $T$ c) $F$

d) $F$ e) $T$ f) $F$

**15.** a) $P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3)$ b) $P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)$

c) $P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3) \wedge P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3) \wedge P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3)$

d) $P(1,1) \vee P(1,2) \vee P(1,3) \vee P(2,1) \vee P(2,2) \vee P(2,3) \vee P(3,1) \vee P(3,2) \vee P(3,3)$

e) $(P(1,1) \wedge P(1,2) \wedge P(1,3)) \vee (P(2,1) \wedge P(2,2) \wedge P(2,3)) \vee (P(3,1) \wedge P(3,2) \wedge P(3,3))$

f) $(P(1,1) \vee P(2,1) \vee P(3,1)) \wedge (P(1,2) \vee P(2,2) \vee P(3,2)) \wedge (P(1,3) \vee P(2,3) \vee P(3,3))$

**17.** a) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

b) $\forall x (Q(x) \rightarrow R(x))$

c) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg R(x))$

d) Không thể suy ra kết luận đó. Có thể có các giáo sư vô tích sự vì các tiền đề không loại trừ khả năng ngoài những kẻ ngu dốt vẫn có cả những kẻ khác vô tích sự.

**19.** a) $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ b) $\forall x\ (R(x) \rightarrow \neg S(x))$

c) $\forall x\ (\neg Q(x) \rightarrow S(x))$ d) $\forall x\ (P(x) \rightarrow \neg R(x))$

e) Suy được. Giả sử $x$ là một đứa bé. Khi đó, theo tiền đề thứ nhất $x$ là không logic, do đó theo tiền đề thứ ba $x$ bị coi thường. Tiền đề thứ hai nói rằng nếu $x$ cai quản được cá sấu, thì $x$ không bị coi thường. Do đó, $x$ không cai quản được cá sấu.

**21.** $\neg(\exists x\forall y P(x,y)) \leftrightarrow \forall x\ (\neg\forall y P(x,y)) \leftrightarrow \forall x\ \exists y \neg P(x,y)$.

**23.** Cả hai mệnh đề đều đúng khi ít nhất $P(x)$ hoặc $Q(x)$ đúng đối với ít nhất một giá trị của $x$.

**25.** a) Nếu $A$ đúng, thì cả hai vế đều tương đương logic với $\forall x P(x)$. Nếu $A$ sai, vế trái hiển nhiên là sai. Hơn nữa, với mọi $x$ $P(x) \wedge A$ là sai, do đó vế phải cũng là sai. Do đó hai vế là tương đương logic.

b) Nếu $A$ đúng, thì cả hai vế đều tương đương logic với $\exists x P(x)$. Nếu $A$ sai, vế trái hiển nhiên là sai. Hơn nữa, với mọi $x$, $P(x) \wedge A$ là sai, do đó $\exists x\ (P(x) \wedge A)$ là sai. Do đó, hai vế là tương đương logic.

**27.** Để chứng minh hai mệnh đề này là không tương đương logic, giả sử $P(x)$ là câu "$x$ là dương" và $Q(x)$ là câu "$x$ là âm" với không gian là tập các số nguyên. Khi đó $\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$ là đúng, nhưng $\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))$ lại là sai.

**29.** a) Giả sử $\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ là đúng. Khi đó $P(x)$ đúng với mọi $x$ và tồn tại một y sao cho $Q(y)$ là đúng. Vì $P(x) \wedge Q(y)$ đúng với mọi $x$ và tồn tại một $y$ để $Q(y)$ là đúng, nên $\forall x \exists y\, P(x) \wedge Q(y))$ là đúng. Ngược lại, giả sử mệnh đề thứ hai là đúng và $x$ là một phần tử của không gian. Khi đó, tồn tại một $y$ sao cho $Q(y)$ là đúng, túc là $\exists x\, Q(x)$ là đúng. Vì $\forall x\, P(x)$ cũng đúng, suy ra mệnh đề thứ nhất cũng đúng.

b) Giả sử $\forall x\, P(x) \vee \exists x Q(x)$ là đúng. Khi đó hoặc $P(x)$ đúng với mọi $x$ hoặc tồn tại một $y$ sao cho $Q(y)$ là đúng. Trong trường hợp đầu $P(x) \vee Q(y)$ đúng với mọi $x$, sao cho $\forall x \exists y\, (P(x) \vee Q(y))$ là đúng. Ngược lại, giả sử mệnh đề thứ hai là đúng. Nếu $P(x)$ đúng với mọi $x$ thì mệnh đề thứ nhất cũng đúng. Nếu không, $P(x)$ sẽ là sai đối với một $x$ nào đó, và đối với $x$ đó cần tồn tại một $y$ để $P(x) \vee Q(y)$ là đúng. Vì vậy, $Q(y)$ cần phải đúng, do đó $\exists y\, Q(y)$ là đúng. Từ đó suy ra mệnh đề thứ nhất là đúng.

**31.** a) Đúng

b) Sai, nếu không gian chứa hơn một phần tử.

c) Đúng

**33.** $\exists x\, P(x) \wedge \forall x \forall y((P(x) \wedge P(y)) \rightarrow (x = y))$.

**35.** Ta sẽ chỉ ra cách đưa một biểu thức về dạng tiền lượng chuẩn tắc (*PNF*) như thế nào, nếu các biểu thức con trong nó có thể được đưa về dạng đó. Khi ấy, bằng cách thực hiện từ trong ra ngoài ta có thể đưa một biểu thức bất kỳ về dạng *PNF* (để hình thức hóa sự suy lý cần dùng phương pháp qui nạp toán học sẽ được đề cập tới ở Tiết 3.3). Theo Bài tập 29 ở Tiết 1.2, ta có thể giả sử rằng mệnh đề chỉ dùng các liên từ logic $\vee$ và $\neg$. Bây giờ chú ý rằng mọi mệnh đề không chứa các lượng từ đều đã ở dạng *PNF* (đây là trường hợp cơ sở của suy lý). Bây giờ giả sử mệnh đề có dạng $Q\, x\, P(x)$ với $Q$ là một lượng từ. Vì $P(x)$ là biểu thức ngắn hơn mệnh đề gốc, nên ta có thể đưa nó về dạng *PNF*. Khi ấy $Q\, x$ đặt trước dạng *PNF* đó cũng lại ở dạng *PNF* và tương đương với mệnh đề ban đầu. Tiếp sau, giả sử rằng mệnh đề có dạng $\neg P$. Nếu $P$ đã ở dạng *PNF*, ta có thể cho dấu phủ định chạy qua tất cả các lượng từ bằng cách dùng các tương đương cho trong bảng 3. Cuối cùng, giả sử rằng mệnh đề có dạng $P \vee Q$ trong đó cả $P$ và $Q$ đã ở dạng *PNF*. Nếu chỉ một trong $P$ hoặc $Q$ có các lượng từ, ta có thể dùng Bài tập 24 để đưa các lượng từ ra trước cả $P$ và $Q$. Nếu cả $P$ lẫn $Q$ đều có các lượng từ, ta có thể dùng Bài tập 23, Bài tập 28 hoặc Bài tập 29b để viết lại $P \vee Q$ với hai lượng từ đứng trước tuyển của mệnh đề có dạng $R \vee S$, rồi đưa $R \vee S$ về dạng *PNF*.

## Tiết 1.4

**1.** a) $\{-1,1\}$ b) $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$

c) $\{0,1,4,9,16,25,36,49,64,81\}$ d) $\varnothing$

**3.** a) Có b) Không c) Không

**5.** a) Đúng b) Đúng c) Sai

d) Đúng e) Đúng f) Sai

**7.** Giả sử $x \in A$. Vì $A \subseteq B$ nên $x \in B$. Vì $B \subseteq C$, ta cũng thấy rằng $x \in C$. Vì $x \in A$ kéo theo $x \in C$, suy ra $A \subseteq C$.

**9.** a) 1 b) 1 c) 2 d) 3

**11.** a) $\{\varnothing, \{a\}\}$ b) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ c) $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

**13.** a) 8 b) 16 c) 2

**15.** a) $\{(a,y), (b,y), (c,y), (d,y), (a,z), (b,z), (c,z), (d,z)\}$

b) $\{(y,a), (y,b), (y,c), (y,d), (z,a), (z,b), (z,c), (z,d)\}$

**17.** Tập các bộ ba $(a,b,c)$ trong đó $a$ là tuyến bay và $b,c$ là các thành phố.

**19.** $\varnothing \times A = \{(x,y) \mid x \in \varnothing$ và $y \in A\} = \varnothing$

$= \{(x, y) \mid x \in A$ và $y \in \varnothing\} = A \times \varnothing$

**21.** $mn$

**23.** Ta cần phải chứng minh rằng $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c,d\}\}$ nếu và chỉ nếu $a=c$ và $b=d$. Phần "nếu" của mệnh đề trên là hiển nhiên. Vậy ta giả sử rằng khi tập đã cho bằng nhau. Trước hết ta hãy xét trường hợp $a \neq b$. Khi đó $\{\{a\}, \{a,b\}\}$ chỉ chứa đúng hai phần tử trong đó có một chứa một phần tử. Vì thế $\{\{c\}, \{c,d\}\}$ *cũng phải có đúng tính chất đó, tức là* $c \neq d$ và $\{c\}$ là phần tử chỉ chứa một phần tử. Do đó $\{a\} = \{c\}$, điều này kéo theo $a = c$. Cũng như vậy các tập chứa hai phần tử $\{a,b\}$ và $\{c,d\}$ cũng cần phải bằng nhau. Vì $a=c$ và $a \neq b$ suy ra $b=d$. Bây giờ ta xét trường hợp $a=b$. Khi đó $\{\{a, a,b\}\} = \{\{a\}\}$ là tập chỉ có một phần tử. Do đó, $\{\{c\}, \{c, d\}\}$ cũng chỉ có một phần tử và điều này có thể xảy ra chỉ khi $c=d$ và tập đó là $\{c\}$. Từ đó suy ra rằng $a=c$ và $b=d$.

**25.** Cho $S = \{a_1 a_2 \ldots a_n\}$. Biểu diễn mỗi tập con của $S$ bằng một xâu bit có chiều dài $n$, trong đó bit thứ $i$ bằng 1 nếu và chỉ nếu $a_i \in S$. Để sinh tất cả các tập con của $S$, ta liệt kê tất cả $2^n$ xâu bit có chiều dài $n$ (ví dụ theo thứ tự tăng) rồi viết ra các tập con tương ứng.

## Tiết 1.5

**1.** a) Tập các sinh viên sống cách trường trong vòng một dặm và đi bộ đi học.

b) Tập các sinh viên sống cách trường trong vòng một dặm hoặc các sinh viên đi bộ đi học (hoặc cả hai)

c) Tập các sinh viên sống cách trường trong vòng một dặm nhưng không đi bộ đi học.

d) Tập các sinh viên đi bộ đi học nhưng sống cách xa trường hơn một dặm.

**3.** a) $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ b) $\{3\}$

c) $\{1,2,4,5\}$ d) $\{0,6\}$

**5.** $\overline{\overline{A}} = \{x \mid \neg(x \in \overline{A})\} = \{x \mid \neg(\neg x \in A)\} = \{x \mid x \in A\} = A$

**7.** a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\} = \{x \mid x \in B \vee x \in A\} = B \cup A$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} = \{x \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$.

**9.** a) $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin (A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \vee x \in B) \Leftrightarrow \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B)$

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

b)

| $A$ | $B$ | $A \cup B$ | $\overline{A \cup B}$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{A} \cap \overline{B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**11.** a) $x \in \overline{A \cap B \cap C} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \cap C \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \vee x \notin C \Leftrightarrow$
$x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B} \vee x \in \overline{C} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$

b)

| $A$ | B | C | $A \cap B \cap C$ | $\overline{(A \cap B \cap C)}$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{C}$ | $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**13.** Cả hai vế đều bằng $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

**15.** a) $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cup C))$
$\leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \vee x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$

b) Hệt như (a) với $\cup$ được thay bằng $\cap$ và $\vee$ được thay bằng $\wedge$

c) $x \in A \cup (B \cap C) \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in (B \cap C))$
$\Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in C) \leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

**17.** a) $\{4,6\}$

b) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

c) $\{4,5,6,8,10\}$

d) $\{0,2,4,5,6,7,8,9,10\}$

**19.** a) $B \subseteq A$

b) $A \subseteq B$

c) $A \cap B = \varnothing$

d) Không có gì để nói, vì điều này luôn luôn đúng

e) $A = B$

**21.** $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B) \Leftrightarrow \forall x\ (x \notin B \rightarrow x \notin A)$
$\Leftrightarrow \forall x\ (x \in \overline{B} \rightarrow x \in \overline{A}) \leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$

**23.** Tập các sinh viên ngành tin nhưng không là ainh viên ngành toán hoặc các sinh viên ngành toán không là sinh viên ngành tin.

**25.** Một phần tử thuộc $(A \cup B) - (A \cap B)$ nếu nó thuộc hợp của $A$ và $B$ nhưng không thuộc giao của $A$ và $B$. Điều này có nghĩa là nó hoặc thuộc $A$ hoặc thuộc $B$ chứ không thuộc cả $A$ lẫn $B$ ; túc là nó thuộc $A \oplus B$.

**27.** a) $A \oplus A = (A - A) \cup (A - A) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

b) $A \oplus \varnothing = (A - \varnothing) \cup (\varnothing - A) = A \cup \varnothing = A$

c) $A \oplus U = (A - U) \cup (U - A) = \varnothing \cup \overline{A} = \overline{A}$

d) $A \oplus \overline{A} = (A - \overline{A}) \cup (\overline{A} - A) = A \cup \overline{A} = U$

**29.** $B = \varnothing$

**31.** Có. Giả sử rằng $x \in$ A nhưng $x \notin$ B. Nếu $x \in$ C thì $x \notin A \oplus C$ nhưng $x \in B \oplus C$, mâu thuẫn ! Do đó, $A \subseteq B$. Tương tự, $B \subseteq A$, suy ra $A = B$.

**33.** Có

**35.** a) $\{1,2,3,...,n\}$ b) $\{1\}$

**37.** a) $An$ b) $\{0,1\}$

**39.** a) $\{1,2,3,4,7,8,9,10\}$ b) $\{2,4,5,6,7\}$ c) $\{1,10\}$

**41.** Bit ở vị trí thứ $i$ trong xâu bit của hiệu hai tập hợp là 1 nếu bit thứ $i$ của xâu thứ nhất là 1 và bit thứ $i$ của xâu thứ hai là 0 và là 0 trong các trường hợp còn lại.

**43.** a) 1 11110 00000 00000 00000 00000 ∨ 0 11100 10000 00001 00010 10000 = 1 11110 10000 00001 00010 10000, biểu diễn $\{a,b,c,d,e,g,p,t,v\}$

b) 1 11110 00000 00000 00000 00000 ∧ 0 11100 10000 00001 00010 10000 = 0 11100 00000 00000 00000 00000, biểu diễn $\{b,c,d\}$

c) (1 11110 00000 00000 00000 00000 ∨ 0 00110 01100 00110 00011 00110) ∧ (0 11100 10000 00001 00010 10000 ∨ 0 01010 00100 00010 00001 00111) = 1 11110 01100 00110 00011 00110 ∧ 0 11110 10100 00011 00011 10111 = 0 11110 00100 00010 00011 00110, biểu diễn $\{b,c,d,e,i,o,t,u,x,y\}$

d) 1 11110 00000 00000 00000 00000 ∨ 0 11100 10000 00001 00010 10000 ∨ 0 01010 00100 00010 00001 00111 ∨ 0 00110 01100 00110 00011 00110 = 1 11110 11100 00111 00011 10111, biểu diễn $\{a,b,c,d,e,g,h,i,n,o,p, t, u, v, x,y,z\}$

**45.** a) $\{1,2,3,\{1,2,3\}\}$ b) $\{\varnothing\}$

c) $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ d) $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$

**47.** a) $\{3a, 3b, 1c, 4d\}$ b) $\{2a, 2b\}$ c) $\{1a, 1c\}$

d) $\{1b, 4d\}$ e) $\{5a, 5b, 1c, 4d\}$

**49.** $F$ = {0.4 Alice, 0.1 Brian, 0.6 Fred, 0.9 Oscar, 0.5 Rita}, $\overline{R}$ = {0.6 Alice, 0.2 Brian, 0.8 Fred, 0.1 Oscar, 0.3 Rita}

**51.** $F \cap R$ = {0.4 Alice, 0.8 Brian, 0.2 Fred, 0.1 Oscar, 0.5 Rita}

## Tiết 1.6

**1** a) $f(0)$ không xác định b) $f(x)$ không xác định đối với $x < 0$

c) $f(x)$ không xác định vì có hai giá trị phân biệt được gán cho mỗi $x$

**3.** a) Không là một hàm b) Là một hàm

c) Không là một hàm

**5.** a) 1 b) 0 c) 0

d) -1 e) 3 f) -1

**7.** Chỉ có hàm ở câu (a)

**9.** Chỉ có các hàm ở câu (a) và (d)

**11.** a) Có b) không c) Có d) Không

**13.** a) $f(S) = \{0,1,3\}$ b) $f(S) = \{0,1,3,5,8\}$

c) $f(S) = \{0,8,16,40\}$ d) $f(S) = \{1,12,33,65\}$

**15.** a) Giả sử $x$ và $y$ là hai phần tử phân biệt thuộc $A$. Vì $g$ là đơn ánh, $g(x)$ và $g(y)$ là các phần tử phân biệt thuộc $B$. Vì $f$ là đơn ánh $f(g(x)) = (f_o g)(x)$ và $f(g(y)) = (f_o g)(y)$ cũng là các phần tử phân biệt thuộc $C$. Do đó, $f_o g$ là đơn ánh.

b) Giả sử $y \in C$. Vì $f$ là toàn ánh, $y = f(b)$ với một $b$ nào đó thuộc $B$. Bây giờ vì $g$ là toàn ánh, nên $b = g(x)$ với một $x$ nào đó thuộc $A$. Do đó, $y = f(b) = f(g(x)) = (f_o g)(x)$. Suy ra $f_o g$ là toàn ánh.

**17.** Không. Ví dụ, giả sử $A = \{a\}$, $B = \{b, c\}$ và $C = \{d\}$ . Giả sử $g(a) = b$, $f(b) = d$ và $f(c) = d$. Khi đó, $f$ và $f_o g$ là toàn ánh, nhưng $g$ không toàn ánh.

**19.** $(f + g)(x) = x^2 + x + 3$ ; $(fg)(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$.

**21.** $f$ là đơn ánh vì $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1 + b = ax_2 + b \Leftrightarrow ax_1 = ax_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$.
$f$ cũng là toàn ánh vì $f((y-b)/a) = y$. Vậy $f$ là khả nghịch và $f^{-1}(y) = (y-b)/a$.

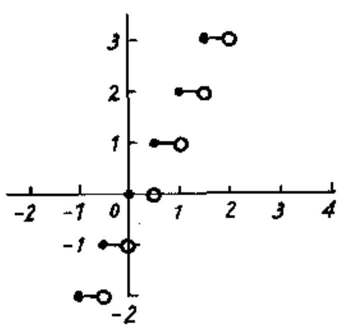
**23.** Cho $f(1) = a$, $f(2) = a$. Giả sử $S = \{1\}$ và $T = \{2\}$. Khi đó $f(S \cap T) = f(\varnothing) = \varnothing$, nhưng $f(S) \cap f(T) = a \cap a = a$.

**25.** a) $\{x \mid 0 \leq x < 1\}$ b) $\{x \mid -1 \leq x < 2\}$ c) $\varnothing$

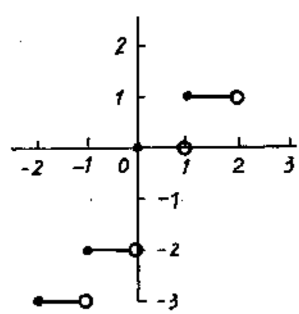
**27.** $f^{-1}(\overline{S}) = \{x \in A \mid f(x) \notin S\} = \overline{\{x \in A \mid f(x) \in S\}} = \overline{f^{-1}(S)}$

**29.** Giả sử $N \leq x \leq N + 1$. Nếu $N + 1/2 \leq x$ khi đó $\lfloor 2x \rfloor = 2N+1$, $\lfloor x \rfloor = N$ và $\lfloor x + 1/2 \rfloor = N+1$ sao cho $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$. Nếu $x < N + \frac{1}{2}$ khi đó $\lfloor 2x \rfloor = 2N$ và $\lfloor x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = N$ và lại có hằng đẳng thức trên.

**31.**




**33.**




**35.** $f^{-1}(y) = (y-1)^{1/3}$

**37.** a) $f_{A \cap B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ và
$x \in B \Leftrightarrow f_A(x) = 1$ và $f_B(x) = 1 \Leftrightarrow f_A(x) f_B(x) = 1$

b) $f_{A \cup B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$
*hoặc* $x \in B \Leftrightarrow f_A(x) = 1$ hoặc $f_B(x) = 1 \Leftrightarrow f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) f_B(x) = 1$

c) $f_{\overline{A}}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A \Leftrightarrow f_A(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - f_A(x) = 1$

d) $f_{A \oplus B}(x) = 1 \Leftrightarrow x \in A \oplus B \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \notin B)$
hoặc $(x \notin A$ và $x \in B) \Leftrightarrow f_A(x) + f_B(x) - 2f_A(x) f_B(x) = 1$

**39.** a) Miền là **Z** ; miền giá trị là **Z** ; miền xác định là tập các số nguyên khác không. Tập giá trị đối với nó $f$ không xác định là $\{0\}$ ; không phải là hàm toàn phần.

b) Miền là **Z**, miền giá trị là **Z**, miền xác định là **Z** ; Tập giá trị đối với nó $f$ không xác định là $\varnothing$. Là hàm toàn phần.

c) Miền là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, miền giá trị là $\mathbf{Q}$, miền xác định là $\mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} - \{0\})$ ; tập giá trị đối với nó $f$ không xác định là $\mathbf{Z} \times \{0\}$ ; không phải là hàm toàn phần.

d) Miền là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ; miền giá trị $\mathbf{Z}$ ; miền xác định là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ; tập các giá trị đối với nó $f$ không xác định là $\varnothing$ ; là hàm toàn phần.

e) Miền là $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ ; miền giá trị là $\mathbf{Z}$ ; miền xác định là $\{ (m,n) \mid m > n$ ; tập các giá trị đối với nó $f$ không xác định là $\{ (m,n) \mid m \leqslant n\}$ ; không phải là hàm toàn phần.

## Tiết 1.7

**1.** a) 3 b) -1 c) 787 d) 2639

**3.** a) $a_0 = 2, a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9$ b) $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 27, a_3 = 256$
c) $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$ d) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3.$

**5.** a) 20 b) 11 c) 30 d) 511

**7.** a) 1533 b) 510 c) 4923 d) 9842

**9.** a) 21 b) 78 c) 18 d) 18

**11.** $\sum_{j=1}^{n} (a_j - a_{j-1}) = a_n - a_o.$

**13.** a) $n^2$ b) $n(n+1)/2$

**15.** a) 0 b) 1680 c) 1 d) 1024

**17.** 34

**19.** a) đếm được, -1, -2, -3, -4, ... b) đếm được, 0, 2, -2, 4, -4, ...
c) không đếm được d) đếm được 0, 7, -7, 14, -14, ...

**21.** Giả sử $A - B$ là đếm được. Khi đó, vì $A = (A-B) \cup B$, nên các phần tử của $A$ có thể liệt kê thành một dãy bằng cách xếp xen kẽ các phần tử của $A - B$ và các phần tử của $B$. Điều này mâu thuẫn với tính không đếm được của $A$.

**23.** Giả sử $B$ là đếm được. Khi đó các phần tử của $B$ có thể được liệt kê như $b_1$, $b_2$, $b_3$, ... Vì $A$ là một tập con của $B$, nên khi trích ra dãy con của $\{b_n\}$ gồm các phần tử của $A$ ta sẽ được bảng liệt kê các phần tử của $A$. Vì $A$ là không đếm được, nên điều này là không thể.

**25.** Giả sử $A_1$, $A_2$, $A_3$ ... là các tập đếm được. Vì $A_i$ là đếm được nên ta có thể liệt kê các phần tử của nó thành dãy $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots$ Các phần tử của tập $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ có thể được liệt kê bằng cách liệt kê tất cả các số hạng $a_{ij}$ với $i + j = 2$, rồi tất cả các số hạng $a_{ij}$ với $i + j = 3$, sau đó tất cả số hạng $a_{ij}$ với $i + j = 4$, v.v...

**27.** Có một tập hữu hạn, cụ thể là $2^m$, xâu bit có chiều dài $m$. Tập tất cả các xâu bit là hợp của các xâu bit có chiều dài $m$ với $m = 0, 1, 2, \ldots$ Vì hợp của một số đếm được các tập đếm được là đếm được, nên có một số đếm được các xâu bit.

**29.** Đối với một bảng chữ cái hữu hạn bất kỳ, có một số hữu hạn các xâu có chiều dài $n$, với $n$ là một số nguyên dương bất kỳ. Theo kết quả của Bài tập 25 thì chỉ có một số hữu hạn các xâu từ một bảng chữ cái hữu hạn bất kỳ đã cho. Vì tập tất cả các chương trình máy tính trong một ngôn ngữ đặc biệt nào đó là một tập con của tập tất cả các xâu của một bảng chữ cái hữu hạn, mà theo kết quả Bài tập 22 là đếm được, suy ra tập tất cả các chương trình máy tính là đếm được.

**31.** Bài tập 29 chứng tỏ rằng chỉ có một số đếm được các chương trình máy tính. Do đó, chỉ có một số đếm được các hàm tính được. Vì như Bài tập 30 cho thấy có một số không đếm được các hàm nhưng không phải tất cả các hàm đều là tính được.

## Tiết 1.8

**1.** a) Có b) Có c) Không
d) Có e) Có f) Có

**3.** $x^4 + 9x^3 + 4x + 7 \leq 4x^4$ với mọi $x > 9$, vậy $x^4 + 9x^3 + 4x + 7$ là $O(x^4)$.

**5.** $(x^2 + 1)/(x + 1) = x-1 + 2/(x+1) < x$ với mọi $x > 1$, do đó $(x^2+1)/(x+1)$ là $O(x)$

**7.** a) 3 b) 3 c) 1 d) 0

**9.** $x^2 + 4x + 17 \leq 3x^3$ với mọi $x > 17$, do đó $x^2 + 4x + 17$ là $O(x^3)$. Tuy nhiên, nếu $x^3$ là $O(x^2 + 4x + 17)$, thì $x^3 < C(x^2 + 4x + 17) < 3Cx^2$ với một hằng số $C$ nào đó và đối với $x$ đủ lớn tức là $x < C$ đối với $x$ đủ lớn. Điều này là không thể, do đó $x^3$ không là $O(x^2 + 4x + 17)$.

**11.** $3x^4 + 1 \leq 4x^4 = 8(x^4/2)$ với mọi $x > 1$, do đó $3x^4 + 1$ là $O(x^4/2)$. Cũng tương tự, vì $x^4/2 \leq 3x^4 + 1$ với mọi $x > 0$, suy ra $x^4/2$ là $O(3x^4 + 1)$.

**13.** Vì $2^n < 3^n$ với mọi $n > 0$, suy ra $2^n$ là $O(3^n)$. Nếu $3^n$ là $O(2^n)$ thì đối với một $C$ nào đó, $3^n \leq C2^n$ với mọi $n$ đủ lớn, tức là $C \geq (\frac{3}{2})^n$ với mọi $n$ đủ lớn. Điều này không thể có, nên $3^n$ không là $O(2^n)$.

**15.** Đây là tất cả các hàm đối với chúng tồn tại các số thực dương $k$ và $C$ sao cho $|f(x)| < C$ với mọi $x > k$. Những hàm $f(x)$ này là giới nội đối với mọi $x$ đủ lớn.

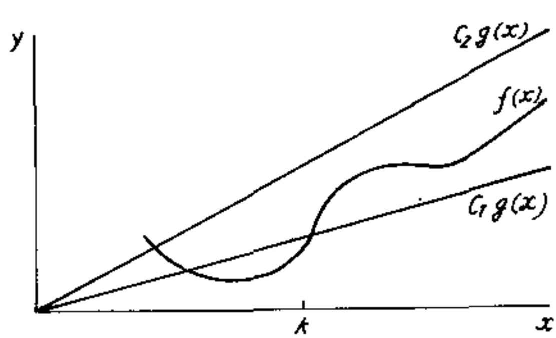
**17.** Tồn tại các hằng số $C_1$, $C_2$, $k_1$ và $k_2$ sao cho : $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ với $x > k_1$ và $|g(x)| \leq C_2|h(x)|$ với mọi $x > k_2$. Do đó, với $x > \max(k_1, k_2)$, suy ra $|f(x)| \leq C_1|g(x)| \leq C_1C_2|h(x)|$. Điều này chứng tỏ $f(x)$ là $O(h(x))$.

**19.** a) $O(n^3)$ b) $O(n^5)$ c) $O(n^3 n!)$

**21.** a) $O(n^2 \log n)$ b) $O(n^2(\log n)^2)$ c) $O(n^{2^n})$

**23.** Nếu $f(x)$ là $\Theta(g(x))$ thì tồn tại các hằng số $C_1$ và $C_2$ sao cho $C_1|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_2|g(x)|$. Từ đó suy ra $|f(x)| \leq C_2|g(x)|$ và $|g(x)| \leq (1/C_1)|f(x)|$ với mọi $x > k$. Do đó, $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(f(x))$. Ngược lại, giả sử $f(x)$ là $O(g(x))$ và $g(x)$ là $O(f(x))$, khi đó tồn tại các hằng số $C_1$, $C_2$, $k_1$ và $k_2$ sao cho : $|f(x)| \leq C_1|g(x)|$ với mọi $x > k_1$ và $|g(x)| \leq C_2|f(x)|$ với mọi $x > k_2$. Vì $C_2 > 0$, suy ra $(1/C_2)|g(x)| \leq |f(x)| \leq C_1|g(x)|$ với mọi $x > \max(k_1, k_2)$. Do đó, $f(x)$ là $\Theta(g(x))$.

**25.**



**27.** Vì $f(x)$ là $O(g(x))$, nên tồn tại các hằng số $C$ và $l$ sao cho $|f(x)| \leq C\ |g(x)|$ với mọi $x > l$. Từ đó, ta có $|f^k(x)| \leq C^k |g^k(x)|$ với mọi $x > l$. Vậy $f^k(x)$ là $O(g^k(x))$ bằng cách lấy hằng số là $C^k$.

**29.** Vì $f(x)$ và $g(x)$ là tăng và không giới nội, ta có thể giả thiết rằng $f(x) \geq 1$ và $g(x) \geq 1$ với các $x$ đủ lớn. Vì $f(x)$ là $O(g(x))$, nên tồn tại các hằng số $C$ và $k$ sao cho $f(x) \leq C\ g(x)$ với mọi $x > k$. Điều này kéo theo $\log f(x) \leq \log C + \log g(x) \leq 2 \log g(x)$ với $x$ đủ lớn. Từ đó suy ra $\log f(x)$ là $O(\log g(x))$.

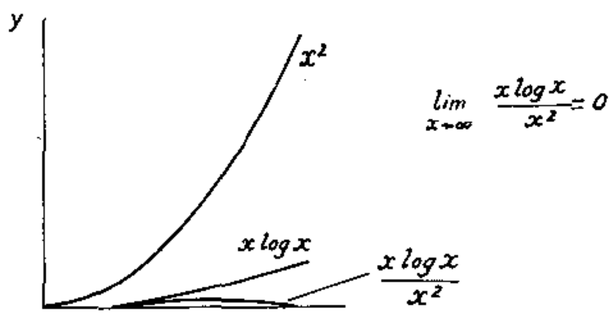
**31.** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\log x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x\ln 2} = 0$

(dùng qui tắc L'Hôpital)

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{2^x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{2^x\ln 2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2^x(\ln 2)^2} = 0$ (dùng qui tắc L'Hôpital)

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) = 1 \neq 0$

**33.**




**35.** Không. Hãy lấy $f(x) = 1/x^2$ và $g(x) = 1/x$.

**37.** a) Vì $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ suy ra $f(x)/g(x) < 1$ với các $x$ đủ lớn.

Do đó, $|f(x)| < |g(x)|$ với mọi $x > k$ ($k$ là một hằng số nào đó). Vì vậy, $f(x)$ là $O(g($

**39.** Vì $f_2(x)$ là $o(g(x))$, từ Bài tập 37 suy ra $f_2(x)$ là $O(g(x))$. Theo Hệ quả 1, ta có $f_1(x) + f_2(x)$ là $O(g(x))$.

**41.** Dễ dàng chứng minh được rằng $(n-i)(i+1) \geq n$ với $i = 0,1,\dots,n-1$. Do đó $(n!)^2 = (n.1)((n-1).2) \dots (2.(n-1))(1.n) \geq n^n$. Suy ra $2 \log n! \geq n \log n$.

## Bài tập bổ sung

**1.** a) $q \to p$ b) $q \wedge p$

c) $\neg q \vee \neg p$ d) $q \leftrightarrow p$.

**3.** a) Mệnh đề không thể sai nếu $\neg p$ không sai, vậy $p$ là đúng. Nếu $p$ đúng và $q$ đúng thì $\neg q \wedge (p \to q)$ là sai và mệnh đề đã cho là đúng. Nếu $p$ đúng và $q$ sai thì $p \to q$ là sai, do đó $\neg q \wedge (p \to q)$ là sai và mệnh đề đã cho là đúng.

b) Mệnh đề không thể sai nếu $q$ không sai. Nếu $q$ sai và $p$ đúng thì $(P \vee q) \wedge \neg p$ là sai và mệnh đề đã cho là đúng. Nếu $q$ sai và $p$ sai, thì $(p \vee q) \wedge \neg p$ là sai do đó mệnh đề đã cho là đúng.

**5.** $(p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge \neg q \wedge r \wedge s) \vee (\neg p \wedge q \wedge r \wedge s)$

**7.** a) **F** b) **T** c) **F**

d) **T** e) **F** f) **T**

**9.** Giả sử $\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ là đúng. Khi đó hoặc $Q(x)$ là đúng đối với một $x_o$ nào đó, trong trường hợp ấy $\exists x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ là đúng ; hoặc $P(x)$ là sai đối với một $x_o$ nào đó, trong trường hợp đó $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ là đúng. Ngược lại, giả sử $\exists x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$ là sai. Điều này có nghĩa là $\forall x\ (P(x) \wedge \neg Q(x))$ là đúng và kéo theo $\forall x\ P(x)$ và $\forall x\ (\neg Q(x))$ cũng đúng. Mặt khác $\forall x\ (\neg Q(x))$ tương đương với $\neg\exists x\ Q(x)$. Vậy $\forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x)$ là sai.

**11.** Không

**13.** $\forall x\ \forall z\ \exists y\ T(x,y,z)$ với $T(x,y,z)$ là câu "sinh viên $x$ đã học môn $y$ ở khoa $z$" trong đó các không gian là tập các sinh viên trong lớp, tập các môn học trong trường và tập các khoa của trường.

**15.** a) $\overline{A}$ b) $A \cap B$ c) $A - B$

d) $\overline{A} \cap \overline{B}$ e) $A \oplus B$

**17.** Có

**19.** $A \cap \overline{A} = x \mid x \in A \wedge x \notin A\} = \varnothing$

b) $A \cup \overline{A} = x \mid x \in A \vee x \notin A\ \} = U$

**21.** $A - (A - B) = A - (A \cap \overline{B}) = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})}$

$A \cap (\overline{A} \cup B) = (A \cap \overline{A}\ ) \cup (A \cap B) = \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B.$

**23.** Cho $A = \{1\}$, $B = \varnothing$, $C = \{1\}$. Khi đó, $(A - B) - C = \varnothing$ nhưng $A - (B - C) = \{1\}$.

**25.** Không. Ví dụ, cho $A = B = a,b$ , $C = \varnothing$ và $D = a$ . Khi đó, $(A - B) - (C - D) = \varnothing - \varnothing = \varnothing$ , nhưng $(A - c) - (B - D) = a,b - b = a$

**27.** a) $|\varnothing| \leq |A \cap B| \leq |A| \leq |A \cup B| \leq |U|$

b) $|\varnothing| \leq |A - B| \leq |A \oplus B| \leq |A \cup B| \leq |A| + |B|$

**29.** a) Có, không b) Có, không

c) $f$ khả nghịch với $f^{-1}(a) = 3$, $f^{-1}(b) = 4$, $f^{-1}(c) = 2$, $f^{-1}(d) = 1$ ; $g$ không khả nghịch.

**31.** Cho $f(a) = f(b) = 1$, $f(c) = f(d) = 2$, $S = a, c\}$, $T = b,d)$. Khi đó, $f(S \cap T) = f(\varnothing) = \varnothing$ , nhưng $f(S) \cap f(T) = \{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\}$.

**33.** a) 60 b) 6144 c) 20 d) 0

**35.** Giả sử $P_n$ là tập hợp các đa thức có bậc tối đa là $n$ với hệ số nguyên có giá trị tuyệt đối không vượt quá $n$. Vậy $P_n$ là hữu hạn với mọi $n$. Vì một đa thức bất kỳ bậc $n$ có nhiều nhất là $n$ nghiệm phân biệt nên chỉ có một số hữu hạn các số đại số là nghiệm của các đa thức thuộc $P_n$. Vì tập các số đại số là hợp của các tập nghiệm của những đa thức thuộc $P_n$ với $n = 1,2,3, \ldots$ nên theo kết quả Bài tập 25 ở Tiết 1.7 nó là tập đếm được.

**37.** $O(x^2 2^x)$

**39.** Chú ý rằng

$$\frac{n!}{2^n} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{2} \cdots \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{2} > \frac{n}{2} \cdot 1 \cdot 1 \ldots 1 \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$$

Vì $n!/2^n$ tăng vô hạn khi $n$ tăng, nên $n!$ không thể bị chặn bởi $C.2^n$ với $C$ là một hằng số và $n$ đủ lớn. Do đó, n! là $O(2^n)$.

# CHƯƠNG II

## Tiết 2.1

1. $max := 1$, $i := 2$,

   $max := 8$, $i := 3$,

   $max := 12$, $i := 4$, $i := 5$, $i := 6$, $i := 7$,

   $max := 14$, $i := 8$, $i := 9$, $i := 10$, $i := 11$

3. **procedure** sum($a_1$ ..., $a_n$ : integers)

   $sum := a_1$

   **for** i := 2 **to** $n$ $sum := sum + a_i$

   {*sum* có giá trị cần tìm}

5. **procedure** *interchange* ($x,y$ : real numbers)

   $z := x$ $x := y$ $y := z$

   (Số cực tiểu các phép gán cần dùng là ba).

7. **Tìm kiếm tuyến tính** $i := 1$, $i := 2$, $i := 3$, $i := 4$, $i := 5$, $i := 8$, $i := 7$, location := 7 ; tìm kiếm nhị phân ; $i := 1$, $l := 8$, $m := 4$, $i := 5$, $m := 6$, $i := 7$, $m := 7$, $l := 7$, location := 7

9. **procedure** *insert*($x, a_1 a_2 ... a_n$ :integers)

   {dãy xếp theo thứ tự $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$}

   $a_{n+1} := x + 1$

   $i := 1$

   **while** $x > a_i$

   $\quad i := i + 1$

   **for** $l := 0$ **to** $n - i$

   $\quad a_{n-l+1} := a_{n-l}$

   $\quad a_i := x$

   $\quad${$x$ đã được chèn vào vị trí đúng}

11. **procedure** *first largest* ($a_1 ... a_n$ :integers)

    $max := a_1$

    $location := 1$

    **for** $i := 2$ **to** $n$

    $\quad$**begin**

    $\quad$**if** $max < a_i$ **then**

    $\quad$**begin**

    $\qquad max := a_i$

    $\qquad location := i$

    $\quad$**end**

    **end**

13. **procedure** *mean-median-max-min*($a,b,c$ :integers)

    $mean := (a + b + c)/3$

    {sáu cách sắp khác nhau của $a,b,c$ đối với ≥ sẽ được xử lý riêng biệt}

    **if** $a > b$ **then**

```
    begin
        if b > c then
        median := b ; max :=a ; min :=c
    end
    (Phần còn lại của thuật toán là tương tự).
```

**15.** **procedure** *first-three* $(a_1a_2...a_n$ :integers)

```
    if a1 > a2 then đổi chỗ a1 và a2
        if a2 > a3 then đổi chỗ a2 và a3
        if a1 > a2 then đổi chỗ a1 và a2
```

**17.** **procedure** *onto(f* : hàm từ A đến B với

```
    A = {a1,...,an}, B = {b1,...,bm} a1,...,an, b1,...,bm are integers)
    for i := 1 to n
        hit(bi) := 0
    count := 0
    for i := 1 to n
        if hit(f(ai)) = 0 then
        begin
            hit(f(ai)) := 1
            count := count + 1
        end
    if count = m then onto := true
    else onto := false
```

**19.** **procedure** *ones(a* : xâu bit, $a = a_1a_2 ... a_n$)

```
    ones := 0
    for i := 1 to n
    begin
        if ai := 1 then
            ones := ones + 1
    end {ones là số các số 1 trong xâu a
```

**21.** **procedure** *ternary search(s :* integer, $a_1, a_2, ... a_n$ : increasing integers)

```
    i := 1 l := n
    while i < l - 1
    begin
        l = ⌊(i + l )/3⌋
        u = ⌊2(i + l )/3⌋
        if x > au then i := u + 1
        else   if x > al then
                begin
                    i := l + 1
                    l := u
                end
                else l := l
    end
    if x = ai then location := i
    else   if x = aj then location := l
           else location := 0
    {location là chỉ số của số hạng bằng x (0 nếu không tìm thấy)}
```

**23.** **procedure** *find a mode*$(a_1a_2...a_n$ : nondacraesing integers)

```
    modecount := 0
```

```
    i := 1
    while i ≤ n
    begin
        value := a_i
        count := 1
        while i ≤ n and a_i = value
        begin
            count := count + 1
            i := i + 1
        end
        if count > modecount then
        begin
            modecount := count
            mode := value
        end
    end {mode là giá trị đầu tiên thường gặp nhất }
```

**25.** **procedure** *find duplicate*($a_1, a_2, ..., a_n$ : integers)

```
    location := 0
    i := 2
    while i ≤ n và location = 0
    begin
        j := 1
        while j < i và location = 0
            if a_i = a_j then location := i
            else j := j + 1
        i := i + 1
    end {location là chỉ số của giá trị đầu tiên lặp lại giá trị trước trong dãy}
```

**27.** **procedure** *find decrease*($a_1, a_2, ..., a_n$ : positive integers)

```
    location := 0
    i := 2
    while i ≤ n và location = 0
        if a_i < a_{i-1} then location := i
        else i := i + 1
    {location là chỉ số của giá trị đầu tiên nhỏ hơn giá trị ngay trước nó}
```

## Tiết 2.2

**1.** $2n - 1$

**3.** Tuyến tính

**5.** $O(n)$

**7.** **a)** *power* : 1, $y := 1$ ; $i := 1$, *power* := 2, $y := 3$ ; $i := 2$, *power* := 4, $y := 15$
**b)** $2n$ phép nhân và n phép cộng

**9.** **a)** $2^{10^9} \sim 10^{3 \times 10^8}$ **b)** $10^9$ **c)** $3.96 \times 10^7$
**d)** $3.16 \times 10^4$ **e)** 29 **f)** 12

**11.** **a)** 36 năm **b)** 13 ngày **c)** 19 phút

**13.** Số trung bình các phép so sánh là : $(3n + 4)/2$.

**15.** $O(\log n)$

17. $O(n)$
19. $O(n^2)$
21. $O(n)$

## Tiết 2.3

1. **a)** Có **b)** Không **c)** Có **d)** Không
3. Giả sử rằng $a|b$. Khi đó tồn tại một số nguyên $k$ sao cho $ka = b$. Vì $a(ck) = bc$, suy ra $a|bc$.
5. Nếu $a|b$ và $b|a$, thì tồn tại các số nguyên $c$ và $d$ sao cho $b = ac$ và $a = bd$. Do đó, $a = acd$. Vì $a \neq 0$, suy ra $cd = 1$ Vậy hoặc $c = d = 1$ hoặc $c = d = -1$ Do đó, hoặc $a = b$, hoặc $a = -b$.
7. Vì $ac|bc$, nên tồn tại số nguyên $k$ sao cho $ack = bc$. Do đó $ak = b$, vậy $a|b$.
9. **a)** 2, 5 **b)** -11, 10 **c)** 34, 7
   **d)** 77, 0 **e)** 0, 0 **f)** 0, 3 **g)** -1, 2 h) 4,0
11. $2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.
13. Giả sử rằng $\log_2 3 = a/b$, với $a, b \in \mathbf{Z}^+$ và $b \neq 0$. Khi đó $2^{a/b} = 3$, sao cho $2^a = 3^b$. Điều này vi phạm định lý cơ bản của số học. Do đó, $\log_2 3$ là một số vô tỷ.
15. **a)** Có **b)** Không **c)** Có **d)** Có
17. Nếu $a$ **mod** $m = b$ **mod** $m$, thì $a$ và $b$ có cùng số dư khi chia cho $m$. Do đó, $a = q_1m + r$ và $b = q_2m + r$ với $0 \leq r < m$. Từ đó suy ra $a - b = (q_1 - q_2)m$, nghĩa là $m|(a - b)$. Do đó $a \equiv b \pmod m$.
19. Giả sử $n$ không phải là số nguyên tố, sao cho $n = ab$, với $a$ và $b$ là các số nguyên lớn hơn 1 Vì $a > 1$ nên theo hằng đẳng thức cho trong *gợi ý*, $2^a - 1$ là một ước số lớn hơn 1 của $2^n - 1$. Ước số thứ hai trong hằng đẳng thức đó cũng lớn hơn 1, vậy $2^n - 1$ không phải là số nguyên tố.
21. **a)** 2 **b)** 4 **c)** 12
23. $\varnothing\ (p^k) = p^k - p^{k-1}$.
25. Tồn tại một số $b$ với $(b-1)k < n \leq bk$. Do đó $(b-1)k \leq n-1 < bk$. Chia cho $k$, ta nhận được : $b-1 < n/k \leq b$ và $b-1 \leq (n-1)/k < b$. Từ đó suy ra $\lceil n/k \rceil = b$ và $\lfloor (n-1)/k \rfloor = b-1$
27. **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 9
29. **a)** Không **b)** Không **c)** Có **d)** Không
31. Vì $min(x,y) + max(x,y) = x + y$, nên số mũ của $p_i$ trong phân tích thừa số nguyên tố của ƯCLN $(a,b)$. BCNN $(a,b)$ là tổng số mũ của $p_i$ trong phân tích ra thừa số nguyên tố của $a$ và $b$.
33. Giả sử $m = tn$. Vì $a \equiv b \pmod m$, nên tồn tại một số nguyên $s$ sao cho $a = b + sm$. Do đó, $a = b + (st)n$, sao cho $a \equiv b \pmod n$.
35. Cho $m = c = 2$, $a = 0$ và $b = 1$ Khi đó $0 = ac \equiv bc = 2 \pmod 2$, nhưng $0 = a \not\equiv b = 1 \pmod 2$.
37. Vì $a \equiv b \pmod m$, nên tồn tại một số nguyên $s$ sao cho $a = b + sm$ hay $a - b = sm$. Khi đó, $a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \ldots + ab^{k-2} + b^{k-1})$, $k \geq 2$, cũng là bội số của $m$. Từ đó suy ra $a^k \equiv b^k \pmod m$.
39. **a)** 7, 19, 7, 7, 18, 0

**b)** Lấy chỗ dỗ khả dụng tiếp sau theo **mod** 31

**41.** 2, 8, 7, 10, 8, 2, 8, 7, 10, 8 ...

**43.** **a)** *GR QRW SDVV JR*

**b)** *QB ABG CNFF TB* **c)** *QX UXM AHJJ ZX.*

## Tiết 2.4

**1.** **a)** 6 **b)** 3 **c)** 11 **d)** 3

**3.** 8

**5.** **a)** 111 00111 **b)** 100 01101 10100 **c)** 10 11111 01011 01100

**7.** **a)** 31 **b)** 513 **c)** 341 **d)** 26 896

**9.** Đổi mỗi chữ số thập lục phân thành một khối bốn bit

**11.** **a)** 10 00000 01110 **b)** 10 01101 01101 01011

**c)** 1 01010 11101 11010 **d)** 110 11110 11111 01011 00111 01101

**13.** Khai triển nhị phân của một số nguyên là một tổng duy nhất như vậy.

**15.** Giả sử $a = (a_{n-1}\ a_{n-2} \ldots a_1a_0)_{10}$. Khi đó : $a = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \ldots + 10a_1 + a_0$ $\equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 + a_0$ (mod 3), vì $10^j \equiv 1$ (mod 3) với mọi số nguyên không âm $j$. Từ đó suy ra $3 \mid a$ nếu và chỉ nếu tổng các chữ số thập phân của $a$ chia hết cho 3.

**17.** Giả sử $a = (a_{n-1}a_{n-2} \ldots a_1a_0)_2$. Khi đó $a = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + \ldots + 2^{n-1}\ a_{n-1} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \pm a_{n-1}$ (mod 3). Từ đó suy ra $a$ chia hết cho 3 nếu và chỉ nếu tổng các chữ số nhị phân ở vị trí chẵn trừ đi tổng các chữ số nhị phân ở vị trí lẻ chia hết cho 3.

**19.** **a)** -6 **b)** 13 **c)** -14 **d)** 0

**21.** Phần bù đối với một của một tổng được tìm bằng cách cộng phần bù đối với một của hai số nguyên trừ số nhớ ở bit trái cùng được dùng như số nhớ tới bit cuối cùng của tổng.

**23.** $4n$

**25.** **procedure** *Cantor*($x$ : positive integer)

```
n := 1 ; f := 1
while (n + 1) * f ≤ x
begin
    n := n + 1
    f := f * n
end
y := x
while n > 0
begin
    a_n := ⌊y/f⌋
    y := y - a_n * f
    f := f/n
    n := n - 1
end {x = a_n n! + a_{n-1}(n - 1)! + ... + a_1 1!}
```

**27.** bước một : $c = 0$, $d = 0$, $s_0 = 1$ ;

bước hai : $c = 0$, $d = 1$, $s_1 = 0$ ;

bước ba : $c = 1$, $d = 1$, $s_2 = 0$ ;

bước bốn : $c = 1, d = 1, s_3 = 0$ ;
bước năm : $c = 1, d = 1, s_4 = 1$ ;
bước sáu : $c = 1, s_5 = 1$

**29.** **procedure** *subtract(a,b* : positive integers,$a > b$,
$a = (a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_2$
$b = (b_{n-1}\, b_{n-2} \ldots b_1 b_0)_2)$
**B** := 0 {**B** is the borrow}
**for** $i$ := 0 **to** $n$-1
**begin**
**if** $a_j \geq b_j$ + **B** **then**
**begin**
$s_j := a_j - b_j$ - **B**
**B** := 0
**end**
**else**
**begin**
$s_j := a_j + 2 - b_j$ - **B**
**B** := 1
**end**
**end** $\{S_{n-1}\, S_{n-2} \ldots S_1 S_0)_2$ là hiệu

**31.** **procedure** *compare(a,b* : positive integers and
$a = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_2$,
$b = (b_n b_{n-1} \ldots b_1 b_0)_2)$
$k := n$
**while** $a_k = b_k$ và $k > 0$
$k := k - 1$
**if** $a_k = b_k$ **then** print "*a* bằng *b*"
**if** $a_k = b_k$ **then** print "*a* lớn hơn *b*"
**if** $a_k = b_k$ **then** print "*a* bé hơn *b*"

**33.** $O(\log n)$

## *Tiết 2.5*

**1.** **a)** 3 x 4 **b)** $\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$ **c)** [2 0 4 6]

**d)** 1 **e)** $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 4 & 3\\3 & 6 & 7\end{bmatrix}$

**3.** **a)** $\begin{bmatrix}1 & 11\\2 & 18\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix}2 & -2 & -3\\1 & 0 & 2\\9 & -4 & 4\end{bmatrix}$

**5.** $\begin{bmatrix}9/5 & -6/5\\-1/5 & 4/5\end{bmatrix}$

**7.** $\mathbf{0} + \mathbf{A} = [0 + a_{ij}] = [a_{ij} + 0] = \mathbf{0} + \mathbf{A}$

**9.** $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

**11.** Số hàng của **A** bằng số cột của **B** và số cột của **A** bằng số hàng của **B**

**13.** $$\mathbf{A(BC)} = \left[\sum_q a_{iq}\left(\sum_r b_{qr}c_{rl}\right)\right] = \left[\sum_q \sum_r a_{iq}b_{qr}c_{rl}\right] = \left[\sum_r \sum_q a_{iq}b_{qr}c_{rl}\right] =$$
$$= \left[\sum_r \left(\sum_q a_{iq}b_{qr}\right)c_{rl}\right] = \mathbf{(AB)C}.$$

**15.** $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

**17.** **a)** Giả sử $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ và $\mathbf{B} = [b_{ij}]$. Khi đó, $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = [a_{ij} + b_{ij}]$. Ta có $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t$ $[a_{ji}+b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$

**b)** Dùng ký hiệu như trong (a), ta có :
$$\mathbf{B}^t\mathbf{A}^t = \left[\sum_q b_{qi}a_{jq}\right] = \left[\sum_q a_{jq}b_{qi}\right] = (\mathbf{AB})^t$$
Vì phần tử thứ $(i,l)$ của nó chính là phần tử thứ $(l,i)$ của **AB**

**19.** Kết quả đó tìm được vì :
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & -d \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} =$$
$$= (ad-bc)\mathbf{I} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

**21.** $\mathbf{A}^n(\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{A}(\mathbf{A} \ldots (\mathbf{A}\ (\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1})\mathbf{A}^{-1}) \ldots \mathbf{A}^{-1})\ \mathbf{A}^{-1}$ theo luật kết hợp. Vì $\mathbf{A}\ \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, tính từ trong ra ngoài cho thấy $\mathbf{A}^n(\mathbf{A}^{-1})^n = \mathbf{I}$. Tương tự, $(\mathbf{A}^{-1})^n\ \mathbf{A}^n = \mathbf{I}$. Do đó, $(\mathbf{A}^n)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^n$.

**23.** Có $m_2$ phép nhân cần dùng để tìm mỗi trong số $m_1m_3$ phần tử của tích. Do đó, cần phải dùng cả thảy $m_1m_2m_3$ phép nhân

**25.** $\mathbf{A}_1((\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3)\mathbf{A}_4)$.

**27.** $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = -2$

**29.** **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

**31.** **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**33.** **a)** $\mathbf{A} \vee \mathbf{B} = [a_{ij} \vee b_{ij}] = [b_{ij} \vee a_{ij}] = \mathbf{B} \vee \mathbf{A}$

**b)** $\mathbf{A} \wedge \mathbf{B} = [a_{ij} \wedge b_{ij}] = [b_{ij} \wedge a_{ij}] = \mathbf{B} \wedge \mathbf{A}$

**35.** **a)** $$\mathbf{A} \vee (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = [a_{ij}] \vee [b_{ij} \wedge c_{ij}] = [a_{ij} \vee (b_{ij} \wedge c_{ij})]$$
$$= [(a_{ij} \vee b_{ij}) \wedge (a_{ij} \vee c_{ij})] = [a_{ij} \vee b_{ij}] \wedge [a_{ij} \vee c_{ij}]$$
$$= (\mathbf{A} \vee \mathbf{B}) \wedge (\mathbf{A} \vee \mathbf{C})$$

**b)** $$\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \vee \mathbf{C}) = [a_{ij}] \wedge [b_{ij} \vee c_{ij}] = [a_{ij} \wedge (b_{ij} \vee c_{ij})]$$
$$= [(a_{ij} \wedge b_{ij}) \vee (a_{ij} \wedge c_{ij})] = [a_{ij} \wedge b_{ij}] \vee [a_{ij} \wedge c_{ij}]$$
$$= (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) \vee (\mathbf{A} \wedge \mathbf{C})$$

**37.** $$\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \odot \mathbf{C}) = \left[\bigvee_q a_{iq} \wedge \left(\bigvee_r (b_{qr} \wedge c_{rl})\right)\right] = \left[\bigvee_q \bigvee_r \left(a_{iq} \wedge b_{qr} \wedge c_{rl}\right)\right]$$

$$= \left[ \bigvee_{r} \bigvee_{q} \left( a_{iq} \wedge b_{qr} \wedge c_{rl} \right) \right] = \left[ \bigvee_{r} \left( \bigvee_{q} (a_{iq} \wedge b_{qr}) \right) \wedge c_{rl} \right]$$
$$= (\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \odot \mathbf{C})$$

## Bài tập bổ sung

1. **a) procedure** *last max*($a_1 ... a_n$ : integers)

```
max := a1 last := 1
i := 2
while i ≤ n
begin
    if ai ≥ max then
    begin
        max := ai
        last := i
    end
    i := i + 1
end{ last là vị trí lần xuất hiện cuối cùng của số nguyên lớn nhất trong bảng
```

**b)** $2n - 1 = O(n)$ phép so sánh.

3. **a) procedure** *pair zeros*($b_1 b_2 ... b_n$ : xâu bit

```
n ≥ 2)
x := b1
y := b2
k := 2
while (k < n và (x ≠ 0 hoặc y ≠ 0))
begin
    k := k + 1
    x := y
    y := bk
end
if (x = 0 và y = 0) then print "YES"
else print "NO"
```

**b)** $O(n)$ phép so sánh

5. 5,22, -12, -29

7. Vì $ac \equiv bc \pmod m$, nên tồn tại một số nguyên $k$ sao cho $ac = bc + km$. Do đó, $a - b = km/c$. vì $a - b$ là một số nguyên nên $c \mid km$. Giả sử $d$ = ƯCLN $(m, c)$, ta có thể viết $c = d.e$. vì $m/d$ không chia hết cho ước nào của $e$, nên $d \mid m$ và $e \mid k$. Vậy, $a - b = (k/e)(m/d)$ với $k/e \in \mathbf{Z}$ và $m/d \in \mathbf{Z}$. Do đó $a \equiv b \pmod{m/d}$

9. 1

11. 1

13. $(a_n a_{n-1} ... a_1 a_0)_{10} = \sum_{k=0}^{n} 10^k a_k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \pmod 9$, vì $10^k \equiv 1 \pmod 9$ với mọi $k$ là số nguyên không âm.

15. **a)** Không nguyên tố cùng nhau

**b)** Nguyên tố cùng nhau

c) Nguyên tố cùng nhau

d) Nguyên tố cùng nhau.

17. a) Hàm giải mã là $g(q) = \bar{a}(q - b)$ **mod** 26 vớ $\bar{a}$ là nghịch đảo của $a$ theo môđun 26

b) PLEASE SEND MONEY (Làm ơn gửi tiền !)

19. $x \equiv 28 \pmod{30}$

21. $\mathbf{A}^{4n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{4n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{A}^{4n+2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^{4n+3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

for $n \geqslant 0$

23. Giả sử rằng

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Cho $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Vì $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, suy ra $c = 0$ và $a = d$.

Cho $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Vì $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, suy ra $b = 0$. Do đó

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\mathbf{I}$.

25. **procedure** *triangular matrix multiplication* (**A**,**B** : upper triangular $n \times n$ matrices, $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$)

```
for i := 1 to n
begin
    for j := i to n
    begin
        c_ij := 0
        for k := i to j
            c_ij = c_ij + a_ik b_kj
    end
end
```

27. $(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AIA}^{-1} =$
$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$. Tương tự, $(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1})(\mathbf{AB}) = \mathbf{I}$. Do đó
$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

29. a) **Let** $\mathbf{A} \odot \mathbf{0} = [b_{ij}]$. Khi đó $b_{ij} = (a_{i1} \wedge 0) \vee \ldots \vee (a_{ip} \wedge 0) = 0$.
Do đó $\mathbf{A} \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Tương tự $\mathbf{0} \odot \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

b) $\mathbf{A} \vee \mathbf{0} = [a_{ij} \vee 0] = [a_{ij}] = \mathbf{A}$. Do đó, $\mathbf{A} \vee \mathbf{0} = \mathbf{A}$.
Tương tự $\mathbf{0} \vee \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

c) $\mathbf{A} \wedge \mathbf{0} = [a_{ij} \wedge 0] = [0] = \mathbf{0}$. Do đó $\mathbf{A} \wedge \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
Tương tự $\mathbf{0} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

# CHƯƠNG 3

## *Tiết 3.1*

**1.** **a)** Cộng **b)** Rút gọn
**c)** Modus ponens **d)** Modus tollens
**e)** Tam đoạn luận giả định

**3.** **a)** Nguỵ biện ngộ nhận kết luận
**b)** Nguỵ biện dùng ngay câu hỏi
**c)** Suy luận có cơ sở vì dùng modus tollens
**d)** Suy luận có cơ sở vì dùng tam đoạn luận phân biệt
**e)** Nguỵ biện phủ nhận giả thiết.

**5.** Mệnh đề là hiển nhiên đúng vì 0 không là số nguyên dương. Cách chứng minh rỗng.

**7.** P(1) là đúng vì $(a+b)^1 = a+b \geq$ a+b. Chứng minh trực tiếp.

**9.** Cho $n=2k+1$ và $m=2l+1$ là các số lẻ. Khi đó $n+m=2(k+l+1)$ là chẵn.

**11.** Giả sử $r$ là hữu tỷ và $i$ là vô tỷ và $s=r+i$ là hữu tỷ. Khi đó theo Bài tập 10, $s+(-r) = i$ là hữu tỷ, điều này vô lý.

**13.** Vì $\sqrt{2}.\sqrt{2} = 2$ là hữu tỷ và $\sqrt{2}$ là vô tỷ, tích của hai số vô tỷ không nhất thiết vô tỷ.

**15.** $41^2 - 41 + 41 = 41^2$ là hợp số, vì thế $n^2 - n + 41$ *không phải luôn luôn là nguyên tố.*

**17.** Giả sử rằng $3^{1/3} = a/b$ trong đó $a,b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$, và ƯCLN$(a,b) = 1$. Khi đó $3 = a^3/b^3$, hay $3b^3 = a^3$. Vì thế $3 \mid a^3$ và điều này xảy ra chỉ nếu $3 \mid a$. Gọi $a = 3m$. Khi đó $3b^3 = 27m^3$, hay $b^3 = 9m^3$. Vì thế $3 \mid b^3$, chứng tỏ $3 \mid b$. Điều này là mâu thuẫn với giả thiết ƯCLN$(a,b) = 1$

**19.** Nếu $x \leq y$ khi đó $max(x,y) + min(x,y) = y+x = x+y$. Nếu $x \geq y$ khi đó $max(x,y) + min(x,y) = x+y$. Vì chỉ có hai trường hợp, nên đẳng thức luôn luôn đúng.

**21.** Có 4 trường hợp:
*Trường hợp 1 :* $x \geq 0$ và $y \geq 0$. Khi đó $|x|+|y| = x+y = |x+y|$.
*Trường hợp 2 :* $x<0$ và $y<0$. Khi đó $|x|+|y| = -x+(-y) = -(x+y) = |x+y|$ vì $x+y<0$.
*Trường hợp 3 :* $x \geq 0$ và $y<0$. Khi đó $|x|+|y| = x+(-y)$. Nếu $x \geq -y$ khi đó $|x+y| = x+y$. Nhưng vì $y<0$, $-y>y$ do vậy $|x|+|y| = x+(-y) > x+y = |x+y|$. Nếu $x<-y$ khi đó $|x+y| = -(x+y) = -x+(-y)$. Nhưng bởi vì $x \geq 0$, $x \geq -x$ vì thế $|x|+|y| = x + (-y) \geq -x + (-y) = |x+y|$. *Trường hợp 4 :* $y \geq 0$ và $x<0$. Giống như trường hợp 3, chỉ cần trao đổi vai trò của $x$ và $y$ cho nhau.

**23.** Trước tiên giả sử rằng $n$ là lẻ, tức là $n=2k+1$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Khi đó $5n+6=5(2k+1)+6 = 10k+11 = 2(5k+5)+1$. Vì thế $5n+6$ là lẻ. Để chứng minh trường hợp ngược lại ta giả sử $n$ là chẵn, hay $n=2k$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Khi đó $5n+6=5.2k+6 = 2(5k+3)$ vậy $5n+6$ là chẵn. Vậy $n$ là lẻ nếu và chỉ nếu $5n+6$ *lẻ*.

**25.** $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$ nếu và chỉ nếu $p \mid (a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$. Vì $p$ là số nguyên tố nên $p \mid (a+b)$ hoặc $p \mid (a-b)$. Điều này tương đương với $a \equiv b \pmod{p}$ hoặc $a \equiv -b \pmod{p}$.

**27.** Mệnh đề này là đúng. Giả sử rằng $m$ không là 1 và cũng không là -1 Khi đó $mn$ có nhân tử $m$ lớn hơn 1 Mặt khác, $mn = 1$, và 1 không có nhân tử như thế, nên $m = 1$ hoặc $m = -1$ Trường hợp đầu cho ta $n=1$, trường hợp sau $n = -1$, vì $n = 1/m$.

**29.** Số nguyên 3 không là tổng của các bình phương của hai số nguyên, vì thế mệnh đề là sai.

**31.** Chúng ta sẽ chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tất cả các số $a_1, a_2, ...a_n$ đều nhỏ hơn $A$, trong đó $A$ là trung bình cộng của các số này. Khi đó $a_1 + a_2 + ... + a_n < nA$. Từ đó suy ra $(a_1 + a_2 + ... + a_n)/n < A$, đó là điều vô lý.

**33.** Chúng ta sẽ chỉ ra rằng 4 mệnh đề là tương đương bằng cách chỉ ra rằng (*i*) suy ra (*ii*), (*ii*) suy ra (*iii*) suy ra (*iv*), (*iv*) suy ra (*i*). Trước tiên, giả sử rằng $n$ là chẵn. Khi đó $n=2k$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Khi đó $n+1 = 2k+1$ vì thế $n+1$ là lẻ. Tức là (*i*) suy ra (*ii*). Giả sử $n+1$ là lẻ, túc là $n+1 = 2k+1$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Khi đó $3n+1 = 2n + (n+1) = 2(n+k)+1$, vậy $3n+1$ là lẻ. Hay (*ii*) suy ra (*iii*). Tiếp theo giả sử $3n+1$ là lẻ túc là $3n+1 = 2k+1$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Khi đó $3n=(2k+1)-1 = 2k$, vậu $3n$ là chẵn. Điều này chứng tỏ (*iii*) suy ra (*iv*). Cuối cùng, giả sử $n$ là không chẵn. Khi đó $n$ là lẻ, túc là $n=2k+1$ với $k$ là một số nguyên nào đó. Khi đó $3n=2(2k+1) = 6k+3 = 2(3k+1)+1$, vậy $3n$ là lẻ. Điều này kết thúc cách chứng minh gián tiếp rằng (*iv*) suy ra (*i*).

**35.** Ba số nguyên 3, 5 và 7 là ba số nguyên tố có dạng mong muốn.

**37.** Theo tiền đề thứ hai có một con sư tử nào đó không uống cà phê. Gọi Leo là con vật như vậy. Bằng phép rút gọn ta biết được Leo là sư tử. Và nhờ modus ponens từ tiền đề thứ nhất là biết được Leo là thú dữ và không uống cà phê. Theo lượng hóa tồn tại, thì tồn tại các thú dữ không uống cà phê, tức là có một số thú dữ không uống cà phê.

**39.** Giả sử ta có $n+1$ số nguyên tố đầu tiên $p_1, p_2, ... p_{n+1}$. Khi đó $p_1, p_2 ... p_{n+1}$ chia hết cho nhiều hơn $n$ số nguyên tố.

**41.** Giả sử rằng $p_1 p_2 ... p_n$ là các ấố nguyên tố đồng dư 3 theo mô-đun 4, trừ 3. Giả sử $q = 4p_1 . p_2 ... p_n + 3$. Khi đó $q \equiv 3 \pmod 4$, và $q$ không chia hết cho $p_i$, $i = 1,2,...n$ hoặc 3. Vì $q$ phải có ít nhất một nhân tử nguyên tố đồng dư 3 theo modun 4, nên có số nguyên tố loại này không thuộc danh sách của ta. Đó là cách chứng minh tồn tại không kiến thiết.

**43.** Giả sử rằng $p_1 \to p_4 \to p_2 \to p_5 \to p_3 \to p_1$. Để chứng minh rằng một một trong các mệnh đề này suy ra bất kỳ mệnh đề nào khác, hãy dùng phép tam đoạn luận giả định.

**45.** Cho $a = \sqrt{2}$ và $b = \sqrt{2}$. Nếu $c = a^b$ là hữu tỷ, bài toán được chứng minh. Nếu $c$ vô tỷ, thì $c^b = (a^b)^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ là hữu tỷ. Đó là cách chứng minh không kiến thiết.

**47.** Mọi quân đô-mi-nô khi đặt lên bàn cờ sẽ phủ được đúng một ô trắng và một ô đen. Khi đó một tập các quân đô-mi-nô sẽ phủ một số ô trắng bằng đúng số ô đen. Vì ta cắt bỏ hai góc đối diện của bàn cờ nên hoặc là số ô trắng nhiều hơn số ô đen 2 đơn vị hoặc số ô đen nhiều hơn số ô trắng 2 đơn vị. Do vậy không thể phủ toàn bộ bàn cờ bị cắt bỏ hai góc đối diện bằng các quân đô-mi-nô được.

**49.** Có cơ sở.

## *Tiết 3.2*

**1.** $n(n+1)$

**3.** Gọi $P(n)$ là "$\sum_{j=0}^{n} 3.5^j = 3(5^{n+1} - 1)/4$". *Bước cơ sở* $P(0)$ là đúng vì $\sum_{j=0}^{0} 3.5^j = 3 = 3(5^1 - 1)/4$.

*Bước quy nạp* : Giả sử $\sum_{j=0}^{n} 3.5^j = 3.(5^{n+1} - 1)/4$. Khi đó $\sum_{j=0}^{n+1} 3.5^j = 3.(5^{n+1} -1)/4 + 3.5^{n+1} = 3.(5^{n+2} -1)/4$.

**5.** Khi khảo sát các giá trị nhỏ của $n$ ta phỏng đoán $P(n)$ là đúng với $P(n)$ là "$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{2^n - 1}{2^n}$". *Bước cơ sở* $P(1)$ là đúng vì $\frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1}$. *Bước quy nạp* : Giả sử $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{2^n - 1}{2^n}$. Khi đó $\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^j} = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j}\right) + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n - 1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}$.

**7.** Gọi $P(n)$ là "$\sum_{j=1}^{n} j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$". Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng vì $\sum_{j=1}^{1} j^2 = 1 = 1.(1 + 1)(2.1 + 1)/6$. Bước quy nạp : Giả sử $\sum_{j=1}^{n} j^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$. Khi đó :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n+1} j^2 &= \left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) + (n + 1)^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6 + (n + 1)^2 \\ &= (n + 1)[2n^2 + n + 6n + 6]/6 = (n + 1)(n + 2)(2n + 3)/6 \\ &= (n + 1) \quad ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)/6.\end{aligned}$$

**9.** Gọi $P(n)$ là "$1^2 + 3^2 + ... + (2n + 1)^2 = (n + 1)(2n + 1)(2n + 3)/3$". Bước cơ sở $P(1)$ là đúng vì $1^2 = 1 = (0 + 1)(0 + 1)(0 + 3)/3$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $1^2 + 3^2 + ... + (2n + 1)^2 + (2(n + 1) + 1)^2 = (n + 1)(2n + 1)(2n + 3)/3 + (2(n + 1) + 1)^2 = (2n + 3)[(n + 1)(2n + 1)/3 + (2n + 3)] = (2n + 3)(2n^2 + 9n + 10)/3 = (2n + 3)(2n + 5)(n + 2)/3 = ((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)(2(n + 1) + 3)/3$.

**11.** Gọi $P(n)$ là "$1 + n.h \leq (1 + h)^n$, $h > -1$". Bước cơ sở : $P(0)$ là đúng vì $1 + 0.h = 1 \leq (1 + h)^0$. Bước quy nạp : Giả sử $1 + n.h \leq (1 + h)^n$. Khi đó vì $(1 + h) > 0$, nên $(1 + h)^{n+1} = (1 + h)(1 + h)^n \geq (1 + h)(1 + n.h) = 1 + (n + 1)h + nh^2 \geq 1 + (n + 1)h$.

**13.** Gọi $P(n)$ là "$2^n > n^2$". Bước cơ sở $P(5)$ là đúng vì $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. Bước qui nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng tức là $2^n > n^2$. Khi đó $2^{n+1} = 2.2^n > n^2 + n^2 > n^2 + 4n \geq n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$, vì $n > 4$.

**15.** Gọi $P(n)$ là "$1.2 + 2.3 + ... + n(n + 1) = n(n + 1)(n + 2)/3$". Bước cơ sở $P(1)$ là đúng vì $1.2 = 2 = 1(1 + 1)(1 + 2)/3$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng, khi đó $1.2 + 2.3 + ... + n(n + 1) + (n + 1)(n + 2) = [n(n + 1)(n + 2)/3] + (n + 1)(n + 2) = (n + 1)(n + 2)[(n + 3) + 1)] = (n + 1)(n + 2)(n + 3)/3$.

**17.** Gọi $P(n)$ là "$1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} n(n + 1)/2$". Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng vì $1^2 = 1 = (-1)^0 1(1 + 1)/2$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $1^2 - 2^2 + 3^2 - ... + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n + 1)^2 = (-1)^{n-1} n(n + 1)/2 + (-1)^n(n + 1)^2 = (-1)^n(n + 1)[-n/2 + (n + 1)] = (-1)^n(n + 1)[n/2 + 1] = (-1)^n(n + 1)(n + 2)/2$.

**19.** Gọi $P(n)$ là "một bưu phí $n$ xu có thể tạo được bằng các con tem 3 xu và 5 xu". Bước cơ sở : $P(8)$ là đúng vì bưu phí 8 xu có thể trả bằng một tem 3 xu và một tem 5 xu. Bước quy nạp : Giả sử rằng $P(n)$ đúng, tức là có thể tạo được bưu phí $n$ xu. Bây giờ chúng ta chứng minh có thể tạo được bưu phí $(n + 1)$ xu. Vì theo giả thiết quy nạp có thể tạo được bưu phí $n$ xu. Nếu nó có chứa tem 5 xu thì ta thay nó bằng 2 con tem 3 xu để tạo được bưu phí $(n + 1)$ xu. Nếu tạo bưu phí $n$ xu chỉ bằng các con tem 3 xu, thì do $n > 9$ bằng cách thay 3 con tem 3 xu bằng 2 con tem 5 xu ta sẽ tạo ra bưu phí $(n + 1)$ xu.

**21.** Gọi $P(n)$ là "$n^5 - n$ là chia hết cho 5". Bước cơ sở : $P(0)$ là đúng vì $0^5 - 0 = 0$ chia hết cho 5. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là $n^5 - n$ là chia hết cho 5. Khi đó $(n + 1)^5 - (n + 1) = (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - (n + 1) = (n^5 - n) + 5(n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n)$ chia hết cho 5 vì là tổng của hai số hạng chia hết cho 5.

**23.** Gọi $P(n)$ là "$(2n - 1)^2 - 1$ chia hết cho 8". Trường hợp cơ sở $P(1)$ là đúng vì $8 \mid 0$. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Vì $(2(n + 1) - 1)^2 - 1 = ((2n - 1)^2 - 1) + 8n$ chia hết cho 8 nên $P(n + 1)$ là đúng.

**25.** Gọi $P(n)$ là mệnh đề "một tập có với $n$ phần tử sẽ có $n(n - 1)/2$ tập con gồm 2 phần tử. Bước cơ sở : $P(2)$ là đúng vì một tập gồm hai phần tử có một tập con gồm hai phần tử. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Gọi $S$ là tập gồm $n + 1$ phần tử. Chọn phần tử $a$ từ $S$ và gọi $T = S - \{a\}$. Tập con gồm hai phần tử của $S$ hoặc là chứa $a$ hoặc không chứa $a$. Những tập con không chứa $a$ là các tập con có 2 phần tử của $T$. Thao giả thiết quy nạp số đó bằng $n(n - 1)/2$. Có $n$ tập con gồm hai phần tử của $S$ chứa $a$, vì các tập con như thế chứa $a$ và một phần tử của $T$. Vì thế có $n(n - 1)/2 + n = (n + 1)\, n/2$ tập con gồm hai phần tử của $S$. Điều này kết thúc bằng cách chứng minh bằng quy nạp.

**27.** Gọi $P(n)$ là mệnh đề $1^4 + 2^4 + ... + n^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30$. $P(1)$ là đúng vì $1.2.3.5/30 = 1$. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $(1^4 + 2^4 + ... + n^4) + (n + 1)^4 = n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)/30 + (n + 1)^4 = ((n + 1)/30)(n(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1) + 30(n + 1)^3) = ((n + 1)/30)(n + 2)(3n + 3)(3(n + 1)^2 + 3(n + 1) - 1)$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

**29.** Bằng kiểm tra trực tiếp ta thấy bất đẳng thức $2n + 3 \leqslant 2^n$ không đúng với $n = 0, 1, 2, 3$. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "bất đẳng thức trên lạ đúng với $n$ nguyên dương". Bước cơ sở : $P(4)$ là đúng vì $2.4 + 3 = 11 \leqslant 16 = 2^4$. Bước quy nạp giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $2(n + 1) + 3 = (2n + 3) + 2 \leqslant 2^n + 2$. Nhưng vì $n \geqslant 1$, $2^n + 2 \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

**31.** a) Những bưu phí có thể tạo bằng các tem 5 xu và tem 6 xu là 5 xu, 6 xu, 10 xu, 11 xu, 12 xu, 15 xu, 16 xu, 17 xu, 18 xu và tất cả các bưu phí lớn hơn hay bằng 20 xu.

b) Chúng ta sẽ chứng tỏ các bưu phí lớn hơn hay bằng 20 xu có thể tạo được bằng các con tem 5 xu và 6 xu. Giả sử $P(n)$ là mệnh đề "một bưu phí $n$ xu có thể tạo thành từ các con tem 5 xu và 6 xu". $P(20)$ là đúng vì bưu phí 20 xu có thể tạo thành bằng 4 con tem 5 xu. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Nếu có một con tem 5 xu được dùng để tạo ra bưu phí $n$ xu thì thay nó bằng con tem 6 xu sẽ tạo được bưu phí $n + 1$ xu. Nếu để tạo bưu phí $n$ xu chỉ dùng các con tem 6 xu thì vì $n \geqslant 20$ nên ít nhất có 4 con tem 6 xu đã dùng. Khi đó thay 4 con tem này bằng 5 con tem 5 xu ta sẽ tạo được bưu phí $(n + 1)$ xu. Vì thế $P(n + 1)$ là đúng. Điều này kết thúc cách chứng minh quy nạp.

c) Cho $P(n)$ như trong phần b) Các trường hợp cơ sở là $P(20)$, $P(21)$, $P(22)$, $P(23)$ và $P(24)$. Chúng đúng vì các bưu phí 20 xu, 21 xu, 22 xu, 23 xu và 24 xu có thể tạo thành từ các con tem 5 xu và 6 xu, bằng cách dùng 4 con tem 5 xu, 3 con 5 xu và 1 con 6 xu, 2 con 5 xu và 2 con 6 xu, 1 con 5 xu và 3 con 6 xu, và 4 con 6 xu. Bây giờ ta giả sử $P(k)$ là đúng với $20 \leqslant k \leqslant n$, trong đó $n \geqslant 24$. Vì $n + 1 \geqslant 25$ từ đó suy ra $n - 4 \geqslant 20$, tức là theo giả thiết quy nạp bưu phí $n - 4$ có thể tạo thành. Thêm 1 con tem 5 xu nữa ta sẽ tạo ra bưu phí $n + 1$ xu hay $P(n + 1)$ là đúng. Điều đó kết thúc cách chứng minh quy nạp.

**33.** Tất cả các khoản tiền là bội của \$10 và lớn hơn hay bằng \$40 có thể tạo thành cũng như khoản tiền \$20. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$10n$\$ có thể tạo thành". $P(4)$ là đúng vì \$40 được tạo bởi 2 tờ \$20. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng với $n \geq 4$. Nếu có 1 tờ \$50 được dùng để tạo $10n$\$ thì ta thay nó bằng 3 tờ \$20 ta sẽ nhận được $10(n + 1)$\$. Nếu không thì ít nhất có 2 tờ \$20 vì $10n$ lớn hơn hay bằng \$40. Thay thế 2 tờ này bằng 1 tờ \$50 ta sẽ được một khoản tiền $10(n + 1)$\$. Vậy $P(n)$ là đúng.

**35.** Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$AB^n = B^nA$". $P(1)$ là đúng vì $AB = BA$. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $AB^{n+1} = AB^nB = B^nAB = B^nBA = B^{n+1}A$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

**37.** Gọi $P(n)$ là "$(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B)$" Bước cơ sở : $P(1)$ hiển nhiên là đúng. Bước quy nạp : Giả sử rằng $P(n)$ là đúng. Khi đó : $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}) \cap B = [(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}] \cap B$

$= [(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B] \cup (A_{n+1} \cap B) =$

$= (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots \cup (A_n \cap B) \cup (A_{n+1} \cap B)$.

**39.** Gọi $P(n)$ là : " $\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k$ "

Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng. Bước quy nạp : Giả sử rằng $P(n)$ là đúng. Khi đó :

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k} = \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}} = \overline{\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)} \cap \overline{A}_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k \cap \overline{A}_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} \overline{A}_k$$

**41.** Gọi $P(n)$ là "$[(p_1 \to p_2) \land (p_2 \to p_3) \land \ldots \land (p_{n-1} \to p_n)] \to [(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_{n-1}) \to p_n]$". Bước cơ sở : $P(2)$ là đúng vì $(p_1 \to p_2) \to (p_1 \to p_2)$ là hằng đúng. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ đúng. Để chỉ ra $[(p_1 \to p_2) \land (p_2 \to p_3) \land \ldots \land (p_{n-1} \to p_n) \land (p_n \to p_{n+1})] \to (p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to p_{n+1}$ là hằng đúng, ta giả sử giả thiết của phép kéo theo này là đúng. Cả hai giả thiết và $P(n)$ là đúng, ta suy ra $(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_{n-1}) \to p_n$ là đúng. Vì điều đó là đúng và vì $p_n \to p_{n+1}$ là đúng ta suy ra theo phép tam đoạn luận giả định, rằng $(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_{n-1}) \to p_{n+1}$ là đúng. Từ đó suy ra $(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to p_{n+1}$.

**43.** Hai tập không gối lên nhau nếu $n + 1 = 2$. Thực tế, $P(1) \to P(2)$ là sai.

**45.** Giả sử rằng tính được sắp tốt là có. Giả sử $P(1)$ là đúng và phép kéo theo $(P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(n)) \to P(n + 1)$ là đúng với mọi số dương $n \geq 1$. Giả sử $S$ là tập các số dương $n$ sao cho $P(n)$ sai. Chúng ta sẽ chỉ rằng $S = \varnothing$. Giả sử $S \neq \varnothing$. Khi đó theo tính chất được sắp tốt thì có ít nhất một số nguyên trong $S$. Chúng ta biết rằng $m$ không thể bằng 1 vì $P(1)$ là đúng. Vì $n = m$ là số dương nhỏ nhất sao cho $P(n)$ là sai, $P(1), P(2), \ldots, P(m - 1)$ là đúng và $m - 1 \geq 1$. Vì $(P(1) \land P(2) \land \ldots \land P(m - 1)) \to P(m)$ là đúng, ta suy ra $P(m)$ cũng phải đúng, đó là điều vô lý. Vậy $S = \varnothing$.

**47.** Gọi $P(n)$ là "$H_{2^n} \leq 1 + n$". Bước cơ sở : $P(0)$ là đúng vì $H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 1 + 0$.

Bước quy nạp : Giả sử $H_{2^n} \leq 1 + n$. Khi đó :

$$H_{2^{n+1}} = H_{2^n} = \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{j} \leq 1+n + 2^n (1/2^{n+1}) < 1 + n + 1 = 1 + (n + 1)$$

$+ 1 = 1(n + 1)$.

**49.** Gọi $P(n)$ là "$1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} > 2(\sqrt{n+1} - 1)$". Bước cơ sở : $P(1)$ là đúng vì $1 > 2(\sqrt{2} - 1)$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $1/\sqrt{1} + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \ldots + 1/\sqrt{n} + 1/\sqrt{n+1} > 2(\sqrt{n+1} - 1) + 1/\sqrt{n+1}$. Nếu ta chỉ ra được $2(\sqrt{n+1} - 1) + 1/\sqrt{n+1} > 2(\sqrt{n+2} - 1)$, thì $P(n + 1)$ đúng. Bất đẳng thức này tương đương với $2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) < 1/\sqrt{n+1}$, hay $2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}) < \sqrt{n+1}/\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}/\sqrt{n+1}$, hay $2 < 1 + \sqrt{n+2}/\sqrt{n+1}$ là điều hiển nhiên đúng.

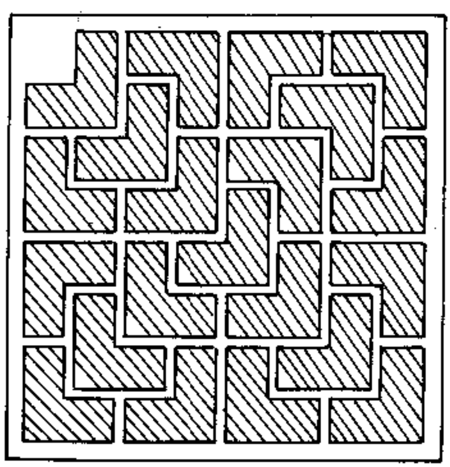
**51.** Trước tiên chúng ta chứng minh kết quả này khi $n$ là luỹ thừa của 2, tức là nếu $n = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ Gọi $P(k)$ là mệnh đề $A \geq G$ trong đó $A$ và $G$ trung bình cộng và trung bình nhân của tập $n = 2^k$ số thực dương. Bước cơ sở : $k = 1$ và $n = 2^1 = 2$. Lưu ý là $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$, hay $a_1 - 2\sqrt{a_1a_2} + a_2 \geq 0$ tức là $(a_1 + a_2)/2 \geq (a_1a_2)^{1/2}$. Bước quy nạp : giả sử $P(k)$ là đúng, với $n = 2^k$. Chúng ta sẽ chỉ ra $P(k + 1)$ là đúng. Chúng ta có $2^{k+1} = 2n$. Ta có $(a_1 + a_2 + ... + a_{2n})/(2n) = ((a_1 + a_2 + ... + a_n)/n + (a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{2n})/n)/2$ và tương tự ta có $(a_1a_2...a_{2n})^{1/(2n)} = [(a_1a_2... a_n)^{1/n}(a_{n+1}a_{n+2} ... a_{2n})^{1/n}]^{1/2}$.

Để đơn giản ta gọi $A(x, y, ..)$ và $G(x, y, ..)$ là trung bình cộng và trung bình nhân của các số $x, y, ..$ Nếu $x \leq x'$, $y \leq y'$, v.v. Khi đó $A(x, y, ..) \leq A(x', y', ...)$ và $G(x, y, ..) \leq G(x', y', ...)$. Vì thế $A(a_1, .. a_{2n}) = A(A(a_1, ... a_n), ..., A(a_{n+1}, ... a_{2n})) \geq A(G(a_1, ... a_n), ..., G(a_{n+1}, ..., a_{2n})) \geq G(G(a_1, ..., a_n), ..., G(a_{n+1}, ..., a_{2n})) = G(a_1, ..., a_{2n})$. Điều này kết thúc việc chứng minh cho trường hợp $n$ là luỹ thừa của 2. Nếu $n$ không là luỹ thừa của 2, gọi $m$ là luỹ thừa bậc cao hơn liền sát của 2 và $a_{n+1}, ..., a_m$ tất cả bằng $A(a_1, ..., a_n) = \bar{a}$. Khi đó chúng ta có $(a_1, ... a_n)\bar{a}^{m-n})^{1/m} \leq A(a_1, ... a_m)$, vì $m$ là luỹ thừa của 2. Vì $A(a_1, ..., a_n) = \bar{a}$ ta suy ra $(a_1, .. a_n)^{1/m}\bar{a}^{1-n/m} \leq \bar{a}^{n/m}$. Nâng cả hai vế lên luỹ thừa bậc $m/n$ cho ta $G(a_1, ..., a_n) \leq A(a_1, ..., a_n)$.

**53.** Không có gì phải chứng minh trong trường hợp cơ sở, khi $n = 1$. Bây giờ ta giả sử có giả thiết quy nạp. Giả sử $p|a_1a_2...a_na_{n+1}$. Lưu ý là ƯCLN$(p, a_1a_2...a_n) = 1$ hoặc $p$. Nếu nó là 1, theo Bổ đề 1 trong Tiết 2.5, $p|a_{n+1}$. Nếu nó bằng $p$ thì $p\,|\,a_1a_2...a_n$, theo giả thiết quy nạp $p|a_i$ với một $i$ nào đó, sao cho $i \leq n$. Định lý được chứng minh.

**55.** Gọi $P(n)$ là mệnh đề "nếu $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực phân biệt, khi đó $n - 1$ phép nhân cần phải thực hiện để tìm tích của các số này bất kể dấu ngoặc được chèn như thế nào vào tích này". Bây giờ chúng ta chứng minh $P(n)$ đúng bằng nguyên lý quy nạp thứ hai. Trường hợp cơ sở $P(1)$ là đúng vì 1 - 1=0 phép nhân cần phải làm để tính tích $x_1$. Giả sử $P(k)$ là đúng với $1 \leq k \leq n$. Phép nhân cuối cùng dùng để tìm tích $n + 1$ số thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}$ là phép nhân của tích $k$ số đầu tiên với $k$ nào đó và tích của $n + 1 - k$ số cuối của chúng. Dùng giả thiết quy nạp, $k - 1$ phép nhân được dùng để tính tích $k$ số bất kể cách đặt dấu ngoặc trong tích, và $n + 1 - k$ phép nhân được dùng để tìm tích của $n + 1 - k$ số còn lại. Vì còn phải làm một phép nhân nữa để tìm tích $n + 1$ số, tổng số phép nhân được dùng là $(k - 1) + (n + 1 - k) + 1 = n$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng. Điều khẳng định được chứng minh xong.

**57.**



**59.** Gọi $P(n)$ là mệnh đề "mọi bàn cờ ba chiều $2^n \times 2^n \times 2^n$ với một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$ bị cắt bỏ có thể lấp kín bằng các khối lập phương $2 \times 2 \times 2$ bị cắt bỏ một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì viên xây trùng với chính bàn cờ. Giả sử $P(n)$ là đúng. Xét khối lập phương $2^{n+1} \times 2^{n+1} \times 2^{n+1}$ với một khối lập phương $1 \times 1 \times 1$ bị cắt bỏ. Chia khối này thành 8 phần bằng các mặt phẳng song song với các mặt và đi qua tâm của khối. Một trong tám khối con này bị cắt bỏ khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. Đặt viên xây sao cho tâm của nó tại tâm của bàn cờ và phần bị khuyết của viên này xây nằm trong một phần tám của bàn cờ mà ở đó bị cắt bỏ khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. Điều này sẽ tạo ra tám khối lập phương $2^n \times 2^n \times 2^n$ mỗi khối đều bị cắt bỏ khối lập phương $1 \times 1 \times 1$. Theo giả thiết quy nạp chúng ta có thể lấp kín mỗi một trong 8 khối này bằng các viên xây bị cắt bỏ khối $1 \times 1 \times 1$. Kết hợp lại ta được một cách lấp đầy bàn cờ $2^{n+1} \times 2^{n+1} \times 2^{n+1}$.

**61.** Giả sử rằng $a = dq + r = dq' + r'$ sao cho $0 \leq r < d$ và $0 \leq r' < d$. Khi đó $d(q - q') = r' - r$. Từ đó suy ra $d$ chia hết $r' - r$. Vì $-d < r' - r < d$, chúng ta có $r' - r = 0$. Vì thế $r' = r$. Ta suy ra $q = q'$.

## Tiết 3.3

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | a) $f(1) = 3$, | $f(2) = 5$, | $f(3) = 7$, | $f(4) = 9$. |
| | b) $f(1) = 3$, | $f(2) = 9$, | $f(3) = 27$, | $f(4) = 81$. |
| | c) $f(1) = 2$, | $f(2) = 4$, | $f(3) = 16$, | $f(4) = 65536$. |
| | d) $f(1) = 3$, | $f(2) = 13$, | $f(3) = 183$, | $f(4) = 33673$. |
| **3.** | a) $f(2) = -1$, | $f(3) = 5$, | $f(4) = 2$, | $f(5) = 17$. |
| | b) $f(2) = -4$, | $f(3) = 32$, | $f(4) = -4096$, | $f(5) = 536870912$. |
| | c) $f(2) = 8$, | $f(3) = 176$, | $f(4) = 92762$, | $f(5) = 25764174848$. |
| | d) $f(2) = -1/2$, | $f(3) = -4$, | $f(4) = 1/8$, | $f(5) = -32$. |

**5.** Có thể có bao nhiêu câu trả lời đúng. Chúng tôi đưa ra một số câu trả lời tương đối đơn giản.

a) $a_{n+1} = a_n + 6$ với $n \geq 1$ và $a_1 = 6$

b) $a_{n+1} = a_n + 2$ với $n \geq 1$ và $a_1 = 3$

c) $a_{n+1} = 10a_n$ với $n \geq 1$ và $a_1 = 10$

d) $a_{n+1} = a_n$ với $n \geq 1$ và $a_1 = 5$

**7.** $F(0) = 0$, $F(n) = F(n-1) + n$ với $n \geq 1$

**9.** $P_m(0) = 0$, $P_m(n+1) = P_m(n) + m$ với $n \geq 1$

**11.** Gọi $P(n)$ là "$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}$" Bước cơ sở : $P(1)$ đúng vì $f_1 = 1 = f_2$. Bước quy nạp : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} + f_{2n+1} = f_{2n} + f_{2n+1} = f_{2n+2} = f_{2(n+1)}$.

**13.** *Bước cơ sở* : $f_0f_1 + f_1f_2 = 0.1 + 1.1 = 1^2 = f_2^{\,2}$. *Bước quy nạp* : Giả sử $f_0f_1 + f_1f_2 + \ldots + f_{2n-1}f_{2n} = f_{2n}^{\,2}$. Khi đó $f_0f_1 + f_1f_2 + \ldots + f_{2n-1}f_{2n} + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n}^{\,2} + f_{2n}f_{2n+1} + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n}(f_{2n} + f_{2n+1}) + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n}f_{2n+2} + f_{2n+1}f_{2n+2} = f_{2n+2}(f_{2n} + f_{2n+1}) = f^2_{2n+2}$.

**15.** Số các phép chia dùng trong thuật toán Euclid tìm UCLN$(f_{n+1}, f_n)$ bằng 0 với $n=0$, bằng 1 với $n=1$ và bằng $n-1$ với $n \geq 2$. Để chứng minh kết quả này với $n \geq 2$, chúng ta dùng quy nạp toán học. Với $n=2$, một phép chia chỉ ra rằng UCLN$(f_3, f_2)$ =

UCLN(2,1)=UCLN(1,0)=1. Bây giờ giả sử $(n - 1)$ được dùng để tìm UCLN($f_{n+1}, f_n$). Để tìm số UCLN($f_{n+2}, f_{n+1}$) trước tiên chia $f_{n+2}$ cho $f_{n+1}$ ta được $f_{n+2} = 1 \cdot f_{n+1} + f_n$. Sau một phép chia ta có UCLN($f_{n+2}, f_{n+1}$) = UCLN($f_{n+1}, f_n$). Theo giả thiết quy nạp ta suy ra có đúng $n - 1$ phép chia được dùng. Điều đó chứng tỏ để tìm UCLN($f_{n+2}, f_{n+1}$) cần $n$ phép chia.

**17.** $|A| = -1$. Vì thế $|A^n| = (-1)^n$. Từ đó suy ra $f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$.

**19.** a) Chứng minh bằng quy nạp. Bước cơ sở : Với $n=1$, $max(-a_1) = -a_1 = -min(a_1)$. Với $n=2$, có hai trường hợp. Nếu $a_2 \geq a_1$ khi đó $-a_1 \geq -a_2$ vì thế $max(-a_1, -a_2) = -a_1 = -min(a_1, a_2)$. Nếu $a_2 < a_1$ khi $-a_1 < -a_2$ vì thế $max(-a_1, -a_2) = -a_2 = -min(a_1, a_2)$. Bước quy nạp : Giả sử đúng với $n$ $(n \geq 2)$. Khi đó $max(-a_1, -a_2, ..., -a_n, -a_{n+1}) = max(max(-a_1, -a_2, ..., -a_n), -a_{n+1}) = max(-min(a_1, a_2, ..., a_n), -a_{n+1}) = -min(min(a_1, a_2, ..., a_n), a_{n+1}) = -min(a_1, ..., a_{n+1})$.

b) Chứng minh quy nạp toán học. Khi $n=1$, kết quả là đồng nhất thức $a_1 + b_1 = a_1 + b_1$. Với $n = 2$ trước tiên xét trường hợp $a_1 + b_1 \geq a_2 + b_2$. Khi đó $max(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = a_1 + b_1$. Ta cũng thấy $a_1 \leq max(a_1, a_2)$ và $b_1 \leq max(b_1, b_2)$ vì thế $a_1 + b_1 \leq max(a_1, a_2) + max(b_1, b_2)$. Do đó $max(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = a_1 + b_1 \leq max(a_1, a_2) + max(b_1, b_2)$. Trường hợp $a_1 + b_1 < a_2 + b_2$ là tương tự. Bước quy nạp : Giả sử kết quả đúng với $n$. Khi đó

$$\begin{aligned} & max(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &= max(max(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n), a_{n+1} + b_{n+1}) \\ &\leq max(max(a_1, a_2, ..., a_n), a_{n+1}) + max(max(b_1, b_2, ..., b_n), b_{n+1}) \\ &= max(a_1, a_2, ..., a_{n+1}) + max(b_1, b_2, ..., b_n, b_{n+1}). \end{aligned}$$

c) Tương tự như b) nhưng thay "*max*" bằng "*min*" và đảo ngược mỗi bất đẳng thức.

**21.** $5 \in S$ và $x + y \in S$ nếu $x, y \in S$.

**23.** a) $0 \in S$, và nếu $x \in S$, thì $x + 2 \in S$ và $x - 2 \in S$.

b) $2 \in S$ và nếu $x \in S$ khi đó $x + 3 \in S$.

c) $1 \in S$, $2 \in S$, $3 \in S$, $4 \in S$ và nếu $x \in S$ khi đó $x + 5 \in S$.

**25.** Nếu $x$ là một tập hoặc là một biến biểu diễn một tập, khi đó $x$ là một công thức được tạo tốt. Nếu $x$ và $y$ là các công thức được tạo tốt, khi đó $\overline{x}$, $(x \cup y)$, $(x \cap y)$ và $(x - y)$ cũng là các công thức như thế.

**27.** $\lambda^R = \lambda$ và $(ux)^R = xu^R$ với $x \in \Sigma$, $u \in \Sigma^*$.

**29.** $w^0 = \lambda$ và $w^{n+1} = ww^n$

**31.** Khi xâu chứa $n$ số 0 tiếp sau là $n$ số 1 với $n$ là một số nguyên dương nào đó.

**33.** Gọi $P(i)$ là "$l(w^i) = i \cdot l(w)$". $P(0)$ là đúng vì $l(w^0) = 0 = 0 \cdot l(w)$. Giả sử $P(i)$ đúng. Khi đó $l(w^{i+1}) = l(ww^i) = l(w) + l(w^i) = l(w) + i \cdot l(w) = (i + 1) l(w)$.

**35.** a) $P_{m,n} = P_m$ vì số lớn hơn $m$ không thể dùng trong khi phân tích số $m$.

b) Vì chỉ có một cách phân tích số 1, cụ thể là 1 = 1, ta suy ra $P_{1,n} = 1$. Vì chỉ có một cách phân tích số $m$ thành các số 1, nên $P_{m,1}=1$. Khi $n > m$ ta suy ra $P_{m,n} = P_{m,m}$ vì không dùng một số lớn hơn $m$. $P_{m,m} = 1 + P_{m,m-1}$ vì có một cách phân tích đặc biệt, cụ thể là $m=m$, khi được $m$ được phép có trong phân tích $P_{m,n} = P_{m,n-1} + P_{m-n,n}$ nếu $m > n$ vì phân tích $m$ thành các số nguyên không vượt quá $n$ hoặc là không dùng số $n$ và vì thế nó được tính trong $P_{m,n-1}$ hoặc là dùng số $n$ và cách phân tích số $m - n$ và hiển nhiên được tính trong $P_{m-n,n}$.

c) $P_5 = 7$, $P_6 = 11$.

**37.** Gọi $P(n)$ là "$A(n,2) = 4$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $A(1,2) = A(0,A(1,1)) = A(0,2) = 2 \cdot 2 = 4$. *Bước quy nạp* : Giả sử $P(n)$ là đúng tức là $A(n, 2) = 4$. Khi đó $A(n + 1, 2) = A(n, A(n + 1, 1)) = A(n, 2) = 4$.

**39.** a) 16 b) 65356

**41.** Dùng lý luận quy nạp kép chứng minh mệnh đề mạnh hơn : $A(m,k) > A(m, l)$ *khi* $k > l$. *Bước cơ sở* : Khi $m = 0$ mệnh đề là đúng vì $k > l$ suy ra $A(0,k) = 2k > 2l = A(0,l)$. *Bước quy nạp* : Giả sử $A(m,x) > A(m, y)$ với tất cả các số nguyên không âm $x$ và $y$ với $x > y$. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng điều đó suy ra $A(m + 1, k) > A(m + 1, l)$ nếu $k > l$. *Bước cơ sở* : Khi $l = 0$ và $k > 0$, $A(m + 1, l) = 0$ và hoặc là $A(m + 1, k) = 2$, hoặc là $A(m + 1, k) = A(m, A(m + 1, k - 1))$. Nếu $m = 0$, ta có $2A(1, k - 1) = 2^k$. Nếu $m > 0$ thì nó lớn hơn 0 theo giả thiết quy nạp. Trong mọi trường hợp $A(m + 1, k) > 0$ và thực tế thì $A(m + 1, k) \geqslant 2$. Nếu $l = 1$ và $k > 1$ khi đó $A(m + 1, l) = 2$, và $A(m + 1, k) = A(m, A(m + 1, k - 1))$ với $A(m + 1, k - 1) \geqslant 2$. Vì thế theo giả thiết quy nạp, $A(m, A(m + 1, k - 1)) \geqslant A(m, 2) > A(m, 1) = 2$. *Bước quy nạp* : Giả sử $A(m + 1, r) > A(m + 1, s)$ với mọi $r > s$, $s = 0, 1, \ldots, l$. Khi đó nếu $k + 1 > l + 1$ ta suy ra $A(m + 1, k + 1) = A(m, A(m + 1, k)) > A(m, A(m + 1, l)) = A(m + 1, l + 1)$.

**43.** Theo Bài tập 42 ta suy ra $A(i,l) \geqslant A(i - 1, j) \geqslant A(i - l, j) \geqslant \ldots \geqslant A(0, l) = 2l \geqslant l$.

**45.** Gọi $P(n)$ là "$F(n)$ được định nghĩa tốt" khi đó $P(0)$ là đúng vì $F(0)$ là được xác định. Giả sử $P(k)$ là đúng với $k < n$. Khi đó $F(n)$ là được định nghĩa tốt tại $n$ vì $F(n)$ được biểu diễn qua $F(0)$, $F(1)$, ..., $F(n - 1)$. Vì thế $P(n)$ là đúng với mọi $n$.

## Tiết 3.4

**1.**
```
procedure mult(n : nguyên dương, x : nguyên)
    if n=1 then mult(n,x) := x
    else mult(n,x) := x + mult(n - 1,x) ;
```

**3.**
```
procedure sum of odds(n : nguyên dương)
    if n=1 then sum of odds(n) := 1
    else sum of odds(n) := sum of odds(n - 1) + 2n - 1 ;
```

**5.**
```
procedure smallest(a1, a2,..., an : nguyên dương)
    if n=1 then smallest(a1, a2,...,an) := a1
    else smallest(a1, a2,...,an) := min(smallest(a1, a2,...,an-1), an)
```

**7.**
```
procedure modfactorial(n,m : nguyên dương)
    if n=1 then modfactorial(n,m) := 1
    else modfactorial(n,m) := (n* modfactorial(n - 1, m)) mod m
```

**9.**
```
procedure UCLN(a,b : nguyên không âm)
    if a=0 then UCLN(a,b) := b
    else  if a=b - a then UCLN(a,b) := a
          else  if a < b - a then UCLN(a,b) := UCLN(a,b - a)
                else UCLN(a,b) := UCLN(b - a,a) ;
```

**11.** $n$ phép nhân so với $2^n$.

**13.** $O(\log n)$ so với $n$.

**15.**
```
procedure a(n : nguyên không âm)
    if n=0 then a(n) := 1
    else  if n=1 then a(n) := a2
          else a(n) := a(n - 1)*a(n - 2).
```

**17.** Lặp

**19.**
```
procedure iteractive (n : nguyên không âm)
    if n=0 then z := 1
```

```
else   if n=1 then z := 2
       else
       begin
           x := 1
           y := 2
           z := 3
           for i := 1 to n - 2
           begin
               w := x + y + z
               x := y
               y := z
               z := w
           end
       end
{z là số hạng thứ n của dãy}
```

**21.** Trước tiên ta đưa ra thủ tục đệ quy và sau đó là thủ tục lặp.

```
procedure r(n : nguyên dương)
if n < 3 then r(n) := 2n + 1
else r(n) := r(n - 1)*(r(n - 2))^2(r(n - 3))^3
procedure i(n : nguyên không âm)
if n=0 then z :=1
else   if n=1 then z :=3
       else
       begin
           x := 1
           y :=3
           z := 5
           for i := 1 to n - 2
           begin
               w := z*y^2*x^3
               x := y
               y := z
               z := w
           end
       end
{z là số hạng thứ n của dãy}
```

**23.**

```
procedure reverse(w : xâu nhị phân)
n : = length (w)
if n ≤ 1 then reverse(w) := w
else reverse(w) : = substr(w,n,m)* reverse(w,1, n - 1)
{ substr(w,a,b) là xâu con của w gồm các ký tự ở vị trí thứ a và thứ b}
```

**25.**

```
procedure A(m,n : nguyên không âm)
if m=0 then A(m,n) := 2n
else   if n=0 then A(m,n) := 0
       else   if n=1 then A(m,n) := 2
              else A(m,n) := A(m - 1,A(m,n - 1)).
```

## Tiết 3.5

1. Giả sử $x$=0. Đoạn chương trình đầu tiên gán 1 cho $y$ sau đó gán $x + y = 0 + 1 = 1$ cho $z$.

3. Giả sử $y$=3. Đoạn chương trình gán 2 cho $x$ và sau đó gán $x + y = 2 + 3 = 5$ cho $z$. Vì $y = 3 > 0$ nên nó gán $z + 1 = 5 + 1 = 6$ cho $z$.

5. $(p \wedge điều\_kiện1)\ \{S_1\}q$

   $(p \wedge \neg\ điều\_kiện1 \wedge điều\ kiện2)\{S_2\}q$

   .

   .

   .

   $(p \wedge \neg\ điều\_kiện1 \wedge \neg\ điều\ kiện2$

   $\ldots \wedge \neg\ điều\_kiện\ (n-1)\}\{S\}q$

   - - - - - - - - - - - - - - - - - -

   $\therefore p$ {**if** điều_kiện1 **then** $S_1$

   **else if** điều_kiện2 **then** $S_2$ ;... ; **else** $\{S_n\}q$

7. Chúng ta sẽ chỉ ra rằng $p$ : "$power = x^{i-1}$ và $i \leqslant n + 1$" là bất biến vòng lặp. Ta thấy rằng ban đầu $p$ là đúng, vì trước khi vòng lặp bắt đầu, $i$=1 và $power = 1 = x^0 = x^{1-1}$. Tiếp theo ta sẽ chỉ ra rằng nếu $p$ là đúng và $i \geqslant n$ sau khi thực hiện vòng lặp, khi đó $p$ vẫn đúng sau khi thực hiện thêm một lần nữa. Vòng lặp, mỗi lần, làm tăng $i$ lên 1 đơn vị. Do vậy, vì $i \leqslant n$ trước khi thực hiện bước này và $i \leqslant n + 1$ sau bước này. Bước lặp này cũng gán $power^*x$ cho $power$. Do giả thiết quy nạp $power$ được gán $x^{i-1}x = x^i$. Vì thế $p$ vẫn còn đúng. Hơn nữa, vòng lặp kết thúc sau $n$ bước lặp với $i = n + 1$, vì trước khi vào vòng lặp $i$=1 và tăng thêm 1 sau mỗi bước, và vòng lặp kết thúc khi $i > n$. Do đó, khi kết thúc $power = x^n$ như ta chờ đợi.

9. Giả sử $p$ là "$m$ và $n$ là các số nguyên". Khi đó nếu điều kiện $n < 0$ là đúng, thì $a = -n = |n|$ sau khi $S_1$ được thi hành. Nếu điều kiện $n < 0$ là sai thì $a = n = |n|$ sau khi $S_1$ được thi hành. Vì thế $p\{S_1\}q$ là đúng trong đó $q$ là $p \wedge (a = |n|)$. Vì $S_2$ gán 0 cho cả $k$ và $x$, nên rõ ràng $q\{S_2\}r$ là đúng trong đó $r$ là $q \wedge (k=0) \wedge (x=0)$. Giả sử $r$ là đúng. Gọi $P(k)$ là "$x=mk$, và $k \leqslant a$". Chúng ta có thể chỉ ra $P(k)$ là một bất biến vòng lặp đối với vòng lặp $S_3$, $P(0)$ là đúng vì trước khi vào vòng lặp $x = 0 = m.0$ và $0 \leqslant a$. Bây giờ ta giả sử $P(k)$ là đúng và $k < a$. khi đó $P(k + 1)$ là đúng vì $x$ được gán $x + m = mk + m = m(k + 1)$. Vòng lặp kết thúc kho $k=a$, và lúc đó $x = ma$. Vì thế $r\{S_3\}_S$ là đúng trong đó $S$ là "$a = |n|$ và $x = ma$". Bây giờ nếu giả sử $S$ là đúng. Khi đó nếu $n < 0$ ta suy ra $a = -n$, tức là $x = -mn$. Trong trường hợp này $S_4$ sẽ gán $-xx = mn$ cho $product$. Nếu $n > 0$ khi đó $x = ma = mn$, tức là $S_4$ gán $mn$ cho $product$. Vậy $s\{S_4\}t$ là đúng.

11. Giả sử rằng khẳng định đầu $p$ là đúng. Khi đó vì $p\{S\}q_o$ là đúng, $q_o$ là đúng sau khi $S$ được thi hành. Do đó $q_o \rightarrow q_1$ là đúng, ta suy ra $q_1$ là đúng sau khi $S$ được thi hành. Vì thế $p\{S\}\ q_1$ là đúng.

13. Chúng ta sẽ dùng mệnh đề $p$ "UCLN($a,b$) = UCLN($x,y$) và $y \geqslant 0$" như một bất biến vòng lặp. Ta nhận thấy $p$ là đúng trước khi vào vòng lặp, vì khi đó $x = a$ và $b = y$ và $y$ là nguyên dương, khi dùng khẳng định đầu. Bây giờ giả sử $p$ là đúng và $y > 0$ ; khi đó vòng lặp sẽ thực hiện một lần nữa. Trong vòng lặp $x$ và $y$ được thay tương ứng bởi $y$ và $x$ **mod** $y$. Theo Bổ đề 1 của Tiết 2.4 ta có UCLN($x,y$) = UCLN($y,x$ **mod** $y$). Hơn nữa sau khi thực hiện vòng lặp giá trị của UCLN($x,y$) được giữ nguyên như trước. Ngoài ra vì $y$ là số dư nên nó cùng lắm là bằng 0. Vì vậy, $p$ vẫn còn đúng hay nó là bất biến vòng lặp. Nếu vòng lặp kết thúc thì $y = 0$. Trong trường hợp này chúng ta có

UCLN($x,y$) $= x$ như khẳng định cuối cùng. Vì thế chương trình với thông tin ra là $x$ đã tính đúng UCLN($a,b$). Cuối cùng chúng ta có thể chứng minh rằng vòng lặp phải kết thúc vì mỗi vòng lặp làm giảm giá trị của $y$ mỗi bước 1 đơn vị. Do vậy vòng lặp có thể lặp nhiều nhất $b$ lần.

## Các bài tập bổ sung

1. Cho $a = 2n + 1$ và $b=2m + 1$. Khi đó $ab = (2n + 1)(2m + 1) = 2(2mn + m + n)$ là một số lẻ.

3. Sai $\sqrt{2} + (\sqrt{-2}) = 0$ là một phản ví dụ.

5. Đó là một ví dụ về nguỵ biện khẳng định kết luận.

7. Chứng minh từng trường hợp.
*Trường hợp 1* : $x \geqslant 0$ và $y \geqslant 0$. Khi đó $|xy| = xy = |x||y|$.
*Trường hợp 2* : $x \geqslant 0$ và $y < 0$. Khi đó $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.
*Trường hợp 3* : $x < 0$ và $y \geqslant 0$. Khi đó $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.
*Trường hợp 4* : $x < 0$ và $y < 0$. Khi đó $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$.

9. Giả sử các $x_j$ là phân biệt. Gọi $P(x)$ như trong phần gợi ý. Khi đó $P(x)$ là một đa thức (bậc $n - 1$) và nếu $x=x_m$ khi đó $\prod_{j\neq i}(x - x_j)/(x - x_i) = 0$ trừ khi $i=m$. Vì thế $P(x_m) = \prod_{j\neq m} y_m(x_m - x_j)/(x_m - x_j) = 1y_m = y_m$.

11. Gọi $P(n)$ là "$1.1 + 2.2 + \ldots + n.2^{n-1} = (n - 1)2^n + 1$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ *là đúng vì* $1.1 = 1 = (1 - 1)2^1 + 1$. Bước quy nạp : *Giả sử rằng* $P(n)$ đúng. Khi đó "$1.1 + 2.2 + \ldots + n.2^{n-1} + (n + 1)\,2^n = (n - 1)2^n + 1 + (n + 1)\,2^n = 2n\,2^n + 1 = (n + 1)2^n + 1$.

13. Gọi $P(n)$ là "$1/1.4 + \ldots + 1/[(3n - 2)(3n + 1)] = n/(3n + 1)$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $1/1.4 = 1/4$. *Bước qui nạp* : Giả sử $P(n)$ đúng. Khi đó " $1/1.4 + \ldots + 1/[(3n-2)(3n+1)] + 1/[(3n + 1)(3n + 4)] = n/(3n + 1) + 1/[(3n + 1)(3n + 4)] = [(3n + 4)n + 1]/[(3n + 1)(3n + 4)] = (n + 1)/(3n + 4)$.

15. Gọi $P(n)$ là "$2^n > n^3$". *Bước cơ sở* : $P(10)$ là đúng vì $1024 > 1000$. *Bước quy nạp* : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \leqslant n^3 + 9n^2 \leqslant n^3 + n^3 = 2.2^n = 2^{n+1}$.

17. Gọi $P(n)$ là "$a - b$ là một thừa số $a^n - b^n$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ hiển nhiên là đúng. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $a^{n+1} - b^{n+1} = a^{n+1} - ab^n + ab^n - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a - b)$. Vì $(a - b)$ là thừa số của $a^n - b^n$ và của chính $a - b$, nên $a - b$ là thừa số của $a^{n+1} - b^{n+1}$.

19. Gọi $P(n)$ là "$a(a + d) + \ldots + (a + nd) = (n + 1)(2a + nd)/2$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $a + (a + d) = 2a + d = 2(2a + d)/2$. *Bước quy nạp* : Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó $a + (a + d) + \ldots + (a + nd) + (a(n + 1)d) = (n + 1)(2a + nd)/2 + (a(n + 1)d) = (2an + 2a + n^2d + nd + 2a + 2nd + 2d)/2 = (2an + 4a + n^2d + 3nd + 2d)/2 = (n + 1)(2a + (n + 1)d)$.

21. Chúng sẽ dùng nguyên lý quy nạp thứ hai để chỉ ra rằng $f_n$ là chẵn nếu $n \equiv 0 \pmod 3$ còn không thì là lẻ. Bước cơ sở là đúng vì $f_0 = 0$ là chẵn, $f_1 = 1$ là lẻ. Bây giờ giả sử rằng nếu $k \leqslant n$ thì $f_k$ là chẵn nếu $k \equiv 0 \pmod 3$ còn không thì là lẻ. Bây giờ giả sử $n + 1 \equiv 0 \pmod 3$. Khi đó $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ là chẵn vì $f_n$ và $f_{n-1}$ đều là lẻ. Nếu $n + 1 \equiv 1 \pmod 3$. Khi đó $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ là lẻ vì $f_n$ là chẵn và $f_{n-1}$ là lẻ. Cuối cùng, nếu $n + 1 \equiv 2 \pmod 3$. Khi đó $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ là lẻ vì $f_n$ là lẻ và $f_{n-1}$ là chẵn. Điều này kết thúc cách chứng minh quy nạp.

**23.** Gọi $P(n)$ là "$f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1} = f_{n+k+1}$ với mọi số $k$ nguyên không âm". Bước cơ sở sẽ chỉ ra $P(0)$ và $P(1)$ là đúng. $P(0)$ là đúng vì $f_k f_o + f_{k+1} f_1 = f_k 0 + f_{k+1} 1 = f_{k+1}$. Vì $f_k f_1 + f_{k+1} f_2 = f_k + f_{k+1} = f_{k+2}$ vậy $P(1)$ đúng. Bây giờ giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó theo giả thiết quy nạp và định nghĩa hồi quy của các số Fibonacci ta suy ra $f_k f_{n+1} + f_{k+1} f_{n+2} = f_k(f_{n-1} + f_n) + f_{k+1}(f_n + f_{n+1}) = (f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n) + (f_k f_n + f_{k+1} f_{n+1})$ $= f_{n-1+k+1} + f_{n+k+1} = f_{n+k+2}$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng.

**25.** Gọi $P(n)$ là "$l_o^2 + l_1^2 + ... + l_n^2 = l_n l_{n+1} + 2$". *Bước cơ sở :* $P(0)$, $P(1)$ là đúng vì $l_o^2 = 2^2 = 2.1 + 2 = l_o l_1 + 2$ và $l_o^2 + l_1^2 = 2^2 + 1^2 = 1.3 + 2 = l_1 l_3 + 2$. Giả sử $P(n)$ là đúng. Khi đó theo giả thiết quy nạp $l_o^2 + l_1^2 + ... + l_n^2 + l_{n+1}^2 = l_n l_{n+1} + 2 + l_{n+1}^2 = l_{n+1}(l_n + l_{n+1}) + 2 = l_{n+1} l_{n+2} + 2$. Vậy $P(n + 1)$ đúng.

**27.** Gọi $P(n)$ là mệnh đề "đẳng thức trên đúng với mọi $n$ nguyên". Bước cơ sở $P(1)$ hiển nhiên đúng. Giả sử $P(n)$ đúng. Khi đó $\cos(n + 1)x + i\sin(n + 1)x = \cos(nx + x)\ i\sin(nx + x) = \cos nx\cos x - \sin nx\sin x + i(\sin nx\ \cos x + \cos nx\ \sin x) = (\cos nx + i\ \sin nx)(\cos x + i\sin x)$ $= (\cos x + i\sin x)^n\ (\cos x + i\ \sin x) = (\cos x + i\ \sin x)^{n+1}$. Điều đó chứng tỏ $P(n + 1)$ đúng.

**29.** a) 92 b) 91 c) 91 d) 91 e) 91 f) 91.

**31.** Bước cơ sở là sai vì tổng đã cho chỉ có với $n \neq 1$

**33.** Gọi $P(n)$ là "mặt phẳng được chia thành $n^2 - n + 2$ miền bằng $n$ đường tròn nếu mọi cặp đường tròn có hai điểm chung, nhưng không có ba đường tròn nào có ba điểm chung". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì một đường tròn chia mặt phẳng thành $2 = 1^2 - 1 + 2$ miền. Giả sử $P(n)$ là đúng, tức là $n$ đường tròn chia mặt phẳng thành $n^2 - n + 2$ miền. Vòng tròn thứ $(n + 1)$ cắt mỗi một trong $n$ vòng tròn kia ở 2 điểm, các giao điểm này sẽ tạo ra $2n$ cung mới. Mỗi cung này chia miền cũ thành 2 miền. Vì thế có $2n$ miền cũ được chia đôi, hay khi thêm vòng tròn thứ $(n + 1)$ đã làm tăng thêm $2n$ miền. Khi đó ta có $n^2 - n + 2 + 2n = (n^2 + 2n + 1) - (n + 1) + 2 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 2$ miền.

**35.** Giả sử $\sqrt{2}$ là hữu tỷ. Khi đó $\sqrt{2} = a/b$, với $a,b$ là các số nguyên dương. Từ đó suy ra tập $S = \{n\sqrt{2} \mid n \in N\} \cap N$ là một tập các số nguyên dương và không rỗng vì $b\sqrt{2} = a$ thuộc $S$. Giả sử $t$ là phần tử nhỏ nhất của $S$, nó tồn tại do tính được sắp. Khi đó $t = s\sqrt{2}$ với số dương $s$ nào đó. Ta có $t - s = s\sqrt{2} - s = s(\sqrt{2} - 1)$ là một số nguyên dương vì $\sqrt{2} > 1$. Vì thế $t - s$ thuộc $S$. Điều này vô lý vì $t - s = s\sqrt{2} - s < s$. Vậy $\sqrt{2}$ là một số vô tỷ.

**37.** Giả sử tính được sắp tốt là sai. Gọi $S$ là tập không rỗng các số nguyên không âm và nó không có phần tử nhỏ nhất. Gọi $P(n)$ là mệnh đề "$i \notin S$, $i = 0, 1, 2, ..., n$". $P(0)$ là đúng vì nếu $0 \notin S$ thì $S$ có phần tử nhỏ nhất, cụ thể là 0. Bây giờ $P(n)$ đúng. Khi đó $0 \notin S$, $1 \notin S$, ... $n \notin S$. Rõ ràng $(n + 1)$ không thể thuộc $S$ vì nếu nó thuộc $S$ thì nó phải là phần tử nhỏ nhất của $S$. Vậy $P(n + 1)$ là đúng. Theo nguyên lý quy nạp toán học, $n \notin S$ với mọi số nguyên dương $n$. Túc là $S = \varnothing$ là mâu thuẫn.

**39.** a) Gọi $d = \text{UCLN}(a_1, a_2, ..., a_n)$. Khi đó $d$ là ước số của mọi $a_i$ và nó cũng là ước của $\text{UCLN}(a_{n-1}, a_n)$. Vì thế $d$ là ước chung của $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$ và $\text{UCLN}(a_{n-1}, a_n)$. Để chứng minh $d$ là UCLN của các số này, ta giả sử $c$ là ước chung của chúng. Khi đó $c$ là ước của $a_i$, $i = 1, 2, ..., n - 2$ và của $\text{UCLN}(a_{n-1}, a_n)$, tức là nó cũng là ước của $a_{n-1}$ và $a_n$. Vì thế $c$ là ước chung của $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$. Vì thế nó là ước của $d$ hay $d$ là UCLN của $a_1, a_2, ..., a_{n-2}$ và $\text{UCLN}(a_{n-1}, a_n)$.

b) Nếu $n=2$ áp dụng thuật toán Euclid. Nếu $n \neq 2$ áp dụng thuật toán Euclid cho $a_{n-1}$ và $a_n$, nhận được $d = \text{UCLN}(a_{n-1}, a_n)$ và khi đó áp dụng thuật toán này theo kiểu đệ quy với $a_1 a_2 ... a_{n-2} d$.

**41.** $f(n) = n^2$. Gọi $P(n)$ là "$f(n) = n^2$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $f(1) = 1 = 1^2$, theo định nghĩa của hàm $f$. *Bước quy nạp :* Giả sử $f(n) = n^2$. Khi đó $f(n+1) = f((n+1)-1) + 2(n+1) - 1 = f(n) + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

**43.** a) $\lambda$, 0, 1, 00, 01, 11, 000, 001, 011, 111, 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 00000, 00001, 00011, 00111, 01111, 11111.

b) $S = \{\alpha, \beta \mid \alpha$ là xâu $m$ số 0 và $\beta$ là xâu $n$ số 1, $m \geq 0, n \geq 0\}$

**45.** $\lambda$, (), (()), ()().

**47.** a) 0, b) -2 c) 2, d) 0

**49.**
```
procedure generate (n : nguyên không âm)
if n là lẻ then
begin
    S := S(n - 1)
    T := T(n - 1)
end
else    if n=0 then
        begin
            S := ∅
            T := {λ} ;
        end
        else
        begin
            T1 := T(n - 2)
            S1 := S(n - 2) ;
            T := T1 ∪ {(x) | x ∈ T1 ∪ S1 và l(x) = n - 2}
            S := S1 ∪ {xy | x ∈ T1 và y ∈ T1 ∪ S1 và l(xy) = n}
    end {T ∪ S là tập các xâu cân bằng có độ dài nhiều nhất bằng n}
```

**51.** Nếu ban đầu $x \leq y$, $x := y$ là không được thi hành, vì thế khẳng định cuối $x \leq y$ là đúng. Nếu ban đầu $x > y$, $x := y$ là được thi hành, vì thế khẳng định cuối $x \leq y$ là đúng.

# CHƯƠNG 4

## *Tiết 4.1*

**1.** a) 5850 b) 343

**3.** a) $4^{10}$ b) $5^{10}$

**5.** 42

**7.** $26^3$

**9.** 676

**11.** $2^8$

**13.** $n + 1$ (tính cả xâu rỗng)

**15.** 475255 (tính cả xâu rỗng)

**17.** a) 128 b) 450 c) 9 d) 675
e) 450 f) 450 g) 225 h) 75

**19.** a) 990 b) 500 c) 27

**21.** $3^{50}$

**23.** 52 457 600

**25.** 20 077 200

**27.** a) 0 b) 120 c) 720 d) 2520

**29.** a) 2 nếu $n = 1$, 2 nếu $n = 2$, 0 nếu $n \geq 3$
b) $2^{n-2}$ với $n > 1$ ; 1 nếu $n = 1$
c) $2(n - 1)$

**31.** $(n + 1)^m$

**33.** Nếu $n$ chẵn $2^{n/2}$ ; nếu lẻ $2^{(n+1)/2}$

**35.** a) 240 b) 480 c) 360

**37.** 352

**39.** 147

**41.** 33

**43.** 7 104 000 000 000

**45.** 18

**47.** 17

**49.** Gọi $P(m)$ là quy tắc cộng với $m$ công việc. Trường hợp cơ sở ta lấy $m=2$. Đó chính là quy tắc cộng cho 2 việc. Bây giờ giả sử $P(m)$ là đúng. Xét $n + 1$ việc $T_1, T_2, \ldots T_m, T_{m+1}$ có thể được thực hiện tương ứng bằng $n_1, n_2, \ldots n_m, n_{m+1}$ cách sao cho không có hai cách nào có thể được làm đồng thời. Để thực hiện một trong những cách này, ta có thể làm một trong $m$ cách đầu tiên hoặc làm công việc $T_{m+1}$ Theo quy tắc cộng với 2 việc, số cách làm $m + 1$ việc sẽ bằng tổng các cách làm $m$ việc đầu tiên với $n_{m+1}$ Theo giả thiết quy nạp số cách làm $m$ việc là $n_1 + n_2 + ... + n_m$. Vậy số cách làm $m + 1$ việc sẽ là $n_1 + n_2 + ... + n_m + n_{m+1}$

**51.** $n(n - 3)/2$

## Tiết 4.2

**1.** Vì có 6 lớp mà mỗi tuần lễ chỉ học 5 ngày, theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai lớp gặp nhau cùng một ngày.

**3.** 13

**5.** Gọi $a, a+1, ..., a+n-1$ là dãy $n$ số nguyên liên tiếp. Khi đó các số nguyên $(a + i)$ mod $n$, $i = 0, 1, 2, ..., n - 1$ là khác nhau từng đôi một, vì $0 < (a + j) - (a + k) < n$ với mọi $0 \leq k < j \leq n - 1$. Vì có $n$ giá trị có thể $(a + i)$ mod $n$, và trong tập này có $n$ số nguyên khác nhau, nên mỗi một trong các số này xuất hiện đúng một lần. Từ đó suy ra trong dãy $n$ số nguyên liên tiếp có đúng một số chia hết cho $n$.

**7.** 4951

**9.** Điểm giữa của đoạn nối các điểm $(a, b, c)$ và $(d, e, f)$ là $((a + d)/2, (b + e)/2, (c + f)/2)$. Các toạ độ của điểm giữa này là nguyên nếu và chỉ nếu $a$ và $d$ cùng tính chẵn lẻ, $b$ và $e$ cùng tính chẵn lẻ, $c$ và $f$ cùng tính chẵn lẻ. Vì có 8 bộ ba chẵn lẻ khác nhau (chẳng hạn (chẵn, lẻ, chẵn)), theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 9 điểm có cùng bộ ba chẵn lẻ như nhau. Điểm giữa của cặp điểm này có toạ độ nguyên.

**11.** a) Chia tám số nguyên đầu tiên thành 4 cặp có tổng bằng 9 như sau : {1,8}, {2,7}, {3,6} và {4,5}. Nếu ta lấy 5 số bất kỳ trong 8 số này theo nguyên lý Dirichlet ít nhất có 2 số thuộc cùng một cặp. Tổng hai số đó bằng 9. Đó là điều cần chứng minh.

b) Không. Lấy {1, 2, 3, 4} làm ví dụ.

**13.** 21 251

**15.** Gọi $d_j$ là $jx - N(jx)$ trong đó $N(jx)$ là số nguyên gần $jx$ nhất với $1 \leq j \leq n$. Mỗi $d_j$ là một số vô tỷ giữa - 1/2 và 1/2. Chúng ta giả sử rằng $n$ là số chẵn, trường hợp $n$ lẻ sẽ ... Xét $n$ khoảng $\{x \mid j/n < x < (j + 1)/n\}$, $\{x \mid -(j + 1)/n < x < -j/n\}$ với $j = 0, 1, ... (n/2) - 1$. Nếu $d_j$ thuộc vào khoảng $\{x \mid 0 < x < 1/n\}$ hoặc khoảng $\{x \mid -1/n < x < 0\}$ với một vài $j$ thì đó là điều cần chứng minh. Nếu không như vậy thì vì có $n - 2$ khoảng và $n$ số $d_j$ nên theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất một khoảng $\{x \mid (k - 1)/n < x < k/n\}$ chứa $d_r$ và $d_s$ với $r < s$. Ta chỉ còn phải chỉ ra rằng $(s - r)x$ là nằm bên trong phạm vi $1/n$ kể từ số nguyên gần nhất của nó.

**17.** 4, 3, 2, 1, 8, 7, 6, 5, 12, 11, 10, 9, 16, 15, 14, 13

**19.**
```
procedure long (a1,...,an : nguyên dương)
{Đầu tiên tìm dãy con tăng dài nhất}
max := 0, set := 00 ... 00 {n bit}
for i := 1 to 2^n
begin
    last := 0
    count := 0
    OK := True.
    for j := 1 to n
    begin
    if set(j) = 1 then
```

```
        begin
            if a_j > last then last := a_j
            count := count + 1
        end
        else
            OK := False
        end
        if count > max then
        begin
            max := count
            best := set
            end
        set := set + 1 (cộng nhị phân)
    end     {max x là độ dài và best chỉ dãy}
            {lặp cho dãy con giảm bằng cách thay a_j < last thay cho a_j > last
            và last := ∞ thay cho last := 0}
```

**21.** Do tính đối xứng ta chỉ cần chứng minh mệnh đề đầu tiên. Gọi $A$ là một người nào đó trong nhóm 10 người. Hoặc là $A$ có ít nhất 4 người bạn hoặc là $A$ có ít nhất 6 kẻ thù trong số 9 người kia (vì $3 + 5 < 9$). Trong trường hợp đầu ta giả sử rằng $B, C, D$ và $E$ là bạn của $A$. Nếu 2 người bất kỳ trong những người này là bạn của nhau thì ta đã tìm được ba người là bạn của nhau. Ngược lại, cả bốn người này không ai là bạn của ai, tức là ta có tập 4 người là kẻ thù lẫn nhau. Trong trường hợp thứ hai, ta giả sử $\{B,C,D, E,F,G\}$ là tập những kẻ thù của $A$. Theo ví dụ 11, trong tập này hoặc có 3 người là bạn lẫn nhau, hoặc ba người là kẻ thù lẫn nhau và cùng với $A$ lập thành tập 4 người là kẻ thù của nhau.

**23.** Có tất cả 6 432 816 khả năng cho 3 chữ viết tắt họ tên và ngày sinh. Vì thế, theo nguyên lý Dirichlet tổng quát có ít nhất $\lceil 25\,000\,000/6\,432\,816 \rceil = 4$ người có cùng họ tên viết tắt và cùng ngày sinh.

**25.** 18

**27.** Vì có tất cả 6 máy tính, nên số các máy tính kết nối với một máy là một số nguyên nằm giữa 0 và 5. Nhưng 0 và 5 không thể đồng thời xảy ra. Thật vậy, nếu một máy tính không nối với máy nào thì tất cả các máy còn lại chỉ có thể nối với nhiều nhất là 4 máy khác, và nếu có một máy nối với 5 máy thì có nghĩa là không có máy nào cô lập. Theo nguyên lý Dirichlet vì có nhiều nhất 5 khả năng cho số các máy kết nối với một máy, nên có ít nhất 2 trong 6 máy có số máy kết nối với chúng bằng nhau.

**29.** Gọi $a_i$ là số trận đấu thực hiện trong giờ $i$. Khi đó $1 \leqslant a_1 < a_2 < \dots < a_{75} \leqslant 125$. Ta cũng có : $25 \leqslant a_1 + 24 < a_2 + 24 < \dots < a_{75} + 24 \leqslant 149$. Có 150 số $a_1$, $a_2, \dots, a_{75}$, $a_1 + 24$, $a_2 + 24$, ..., $a_{75} + 24$. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 số bằng nhau. Vì tất cả các $a_i$ là khác nhau, và tất cả các $a_i + 24$ là khác nhau, nên suy ra $a_i = a_j + 24$ với $i > j$. Vậy trong khoảng thời gian từ giờ thứ $(j + 1)$ tới giờ thứ $i$ có đúng 24 trận.

**30.** Dùng nguyên lý Dirichlet tổng quát đặt $S$ vật $f(s)$ với $s \in S$ vào $T$ hộp, mỗi hộp một vật.

**33.** a) Nếu trong lớp có ít hơn 9 sinh viên năm thứ nhất, ít hơn 9 sinh viên năm thứ hai và ít hơn 9 học sinh lớp 12 thì cả lớp có nhiều nhất 24 sinh viên, điều này trái với giả thiết lớp có 25 sinh viên.

b) Nếu trong lớp có ít hơn 3 sinh viên năm thứ nhất, ít hơn 9 sinh viên năm thứ hai và ít hơn 5 học sinh lớp 12 thì khi đó nhiều nhất 2 sinh viên năm thứ nhất, nhiều nhất 19 sinh viên năm thứ hai và nhiều nhất 4 học sinh lớp 12 và do vậy cả lớp có nhiều nhất 24 sinh viên, điều này trái với giả thiết lớp có 25 sinh viên.

**35.** a) Giả sử rằng $i_k \leqslant n$ với mọi $k$. Khi đó thao nguyên lý Dirichlet tổng quát có ít nhất $\lceil (n^2 + 1)/n \rceil = n + 1$ số $i_1, i_2, \ldots, i_{n^2+1}$ bằng nhau.

b) Nếu $a_{k_j} < a_{k_j+1}$ khi đó dãy con chứa $a_{k_j}$ và tiếp ssu là dãy con tăng độ dài $i_{k_j+1}$ bắt đầu bằng $a_{k_j+1}$ mâu thuẫn với đẳng thức $i_{k_j} = i_{k_j+1}$. Vì thế $a_{k_j} > a_{k_j+1}$.

c) Nếu không có dãy con tăng với độ dài lớn hơn $n$ khi đó áp dụng phần a) và b). Do đó chúng ta có $a_{k_{n+1}} > a_{k_n} > \ldots > a_{k_2} > a_{k_1}$ là dãy con giảm độ dài $n + 1$.

## Tiết 4.3

**1.** $abc$, $acb$, $bac$, $bca$, $cab$, $cba$.

**3.** 720

**5.** a) 120 b) 720 c) 8
d) 6720 e) 40320 f) 3626800

**7.** 15120

**9.** 1320

**11.** $2(n!)^2$

**13.** 65780

**15.** $2^{100} \cdot 5051$

**17.** a) 94109400 b) 941094 c) 3764376 d) 90345024
e) 114072 f) 2328 g) 24 h) 79727040
i) 3764376 j) 109 440

**19.** a) 12650 b) 303600

**21.** 18 915

**23.** a) 122523030 b) 72930375
c) 223149655 d) 100626625

**25.** 54600

**27.** 45

**29.** 912

**31.** 11232000

**33.** $C(n+1,k) = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \dfrac{(n+1)}{k} \dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = (n+1)C(n,k-1)/k$
Đẳng thức này cùng với $C(n,0)=1$ cho ta định nghĩa truy hồi.

**35.** $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

**37.** 101

**39.** $-2^{10}\, C(19,9) = -94\ 595\ 072$

**41.** $-2^{101}3^{99}\, C(200, 99)$

**43.** $(-1)^{(200-k)/3} C(100, (200-k)/3)$ nếu $k \equiv 2 \pmod 3$ và $-100 \leqslant k \leqslant 200$ ; các hệ số khác bằng 0.

**45.** 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

**47.** $C(n, k-1) + C(n, k) = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C(n+1,k)$

**49.** a) $C(n + r + 1, r)$ là số cách chọn dãy $r$ số 0 và $n + 1$ số 1 bằng cách chọn $r$ vị trí cho các số 0. Luân phiên giả sử là số hạng thứ $(l + 1)$ là số hạng cuối cùng bằng 1, sao cho $n \leq l \leq n + r$. Một khi ta xác định được vị trí của số 1 cuối cùng chúng ta sẽ quyết định được việt đặt các số 0 trong $l$ chỗ trước số 1 cuối cùng. Trong dãy này có $n$ số 1 và $l - n$ số 0. Theo quy tắc cộng ta suy ra có $\sum_{j=n}^{n+r} C(l, l-n) = \sum_{k=0}^{r} C(n+k,k)$ cách thực hiện điều đó.

b) Gọi $P(r)$ là mệnh đề cần chứng minh. Bước cơ sở là đẳng thức $C(n,0) = C(n + 1,0)$ vì cả hai vế đều bằng 1. Giả sử $P(r)$ là đúng. Khi đó,

$$\sum_{k=0}^{r+1} C(n+k,k) = \sum_{k=0}^{r} C(n+k,k) + C(n+r+1,r+1)$$
$$= C(n + r + 1, r) + C(n + r + 1, r + 1) = C(n + r + 2, r + 1)$$

Đó là điều cần chứng minh.

**51.** Ta có thể chọn đầu tiên là chủ tịch hội đồng bằng $n$ cách khác nhau. Khi đó có thể chọn các thành viên của hội đồng bằng $2^{n-1}$ cách. Vì thế có $n2^{n-1}$ cách chọn hội đồng và chủ tịch hội đồng. Trong khi đó số các cách chọn hội đồng gồm $k$ người là $C(n,k)$. Khi ta chọn được hội đồng $k$ thành viên, ta có $k$ cách chọn chủ tịch. Vì vậy có $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$ cách chọn hội đồng và chủ tịch của hội đồng. Kết hợp lại ta có đẳng thức cần chứng minh.

**52.** Giả sử tập hợp có $n$ phần tử. Thao định lý 7 ta có :
$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \ldots + (-1)^n C(n, n) = 0$
Từ đó suy ra : $C(n, 0) + C(n, 2) + C(n, 4) + \ldots = C(n, 1) + C(n, 3) + C(n, 5) + \ldots$
Vế trái là số các tập con có số các phần tử là số chẵn, còn vế phải là số các tập con có số các phần tử là số lẻ.

**55.** a) Đường đi trong bài toán gồm $m$ dịch chuyển sang phải và $n$ dịch chuyển lên trên. Mỗi đường đi như thế có thể biểu diễn bằng dãy nhị phân độ dài $m + n$ với $m$ số 0 và $n$ số 1, trong đó 0 biểu thị dịch chuyển sang phải và 1 biểu thị dịch chuyển lên trên.

b) Số các xâu nhị phân dài $(m + n)$ bit chứa đúng $n$ số 1 là $C(m + n, n) = C(m + n, m)$ vì xâu đó được xác định bằng cách chỉ ra vị trí của $n$ số 1 hay $m$ số 0.

**57.** Theo Bài tập 55 số đường đi dài $n$ là $2^n$, bằng số các xâu nhị phân dài $n$. Mặt khác một đường đi độ dài $n$ (có kiểu như trong Bài 55) phải kết thúc ở điểm có tổng các toạ độ của nó bằng $n$, cụ thể là $(n - k, k)$ với $k$ là số nguyên sao cho $0 \leq k \leq n$. Theo Bài 55 số các đường đi như vậy mà kết thúc ở điểm $(n - k, k)$ là $C(n - k + k, k) = C(n, k)$. Vì vậy ta có : $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

**59.** Theo Bài tập 55, số các đường từ (0, 0) tới $(n + 1, r)$ có dạng như trong Bài tập này là $C(n + r + 1, r)$. Nhưng đường đi như thế bắt đầu bằng cách đi $l$ bước theo phương thẳng đứng với $0 \leq l \leq r$. Số các đường đi như thế bằng số các đường đi như trong Bài 55 từ $(1, l)$ tới $(n + 1, r)$. Và số này bằng số các đường đi từ (0,0) tới $(n, r - l)$ hay là $C(n + r - l, r - l)$. Vì $\sum_{l=0}^{r} C(n+r-l, r-l) = \sum_{k=0}^{r} C(n+k, k)$

từ đó suy ra : $\sum_{k=1}^{r} C(n+k,k) = C(n+r+1,r)$

## Tiết 4.4

1. 1/13
3. 1/2
5. 1/2
7. 1/64
9. 47/52
11. 1/$C$(52, 5)
13. 1 - ($C$(48, 5)/$C$(52, 5))
15. $C$(13, 2)$C$(4, 2)$C$(4, 2)$C$(44, 1)/$C$(52, 5)
17. 10 240/$C$(52, 5)
19. 1302 540/$C$(52,5)
21. 1/64
23. 8/25
25. a) 1/$C$(50,6) = 1/15 890 700 b) 1/$C$(52,6) = 1/20 358 520
    c) 1/$C$(56,6) = 1/32 468 436 d) 1/$C$(60,6) = 1/50 063 860
27. a) 139 128/319 865 b) 212 667/511 313
    c) 151340/368 529 d) 163 647/446 276
29. 1/$C$(100, 8)
31. a) 9/19 b) 81/361 c) 1/19
    d) 1889 568/2 478 099 e) 48/361
33. Ba con súc sắc

## Tiết 4.5

1. 243
3. $26^6$
5. 125
7. 35
9. a) 1716 b) 50 388 c) 2 629 575
   d) 330 e) 9 724
11. 9
13. 4 504 501
15. a) 10 626 b) 1365
    c) 11649 d) 106
17. 2520
19. 302 702 400
21. 30 492

**23.** $C(59,50)$

**25.** 35

**27.** 83 160

**29.** 63

**31.** 19 635

**33.** 210

**35.** 27 720

**37.** $52!/(7!^5\ 17!)$

**39.** $24.13^4/(52.51.50.49)$

**41.** a) $C(k + n - 1, n)$ b) $(k + n - 1)!/(k - 1)!$

**43.** Có $C(n, n_1)$ cách chọn $n_1$ vật cho hộp đầu tiên. Một khi các vật này đã được chọn ta có $C(n - n_1, n_2)$ cách chọn vật cho hộp thứ hai. Tương tự có $C(n - n_1 - n_2, n_3)$ cách chọn $n_3$ vật cho hộp thứ ba. Tiếp tục như thế cho tới khi ta có $C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k) = C(n_k, n_k) = 1$ cách chọn các vật cho hộp cuối cùng (vì $n_1 + \ldots + n_k = n$). Theo quy tắc tích, số các cách tất cả các vật sẽ là $C(n, n_1)\ C(n - n_1, n_2) \ldots C(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_{k-1}, n_k)$ tức là bằng $n!/(n_1!n_2!\ldots n_k!)$.

**45.** a) Vì $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_r$ ta suy ra $x_1 + 0 < x_2 + 1 < \ldots < x_r + r - 1$. Vì $1 \leq x_i \leq n + r - 1$, dãy này được tạo bởi $r$ phần tử khác nhau của T.

b) Giả sử $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_r \leq n + r - 1$. Gọi $y_k = x_k - (k-1)$. Khi đó có thể chỉ ra rằng $y_k \leq y_{k+1}$ với $k = 1,2,\ldots,r - 1$ và $1 \leq y_k \leq n$ với $k = 1,2, \ldots, r$. Từ đó suy ra $\{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ là tổ hợp có lặp của $S$.

c) Từ (a) và (b) suy ra có phép tương ứng một - một giữa tổ hợp có lặp của $r$ phần tử của tập $S$ và tổ hợp chập $r$ của $T$, một tập có $n + r - 1$ phần tử. Vậy có $C(n + r - 1, r)$ tổ hợp có lặp chập $r$ từ $S$.

**47.** 5

**49.** Các số hạng trong khai triển có dạng $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$, trong đó $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$. Số hạng như thế xuất hiện từ việc chọn $n_1$ nhân tử $x_1$, $n_2$ nhân tử $x_2$, $\ldots$, $n_m$ nhân tử $x_m$. Có thể thực hiện điều đó bằng $C(n; n_1, n_2, \ldots, n_m)$ cách, vì một cách chọn là hoán vị của $n_1$ nhãn "1", $n_2$ nhãn "2",... và $n_m$ nhãn "$m$".

**51.** 2520

## Tiết 4.6

**1.** a) 2134 b) 54132 c) 12534
d) 45312 e) 6714253 f) 31542676

**3.** 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321

**5.** $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$.

**7.** Xâu nhị phân biểu diễn tổ hợp chập $r$ liền sau cần phải khác xâu nhị phân biểu diễn tổ hợp xuất phát tại vị trí thứ $i$ vì tại các vị trí $i + 1, \ldots, r$ là các số lớn nhất có thể có được. Và $a_i + 1$ là số nhỏ nhất mà ta có thể đặt vào vị trí thứ $i$ nếu ta muốn có tổ hợp lớn hơn tổ hợp xuất phát. Khi đó $a_i + 2, \ldots, a_i + r + i + 1$ là các số nhỏ nhất có thể có tại các vị trí $i + 1$ tới $r$. Như vậy ta đã tạo ra tổ hợp chập $r$ liền sau.

**9.** 123, 132, 213, 231, 312, 321, 124, 142, 214, 241, 412, 421, 125, 152, 215, 251, 512, 521, 134, 143, 314, 341, 413, 431, 135, 153, 315, 351, 513, 531, 145, 154, 415, 451, 514, 541, 234, 243, 324, 342, 423, 432, 235, 253, 325, 352, 523, 532, 245, 254, 425, 452, 524, 542, 345, 354, 435, 453, 534, 543.

**11.** Ta sẽ chứng minh nó là song ánh bằng cách chỉ ra nó có ngược. Cho số nguyên dương nhỏ hơn $n!$, gọi $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ là các số Cantor của nó. Đặt $n$ vào vị trí $n - a_{n-1}$ vì rõ ràng $a_{n-1}$ là số các số nguyên nhỏ hơn $n$ và đứng sau trong hoán vị. Sau đó đặt $(n - 1)$ vào vị trí còn trống thứ $(n - 1) - a_{n-2}$, trong đó ta đánh số các vị trí còn trống theo thứ tự 1, 2, ..., $n$ - 1. Cứ tiếp tục quá trình này cho tới khi 1 được đặt vào vị trí trống cuối cùng. Vì chúng ta đã xây dựng được ánh xạ ngược nên phép tương ứng đã cho là song ánh.

**13.**
```
procedure Cantor permutation (n, i : các số nguyên với n ≥ 1 và 0 ≤ i < n !)
x := n
for j := 1 to n
    p_j := 0
for k := 1 to n - 1
begin
    c := ⌊x/(n - k)!⌋
    x := x - c(n - k)!
    h := n
    while p_h ≠ 0
        h := h - 1
    for j := 1 to c
    begin
        h := h - 1
        while p_h ≠ 0
            h := h - 1
    end
    h := 1
    while p_h ≠ 0
        h := h + 1
    p_h := 1
{p_1 p_2 ... p_n là hoán vị tương ứng với i}
```

## Bài tập bổ sung

**1.** a) 151 200 b) 1 000 000
c) 210 d) 5005

**3.** $3^{100}$

**5.** 24 600

**7.** a) 4 060 b) 2 688 c) 25 009 600

**9.** a) 192 b) 301 c) 300 d) 300

**11.** 639

**12.** Tổng lớn nhất có thể là 240 và tổng nhỏ nhất có thể 15. Vì thế số các tổng có thể là 226. Vì có 252 tập con 5 phần tử của tập 10 phần tử, theo nguyên lý Dirichlet ta suy ra ít nhất có hai tập có tổng như nhau.

**13.** a) 50 b) 50 c) 14 d) 5

**14.** Gọi $a_1a_2...a_m$ là các số nguyên và gọi $d_i = \sum_{j=1}^{i} a_j$. Nếu $d_i \equiv 0 \pmod m$ với một $i$ nào đó, bài toán được chứng minh. Ngược lại $d_1$ **mod** $m$, ... $d_m$ **mod** $m$ là $m$ số nguyên có giá trị thuộc $\{1, 2, ..., m - 1\}$. Theo nguyên lý Dirichlet $d_k = d_l$ với $k, l$ nào đó $1 \leqslant k < l \leqslant m$. Khi đó $\sum_{j=k+1}^{l} a_j = d_l - d_k \equiv 0 \pmod m$.

**19.** Có thể nhận được biểu diễn thập phân của một số hữu tỷ $a/b$ bằng cách chia $a$ cho $b$ trong đó $a$ được viết dưới dấu phẩy thập phân và theo sau là một dãy dài tùy ý các số 0. Bước cơ sở là tìm chữ số tiếp theo của thương, tức là $\lfloor r/b \rfloor$, trong đó $r$ là số dư cùng với chữ số tiếp theo của số bị chia được hạ xuống. Số dư hiện thời nhận được từ số dư ở bước trước bằng cách trừ đi $b$ lần chữ số của thương ở bước trước. Cuối cùng, số bị chia không còn mà chỉ có số 0 được hạ xuống. Hơn nữa, số dư chỉ có thể nhận nhiều nhất $b$ giá trị. Như vậy, theo nguyên lý Dirichlet, đến một lúc nào đó chúng ta sẽ có một tình trạng giống như đã có. Từ điểm này về sau, việc tính toán được tiến hành hoàn toàn như trước, tức là thương sẽ lặp lại.

**21.** a) 125 970 b) 20 c) 141 120 525

d) 141 120 505 e) 177 100 f) 141 078 021

**23.** $4^{13}/C(52,13)$

**25.** a) 10 b) 8 c) 7

**27.** Số cách chọn $r$ phần tử từ tập $n$ phần tử chính bằng số cách quyết định xem không chọn $n - r$ phần tử nào.

**29.** $C(n+2, r+1) - C(n+1, r+1) + C(n+1, r) - 2C(n+1, r+1) - C(n+1, r+1) + C(n+1, r)$

$$= 2C(n+1, r+1) - (C(n, r+1)) + C(n,r) + (C(n, r) + C(n, r-1))$$
$$= 2C(n+1, r+1) - C(n, r+1) + C(n, r-1).$$

**31.** Theo định lý nhị thức, $3^n = (2+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$

**33.** $C(n+1,5)$

**35.** a) $1/C(52,13)$ b) $4/C(52,13)$ c) $2\,944\,656/C(52,13)$

d) $35\,335\,872/C(52,13)$ e) $1\,244\,117\,160/C(52,13)$ f) $29\,858\,811\,840/C(52,13)$

**37.** $5^{24}$

**39.** a) 45 b) 57 c) 12

**41.** a) 386 b) 56 c) 512

**43.** 0 nếu $n < m$ ; $C(n-1, n-m)$ nếu $n \geqslant m$.

**45.** **procedure** *next permutation* ($n$ : nguyên dương, $a_1a_2...a_r$ : nguyên dương không vượt quá $n$ và $a_1a_2...a_r \neq nn...n$) ;

```
i := r
while a_i = n
begin
    a_i = 1
    i := i - 1
end
a_i := a_i + 1
{a_1a_2...a_r là hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển}.
```

# CHƯƠNG 5

## *Tiết 5.1*

**1.** a) 2, 12, 72, 432, 2592 b) 2, 4, 16, 256, 65 536

c) 1, 2, 5, 11, 26 d) 1, 1, 0, 1, 3

**3.** a) Có b) Không

c) Không d) Có e) Có

f) Có g) Không h) không

**5.** a) $a_n = 2.3^n$ b) $a_n = 2n+3$

c) $a_n = 1+n(n+1)/2$ d) $a_n = n^2+4n+4$

e) $a_n = 1$ f) $a_n = (3^{n+1}-1)/2$

g) $a_n = 5n!$ h) $a_n = 2^n n!$

**7.** a) $a_n = 3a_{n-1}$ b) 5 904 900

**9.** a) $a_n = n+a_{n-1}$, $a_0 = 0$ b) $a_{12} = 78$

c) $a_n = n(n+1)/2$

**11.** Gọi $P(n)$ là "$H_n=2^n-1$". *Bước cơ sở* : $P(1)$ là đúng vì $H_1=1$. *Bước quy nạp* : Giả sử $H_n = 2^n-1$. Khi đó vì $H_{n+1} = 2H_n+1$ ta suy ra $H_{n+1} = 2(2^n-1)+1 = 2^{n+1} - 1$.

**13.** a) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-5}$ với $n \geq 5$

b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_3 = 8$, $a_4 = 16$.

c) 1217

**15.** 9494

**17.** a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$ với $n \geq 2$

b) $a_0 = 0$, $a_1 = 0$

c) 94

**19.** a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ với $n \geq 3$.

b) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$.

c) 81

**21.** a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 2$

b) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$

c) 34

**23.** a) $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$ với $n \geq 2$

b) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$

c) 448

**25.** a) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 2$

b) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$

c) 239

**27.** a) $a_n = 2a_{n-1}$ với $n \geq 2$ b) $a_1 = 3$
c) 96

**29.** a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 2$
b) $a_o = 1, a_1 = 1$ c) 89

**31.** a) $R_n = n + R_{n-1}$, $R_o = 1$
b) $R_n = n(n + 1)/2 + 1$

**33.** a) $S_n = S_{n-1} + (n^2-n+2)/2$, $S_o = 1$ ;
b) $S_n=(n^3+5n+6)/6$

**35.** 64

**37.** a) $a_n=2a_{n-1}+2a_{n-2}$
b) $a_o = 1$ $a_1 = 3$
c) 1224

**39.** Rõ ràng $S(m,1) = 1$ với $m \geq 1$. Nếu $m \geq n$, khi đó một hàm từ tập $m$ phần tử tới tập $n$ phần tử mà không là toàn ánh, sẽ là hàm toàn ánh từ tập $m$ phần tử lên tập $k$ phần tử của tập $n$ phần tử xuất phát, với $1 \leq k \leq n-1$. Ta có $S(m, k)$ hàm toàn ánh từ tập $m$ phần tử lên tập $k$ phần tử. Nhưng ta cũng có $C(n,k)$ tập hợp $k$ phần tử của tập $n$ phần tử. Vậy số các hàm toàn ánh từ tập $m$ phần tử lên các tập con $k$ phần tử của tập $n$ phần tử là $C(n,k)\ S(m,k)$. Vì thế có tất cả $\sum_{k=1}^{n-1} C(n,k)S(m,k)$ hàm từ tập $m$ phần tử tới tập $n$ phần tử mà không là hàm toàn ánh. Nhưng ta có tất cả $n^m$ hàm từ tập $m$ phần tử tới tập $n$ phần tử, vì thế

$$S(m,n) = n^m - \sum_{k=1}^{n-1} C(n,k)S(m,k).$$

**41.** a) 0 b) 0 c) 2 d) $2^{n-1}-2^{n-2}$

**43.** $a_n-2\nabla a_n + \nabla^2 a_n = a_n-2(a_n-a_{n-1})+(\nabla a_n - \nabla a_{n-1}) = -a_n+2a_{n-1} + ((a_n-a_{n-1})-(a_{n-1}-a_{n-2})) = -a_n + 2a_{n-1} + (a_n-2a_{n-1}-a_{n-2}) = a_{n-2}$

**45.** $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_n - \nabla a_n) + (a_n - 2\nabla a_n + \nabla^2 a_n) = 2a_n - 3\nabla a_n + \nabla^2 a_n$ hoặc $a_n = 3\nabla a_n - \nabla^2 a_n$.

## *Tiết 5.2*

**1.** a) Bậc 3 b) Không c) Bậc 4
d) Không e) Không f) Bậc 2

**3.** a) $a_n = 3.2^n$ b) $a_n = 2$ c) $a_n = 3.2^n-2.3^n$
d) $a_n = 6.2^n-2n.2^n$ e) $a_n = n(-2)^{n-1}$ f) $a_n = 2^n - (-2)^n$
g) $a_n = (1/2)^{n+1} - (-1/2)^{n+1}$

**5.** $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

**7.** $(2^{n+1} + (-1)^2)/3$

**9.** a) $P_n = 1.2\ P_{n-1} + 0.45\ P_{n-2}$, $P_o = 100\ 000$, $P_1 = 120\ 000$
b) $P_n = (250\ 000/3)(3/2)^n + (50\ 000/3)(-3/10)^n$.

**11.** a) *Bước cơ sở* : Với $n$=1 chúng ta có 1 = 0 + 1 và với $n$=2 ta có 3 = 1+2. *Bước quy nạp* : Giả sử đúng với $k \leq n$. Khi đó $L_{n+1} = L_n + L_{n-1} = f_{n-1} + f_{n+1} + f_{n-2} + f_n = (f_{n-1} + f_{n-2}) + (f_{n+1} + f_n) = f_n + f_{n+2}$

b) $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

**13.** $a_n = 8(-1)^n - 3(-2)^n + 4.3^n$

**15.** $a_n = 5 + 3(-2)^n - 3^n$.

**17.** Gọi $a_n = C(n,0) + C(n-1,1) + \ldots + C(n-k,k)$ trong đó $k = \lfloor n/2 \rfloor$. Trước tiên giả sử rằng $n$ là chẵn, vì thế $k=n/2$ và số hạng cuối cùng là $C(k, k)$. Theo đồng nhất thức Pascal ta có $a_n = 1 + C(n-2,0) + C(n-2,1) + C(n-3,1) + C(n-3,2) + \ldots + C(n-k,k-2) + C(n-k,k-1) + 1 = 1 + C(n-2,1) + C(n-3,2) + \ldots + C(n-k,k-1) + C(n-2,0) + C(n-3,1) + \ldots + C(n-k,k-2) + 1 = a_{n-1} + a_{n-2}$ vì $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = k-1 = \lfloor (n-2)/2 \rfloor$. Khi $n$ lẻ ta cũng tính toán tương tự như trên. Vì $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với mọi số nguyên dương $n$, $n \geq 2$. Cũng như vậy, $a_1 = C(1,0) = 1$ và $a_2 = C(2,0) + C(1,1) = 2$, chúng là $f_2$ và $f_3$. Ta suy ra $a_n = f_{n+1}$ với mọi $n$ nguyên dương.

**19.** a) $3a_{n-1} + 2^n = 3(-2)^n + 2^n = 2^n(-3+1) = 2^{n+1} = a_n$.

b) $a_n = \alpha\, 3^n - 2^{n+1}$ c) $a_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$

**21.** a) $A = -1$, $B = -7$ b) $a_n = \alpha\, 2^n - n - 7$

c) $a_n = 11.2^n - n - 7$

**23.** a) 1, -1, $i$, $-i$

b) $a_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(-1)^n + \frac{2+i}{4} i^n + \frac{2-i}{4}(-i)^n$

**25.** a) Dùng công thức cho $f_n$ ta thấy $\left| f_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right| < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$

Điều này chứng tỏ $f_n$ là số nguyên gần nhất với $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

b) Nhỏ hơn khi $n$ chẵn, lớn hơn khi $n$ lẻ.

**27.** $a_n = f_{n-1} + 2f_n - 1$

**29.** a) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $a_0 = 2$, $a_1 = 6$

b) $(4^{n+1} + (-1)^n)/5$

## Tiết 5.3

**1.** 14

**3.** Bước một là $(1110)_2(1010)_2 = (2^4 + 2^2)(11)_2(10)_2 + 2^2((11)_2 - (10)_2)((10)_2 - (10)_2) + (2^2 + 1)(10)_2.(10)_2$. Tích là : $(10001100)_2$.

**5.** $C = 50665C + 729 = 33979$

**7.** a) 2 b) 4 c) 7

**9.** a) 79 b) 48829 c) 30517579

**11.** $O(\log n)$

**13.** $O(n^{\log_3 2})$

**15.** 5

**17.** Với $k = \log_b n$, ta suy ra $f(n) = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} a^j c(n/b^j)^d = a^k f(1) + \sum_{j=0}^{k-1} cn^d = a^k f(1) + kcn^d$ $= a^{\log_b n} f(1) + c(\log_b n)n^d = n^{\log_b a} f(1) + cn^d \log_b n = n^d f(1) + cn^d \log_b n$.

**19.** Gọi $k = \log n$ với $n$ là lũy thừa của $b$. Bước cơ sở : Nếu $n=1$ với $k = 0$ thì $c_1 n^d + c_2 n^d + c_2 n^{\log_b a} = c_1 + c_2 = b^d c/(b^d - a) + f(1) + b^d c/(a - b^d) = f(1)$. Bước quy nạp : Giả sử đúng với $k$, với $n = b^k$. Khi đó với $n = b^{k+1}$, $f(n) = af(n/b) + cn^d = a\{[b^d c/(b^d-a)](n/b)^d + [f(1) + b^d c/(a-b^d)].(n/b)^{\log_b a})\} + cn^d = b^d\ c/(b^d-a)n^d\ a/b^d + [f(1) + (b^d c/(a-b^d)]n^{\log_b a} + cn^d = n^d[ac/(b^d-a) + c(b^d-a)/(b^d-a)] + [f(1) + b^d c/(a-b^d c)]n^{\log_b a} = [(b^d c)/(b^d-a)]n^d + [f(1) + b^d c/(a-b^d)]\ n^{\log_b a}$

**21.** Nếu $a > b^d$, thì $\log_b a > d$, vì thế số hạng thứ hai sẽ trội hơn và $O(n^{\log_b a})$.

**23.** $O(n^{\log_4 5})$

**25.** $O(n^3)$

## Tiết 5.4

**1.** a) 30 b) 29 c) 24 d) 18

**3.** 1%

**5.** a) 300 b) 150 c) 175 d) 100

**7.** 492

**9.** 974

**11.** 55

**13.** 248

**15.** 50,138

**17.** 234

**19.** $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| -$
$|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_2 \cap A_3| -$
$|A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_4| - |A_3 \cap A_5| - |A_4 \cap A_5| +$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_5| +$
$|A_1 \cap A_3 \cap A_5| + |A_1 \cap A_4 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5| +$
$|A_2 \cap A_4 \cap A_5| + |A_3 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| -$
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| -$
$|A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$

**21.** $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| + |A_5| +$
$|A_6| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_1 \cap A_5| - |A_1 \cap A_6| -$
$|A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_2 \cap A_5| - |A_2 \cap A_6| - |A_3 \cap A_4| -$
$|A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_6| - |A_4 \cap A_5| - |A_4 \cap A_6| - |A_5 \cap A_6|$

## Bài tập bổ sung

**1.** a) $A_n = 4A_{n-1}$ b) $A_1 = 40$ c) $A_n = 10.4^n$

3. a) $M_n = M_{n-1} + 160000$ b) $M_1 = 186000$
c) $M_n = 160000n + 26000$ d) $T_n = T_{n-1} + 160000n + 26000$
e) $T_n = 80000n^2 + 160000n$

5. a) $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ b) $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1$
c) $a_{12} = 12$

7. a) 2 b) 5
c) 8 d) 16

9. $a_n = 2^n$

11. $a_n = \sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{m_k} \alpha_{kj} n^{j-1} r_k^n$ trong đó $\alpha_{kj}$ là các hằng số.

13. $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$

15. $O(n^4)$

17. $O(n)$

19. a) $18n + 18$ b) 18 c) 0

21. $\Delta(a_n b_n) = a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n = a_{n+1}(b_{n+1} - b_n) + b_n(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1}\Delta b_n + b_n \Delta a_n$

23. 7

25. 110

27. 0

29. a) 19 b) 65 c) 122
d) 167 e) 168

31. $D_{n-1}/(n-1)!$

33. 11/32

# CHƯƠNG 6

## Tiết 6.1

1. a) $\{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3)\}$

   b) $\{(1,3), (2,2), (3,1), (4,0)\}$

   c) $\{(1,0), (2,0), (2,1), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

   d) $\{(1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,2), (3,0), (3,3), (4,0)\}$ giả sử rằng 0 không chia hết cho 0

   e) $\{(0,1), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (4,3)\}$

   f) $\{(1,2), (2,1), (2,2)\}$

3. a) Bắc cầu
   b) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu
   c) Đối xứng
   d) Phản đối xứng
   e) Phản xạ, đối xứng, phản đối xứng, bắc cầu
   f) Không có các tính chất đó

5. a) Đối xứng
   b) Đối xứng, bắc cầu
   c) Đối xứng
   d) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu
   e) Phản xạ, bắc cầu
   f) Phản xạ, đối xứng, bắc cầu
   g) Phản đối xứng
   h) Phản đối xứng, bắc cầu

7. *(c), (d), (f)*

9. Có, ví dụ quan hệ $\{(1,1)\}$ trên $\{1,2\}$

11. *(a)*

13. $2^{mn}$

15. a) $\{(a,b) \mid a$ chia hết cho $b\}$ b) $\{(a,b) \mid b$ không chia hết cho $a\}$

17. Đồ thị của $f^{-1}$

19. a) $\{(a,b) \mid a$ được yêu cầu phải đọc hoặc đã đọc $b\}$

    b) $\{(a,b) \mid a$ được yêu cầu phải đọc và đã đọc $b\}$

    c) $\{(a,b) \mid a$ được yêu cầu phải đọc $b$ nhưng chưa đọc hoặc $a$ đã đọc $b$ nhưng không được yêu cầu phải đọc$\}$.

    d) $\{(a,b) \mid a$ được yêu cầu phải đọc $b$ nhưng chưa đọc nó $\}$

    e) $\{(a,b) \mid a$ đã đọc $b$ nhưng không được yêu cầu phải đọc nó$\}$

21. $S \circ R = \{(a,b) \mid a$ là bố hoặc mẹ của $b\}$

    $R \circ S = \{(a,b) \mid a$ là cô hoặc chú bác của $b\}$

23. 8

25. a) $2^{n(n+1)/2}$
    b) $2^n 3^{n(n-1)/2}$
    c) $3^{n(n-1)/2}$
    d) $2^{n(n-1)}$
    e) $2^{n(n-1)/2}$
    f) $2^{n^2} - 2 \cdot 2^{n(n-1)}$

27. Không thể tồn tại một số $b$ như vậy.

**29.** Nếu $R$ là đối xứng và $(a,b) \in$ R, thì $(b,a) \in$R, sao cho $(a,b) \in R^{-1}$. Do đó $R \subseteq R^{-1}$. Chứng minh tương tự $R^{-1} \subseteq R$. Suy ra $R = R^{-1}$. Ngược lại, nếu $R = R^{-1}$ và $(a,b) \in$ R, thì $(a, b) \in R^{-1}$, sao cho $(b,a) \in$R. Vậy $R$ là đối xứng.

**31.** $R$ là phản xạ nếu và chỉ nếu $(a, a) \in$R với mọi $a \in$ A, tức là nếu và chỉ nếu $(a,a) \in R^{-1}$ (vì $(a,a) \in$ R nếu và chỉ nếu $(a,a) \in R^{-1}$), điều này có nghĩa là nếu và chỉ nếu $R^{-1}$ là phản xạ.

**33.** Dùng qui nạp toán học. Kết quả là tầm thường với $n$=1. Giả sử $R^n$ là phản xạ và bắc cầu. Theo Định lý 1, $R^{n+1} \subseteq R$. Để thấy rằng $R \subseteq R^{n+1} = R^n \circ R$, giả sử $(a,b) \in$ R. Theo giả thiết của phép qui nạp $R^n = R$ và do đó nó là phản xạ. Vậy $(b,b) \in R^n$. Do đó $(a,b) \in R^{n+1}$.

**35.** Dùng qui nạp toán học. Kết quả là tầm thường với $n$=1. Giả sử $R^n$ là phản xạ. Khi đó $(a,a) \in R^n$ với mọi $a \in$ A và $(a,a) \in$ R. Do vậy $(a,a) \in R^n \circ R = R^{n+1}$ với mọi $a \in$ A.

**37.** Khôngs. Ví dụ lấy $R = \{(1,2), (2,1)\}$.

## *Tiết 6.2*

**1.** $\{(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)\}$

**3.** (Nadir, 122, 34, Detroit, 08 :10), (Acme, 221, 22, Denver, 08 :17), (Acme, 122, 33, Anchorage, 08 :22), (Acme, 323, 34, Honolulu 08 :30), (Nadir, 199, 13 Detroit, 08 :47), (Acme, 222, 22, Denver, 09 :10), (Nadir, 322, 34, Detroit, 09 :44).

**5.** Hãng hàng không và ố chuyến bay, hãng hàng không và giờ cất cánh.

**7.** $P_{3,5,6}$

**9.**

| Hãng hàng không | Nơi đến |
|---|---|
| Nadir | Detroit |
| Acme | Denver |
| Acme | Anchorage |
| Acme | Honolulu |

**11.**

| Nhà cung cấp | Chi tiết số | Dự án | Số lượng | Mã màu |
|---|---|---|---|---|
| 23 | 1092 | 1 | 2 | 2 |
| 23 | 1101 | 3 | 1 | 1 |
| 23 | 9048 | 4 | 12 | 2 |
| 31 | 4975 | 3 | 6 | 2 |
| 31 | 3477 | 2 | 25 | 2 |
| 32 | 6984 | 4 | 10 | 1 |
| 32 | 9191 | 2 | 80 | 4 |
| 33 | 1001 | 1 | 14 | 8 |

## Tiết 6.3

**1.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

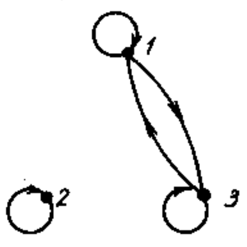
**3.** $R$ là phản xạ nếu và chỉ nếu tất cả các phần tử trên đường chéo đều bằng 0.

**5.** Thay mỗi số 0 thành 1 và mỗi số 1 thành 0.

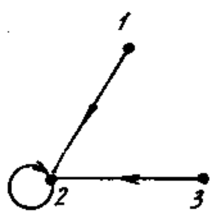
**7.** a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**9.** a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

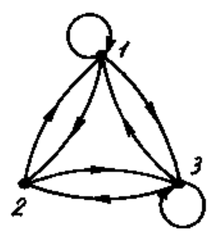
**11.** a)




b)




c)




**13.** $\{(a,b),\ (a,c),\ (b,c),\ (c,b)\}$

**15.** $\{(a,a),\ (a,b),\ (a,c),\ (b,a),\ (b,b),\ (b,c),\ (c,a),\ (c,b),\ (d,d)\}$

**17.** a) Chỉ không phản xạ b) Chỉ phản xạ c) Chỉ đối xứng

**19.** Chứng minh bằng qui nạp toán học. Kết quả tầm thường với $n=1$. Giả sử nó đúng với $n$. Vì $R^{n+1} = R^n \circ R$, nên ma trận của nó là $\mathbf{M}_R \odot M_R{}^n$. Theo giả thiết qui nạp thì điều đó có nghĩa là $\mathbf{M}_R \odot \mathbf{M}_R{}^{[n]} = \mathbf{M}_R{}^{[n+1]}$

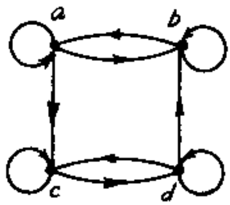
## Tiết 6.4

**1.** a) $\{(0,0),\ (0,1),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,2),\ (3,0),\ (3,3)\}$

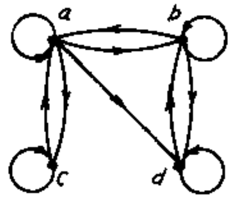
b) $\{(0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2),\ (3,0)\}$

**3.** $\{(a,b)\ |\ a$ chia hết cho $b$ hoặc $b$ chia hết cho $a\}$

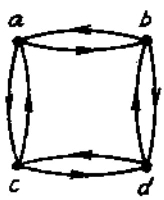
5.



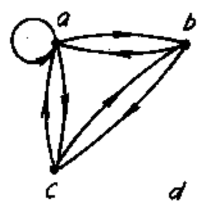

7.



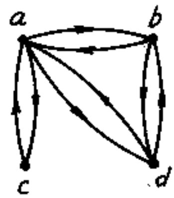

9. a)



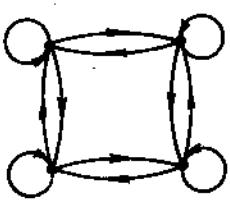

b)



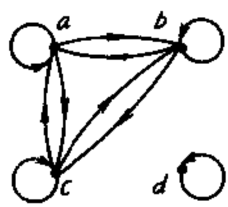

c)



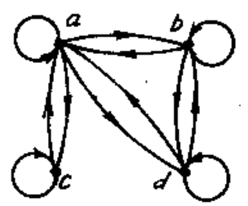

11. a)



b)




c)




13. Bao đóng đối xứng của $R$ là $R \cup R^{-1}$. $\mathbf{M}_{R\cup R^{-1}} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_{R^{-1}} = \mathbf{M}_R \vee \mathbf{M}_R{}^t$

15. Chỉ khi $R$ là không phản xạ, trong trường hợp này $R$ là bao đóng của chính nó.

17. *a,a,a,a ; b,c,c,b ; c,b,c,c ; c,c,b,c ; c,c,c,c ; d,e,e,d ; e,d,e,e ; e,e, d,e ; e,e,e,e.*

19. a) {{(1,1), (1,5), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,5), (5,3), (5,4)}

b) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,5), (3,1), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (5,1), (5,3), (5,5)}

c) {1,1), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

d) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

e) {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5,), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

f) ((1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,2), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)}

21. a) Nếu có một sinh viên $c$ cùng lớp với $a$ và $a$ cùng lớp với $b$.

b) Nếu có hai sinh viên $c$ và $d$ sao cho $a$ và $c$ cùng lớp, $c$ và $d$ cùng lớp và $d$ và $b$ cùng lớp.

c) Nếu có một dãy $s_0, \ldots, s_n$ các sinh viên với $n \geq 1$ sao cho $s_0 = a$, $s_n = b$ và đối với mỗi $i = 1,2,\ldots,n$, $s_i$ và $s_{i-1}$ cùng lớp.

**23.** Kết quả suy ra từ $(R^*)^{-1} = (\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (R^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n = R^*$

**25.** a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

**27.** Đáp số như đối với Bài tập 25.

**29.** a) {(1,1), (1,2), (1,4), (2,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

b) {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

c) {(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (2,4), (3,3), (4,1), (4,2), (4,4)}

**31.** Thuật toán 1 : $O(n^{3,8})$ ; Thuật toán 2 : $O(n^3)$

**33.** Xuất phát từ

**A** := $\mathbf{M}_R \vee \mathbf{I}_n$ và vòng lặp chỉ đối với $i$ := 2 đến $n$-1

**35.** a) Vì $R$ là phản xạ, nên mỗi quan hệ chứa nó cũng cần phải là phản xạ.

b) Cả {(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (2,2)} và {(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)} đều chứa $R$ và có một số lẻ phần tử, nhưng không có tập nào là tập con của tập nào.

## Tiết 6.5

**1.** a) Quan hệ tương đương b) Không phản xạ, không bắc cầu

c) Quan hệ tương đương d) Không bắc cầu

e) Không đối xứng, không bắc cầu

**3.** a) Quan hệ tương đương b) Không bắc cầu

c) Không phản xạ, không đối xứng, không bắc cầu

d) Quan hệ tương đương e) Không phản xạ, không bắc cầu

**5.** a) $(x,x) \in R$ vì $f(x) = f(x)$, vậy $R$ là phản xạ. $(x,y) \in R$ nếu và chỉ nếu $f(x) = f(y)$ điều này đúng nếu và chỉ nếu $f(y) = f(x)$, tức nếu và chỉ nếu $(y,x) \in R$. Do đó, $R$ là đối xứng. Nếu $(x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ khi đó $f(x) = f(y)$ và $f(y) = f(z)$, do đó $f(x) = f(z)$. Vì vậy $(x,z) \in R$, suy ra $R$ là bắc cầu.

b) Các tập $f^{-1}(b)$ đối với $b$ trong miền giá trị của $f$.

**7.** Giả sử $x$ là một xâu có chiều dài là 3 hoặc lớn hơn. Vì $x$ phù hợp với chính nó trong ba bit đầu tiên nên $(x,x) \in R$, vậy $R$ là phản xạ. Giả sử $(x,y) \in R$, khi đó $x$ và $y$ như nhau ở ba bit đầu tiên, tức là $y$ và $x$ như nhau ở ba bit đầu tiên, do đó $(y,x) \in R$.

Vậy $R$ là đối xứng nếu $(x, y)$ và $(y,z)$ đều thuộc $R$, thì $x$ và $y$ và $y$ và $z$ như nhau ở ba bit đầu tiên. Do đó, $x$ và $z$ như nhau ở ba bit đầu tiên. Vậy $(x,z) \in R$, suy ra $R$ là phản xạ.

**9.** Mệnh đề $p$ tương đương với $q$ có nghĩa là chúng có bảng giá trị chân lý như nhau. $R$ là phản xạ vì $p$ có bảng giá trị chân lý hệt như $p$. $R$ là đối xứng vì nếu $p$ và $q$ có cùng bảng chân lý thì $q$ và $p$ cũng như vậy. Nếu $p$ và $q$ có cùng bảng chân lý và $q$ và $r$ cũng có cùng bảng chân lý thì $p$ và $r$ cũng có cùng bảng chân lý. Do đó, $R$ là bắc cầu.

**11.** Không

**13.** Không

**15.** $R$ là phản xạ vì xâu bit $s$ có cùng số các số 1 như chính nó. $R$ là đối xứng vì $s$ và $t$ có cùng số các số 1 kéo theo $t$ và $s$ cũng có cùng số các số 1. $R$ là bắc cầu vì $s$ và $t$ có cùng số các số 1 và $t$ và $u$ có cùng số các số 1 kéo theo $s$ và $u$ có cùng số các số 1.

**17.** a) Các tập người cùng tuổi

b) Các tập người có cùng bố và mẹ

**19.** Tập tất cả các xâu có chính xác hai số 1

**21.** a) $\{s \mid s$ là xâu có chiều dài bằng 3$\}$

b) $\{s1 \mid s$ là xâu có chiều dài bằng 3$\}$

c) $\{s11 \mid s$ là xâu có chiều dài bằng 3$\}$

d) $\{s10101 \mid s$ là sâu có chiều dài bằng 3$\}$

**23.** $\{6n + k \mid n \in \mathbf{Z}\}$ với $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

**25.** a) Không b) Có c) Có d) Không

**27.** $[0]_6 \subseteq [0]_6$, $[1]_6 \subseteq [1]_6$, $[2]_6 \subseteq [2]_3$, $[3]_6 \subseteq [0]_6$, $[4]_6 \subseteq [1]_3$, $[5]_6 \subseteq [2]_6$.

**29.** $\{(a,b), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c), (d, d), (d,e), (e,d), (e,e)\}$

**31.** a) $\mathbf{Z}$ b) $\{n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbf{Z}\}$

**33.** a) $R$ là phản xạ vì bất kỳ cách tô màu nào đều có thể nhận được từ chính nó qua phép quay $360^\circ$. Để thấy $R$ là đối xứng và bắc cầu chú ý rằng mỗi phép quay đều được phân tích thành hai phép phản xạ gương và ngược lại hợp thành của hai phép phản xạ gương sẽ là một phép quay. Do đó $(C_1, C_2) \in R$ nếu và chỉ nếu $C_2$ có thể nhận được từ $C_1$ bằng hợp thành của các phép phản xạ gương. Do đó, nếu $(C_1,C_2) \in R$ thì $(C_2, C_1)$ cũng thuộc $R$ vì nghịch đảo của hợp thành các phép phản xạ gương cũng là một hợp thành các phép phản xạ (theo thứ tự ngược lại). Do đó, $R$ là đối xứng. Để thấy $R$ là bắc cầu, giả sử $(C_1, C_2)$ và $(C_2, C_3)$ thuộc $R$. Lấy hợp thành của các phép phản xạ trong mỗi trường hợp sẽ cho hợp thành của các phép phản xạ cho thấy $(C_1, C_3) \in R$.

b) Biểu diễn các cách tô màu thành dãy có chiều dài 4 với $r$ và $b$ ký hiệu là đỏ (red) và xanh (blue), tương ứng. Rồi ta liệt kê các chữ ký hiệu màu của ô vuông trên bên trái, ô vuông trên bên phải, ô vuông dưới bên trái, ô vuông dưới bên phải theo thứ tự đó. Các lớp tương đương là : $\{rrrr\}$, $\{bbbb\}$, $\{rrrb, rrbr, rbrr, brrr\}$, $\{bbbr, bbrb, brbb, rbbb\}$, $\{rbbr, brrb\}$, $\{rrbb, brbr, bbrr, rbrb\}$.

**35.** 5

**37.** Có

**39.** $R$

**41.** Trước hết lập bao đóng phản xạ của $R$, sau đó lập bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ, và cuối cùng lập bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của bao đóng phản xạ.

**43.** $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 5$, $p(4) = 15$, $p(5) = 52$, $p(6) = 203$, $p(7) = 877$, $p(8) = 4140$, $p(9) = 21147$, $p(10) = 115975$.

## Bài tập bổ sung

**1.** a) Không phản xạ (vì ta không đưa vào xâu rỗng), đối xứng.

b) Không phản xạ, đối xứng

c) Không phản xạ, phản đối xứng, bắc cầu.

**3.** $((a,b), (a,b)) \in R$ vì $a + b = a + b$. Do đó $R$ là phản xạ. Nếu $((a,b), (c,d)) \in R$, thì $a+d = b+c$ sao cho $c+b = d+a$. Từ đó suy ra $((c,d), (a,b)) \in R$, nên $R$ là đối xứng. Giả sử $((a,b), (c,d))$ và $((c,d), (e,f))$ thuộc $R$. Khi đó $a+d = b+c$ và $c+f = d+e$. cộng hai phương trình đó và trừ hai vế của phương trình cho $c+d$, ta được $a+f = b+e$. Do đó $((a,b), (e,f))$ thuộc $R$, túc $R$ là bắc cầu.

**5.** Giả sử $(a,b) \in R$. Vì $(b,b) \in R$, suy ra $(a,b) \in R^2$.

**7.** Có, có

**9.** Có, có.

**11.** Hai bản ghi với chìa khóa đồng nhất trong hình chiếu cũng sẽ có các chìa khóa đồng nhất trong bản gốc.

**13.** $(\Delta \cup R)^{-1} = \Delta^{-1} \cup R^{-1} = \Delta \cup R^{-1}$.

**15.** a) $R = \{(a, b), (a, c)\}$. Bao đóng bắc cầu của bao đúng đối xứng của $R$ là $\{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$ và nó khác với bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của $R$ là $\{(a,b), (a,c), (b, a), (c,a)\}$.

b) Giả sử $(a,b)$ thuộc bao đóng đối xứng của bao đóng bắc cầu của $R$. Ta cần phải chứng minh rằng $(a,b)$ thuộc bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của $R$. Ta biết rằng ít nhất một trong hai phần tử $(a,b)$ và $(b,a)$ thuộc bao đóng bắc cầu của $R$. Do đó, hoặc tồn tại một đường đi từ $a$ đến $b$ hoặc tồn tại một đường đi từ $b$ đến $a$ (hoặc cả hai). Trong trường hợp đầu, có một đường đi từ $a$ đến $b$ trong bao đóng đối xứng của $R$. Trong trường hợp sau, ta có thể lập một đường đi từ $a$ đến $b$ trong bao đóng đối xứng của $R$ bằng cách đảo hướng của tất cả các cạnh trong đường đi $b$ đến $a$, khi đi theo hướng ngược lại. Do đó, $(a,b)$ thuộc bao đóng bắc cầu của bao đóng đối xứng của $R$.

**17.** Bao đóng của $S$ đối với tính chất **P** là một quan hệ với tính chất **P**, nó chứa $R$ vì $R \subseteq S$. Do đó, bao đóng của $S$ đối với tính chất **P** chứa bao đóng của $R$ đối với tính chất **P**.

**19.** Dùng ý tưởng cơ bản của thuật toán Warshall, trừ điều cho rằng $\omega^{[k]}_{ij}$ bằng chiều dài của đường đi dài nhất từ $v_i$ đến $v_j$ khi dùng các đỉnh trong với các chỉ số dưới không không vượt quá $k$ và bằng -1 nếu không có một đường đi như vậy. Để tìm $\omega^{[k]}_{ij}$ từ các phần tử của $\mathbf{W}_{k-1}$, đối với mỗi cặp $(i, j)$ hãy xác định xem có tồn tại các đường đi từ $v_i$ đến $v_k$ và từ $v_k$ đến $v_j$ hay không khi không dùng các đỉnh có chỉ số lớn hơn $k$. Nếu hoặc $\omega^{[k-1]}_{ik}$ hoặc $\omega^{[k-1]}_{kj}$ bằng -1, thì một cặp các đường đi như thế là không tồn tại, ta đặt $\omega^{[k]}_{ij} = \omega^{[k-1]}_{ij}$. Nếu cặp đường đi như thế tồn tại, thì sẽ có hai khả năng. Nếu $\omega^{[k-1]}_{kk} > 0$, thì sẽ có các đường đi với chiều dài tùy ý từ $v_i$ đến $v_j$, ta đặt $\omega^{[k]}_{ij} = \infty$. Nếu $\omega^{[k-1]}_{kk} = 0$, ta đặt $\omega^{[k-1]}_{ij} = \max(\omega^{[k-1]}_{ij}, \omega^{[k-1]}_{ik} + \omega^{[k-1]}_{kj})$. (Ban đầu lấy $\mathbf{W}_0 = \mathbf{M}_R$).

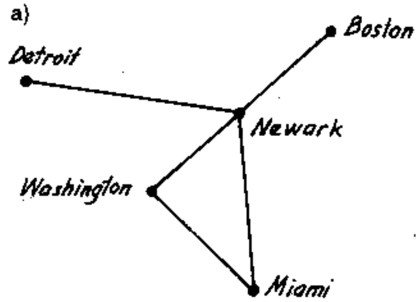
**21.** 25

**23.** Vì $A_i \cap B_j$ là một tập con của $A_i$ và $B_j$ nên tập hợp của các tập con là cái làm mịn của mỗi một phân hoạch đã cho. Chúng ta cần phải chứng minh rằng nó cũng là một phân hoạch. Theo cách xây dựng ta thấy rằng tất cả các tập đó đều không rỗng. Để thấy rằng hợp của chúng là $S$, ta giả sử rằng $s \in S$. Vì $P_1$ và $P_2$ là các phân hoạch của $S$, nên tồn tại các tập $A_i$ và $B_j$ sao cho $s \in A_i$ và $s \in B_j$, do đó $s \in A_i \cap B_j$. Vậy hợp của các tập đó chính là $S$. Để thấy rằng các tập đó đôi một rời nhau, ta chú ý rằng nếu không có $i = i'$ và $j = j'$ thì $(A_i \cap B_j) \cap (A_{i'} \cap B_{j'}) = (A_i \cap A_{i'}) \cap (B_j \cap B_{j'}) = \emptyset$.

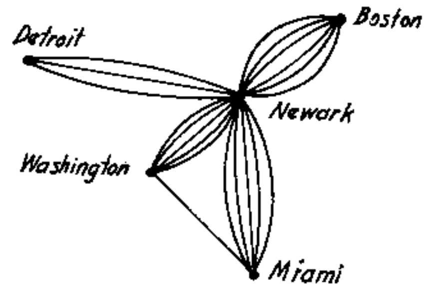
# CHUONG 7

## Tiết 7.1

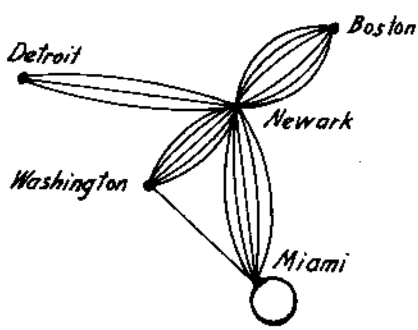
1. a)



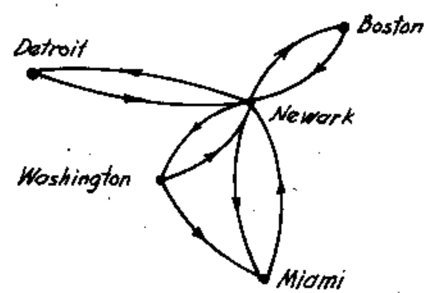

b)



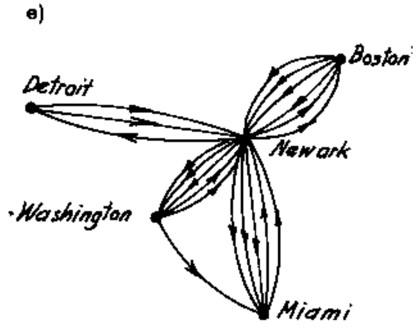

c)




d)




e)



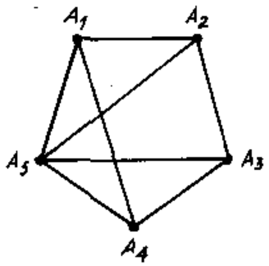

3. Đơn đồ thị

5. Giả đồ thị

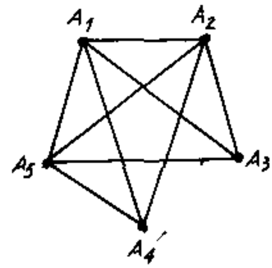
7. Đồ thị có hướng

9. Đa đồ thị có hướng

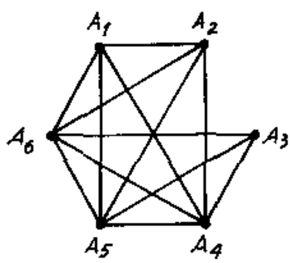
**11.** a)



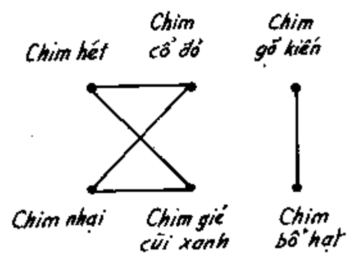

b)



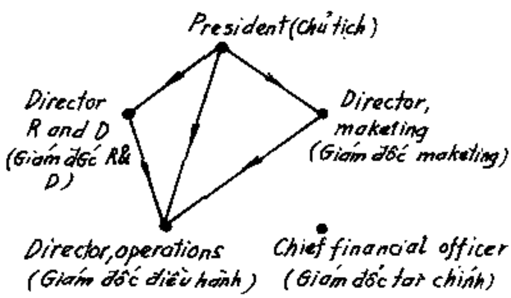

c)



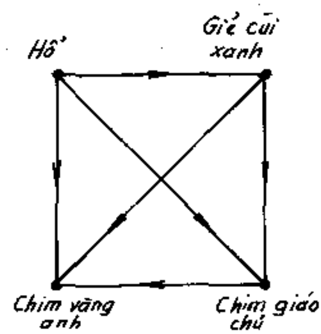

**13.**



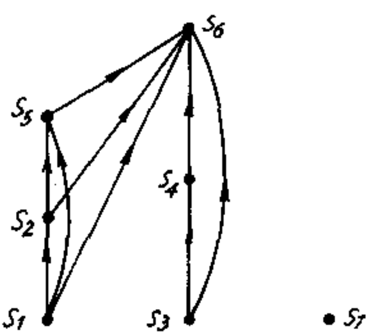

**15.**




**17.**




**19.**




**21.** Biểu diễn mỗi người trong nhóm bằng một đỉnh. Giữa mỗi cặp đỉnh có một cạnh có hướng. Gán nhãn cho cạnh từ $A$ tới $B$ bằng " + " nếu $A$ thích $B$, bằng " − " nếu $A$ không thích $B$, và bằng số 0 nếu $A$ trung lập đối với $B$.

## Tiết 7.2

1. $v = 6$ ; $e = 6$ ; $deg(a) = 2$, $deg(b) = 4$, $deg(c) = 1$, $deg(d) = 0$, $deg(e) = 2$, $deg(f) = 3$; $c$ : đỉnh treo, $d$ : đỉnh cô lập

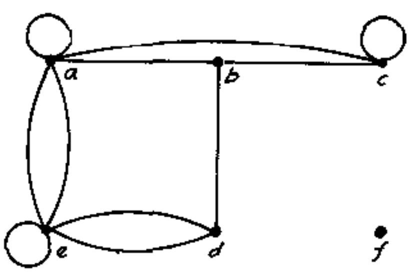
3. $v = 9$ ; $e = 12$ ; $deg(a) = 3$, $deg(b) = 2$, $deg(c) = 4$, $deg(d) = 0$, $deg(e) = 6$ $deg(f) = 0$ ; $deg(g) = 4$; $deg(h) = 2$ ; $deg(i) = 3$ ; $d$ và $f$ các đỉnh cô lập.

5. Không vì tổng các bậc của các đỉnh không thể là số lẻ.

7. $v = 4$ ; $e = 7$ ; $deg^-(a) = 3$, $deg^-(b) = 1$, $deg^-(c) = 2$, $deg^-(d) = 1$, $deg^+(a) = 1$, $deg^+(b) = 2$, $deg^+(c) = 1$, $deg^+(d) = 3$.

9. 5 đỉnh, 13 cạnh $deg^-(a) = 6$, $deg^+(a) = 1$, $deg^-(b) = 1$, $deg^+(b) = 5$, $deg^-(c) = 2$, $deg^+(c) = 5$, $deg^-(d) = 4$, $deg^+(d) = 2$, $deg^-(e) = 0$, $deg^+(e) = 0$.

11.



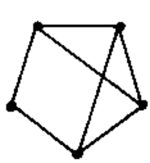

13. Phân đôi

15. Không phân đôi

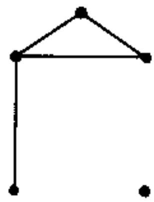
17. Không phân đôi

19. a) $n$ đỉnh, $n(n-1)/2$ cạnh
b) $n$ đỉnh, $n$ cạnh
c) $n + 1$ đỉnh, $2n$ cạnh
d) $m + n$ đỉnh, $mn$ cạnh
e) $2^n$ đỉnh, $n2^{n-1}$ cạnh

21. a) Có



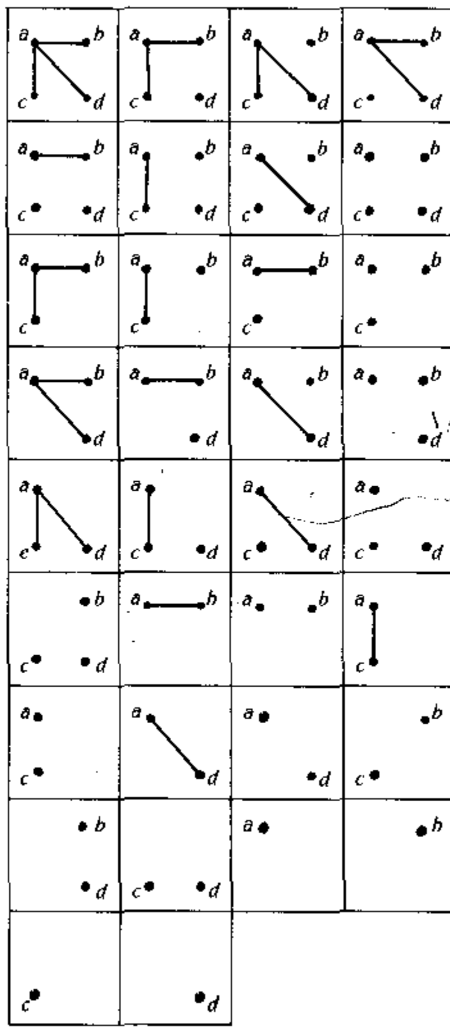
b) Không, tổng các bậc lẻ là lẻ
c) Không
d) Không, tổng các bậc là số lẻ
e) Có



f) Không, tổng các bậc là lẻ.

22. 17

25.



**27.** a) Với mọi $n \geq 1$,

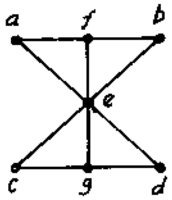
b) Với mọi $n \geq 3$

c) Với $n = 3$

d) Với mọi $n \geq 0$

**29.** 5

**31.**




**33.** a) Đồ thị có $n$ đỉnh, không có cạnh

b) Hợp của $K_m$ và $K_n$

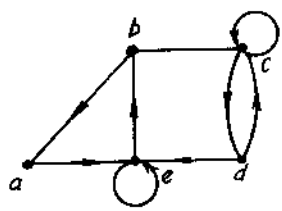
c) Đồ thị có các đỉnh $\{v_1, \ldots v_n\}$ và có cạnh giữa $v_i$ và $v_j$ trừ khi $i \equiv j \pm 1 \pmod{n}$

d) Đồ thị mà các đỉnh của nó được biểu diễn bằng xâu nhị phân độ dài $n$ và có cạnh giữa 2 đỉnh nếu các xâu nhị phân tương ứng khác nhau ít nhất 1 bit

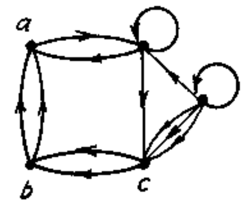
**35.** $v(v - 1)/2 - e$

**37.** Hợp của $G$ và $\overline{G}$ chứa cạnh nối mỗi cặp trong $n$ đỉnh. Vì thế nó là $K_n$.

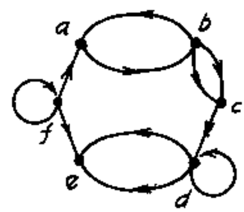
**39.** Bài tập 7 :




Bài tập 8 :

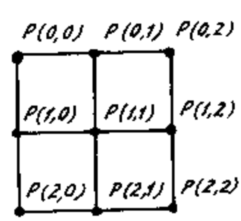



Bài tập 9 :




**41.** Đồ thị có hướng $G = (V, E)$ là nghịch đảo của nó nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn điều kiện $(u, v) \in E$ nếu và chỉ nếu $(v, v) \in E$. Đó chính là điều kiện để quan hệ được biểu diễn bởi $G$ là đối xứng.

**43.**




**45.** Ta có thể nối $P(i, l)$ và $P(k, l)$ bằng cách dùng $i - k$ bước nhảy để nối $P(i, l)$ và $P(k, l)$ ; và $|J - l|$ bước nhảy để nối $P(k, l)$ và $P(k, l)$. Vì thế để nối $P(i, l)$ và $P(k, l)$ cần không quá $|i - k| + |J - l|$ bước nhảy ; số này nhỏ hơn hay bằng $m + m = 2m$, có bậc $O(m)$

## Tiết 7.3

1.

| Đỉnh | Các đỉnh liền kề |
|---|---|
| *a* | b, c, d |
| *b* | a, d |
| *c* | a, d |
| *d* | a, b, c |

3.

| Đỉnh | Các đỉnh liền kề |
|---|---|
| *a* | a, b, c, d |
| *b* | d |
| *c* | a, b |
| *d* | b, c, d |

5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

trong đó các đỉnh được liệt kê theo thứ tự từ điển.

7.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. a)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

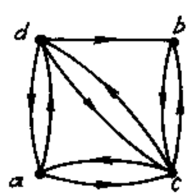
e)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

f)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

11.



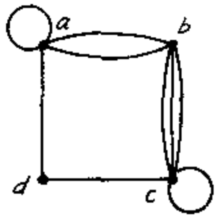

13.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**17.**



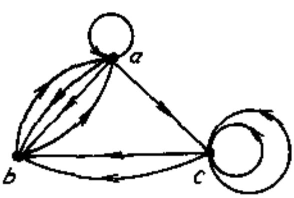

**19.**

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**21.**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**23.**




**25.** Có

**27.** Bài tập 13 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 14 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Bài tập 15 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**29.** $deg(v)$ - số khuyên tai $v$ ; $deg^-(v)$

**31.** 2 nếu $e$ không là khuyên, 1 nếu $e$ là khuyên

**33.** a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \mathbf{B} & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

trong đó **B** là lời giải của b)

d)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

**35.** Đẳng cấu

**37.** Đẳng cấu

**39.** Đẳng cấu

**41.** Không đẳng cấu

**43.** Đẳng cấu

**45.** $G$ là đẳng cấu với chính nó, vì luôn có hàm đồng nhất, vì thế phép đẳng cấu có tính phản xạ. Giả sử $G$ đẳng cấu với $H$. Khi đó tồn tại phép tương ứng một - một $f$ từ $G$ tới $H$ bảo toàn quan hệ liền kề. Từ đó suy ra $f^{-1}$ là phép tương ứng một - một từ $H$ tới $G$ bảo toàn quan hệ liền kề. Vì thế phép đẳng cấu là đối xứng. Nếu $G$ đẳng cấu với $H$ và $H$ đẳng cấu với $K$ thì tồn tại các phép tương ứng một - một $f$ và $g$ từ $G$ tới $H$ và từ $H$ tới $K$ bảo toàn quan hệ liền kề. Từ đó suy ra $g \circ f$ là phép tương ứng một - một từ $G$ tới $K$ bảo toàn quan hệ liền kề. Vì thế phép đẳng cấu có tính chất bắc cầu.

**47.** Tất cả là 0.

**49.** Gán nhãn các đỉnh theo thứ tự sao cho tất cả các đỉnh của phần thứ nhất của tập các đỉnh sẽ được lấy trước. Vì không có cạnh nào nối các đỉnh trong cùng một phần của tập các đỉnh, ma trận liền kề sẽ có dạng như mong đợi.

**51.** $C_5$

**53.** $n = 5$

**55.** 4

**57.** a) Có  b) Không  c) Không

**59.** $G = (V_1, E_1)$ là đẳng cấu với $H = (V_2, E_2)$ nếu và chỉ nếu tồn tại các hàm $f$ từ $V_1$ tới $V_2$ và $g$ từ $E_1$ tới $E_2$ sao cho mỗi hàm là phép tương ứng một - một và với mọi cạnh $e$ trong $E_1$ các điểm đầu mút của $g(e)$ là $f(v)$ và $f(w)$ trong đó $v$ và $w$ là các điểm mút của $e$.

**61.** Có

**63.** Có

**65.** Nếu $f$ là phép đẳng cấu từ đồ thị có hướng $G$ tới đồ thị có hướng $H$ thì $f$ cũng là đẳng cấu từ $G^c$ tới $H^c$. Để thấy điều đó hãy lưu ý rằng $(u, v)$ là cạnh của $G^c$ nếu và chỉ nếu $(v, u)$ là cạnh của $G$, nếu và chỉ nếu $(f(v), f(u))$ là cạnh của $H$, nếu và chỉ nếu $(f(u), f(v))$ là cạnh của $H^c$.

**67.** Tích là $[a_{ij}]$ trong đó $a_{ij}$ là số các cạnh từ $v_i$ tới $v_j$ $(i \neq j)$ và $a_{ii}$ là số các cạnh liên thuộc với $v_i$.

## Tiết 7.4

**1.** a) Đường đi độ dài 4 ; không có chu trình ; không đơn.
b) Không đường đi  c) Không đường đi
d) Chu trình đơn độ dài 5.

**3.** Không

**5.** Không

**7.** a) 3  b) 7  c) 20  d) 61

**9.** a) 3  b) 0  c) 27  d) 0

**11.** a) 1  b) 0  c) 2
d) 1  e) 5  f) 3

**13.** $R$ là phản xạ theo định nghĩa. Giả sử rằng $(u, v) \in R$ ; khi đó có đường đi từ $u$ tới $v$. Sau đó ta có $(v, u) \in R$ vì có đường đi từ $v$ tới $u$, cụ thể là đường đi từ $u$ tới $v$ theo chiều ngược lại. Do đó, $R$ là đối xứng. Giả sử rằng $(u, v) \in R$ và $(v, w) \in R$ khi đó có đường đi từ $u$ tới $v$ và từ $v$ tới $w$. Ghép hai đường đi này ta được đường đi từ $u$ tới $w$. Vì thế $(u, w) \in R$. Từ đó suy ra $R$ là có tính bắc cầu.

**15.** $c$

**17.** $b, c, e, i$.

**19.** Nếu một đỉnh là đỉnh treo thì nó không là đỉnh cắt. Vì thế điểm đầu mút của cạnh cắt là đỉnh cắt nên nó không là đỉnh treo. Loại bỏ một cạnh cắt sẽ tạo ra đồ thị có số thành phần liên thông nhiều hơn đồ thị xuất phát. Nếu điểm đầu mút của cạnh cắt không là đỉnh treo, thì thành phần liên thông tạo ra sau loại bỏ cạnh cắt sẽ chứa đỉnh này. Do đó, việc loại bỏ đỉnh này và tất cả các cạnh liên thuộc với nó kể cả cạnh cắt ban đầu, sẽ tạo ra đồ thị có nhiều thành phần liên thông hơn. Vì thế điểm đầu mút của cạnh cắt không phải là đỉnh treo chính là đỉnh cắt.

**21.** Giả sử có đồ thị liên thông $G$ với nhiều nhất một đỉnh không là đỉnh cắt. Định nghĩa khoảng cách giữa các đỉnh $u$ và $v$, ký hiệu là $d(u, v)$, là độ dài đường đi ngắn nhất giữa $u$ và $v$ trong $G$. Gọi $s$ và r là các đỉnh trong $G$ sao cho $d(s, r)$ là cực đại. Hoặc là $s$ hoặc là $t$ (hoặc cả hai) là đỉnh cắt, vì thế không mất tính tổng quát, giả sử $s$ là đỉnh cắt. Giả sử $w$ thuộc thành phần liên thông không chứa r của đồ thị nhận được bằng cách xóa $s$ và tất cả các cạnh liên thuộc nó khỏi $G$. Vì mọi đường đi từ $w$ tới r chứa $s$, nên $d(w, r) > d(s, r)$. Điều này là vô lý.

**23.** a) Denver - Chicago, Boston - New York

b) Seatle - Porlsnd, Porland - San Francisco, Salt Lake City - Denver, New York - Boston, Boston - Burlington, Boston - Bangor.

**25.** Tập những người có ảnh hưởng tập thể lên mọi người (trực tiếp hay gián tiếp) ; {Deborah, Yvonna}.

**27.** Một cạnh không thể nối hai đỉnh thuộc hai thành phần liên thông khác nhau. Vì có nhiều nhất $C(n_i, 2)$ cạnh trong thành phần liên thông với $n_i$ đỉnh, ta suy ra có nhiều nhất $\sum_{i=1}^{k} C(n_i, 2)$ cạnh.

**29.** Giả thử $G$ là không liên thông. Khi đó nó có thành phần liên thông gồm $k$ đỉnh với $k$ là số nguyên nào đó $1 \leq k \leq n - 1$. $G$ có thể có nhiều nhất là $C(k, 2) + C(n - k, 2) = [k(k - 1) + (n - k)(n - k - 1)]/2 = k^2 - nk + (n^2 - n)/2$ cạnh. Hàm $f$ này đạt cực tiểu tại $k = n/2$ và cực đại tại $k = 1$ hoặc $k = n - 1$. Vì thế, nếu $G$ là không liên thông số cạnh không thể vượt quá giá trị của hàm này tại $k = 1$ hoặc $k = n - 1$, tức là $(n - 1)(n - 2)/2$.

**31.** a) 1 b) 2 c) 6 d) 21

**33.** 2

**35.** Gọi các đường đi $P_1$ và $P_2$ là $u = x_o, x_1, \ldots, x_n = v$ và $u = y_o, y_1, \ldots, y_n = v$, tương ứng. Vì $P_1$ và $P_2$ không chứa cùng một tập các cạnh, nên chúng có thể khác nhau. Nếu điều đó xảy ra chỉ sau khi một đường đã kết thúc thì phần còn lại của đường đi kia sẽ là một chu trình đơn từ $v$ tới $v$. Còn nếu ngược lại, ta giả sử $x_o = y_o$, $x_1 = y_1, \ldots, x_i = y_i$, nhưng $x_{i+1} \neq y_{i+1}$. Đi theo đường $y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \ldots$ cho tới khi một lần nữa lại gặp một đỉnh của $P_1$. Mỗi lần gặp $P_1$ ta đi theo nó tiến hay lui nếu cần để trở về với $x_i$. Vì $x_i = y_i$ nên ta được một chu trình đơn vì không có cạnh nào trong số các $x_k$ có thể được lặp lại, và không có cạnh nào trong số $x_k$ có thể bằng một trong các $y_k$ mà chúng ta đã dùng.

**37.** Đồ thị $G$ là liên thông nếu và chỉ nếu mọi phần tử ngoài đường chéo của $\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \ldots + \mathbf{A}^{n-1}$ là số dương trong đó $\mathbf{A}$ là ma trận liền kề của $G$.

## Tiết 7.5

1. Không
3. Không
5. $a, b, c, d, c, e, d, b, e, a, c, a$
7. $a, i, h, g, d, e, f, g, c, e, h, d, c, a, b, i, c, b, h, a$
9. Tồn tại đường đi Euler : $f, a, b, c, d, e, f, b, d$ là một đường đi Euler như thế.
11. Tồn tại đường đi Euler : $b, c, d, e, f, d, g, i, d, a, h, i, a, b, i, c$ là một đường đi Euler như thế.
13. Tồn tại đường đi Euler : $b, c, d, e, f, d, g, i, d, a, h, i, a, b, i, c$
15. Không, $A$ vẫn có bậc lẻ.
17. Khi đồ thị với các đỉnh là các điểm tại đó các phố giao nhau còn các cạnh là các phố có đường đi Euler.
19. Có
21. Không
23. Nếu có đường đi Euler, khi chúng ta đi thao nó, mỗi đỉnh, trừ đỉnh đầu và đỉnh cuối, phải có bậc - vào và bậc - ra bằng nhau vì mỗi lần chúng ta tới một đỉnh theo một cạnh thì chúng ta rời đỉnh đó theo cạnh khác. Đỉnh xuất phát có bậc - ra lớn hơn bậc - vào một đơn vị, vì ta dùng một cạnh để đi rs khỏi đỉnh này, và sau đó mỗi khi chúng ta lại qua nó thì ta dùng một cạnh để vào và một cạnh để ra khỏi nó. Tương tự, đỉnh cuối phải có bậc - vào lớn hơn bậc - ra một đơn vị. Vì đường đi Euler với hướng đã bị xóa bỏ tạo ra đường đi giữa hai đỉnh tùy ý trong đồ thị vô hướng nền, nên đồ thị là liên thông yếu. Ngược lại, đồ thị có bậc thỏa mãn các điều kiện như trong bài toán. Nếu ta thêm một cạnh nối từ đỉnh có bậc - ra ít hơn tới đỉnh có bậc - vào ít hơn, khi đó đồ thị sẽ có mọi đỉnh với bậc - ra và bậc - vào bằng nhau. Vì đồ thị vẫn còn là liên thông yếu, theo Bài tập 22, đồ thị mới này có chu trình Euler. Xóa cạnh mới thêm vào ta sẽ được đường đi Euler.
25. Không
27. Không
29. $a, b, d, b, c, d, c, a, d$
31. $a, d, b, d, e, b, e, c, b, a$
33. $a, b, c, e, b, d, c, b, f, d, e, f, e, a, f, a$
35. Theo thủ tục như trong Algorithm 1, chú ý tới hướng của các cạnh.
37. a) $n = 2$ b) Không c) Không d) $n = 1$
39. Bài tập 1 : 1 lần ; Bài tập 2 - 7 : 0 lần
41. $a, b, c, d, e, a$ là chu trình Hamilton.
43. Không tồn tại chu trình Hamilton, vì nếu có thì khi chu trình đi tới $e$ nó sẽ không thể đi tiếp được nữa.
45. Không tồn tại chu trình Hamilton, vì mọi cạnh của đồ thị là liên thuộc với một đỉnh bậc 2 và do vậy nó phải thuộc chu trình.
47. $a, b, c, f, d, e$ là đường đi Hamilton. 49. $f, e, d, a, b, c$ là đường đi Hamilton.
51. Không tồn tại đường đi Hamilton. Có 8 đỉnh bậc 2 và chỉ có hai trong số đó có thể là đỉnh cuối của đường đi. Với mỗi một trong 6 đỉnh kia, hai cạnh liên thuộc với nó phải thuộc đường đi. Dễ thấy rằng nếu đó là đường đi Hamilton thì có đúng một trong các đỉnh góc bên trong phải là đỉnh cuối. Điều đó là không thể.

**53.** $a, b, c, f, i, h, g, d, e$ là đường đi Hamilton.

**55.** $m = n \geq 2$

**57.** Kết quả là tầm thường với $n = 1$ : mã là 0, 1. Giả sử ta có mã Gray bậc $n$. Gọi $c_1, c_2, ..., c_k$, $k = 2^n$ là mã như thế. Khi đó $0c_1, ..., 0c_k, 1c_1, ..., 1c_k$ là mã Gray bậc $n + 1$.

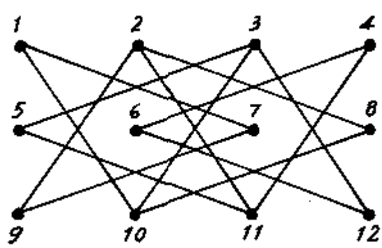
**59.** **procedure** *Fleury* ($G = (V, E)$ : đa đồ thị liên thông với bậc của tất cả các đỉnh là chẵn. $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$)

$v := v_1$
*circuit* := $v$
$H := G$
**while** $H$ còn có các cạnh
**begin**
 $e :=$ cạnh đầu tiên có điểm đầu mút $v$ trong $H$ (theo thứ tự liệt kê của $V$) sao cho $e$ không là cạnh cắt của $H$, nếu nó tồn tại, và đơn giản là cạnh cắt đầu tiên của $H$ có với điểm đầu mút $v$, nếu không
 $w :=$ điểm đầu mút kia của $e$.
 circuit:= *circuit* với cạnh $e$, $w$ được thêm vào.
 $v := w$
 $H := H - e$
**end** {*circuit* là chu trình Euler}

**61.** Nếu $G$ có chu trình Euler, thì nó cũng là đường đi Euler. Nếu không, ta thêm một cạnh giữa hai đỉnh bậc lẻ, rồi áp dụng thuật toán để nhận được chu trình Euler. Sau đó xóa cạnh mới đi.

**63.** Giả sử $G = (V, E)$ là đồ thị phân đôi với $V = V_1 \cup V_2$, trong đó không có cạnh nối các đỉnh cùng trong $V_1$ hoặc cùng trong $V_2$. Giả sử $V$ có chu trình Hamilton. Chu trình như thế phải có dạng $a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_k, b_k, a_1$ trong đó $a_i \in V_1$ và $b_1 \in V_2$ với $i = 1, 2, ..., k$. Vì chu trình Hamilton qua mỗi đỉnh đúng một lần, trừ $v_1$, tại đó nó bắt đầu và kết thúc. Số các đỉnh của đồ thị bằng $2k$ là một số chẵn. Vì vậy đồ thị phân đôi với số lẻ các đỉnh không thể có chu trình Hamilton.

**65.**




**67.** Ta biểu diễn các ô của bàn cờ 3 x 4 như sau :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |

Hành trình của quân mã là : 8, 10, 1, 7, 9, 2, 11, 5, 3, 12, 6, 4.

**69.** Ta biểu diễn các ô của bàn cờ 4 x 4 như sau :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Chỉ có 2 dịch chuyển từ mỗi góc bàn cờ. Nếu ta gộp vào chu trình tất cả các cạnh 1 - 10, 1 - 7, 16 - 10, và 16 - 7 thì chu trình kết thúc quá sớm, vì thế ít nhất một trong các cạnh này phải bỏ qua. Không mất tính tổng quát, giả sử đường đi xuất phát bằng các cạnh 1 - 10, 10 - 16, 16 - 7. Trong các dịch chuyển từ ô 3 tới các ô 5, 10, và 12 ta thấy ô 10 đã có hai cạnh liên thuộc rồi, nên các cạnh 3 - 5, và 3 - 12 có thể thuộc chu trình Hamilton. Tương tự, các cạnh 8 - 2, và 8 - 15 cũng cần phải thuộc chu trình. Từ ô 9 chỉ có các dịch chuyển tới các ô 2, 7 và 15. Nếu chu trình chứa hai cạnh từ 9 tới 2 và 15 thì chu trình kết thúc quá sớm. Do đó cạnh 9 - 7 phải thuộc chu trình .. Nhưng ô 14 bắt buộc phải nối với ô 5 và 12 kết thúc chu trình quá sớm (5 - 14 - 12 - 3 - 5). Mâu thuẫn này chứng tỏ không có hành trình của quân mã trên bàn cờ 4 x 4.

**71.** vì có $m.n$ ô trên bàn cờ $m \times n$, nếu cả $m$ và $n$ là lẻ, sẽ có một số lẻ các ô. Theo Bài tập 70, đồ thị tương ứng sẽ là phân đôi, và theo Bài 63 nó không có chu trình Hamilton. Do đó không có hành trình tái lập của quân mã.

## *Tiết 7.6*

**1.** a) Đỉnh là các bến xe, các cạnh nối các bến liền kề, trọng số là thời gian cần thiết để đi từ bến xa này tới bến xa khác.
b) Như câu a) chỉ trọng số bây giờ là khoảng cách giữa các bến xa.
c) Như câu a) chỉ có trọng số bây giờ là tiền vé giữa các bến xe.

**3.** 16

**5.** Bài tập 2 : $a, b, e, d, z$
Bài tập 3 : $a, c, d, e, g, z$.
Bài tập 4 : $a, b, e, h, l, m, p, s, z$

**7.** a) $a, c, d$ b) $a, c, d, f$
c) $c, d, f$ d) $b, d, e, g, z$

**9.** a) Trực tiếp b) Qua New York
c) Qua Atlanta và Chicago d) Qua New York

**11.** a) Qua Chicago b) Qua Chicago
c) Qua Los Angeles d) qua Chicago.

**13.** a) Qua Chicago b) Qua Chicago
c) Qua Los Angeles d) Qua Chicago.

**15.** Không dừng thuật toán khi $z$ được thêm vào tập $S$.

**17.** a) Qua Woodbrige, qua Woodbrige và Camden.
b) Qua Woodbrige, qua Woodbrige và Camden

**19.** Ví dụ, hành trình của các cuộc tham quan, dọn vệ sinh đường phố.

**21.**

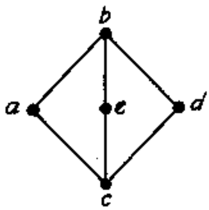
| | a | b | c | d | e | z |
|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 4 | 3 | 2 | 8 | 10 | 13 |
| b | 3 | 2 | 1 | 5 | 7 | 10 |
| c | 2 | 1 | 2 | 6 | 8 | 11 |
| d | 8 | 5 | 6 | 4 | 2 | 5 |
| e | 10 | 7 | 8 | 2 | 8 | 3 |
| z | 13 | 10 | 11 | 5 | 3 | 6 |

**23.** $O(n^3)$

## Tiết 7.7

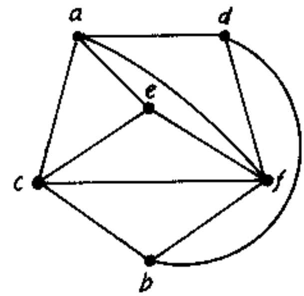
1. Có

3.




5. Không

7. Có




9. Tam giác được tạo thành bằng biểu diễn phẳng của đồ thị con của $K_5$ gồm các cạnh nối $v_1$, $v_2$ và $v_3$. Các đỉnh $v_4$ cần phải đặt ở bên trong hoặc ở bên ngoài tam giác. Ta chỉ xét trường hợp $v_4$ ở trong tam giác còn trường hợp kia tương tự. Vẽ ba cạnh nối $v_1$, $v_2$, $v_3$ tới $v_4$. Khi đó ta có 4 miền, và $v_5$ thuộc một miền nào đó trong 4 miền này. Có thể nối nó với chỉ ba, mà không phải bốn, trong những đỉnh kia.

11. 8

13. Vì không có khuyên hoặc cạnh bội và không có chu trình đơn độ dài 3, và bậc của miền vô hạn ít nhất là 4, nên mỗi miền có bậc ít nhất là bốn. Như vậy, $2e \geqslant 4r$, hoặc $r \leqslant e/2$. Nhưng $r = e - v + 2$, nên $e - v + 2 \leqslant e/2$, từ đó suy ra $e \leqslant 2v - 4$.

15. Trong Hệ quả 2, ta có $2e \geqslant 5r$ và $r = e - v + 2$. Vì thế $e - v + 2 \leqslant 2e/5$. Từ đó suy ra $e \leqslant (5/3)v - (10/3)$.

17. Chỉ (a) và (c).

21. Không đồng phôi với $K_{3,\ 3}$

21. Phẳng

23. Không phẳng

25. a) 1 b) 3 c) 9
d) 2 e) 4 f) 16

27. Vẽ $K_{m,\ n}$ như mô tả trong phần gợi ý. Số điểm cắt nhau bằng 4 lần số điểm cắt nhau trong góc phần tư thứ nhất. Các đỉnh trên trục $x$ nằm bên phải gốc tọa độ là $(1, 0)$, $(2, 0)$, ..., $(m/2, 0)$ và các đỉnh nằm trên trục $y$, bên trên gốc tọa độ là $(0, 1)$, $(0, 2)$, ..., $(0, n/2)$. Chúng ta nhận được đúng một giao điểm của cạnh nối 2 điểm $(a, 0)$ và $(b, 0)$ và cạnh nối hai điểm $(0, r)$ và $(0, s)$ trong đó $1 \leqslant a < b \leqslant m/2$ và $1 \leqslant r < s \leqslant n/2$. Vì vậy số các giao điểm của các cạnh đồ thị trong góc phần tư thứ nhất bằng số các cách lấy 2 điểm phân biệt trên trục $x$ và 2 điểm phân biệt trên trục $y$, tức là

$$C(m/2,\ 2).C(n/2) = \frac{(m/2)(m/2-1)}{2}\ \frac{(n/2)(n/2-1)}{2} = \frac{mn(m-2)(n-2)}{64}$$

Vì thế tất cả các điểm giao nhau của các cạnh đồ thị là :

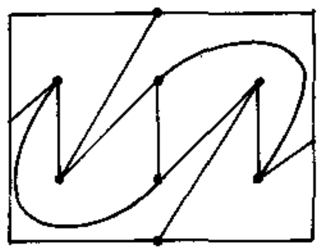
$4mn(m-2)(n-2)/64 = mn(m-2)(n-2)/16$.

29. a) 2 b) 2 c) 2
d) 2 e) 2 f) 2

31. Công thức là đúng với $n \leqslant 4$. Nếu $n>4$, theo Bài tập 30 độ dày của $K_n$ ít nhất là $C(n, 2)/(3n - 6) = (n + 1+2/(n - 2))/6$ được làm tròn lên thành $(n+1)/6 + 1 = (n + 7)/6$. Vì đại lượng này không bao giờ là số nguyên, nó bằng số nguyên tiếp theo làm tròn xuống tức là $\lfloor (n + 7)/6 \rfloor$.

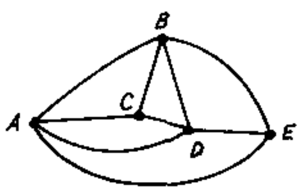
33. Điều đó suy ra từ Bài tập 32 vì $K_{mn}$ có $mn$ cạnh và $m + n$ đỉnh và không có các tam giác vì nó là đồ thị phân đôi.

35.

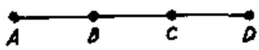


## Tiết 7.8

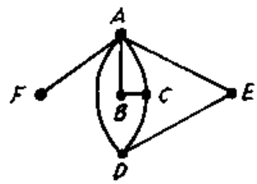
1. a)




b)




c)




3. 3
5. 3
7. 2
9. 3
11. Các đồ thị không có cạnh
13. 3 nếu $n$ chẵn, 4 nếu $n$ lẻ
15. Đợt 1 : Toán 115, Toán 185, Đợt 2 : Toán 116, CS 473, Đợt 3 : Toán 195, CS 101 ; Đợt 4: CS 102 ; Đợt 5 : CS 273.
17. 5
19. Bài tập 3 : 3
    Bài tập 4 : 6
    Bài tập 5 : 3
    Bài tập 6 : 4
    Bài tập 7 : 3
    Bài tập B : 6
    Bài tập 9 : 4
21. 5
23. Tập các đỉnh với một màu là một phần, và tập các đỉnh với mầu kia là phần thứ hai. Vì không có cạnh nào có thể nối các đỉnh cùng màu nên không có cạnh nào nối các đỉnh thuộc cùng một phần.
25. Màu 1 : $e, f, d$ ; Màu 2 : $c, a, i, g$ ; Màu 3 : $h, b, j$
27. Màu $C_6$
29. a) 6 b) 7 c) 9 d) 11

**31.** Biểu diễn mỗi tần số bằng một màu và các vùng bằng các đỉnh. Nối hai đỉnh bằng một cạnh nếu các vùng mà các đỉnh này biểu diễn có sự giao thoa sóng với nhau. Khi đó cách tô bộ $k$ - màu là sự phân chia các tần số để không có sự nhiễu sóng.

## *Các bài tập bổ sung*

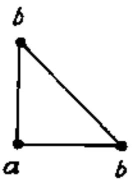
**1.** 2500

**3.** Có

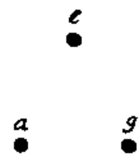
**5.** Có

**7.** $\sum_{i=1}^{m} n_i$ đỉnh, $\sum_{i<j} n_i n_j$ cạnh.

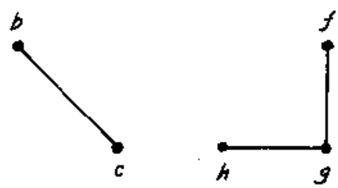
**9.** a)




b)




c)

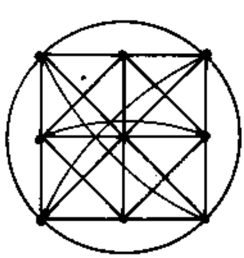



**11.** Các đồ thị con đầy đủ chứa tập các đỉnh sau : $\{b, c, e, f\}$, $\{a, b, g\}$, $\{a, d, g\}$, $\{d, e, g\}$

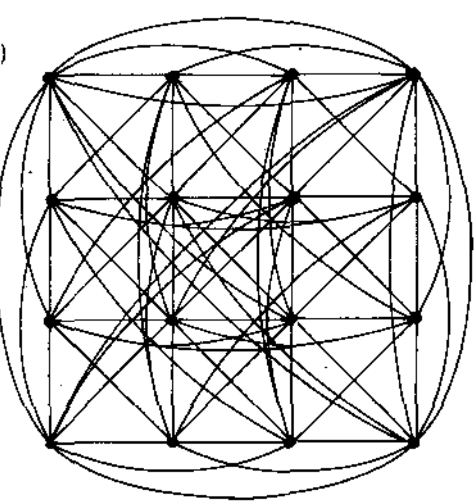
**13.** Các đồ thị con đầy đủ chứa tập các đỉnh sau : $\{b, c, d, j, k\}$, $\{a, b, j, k\}$, $\{e, f, g, i\}$, $\{a, b, i\}$, $\{a, i, j\}$, $\{b, d, e\}$, $\{b, e, i\}$, $\{b, i, j\}$, $\{g, h, i\}$, $\{h, i, j\}$.

**15.** $\{c, d\}$ là tập trội tối thiểu

**17.** a)



b)



**19.** a) 1 b) 2 c) 3

**21.** a) Đường di từ $u$ tới $v$ trong $G$ tạo ra dường di từ $f(u)$ tới $f(v)$ trong đồ thị dẳng cấu $H$.

b) Giả sử $f$ là phép dẳng cấu từ $G$ tới $H$. Nếu $v_o, v_1, ..., v_n, v_o$ là chu trình Hamilton trong $G$, thì $f(v_o), f(v_1), ..., f(v_n), f(v_o)$ phải là chu trình Hamilton trong $H$ vì nó vẫn còn là chu trình và $f(v_i) \neq f(v_j)$ với $0 \leqslant i < l \leqslant n$.

c) Giả sử $f$ là phép dẳng cấu từ $G$ tới $H$. Khi dó nếu $v_o, v_1, ..., v_o$ là chu trình Euler trong $G$, thì $f(v_o), f(v_1), .., f(v_n), f(v_o)$ phải là chu trình Euler trong $H$ vì nó vẫn còn là chu trình và nó chứa mỗi dỉnh dúng một lần.

d) Hai đồ thị đẳng cấu phải có cùng số tự cắt vì chúng có thể dược vẽ theo cùng một cách trong mặt phẳng.

c) Giả sử $f$ là phép dẳng cấu từ $G$ tới $H$. Khi dó $v$ là một dỉnh cô lập trong $G$ nếu và chỉ nếu $f(v)$ là cô lập trong $H$. Vì thế các dồ thị phải có cùng số các dỉnh cô lập.

f) Giả sử $f$ là phép dẳng cấu từ $G$ tới $H$ Nếu $G$ là dồ thị phân đôi, thì tập các dỉnh của $G$ có thể được chia thành $V_1$ và $V_2$, trong dó không có cạnh nào nối hai dỉnh của $V_1$ hoặc nối hai dỉnh của $V_2$. Khi dó tập các dỉnh của $H$ có thể dược chia thành $f(V_1)$ và $f(V_2)$ trong dó không có cạnh nào nối hai dỉnh của $f(V_1)$ hoặc nối hai dỉnh của $f(V_2)$.

**23.** 3

**25.** a) Có b) Không

**27.** Không

**29.** Có

**31.** Nếu $e$ là cạnh cắt với các diểm dầu mút là $u$ và $v$, thì nếu chúng ta định hướng cho $e$ từ $u$ tới $v$ thì sẽ không có dường di trong dồ thị có hướng từ $v$ tới $u$, hoặc $e$ có thể không là cạnh cắt. Lý luận tương tự nếu chúng ta dịnh hướng $e$ từ $v$ tới $u$.

**33.** $n - 1$

**35.** Gọi các dỉnh là các chú gà con. Ta vẽ cạnh $(u, v)$ trong dồ thị nếu và chỉ nếu chú gà $u$ lớn hơn chú gà $v$.

**37.** a) 4 b) 2 c) 3
d) 4 e) 4 f) 2

**39.** a) Giả sử $G = (V, E)$ và $a, b \in V$. Ta phải chỉ ra rằng khoảng cách giữa $a$ và $b$ trong $\overline{G}$ nhiều nhất là bằng 2. Nếu $\{a, b\} \notin E$, khoảng cách này bằng 1, vì thế ta giả sử $\{a, b\} \in E$. Vì dường kính của $G$ lớn hơn 3, nên có các dỉnh $u$ và $v$ sao cho khoảng cách giữa chúng trong $G$ lớn hơn 3. Hoặc $u$ hoặc là $v$ hoặc cả hai là không thuộc tập $\{a, b\}$. Giả sử $u$ khác cả $a$ và $b$. Hoặc là $\{a, u\}$ hoặc là $\{b, u\}$ thuộc $E$ vì nếu không $a, u, b$ là dường di trong $\overline{G}$ có dộ dài bằng 2. Vì thế, không mất tính tổng quát ta giả sử $\{a, u\} \in E$. Như vậy v không thể là a hoặc b và bằng cách lý luận như vậy ta có hoặc $\{a, v\} \in E$ hoặc $\{b, v\} \in E$. Trong mỗi trường hợp, sẽ cho ta dường di dộ dài nhỏ hơn hay bằng 3 từ $u$ tới $v$ trong $G$. Đó là điều vô lý.

b) Giả sử $G = (V, E)$ và $a, b \in V$ ta cần chỉ ra rằng khoảng cách giữa $a$ và $b$ trong $\overline{G}$ không vượt quá 3. Nếu $\{a, b\} \notin E$, ta suy ra kết quả, vì thế ta giả sử $\{a, b\} \notin E$. Vì dường kính của $G$ lớn hơn hoặc bằng 3, nên có các dỉnh $u$ và $v$ sao cho khoảng cách giữa chúng trong $G$ lớn hơn hay bằng 3. Hoặc là $u$ hoặc là $v$ hoặc cả hai là không thuộc tập $\{a, b\}$. Giả sử $u$ khác cả $a$ và $b$. Hoặc là $\{a, u\}$ hoặc là $\{b, u\}$ thuộc $E$ nếu không $a, u, b$ là đường đi trong $\overline{G}$ có độ dài bằng 2. Vì thế, không mất tính tổng quát ta giả sử $\{a, u\} \in E$. Như vậy $v$ khác $a$ và $b$. Nếu $\{a, v\} \in E$ khi đó $u, a, v$ là đường đi độ dài 2 trong $G$, vậy $\{a, v\} \notin E$, và như vậy $\{b, v\} \in E$ (còn không thì sẽ có đường đi $a, v, b$ độ dài 2 trong $\overline{G}$). Vì thế $\{u, b\} \notin E$ vì nếu không $u, b, v$ là đường đi trong $G$ độ dài 2. Như vậy $a, v, u, b$ là đường đi độ dài 3 trong $G$ như chúng ta chờ đợi.

**41.** $a, b, e, z$

**43.** $a, c, b, d, e, z$

**45.** Nếu $G$ là phẳng, thì vì $e \leq 3v - 6$, $G$ có nhiều nhất 27 cạnh. (Nếu $G$ là không liên thông nó thậm chí có số cạnh còn ít hơn. Tương tự $\overline{G}$ có nhiều nhất 27 cạnh. Nhưng hợp $G$ và $\overline{G}$ là $K_{11}$, có 55 cạnh, và $55 > 27 + 27$.

**47.** Giả sử $G$ là được tô bằng $k$ màu và có số độc lập là $i$. Vì mỗi lớp màu phải là một tập độc lập nên nó có không nhiều hơn $i$ phần tử. Như vậy có nhiều nhất $k.i$ đỉnh.

**49.** Giả sử $P$ là đơn điệu tăng. Nếu tính không có $P$ không được giữ lại khi các cạnh bị xóa khỏi đồ thị đơn, khi đó có đơn đồ thị không có $P$ và một đơn đồ thị khác $G'$ với cùng các đỉnh, nhưng bỏ qua một số cạnh của $G$ có $P$. Nhưng $P$ là đơn điệu tăng, do vậy $G'$ có $P$. Vì thế $G$ nhận được bằng cách thêm cạnh vào $G'$. Đó là điều mâu thuẫn, chứng minh phần đảo là tương tự.

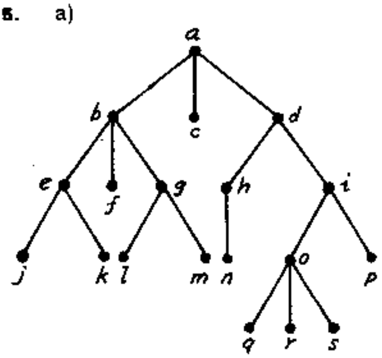
# CHƯƠNG 8

## Tiết 8.1

1. (a), (c), (e)

3. Không

5. a)




b) $c$

c)


7. a) 2 b) 4 c) 9

9. Phần "chỉ nếu" là Định lý 2 và định nghĩa của cây. Giả sử $G$ là đơn đồ thị liên thông với $n$ đỉnh và $n$ - 1 cạnh. Nếu $G$ không là cây, nó chứa, theo Bài tập 8, một cạnh mà việc bỏ cạnh đó đi sẽ tạo ra đồ thì $G'$ vẫn còn liên thông. Nếu $G'$ không là cây, thì bỏ một cạnh sẽ tạo ra đồ thị $G''$ liên thông. Lập lại quá trình này cho tới khi nhận được một cây. Quá trình này đòi hỏi nhiều nhất $n$ - 1 bước vì chỉ có $n$ - 1 cạnh. Theo Định lý 2 đồ thị kết quả có $n$ - 1 cạnh vì nó có $n$ đỉnh. Từ đó suy ra không có cạnh nào bị xóa bỏ, vì thế mà $G$ là một cây.

11. 9999

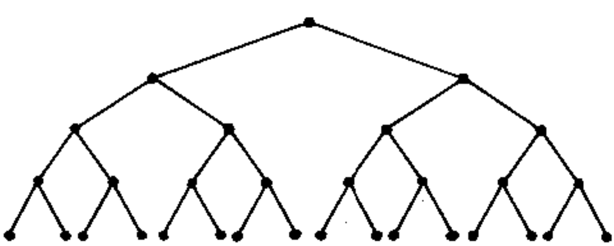
13. 2000

15. 999

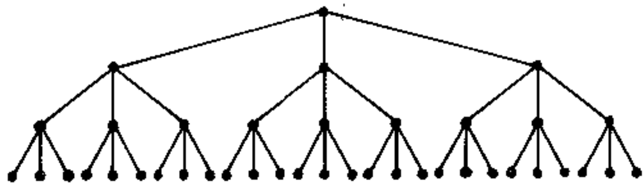
17. 1000000 đôla.

19. Theo Định lý 4 không tồn tại cây như thế vì điều đó là không thể với $m$ = 2 hoặc $m$ = 84.

21. Cây nhị phân hoàn toàn với chiều cao 4 :



Cây tam phân hoàn toàn với chiều cao 3 :



**23.** a) Theo Định lý 3 ta suy ra $n = mi + 1$. Vì $i + l = n$, ta có $l = n - i$. Do đó $l = (mi + 1) - i = (m - 1) i + 1$.

b) Chúng ta có $n = m.i + 1$ và $i + l = n$. Vì thế $i = n - l$. Từ đó suy ra $n = m(n - l) + 1$. Giải ra đối với $n$ cho ta $n = (ml - 1)/(m - 1)$. Từ $i = n - l$ chúng ta nhận được $i = \left[\frac{ml - 1}{m - 1}\right] - l = \frac{l - 1}{m - 1}$

**25.** $n - 1$

**27.** a) 1 b) 3 c) 5

**29.** a) Thư mục bố

b) Thư mục con hoặc tệp tin chứa trong nó

c) Thư mục con hoặc tệp tin chứa trong cùng một thư mục bố d) Tất cả các thư mục trên đường dẫn tới thư mục hiện thời

e) Tất cả các thư mục con và các tệp tin trong thư mục này hoặc thư mục con trong thư mục này v.v.

f) Độ dài của đường dẫn tới thư mục này

g) Độ sâu của hệ, tức là độ dài của đường dẫn dài nhất

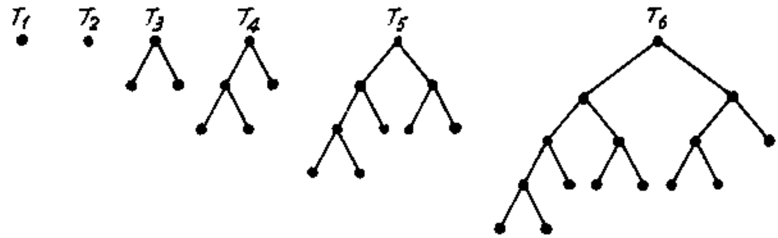
**31.** Cho $n = 2^k$, trong đó $k$ là số nguyên dương. Nếu $k = 1$, không có gì phải chứng minh cả vì ta có thể cộng 2 số bằng $n - 1 = 1$ bộ xử lý trong $\log 2 = 1$ bước. Giả sử có thể cộng $n = 2^k$ số trong $\log n$ bước bằng mạng kết nối kiểu cây của $n - 1$ bộ xử lý. Giả sử $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ là $2n = 2^{k+1}$ số mà ta đang muốn tính tổng. Mạng kết nối kiểu cây của $2n - 1$ bộ xử lý bao gồm mạng kết nối kiểu cây của $n - 1$ bộ xử lý cùng với 2 bộ xử lý mới như là con của mỗi lá. Trong một bước ta có thể dùng các lá của mạng lớn để tìm $x_1 + x_2, x_3 + x_4, \ldots, x_{2n-1} + x_{2n}$ cho ta $n$ số, mà theo giả thiết quy nạp ta có thể cộng bằng $\log n$ bước bằng phần còn lại của mạng. Vì ta đã dùng $\log n + 1$ bước và $\log(2n) = \log 2 + \log n = 1 + \log n$. Đó là điều cần chứng minh.

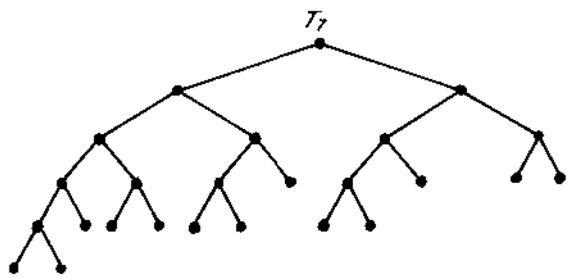
**33.** Chỉ có $c$

**35.** $c$ và $h$

**36.** Giả sử cây $T$ có ít nhất hai tâm. Gọi $u$ và $v$ là các tâm khác nhau và cả hai có tâm sai $e$, và $u$ không liền kề với $v$. Vì $T$ là liên thông, nên có đường đi đơn $P$ từ $u$ tới $v$. Gọi $c$ là một đỉnh tùy ý nào đó trên đường đi này và khác $u$ và $v$. Vì tâm sai của $c$ ít nhất là $e$, nên có đỉnh $w$ sao cho đường đi đơn duy nhất từ $c$ tới $w$ có độ dài ít nhất bằng $e$. Rõ ràng đường đi này không thể chứa cả $u$ và $v$, nếu không thì sẽ có chu trình đơn. Thực ra đường đi này từ $c$ tới $w$ rời $P$ và không quay về $P$ một khi nó có thể đi theo một phần của $P$ hướng tới hoặc là $u$ hoặc là $v$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử đường đi này không theo $P$ tới $u$. Khi đó đường đi từ $u$ tới $c$ tới $w$ là đơn, và có độ dài hơn $e$, là điều vô lý. Vì thế $u$ và $v$ là liền kề. Bây giờ vì hai tâm tùy ý là liền kề nếu nó có hơn 2 tâm nên $T$ chứa $K_3$, một chu trình đơn, như một đồ thị con, điều này là mâu thuẫn.

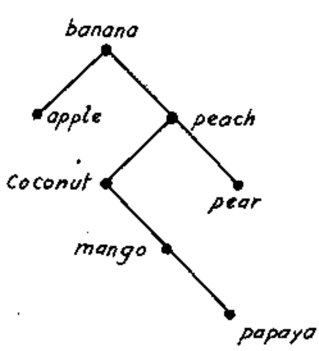
39.



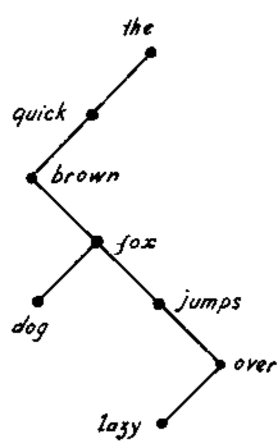




## Tiết 8.2

1.




5.




3. a) 3 b) 1
c) 4 d) 5

7. Cần ít nhất $\lceil \log_3 4 \rceil = 2$ lần vì chỉ có bốn kết cục (do không yêu cầu xác định đồng xu giả là nặng hơn hay nhẹ hơn). Thực vậy, chỉ cần hai lần cân. Đầu tiên cân đồng xu 1 với đồng xu 2. Nếu chúng bằng nhau, thì ta cân đồng 1 với đồng 3. Nếu đồng

1 và đồng 3 bằng nhau, thì đồng giả là đồng 4, còn nếu chúng khác nhau thì đồng xu 3 là giả. Nếu đồng 1 và đồng 2 là khác nhau, thì ta cân đồng 1 với đồng 3. Nếu thăng bằng thì đồng 2 là giả, còn nếu không cân bằng thì đồng 1 là giả.

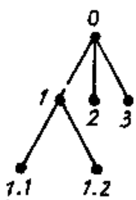
9. Cần ít nhất $\lceil \log_3 13 \rceil = 3$ lần cân. Thực vậy, chỉ cần ba lần cân. Đầu tiên ta đặt các đồng xu 1, 2 và 3 lên đĩa cân bên trái, và 4, 5 và 6 lên đĩa cân bên phải. Nếu bằng nhau thì áp dụng ví dụ 2 cho các đồng xu 1, 2, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Còn nếu không thăng bằng ta áp dụng ví dụ 2 cho các đồng xu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 và 8.

11. a) Có b) Không c) Có d) Có

13. *a* :000, *e* :001, *i* :01, *k* :1100, *o* :1101, *p* :1110, *u* :1111.

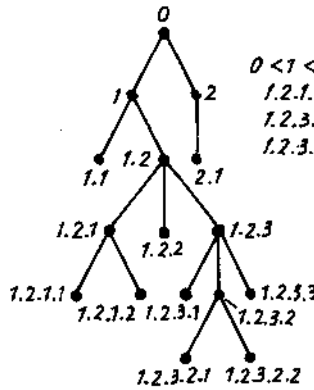
## Tiết 8.3

1.




$0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 2 < 3$

3.




$0 < 1 < 1.1 < 1.2 < 1.2.1 < 1.2.1.1 < 1.2.1.2 < 1.2.2 < 1.2.3 < 1.2.3.1 < 1.2.3.2 < 1.2.3.2.1 < 1.2.3.2.2 < 1.2.3.3 < 2 < 2.1$

5. Không

7. *a, b, d, e, f, g, c*

9. *a, b, e, k, l, m, f, g, n, r, s, c, d, h, o, i, j, p, q*

11. *d, b, i, e, m, j, n, o, a, f, c, g, k, h, p, l*

13. *d, f, g, e, b, c, a*

15. *k, l, m, e, f, r, s, n, g, b, c, o, h, i, p, q, j, d, a*

17. a) $- * \uparrow + x\ 2 3 - y + 3 x 5$
 b) $x 2 + 3 \uparrow y 3 x + - * 5 -$
 c) $((((x + 2) \uparrow 3) * (y - (3 + x))) - 5)$

19. a) $+ + x * x y / x y,\ + x / + * x y x y$
 b) $x x y * + x y / +,\ x x y * x + y / +$
 c) $((x + (x * y)) + (x / y)),\ (x + (((x * y) + x) / y))$

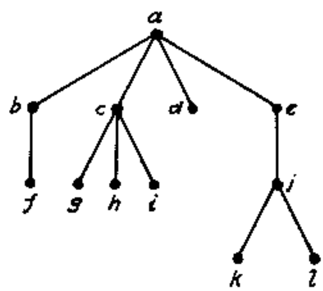
21. a) $\leftrightarrow \neg \wedge p q \wedge \neg p \neg q,\ \ \vee \wedge \neg p \leftrightarrow q \neg p \neg q$
 b) $p q \wedge \neg p \neg q \neg \vee \leftrightarrow,\ \ p \neg q p \neg \leftrightarrow \wedge q \neg \vee$
 c) $(((p \wedge q) \neg) \leftrightarrow ((p \neg) \vee (q \neg)))\ ,\ \ (((p \neg) \wedge (q \leftrightarrow (p \neg))) \vee (q \neg))$ (toán tử một ngôi đi sau toán hạng của nó)

23. a) $- \cap A B \cup A - B A$ b) $A B \cap A B A - \cup -$ c) $((A \cap B) - (A \cup (B - A)))$

25. 14

27. a) 1 b) 1 c) 4 d) 2205

**29.**




**31.** Dùng quy nạp toán học. Kết quả là tầm thường với danh sách có một phần tử. Giả sử kết quả là đúng cho danh sách *n* phần tử. Với bước quy nạp ta xuất phát từ cuối. Tìm dãy các đỉnh ở cuối danh sách bắt đầu từ lá cuối cùng kết thúc tại gốc, mỗi đỉnh là con cuối của đỉnh tiếp theo nó. Xóa lá này và áp dụng giả thiết quy nạp.

**33.** *c, d, b, f, g, h, e, a* trong mỗi trường hợp.

**35.** Chứng minh bằng phương pháp quy nạp. gọi $S(X)$ và $O(X)$ tương ứng là số các ký hiệu và số các toán tử trong công thức được tạo đúng $X$. Mệnh đề là đúng với công thức được tạo đúng độ dài 1, vì chúng có 1 ký hiệu là 0 tốn tử. Giả sử mệnh đề là đúng với tất cả các công thục được tạo đúng với độ dài nhỏ hơn $n$. Công thức được tạo đúng độ dài $n$ phải có dạng $^*XY$ trong đó $^*$ là toán tử và $X$ và $Y$ là các công thức được tạo đúng độ dài nhỏ hơn $n$. Khi đó theo giả thiết quy nạp $S(^*XY) = S(X) + S(Y) = (O(X) + 1) + (O(Y) + 1) = O(X) + O(Y) + 2$. Vì $O(^*XY) = 1 + O(X) + O(Y)$. Từ đó suy ra $S(^*XY) = O(^*XY) + 1$

**37.** Chẳng hạn :

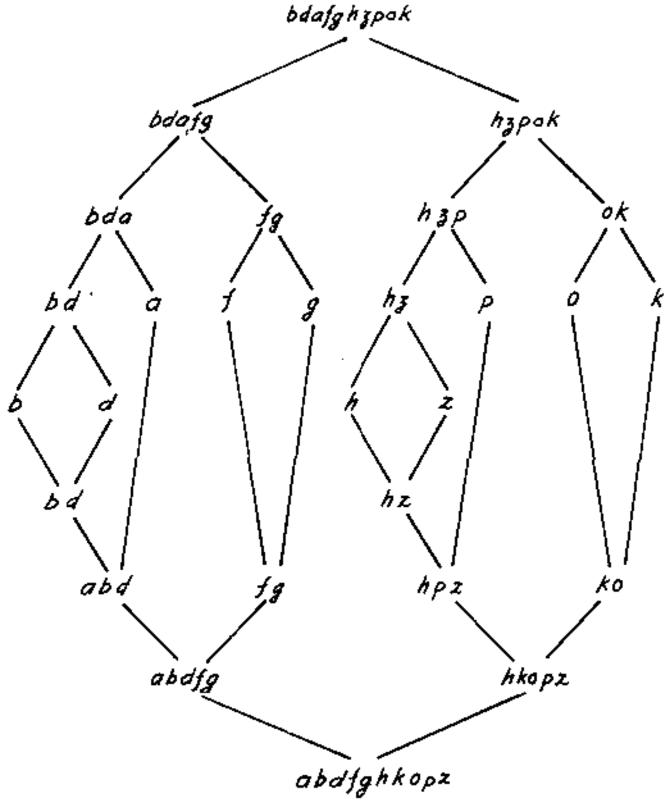
*xy + zx*∘ *+ x*∘, *xyz + + yx + +* ,
*xy xy* ∘ ∘ *xy* ∘∘ *z* ∘ *+* , *xz x zz + *∘, *yyyy*∘∘∘ ,
*zx + yz +* ∘,

## Tiết 8.4

**1.** Cuối bước thứ nhất : 1, 3, 5, 4, 7 ; Cuối bước thứ hai : 1, 3, 4, 5, 7 ; Cuối bước thứ ba : 1, 3, 4, 5, 7 ; Cuối bước thứ tư : 1, 3, 4, 5, 7.

**3.**
```
procedure better bubblesort (a_1, a_2, ..., a_n : số nguyên) ;
    i := 1 ; done := false ;
    while (i<n and done = false)
    begin
        done := true
        for j := 1 to n - 1
            if a_j > a_{j+1} then
            begin
                đổi chỗ a_j và a_{j+1} cho nhau.
                done := false ;
            end
        i := i + 1
    end {a_1, a_2, ..., a_n là dãy tăng}
```

**5.**




**7.** Đó là hai danh sách 1, 2, ..., $m$ - 1, $m + n$ - 1 và $m$, $m$ + 1, ..., $m + n$ - 2, $m + n$.

**9.** a) 1, 5, 4, 3, 2 ; 1, 2, 4, 3, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ;
b) 1, 4, 3, 2, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; c) 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5 ; 1, 2, 3, 4, 5.

**11.** $O(n^2)$

**13.** $n$ - 1

**15.** 6

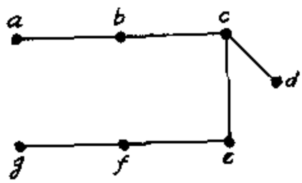
**17.** $O(n^2)$ trong trường hợp xấu nhất

**19.** **procedure** *mergesort* ($a_1, a_2, ..., a_n$ : số nguyên)
$m := \lceil n/2 \rceil$
**if** $n > 1$ **then**
**begin**
$L_1 := (a_1, a_2, ..., a_m)$
$L_2 := (a_{m+1}, a_2, ..., a_n)$
$L_1 :=$ *mergesort* $(L_1)$
$L_2 :=$ *mergesort* $(L_2)$
$L := merge(L_1, L_2)$
**end**
**else** $L := (a_1)$ {danh sách một phần tử đã được sắp xếp}
{$L$ được aắp xếp}.

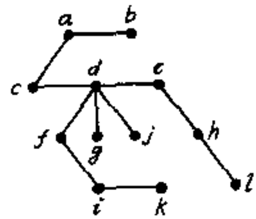
## Tiết 8.5

1. $m - n + 1$

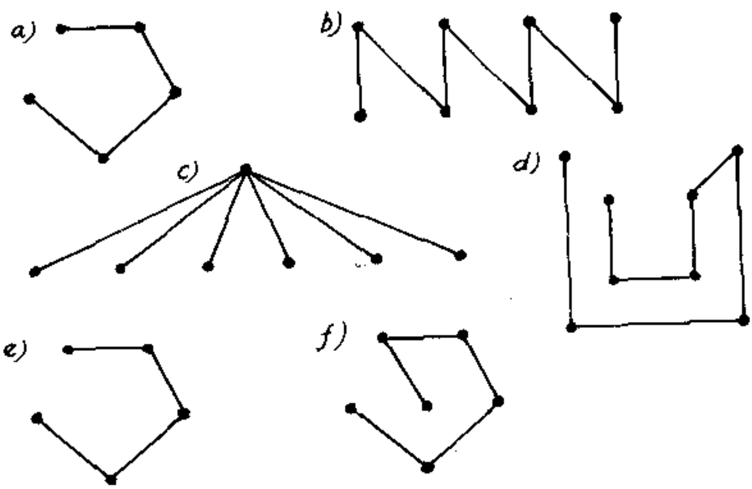
3.



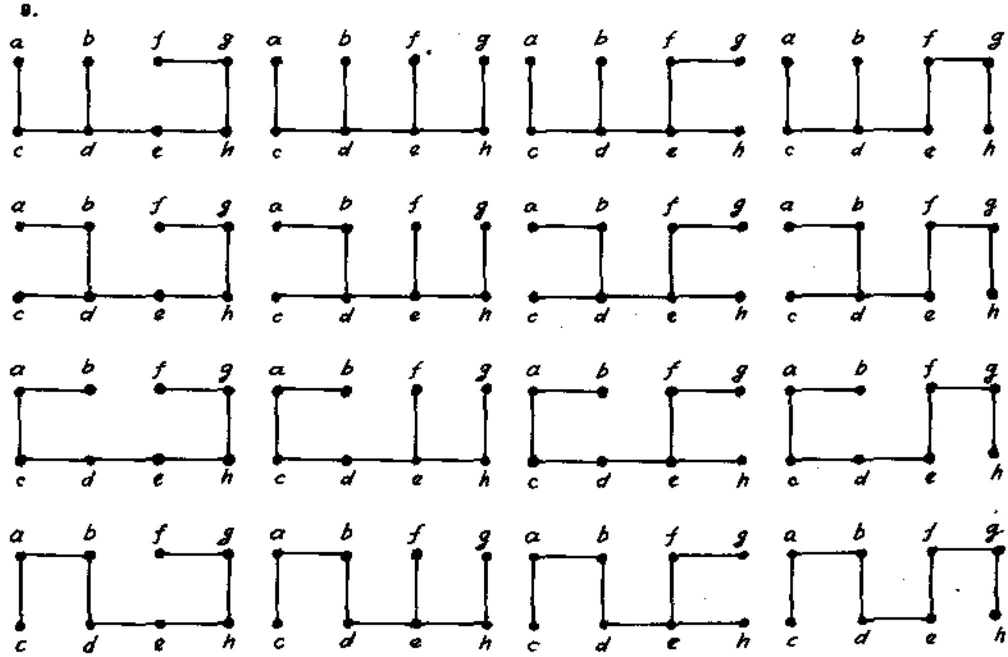

5.




7.

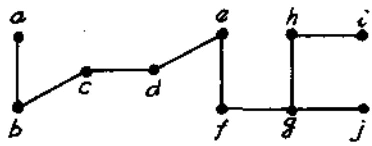



9.

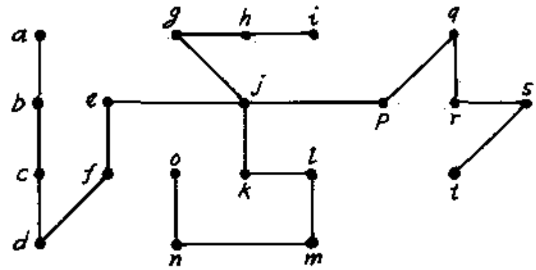


**11.** a) 3 b) 16 c) 4 d) 5

**13.**




**15.**




**17.** Tập các chuyến bay bị cắt là : Boston - New York, Detroit - Boaton, Boston - Washington, Naw York - Washington, New York - Chicago, Atlanta - Washington, Atlanta - Dallas, Atlanta - Los Angeles, Atlanta - St. Louis, St.Louis - Dallas, St.Louis - Detroit, St.Louis - Denvar, Dallas - San Diego, Dallas - Los Angelas, Dallaa - San Francisco, San Diego - Los Angeles, Los Angeles - San Francisco, San Francisco - Seattle.

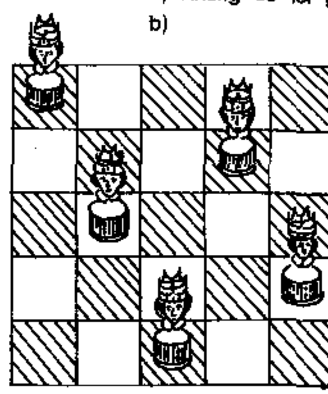
**19.** Các cây

**21.** **procedure** *depth first search* ($G$ : đơn đồ thị với các đỉnh được sắp thứ tự $v_1, v_2, \ldots, v_n$)

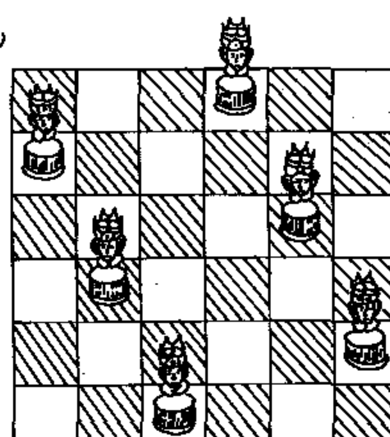
$T$ := cây có gốc $v_1$ và không có đỉnh nào khác ;
visit ($v_1$)
{$T$ là cây cần có}
**procedure** *visit* ($v$)
**for** mỗi láng giềng $w$ của $v$
**begin**
  **if** $w$ không thuộc $T$ **then**
  **begin**
    đặt đỉnh $w$ và cạnh $\{v, w\}$ vào $T$
    *visit*($w$)
  **end**
**end.**

**23.** Chứng minh bằng quy nạp theo chiều dài của đường đi : Nếu đường đi có độ dài 0, thì kết quả là tầm thường. Nếu độ dài là 1 thì $u$ là liền kề với $v$, vậy $u$ ở mức 1 trong cây khung ưu tiên chiều rộng. Giả sử kết quả là đúng cho đường đi độ dài $l$. Nếu độ dài của đường đi là $l + 1$, gọi $u'$ là đỉnh giáp cuối trong đường đi ngắn nhất từ $v$ tới $u$. Theo giả thiết quy nạp $u'$ ở mức $l$ trong cây khung ưu tiên chiều rộng. Nếu $u$ ở mức không quá $l$ thì rõ ràng độ dài của đường đi ngắn nhất từ $v$ tới $u$ cũng không vượt quá $l$. Vì thế $u$ còn chưa được ghép vào cây khung ưu tiên chiều rộng, sau khi các đỉnh mức $l$ đã được gộp vào. Vì $u$ là liền kề $u'$ nó sẽ được ghép thêm vào ở mức $l + 1$ (mặc dù cạnh nối $u'$ với $u$ không cần ghép vào).

**25.** a) Không có lời giải.
b)



c)



27. Xuất phát tại đỉnh và đi theo đường đi không trở lại các đỉnh đến khi nào không thể đi được nữa, khi đó quay lại nơi xuất phát sau khi viếng thăm tất cả các đỉnh. Khi không thể đi dọc theo đường đi, quay lui trở lại và cố mở rộng đường đi hiện thời theo hướng khác.

29. Lấy hợp của các cây khung của các thành phần liên thông của $G$. Chúng là rời nhau nên kết quả là một rừng.

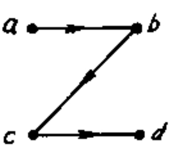
31. $m - n + c$

33. Dùng cách tìm kiếm ưu tiên chiều rộng cho mỗi thành phần liên thông.

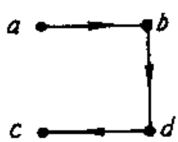
35. Gọi $T$ là cây khung trên Hình 3 và $T_1$, $T_2$, $T_3$ và $T_4$ là các cây khung trên Hình 4. Ký hiệu khoảng cách giữa $T'$ và $T''$ là $d(T', T'')$. Khi đó $d(T, T_1) = 6$, $d(T, T_2) = 4$, $d(T, T_3) = 4$, $d(T, T_4) = 2$, $d(T_1, T_2) = 4$, $d(T_1, T_3) = 4$, $d(T_1, T_4) = 6$, $d(T_2, T_3) = 4$, $d(T_2, T_4) = 2$ và $d(T_3, T_4) = 4$.

37. Giả sử $e_1 = \{u, v\}$ như đã nói trong đề bài. Khi đó $T_2 \cup \{e_1\}$ có chu trình đơn $C$ chứa $e_1$. Đồ thị $T_1 - \{e_1\}$ có hai thành phần liên thông. Các điểm cuối của $e_1$ thuộc các thành phần liên thông khác nhau. Đi theo $C$ từ $u$ ngược tới $e_1$ cho tới khi bạn tới đỉnh đầu tiên trong cùng một thành phần liên thông với $v$. Cạnh vừa mới đi qua là $e_2$. Rõ ràng $T_2 \cup \{e_1\} - \{e_2\}$ là cây vì $e_2$ thuộc $C$. Cũng vậy, $T_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}$ là cây vì $e_2$ nối hai thành phần liên thông với nhau.

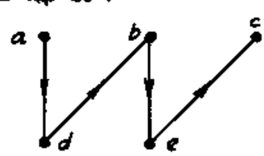
39. Bài tập 24 :



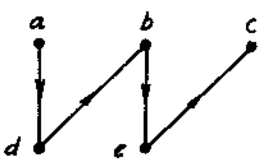

Bài tập 25 :



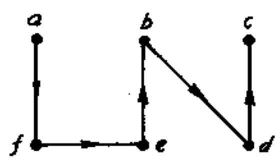

Bài tập 26 :




Bài tập 27 :




Bài tập 28 :



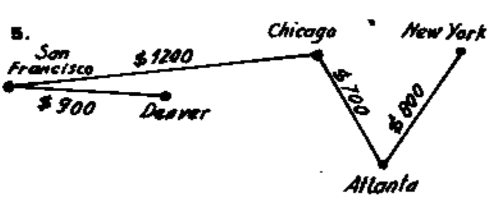

41. Trước tiên hãy xây dựng chu trình Euler trong đồ thị có hướng. Sau đó xóa khỏi chu trình này mọi cạnh đi tới đỉnh đã được viếng thăm trước đó.

## Tiết 8.6

1. Deep Spring - Oasis, Oasis - Dyer, Oasis - Silverspeak, Silverspeak - Goldfield, Lida - Gold Point, Gold Point - Beatty, Lida - Goldfield, Goldfield - Tonopah, Tonopah - Manhattan, Tonopah - Warm Springs.

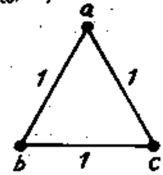
3. $\{e, f\}$, $\{c, f\}$, $\{e, h\}$, $\{h, i\}$, $\{b, e\}$, $\{b, d\}$, $\{a, d\}$, $\{g, h\}$.

5.



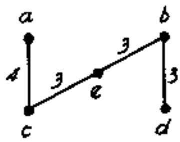

7. $\{e, f\}$, $\{a, d\}$, $\{h, i\}$, $\{b, d\}$, $\{c, f\}$, $\{e, h\}$, $\{b, c\}$, $\{g, h\}$

9.

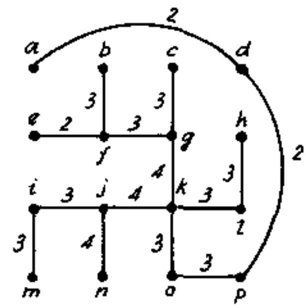


**11.** Thay cho việc chọn các cạnh có trọng số tối thiểu ở mỗi giai đoạn, hãy chọn các cạnh có trọng số lớn nhất có cùng tính chất.

**13.**



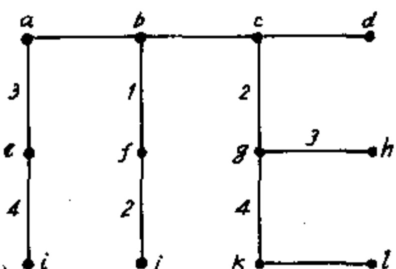

**15.**




**17.** Trước tiên tìm cây khung nhỏ nhất $T$ của đồ thị $G$ có $n$ cạnh. Khi đó với $i = 1$ tới $n - 1$ ta chỉ xóa cạnh thứ $i$ của $T$ khỏi $G$ và tìm cây khung nhỏ nhất của đồ thị còn lại. Chọn một trong $n - 1$ cây với độ dài ngắn nhất.

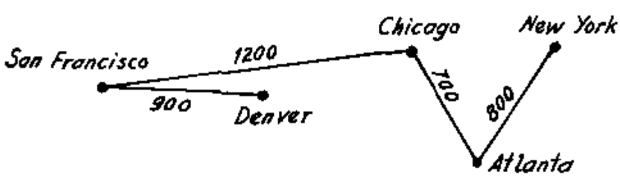
**19.** Nếu tất cả các cạnh có trọng số khác nhau, ta sẽ nhận được mâu thuẫn trong khi chứng minh rằng thuật toán Prim là việc tốt khi cạnh $e_{k+1}$ được ghép thêm vào $T$ và cạnh $e$ bị xóa, thay cho việc có thể tạo ra cây khung khác.

**21.**

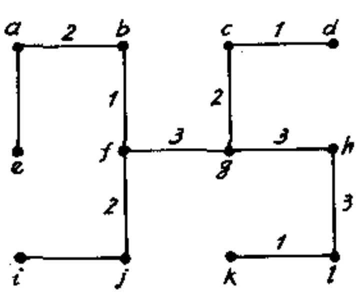



**23.** Như thuật toán Kruskal, chỉ khác là khi xuất phát $T$ := tập các cạnh cho trước và lặp từ $i = 1$ tới $i = n - 1 - s$ trong đó $s$ là số các cạnh của tập trên.

**25.** a)




b)




**27.** Theo Bài tập 24, tại mỗi giai đoạn của thuật toán Sollin ta có một rừng. Vì thế, sau khi $n - 1$ cạnh được chọn, ta có một cây. Ta chỉ còn phải chỉ ra đó là cây khung tối thiểu. Gọi $T$ là cây khung tối thiểu có nhiều cạnh chung nhất với cây Sollin $S$. Nếu $T \neq S$ khi đó có cạnh $e \in S - T$ được thêm vào ở một giai đoạn nào đó trong thuật toán, trước giai đoạn đó tất cả các cạnh trong $S$ cũng là các cạnh trong $T$. $T \cup \{e\}$ chứa một chu trình đơn duy nhất. Tìm cạnh $e' \in S - T$ và cạnh $e'' \in T - S$ trên chu trình này và "liền kề" khi nhìn các cây của giai đoạn này như "các siêu đỉnh". Khi đó theo thuật toán ta có $w(e') \leqslant w(e'')$. Vì thế thay $T$ bởi $T - \{e''\} \cup \{e'\}$ để tạo ra cây khung tối thiểu gần $S$ hơn $T$.

**29.** Mỗi một trong $r$ cây được nối với ít nhất một cây khác bởi một cạnh mới. Vì thế cuối cùng có nhiều nhất $r/2$ cây (mỗi cây mới chứa hai hoặc nhiều hơn cây cũ). Để làm điều này chúng ta cần thêm vào $r - (r/2) = r/2$ cạnh. Vì số các cạnh thêm vào là nguyên, nên ít nhất số đó là $\lceil r/2 \rceil$.

**31.** Nếu $k \geqslant \log n$, khi đó $n/2^k \leqslant 1$, vì thế $\lceil n/2^k \rceil = 1$, theo Bài 30, thuật toán kết thúc sau nhiều nhất $\log n$ bước lặp.

## *Bài tập bổ sung*

**1.** Giả sử $T$ là một cây. Khi đó $T$ không có chu trình đơn. Nếu ta ghép thêm cạnh $e$ nối hai đỉnh không liền kề $u$ và $v$, thì rõ ràng một chu trình đơn được tạo ra, vì khi $e$ được thêm vào $T$, đồ thị nhận được không còn là cây nữa vì có quá nhiều cạnh. Chu trình đơn duy nhất được tạo thành từ cạnh $e$ cùng với đường đi duy nhất $P$ trong $T$ từ $v$ tới $u$. Giả sử $T$ thỏa mãn những điều kiện đã cho. Tất cả những điều ta cần chứng tỏ là $T$ liên thông, vì trong đồ thị không có chu trình đơn. Giả sử $T$ không liên thông. Khi đó gọi $u$ và $v$ thuộc các thành phần liên thông khác nhau. Việc thêm cạnh $e = \{u, v\}$ không thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

**3.** Giả sử rằng cây $T$ có $n$ đỉnh với các bậc tương ứng là $d_1, d_2, \ldots, d_n$. vì $2e = \sum_{i=1}^{n} d_i$ và $e = n - 1$ ta có $2(n-1) = \sum_{i=1}^{n} d_i$ . Vì mỗi $d_i \geqslant 1$ ta suy ra $2(n-1) = n + \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)$ hay là $n - 2 = \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1)$. Vì thế, nhiều nhất $n - 2$ số hạng của tổng này bằng 1 hoặc lớn hơn. Do vậy, ít nhất có 2 số hạng bằng không. Từ đó suy ra $d_i = 1$ với ít nhất hai giá trị của $i$.

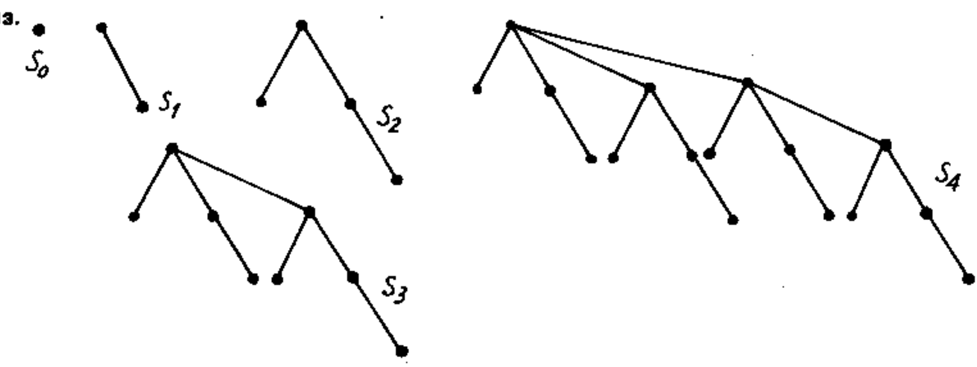
**5.** $2n - 2$

**7.** $T$ không có chu trình, vì thế không thể có đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc $K_5$.

**9.** Tô màu mỗi thành phần liên thông một cách riêng rẽ. Với mỗi thành phần liên thông này, trước hết chọn gốc cho cây, sau đó tô tất cả các đỉnh ở mức chẵn bằng màu đỏ, và các đỉnh ở mức lẻ tô bằng màu xanh.

**11.** Cận trên : $k^h$ ; cận dưới : $2\lceil k/2 \rceil^{h-1}$

**13.**



**15.** Dùng quy nạp toán học. Kết quả là tầm thường với $k = 0$. Giả sử nó đúng với $k - 1$ $T_{k-1}$ là cây mẹ của $T$. Theo quy nạp, cây con của $T$ có thể nhận được từ $T_0$, $T_1$, ... $T_{k-2}$ theo cách đã nói. Cuối cùng nối $r_{k-2}$ với $r_{k-1}$ như trong định nghĩa của $S_k$ cây.

**17.** **procedure** *level* ($T$ : cây có gốc được sắp với gốc $r$) ;
*queue* := dãy gồm chỉ gốc $r$
**while** *queue* còn chứa ít nhất một số hạng
**begin**
$v$ := đỉnh đầu tiên trong queue
liệt kê $v$
xóa $v$ khỏi queue và đặt các con của $v$ vào cuối queue
**end**

**19.** Xây dựng cây bằng cách chèn gốc đối với địa chỉ 0, và sau đó chèn cây con đối với mỗi đỉnh được gán nhãn $i$, với $i$ là số nguyên dương, dựng các cây con với các nhãn là $i, j$ với $j$ là nguyên, v.v.

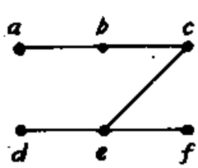
**20.** procedure insertion ($a_1, a_2, ..., a_n$ : số thực)
**for** $j := 2$ **to** $n$
**begin**
$i := 1$
**while** $a_j > a_i$
$i := i + 1$ ;
$m := a_j$
**for** $k := 0$ **to** $j - i - 1$
$a_{j-k} := a_{j-k-1}$
$a_i := m$
**end** {$a_1, a_2, ..., a_n$ là được sắp}

**23.** Nếu $u$ là đỉnh treo và $e = \{u, v\}$ là một cạnh của đồ thị liên thuộc với $u$, khi đó không có cạnh nào khác liên thuộc với $u$. Do vậy, $e$ phải thuộc bất kỳ cây khung nào, vì nếu không thì cây khung có thể không chứa cạnh liên thuộc với $u$.

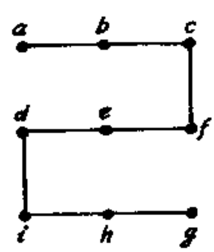
**25.** a) Có b) Không c) Có

**27.** Các đồ thị kết quả không có cạnh thuộc nhiều hơn một chu trình đơn có kiểu như đã mô tả. Vì thế nó là một cactus.

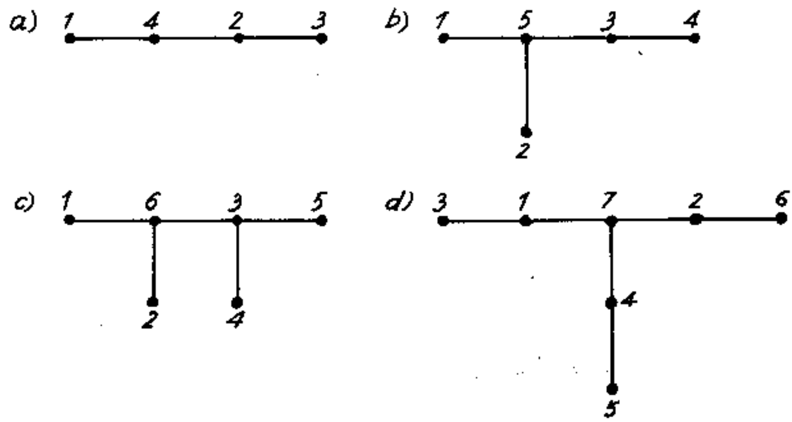
**29.**




**31.**



**33.**

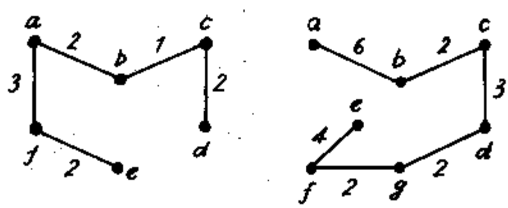



**35.** 6

**37.** a) Có b) Không c) Có

**39.** Gọi $G'$ là đồ thị nhận được bằng cách xóa khỏi $G$ đỉnh $v$ và tất cả các cạnh liên thuộc với $v$. Cây khung nhỏ nhất của $G$ có thể nhận được bằng cách lấy cạnh có trọng số tối thiểu liên thuộc với $v$ cùng với cây khung nhỏ nhất $G'$.

**41.**




a) b)

# CHƯƠNG 9

## *Tiết 9.1*

**1.** a) 1 b) 1 c) 0 d) 0

**3.** (0, 0) and (1, 1)

**5.** $x + xy = x.1 + xy = x(1 + y) = x(y + 1) = x.1 = x$

**7.**

| $x$ | $y$ | $z$ | $x\bar{y}$ | $y\bar{z}$ | $\bar{x}z$ | $x\bar{y}+y\bar{z}+\bar{x}z$ | $\bar{x}y$ | $\bar{y}z$ | $x\bar{z}$ | $\bar{x}y+\bar{y}z+x\bar{z}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**9.**

| $x$ | $x + x$ | $x . x$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

**11.**

| $x$ | $x + 1$ | $x . 0$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

**13.**

| $x$ | $y$ | $z$ | $y + z$ | $x+(y+z)$ | $x + y$ | $(x+y)+z$ | $yz$ | $x(yz)$ | $xy$ | $(xy)z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**15.**

| $x$ | $y$ | $xy$ | $\overline{(xy)}$ | $\bar{x}$ | $\bar{y}$ | $\bar{x} + \bar{y}$ | $x + y$ | $\overline{(x + y)}$ | $\bar{x}\ \bar{y}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

17.

| $x$ | y | x ⊕y | x + y | xy | $\overline{(xy)}$ | $(x+y)\ \overline{(xy)}$ | $x\bar{y}$ | $\bar{x}y$ | $x\bar{y}+\bar{x}y$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

19. a) Đúng, như bảng giá trị chân lý cho thấy.
   b) Sai. Ví dụ lấy $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$
   c) Sai. Ví dụ lấy $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$.

21. Theo luật De Morgan phần bù của một biểu thức giống như đối ngẫu, trừ điều là phải lấy phần bù của mỗi biến.

23. 16

25. Theo các luật nuốt, phân phối và đồng nhất, thì
   $x \vee x = (x \vee x) \wedge 1 = (x \vee x) \wedge (x \vee \bar{x}) = x \vee (x \wedge \bar{x}) = x \wedge 1 = x$.

27. Vì $0 \vee 1 = 1$ và $0 \wedge 1 = 0$, theo các luật đồng nhất và giao hoán, suy ra $\bar{0} = 1$
   Tương tự, vì $1 \vee 0 = 1$ và $1 \wedge 0$, suy ra $\bar{1} = 0$

29. Trước hết chú ý rằng $x \wedge 0 = 0$ và $x \vee 1 = 1$ với mọi $x$ - (điều này dễ dàng chứng minh được). Để chứng minh hằng đẳng thức thứ nhất, chỉ cần chứng tỏ rằng : $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 1$ và $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = 0$. Theo các luật kết hợp, phân phối, giao hoán, nuốt và đồng nhất, ta có $(x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) = y \vee ((x \vee \bar{x}) \wedge (x \vee \bar{y})) = y \vee (1 \wedge (x \vee \bar{y}) = y \vee (x \vee \bar{y}) = (y \vee \bar{y}) \vee x = 1 \vee x = 1$ và $(x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) = \bar{y} \wedge (\bar{x} \wedge (x \vee y)) = \bar{y} \wedge ((\bar{x} \wedge x) \vee (\bar{x} \wedge y)) = \bar{y} \wedge (0 \vee (\bar{x} \wedge y)) = \bar{y} \wedge (\bar{x} \wedge y) = \bar{x} \wedge (y \wedge \bar{y}) = \bar{x} \wedge 0 = 0$. Hằng đẳng thức thứ hai được chứng minh tương tự.

31. Dùng các giả thiết, Bài tập 25, và luật phân phối suy ra $x = x \vee 0 = x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y = 0$. Tương tự, $y = 0$. Để chứng minh mệnh đề thứ hai, chú ý rằng $x = x \wedge 1 = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y = 1$. Tương tự, $y = 1$

## Tiết 9.2

1. a) $\bar{x}\bar{y}z$ b) $\bar{x}y\bar{z}$ c) $\bar{x}yz$ d) $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

3. a) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z$ b) $xyz + xy\bar{z} + \bar{x}yz$
   c) $xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$ d) $x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z}$

5. $wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + w\bar{x}yz + \bar{w}xyz + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

7. a) $\bar{x} + \bar{y} + z$ b) $x + y + z$ c) $x + \bar{y} + z$

9. $y_1 + y_2 + .. + y_n = 0$ nếu và chỉ nếu $y_i = 0$ với $i = 1, 2, ..., n$. Điều này đúng nếu và chỉ nếu $x_i = 0$ khi $y_i = x_i$ và $x_i = 1$ khi $y_i = \bar{x}_i$.

11. a) $x + y + z$
   b) $(x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(\bar{x} + y + z)(\bar{x} + y + \bar{z})$
   c) $(x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})$
   d) $(x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})$

13. a) $x + y + z$ b) $x + \overline{(y + \overline{(\bar{x} + z)})}$
   c) $\overline{(x + \bar{y})}$ d) $\overline{(x + \overline{(x + \bar{y} + \bar{z})})}$

**15.** a)

| $x$ | $\overline{x}$ | $x \downarrow x$ |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |

b)

| $x$ | $y$ | $xy$ | $x \downarrow x$ | $y \downarrow y$ | $(x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

c)

| $x$ | $y$ | $x+y$ | $(x \downarrow y)$ | $(x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

**17.** a)
$(((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))) \mid (z \mid z)$

b) $(((x \mid x) \mid (z \mid z)) \mid y) \mid (((x \mid x) \mid (z \mid z)) \mid y)$

c) $x$

d) $(x \mid (y \mid y)) \mid (x \mid (y \mid y))$

**19.** Không biểu diễn $\overline{x}$ bằng cách dùng + và $\bullet$ , vì không có cách nào đạt được giá trị 0 nếu đầu vào là 1.

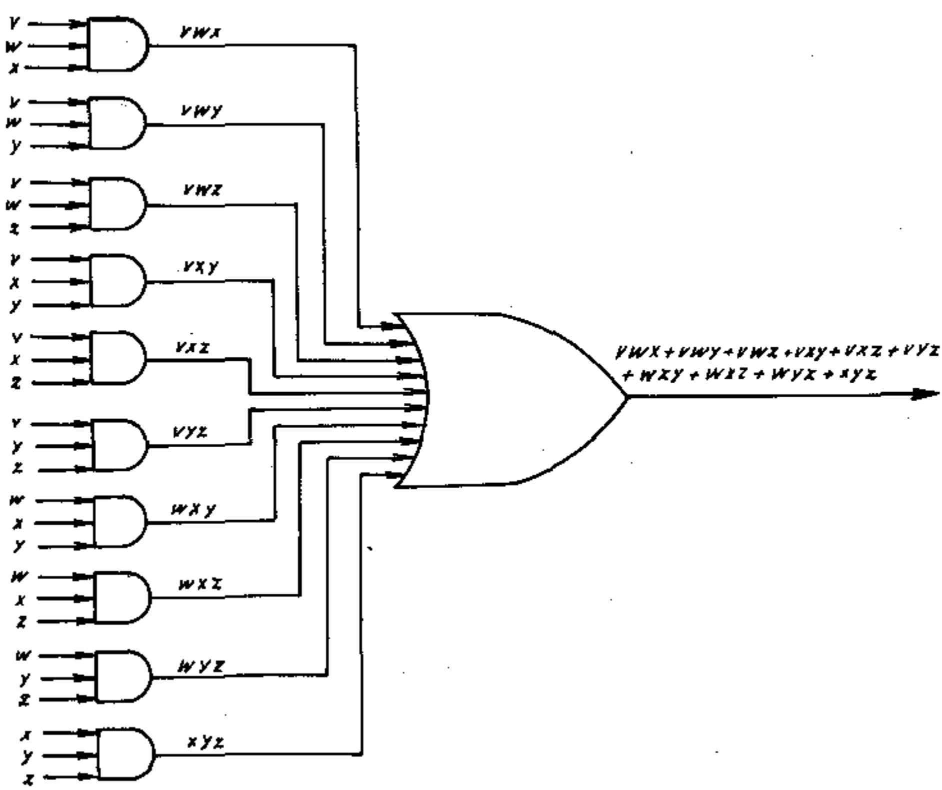
## Tiết 9.3

**1.** $(x + y)\overline{y}$

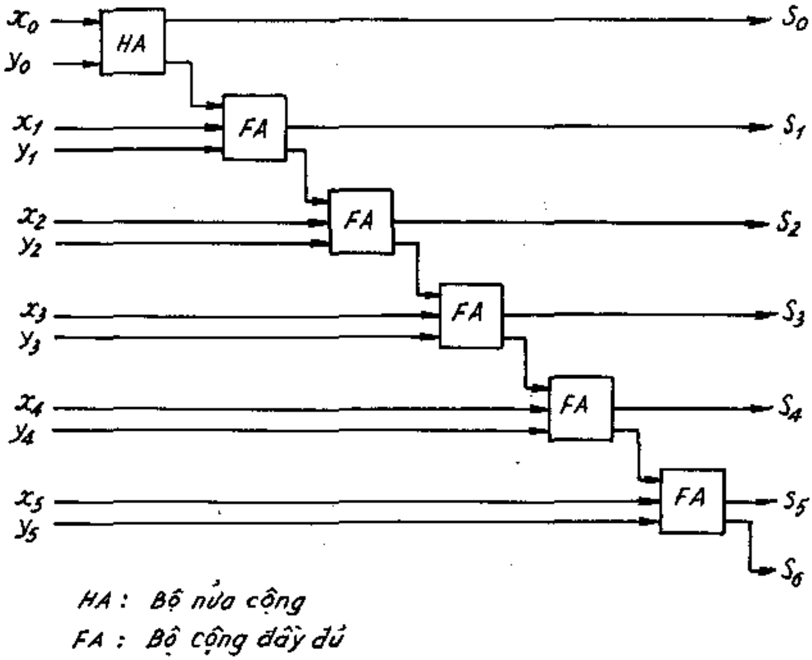
**3.** $\overline{(xy)} + (\overline{z} + x)$

**5.** $(x + y + z) + (\overline{x} + y + z) + (\overline{x} + \overline{y} + \overline{z})$

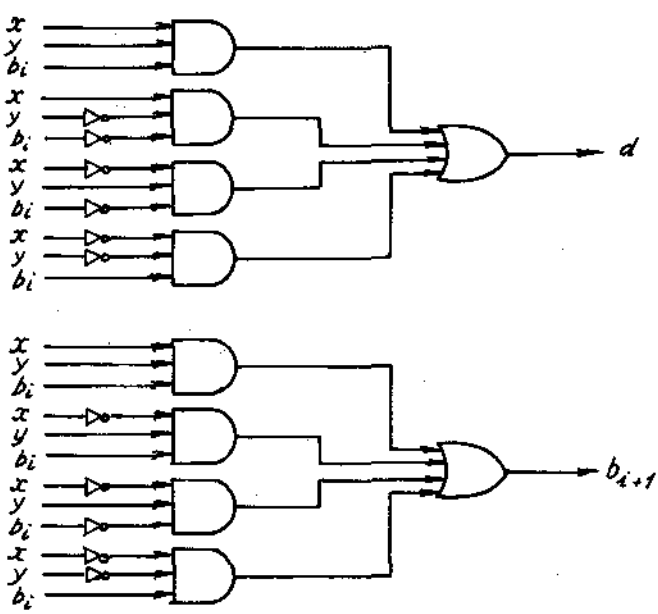
**7.**



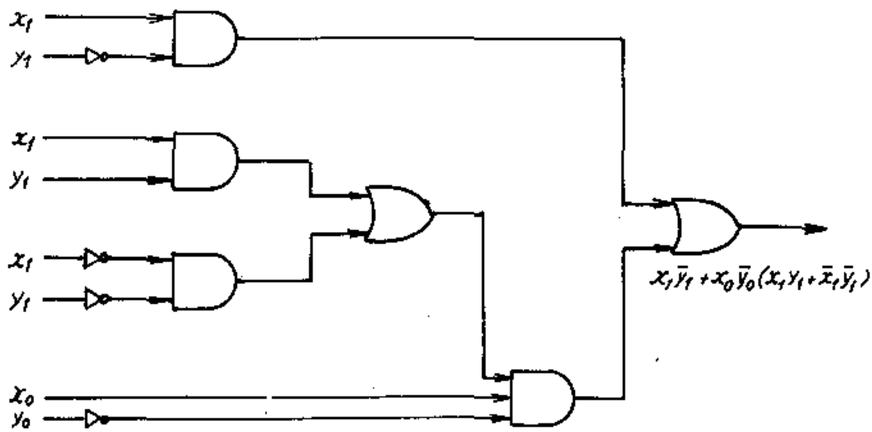
9.


x0
y0
HA
x1
y1
FA
x2
y2
x3
y3
x4
y4
x5
y5
S0
S1
S2
S3
S4
S5
S6
HA : Bộ nửa cộng
FA : Bộ cộng đầy đủ

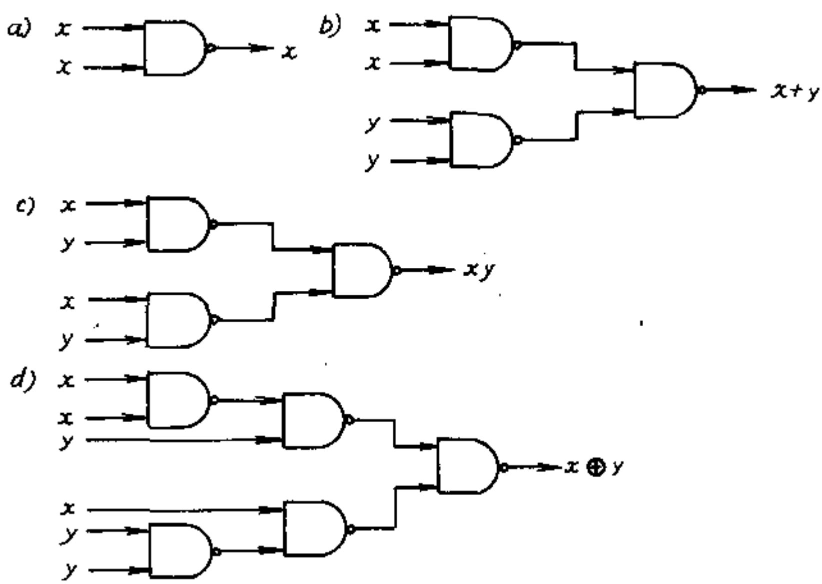
11.


x
y
bi
d
bi+1

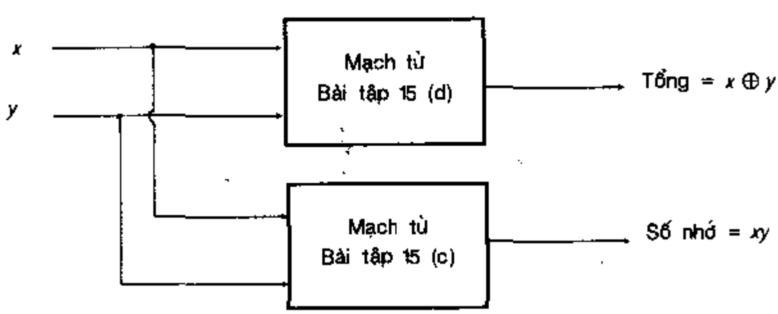
**13.**


$x_1$
$y_1$
$x_1$
$y_1$
$x_1$
$y_1$
$x_0$
$y_0$
$x_1\bar{y}_1 + x_0\bar{y}_0(x_1y_1 + \bar{x}_1\bar{y}_1)$

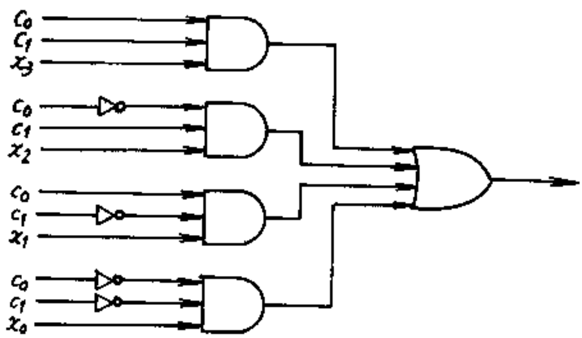
**15.**


a) $x$ $x$ → $\bar{x}$
b) $x$ $x$ $y$ $y$ → $x+y$
c) $x$ $y$ $x$ $y$ → $xy$
d) $x$ $x$ $y$ $x$ $y$ $y$ → $x \oplus y$

**17.**


$x$
$y$
Mạch từ Bài tập 15 (d)
Tổng = $x \oplus y$
Mạch từ Bài tập 15 (c)
Số nhớ = $xy$

19.




## Tiết 9.4

1. a)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | |
| $\bar{x}$ | 1 | |

b) $xy$ và $\bar{x}\,\bar{y}$

3. a)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | | 1 |
| $\bar{x}$ | | |

b)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | 1 | |
| $\bar{x}$ | | 1 |

c)

| | $y$ | $\bar{y}$ |
|---|---|---|
| $x$ | 1 | 1 |
| $\bar{x}$ | 1 | 1 |

5. a)

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\,\bar{z}$ | $\bar{y}\,z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | | |
| $\bar{x}$ | | 1 | | |

b) $\bar{x}yz$, $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$, $xy\bar{z}$

7. a)

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\,\bar{z}$ | $\bar{y}\,z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | 1 | |
| $\bar{x}$ | | | | |

b)

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\,\bar{z}$ | $\bar{y}\,z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | | | 1 | |
| $\bar{x}$ | 1 | | 1 | |

c)

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\,\bar{z}$ | $\bar{y}\,z$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 1 | | |
| $\bar{x}$ | | 1 | | 1 |

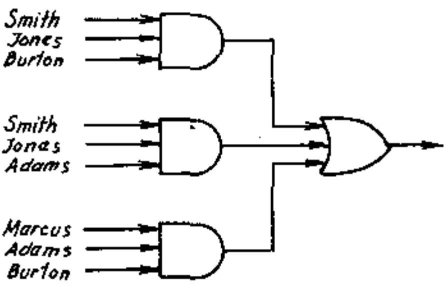
**9.** a)

| | $yz$ | $y\bar{z}$ | $\bar{y}\bar{z}$ | $\bar{y}z$ |
|---|---|---|---|---|
| $wx$ | | | | |
| $w\bar{x}$ | | | | |
| $\bar{w}\bar{x}$ | | | | |
| $\bar{w}x$ | | 1 | | |

b) $wxy\bar{z}$, $\bar{w}xyz$, $\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$, $\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$

**11.** a) 32 b) 5

**13.**




**15.** a) $\bar{x}z$

b) $y$

c) $x\bar{z} + \bar{x}z + \bar{y}z$

d) $xz + \bar{x}y + \bar{y}\bar{z}$

**17.** a) $wxz + wx\bar{y} + w\bar{y}z + w\bar{x}y\bar{z}$

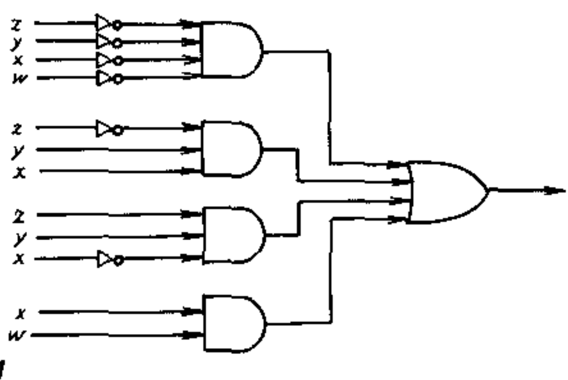
b) $x\bar{y}z + \bar{w}\bar{y}z + wxy\bar{z} + w\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$

c) $\bar{y}x + wxz + w\overline{xy} + \bar{w}\bar{x}y\bar{z}$

d) $wy + yz + \bar{x}y + wxz + \bar{w}\bar{x}z$

**19.** $x(y + z)$

**21.**




**23.** $\overline{xz} + xz$

## Bài tập bổ sung

**1.** a) $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$ ; $x = 1,\quad y = 1,\quad z = 1$ ;

b) $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 0$ ; $x = 0,\quad y = 0,\quad z = 1$ ;
$x = 0,\quad y = 1,\quad z = 0$ . $x = 1,\quad y = 0,\quad z = 1$ ;
$x = 1,\quad y = 1,\quad z = 0$ ; $x = 1,\quad y = 1,\quad z = 1$

c) Không có giá trị nào.

**3.** a) Có b) Không c) Không d) Có

**5.** $2^{2^{n-1}}$

**7.** a) Nếu $F(x_1, \ldots, x_n) = 1$ thì $(F + G)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) + G(x_1, \ldots, x_n) = 1$ theo luật nuốt. Do đó $F \leqslant F + G$.

b) Nếu $(FG)(x_1, \ldots, x_n) = 1$, thì $F(x_1, \ldots, x_n) \cdot G(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Do đó, $F(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Suy ra $FG \leq F$.

**9.** a) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
b) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
c) $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

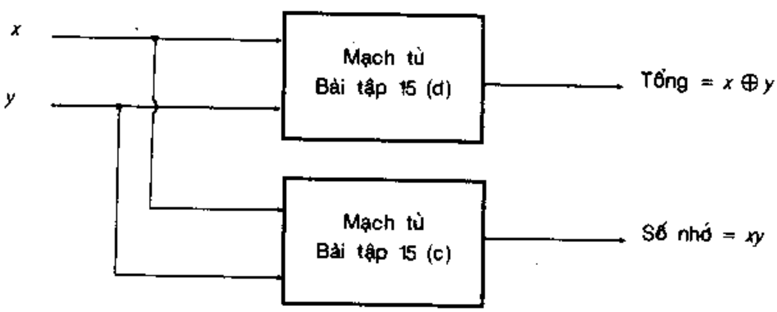
**11.**

| $x$ | $y$ | $x \odot y$ | $x \oplus y$ | $\overline{x \oplus y}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

**13.** Có, như bảng chân lý sẽ cho thấy

**15.** a) 6  b) 5  c) 5  d) 6

**17.**




**19.** $x_3 + x_2\bar{x}_1$

**21.** Giả sử có các trọng là $a$ và $b$. Khi đó tồn tại một số thực $T$ sao cho $xa + yb \geq T$ đối với (1, 0) và (0, 1), nhưng với $xa + yb < T$, đối với (0, 0) và (1, 1). Do đó $a \geq T$, $b \geq T$, $0 < T$, và $a + b < T$. Vậy $a$ và $b$ là dương, điều này kéo theo $a + b > a \geq T$, mâu thuẫn.

# CHƯƠNG 10

## *Tiết 10.1*

1. a) **câu** ⇒ **danh ngữ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động từ** ⇒ ...(sau ba bước)...⇒ *the happy hare runs.*

   b) **câu** ⇒ **danh ngữ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ nội động từ trạng từ** ...(sau năm bước)... ⇒ *the sleepy tortoise runs quickly.*

   c) **câu** ⇒ **danh ngữ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ danh từ ngoại động từ danh ngữ** ⇒ **quán từ danh từ ngoại động từ quán từ danh từ** ⇒...(sau 5 bước)...⇒ *the tortoise passes the hare.*

   d) **câu** ⇒ **danh ngữ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ ngoại động ngữ danh ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ ngoại động từ danh ngữ** ⇒ **quán từ tính từ danh từ ngoại động từ quán từ tính từ danh từ** ⇒...(sau 6 bước)...⇒ *the sleepy hare passes the happy tortoise* .

3. Cách duy nhất để có một danh từ, như tortoise, ở cuối là có một danh ngữ ở cuối mà ta có thể đạt được chỉ qua sản xuất **câu** → **danh ngữ ngoại động ngữ danh ngữ**. Tuy nhiên, **ngoại động ngữ** → **ngoại động từ** → *passes* , nên câu này không chứa *passes* .

5. $S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 000S111 \Rightarrow 000111$

7. a) $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 00S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 00S111 \Rightarrow 00S1111 \Rightarrow 001111$

   b) $S \Rightarrow 0S \Rightarrow 00S \Rightarrow 001A \Rightarrow 0011A \Rightarrow 00111A \Rightarrow 001111$

9. $S \Rightarrow 0SAB \Rightarrow 00SABAB \Rightarrow 00ABAB \Rightarrow 00AABB \Rightarrow 001ABB \Rightarrow 0011BB \Rightarrow 00112B \Rightarrow 001122$

11. a) $S \to 00S$, $S \to \lambda$

    b) $S \to 10A$, $A \to 00A$, $A \to \lambda$

    c) $S \to AAS$, $S \to BBS$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $S \to \lambda$, $A \to 0$, $B \to 1$

    d) $S \to 0000000000A$, $A \to 0A$, $A \to \lambda$

    e) $S \to AS$, $S \to ABS$, $S \to A$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$

    f) $S \to ABS$, $S \to \lambda$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$

    g) $S \to ABS$, $S \to T$, $S \to U$, $T \to AT$, $T \to A$, $U \to BU$, $U \to B$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$

13. a) Loại 2, không phải loại 3

    b) Loại 3, không phải loại 2

    c) Loại 0, không phải loại 1

    d) Loại 2, không phải loại 3

e) Loại 2

f) Loại 0, không phải loại 1

g) Loại 3

h) Loại 0, không phải loại 1

i) Loại 2, không phải loại 3

j) Loại 2, không phải loại 3

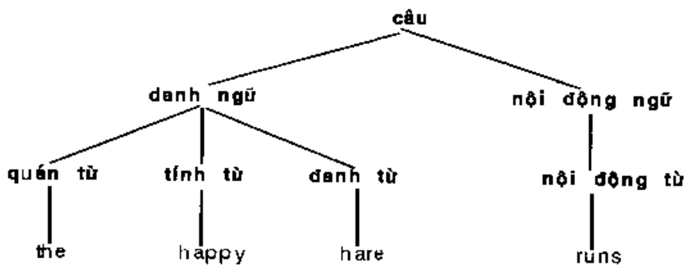
**15.** Giả sử $S_1$ và $S_2$ tương ứng là các ký hiệu xuất phát của $G_1$ và $G_2$. Giả sử $S$ là ký hiệu xuất phát mới

a) Thêm $S$ và các sản xuất $S \rightarrow S_1$ và $S \rightarrow S_2$

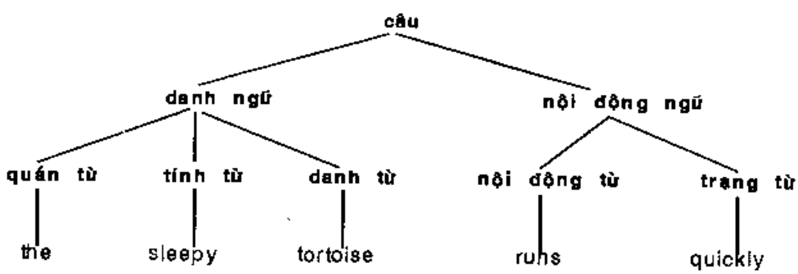
b) Thêm $S$ và sản xuất $S \rightarrow S_1S_2$

c) Thêm $S$ và các sản xuất $S \rightarrow \lambda$ và $S \rightarrow S_1S$

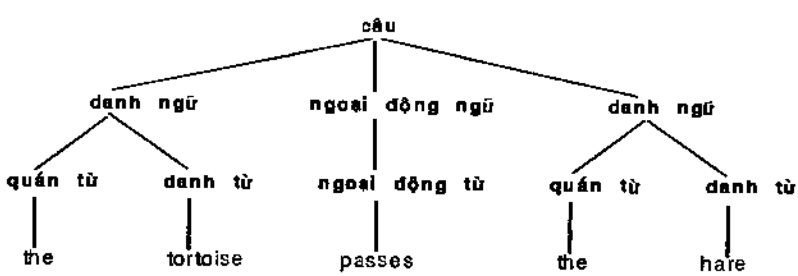
**17.** a)



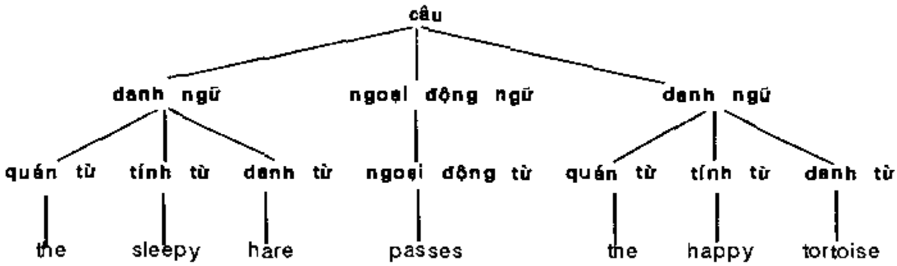

b)




c)

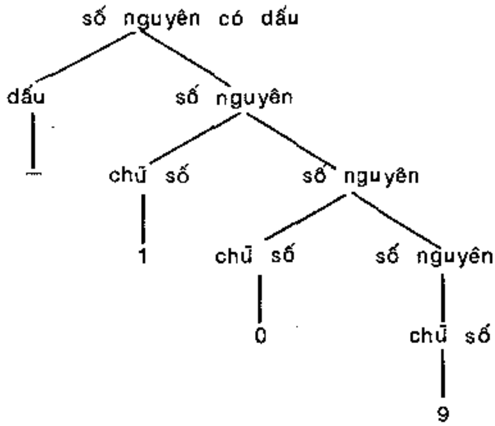


d)




**19.** a) Có b) Không c) Có d) Không

**21.**




**23.** a) $S$ → <dấu><số nguyên>

S → <dấu><số nguyên><số nguyên dương>

<dấu> → +

<dấu> → −

<số nguyên> → <chữ số>

<số nguyên> → <số nguyên><chữ số>

<chữ số> → $i$, $i$ = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0

<số nguyên dương> → <số nguyên><chữ số khác không><số nguyên><số nguyên dương> → <chữ số khác không>

<chữ số khác không> → $i$, $i$ = 1,2,3,4,5,6,7,8,9

b) <số thập phân có dấu> ::= <dấu><số nguyên> | <dấu><số nguyên>,<số nguyên dương>

<dấu> ::= + | −

<số nguyên> ::= <chữ số> | <số nguyên><chữ số>

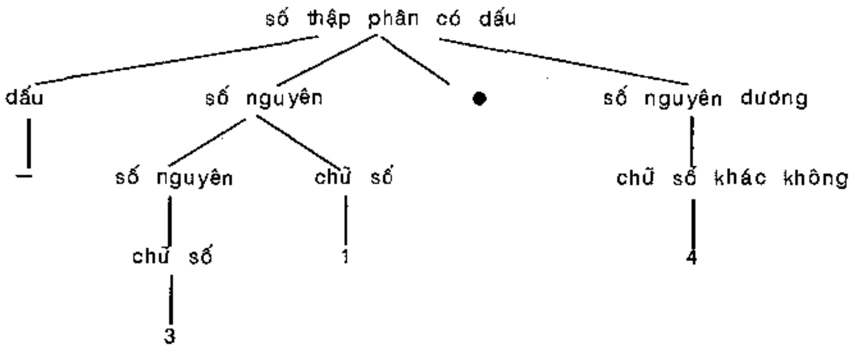
<chữ số> ::= 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<chữ số khác không> ::= 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9

<số nguyên dương> ::= <số nguyên><chữ số khác không> | <chữ số khác không><số nguyên> | <số nguyên><số nguyên khác không><số

nguyên > | <chữ số khác không>

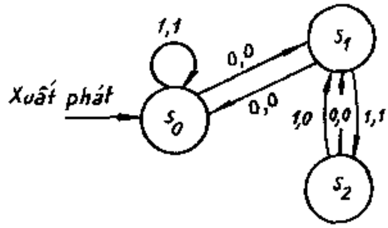
c)



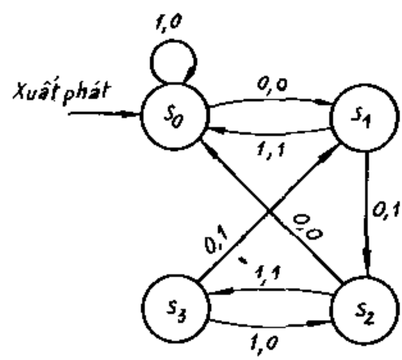

**25.** $\{(u, v) \mid v$ là dẫn xuất từ $u\}$

## Tiết 10.2

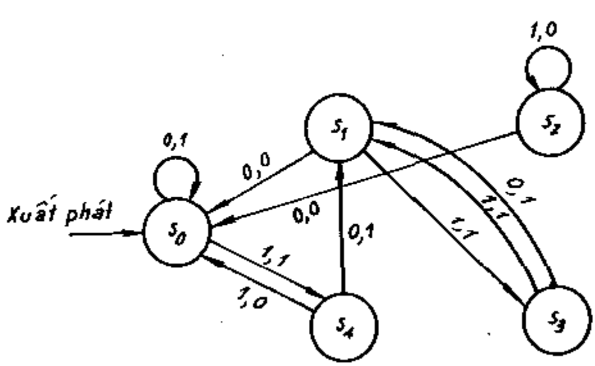
**1.** a)




b)

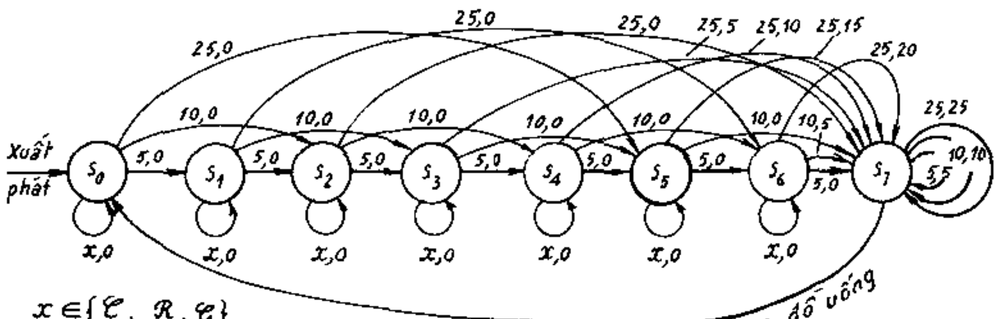



c)

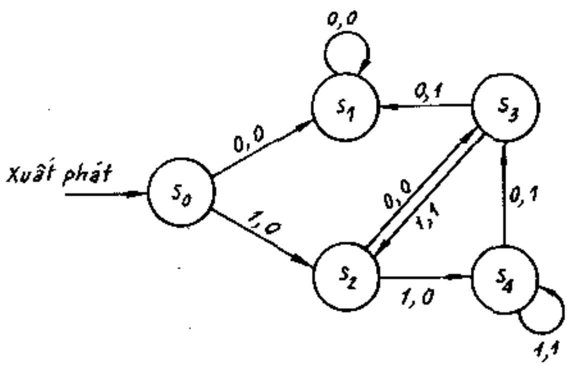


**3.** a) 1100 b) 00110110 c) 11111111111

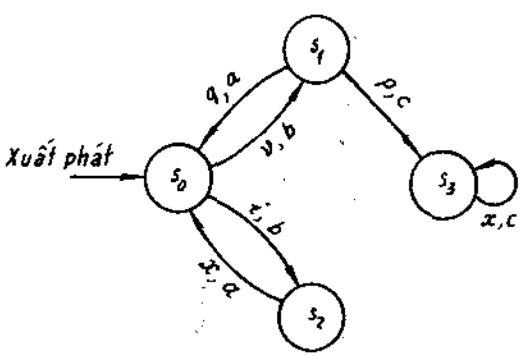
**5.**




**7.**



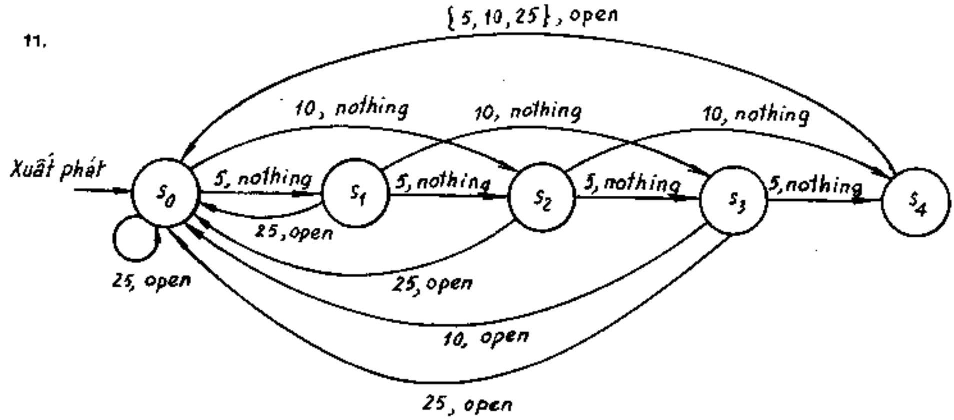

**9.**



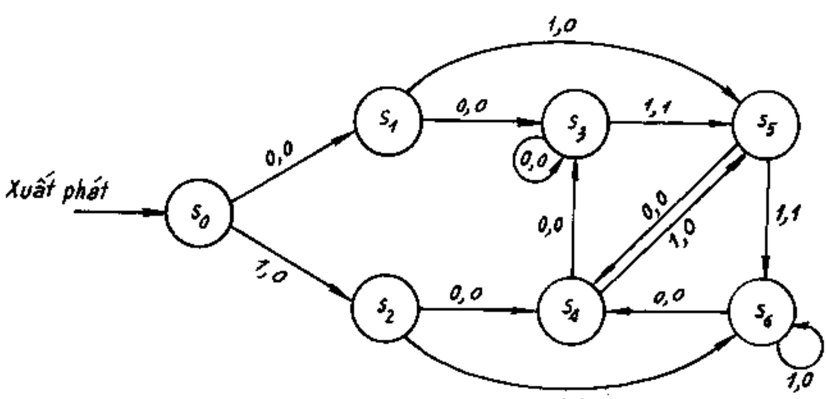

v = ID hợp thức
i = ID không hợp thức
p = Mật khẩu hợp thức
q = Mật khẩu không hợp thức

a = "Nhập ID người dùng"
b = "Nhập mật khẩu"
c = Nhắc
x = Đầu vào bất kỳ

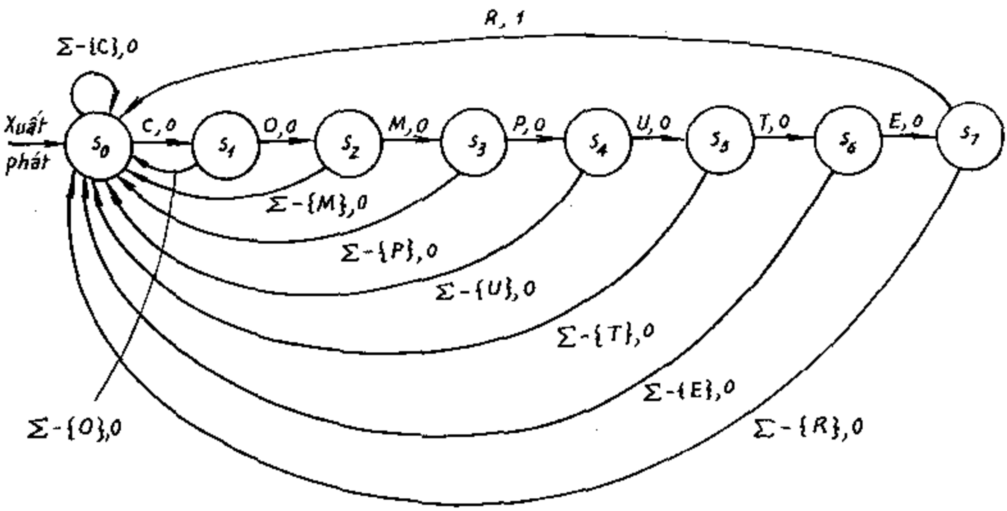
11.


{5, 10, 25}, open
10, nothing
10, nothing
10, nothing
Xuất phát
$s_0$
5, nothing
$s_1$
5, nothing
$s_2$
5, nothing
$s_3$
5, nothing
$s_4$
25, open
25, open
25, open
10, open
25, open

13.


1,0
$s_1$
0,0
$s_3$
1,1
$s_5$
0,0
0,0
Xuất phát
$s_0$
0,0
0,0
1,0
1,1
1,0
$s_2$
0,0
$s_4$
0,0
$s_6$
1,0
1,0

**15.**

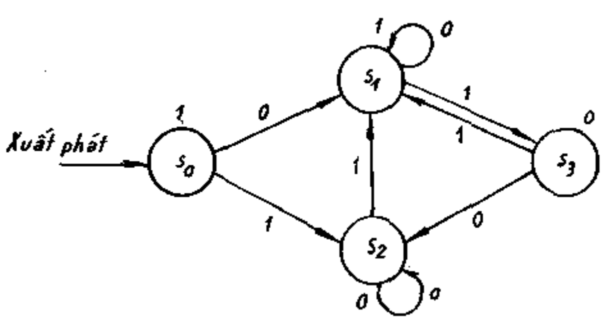



**17.**

| Trạng thái | f | | g |
|---|---|---|---|
| | Đầu vào | | |
| | 0 | 1 | |
| $s_0$ | $s_1$ | $s_2$ | 1 |
| $s_1$ | $s_1$ | $s_0$ | 1 |
| $s_2$ | $s_1$ | $s_2$ | 0 |

**19.** a) 11111 b) 1000000 c) 100011001100

**21.**



## Tiết 10.3

1. a) {000, 001, 1100, 1101}

 b) {000, 0011, 010, 0111}

 c) {00, 011, 110, 1111}

 d) {000000, 000001, 000100, 000101, 010000, 010001, 010100, 010101}

3. $A$ = {1, 101}, $B$ = {0, 11, 000}; $A$ = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000}, $B$ = {$\lambda$}; $A$ = {$\lambda$, 10}, $B$ = {10, 111, 1000} hoặc $A$ = {$\lambda$}, $B$ = {10, 111, 1010, 1000, 10111, 101000}

5. a) Tập tất cả các xâu gồm không hoặc nhiều hơn các cặp bit 10 liên tiếp.

 b) Tập tất cả các xâu gồm toàn các số 1 sao cho số các số 1 chia hết cho 3, kể cả xâu rỗng.

 d) Tập tất cả các xâu bắt đầu và kết thúc bằng số 1 và có ít nhất hai số 1 giữa mỗi cặp số 0.

7. Một xâu thuộc $A^*$ nếu và chỉ nếu nó là ghép của một số tùy ý các xâu trong $A$. Vì mỗi xâu thuộc $A$ cũng là thuộc $B$, suy ra một xâu trong $A^*$ cũng là phép ghép của các xâu trong $B$. Do đó $A^* \subseteq B^*$

9. a) Có b) Có

 c) Có d) Không

 e) Có f) Có

11. a) Có b) Có

 c) Không d) Không

 e) Không f) Không

13. $\{0, 10, 11\}\{0, 1\}^*$

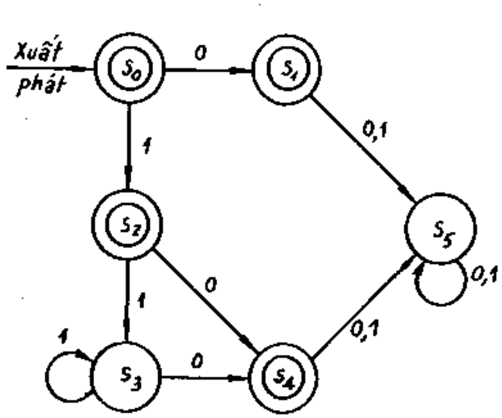
15. $\{0^m1^n \mid m \geq 0$ và $n \geq 1\}$

17. {0, 01, 11}

19. $\{\lambda, 0\} \cup \{0^m1^n \mid m \geq 1, n \geq 1\}$

21. $\{10^n \mid n \geq 0\} \cup \{10^n10^m \mid n, m \geq 0\}$

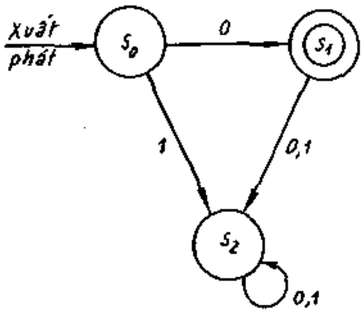
23.



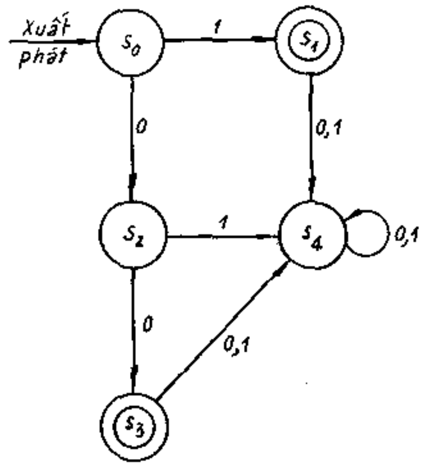
**25.** Thêm vào trạng thái không - kết thúc $s_3$ với các chuyển dịch tới $s_3$ từ $s_0$ khi đầu vào là 0, từ $s_1$ khi đầu vào là 1, và từ $s_3$ khi đầu vào là 0 hoặc 1.

**27.**

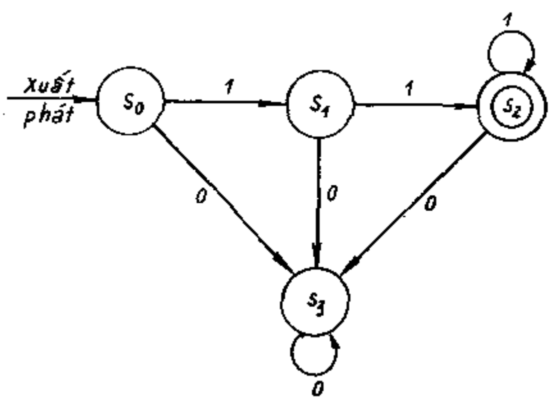
a)




b)




c)




**29.** Giả sử $M$ là một ôtômat hữu hạn chấp nhận tập các xâu bit chứa một số như nhau các số 0 và số 1. Giả sử $M$ có $n$ trạng thái. Xét xâu $0^{n+1}1^{n+1}$. Theo nguyên lý Dirichlet, khi $M$ xử lý xâu này, nó cần phải gặp hai lần cùng một trạng thái sau khi nó đọc n−1 số 0 đầu tiên, giả sử trạng thái đó là $s$. Khi đó $k$ số 0 trong đầu vào sẽ đưa $M$ từ $s$ trở lại chính nó, với $k$ là một số nguyên dương nào đó. Nhưng khi đó, $M$ sau khi đọc $0^{n+1+k}1^{n+1}$ sẽ kết thúc chính ở chỗ hệt như sau khi nó đọc $0^{n+1}1^{n+1}$. Do đó, vì $M$ chấp nhận $0^{n+1}1^{n+1}$ nên nó cũng phải chấp nhận $0^{n+k+1}1^{n+1}$ mà điều này là mâu thuẫn!

## Tiết 10.4

**1.** a) Một số bất kỳ các số 1 được tiếp theo sau bởi một số 0

b) Một số bất kỳ các số 1 được tiếp theo sau bởi một hoặc nhiều hơn các số không

c) 111 hoặc 001

d) Xâu gồm một số tùy ý các số 1 hoặc các cặp 00 hoặc một số mỗi loại ở một hàng

e) $\lambda$ hoặc xâu kết thúc bằng một số 1 và có một hoặc nhiều hơn các số 0 đứng trước mỗi số 1

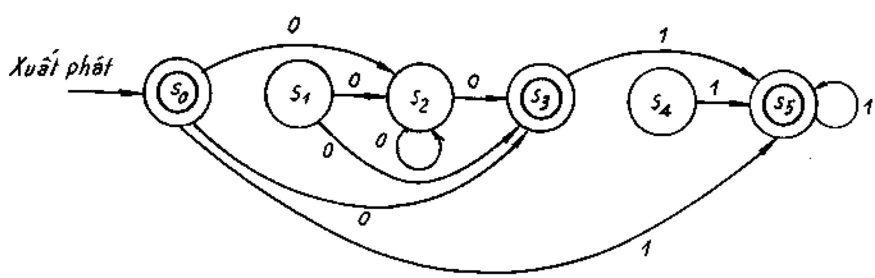
f) Xâu với chiều dài ít nhất bằng 3 tận cùng bằng 00.

**3.** a) $\mathbf{00^*1}$ b) $\mathbf{(0\cup 1)(0\cup 1)(0\cup 1)^*0000^*}$

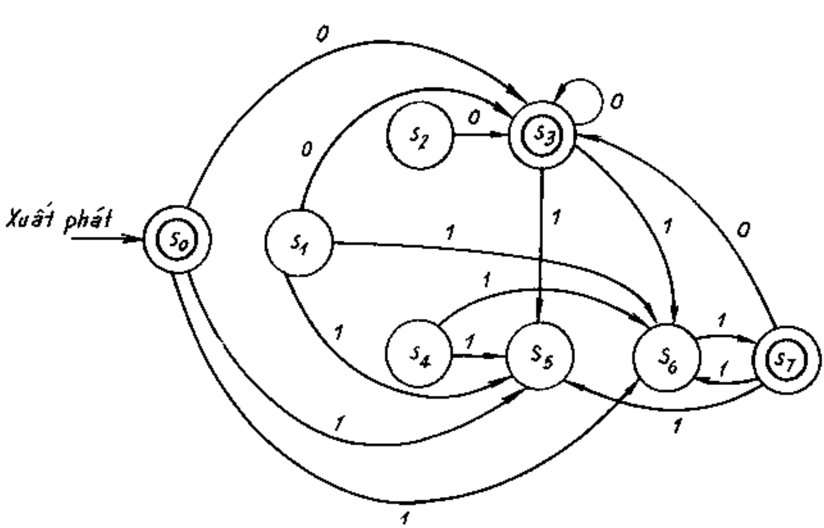
c) $\mathbf{0^*1^*\cup 1^*0^*}$ d) $\mathbf{11(111)^*(00)^*}$

**5.** Dùng phép chứng minh quy nạp. Nếu biểu thức chính quy đối với $A$ là $\varnothing$, $\lambda$ hoặc $x$, kết quả là tầm thường. Nếu không, giả sử rằng biểu thức chính quy đối với $A$ là **BC**. Khi đó $A = BC$ khi $B$ là tập được phát sinh bởi **B** và $C$ là tập được phát sinh bởi **C**. Theo giả thiết quy nạp, thì tồn tại các biểu thức chính quy **B'** và **C'** sinh $B^R$ và $C^R$, tương ứng. Vì $A^R = (BC)^R = C^R B^R$, nên **C'B'** là biểu thức chính quy đối với $A^R$. Nếu biểu thức chính quy đối với $A$ là **B** $\cup$ **C** thì biểu thức chính quy đối với $A^R$ là **B'** $\cup$ **C'** vì $(B \cup C)^R = B^R \cup C^R$. Cuối cùng, nếu biểu thức chính quy đối với $A$ là $B^*$, thì dễ dàng thấy rằng $(\mathbf{B}')^*$ là biểu thức chính quy đối với $A^R$.

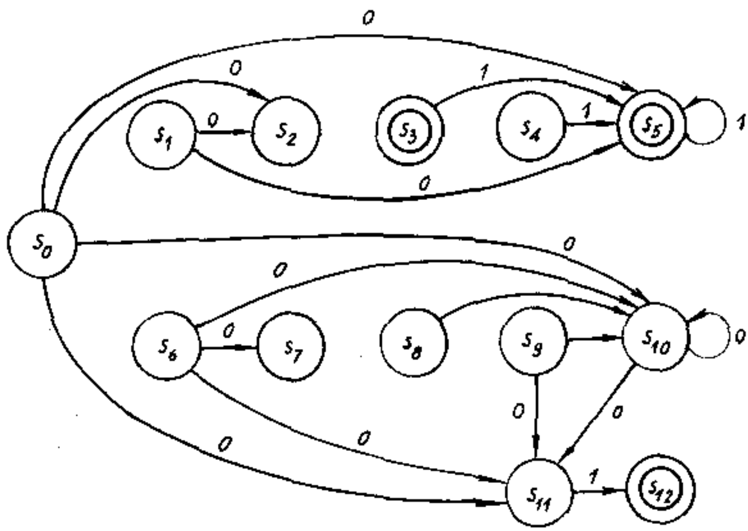
**7.** a)




b)



c)




**9.** $S \to 0A$, $S \to 1B$, $S \to 0$, $A \to 0B$, $A \to 1B$, $B \to 0B$, $B \to 1B$.

**11.** $S \to 0C$, $S \to 1A$, $S \to 1$, $A \to 1A$, $A \to 0C$, $A \to 1$, $B \to 0B$, $B \to 1B$, $B \to 0$, $B \to 1$, $C \to 0C$, $C \to 1B$, $C \to 1$

**13.** Điều này được suy ra vì dấu vào dẫn tới trạng thái kết thúc trong ôtômat tương ứng một cách duy nhất với một dẫn xuất trong văn phạm.

**15.** Phần "chỉ nếu" là hiển nhiên vì $I$ là hữu hạn. Đối với phần "nếu", giả sử các trạng thái là $s_{i_0}, s_{i_n}, s_{i_1}, s_{i_2}, \ldots s_{i_n}$, trong đó $n = l(x)$. Vì $n \geq |S|$, nên một trạng thái nào đó sẽ được lặp lại theo nguyên lý Dirichlet. Giả sử $y$ là phần của $x$ gây ra vòng lặp, sao cho $x = uyv$ và $y$ đưa $s_j$ đến $s_j$ đối với một $j$ nào đó. Khi đó $uy^kv \in L(M)$ với mọi $k$. Vậy $L(M)$ là vô hạn.

**17.** Giả sử $L = \{0^{2n}1^n\}$ là chính quy. Giả sử $S$ là tập các trạng thái của một ôtômat hữu hạn chấp nhận tập $L$. Giả sử $z = 0^{2n}1^n$ với $3n \geq |S|$. Khi đó, theo Bổ đề bơm, $z = 0^{2n}1^n = uvw$, với $l(v) \geq 1$ và $uv^iw \in \{0^{2n}1^n \mid n \geq 0\}$. Rõ ràng $v$ không thể chứa cả 0 và 1 vì $v^2$ khi đó chứa 10. Vậy $v$ chỉ chứa toàn số 0 hoặc toàn số 1 và do đó $uv^2w$ chứa quá nhiều số 0 hoặc quá nhiều số 1, nên nó không thuộc $L$. Mâu thuẫn này chứng tỏ $L$ không phải là chính quy.

**19.** Giả sử tập các xâu "thuận nghịch độc" trên {0, 1} là chính quy. Giả sử $S$ là tập các trạng thái của ôtômat hữu hạn chấp nhận tập các xâu đó. Giả sử $z = 0^n10^n$ với $n > |S|$. Áp dụng Bổ đề bơm ta được $uv^iw \in L$ với mọi số nguyên $i$ không âm với $l(v) \geq 1$ và $l(uv) \leq |S|$, và $z = 0^n10^n = uvw$. Khi đó $v$ cần phải là xâu gồm các số 0 (vì $|n| > S$), vậy $uv^2w$ không phải là thuận nghịch độc. Do đó tập các xâu thuận nghịch độc không phải là chính quy.

## Tiết 10.5

1. a) Phần không trống của băng chứa xâu 1111 khi máy dừng lại.
   b) Phần không trống của băng chứa xâu 011 khi máy dừng lại.
   c) Phần không trống của băng chứa xâu 00001 khi máy dừng lại.
   d) Phần không trống của băng chứa xâu 00 khi máy dừng lại.

3. Nếu băng chứa ít nhất một số 1 thì máy sẽ thay đổi mỗi một số 1 thành số không xuất phát từ số 1 đầu tiên và sẽ dừng lại khi đạt tới ký hiệu trống đầu tiên. Nếu băng ban đầu là trống máy sẽ dừng lại mà không làm thay đổi gì băng cả. Nếu phần không trống của băng chứa toàn số không, thì máy sẽ chuyển động tuần tự qua các số không đó và dừng lại.

5. $(s_0, 0, s_1, 1, R)$, $(s_0, 1, s_0, 1, R)$

7. $(s_0, 0, s_0, 0, R)$, $(s_0, 1, s_1, 1, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_1, 0, R)$

9. $(s_0, 0, s_1, 0, R)$, $(s_0, 1, s_0, 0, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_0, 0, R)$, $(s_1, B, s_2, B, R)$

11. $(s_0, 0, s_0, 0, R)$, $(s_0, 1, s_1, 1, R)$, $(s_1, 0, s_1, 0, R)$, $(s_1, 1, s_0, 1, R)$, $(s_0, B, s_2, B, R)$

13. Nếu xâu đầu vào là trống hoặc xuất phát từ số 1 máy sẽ dừng lại ở trạng thái không kết thúc $s_0$. Trong các trường hợp còn lại, số 0 ban đầu được đổi thành $M$ và máy sẽ nháy qua các số 0 và 1 trung gian cho tới khi hoặc là nó tới cuối của xâu đầu vào hoặc tới một $M$ nữa. Tại điểm này nó lùi lại một ô và chuyển sang trạng thái $s_2$. Vì xâu được chấp nhận cần phải có một số 1 ở bên phải đối với mỗi số 0 ở bên trái, nên cần phải có một số 1 ở đây, nếu xâu là chấp nhận được. Do đó, dịch chuyển duy nhất ra khỏi $s_2$ xảy ra khi ô này chứa số 1. Nếu đúng như vậy, máy sẽ thay nó bằng $M$ và lùi sang trái; nếu không, máy sẽ dừng lại ở trạng thái không kết thúc $s_2$. Trên đường giật lùi máy dừng ở trạng thái $s_3$ cho tới khi nó thấy các số 1, sau đó nó dừng ở trạng thái $s_4$ cho tới khi thấy các số 0. Cuối cùng, hoặc là nó gặp một số 1 trong khi vẫn ở trạng thái $s_4$ tại điểm mà nó dừng lại không chấp nhận, hoặc là nó đạt tới $M$ ở phải cùng đã được viết thay cho 0 ở đầu của xâu. Nếu điều này xảy ra khi máy ở trạng thái $s_5$, thì sẽ không còn một số 0 nào nữa trong xâu, vậy sẽ tốt nhất là trường hợp cũng không còn số 1 nào nữa; điều này được thực hiện bằng các dịch chuyển $(s_3, M, s_5, M, R)$ và $(s_5, M, s_6, M, R)$ và $s_6$ là trạng thái kết thúc. Nếu không, máy sẽ dừng ở trạng thái không - kết thúc $s_5$. Khi gặp $M$ này, nếu máy đang ở trạng thái $s_4$, mọi chuyện sẽ lại lặp lại một lần nữa trừ điều là bây giờ xâu sẽ có số 0 còn lại ở trái cùng và số 1 còn lại ở phải cùng đều được thay bằng $M$. Như vậy, máy sẽ chuyển động - mà vẫn ở trạng thái $s_4$ - tới số 0 còn lại ở trái cùng rồi quay lại trạng thái $s_0$ và lặp lại quá trình trên.

15. $(s_0, B, s_9, B, L)$, $(s_0, 0, s_1, 0, L)$, $(s_1, B, s_2, E, R)$, $(s_2, M, s_2, M, R)$, $(s_2, 0, s_3, M, R)$, $(s_3, 0, s_3, 0, R)$, $(s_3, M, s_3, M, R)$, $(s_3, 1, s_4, M, R)$, $(s_4, 1, s_4, 1, R)$, $(s_4, M, s_4, M, R)$, $(s_4, 2, s_5, M, R)$, $(s_5, 2, s_5, 2, R)$, $(s_5, B, s_6, B, L)$, $(s_6, M, s_8, M, L)$, $(s_6, 2, s_7, 2, L)$, $(s_7, 0, s_7, 0, L)$, $(s_7, 1, s_7, 1, L)$, $(s_7, 2, s_7, 2, L)$, $(s_7, M, s_7, M, L)$, $(s_7, E, s_2, E, R)$, $(s_8, M, s_8, M, L)$, $(s_8, E, s_9, E, L)$ ở đây $M$ và $E$ là các ký hiệu đánh dấu với $E$ đánh dấu đầu trái của đầu vào.

17. $(s_0, 1, s_1, B, R)$, $(s_1, 1, s_2, B, R)$, $(s_2, 1, s_3, B, R)$, $(s_3, 1, s_4, 1, R)$, $(s_1, B,$

$s_4$, 1, $R$), ($s_2$, $B$, $s_4$, 1, $R$), ($s_3$, $B$, $s_4$, 1, $R$)

**19.** ($s_0$, 1, $s_1$, $B$, $R$), ($s_1$, 1, $s_2$, $B$, $R$), ($s_1$, $B$, $s_6$, $B$, $R$), ($s_2$, 1, $s_3$, $B$, $R$), ($s_2$, $B$, $s_6$, $B$, $R$), ($s_3$, 1, $s_4$, $B$, $R$), ($s_3$, $B$, $s_6$, $B$, $R$), ($s_4$, 1, $s_5$, $B$, $R$), ($s_4$, $B$, $s_6$, $B$, $R$), ($s_6$, $B$, $s_{10}$, 1, $R$), ($s_5$, 1, $s_5$, $B$, $R$), ($s_5$, $B$, $s_7$, 1, $R$), ($s_7$, $B$, $s_8$, 1, $R$), ($s_8$, $B$, $s_9$, 1, $R$), ($s_9$, $B$, $s_{10}$, 1, $R$)

**21.** ($s_0$, 0, $s_0$, 0, $R$), ($s_0$, *, $s_5$, $B$, $R$), ($s_3$, *, $s_3$, *, $L$), ($s_3$, 0, $s_3$, 0, $L$), ($s_3$, 1, $s_3$, 1, $L$), ($s_3$, $B$, $s_0$, $B$, $R$), ($s_5$, 1, $s_5$, $B$, $R$), ($s_5$, 0, $s_5$, $B$, $R$), ($s_5$, $B$, $s_6$, $B$, $L$), ($s_6$, $B$, $s_6$, $B$, $L$), ($s_6$, 0, $s_7$, 1, $L$), ($s_7$, 0, $s_7$, 1, $L$), ($s_0$, 1, $s_1$, 0, $R$), ($s_1$, 1, $s_1$, 1, $R$), ($s_1$, *, $s_2$, *, $R$), ($s_2$, 0, $s_2$, 0, $R$), ($s_2$, 1, $s_3$, 0, $L$), ($s_2$, $B$, $s_4$, $B$, $L$), ($s_4$, 0, $s_4$, 1, $L$), ($s_4$, *, $s_8$, $B$, $L$), ($s_8$, 0, $s_8$, $B$, $L$), ($s_8$, 1, $s_8$, $B$, $R$).

**23.** ($s_0$, $B$, $s_1$, 1, $L$), ($s_0$, 1, $s_1$, 1, $R$), ($s_1$, $B$, $s_0$, 1, $R$)

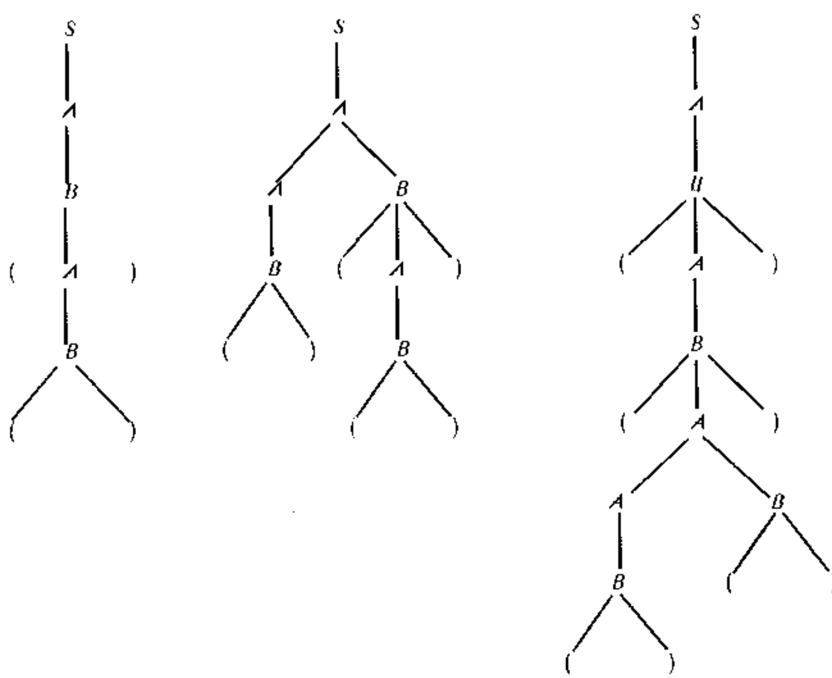
## Bài tập bổ sung

**1.** a) $S \to 00S111$, $S \to \lambda$

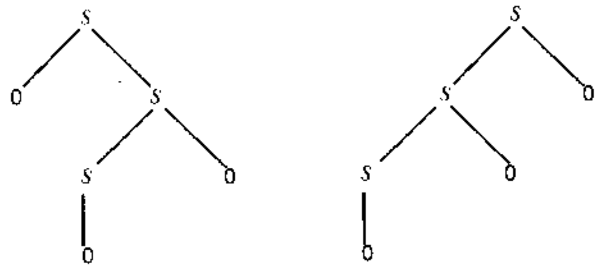
b) $S \to AABS$, $AB \to BA$, $BA \to AB$, $A \to 0$, $B \to 1$, $S \to \lambda$

c) $S \to ET$, $T \to 0TA$, $T \to 1TB$, $T \to \lambda$, $0A \to A0$, $1A \to A1$, $0B \to B0$, $1B \to B1$, $EA \to E0$, $EB \to E1$, $E \to \lambda$

**3.**



**5.**

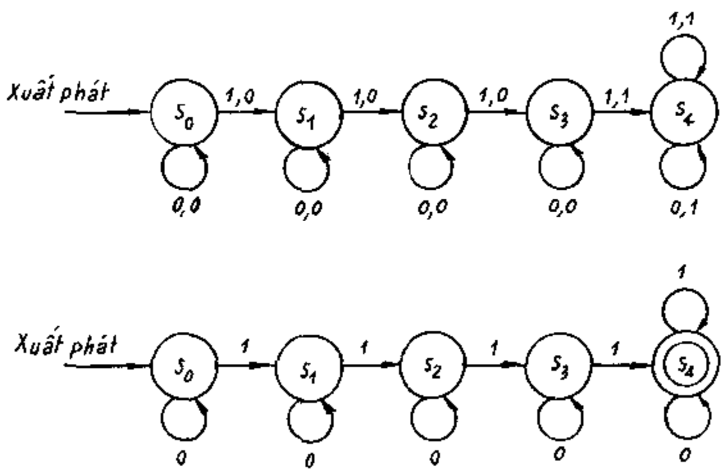



**7.** Không, ví dụ $A = \{1, 10\}$ và $B = \{0, 00\}$

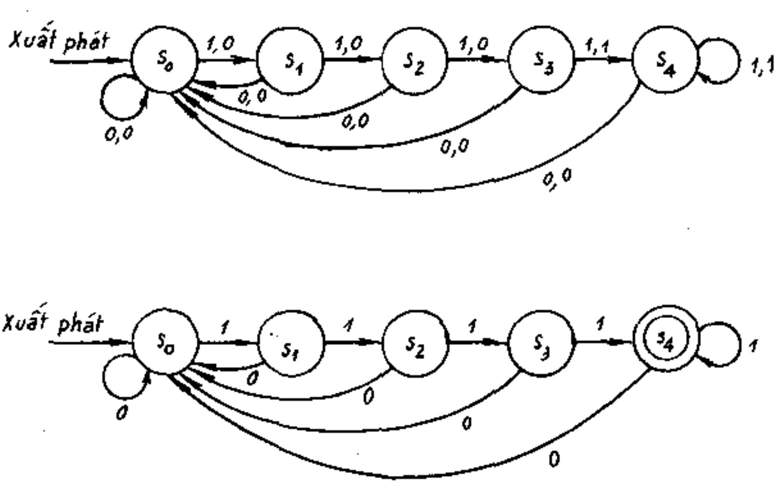
**9.** Không, lấy $A = \{00, 000, 00000\}$ và $B = \{00, 000\}$.

**11.** a) 1 b) 1 c) 2 d) 3 e) 2 f) 4

**13.**

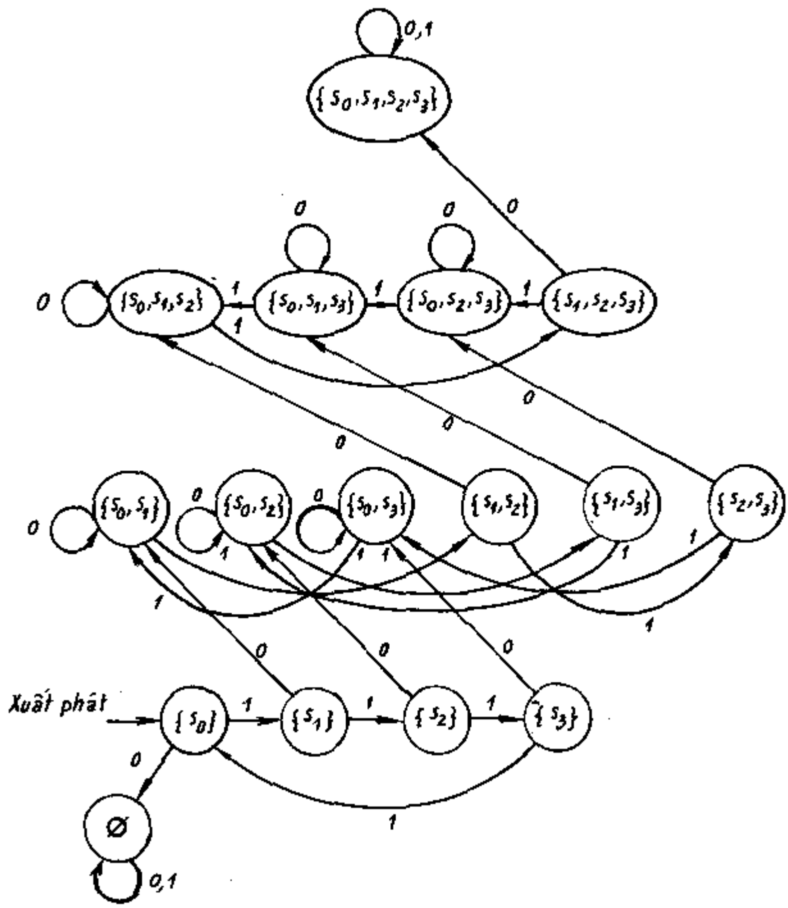



**15.**

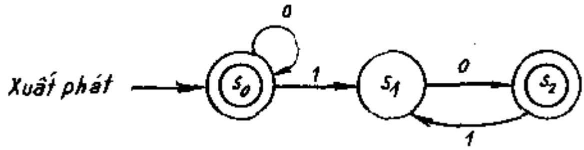


**17.** a) $n^{nk+1}m^{nk}$ b) $n^{nk+1}m^{n}$

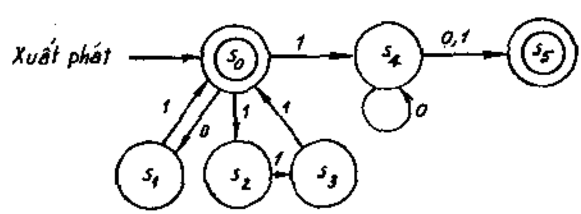
**19.**



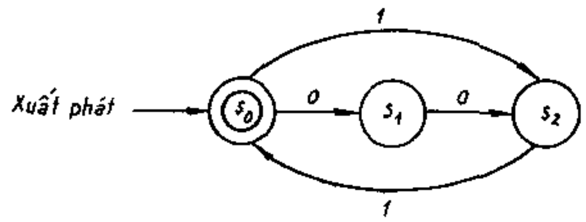

**21.** a)




b)

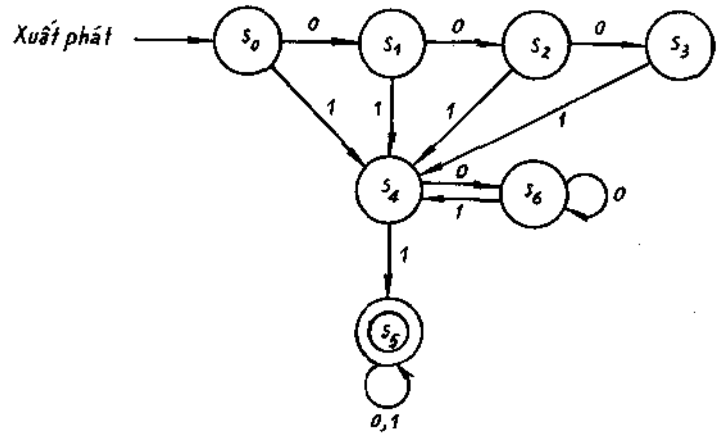


c)

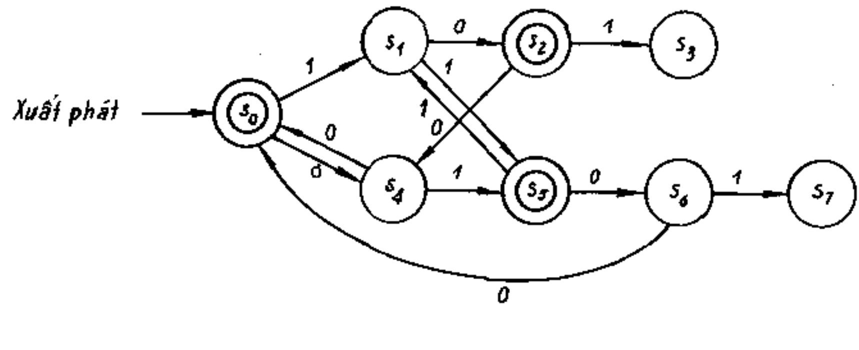



**23.** Xây dựng ôtômat hữu hạn tất định cho $A$ với các trạng thái $S$ và các trạng thái kết thúc $F$. Đối với $\overline{A}$ dùng chính ôtômat đó nhưng với các trạng thái cuối cùng là $S - F$.

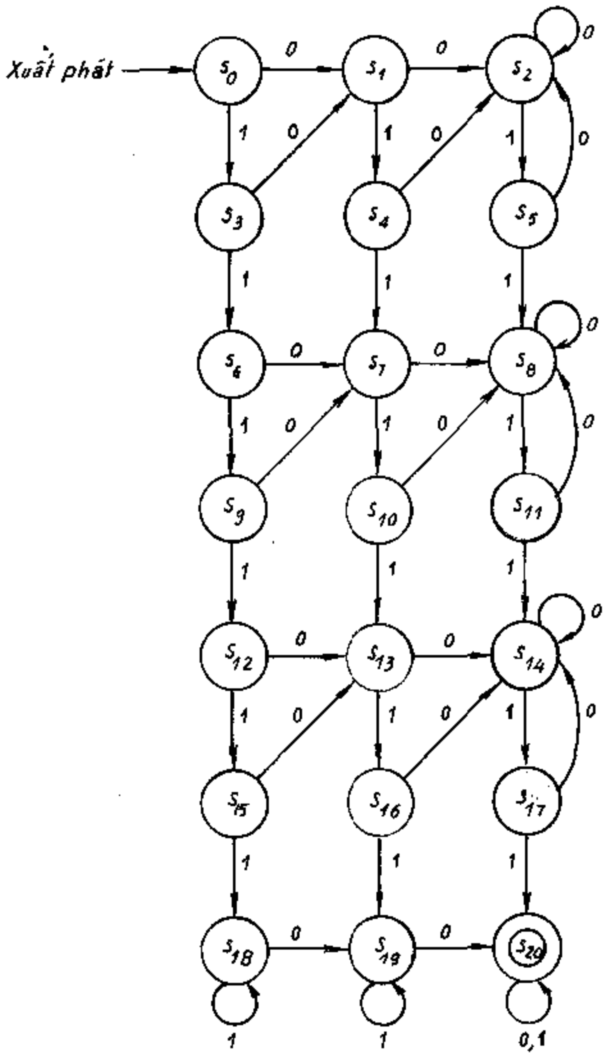
**25.** a)




b)



c)




**27.** Giả sử $L = \{1^p \mid p$ là số nguyên tố$\}$ là chính quy và $S$ là tập các trạng thái của một ôtômat hữu hạn chấp nhận $L$. Giả sử $z = 1^p$ trong đó $p$ là số nguyên tố với $p > |S|$ (số nguyên tố như vậy tồn tại, vì số các số nguyên tố là vô hạn). Theo Bổ đề bơm, $z$ có thể được viết dưới dạng $z = uvw$ với $l(uv) \leqslant |S|$, $l(v) \geqslant 1$ và đối với mọi số nguyên $i$ không âm $uv^iw \in L$. Vì $z$ là xâu gồm toàn các số 1, nên $u = 1^a$, $v = 1^b$ và $w = 1^c$ với $a + b + c = p$, $a + b \leqslant n$ và $b \geqslant 1$. Khi đó $uv^iw = 1^a1^{bi}1^c = 1^{(a+b+c)+b(i-1)} = 1^{p+b(i-1)}$. Bây giờ lấy $i = p + 1$, khi đó $uv^iw = 1^{p(1+b)}$. Vì $p(1 + b)$ không phải là số nguyên tố, nên $uv^iw \notin L$, điều này là mâu thuẫn.

## *Mục lục*

Chương 1

### CÁC KIẾN THỨC CƠ SỞ : LOGIC, TẬP HỢP VÀ HÀM

## *Chương 2*
## NHỮNG KIẾN THỨC CƠ BẢN : THUẬT TOÁN, CÁC SỐ NGUYÊN VÀ MA TRẬN

## *Chương V*
## KỸ THUẬT ĐẾM CAO CẤP

## *Chương 7*
## ĐỒ THỊ

*Chương 9*

**ĐẠI SỐ BOOLE**

## LỜI GIẢI CÁC BÀI TẬP ĐÁNH SỐ LẺ

Kenneth H. Rosen

# TOÁN HỌC RỜI RẠC ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC


*Chịu trách nhiệm xuất bản* : PGS, TS TÔ ĐĂNG HẢI

*Biên tập* : ĐẶNG VĂN SỬ, TRẦN HIỂN

*Sửa bài in thử* : THẠCH, SỬ, HƯƠNG

*Vẽ bìa* : HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HƯNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 1000 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Công ty in Tổng hợp Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số: 111-29 do Cục xuất bản cấp ngày 10-10-2002.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2003.

Kenneth H. Rosen

# TOÁN HỌC RỜI RẠC ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC


*Chịu trách nhiệm xuất bản* : PGS, TS TÔ ĐĂNG HẢI

*Biên tập* : ĐẶNG VĂN SỨ, TRẦN HIẾN

*Sửa bài in thử* : THẠCH, SỨ, HƯƠNG

*Vẽ bìa* : HƯƠNG LAN

NHÀ XUẤT BẢN KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT

70 TRẦN HƯNG ĐẠO, HÀ NỘI

In 1000 cuốn, khổ 16 x 24cm, tại Công ty in Tổng hợp Hà Nội.
Giấy phép xuất bản số: 111-29 do Cục xuất bản cấp ngày 10-10-2002.
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1 năm 2003.