
 Bài tập chuyên đề toán sơ cấp - dãy số tổ hợp

Mục lục

Phương pháp sinh xâu nhị phân — BINARYGEN	2
Phương pháp sinh chuỗi tổ hợp — COMBINATIONGEN	3
Phương pháp sinh hoán vị — PERMUTATIONGEN	4
Liệt kê xâu nhị phân — BINARYLIST	5
Liệt kê tổ hợp — COMBINATIONLIST	6
Liệt kê hoán vị — PERMUTATIONLIST	7
Bản vanxơ Fibonacci — FIBVAL	8
Tìm lũy thừa — LOG	9
Dãy Fibonacci — FIBSEQ	10
Tính C_n^k — Ckn	11
Mã vạch — BARCODE	12
Dãy số hoàn hảo — PERFECT	13

Bài A. Phương pháp sinh xâu nhị phân

File dữ liệu vào: stdin
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 0.1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Cho 1 một xâu nhị phân S độ dài n . Tìm xâu nhị phân kế tiếp của xâu S trong thứ tự từ điển.

Dữ liệu vào

20 test

Dòng đầu 1 số nguyên dương $n \leq 10^4$ Dòng thứ 2 ghi n số 0 hoặc 1 liên tiếp nhau. **Kết quả**

Ghi ra xâu nhị phân kế tiếp của xâu S trên một dòng duy nhất. Nếu không tồn tại thì ghi ra -1.

Ví dụ

stdin	stdout
5 00100	00101

Bài B. Phương pháp sinh chuỗi tổ hợp

File dữ liệu vào: stdin
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 0.1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Cho 1 một chuỗi tổ hợp C độ dài m với các thành phần nằm trong tập $\{1, 2, \dots, n\}$. Tìm chuỗi tổ hợp kế tiếp của chuỗi C trong thứ tự từ điển.

Dữ liệu vào

20 test

Dòng đầu 2 số nguyên dương $n, m \leq 10^4$ Dòng thứ 2 ghi m số nguyên dương $\leq n$ cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra chuỗi C trên một dòng duy nhất, các thành phần cách nhau bởi dấu cách. Nếu không tồn tại thì ghi ra -1.

Ví dụ

stdin	stdout
5 3 2 3 5	2 4 5

Bài C. Phương pháp sinh hoán vị

File dữ liệu vào: stdin
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Cho 1 một hoán vị H độ dài n với các thành phần nằm trong tập $\{1, 2, \dots, n\}$. Tìm hoán vị kế tiếp của hoán vị H trong thứ tự từ điển.

Dữ liệu vào

20 test

Dòng đầu ghi 1 số nguyên dương $n \leq 10^4$ Dòng thứ 2 ghi n số nguyên dương $\leq n$ cách nhau bởi dấu cách là hoán vị H .

Kết quả

Ghi ra hoán vị H trên một dòng duy nhất, các thành phần cách nhau bởi dấu cách. Nếu không tồn tại thì ghi ra -1.

Ví dụ

stdin	stdout
5 3 2 1 5 4	3 2 4 1 5

Bài D. Liệt kê xâu nhị phân

File dữ liệu vào: stdinp
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 0.1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Cho 1 số nguyên dương n . Đưa ra xâu nhị phân độ dài n thứ k trong thứ tự từ điển mà không có i số 0 liên tiếp.

Dữ liệu vào

Dòng đầu ghi 3 số nguyên dương $n, k, i \leq 10^4$ cách nhau bởi dấu cách

Kết quả

Ghi ra xâu nhị phân độ dài n thứ k mà không có i số 0 liên tiếp trên một dòng duy nhất, các thành phần cách nhau bởi dấu cách. Nếu không tồn tại thì ghi ra -1.

Ví dụ

stdinp	stdout
6 4 2	0 1 1 0 1 0

Bài E. Liệt kê tổ hợp

File dữ liệu vào: stdin
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 0.1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Cho 2 số nguyên dương n, m . Đưa ra chuỗi tổ hợp chập m của n phần tử trong tập $\{1, 2, \dots, n\}$ thứ k trong thứ tự từ điển.

Dữ liệu vào

20 test

Dòng đầu ghi 3 số nguyên dương $n, m, k \leq 10^4$ cách nhau bởi dấu cách

Kết quả

Ghi ra chuỗi tổ hợp chập m của n phần tử thứ k trên một dòng duy nhất, các thành phần cách nhau bởi dấu cách. Nếu không tồn tại thì ghi ra -1.

Ví dụ

stdin	stdout
7 3 6	1 3 4

Bài F. Liệt kê hoán vị

File dữ liệu vào: stdin
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 0.1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Cho 1 một số n . Đưa ra hoán vị độ dài n thứ k trong thứ tự từ điển.

Dữ liệu vào

20 test

Dòng đầu ghi 2 số nguyên dương n, k ($n \leq 10^4, k \leq 10^9$) cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra hoán vị thứ k trên một dòng duy nhất, các thành phần cách nhau bởi dấu cách. Nếu không tồn tại thì ghi ra -1.

Ví dụ

stdin	stdout
3 4	2 3 1

Bài G. Bản vanxơ Fibonacci

File dữ liệu vào: stdin
 File kết quả: stdout
 Hạn chế thời gian: 0.1 giây
 Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Bản vanxơ Fibonacci là một bản nhạc mà giai điệu của nó bắt nguồn từ một trong những dãy số nổi tiếng nhất trong Lý thuyết số - dãy số Fibonacci. Hai số đầu tiên của dãy là số 1 và số 2, các số tiếp theo được xác định bằng tổng của hai số liền tiếp ngay trước nó trong dãy.

Bản vanxơ Fibonacci thu được bằng việc chuyển dãy số Fibonacci thành dãy các nốt nhạc theo qui tắc chuyển một số nguyên dương thành nốt nhạc sau đây:



- số 1 tương ứng với nốt Đô (C),
- số 2 tương ứng với nốt Rê (D),
- số 3 tương ứng với nốt Mi (E),
- số 4 tương ứng với nốt Fa (F),
- số 5 tương ứng với nốt Sol (G),
- số 6 tương ứng với nốt La (A),
- số 7 tương ứng với nốt Si (B),
- số 8 tương ứng với nốt Đô (C),
- số 9 tương ứng với nốt Rê (D)

và cứ tiếp tục như vậy. Ví dụ, dãy gồm 6 số Fibonacci đầu tiên 1, 2, 3, 5, 8 và 13 tương ứng với dãy các nốt nhạc C, D, E, G, C và A. Để xây dựng nhịp điệu vanxơ người ta đi tìm các đoạn nhạc có tính chu kỳ trong bản vanxơ Fibonacci. Đoạn nhạc được gọi là có tính chu kỳ nếu như có thể chia nó ra thành $k \geq 2$ đoạn giống hệt nhau. Ví dụ, đoạn nhạc GCAGCA là đoạn có tính chu kỳ, vì nó gồm hai đoạn giống nhau GCA. Yêu cầu: Cho trước hai số nguyên dương u, v ($u < v$), hãy xác định độ dài đoạn nhạc dài nhất có tính chu kỳ của bản nhạc gồm dãy các nốt nhạc của bản vanxơ Fibonacci bắt đầu từ vị trí u kết thúc ở vị trí v .

Dữ liệu vào

Dòng thứ nhất chứa số nguyên dương k ($k \leq 100$) là số lượng test;

Dòng thứ i trong số k dòng tiếp theo chứa hai số nguyên dương u_i, v_i được ghi cách nhau bởi dấu cách ($u_i < v_i \leq 10^9$) là vị trí bắt đầu và kết thúc của một bản nhạc;

Kết quả

Ghi ra k dòng, dòng thứ i chứa một số nguyên là độ dài đoạn nhạc tìm được tương ứng với test thứ i . Nếu không tìm được đoạn nào có tính chu kỳ thì ghi ra số -1.

Ví dụ

stdin	stdout
2	-1
1 3	2
4 10	

Hạn chế

Bài tập chuyên đề toán sơ cấp - dãy số tổ hợp

Ràng buộc: 50% số tests ứng với 50% số điểm của bài có $u_i < v_i \leq 100$.

Bài H. Tìm lũy thừa

File dữ liệu vào: stdin
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Số nào là lũy thừa của a đầu tiên mà có k chữ số trong hệ cơ số b ?

Dữ liệu vào

Trên một dòng duy nhất 3 số a, k, b cách nhau một dấu cách .

Kết quả

Ghi duy nhất một số nguyên là kết quả tìm được. Nếu không có đáp án thì in ra -1.

Ví dụ

stdin	stdout
17 2 10	1

Hạn chế

- Subtask 1: $a \leq 20; 0 < k < 500; 2 \leq b \leq 100$.
- Subtask 2: $a \leq 20; 0 < k < 1000; 2 \leq b \leq 100$.

 Bài tập chuyên đề toán sơ cấp - dãy số tổ hợp

Bài I. Dãy Fibonacci

File dữ liệu vào: stdin
 File kết quả: stdout
 Hạn chế thời gian: 1 giây
 Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Năm 1202, Leonardo Fibonacci, nhà toán học người Ý, tình cờ phát hiện ra tỉ lệ vàng 0.618 được tiệm cận bằng thương của hai số liên tiếp trong một loại dãy số vô hạn được một số nhà toán học Ấn Độ xét đến từ năm 1150. Sau đó dãy số này được đặt tên là dãy số Fibonacci $\{F_i: i = 1, 2, \dots\}$, trong đó $F_1 = F_2 = 1$ và mỗi số tiếp theo trong dãy được tính bằng tổng của hai số ngay trước nó. Đây là 10 số đầu tiên của dãy Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. Người ta đã khám phá ra mối liên hệ chặt chẽ của số Fibonacci và tỉ lệ vàng với sự phát triển trong tự nhiên (cánh hoa, cành cây, vân gỗ), trong vũ trụ (hình xoáy tròn ốc dãi ngân hà, khoảng cách giữa các hành tinh), hay sự cân đối của cơ thể con người. Đặc biệt số Fibonacci được ứng dụng mạnh mẽ trong kiến trúc (Kim tự tháp Ai Cập, tháp Eiffel), trong mỹ thuật (các bức tranh của Leonardo da Vinci), trong âm nhạc (các bản giao hưởng của Mozart) và trong nhiều lĩnh vực khoa học kỹ thuật.

Trong toán học, dãy Fibonacci là một đối tượng tổ hợp quan trọng có nhiều tính chất đẹp. Có nhiều phương pháp hiệu quả liệt kê và tính các số Fibonacci như phương pháp lặp hay phương pháp nhân ma trận.

Sau khi được học về dãy số Fibonacci, Sơn rất muốn phát hiện thêm những tính chất của dãy số này. Vì thế Sơn đặt ra bài toán sau đây: Hỏi rằng có thể tìm được một tập con các số trong n số Fibonacci liên tiếp bắt đầu từ số thứ i , sao cho tổng của chúng chia hết cho một số nguyên dương k ($k \leq n$) cho trước hay không? Nhắc lại, một tập con q số của một dãy n số là một cách chọn ra q số bất kỳ trong số n số của dãy đó, mỗi số được chọn không quá một lần.

Yêu cầu: Hãy giúp Sơn giải quyết bài toán đặt ra.

Dữ liệu vào

- Dòng thứ nhất ghi số nguyên dương T ($T \leq 10$) là số lượng bộ dữ liệu;
- Mỗi dòng trong T dòng tiếp theo chứa ba số nguyên dương n, i và k là thông tin của một bộ dữ liệu.

Các số trên cùng dòng được ghi cách nhau bởi dấu cách.

Kết quả

Ghi ra T dòng tương ứng với kết quả của T bộ dữ liệu đầu vào, mỗi dòng có cấu trúc như sau: Đầu tiên ghi số nguyên q là số lượng các số trong tập con tìm được, tiếp đến ghi q số nguyên là các số thứ tự trong dãy Fibonacci của q số trong tập con tìm được. Nếu không tìm được tập con thỏa mãn điều kiện đặt ra thì ghi ra một số 0.

Nếu có nhiều cách chọn thì chỉ cần đưa ra một cách chọn bất kỳ.

Ví dụ

stdin	stdout
1 10 3 9	2 5 7

Giải thích

Giải thích: Trong ví dụ trên một tập con thỏa mãn điều kiện đặt ra là tập gồm 2 số $F_5 = 5, F_7 = 13$ với tổng bằng 18.

Hạn chế

- Có 20% số lượng test thỏa mãn điều kiện: $n \leq 20, i \leq 10^6$;
- Có 20% số lượng test khác thỏa mãn điều kiện: $n \leq 10^3, i \leq 10^6$;
- Có 20% số lượng test khác thỏa mãn điều kiện: $n \leq 10^6, i \leq 10^6$;
- Có 10% số lượng test khác thỏa mãn điều kiện: $n \leq 20, i \leq 10^{15}$;
- Có 10% số lượng test khác thỏa mãn điều kiện: $n \leq 10^3, i \leq 10^{15}$;
- 20% số lượng test còn lại thỏa mãn điều kiện: $n \leq 10^6, i \leq 10^{15}$.

Bài tập chuyên đề toán sơ cấp - dãy số tổ hợp

Bài J. Tính C_n^k

File dữ liệu vào: stdin
File kết quả: stdout
Hạn chế thời gian: 1 giây
Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Hãy tính $C_n^k \% m$ trong hai trường hợp:

- Trường hợp 1: $m = 10^9 + 7$.
- Trường hợp 2: $m \leq 10^5$

Dữ liệu vào

Một dòng duy nhất chứa 3 số nguyên không âm n, k, m , với $0 \leq k, n \leq 10^5$. **Kết quả**

Ghi ra duy nhất 1 số nguyên là kết quả cần tính.

Ví dụ

stdin	stdout
4 2 1000000007	6
4 2 3	0

 Bài tập chuyên đề toán sơ cấp - dãy số tổ hợp

Bài K. Mã Vạch

File dữ liệu vào: stdin
 File kết quả: stdout
 Hạn chế thời gian: 0.1 giây
 Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Nhân dịp Olympic sinh viên, VAIP thuê công ty Duy-Tân làm mã vạch áo phông cho các thí sinh tham dự. Công ty đã sử dụng n loại vạch có độ đậm đôi một khác nhau để tạo các mã vạch. Ký hiệu độ dày của n loại vạch đó theo thứ tự tăng dần là $b_1 \dots b_n$. Như vậy một mã vạch sẽ là một bộ có thứ tự không lặp của n độ dày này, có dạng $b_{q(1)} \dots b_{q(n)}$. Để phân biệt với các loại mã vạch tầm thường khác, công ty đã sử dụng tính chất sau đây áp dụng trên mỗi mã vạch: "Trên một mã vạch không tồn tại 3 chỉ số i, j, k nào với $i < j < k$ sao cho $b_{q(i)} > b_{q(j)} > b_{q(k)}$ hoặc $b_{q(i)} > b_{q(k)} > b_{q(j)}$ ".

Để tiện quản lý, công ty tiến hành đánh số thứ tự các mã vạch theo thứ tự từ điển từ thấp đến cao định nghĩa trên độ đậm của các vạch. Mã vạch $b_{q(1)} \dots b_{q(n)}$ được gọi là có thứ tự từ điển nhỏ hơn mã vạch $b_{p(1)} \dots b_{p(n)}$ nếu như tồn tại một chỉ số u ($1 \leq u \leq n$) sao cho $b_{q(1)} = b_{p(1)}, \dots, b_{q(u-1)} = b_{p(u-1)}, b_{q(u)} < b_{p(u)}$. Đồng thời công ty cũng cần viết một chương trình máy tính cho phép chuyển đổi từ mã vạch sang số thứ tự tương ứng và ngược lại. Bạn hãy giúp công ty hoàn thành chương trình này.

Dữ liệu vào

- Dòng đầu tiên chứa n ($1 < n \leq 100$);
- Dòng thứ 2 chứa n số nguyên dương ($< 10^9$) tương ứng với n loại độ dày;
- Dòng thứ ba chứa m là số lượng phép chuyển ($1 \leq m \leq 100$);
- Dòng thứ i trong số m dòng tiếp theo mỗi dòng chứa một mã vạch độ dài n để chuyển thành số thứ tự. Các số trên cùng một dòng cách nhau ít nhất một dấu cách.

Kết quả

Ghi ra m dòng, mỗi dòng là một số nguyên tương ứng với kết quả tìm được lấy phần dư trong phép chia cho $10^9 + 7$.

Ví dụ

stdin	stdout
4	1
2 4 6 8	4
2	
2 4 6 8	
2 6 8 4	

Bài L. Dãy số hoàn hảo

File dữ liệu vào: stdin
 File kết quả: stdout
 Hạn chế thời gian: 0.1 giây
 Hạn chế bộ nhớ: 256 MB

Dãy số A gồm n số nguyên khác nhau từng đôi: a_1, a_2, \dots, a_n được gọi là hoàn hảo nếu như nó thỏa mãn tính chất sau: "Không tồn tại 3 chỉ số $p < q < r$ sao cho hoặc $a_p < a_q < a_r$ hoặc $a_p < a_r < a_q$ hoặc $a_q < a_p < a_r$ ". Cho A là dãy

 Bài tập chuyên đề toán sơ cấp - dãy số tổ hợp

hoàn hảo, một phép chèn một số nguyên b vào dãy A để tạo thành dãy B (b có thể được chèn vào trước a_1 , hoặc giữa a_i, a_{i+1} với $1 \leq i \leq n-1$, hoặc sau a_n) được gọi là hợp lệ nếu như các điều kiện sau được thỏa mãn:

- $b > a_i, \forall 1 \leq i \leq n$;
- dãy B là hoàn hảo.

Yêu cầu:

- Hãy tính số lượng phép chèn hợp lệ một số b vào dãy A .
- Giả sử B là một dãy thu được bởi một phép chèn hợp lệ b vào A . Hãy tính số lượng dãy hoàn hảo thu được bằng cách hoán vị các phần tử của B .

Dữ liệu vào

- Dòng thứ nhất chứa hai số nguyên n và b tương ứng là số lượng phần tử của dãy A và số nguyên cần chèn. Biết rằng $n \leq 10^5, |b| \leq 10^6$.
- Dòng thứ hai chứa n số nguyên $a_1 a_2 \dots a_n$, mỗi số có trị tuyệt đối $\leq 10^6$. Các số trên cùng một dòng được ghi cách nhau ít nhất một dấu cách.

Kết quả

- Dòng thứ nhất ghi một số nguyên là số phép chèn hợp lệ số b vào dãy A . Ghi ra 0 nếu không có cách chèn hợp lệ.
- Dòng thứ hai ghi một số nguyên là phần dư trong phép chia cho 10^9 của số lượng dãy hoàn hảo thu được bằng cách hoán vị các phần tử của dãy B (tính cả dãy B). Ghi ra 0 nếu như không có cách.

Ví dụ

stdin	stdout
4 2011 55	2
25 9 20	8