2026考研数学基础讲义

高等数学

总策划 文都集团教学研究院

目　录

高等数学

第一章 函数、极限和连续

例 1 【**解**】在 $2f(x)+x^2 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$ 中将 x 换为 $\dfrac{1}{x}$ 得，化简可得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}},$$

联立方程解得 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$.

例 2 【**答案**】(D).

【**解析**】由于 $f(x)$ 定义域关于原点对称，且

$$f(-x)=|(-x)\sin(-x)|\,\mathrm{e}^{\cos(-x)}=|x\sin x|\,\mathrm{e}^{\cos x}=f(x),$$

所以 $f(x)$ 是偶函数.

对于(A)，取 $x=k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$， $f(x)$ 无界，(A)不正确；

对于(B)，取 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{\pi}{2}$，$x_3=\pi$，有 $f(x_1)=0$，$f(x_2)=\dfrac{\pi}{2}$，$f(x_3)=0$，$f(x)$ 不单调增加或减少，(B)不正确；

对于(C)，由于 x 不是周期函数，故 $f(x)$ 一定不是周期函数，(C)不正确.

故选(D).

例 3【**解**】由 $\mathrm{e}^{[\varphi(x)]^2}=1-x$，得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

由 $\ln(1-x)\geq 0$，得 $1-x\geq 1$，得 $x\leq 0$.

因此，$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域为 $\{x\,|\,x\leq 0\}$.

例 4【**答案**】1.

【**解析**】由于 $f(x)\leq 1$，故 $f[f(x)]=1$.

例 5 【**解**】由题意，

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

因此，$f(x)$ 为奇函数.

由 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，得 $e^y=x+\sqrt{1+x^2}$. 又由上述分析，知 $e^{-y}=-x+\sqrt{1+x^2}$.两式相减，得 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$.

例 6 【答案】(C).

【解析】必要性：若 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则由数列极限的定义知，$\forall\varepsilon>0$，存在 N，当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$，则 $\forall\varepsilon\in(0,1)$，存在 N，当 $n\geq N$ 时恒有 $|x_n-a|\leq 2\varepsilon$.

充分性：$\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{3}$，故对 ε_1，存在正整数 N，当 $n>N$ 时恒有

$|x_n-a|\leq 2\varepsilon_1=\dfrac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，即数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

故选(C).

②e^∞，$\arctan\infty$ 等极限.

例 7【解】(1) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0,\quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+1}=0,$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

(2) 由于 $x\neq1$ 时，$f(x)$ 表达式唯一，故不需要分左右极限.

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+1)=2.$$

例 8 【解】(1) $\lim\limits_{x\to0^+}2^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to0^-}2^{\frac{1}{x}}=0$，故分左右极限分别计算，有

$$\lim_{x\to0^+}\frac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{2}{2^{\frac{1}{x}}}+1}{\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}+2^{\frac{1}{x}}}=0,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{2+0}{1+0}=2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}$ 不存在.

(2) 由题意，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$，于是，

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$.

例 9 【答案】(A).

【解析】方法一（直接法）

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\neq 0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|>0$，根据数列极限的保号性可知，当 n 充分大时有 $|a_n|>\frac{|a|}{2}$.

方法二（特例法）

取 $a_n=a+\frac{2}{n}$，排除(B)，(D)；取 $a_n=a-\frac{2}{n}$，排除(C).

例 10 【答案】(D).

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|}=-1<0$，由极限保号性知，存在 $\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(a,\delta)$ 时，$\frac{f(x)-f(a)}{|x-a|}<0$，由于 $|x-a|>0$，故 $f(x)-f(a)<0$，即 $f(x)<f(a)$.

故选(D).

例 11 【答案】(D).

【解析】(A)的反例：$a_n=\frac{1}{n},b_n=\frac{n}{n+1}$.

(B)的反例：$b_n=\frac{n+1}{n},c_n=n$.

(C)的反例：$a_n=\frac{1}{n^2},c_n=n$.

若$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_nc_n)\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}$也存在，与已知条件矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在. 故选(D).

例 12 【解】(1)当$x\to3$时，分子分母的极限均等于零，因此不能直接运用四则运算，而当$x\to3$即$x\neq3$时，可以消去这个不为零的因子$x-3$，所以

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to3}\frac{x+1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to3}(x+1)}{\lim\limits_{x\to3}(x-2)}=4.$$

(2)先用x^3分别除分母和分子，然后再取极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x+1}{3x^3+2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\frac{1}{3}.$$

(3)先将分子、分母通分，再同时除x^2，得

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+12x+1}-2x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{12x+1}{\sqrt{4x^2+12x+1}+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{12+\dfrac{1}{x}}{\sqrt{4+\dfrac{12}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+2}=3;$$

(4)分子、分母同时除$-x$，有

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-2x+5}-2x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}+2-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}=4;$$

(5)由于$\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}=0$，则分子、分母同时乘$\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$，得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}-1}{x\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}=-1.$$

常用的基本极限：

① $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,(a_0\neq0,b_0\neq0);\\ \infty, & n>m.\end{cases}$

② $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{e}^{nx}=\begin{cases}0, & x<0,\\ +\infty, & x>0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & |x|<1, \\ \infty, & |x|>1, \\ 1, & x=1, \\ \text{不存在}, & x=-1. \end{cases}$

例 13 **【答案】**(C).

【解析】由于

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-ax-b\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{1+x}=0,$$

所以$\begin{cases}1-a=0,\\ a+b=0,\end{cases}$解得 $a=1,b=-1$.

故选(C).

例 14 **【解】**由于 $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$，$\lim\limits_{u\to0} g(u)=2$，根据由复合函数的极限运算法则可知

$$\lim_{x\to0} g[f(x)]=2.$$

例 15 **【解】**令 $\max\{a_i\}=a$，则

$$\sqrt[n]{a^n}\le\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}\le\sqrt[n]{ma^n},$$

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n}=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m\cdot a^n}=a$，于是由夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}=a.$$

例 16 **【解】**由于 $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1,$$

由夹逼准则可得，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$

例 17 **【解】**由于 $x>0$ 时，

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x},$$

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le1;$$

且 $\lim\limits_{x\to 0^+}(1-x)=1$，故由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

$x<0$ 时，

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x},$$

$$1\le x\left[\frac{1}{x}\right]<1-x,$$

且 $\lim\limits_{x\to 0^-}(1-x)=1$，故由夹逼准则得 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

综上可得 $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$.

例 18 【证明】 $0<x_1<3$，故 $3-x_1>0$，$x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\le\dfrac{x_1+3-x_1}{2}=\dfrac{3}{2}$，即 $x_2\le\dfrac{3}{2}$.

假设 $x_n\le\dfrac{3}{2}$，则 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\dfrac{x_n+3-x_n}{2}=\dfrac{3}{2}$，即 $x_{n+1}\le\dfrac{3}{2}$.

由数学归纳法得 $x_n\le\dfrac{3}{2}$，即数列 $\{x_n\}$ 有界.

又由于

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\frac{2x_n\left(\dfrac{3}{2}-x_n\right)}{\sqrt{x_n(3-x_n)}+x_n}\ge 0,$$

故 $x_{n+1}\ge x_n$，即数列 $\{x_n\}$ 单调递增.

综上，由单调有界准则得 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A=\sqrt{A(3-A)}$，解得 $A=\dfrac{3}{2}$.

例 19 【证明】 当 $n=1$ 时，$x_1=\dfrac{1}{2}<1$；

假设 $n=k$ 时，$x_k<1$，则 $n=k+1$ 时，

$$x_{k+1}=\frac{2x_k}{x_k+1}=2-\frac{2}{x_k+1}=2\left(1-\frac{1}{x_k+1}\right)<1,$$

由数学归纳法知 $x_n<1(n=1,2,\cdots)$，即 $\{x_n\}$ 有上界.

又由于

$$x_{n+1}-x_n=\frac{2x_n}{x_n+1}-x_n=\frac{x_n(1-x_n)}{x_n+1}>0,$$

故$\{x_n\}$单调递增.

根据单调有界收敛准则，数列$\{x_n\}$收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，等式$x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{x_n+1}$两边同时取极限得$a=\dfrac{2a}{a+1}$，解得$a=1$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

例 20 【解】(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)^n}\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\frac{\pi}{2}-x}{x-\frac{\pi}{2}}=-1$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-1}{x^2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x-1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x}}=\mathrm{e}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{1+x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{1+x}\right)^{\frac{1+x}{2}}\right]^{\frac{6x}{1+x}}=\mathrm{e}^6$.

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}\cdot x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}\overset{\frac{1}{x}=t}{=\!=}\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sin2t+\cos t-1}{t}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\sin2t}{t}+\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\cos t-1}{t}}=\mathrm{e}^2.$$

例 21 【答案】(D).

【解析】由于$y_n=\dfrac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)$，则

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_ny_n)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0,$$

故选(D).

例 22 【答案】(D).

【解析】取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$， $n\to\infty$ 时， $x_n\to 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}n^2\pi^2\sin n\pi=0.$$

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$， $n\to\infty$ 时， $y_n\to 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n^2}\sin\frac{1}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2=\infty,$$

由数列极限和函数极限的关系得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，也不为无穷大，且变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 无界.

故选(D).

例 23 **【答案】**(B).

【解析】当 $x\to 0^+$ 时， $1-e^{\sqrt{x}}\sim-\sqrt{x}$， $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1\sim\dfrac{\sqrt{x}}{2}$， $1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{x}{2}$.

由于

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}-\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sqrt{x}}-\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0-(-1)=1,$$

所以 $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}\sim\sqrt{x}$.

故选(B).

例 24 **【答案】**(D).

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^2)}{x^2}=0$，所以(A)正确；

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x)}{x}\cdot\dfrac{o(x^2)}{x^2}=0$，所以(B)正确；

$$\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{o(x^2)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=0$$，所以(C)正确；

$$\lim_{x\to0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{o(x)}{x}+\frac{xo(x^2)}{x^2}\right]=0$$，故 $o(x)+o(x^2)=o(x)$，(D)不正确.

例 25【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解析】 由题意，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}}{(e^{kx}-1)\arcsin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+x\arcsin x-\cos x}{kx^2(\sqrt{1+x\arcsin x}+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\frac{1}{2k}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)+x\arcsin x}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2k}\left(\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{x\arcsin x}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2k}\left(\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{2}+1\right)=1,$$

得 $k=\frac{3}{4}$.

例 26 【解】 (1)分子分母分别利用等价无穷小代换得，

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x\ln\cos x}{\sqrt{1-x^3}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\ln(1+\cos x-1)}{\sqrt{1-x^3}-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot(\cos x-1)}{-\frac{1}{2}x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{-\frac{1}{2}x^3}=1;$$

(2)将分子有理化得，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+x^2}-x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot2}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2};$$

(3)将分子提公因式后等价无穷小代换，分母直接等价无穷小代换得

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos x^2}-e}{\sqrt[3]{1-x^4}-1}=\lim_{x\to0}\frac{e(e^{\cos x^2-1}-1)}{\frac{1}{3}(-x^4)}=e\lim_{x\to0}\frac{\cos x^2-1}{-\frac{1}{3}x^4}$$

$$=e\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}(x^2)^2}{-\frac{1}{3}x^4}=\frac{3e}{2};$$

(4)先将分子有理化，再分子分母利用等价无穷小量代换得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}}{2x\cdot\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}.$$

(5)先将幂指函数化为指数形式再利用等价无穷小代换得，

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left(e^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\cdot x\ln\frac{2+\cos x}{3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(1+\frac{2+\cos x}{3}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\cos x-1}{3}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}.$$

(6) $$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{2x}$$

$$=\frac{3}{2}+\lim_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=\frac{3}{2}.$$

例 27 【答案】$1,-4$

【解析】由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\cos x-b)}{e^x-a}=5\neq 0,$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin x(\cos x-b)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-a)=0$，即 $a=1$. 于是，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b,$$

故 $1-b=5$，得 $b=-4$.

例 28 【答案】(A).

【解析】要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，需 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，而

$$f(0)=b,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x}{ax}=\frac{1}{2a},$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}b=b,$$

故 $\frac{1}{2a}=b$，即 $ab=\frac{1}{2}$.

例 29 【答案】2.

【解析】函数 $f(x)$ 连续，故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$.

又由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos xf(x)}{(e^{x^2}-1)f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{[xf(x)]^2}{2}}{x^2f(x)}=\frac{f(0)}{2}=1,$$

故 $f(0)=2$.

例 30 【解】 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 时无定义，故为间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty$， $x=0$ 为第二类无穷间断点.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0,\quad \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1,$$

$x=1$ 为第一类跳跃间断点.

例 31 【解】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=\begin{cases}-x, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1,\\ x, & |x|<1.\end{cases}$

在 $x=-1$ 处， $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}(-x)=1,\ \lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}x=-1$， 所以 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的第一类(跳跃)间断点.

在 $x=1$ 处，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}x=1,\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(-x)=-1$，所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的第一类(跳跃)间断点.

例 32【证明】已知 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，根据函数极限的局部保号性可知，$\exists\varepsilon>0$，在 $(0,\varepsilon)$ 内 $\dfrac{f(x)}{x}<0$，于是 $\exists x_1\in(0,\varepsilon)$，使得 $f(x_1)<0$，又已知 $f(1)>0$，由连续函数的零点定理可得，$\exists\xi\in(x_1,1)\subset(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，即方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在一个实根.

例 33 【证明】构造辅助函数 $F(x)=f(x)-f(x+a)$，由 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，得 $f(x+a)$ 在 $[0,a]$ 上连续. 于是， $F(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续， 且 $F(0)=f(0)-f(a)$， $F(a)=f(a)-f(0)$.

若 $f(0)=f(a)$，则 $x=0$， $x=a$ 是使 $f(x)=f(x+a)$ 成立的 x.

若 $f(0)\neq f(a)$，则 $F(0)\cdot F(a)<0$. 由零点定理， $\exists x\in(0,a)$ 使 $F(x)=0$，即 $f(x)=f(x+a)$.

例 34 【证明】已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$[x_1,x_n]\subset[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，根据连续函数的最值定理，令

$m=\min\{f(x)\,|\,x_1\le x\le x_n\}$， $M=\max\{f(x)\,|\,x_1\le x\le x_n\}$，

则 $m\le\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$， 再由介值定理可知 $\exists\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$， 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

第二章 导数与微分

例1 【答案】(A).

【解析】由导数定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$$

$$=-1\times(-2)\cdots(1-n)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$$

故选(A).

例2 【答案】1.

【解析】根据导数定义，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

例3 【答案】(C).

【解析】$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，故$\lim\limits_{h\to 0}f(h^2)=0$，又由于$f(x)$在$x=0$处连续，即$\lim\limits_{h\to 0}f(h^2)=f(0)=0$.

所以$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)-f(0)}{h^2}=f'_+(0)=1$.

故选(C).

例4 【答案】(B).

【解析】根据导数定义，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{f(a-x)-f(a)}{-x}$$

$$=f'(a)+f'(a)=2f'(a).$$

【注】根据导数定义求极限也是一种常考题型.

例 5 **【答案】**(C).

【解析】由导数的定义知，$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，根据极限的保号性，存在 $\delta>0$，当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时，有 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，即当 $x\in(-\delta,0)$ 时，$x<0$，有 $f(x)<f(0)$；而当 $x\in(0,\delta)$ 时，$x>0$，有 $f(x)>f(0)$.

故选(C).

例 6 **【答案】**(D).

【解析】由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续得，

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0,$$

故(A)正确；

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=0$，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，得 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+f(-x)]=2f(0)=0$，即 $f(0)=0$.

故(B)正确；

由选项(A)知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x},$$

故(C)正确；

对(D)选项，取 $f(x)=|x|$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0,$$

但是由于

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的导数 $f'(0)$ 不存在.

故选(D).

例 7 **【解】**由题意，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，于是，

$$\lim_{x\to0^-}x^2\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to0^+}(ax^2+b)=A,$$

得 $A=b=0$.

又因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2\sin\frac{\pi}{x}-0}{x-0}=0,\quad f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{ax^2-0}{x-0}=0,$$

于是，a 可为任意常数，且 $f'(0)=0$.

例 8 【答案】(D).

【解析】由于

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x^2g(x)=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

又由于

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0,$$

所以 $f'(0)=0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

故选(D).

例 9 【答案】(D).

【解析】由导数定义，

$$-1=\lim_{x\to0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1),$$

可得 $f'(1)=-2$.

又已知 $f(x)$ 的周期为 4，则 $f'(x)$ 也以 4 为周期，从而 $f'(5)=f'(1+4)=f'(1)=-2$.

故选(D).

例 10 【解】设 t 时刻长方形的长 $l=x(t)$，宽 $w=y(t)$，则对角线的长度

$s(t)=\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$，于是对角线增加的速率 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dfrac{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}}$.

注意到在 $t=t_0$ 时刻 $x(t_0)=12$， $y(t_0)=5$，且 $x'(t_0)=2$， $y'(t_0)=3$，代入可得对角线增加的速率 $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}=3\mathrm{cm/s}$.

例 11 【答案】 $\dfrac{1}{3}$.

【解析】 由 $f(1)=2$，得 $\varphi(2)=1$. 按反函数的求导法则 $\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$，得

$$\varphi'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}.$$

例 12 【解】 (1) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2\sqrt{x}}}}\cdot\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$；

(2) $y'=2\ln\tan(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{\tan(x^2+1)}\cdot\sec^2(x^2+1)\cdot 2x=4x\dfrac{\ln\tan(x^2+1)}{\sin(x^2+1)\cos(x^2+1)}$；

例 13 【答案】 $\dfrac{3\pi}{4}$.

【解析】 根据复合函数求导法则，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'\\&=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\frac{3(3x+2)-3(3x-2)}{(3x+2)^2}\\&=f'\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)\cdot\frac{12}{(3x+2)^2},\end{aligned}$$

因此，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'(-1)\cdot 3=3\arctan(-1)^2=\dfrac{3\pi}{4}$.

例 14 【答案】 1.

【解析】 当 $x=0$ 时， $y=0$.

方程两边同时对 x 求导，得

$$y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{x+y}(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=2,$$

将 $x=0$，$y=0$ 代入，得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$.

例 15 【解】方法一：

由于 $y=(1+x^2)^{\sqrt{x}}=\mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(1+x^2)}$，得

$$y'=\mathrm{e}^{\sqrt{x}\ln(1+x^2)}[\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}]=(1+x^2)^{\sqrt{x}}[\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}].$$

方法二：

先在等式两端分别取对数，得 $\ln y=\sqrt{x}\ln(1+x^2)$，所得等式两端同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{2x}{1+x^2},$$

于是，$y'=(1+x^2)^{\sqrt{x}}[\frac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}}+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}]$.

例 16 【答案】 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$.

【解析】 等式 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 两边同时取对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)],$$

等式两边同时对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

得 $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$.

例 17 【答案】 $\frac{1}{2}$.

【解析】 由参数方程确定函数的求导公式得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2t},$$

故 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1}=\frac{1}{2}$.

例 18 【解】(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}f(x)&=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{ax-x+x-\ln(1+x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{ax-x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{a-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{a-1}{x}+\frac{1}{2}=b,\end{aligned}$$

所以 $a=1,b=\frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 得

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}, & x\neq0,\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

$x\neq0$ 时，

$$f'(x)=\frac{\left(1-\frac{1}{1+x}\right)x^2-2x[x-\ln(1+x)]}{x^4}=-\frac{x+2}{x^2(1+x)}+\frac{2\ln(1+x)}{x^3},$$

又由于

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}-\frac{1}{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\ln(1+x)-x^2}{2x^3}\overset{\text{洛必达}}{=\!=}\lim_{x\to0}\frac{2-\frac{2}{1+x}-2x}{6x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-2x^2}{6x^2(1+x)}=-\frac{1}{3}.$$

所以 $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x+2}{x^2(1+x)}+\dfrac{2\ln(1+x)}{x^3}, & x\neq 0,\\ -\dfrac{1}{3}, & x=0.\end{cases}$

例 19 【解】将 $x=0$ 代入，得 $y=1$.

将 $xe^y+ye^x=xy+1$ 两边对 x 求导，得

$$e^y+xe^y\cdot y'+y'e^x+ye^x=y+xy'$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入，得 $y'(0)=-e$.

$e^y+xe^y\cdot y'+y'e^x+ye^x=y+xy'$ 两边对 x 求导，得

$$2e^y\cdot y'+xe^y\cdot y'^2+xe^y\cdot y''+y''e^x+2y'e^x+ye^x=2y'+xy'',$$

将 $x=0$，$y=1$，$y'(0)=-e$ 代入得，$y''(0)=2e^2-1$.

例 20 【解】莱布尼兹公式

令 $u(x)=x^2$，$v(x)=\ln(1+x)$. 由莱布尼兹公式及 $[\ln(1+x)]^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$，得

$$f^{(n)}(x)=x^2\cdot\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}+2nx\cdot\frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\frac{(-1)^{n-3}\cdot(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}\ (n\geq 3),$$

于是，

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

例 21 【答案】$2e^3$.

【解析】由于 $f(2)=1$，故 $f'(2)=e^{f(2)}=e$，$f(x)$ 可导，故 $f''(x)=e^{f(x)}f'(x)$，即 $f''(2)=e^{f(2)}f'(2)=e^2$，

$$f'''(x)=e^{f(x)}f''(x)+[f'(x)]^2e^{f(x)},$$

所以 $f'''(2)=e^{f(2)}f''(2)+[f'(2)]^2e^{f(2)}=e^3+e^3=2e^3$.

例 22【答案】$-\dfrac{1}{2(1-\cos t)^2}$.

【解析】由参数方程所确定的函数的求导法则，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{2\sin t}{2(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}\cdot\frac{1}{2(1-\cos t)}$$
$$=\frac{\cos t-1}{2(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{2(1-\cos t)^2}.$$

例 23 【答案】(D).

【解析】由于

$$y'=2xf'(x^2)，\ \mathrm{d}y=2xf'(x^2)\Delta x,$$

函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，即 $0.1=2\times(-1)f'(1)\times(-0.1)$，所以 $f'(1)=0.5$.

故选(D).

例 24【答案】 $\dfrac{\ln(x-y)+2}{\ln(x-y)+3}\mathrm{d}x$

【解析】方法一 对方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 两边分别关于 x 求导，

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1=\left(1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\ln(x-y)+(x-y)\cdot\frac{1-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{x-y},$$

整理得 $2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-1=\left(1-\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)[\ln(x-y)+1]$，故解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\ln(x-y)+2}{\ln(x-y)+3}$，所以

$$\mathrm{d}y=\frac{\ln(x-y)+2}{\ln(x-y)+3}\mathrm{d}x.$$

方法二 对方程 $2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 两边取微分得，

$$2\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)\ln(x-y)+(x-y)\frac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{x-y},$$

整理得

$$2\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)\ln(x-y)+\mathrm{d}x-\mathrm{d}y,$$

故解得 $\mathrm{d}y=\dfrac{\ln(x-y)+2}{\ln(x-y)+3}\mathrm{d}x$.

例 25 【解】(1) 由已知可得日产量的边际成本 $C'(x)=7+\dfrac{25}{\sqrt{x}}$，故日产量为 100 吨时的边际成本 $C'(100)=7+\dfrac{25}{\sqrt{100}}=9.5$；

(2) 当日产量为 100 吨时的平均成本 $\left.\dfrac{C(x)}{x}\right|_{x=100}=\left.\dfrac{1000+7x+50\sqrt{x}}{x}\right|_{x=100}=22$.

例 26 【解】(1) 成本函数：$C(Q)=500+10Q$；

收益函数：$R(Q)=Qp=Q\left(50-\dfrac{Q}{100}\right)=50Q-\dfrac{Q^2}{100}$；

利润函数：$L(Q)=R(Q)-C(Q)=50Q-\dfrac{Q^2}{100}-500-10Q=-\dfrac{Q^2}{100}+40Q-500$；

边际利润：$ML=\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=-\dfrac{Q}{50}+40$.

(2) 当利润最大时，边际利润为 0，故

$$ML=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}Q}=-\frac{Q}{50}+40=0\Rightarrow Q=2000\Rightarrow p=50-\frac{Q}{100}=50-\frac{2000}{100}=30,$$

即该商品定价 30 元/件时利润最大.

例 27【解】由 $Q=Q(p)$ 是单调减函数知 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}<0$，从而需求对价格的弹性 $E_p=\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}<0$，这表明题设 $E_p=b>1$ 应理解为 $|E_p|=-E_p=b>1$. 又由 $Q=Q(p)$ 是单调减函数知存在反函数 $p=p(Q)$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}=\dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}}$.

由收益 $R=pQ$ 对 Q 求导，有 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=p+Q\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}=p+\dfrac{p}{\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}}=p\left(1+\dfrac{1}{E_p}\right)$，从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=p_0\left(1-\frac{1}{b}\right)=a,$$

得 $p_0=\dfrac{ab}{b-1}$. 由收益 $R=pQ$ 对 p 求导，有 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q+p\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=Q\left(1+\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right)=Q(1+E_p)$，

于是 $\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\right|_{p=p_0}=Q_0(1-b)=c$，因此 $Q_0=\dfrac{c}{1-b}$.

第三章 微分中值定理与导数的应用

例1【证明】令 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=F(b)=0,$$

由罗尔定理得，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，由于 $\xi>0$，故 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

例2【解】(1) 由题意知 $f'_+(a)$ 与 $f'_-(b)$ 同号, 不妨设 $f'_+(a)>0$， $f'_-(b)>0$.

由导数的定义可得：

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}>0.$$

由函数极限的局部保号性可得, 存在 $\delta_1>0$, 对任意的 $x\in(a,a+\delta_1)$ 有 $\dfrac{f(x)}{x-a}>0$, 则得 $f(x)>0$. 因此存在 $c_1\in(a,a+\delta_1)$ 使得 $f(c_1)>0$.

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}>0.$$

由函数极限的局部保号性可得, 存在 $\delta_2>0$, 对任意的 $x\in(b-\delta_2,b)$, 有 $\dfrac{f(x)}{x-b}>0$, 则得 $f(x)<0$. 因此存在 $c_2\in(b-\delta_2,b)$ 使得 $f(c_2)<0$.

由于 $f(c_1)>0$，$f(c_2)<0$, 则根据零点定理可知 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

(2) $f(x)$ 在 $[a,\xi],[\xi,b]$ 上连续, 在 $(a,\xi),(\xi,b)$ 内可导且

$$f(a)=f(\xi)=f(b)=0,$$

故由罗尔定理可得至少存在点 $\eta_1\in(a,\xi),\eta_2\in(\xi,b)$, 使得 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$.

又由于 $f'(x)$ 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上连续, 在 (η_1,η_2) 内可导且 $f'(\eta_1)=f'(\eta_2)=0$, 由罗尔定理可得至少存在点 $\eta\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$ 使 $f''(\eta)=0$.

例 3【证明】(1) 令 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，又

$$\varphi(1)=-1<0, \quad \varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,$$

根据连续函数的零点定理可知，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $\varphi(\eta)=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

(2) 设 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}[f(x)-x]$，则 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续，在 $(0,\eta)$ 内可导，且 $F(0)=0$，$F(\eta)=0$，根据罗尔定理可知，存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)-[f(\xi)-\xi]=1.$$

例4 【证明】令 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，由拉格朗日中

值定理得，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\xi)$，即

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a}=\xi f'(\xi)+f(\xi).$$

例 5【证明】令 $f(x)=\arctan x$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，根据拉格朗日中值定理可知，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即

$$\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}.$$

注意到 $\dfrac{1}{1+b^2}<\dfrac{1}{1+\xi^2}<\dfrac{1}{1+a^2}$，于是 $\dfrac{1}{1+b^2}<\dfrac{\arctan b-\arctan a}{b-a}<\dfrac{1}{1+a^2}$，即

$$\frac{b-a}{1+b^2}<\arctan b-\arctan a<\frac{b-a}{1+a^2}.$$

例 6 【证明】令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，$|x|\le 1$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0,$$

故 $f(x)=\arcsin x+\arccos x=C$.

当 $x=1$ 时，$f(1)=\arcsin 1+\arccos 1=\dfrac{\pi}{2}+0=\dfrac{\pi}{2}$，即 $C=\dfrac{\pi}{2}$，所以

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(|x|\le 1).$$

例 7【解】方法一 由于 $f(x)=\arctan x$ 在 $[n,n+1]$ 满足拉格朗日中值定理的条件，故 $\exists\xi\in(n,n+1)$，使 $\arctan(n+1)-\arctan n=\dfrac{1}{1+\xi^2}$，又 $\dfrac{1}{1+(n+1)^2}<\dfrac{1}{1+\xi^2}<\dfrac{1}{1+n^2}$，所

以

$$\frac{n^2}{1+(n+1)^2}<n^2[\arctan(n+1)-\arctan n]<\frac{n^2}{1+n^2},$$

已知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+(n+1)^2}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+n^2}=1$，由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty}n^2[\arctan(n+1)-\arctan n]=1.$$

方法二 注意到

$$\arctan(n+1)-\arctan n=\arctan\frac{1}{1+n(n+1)},$$

于是$\lim\limits_{n\to\infty}n^2[\arctan(n+1)-\arctan n]=\lim\limits_{n\to\infty}n^2\arctan\frac{1}{1+n(n+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^2}{1+n(n+1)}=1.$

【注】$\arctan A+\arctan B=\arctan\frac{A+B}{1-AB}$，$\arctan A-\arctan B=\arctan\frac{A-B}{1+AB}$.

例8 **【证明】**令$g(x)=\mathrm{e}^x$，则$g(x)$与$f(x)$在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，故由柯西中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f(b)-f(a)}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=\frac{f'(\eta)}{\mathrm{e}^\eta}$，即

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}f'(\eta).$$

又$f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日中值定理的条件，故由拉格朗日中值定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

由$f'(x)\neq0$知$f'(\eta)\neq0$，综上可得$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\cdot\mathrm{e}^{-\eta}$.

例9 **【解】**(1)由于

$$\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim_{t\to0}\left[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{t-\left[t-\frac{t^2}{2}+o(t^2)\right]}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}{t^2}=\frac{1}{2}.$$

(2) 由于

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+o(x^2)，\quad e^{x^2}=1+x^2+o(x^2)，$$

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+o(x^4)，$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\sin x^2(\cos x-e^{x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^4+o(x^4)}{x^2\left(-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{12}.$$

例 10【解】 利用麦克劳林公式

$$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x=x-a\sin x-\frac{b}{2}\sin 2x$$

$$=x-a\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+o(x^5)\right]-\frac{b}{2}\left[2x-\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}+o(x^5)\right]$$

$$=(1-a-b)x+\left(\frac{a}{6}+\frac{2b}{3}\right)x^3-\left(\frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\right)x^5+o(x^5)，$$

根据题意有 $\begin{cases}1-a-b=0,\\ \frac{a}{6}+\frac{2b}{3}=0,\\ \frac{a}{120}+\frac{2b}{15}\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{4}{3},b=-\frac{1}{3}$.

例 11【解】 $f(x)$ 在 $x=0$ 存在二阶导数，故将 $f(x)$ 展开成 $x=0$ 处的麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+o(x^3)，$$

所以

$$\frac{1}{3}=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x\left[f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right]-\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right]}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x[f(0)-1]+\left[f'(0)+\frac{1}{2}\right]x^2+\left[\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{3}\right]x^3+o(x^3)}{x^3},$$

故 $\begin{cases} f(0)-1=0, \\ f'(0)+\frac{1}{2}=0, \\ \frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}, \end{cases}$ 解得 $f(0)=1,\ f'(0)=-\frac{1}{2},\ f''(0)=\frac{4}{3}$.

例 12【答案】 $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

【解析】 根据公式 $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$ 可得

$$f(x)=x^2 2^x=x^2\mathrm{e}^{x\ln 2}$$

$$=x^2\left[1+x\ln 2+\frac{(x\ln 2)^2}{2!}+\cdots+\frac{(x\ln 2)^n}{n!}+o(x^n)\right]$$

$$=x^2+x^3\ln 2+\frac{(\ln 2)^2x^4}{2!}+\cdots+\frac{(\ln 2)^n x^{n+2}}{n!}+o(x^{n+2}),$$

又 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$，故

$$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

例 13【解】 (1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\cos x}=2;$$

(2) **方法一 洛必达**

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+2\sin 2x\cdot\cos x\cdot\cos 3x+3\sin 3x\cdot\cos x\cdot\cos 2x}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+2\sin 2x+3\sin 3x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}+2\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}+\frac{9}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}$$

$$=\frac{1}{2}+2+\frac{9}{2}=7.$$

方法二 麦克劳林展开

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\left[1-\frac{(2x)^2}{2}+o(x^2)\right]\left[1-\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}+\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(3x)^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=7;$$

例 14【解】(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x-\frac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{x}=-\frac{1}{2};$$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+2x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+e^{-x}}{2}=\dfrac{3}{2};$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{nx}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}nx\left[\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n\right]}$

$$=e^{n\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\right)-\ln n}{\frac{1}{x}}}$$

$$=e^{n\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}\left[a_1^{\frac{1}{x}}\ln a_1+a_2^{\frac{1}{x}}\ln a_2+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}\ln a_n\right]}$$

$$=e^{n\cdot\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=e^{\ln(a_1a_2\cdots a_n)}=a_1a_2\cdots a_n.$$

例 15 【解】定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且函数除 $x=0$ 外处处可导，

$$y'=\frac{-10(12x^2-18x+6)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}=\frac{-60(2x-1)(x-1)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}.$$

令 $y'=0$，得驻点 $x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=1$，这两个驻点把定义域分成四个部分区间 $(-\infty,0)$，$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，$\left[\dfrac{1}{2},1\right]$，$[1,+\infty)$.

当 $-\infty<x<0, 0<x<\dfrac{1}{2}, 1<x<+\infty$ 时，$y'<0$，因此函数在 $(-\infty,0), \left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，$[1,+\infty)$ 上单调减少；当 $\dfrac{1}{2}<x<1$ 时，$y'>0$，因此函数在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上单调增加.

例 16 【**解**】已知 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$，则 $f'(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$.

又当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，于是 $\dfrac{1}{1+x}<\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)<\dfrac{1}{x}$，综上当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

例 17 【**答案**】(C).

【**解析**】设 $g(x)=[f(x)]^2$，则 $g'(x)=2f(x)f'(x)>0$，故 $[f(x)]^2$ 是单调递增函数. 从而 $[f(1)]^2>[f(-1)]^2 \Rightarrow |f(1)|>|f(-1)|$，故选(C).

例 18 【**答案**】(A).

【**解析**】由图 3-4 可以看到：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有两个驻点，一个一阶不可导点. 由图可知在驻点左右两侧一阶导数改变符号，而在不可导点处左右导数符号未发生变化，因此从左至右依次为极大值点、非极值点、极小值点，选(A).

例 19 【**答案**】(C).

【**解析**】由于 $f(a)$ 为极大值，故 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，$f(x)\le f(a)$.

当 $x\in(a-\delta,a)$ 时，$(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$；

当 $x\in(a,a+\delta)$ 时，$(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$.

又由于 $x\ne a$，故 $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}=\dfrac{f(a)-f(x)}{(a-x)^2}\ge 0$.

故选(C).

例 20 【解】 函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$y'=\frac{3x^2(x-1)^2-2x^3(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

令 $y'=0$，得驻点为 $x=0,x=3$.

$x\in(-\infty,1)$ 时，$y'>0$，函数单调递增；

$x\in(1,3]$时，$y'\le 0$，函数单调递减；

$x\in[3,+\infty)$ 时，$y'\ge 0$，函数单调递增.

综上可得单增区间为 $(-\infty,1)$ 和 $[3,+\infty)$，单减区间为 $(1,3]$，取得极小值 $y(3)=\dfrac{27}{4}$.

例 21【解】 方程 $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$ 两边对 x 求导得

$$6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0,$$

令 $y'=0$ 得 $x=y$，代入原方程可解得 $x=y=1$，即得唯一驻点 $x=1$.

方程 $6y^2y'-4yy'+2y+2xy'-2x=0$ 两边再对 x 求导得

$$12y(y')^2+6y^2y''-4(y')^2-4yy''+4y'+2xy''-2=0,$$

将 $x=y=1$，$y'=0$ 代入上式得 $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$，故 $x=1$ 为极小值点.

例 22【答案】(D).

【解析】 令 $f(x)=x^5-5x+k$，则

$$f'(x)=5x^4-5=5(x^4-1)=5(x^2+1)(x-1)(x+1),$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm1$.

当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(-1)=4+k$ 为极大值，$f(1)=-4+k$ 为极小值，

又 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

根据 $f(x)$ 单调性可知，方程 $x^5-5x+k=0$ 有 3 个不同实根等价于 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,-1)$，$(-1,1)$，$(1,+\infty)$ 分别有一个实根，即

$$f(-1)=4+k>0，\quad f(1)=-4+k<0，$$

所以 $k\in(-4,4)$.

故选(D).

例 23 【解】由已知可得 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+2, & x\in[-3,1]\cup[2,4],\\ -x^2+3x-2, & x\in(1,2),\end{cases}$ 则

$$f'(x)=\begin{cases}2x-3, & x\in(-3,1)\cup(2,4),\\ -2x+3, & x\in(1,2).\end{cases}$$

在 $(-3,4)$ 内，$f(x)$ 的驻点为 $x=\dfrac{3}{2}$，不可导点为 $x=1,2$.

由于 $f(-3)=20, f(1)=0, f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{4}, f(2)=0, f(4)=6$，比较可得 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处取得它在 $[-3,4]$ 上的最大值 20，在 $x=1$ 和 $x=2$ 处取得它在 $[-3,4]$ 上的最小值 0.

例 24 【解】由 $V=\pi r^2h$ 得 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，则圆柱形油罐的表面积

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2}=2\pi r^2+\frac{2V}{r},$$

于是 $S'=4\pi r-\dfrac{2V}{r^2}$，$S''=4\pi+\dfrac{4V}{r^3}$.

令 $S'=0$，解得驻点 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

由 $S''\big|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$ 知 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 为极小值点.

又驻点唯一，故极小值点就是最小值点. 此时 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}=2r$，即 $2r:h=1:1$.

故当底半径 $r=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 和高 $h=2\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$ 时，表面积最小，这时底直径与高的比是 $1:1$.

例 25 【解】由已知可得 $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}, y''=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$.

令 $y''=0$，得 $x_1=-1, x_2=1$.

当 $-\infty<x<-1$ 时，$y''<0$，因此曲线在 $(-\infty,-1]$ 上是凸的；当 $-1<x<1$ 时，$y''>0$，因此曲线在 $[-1,1]$ 上是凹的；当 $1<x<+\infty$ 时， $y''<0$，因此曲线在 $[1,+\infty)$ 上是凸的.

例 26【解】 由已知可得 $y'=3ax^2+2bx, y''=6ax+2b=6a\left(x+\dfrac{b}{3a}\right)$.

令 $y''=0$，得 $x_0=-\dfrac{b}{3a}$， $y_0=a\left(-\dfrac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\dfrac{b}{3a}\right)^2=\dfrac{2b^3}{27a^2}$.

由于 y'' 在 x_0 的两侧变号，故点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\dfrac{2b^3}{27a^2}\right)$ 为曲线的唯一拐点，从而要使点 $(1,3)$ 为拐点，则 $\begin{cases}-\dfrac{b}{3a}=1,\\ \dfrac{2b^3}{27a^2}=3,\end{cases}$ 解得 $a=-\dfrac{3}{2},b=\dfrac{9}{2}$.

例 27 【解】 函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$$y'=\frac{3x^2(x-1)^2-2x^3(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3},$$

$$y''=\frac{(3x^2-6x)(x-1)^3-3(x^3-3x^2)(x-1)^2}{(x-1)^6}=\frac{6x}{(x-1)^4},$$

令 $y''=0$，则 $x=0$. 当 $x>0$ 时， $y''>0$，曲线为凹；当 $x<0$ 时， $y''<0$，曲线为凸，曲线的的拐点为 $(0,0)$.

例 28 【答案】 $y=x-\dfrac{1}{e}$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$，故曲线没有水平渐近线. 又由于

$$\lim_{x\to0^+}x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}\left(e+\frac{1}{x}\right)}=0,$$

故曲线没有垂直渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-\ln e}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{ex}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{ex}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{e},$$

所以曲线的斜渐近线为 $y=x-\dfrac{1}{e}$.

例 29【答案】(C).

【解析】由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，故 $x=0$ 是铅直渐近线；

当 $x\to 1$ 及 $x\to -2$ 时，函数值不趋于无穷大；

由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{\pi}{4}$，故 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 是水平渐近线；

又 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x-2)}=0$，故无斜渐近线.

综上共有 2 条渐近线.

例 30 【解】由于 $y'=\cos x, y''=-\sin x$，故曲线 $y=\sin x(0<x<\pi)$ 的曲率为

$$K=\frac{|-\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}=\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}.$$

由 $K'=\dfrac{2\cos x(1+\sin^2 x)}{(1+\cos^2 x)^{5/2}}=0$ 知 $x=\dfrac{\pi}{2}$.

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$K'>0$；当 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ 时，$K'<0$，因此 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 为 K 的极大值点. 又驻点唯一，故极大值点也是最大值点，K 的最大值为 $K=\left.\dfrac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}\right|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$.

此时曲率半径 $\rho = 1$ 最小，故曲线弧 $y = \sin x (0 < x < \pi)$ 上点 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的曲率半径最小且曲率半径为 $\rho = 1$.

第四章 不定积分

例 1【答案】(A).

【解析】由 $f(x)$ 的一个原函数为 3^x 知 $f(x)=(3^x)'=3^x\ln 3$，于是

$$f'(x)=\left(3^x\ln 3\right)'=3^x(\ln 3)^2.$$

故选(A).

例 2 【证明】当 $x\in(0,1)$ 时，

$$[\arcsin(2x-1)]'=\frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$[\arccos(1-2x)]'=-\frac{1}{\sqrt{1-(1-2x)^2}}\cdot(-2)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

$$\left[2\arctan\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right]'=2\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}},$$

故结论成立.

例 3 【答案】(B).

【解析】不妨设 $F'(x)=f(x)$，则 $\mathrm{d}\left[\int f(x)\mathrm{d}x\right]=\mathrm{d}\left[F(x)+C\right]=F'(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$.

例 4 【答案】(B).

【解】由于 $x\ln x-x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以 $f(x)=(x\ln x-x)'=\ln x$，故

$$\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C=\ln x+C.$$

例 5 【解】(1) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[4]{x}}\mathrm{d}x=\int\left(x^{\frac{1}{4}}+2x^{-\frac{1}{4}}\right)\mathrm{d}x=\int x^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x+2\int x^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$

$$=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+2\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}}+C=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{4}}+C;$$

(2) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{x^2+1-1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x=x-\arctan x+C$；

(3) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x=\sin x-\cos x+C$；

(4) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-x+C$.

例 6 【解】(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+2\ln x)}=\int \frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+C$；

(2) $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\frac{x}{a}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$；

(3) $\int \sin^4 x\cos^3 x\mathrm{d}x=\int \sin^4 x\cos^2 x\mathrm{d}\sin x=\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)\mathrm{d}\sin x$

$$=\frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+C.$$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+x}}(x>0)=\int \frac{2\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}}=2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$.

例 7 【解】(1) 令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $x=t^6,\mathrm{d}x=6t^5\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{6t^5}{t^3+t^2}\mathrm{d}t=\int \frac{6t^3}{t+1}\mathrm{d}t=6\int \frac{t^3+t^2-t^2-t+t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2t^3-3t^2+6t-6\ln(1+t)+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(1+\sqrt[6]{x})+C;$$

(2) 令 $t=\sqrt{x+1}$，于是 $x=t^2-1\ (t\geq 0)$，则

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\sqrt{x+1}}\int \frac{t-1}{t+1}2t\mathrm{d}t=2\left[\int(t+1)\mathrm{d}t-3\mathrm{d}t+2\int \frac{\mathrm{d}t}{t+1}\right]$$

$$=(t+1)^2-6t+4\ln|t+1|+C$$

$$=x-4\sqrt{x+1}+4\ln(1+\sqrt{x+1})+C;$$

(3) 令 $\sqrt{\mathrm{e}^x+1}=t(t>1)$，则 $x=\ln(t^2-1),\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}$，于是

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{2t^2}{t^2-1}\mathrm{d}x=2\int \frac{t^2-1+1}{t^2-1}\mathrm{d}x=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2t+\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=2t+\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$

$$=2\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+\ln\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}-1}{\sqrt{\mathrm{e}^x+1}+1}+C.$$

(4) 令 $x=a\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\int\cos 2t\mathrm{d}(2t)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

例 8 【解】(1) $\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\arctan x\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C$$

$$=\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan x-\frac{1}{2}x+C;$$

(2) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x=\int\ln x\mathrm{d}\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\mathrm{d}(\ln x)$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{6}+C;$$

(3) $\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cos x+\int\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^x\cos x+\int\sin x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x-\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x,$$

从而 $2\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos x+\mathrm{e}^x\sin x+C_1$，则

$$\int\mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\cos x+\sin x)+C;$$

(4) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x+\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x+\int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$=\int x\,\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x=x\tan\frac{x}{2}-\int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=x\tan\frac{x}{2}+C.$$

例 9 【解】 令 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$，$f(t)=\frac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$，于是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$$

$$=x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x)+C.$$

例 10 【答案】(D).

【解析】方法一(直接法)

由已知可得 $F(x)=\begin{cases}\int 2(x-1)\mathrm{d}x, & x<1,\\ \int \ln x\mathrm{d}x, & x\geq 1,\end{cases}=\begin{cases}(x-1)^2+C_1, & x<1,\\ x(\ln x-1)+C_2, & x\geq 1.\end{cases}$

由 $F(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性可得

$$\lim_{x\to 1^-}[(x-1)^2+C_1]=\lim_{x\to 1^+}[x(\ln x-1)+C_2]\Rightarrow C_1=-1+C_2.$$

取 $C_1=0$，得 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geq 1.\end{cases}$

方法二(排除法)

根据原函数的定义，直接对 $F(x)$ 求导，排除(B)(C)；根据原函数的连续性，排除(A)，故选(D).

例 11【解】(1)设 $\frac{2x+3}{x^2-3x+2}=\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$，那么 $A=-5$、$B=7$，于是

$$\int\frac{2x+3}{x^2-3x+2}dx=\int\left(\frac{-5}{x-1}+\frac{7}{x-2}\right)dx=-5\ln|x-1|+7\ln|x-2|+C;$$

(2) 设 $\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$，那么 $A=-1,B=-1,C=1$，于是

$$\int\frac{dx}{x^2(x-1)}=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln|x-1|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+\frac{1}{x}+C;$$

(3) 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$，那么 $A=1$，$B=-1$，$C=-1$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}dx&=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx\\&=\int\frac{1}{x+1}d(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+2x+2}d(x^2+2x+2)\\&=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C;\end{aligned}$$

(4) $$\int\frac{x^5+1}{x^2+1}dx=\int\frac{x^5+x^3-x^3-x+x+1}{x^2+1}dx=\int\left(x^3-x+1+\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+C.$$

例 12【解】(1)方法一

$$\int\frac{dx}{5+\cos x}=\int\frac{dx}{5+2\cos^2\frac{x}{2}-1}=\int\frac{dx}{4+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{1}{\frac{2}{\cos^2\frac{x}{2}}+1}\cdot\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\int\frac{1}{2\sec^2\frac{x}{2}+1}\cdot d\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\cdot d\left(\tan\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

方法二 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{5+\cos x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{5+5t^2+1-t^2}=\int\frac{dt}{3+2t^2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}t\right)+C=\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\tan\frac{x}{2}\right)+C;$$

(2) **方法一**

$$\int\frac{-\sin x+7\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{-4(\sin x-\cos x)+3(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=4\int\frac{-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx+3\int 1dx=4\ln|\sin x+\cos x|+3x+C$$

方法二

令 $t=\tan x$，则 $dx=\frac{dt}{1+t^2}$，

于是

$$\int\frac{-\sin x+7\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int\frac{-\tan x+7}{\tan x+1}dx=\int\frac{-t+7}{t+1}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{4}{t+1}dt+\int\frac{-4t+3}{1+t^2}dt$$

$$=4\int\frac{1}{t+1}dt-2\int\frac{2t}{1+t^2}dt+3\int\frac{1}{1+t^2}dt$$

$$=4\ln|t+1|-2\ln(1+t^2)+3\arctan t+C$$

$$=4\ln|\tan x+1|-2\ln(1+\tan^2 x)+3\arctan t+C$$

$$=4\ln|\cos x+\sin x|+3x+C;$$

(3) 令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\tan x=\frac{2t}{1-t^2},dx=\frac{2dt}{1+t^2}$，于是

$$\int\frac{dx}{\sin x+\tan x}=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{2t}{1-t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1-t^2}{t(1-t^2)+t(1+t^2)}dt$$

$$=\int\frac{1-t^2}{2t}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}-t\right)dt=-\frac{1}{2}\ln|t|-\frac{1}{4}t^2+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}|-\frac{1}{4}\left(\tan\frac{x}{2}\right)^2+C.$$

例 13【解】(1) 令 $x=t^6$ ($t>0$)，则 $dx=6t^5dt$，于是

$$\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3+1-1}{t+1}dt=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+C;$$

(2) 令 $t=\sqrt[3]{1+x}$，则 $1+x=t^3$，$dx=3t^2dt$，于是

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{3t^2dt}{1+t}=3\int\frac{t^2dt}{1+t}=3\left[\int(t-1)dt+\int\frac{1}{1+t}dt\right]$$

$$=\frac{3}{2}t^2-3t+3\ln|t+1|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+x)^2}-3\sqrt[3]{1+x}+3\ln|\sqrt[3]{1+x}+1|+C;$$

(3) 令 $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$，则 $x=\dfrac{1}{t^2-1},dx=-\dfrac{2tdt}{(t^2-1)^2}$，于是

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}dx=-2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-2\left(t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)+C$$

$$=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}-1}{\sqrt{\frac{1+x}{x}}+1}\right|+C=-2\sqrt{\frac{1+x}{x}}-\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x}}\right|+C.$$

第五章 定积分及其应用

例 1【解】(1)根据定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\cos\frac{i\pi}{n}}=\int_0^1\sqrt{1+\cos\pi x}\mathrm{d}x\text{；}$$

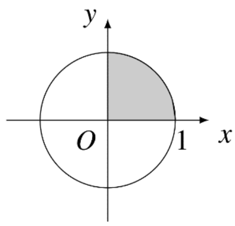
(2)根据定积分定义

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+n}+\frac{4}{n^3+2n}+\frac{9}{n^3+3n}+\cdots\frac{i^2}{n^3+in}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3+n}+\frac{4}{n^3+4n}+\frac{9}{n^3+9n}+\cdots+\frac{i^2}{n^3+i^2n}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n\cdot n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3+i^2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x\,.$$

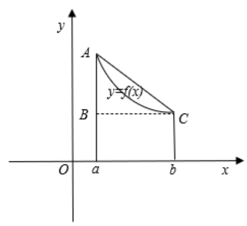
例 2【解】显然根据定积分的定义求解本题是比较困难的. 现在根据定积分的几何意义，将定积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$ 看成右图所示半径为 1 的圆在第一象限的部分的面积，所以



$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot1^2=\frac{\pi}{4}.$$

例 3【答案】(B).

【解析】由 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$ 可知曲线 $y=f(x)$ 如右图.



$S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 为曲线 $y=f(x),x=a,x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形面积.

$S_2=f(b)(b-a)$ 为线段 BC 与 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成矩形面积.

$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$ 为线段 AC 与 $x=a,x=b$ 及 x 轴围成梯形面积.

故 $S_2 < S_1 < S_3$，选(B)．

例 4【解】(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} 3f(x)\mathrm{d}x = 6$；

(2) $\int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -2$；

(3) $\int_{3}^{-1} g(x)\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = -3$；

(4) $\int_{-1}^{3} \frac{1}{5}[4f(x)+3g(x)]\mathrm{d}x = \frac{4}{5}\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + \frac{3}{5}\int_{-1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = 5$.

例 5【答案】(A).

【解析】当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$0 < \sin x < x < \tan x$，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\mathrm{d}x$.

例 6【解】根据求导公式，有

$$F'(x) = (x)'\int_{\sin x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t + \frac{x}{\sqrt{1+(x^2)^4}}\cdot(x^2)' - \frac{x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}(\sin x)'$$

$$= \int_{\sin x}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\mathrm{d}t + \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{x\cos x}{\sqrt{1+\sin^4 x}}.$$

例 7【答案】 $a^2 f(a)$.

【解析】 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\frac{x^2\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\frac{2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + x^2 f(x)}{1} = a^2 f(a)$.

例 8【解】方法一 由于 $\int_{-a}^{a} f(t+a)\mathrm{d}t \xlongequal{t+a=u} \int_0^{2a} f(u)\mathrm{d}u, \int_{-a}^{a} f(t-a)\mathrm{d}t \xlongequal{t-a=x} \int_{-2a}^{0} f(x)\mathrm{d}x$，

则

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t = \lim_{a\to 0^+}\frac{\int_0^{2a} f(u)\mathrm{d}u - \int_{-2a}^{0} f(x)\mathrm{d}x}{4a^2}$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\frac{2f(2a)-2f(-2a)}{8a} = f'(0) = 1.$$

方法二 由定积分第一中值定理可知，存在 $\xi \in [-a,a]$，使得

$$\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t = 2a[f(\xi+a)-f(\xi-a)],$$

又根据拉格朗日中值定理可知，存在 $\eta \in (\xi-a, \xi+a)$，使得 $f(\xi+a)-f(\xi-a) = 2af'(\eta)$，

综上 $\lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]\mathrm{d}t = \lim\limits_{a\to 0^+}\frac{1}{4a^2}\cdot 4a^2 f'(\eta) = f'(0) = 1$.

例 9【解】 当$0\le x<1$时，$\Phi(x)=\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^x=\frac{1}{3}x^3$；

当$1\le x\le 2$时，$\Phi(x)=\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+\int_1^x t\mathrm{d}t=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1+\frac{1}{2}t^2\Big|_1^x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}$.

例 10【解】 由于$-\cos x$是$\sin x$的一个原函数，所以

$$\int_0^{2\pi}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x-\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\pi}+\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=-(-1-1)+[1-(-1)]=4.$$

例 11【答案】 $x-1$.

【解析】 设$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=A$，于是$f(x)=3x+A\sqrt{1-x^2}$，等式两边关于$x$在区间$[0,1]$上计算定积分，即$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 3x\mathrm{d}x+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，得$A=\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}A$，解得$A=\frac{6}{4-\pi}$，所以$f(x)=3x-\frac{6}{4-\pi}\sqrt{1-x^2}$.

例 1【解】（1）$\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}a}\frac{\mathrm{d}(3a^2-x^2)}{\sqrt{3a^2-x^2}}=-\sqrt{3a^2-x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}a}=(\sqrt{3}-1)a$.

(2) 令$1-x=t$，则

$$\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-(1-x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

(3) 令$\sqrt{2x+1}=t$，则$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{t^2+3}{2t}\cdot t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Bigg|_1^3=\frac{22}{3}$.

(4) 令$x=\sqrt{2}\sin t$，则$\mathrm{d}x=\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t$，故

$$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2 t}\cdot\sqrt{2}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}.$$

例 13【解】 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x\overset{x=u+1}{=\!=\!=}\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\mathrm{e}^u}\mathrm{d}u+\int_0^1\frac{1}{1+u}\mathrm{d}u$

$$=\int_{-1}^0\left(1-\frac{\mathrm{e}^u}{1+\mathrm{e}^u}\right)\mathrm{d}u+\ln(1+u)\Big|_0^1$$

$$=[u-\ln(1+\mathrm{e}^u)]\Big|_{-1}^0+\ln 2=\ln(1+\mathrm{e}).$$

例 14【考查知识点】 定积分的分部积分法.

【解】（1）$\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^4\ln x\mathrm{d}\sqrt{x}=2\left(\sqrt{x}\ln x\Big|_1^4-\int_1^4\sqrt{x}\mathrm{d}\ln x\right)$

$$=2\left(4\ln 2-\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right)=8\ln 2-2\times 2\times\sqrt{x}\Big|_1^4=8\ln 2-4;$$

(2) $\int_0^{\pi}(x\sin x)^2\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}x^2\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x$

$$=\frac{x^3}{6}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{4}\left(x^2\sin 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}\cos 2x=\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\left(x\cos 2x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2x\mathrm{d}x\right);$$

(3) $\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}\sin 1-\int_1^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}\sin 1-\left[x\cos(\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}+\int_1^{\mathrm{e}}x\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\mathrm{e}\sin 1-\left(\mathrm{e}\cos 1-1+\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x\right),$$

于是 $2\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}\sin 1-\mathrm{e}\cos 1+1$，故 $\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}\sin 1-\mathrm{e}\cos 1+1}{2}$.

(4) 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2,\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$. 于是

$$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}t^2\sin t\mathrm{d}t=-2\int_0^{\pi}t^2\mathrm{d}\cos t=-2t^2\cos t\Big|_0^{\pi}+4\int_0^{\pi}t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi^2+4\int_0^{\pi}t\mathrm{d}\sin t=2\pi^2+4t\sin t\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t$$

$$=2\pi^2+4\cos t\Big|_0^{\pi}=2\pi^2-8.$$

例 15【解】 令 $u=2x$，则

$$\int_0^1 x^2 f''(2x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^2 u^2 f''(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{8}\left[u^2 f'(u)\Big|_0^2-2\int_0^2 uf'(u)\mathrm{d}u\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left\{4f'(2)-2\left[uf(u)\Big|_0^2-\int_0^2 f(u)\mathrm{d}u\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\{4f'(2)-2[2f(2)-1]\}=0.$$

例 16 【解】 (1) $\int_{-1}^1\frac{2x^2+x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^1\frac{2x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^1\frac{x\cos x}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=4\int_0^1\frac{x^2}{1+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x+0=4\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x$$

$$=4\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=4-\pi\text{；}$$

(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}$；

(3) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin x+\cos^5 x+\sin^6 x)\mathrm{d}x=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\mathrm{d}x\right)$

$$=2\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\frac{16}{15}+\frac{5\pi}{16}.$$

(4) 因为 $\int_0^{2\pi}|\sin(x+1)|\,\mathrm{d}x\overset{x=u-1}{=\!=\!=}\int_1^{2\pi+1}|\sin u|\,\mathrm{d}u$，且 $|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数，所以上式 $=2\int_0^{\pi}|\sin u|\,\mathrm{d}u=4$.

例 17【答案】 $\frac{11}{3}$.

【解析】 由于 $\min\{1,x^2\}=\begin{cases}x^2, & |x|<1,\\ 1, & |x|\geq 1.\end{cases}$ 则

$$\int_{-2}^{3}\min\{1,x^2\}\mathrm{d}x=\int_{-2}^{-1}1\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x+\int_1^3 1\mathrm{d}x$$

$$=3+\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{11}{3}.$$

例 18【解】 当 $p=1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，故发散；

当 $p>1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{1-p}$；

当 $p<1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，故发散.

例 19【解】 $\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=\left[-\frac{1}{p}\int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-pt})\right]_0^{+\infty}=\left[-\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt}+\frac{1}{p}\int\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right]_0^{+\infty}$

$$=\left[-\frac{t}{p}\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{+\infty}-\left[\frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{+\infty}$$

$$=-\frac{1}{p}(\lim_{t\to+\infty}t\mathrm{e}^{-pt}-0)-\frac{1}{p^2}(\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-pt}-1)=\frac{1}{p^2}.$$

例 20【证明】 当 $q\neq 1$ 时，$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\left[\frac{(x-a)^{1-q}}{1-q}\right]_a^b=\begin{cases}\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & 0<q<1,\\ +\infty, & q>1.\end{cases}$

(1) 当 $0<q<1$ 时，反常积分收敛，其值为 $\frac{(b-a)^{1-q}}{1-q}$；

(2) 当 $q=1$ 时，$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}=\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=[\ln(x-a)]_a^b=\ln(b-a)-\lim\limits_{x\to a^+}\ln(x-a)=+\infty$.

综上，当 $q\geq 1$ 时，反常积分发散.

例 21【解】 (1) $\int_{\frac12}^{\frac32}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\int_{\frac12}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac32}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}$

$$=\int_{\frac12}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac14-\left(x-\frac12\right)^2}}+\int_{1}^{\frac32}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac12\right)^2-\frac14}}$$

$$=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac12}^{1}+\ln\left[\left(x-\frac12\right)+\sqrt{\left(x-\frac12\right)^2-\frac14}\right]\Bigg|_1^{\frac32}$$

$$=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3});$$

(2) 这个反常积分既是无穷区间上的反常积分，又是无界函数的反常积分，于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

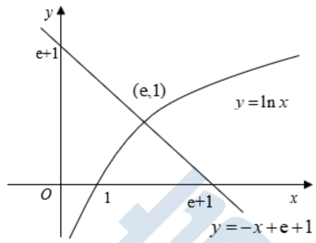
$$=2\arctan\sqrt{x}\Big|_0^1+2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}=\pi.$$

例 22【解】 (1) 由于 $0<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}}<\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{x^{4/3}}$，且 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}}$ 收敛，根据比较判别法，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^4+1}}$ 收敛.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}=1$，根据比较判别法的极限形式，反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$ 收敛.

(3) 由于 $\lim\limits_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}}=\dfrac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}}$，根据比较判别法的极限形式，反常积分 $\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}(k^2<1)$ 收敛.

例 23【解】所围成平面图形如图所示，联立方程 $\begin{cases}y=\ln x,\\ y=-x+\mathrm{e}+1\end{cases}$，解得交点为 $(\mathrm{e},1)$.



方法一 选取 y 为积分变量，所求平面图形的面积为

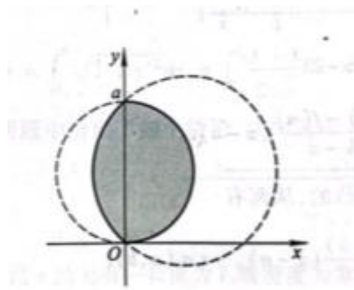
$$A=\int_0^1\left(-y+\mathrm{e}+1-\mathrm{e}^y\right)\mathrm{d}y$$

$$=\left[-\frac{1}{2}y^2+(\mathrm{e}+1)y-\mathrm{e}^y\right]\Bigg|_0^1=\frac{3}{2}.$$

方法二 选取 x 为积分变量，把它分成 $[0,2]$ 和 $[2,8]$ 两个区间来考虑，所求面积为

$$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln x\mathrm{d}x+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+1}[-x+\mathrm{e}+1]\mathrm{d}x=x(\ln x-1)\Big|_1^{\mathrm{e}}+\left[-\frac{1}{2}x^2+(\mathrm{e}+1)x\right]\Bigg|_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}+1}=\frac{3}{2}.$$

例 24【解】所围图形公共部分面积如图所示，联立方程 $\begin{cases}\rho=a\sin\theta,\\ \rho=a(\cos\theta+\sin\theta),\end{cases}$ 解得交点 $(0,0)$ 和 $\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right)$，



于是

$$S=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}[a(\cos\theta+\sin\theta)]^2\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}(1+\sin2\theta)\mathrm{d}\theta+\frac{\pi a^2}{8}=\frac{a^2}{4}(\pi-1).$$

例 25【解】根据对称性

$$V=2\int_0^a\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

例 26【解】方法一

选取 y 为积分变量，根据对称性

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-y^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-y^2}\right)^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=8\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y=16\pi\int_{0}^{1}\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{y=\sin t}16\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=16\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=4\pi^2.$$

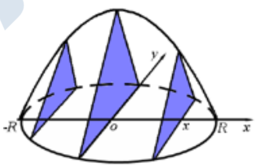
方法二

选取 x 为积分变量，根据对称性

$$V=2\cdot 2\pi\int_{1}^{3}xy(x)\mathrm{d}x=4\pi\int_{1}^{3}x\sqrt{1-(x-2)^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x-2=\sin t}4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2+\sin t)\cos t\cdot\cos t\mathrm{d}t$$

$$=8\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=16\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=4\pi^2.$$

例 27【解】取底圆所在的平面为 xOy 平面，圆心 O 为坐标原点. 过 x 轴上的点 $x(-R\le x\le R)$ 作垂直于 x 轴的截面是边长 $2\sqrt{R^2-x^2}$ 的正三角形，故截面面积



$A(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(2\sqrt{R^2-x^2}\right)^2=\sqrt{3}\left(R^2-x^2\right)$，于是所求立体的体积为

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)\mathrm{d}x=\int_{-R}^{R}\sqrt{3}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\sqrt{3}\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3.$$

例 28【解】旋转体的侧面积为

$$S=2\pi\int_{0}^{3}y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{0}^{3}2\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x=4\pi\int_{0}^{3}\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{56}{3}\pi.$$

例 29【解】根据弧长公式，有

$$s=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec x\mathrm{d}x$$

$$=[\ln(\sec x+\tan x)]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=\ln\left(1+\sqrt{2}\right).$$

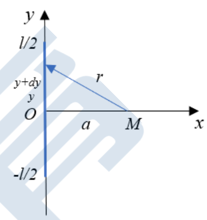
例 30【解】根据平均值公式，有

$$\bar{y}=\frac{\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\mathrm{d}x}{\pi-0}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{4\left(\sqrt{2}-1\right)}{\pi}.$$

例 31【解】取坐标系如图所示，使棒位于 y 轴上，质点 M 位于 x 轴上，棒的中点为坐标原点 O. 取 y 为积分变量，它的变化区间为 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$. 设 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 为 $\left[-\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right]$ 上的任一小区间，把细直棒上相应于 $[y,y+\mathrm{d}y]$ 的一小段近似地看成质点，其质量为 $\mu\mathrm{d}y$，与 M 相距



$r=\sqrt{a^2+y^2}$. 因此这小段细直棒对质点 M 的引力 ΔF 的大小为 $\Delta F\approx G\frac{m\mu\mathrm{d}y}{a^2+y^2}$，从而求出 ΔF 在水平方向 ΔF_x 的近似值，即细直棒对质点 M 的引力在水平方向分力 F_x 的元素为 $\mathrm{d}F_x=-G\frac{am\mu\mathrm{d}y}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$，于是得引力在水平方向分力为

$$F_x=-\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}\frac{Gam\mu}{(a^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}y=-\frac{2Gm\mu l}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{4a^2+l^2}}.$$

由对称性知，引力在铅直方向分力为 $F_y=0$.

当细直棒的长度 l 很大时，可视 l 趋于无穷，此时引力的大小为 $\frac{2Gm\mu}{a}$，方向与细直棒垂直且由 M 指向细直棒.

第六章 常微分方程

例 1【解】(1)该方程是变量可分离的微分方程，分离变量后得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\frac{2\mathrm{d}x}{x}，\quad y>0\text{且}\,y\neq 1$$

两端积分得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x$，即 $\ln|\ln y|=2\ln|x|+C_1$，进而 $\ln y=Cx^2$，(其中 $C=\pm e^{C_1}$)．

另外，$y=1$ 也是方程的一个解．进而，微分方程的通解为 $y=e^{Cx^2}$，其中 C 为任意常数．

(2)该方程是变量可分离的微分方程，分离变量后得 $\frac{3y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$，

两端积分得

$$3\ln(1+y^2)=\ln(1+x^2)+C_1,$$

即 $y^2+1=C(1+x^2)^{\frac{1}{3}}$（其中 $C=\pm e^{\frac{C_1}{3}}$），故原方程的通解为 $y^2=C(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1$．

例 2【解】(1)原方程可写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1}$，令 $\frac{y}{x}=u$，则

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

两端积分得 $u-\ln|u|+C=\ln|x|$，以 $\frac{y}{x}$ 代上式中的 u，便得所给方程的通解

$$\ln|y|=\frac{y}{x}+C.$$

(2)原方程可写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right)-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)-1}$，令 $u=\left(\frac{y}{x}\right)$，可得

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{u^2-2u-1}{u^2+2u-1},$$

即 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=-\frac{u^2+2u-1}{u^3+u^2+u+1}\mathrm{d}u$，即 $\frac{\mathrm{d}x}{x}=\left(\frac{1}{u+1}-\frac{2u}{u^2+1}\right)\mathrm{d}u$，积分得

$$\ln|x|+C_1=\ln\left|\frac{u+1}{u^2+1}\right|,$$

即 $(u+1)=\mathrm{e}^{C_1}x(u^2+1)$，代入 $\frac{y}{x}=u$ 得 $x+y=C(x^2+y^2)$，其中 $C=\mathrm{e}^{C_1}$.

例 3【解】(1) 根据通解公式，有

$$y=\mathrm{e}^{-\int\tan x\mathrm{d}x}(C+\int\sin 2x\mathrm{e}^{\int\tan x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x)$$

$$=\cos x\left(C+\int\frac{\sin 2x}{\cos x}\mathrm{d}x\right)=\cos x\left(C+2\int\sin x\mathrm{d}x\right)$$

$$=\cos x\left(C-2\cos x\right);$$

(2) 将方程改写为 $y'+\frac{1}{x\ln x}y=1+\frac{1}{\ln x}$，根据通解公式，有

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\left[C+\int\left(1+\frac{1}{\ln x}\right)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{\ln x}\left[C+\int(1+\ln x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{\ln x}(C+x\ln x)=x+\frac{C}{\ln x}.$$

例 4【解】(1) 方程的通解

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(C+\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\frac{1}{x}(C+\int\sin x\mathrm{d}x)=\frac{1}{x}(-\cos x+C),$$

代入初始条件 $y|_{x=\pi}=1$ 得 $C=\pi-1$，故所求特解为 $y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$；

(2) 方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2-3x^2}{x^3}\mathrm{d}x}\left(C+\int 1\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{2-3x^2}{x^3}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\right)=\mathrm{e}^{3\ln x+\frac{1}{x^2}}\left(C+\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}-3\ln x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\left(C+\int\frac{1}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\right)=x^3\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\left[C+\frac{1}{2}\int\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]$$

$$=x^3e^{\frac{1}{x^2}}\left(C+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\frac{1}{2}x^3+Cx^3e^{\frac{1}{x^2}},$$

代入初始条件 $y\big|_{x=1}=0$ 得 $0=\frac{1}{2}+Ce$，即 $C=-\frac{1}{2e}$，故所求特解为 $y=\frac{1}{2}x^2\left(1-e^{\frac{1}{x^2}-1}\right)$.

例 5【解】(1) 方程 $\frac{dy}{dx}-3xy=xy^2$ 两边同除以 y^2 得 $y^{-2}\frac{dy}{dx}-3xy^{-1}=x$，令 $z=y^{-1}$，

则 $\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$，从而 $\frac{dz}{dx}+3xz=-x$，

故原方程的通解为

$$y^{-1}=e^{-\int 3xdx}(C+\int -xe^{\int 3xdx}dx)=e^{-\frac{3}{2}x^2}(C+\int -xe^{\frac{3}{2}x^2}dx)$$

$$=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(C-\frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}x^2}\right)=-\frac{1}{3}+Ce^{-\frac{3}{2}x^2};$$

(2) 原方程可写为 $y'-\frac{1}{x}y=(1+\ln x)y^3$，再将上式两边同除以 y^3 得

$$y^{-3}y'-\frac{1}{x}y^{-2}=1+\ln x,$$

令 $z=y^{-2}$，则 $\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx}$，上式可化简为 $\frac{dz}{dx}+\frac{2}{x}z=-2(1+\ln x)$，故原方程的通

解为

$$y^{-2}=e^{-\int\frac{2}{x}dx}[C+\int -2(1+\ln x)e^{\int\frac{2}{x}dx}dx]=x^{-2}[C+\int -2(1+\ln x)x^2dx]$$

$$=x^{-2}[-\frac{2}{3}x^3(1+\ln x)+\frac{2}{9}x^3+C]=-\frac{2}{3}x(1+\ln x)+\frac{2}{9}x+Cx^{-2},$$

即 $x^2=y^2\left(-\frac{4}{9}x^3-\frac{2}{3}x^3\ln x+C\right)$.

例 6【解】令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为 $p'=\frac{2xp}{1+x^2}$，这是一个可分离变量的微

分方程，分离变量得 $\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$，两边积分得 $p=C_1(1+x^2)$，即 $y'=C_1(1+x^2)$，再积

分可得通解 $y=C_1(x+\frac{1}{3}x^3)+C_2$.

例 7【解】 令 $y'=p$，则 $y''=p'$，原方程化为 $p'-\frac{p}{x}=x$，这是一个一阶线性微分方程，根据通解公式，有 $p=\mathrm{e}^{-\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}x\mathrm{d}x+C\right]$，即 $y'=x^2+Cx$，再积分可得通解 $y=\frac{x^3}{3}+C\frac{x^2}{2}+C_1$.

例 8【解】 令 $y'=p(y)$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入原方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p^2=0$，

(1) 当 $p(y)=0$ 时，$y=C$.

(2) 当 $p(y)\neq 0$ 时，上述方程变为 $y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-2p=0$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{p}=2\frac{\mathrm{d}y}{y}$，积分得 $p=C_1y^2$，即 $y'=C_1y^2$，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=C_1\mathrm{d}x$，再次积分得 $-\frac{1}{y}=C_1x+C_2$，因此通解为 $y=-\frac{1}{C_1x+C_2}$.

例 9【解】 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，于是 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=p^3+p$，这是可分离变量的微分方程，分离变量得 $\frac{\mathrm{d}p}{1+p^2}=\mathrm{d}y$，积分得

$$\arctan p=y+C_1\Rightarrow p=\tan(y+C_1)\Rightarrow y'=\tan(y+C_1),$$

$\frac{\mathrm{d}y}{\tan(y+C_1)}=\mathrm{d}x$，再次积分得 $\ln|\sin(y+C_1)|=x+C_2$，故方程的通解为

$$\sin(y+C_1)=\mathrm{e}^{x+C_2}.$$

例 10【答案】 (D).

【解析】 根据微分方程的解的性质可知，$y_1(x)-y_3(x)$ 与 $y_2(x)-y_3(x)$ 其对应的齐次方程的两个线性无关的解，再根据微分方程的解的结构可知，

$$C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$$

是所给微分方程的通解.

例 11【解】(1)方程的特征方程为$\lambda^2-\lambda-6=0$，解得特征根$\lambda_1=3$、$\lambda_2=-2$，故方程的通解为$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$(其中$C_1$、$C_2$为任意常数)；

(2)方程的特征方程为$\lambda^2-2\lambda+1=0$，解得特征根$\lambda_1=\lambda_2=1$，故齐次方程的通解为$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$(其中C_1、C_2为任意常数)；

(3)方程的特征方程为$\lambda^2-4\lambda+5=0$，解得特征根$\lambda_{1,2}=2\pm i$，故齐次方程的通解为$y=\mathrm{e}^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$(其中$C_1$、$C_2$为任意常数)；

(4)方程的特征方程为$\lambda^2+2=0$，解得特征根$\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{2}i$，故齐次方程的通解为$y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x$(其中$C_1$、$C_2$为任意常数)；

例 12【解】特征方程为$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2=0$，即$\lambda^2(\lambda^2-2\lambda+5)=0$，解得特征根$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_{3,4}=1\pm 2i$，故所给微分方程的通解为

$y=C_1+C_2x+\mathrm{e}^x\left(C_3\cos 2x+C_4\sin 2x\right)$，其中$C_1,C_2,C_3,C_4$为任意常数.

例 13【答案】(D).

【解析】由通解表达式可知其特征根为$\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=\pm 2\mathrm{i}$，于是特征方程为

$$(\lambda-1)(\lambda^2+4)=\lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0,$$

故对应的微分方程为$y'''-y''+4y'-4y=0$，故选(D).

例 14【解】(1)方程对应的齐次方程的特征方程为$\lambda^2-2\lambda-3=0$，解得特征根$\lambda_1=3$，$\lambda_2=-1$，所以$\lambda=0$不是特征方程的根，可设特解$y^*=ax+b$，再代入原方程，解得$a=-1$，$b=\frac{1}{3}$，故原方程的特解为$y^*=-x+\frac{1}{3}$.

(2)方程对应的齐次方程的特征方程为$\lambda^2-\lambda=0$，解得特征根$\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，所以$\lambda=1$是特征方程的单根，可设特解$y^*=Axe^x$，再代入原方程，解得$A=2$，故原方程的特

解为 $y^*=2xe^x$.

(3) 方程对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-4\lambda+3=0$，解得特征根 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=3$，所以 $\lambda=1$ 是特征方程的单根，可设特解

$$y^*=x(ax+b)e^x,$$

再代入原方程，解得 $a=b=-\frac{1}{4}$，故原方程的特解为 $y^*=-\frac{1}{4}x(x+1)e^x$.

(4) 方程对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，解得特征根 $\lambda_{1,2}=\pm1$，所以 $\lambda\pm\beta i=1\pm2i$ 不是特征方程的根，可设特解

$$y^*=e^x(a\cos2x+b\sin2x),$$

再代入原方程，解得 $a=-\frac{1}{8}$，$b=\frac{1}{8}$，故原方程的特解

$$y^*=\frac{1}{8}e^x(\sin2x-\cos2x).$$

例 15【解】 对应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+1=0$，解得特征根 $\lambda_{1,2}=\pm i$，于是对应的齐次方程的通解为 $Y=C_1\sin x+C_2\cos x$.

对于方程 $y''+y=x^2+1$，0 不是特征方程的根，可设特解 $y_1^*=ax^2+bx+c$，代入方程 $y''+y=x^2+1$，解得 $a=1,b=0,c=-1$.

对于方程 $y''+y=\sin x$，$\pm i$ 是特征方程的根，可设特解 $y_2^*=x(A\sin x+B\cos x)$，代入方程 $y''+y=\sin x$ 中，解得 $A=0,B=-\frac{1}{2}$.

综上，所给方程的通解为 $y=C_1\sin x+C_2\cos x+x^2-1-\frac{1}{2}x\cos x$.

例 16【解】 对应齐次方程 $y''+2y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+2=0$，解得 $\lambda_1=-\sqrt{2}i,\lambda_2=\sqrt{2}i$，因此齐次方程的特解为 $y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x$，$C_1,C_2$ 为任意常数.

由于非齐次项为$\sin 3x$，因此非齐次方程的特解具有形式$y^*=A\sin 3x+B\cos 3x$，代入$y''+2y=\sin 3x$，得

$$-9A\sin 3x-9B\cos 3x+2A\sin 3x+2B\cos 3x=\sin 3x,$$

解得$\begin{cases}A=-\frac{1}{7},\\ B=0\end{cases}$，所以$y^*=-\frac{1}{7}\sin 3x$，非齐次方程的通解为

$$y=C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x-\frac{1}{7}\sin 3x,\ C_1,C_2\text{为任意常数.}$$

由$y(0)=1$，有$C_1=1$.

由$y'(0)=-1$，有$\sqrt{2}C_2-\frac{3}{7}=-1$，解得$C_2=-\frac{2\sqrt{2}}{7}$.

综上，满足上述初始条件的特解为$y=\cos\sqrt{2}x-\frac{2\sqrt{2}}{7}\sin\sqrt{2}x-\frac{1}{7}\sin 3x$.

例17【解】令$x=\mathrm{e}^t$，则原方程化为

$$D(D-1)y+3Dy+2y=5\sin t,$$

即$D^2y+2Dy+2y=5\sin t$，这是一个y关于t的二阶常系数非齐次线性微分方程，其对应的齐次方程为$\lambda^2+2\lambda+2=0$，解得特征根$\lambda_{1,2}=-1\pm i$，故对应的齐次方程的通解是$Y=\mathrm{e}^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$. 由于$\lambda_{1,2}=\pm i$不是特征方程的根，故设非齐次方程的特解的形式为$y^*=A\cos t+B\sin t$，代入非齐次方程解得$A=-2,B=1$，综上所给欧拉方程的通解为$y=\mathrm{e}^{-t}(C_1\cos t+C_2\sin t)-2\cos t+\sin t$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

例18【解】方程对应的齐次方程的特征值为$\lambda=2$，可设齐次方程的通解为$Y=C\cdot 2^t$，其中C为任意常数.

设原方程的特解为$y^*=At2^t$，代入原方程得$A=\frac{1}{2}$，故原方程的通解为

$$y=C\cdot 2^t+t\cdot 2^{t-1}.$$

例19【解】方程对应的齐次方程的特征值为$\lambda=1$，可设齐次方程的通解为$Y=C$，其

中 C 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*=(at+b)2^t$，代入原方程得 $a=1,b=-2$，故原方程的通解为 $y=C+(t-2)2^t$.

例 20【解析】方程对应的齐次方程的特征根为 $\lambda=1$，可设齐次方程的通解为 $Y=C$，其中 C 为任意常数.

设原方程的特解为 $y^*=3^t\left(A\cos\frac{\pi}{2}t+B\sin\frac{\pi}{2}t\right)$，代入原方程得 $A=-\frac{3}{10}$，$B=-\frac{1}{10}$，于是原方程的通解为

$$y=Y+y^*=C+3^t\left(-\frac{3}{10}\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{10}\sin\frac{\pi}{2}t\right).$$

第七章 多元函数微分学

例 1【解】 因为

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{k}{1+k^2},$$

显然极限的值随 k 的值的不同而改变，故极限不存在.

例 2【解】 (1) 因为

$$0\le\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2},$$

且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=0$，所以根据夹逼准则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

(2) 由极限运算法则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot y\right]=\lim_{(x,y)\to(0,2)}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot\lim_{y\to2}y=1\cdot2=2.$$

例 3【解】 (1) 因为 $0\le\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le x^2+y^2$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$，

所以根据夹逼准则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

(2) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1,$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=2x}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y=2x}}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^4}{4x^4+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{4x^2}{4x^2+1}=0,$$

因此极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 不存在，故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

例 4【解】 由已知可得

$$f'_x(1,1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,1)-f(1,1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\arctan\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\pi}{4},$$

$$f'_y(1,1)=\lim_{y\to1}\frac{f(1,y)-f(1,1)}{y-1}=\lim_{y\to1}\frac{e^{\pi y}\sin\pi y}{y-1}=e^{\pi}\lim_{y\to1}\frac{\sin\pi y}{y-1}=e^{\pi}\lim_{y\to1}\frac{\pi\cos\pi y}{1}=-\pi e^{\pi}.$$

例 5【解】 由已知可得 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=y+2x,\dfrac{\partial f}{\partial y}=x+3y^2$，所以

$$f_x'(0,1)=(y+2x)\big|_{(0,1)}=1,\ f_x'(1,0)=(y+2x)\big|_{(1,0)}=2\,,$$

$$f_y'(0,2)=(x+3y^2)\big|_{(0,2)}=12,\ f_y'(2,0)=(x+3y^2)\big|_{(2,0)}=2\,.$$

例 6 【解】 由已知可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y,\frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3-18xy\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1.$$

例 7 【解】 因为 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0\,.$$

例 8【答案】(C).

【解析】 由第一节例 2(1) 知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

又由于

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0\,,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0\,,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\neq 0,$$

所以函数在 $(0,0)$ 处不可微.

故选(C).

例 9【解】 由第一节例 3(1)知函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

又由于

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{|x|}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}y\sin\frac{1}{|y|}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在，且

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)-[f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y]}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

例 10 【解】 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 两边对 y 积分，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x)$.

由 $f(x,0)=x$ 知， $f_x'(x,0)=1$，于是 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,0)}=\varphi(x)=1$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{1}{2}y^2+1.$$

上式两边再对 x 积分，得

$$z=f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+\psi(y),$$

又 $f(0,y)=y^2$，所以 $\psi(y)=y^2$，从而

$$f(x,y)=\frac{1}{2}x^2y+\frac{1}{2}xy^2+x+y^2.$$

例 11【解】由已知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=2x\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}+2z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x\sin y$$

$$=2x(1+2x^2\sin^2 y)\mathrm{e}^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=2y\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}+2z\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}\cdot x^2\cos y$$

$$=2(y+x^4\sin y\cos y)\mathrm{e}^{x^2+y^2+x^4\sin^2 y}.$$

例 12【解】由已知 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2+f_2'\cdot\sin y+g+x\cdot g'\cdot\frac{\mathrm{e}^y}{x}=2f_1'+\sin yf_2'+g+\mathrm{e}^yg'$，

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2[f_{11}''\cdot(-1)+f_{12}''\cdot x\cos y]+\cos yf_2'+\sin y[f_{21}''\cdot(-1)+f_{22}''\cdot x\cos y]$$

$$+g'\cdot\mathrm{e}^y\ln x+\mathrm{e}^yg'+\mathrm{e}^yg''\cdot\mathrm{e}^y\ln x$$

$$=-2f_{11}''+(2x\cos y-\sin y)f_{12}''+\cos yf_2'+x\sin y\cos yf_{22}''$$

$$+\mathrm{e}^y(1+\ln x)g'+\mathrm{e}^{2y}\ln x\cdot g''.$$

例 13 设 $z=\mathrm{e}^u\sin v,u=xy,v=x+y$，求 $\mathrm{d}z$.

【考查知识点】二元函数计算全微分.

【解】因为 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}(\mathrm{e}^u\sin v)=\mathrm{e}^u\sin v\mathrm{d}u+\mathrm{e}^u\cos v\mathrm{d}v$，且

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}(xy)=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y,\mathrm{d}v=\mathrm{d}(x+y)=\mathrm{d}x+\mathrm{d}y,$$

所以

$$\mathrm{d}z=(\mathrm{e}^u\sin v\cdot y+\mathrm{e}^u\cos v)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^u\sin v\cdot x+\mathrm{e}^u\cos v)\mathrm{d}y$$

$$=\mathrm{e}^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)]\mathrm{d}y.$$

例 14 **【解】**令 $F(x,y)=x^2+y^2-\sin(xy)$，则

$$F_x'=2x-y\cos(xy),F_y'=2y-x\cos(xy),$$

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x'}{F_y'}=-\dfrac{2x-y\cos(xy)}{2y-x\cos(xy)}$.

例 15【解】令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^{-xy}-2z+\mathrm{e}^{z}$，则

$$F_x'=-y\mathrm{e}^{-xy},F_y'=-x\mathrm{e}^{-xy},F_z'=-2+\mathrm{e}^{z},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{-y\mathrm{e}^{-xy}}{-2+\mathrm{e}^{z}}=\frac{y\mathrm{e}^{-xy}}{\mathrm{e}^{z}-2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{-x\mathrm{e}^{-xy}}{-2+\mathrm{e}^{z}}=\frac{x\mathrm{e}^{-xy}}{\mathrm{e}^{z}-2}.$$

例 16【答案】(D).

【解析】设 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，则

$$F_x'=y+z\mathrm{e}^{xz},F_y'=x-\frac{z}{y},F_z'=-\ln y+x\mathrm{e}^{xz},$$

$$F_x'(0,1,1)=2\neq 0,F_y'(0,1,1)=-1\neq 0,F_z'(0,1,1)=0,$$

所以方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$ 在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域内可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z),y=y(x,z)$. 故选(D).

例 17【解】方法一　令 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=x^2+y^2-uv\\G(x,y,u,v)=xy-u^2+v^2\end{cases}$，则

$$F_x'=2x,F_y'=2y,F_u'=-v,F_v'=-u,$$

$$G_x'=y,G_y'=x,G_u'=-2u,G_v'=2v,$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x' & F_v'\\G_x' & G_v'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\G_u' & G_v'\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}2x & -u\\y & 2v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-v & -u\\-2u & 2v\end{vmatrix}}=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u' & F_x'\\ G_u' & G_x'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u' & F_v'\\ G_u' & G_v'\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}-v & 2x\\ -2u & y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-v & -u\\ -2u & 2v\end{vmatrix}}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}.$$

方法二 方程组两端对 x 求导得 $\begin{cases}2x-v\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ y-2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}$ 解得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}.$$

方法三 方程组两边求全微分得 $\begin{cases}2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y-v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v=0,\\ y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y-2u\mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v=0,\end{cases}$ 解得

$$\mathrm{d}u=\frac{(4vx+uy)\mathrm{d}x+(4yv+ux)\mathrm{d}y}{2(u^2+v^2)},\mathrm{d}v=\frac{(4ux-vy)\mathrm{d}x+(4uy-vx)\mathrm{d}y}{2(u^2+v^2)},$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{4xv+yu}{2(u^2+v^2)},\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{4xu-yv}{2(u^2+v^2)}$.

例 18【答案】(B).

【解析】由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\cos(x^2+y^2)-1}=1$，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos(x^2+y^2)-1=0$，则

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$，又 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域内连续，从而 $f(0,0)=0$.

又 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\cos(x^2+y^2)-1}=1$，根据极限的保号性知，存在 $\delta>0$，

当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有 $\dfrac{f(x,y)}{\cos(x^2+y^2)-1}>0$，又由于 $\cos(x^2+y^2)-1<0$，

从而 $f(x,y)<0$，即 $f(x,y)<f(0,0)$，所以点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

故选(B).

例 19【答案】(A).

【解析】由 $z=f(x)g(y)$，则

$$z_x'=f'(x)g(y),z_y'=f(x)g'(y),$$

$$z_{xx}''=f''(x)g(y),z_{xy}''=f'(x)g'(y),z_{yy}''=f(x)g''(y),$$

从而 $A=f''(0)g(0), B=f'(0)f'(0), C=f(0)g''(0)$，所以

$$AC-B^2=f''(0)g''(0)f(0)g(0)-[f'(0)g'(0)]^2=f''(0)g''(0)f(0)g(0),$$

根据二元函数存在极值的充分条件，当 $AC-B^2>0$，且 $A>0$，即 $f''(0)<0, g''(0)>0$ 时，函数 $z=f(x)g(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值.

故选(A).

例 20【解】 由已知条件，有

$$f_x'(x,y)=\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}-x^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f_y'(x,y)=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

令 $f_x'(x,y)=0, f_y'(x,y)=0$，解得驻点 $(1,0),(-1,0)$.

$$f_{xx}''(x,y)=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, f_{xy}''(x,y)=y(x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}, f_{yy}''(x,y)=x(y^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在点 $(1,0)$ 处，

$$A=f_{xx}''(1,0)=-2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, B=f_{xy}''(1,0)=0, C=f_{yy}''(1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

由于 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0$，且 $A<0$，故 $f(1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为极大值.

在点 $(-1,0)$ 处，

$$A=f_{xx}''(-1,0)=2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}, B=f_{xy}''(-1,0)=0, C=f_{yy}''(-1,0)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},$$

由于 $AC-B^2=2\mathrm{e}^{-1}>0$，且 $A>0$，故 $f(-1,0)=-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ 为极小值.

例 21【解】 构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)$，令

$$\begin{cases} F_x'=yz-\dfrac{\lambda}{x^2}=0, \\ F_y'=xz-\dfrac{\lambda}{y^2}=0, \\ F_z'=xy-\dfrac{\lambda}{z^2}=0, \\ F_\lambda'=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-1=0, \end{cases}$$

解得 $x=y=z=3$，因此所求最小值为 $f(3,3,3)=27$.

例 22【解】 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4,y>0\}$，令 $\begin{cases} f_x'=2x-2xy^2=0, \\ f_y'=4y-2x^2y=0, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{2}, \\ y=1, \end{cases}$ 其对应的函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

在边界 $y=0(-2\le x\le 2)$，函数 $f(x,0)=x^2,x\in[-2,2]$ 的最大值为 $f(\pm 2,0)=4$，最小值为 $f(0,0)=0$.

在边界 $x^2+y^2=4,y>0$，构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+2y^2-x^2y^2+\lambda(x^2+y^2-4),$$

令 $\begin{cases} F_x'=2x-2xy^2+2\lambda x=0, \\ F_y'=4y-2x^2y+2\lambda y=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2-4=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}, \\ y=\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0, \\ y=2, \end{cases}$，其对应的函数值为

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4},\ f(0,2)=8.$$

比较以上函数值，可得函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值为 8，最小值为 0.

第八章 二重积分

例1【答案】(C).

【解析】设函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}$，则 $f(x,y)$ 在区域

$$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$$

上连续，从而 $f(x,y)$ 可积，且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

该极限与点 (ξ_i,η_i) 的取法和对 D 的分法无关，于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(n+i)(n+j)}&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n+j}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{j}{n}}\right)\\&=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{1+y}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y .\end{aligned}$$

故选(C).

例 2【答案】(A).

【解析】在区域 D 上，$0\le x^2+y^2\le\dfrac{1}{2}$，从而

$$(x^2+y^2)^2\le x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

$$\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)^2}\ge\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\ge\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

由二重积分的性质，得

$$\iint_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint_D\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint_D\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

即 $I_1 < I_2 < I_3$.

故选(A).

例 3【答案】(B).

【解析】对于 I_2 和 I_3，由于被积函数相同，且

$$\{(x,y)\big||x|+|y|\le 1\}\subset\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\},$$

从而 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即 $I_2 < I_3$.

对于 I_1 与 I_2，由于积分区域相同，且 $0\le x^2+y^2<1$，则

$$0\le \ln(1+x^2+y^2)\le x^2+y^2\le\sqrt{x^2+y^2},$$

从而 $\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{|x|+|y|\le 1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即 $I_1 < I_2$.

综上可得 $I_1 < I_2 < I_3$.

故选(A).

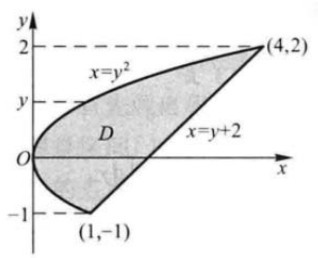
例 4【解】方法一 积分区域如图所示，先对 x 后对 y 积分，则

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(\frac{x^2}{2}y\right)\Bigg|_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(y^3+4y^2+4y-y^5)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$

$$=\frac{45}{8}.$$

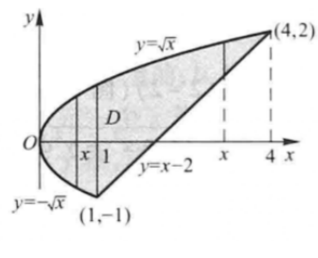


方法二 积分区域如图所示，先对 y 后对 x 积分，令

$$D_1=\{(x,y)\,|\,-\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x},0\le x\le 1\},$$

$$D_2=\{(x,y)\,|\,x-2\le y\le\sqrt{x},1\le x\le 4\},$$

则



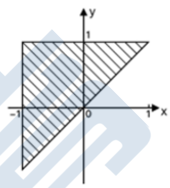
$$\iint\limits_{D} xy\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} xy\mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y + \int_1^4 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{\sqrt{x}} xy\mathrm{d}y$$

$$= \frac{45}{8}.$$

例 5【解】积分区域如图，先对 y 后对 x 积分，则

$$\iint\limits_{D} y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}y$$



$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}\mathrm{d}(1+x^2-y^2)$$

$$= -\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}[(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}]_x^1\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}.$$

例 6【答案】(A).

【解析】由题意可知积分区域由两部分组成，其中

$$D_1 = \left\{(x,y)\middle|0\le y\le\frac{1}{2}x^2, 0\le x\le 2\right\},$$

$$D_2 = \{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{8-x^2}, 2\le x\le 2\sqrt{2}\},$$

从而

$$D = D_1\cup D_2 = \{(x,y)\,|\,\sqrt{2y}\le x\le\sqrt{8-y^2}, 0\le y\le 2\},$$

因此

$$\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_2^{2\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^2\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

故选(A).

例 7【答案】(C).

【解析】令 $\iint\limits_{D} uf(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = A$，则 $f(x,y)=xy+A$，从而

$$A = \iint\limits_{D} xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D} x(xy+A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}} y\mathrm{d}y + A\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y$$

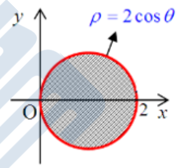
$$=\frac{1}{8}+\frac{2}{5}A,$$

解得 $A=\frac{5}{24}$，因此 $f(x,y)=xy+\frac{5}{24}$.

故选(C).

例8【解】在极坐标系中，积分区域可表示为

$$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 2\cos\theta\right\},$$



所以

$$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{9}.$$

例 9【答案】$\frac{3\pi^2}{64}$.

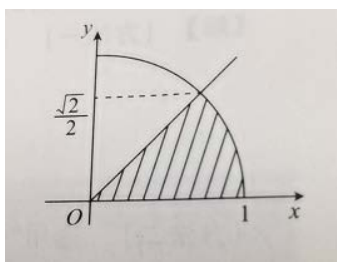
【解析】在极坐标系中，积分区域可表示为 $D=\left\{(\rho,\theta)\middle|0\le\theta\le\frac{\pi}{4},1\le\rho\le 2\right\}$，所以

$$\iint\limits_D\arctan\frac{y}{x}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\arctan(\tan\theta)\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\iint\limits_D\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho\mathrm{d}\rho=\frac{3\pi^2}{64}.$$

例10【答案】(C).

【解析】由已知条件，积分区域如图所示，则 D 可表示为



$$D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\frac{\sqrt{2}}{2},y\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\},$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

故选(C).

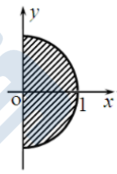
例 11【答案】(A).

【解析】由于积分区域关于 x 轴对称，且 $x^2\sin y$ 关于 y 为奇函数，所以

$$\iint_D x^2\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

故选(A).

例 12【解】如图所示，积分区域 D 关于 x 轴对称，$\dfrac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ 是关于 y 的偶函数，$\dfrac{x^2y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$ 是关于 y 的奇函数，所以



$$\iint_D\frac{2+x^2y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\frac{x^2y}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{\rho}{1+\rho}\mathrm{d}\rho+0=2\pi(1-\ln 2).$$

例 13【答案】$\dfrac{\pi R^4}{4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$.

【解析】方法一　由于积分区域 D 关于直线 $y=x$ 对称，则由轮换对称性得

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以

$$\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left[\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

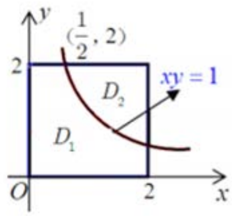
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

方法二 在极坐标系中，积分区域可表示为$D=\{(\rho,\theta)\,|\,0\le\theta\le2\pi,0\le\rho\le R\}$，则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}\right)\rho\mathrm{d}\rho\\&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\int_0^R\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\\&=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).\end{aligned}$$

例 14【解】由曲线$xy=1$将积分区域分为D_1和D_2，如图所示，则

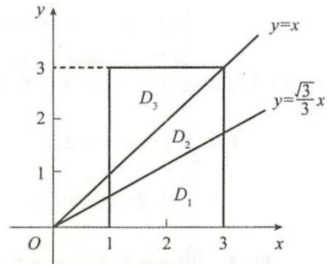


$$\max\{xy,1\}=\begin{cases}1, & (x,y)\in D_1,\\ xy, & (x,y)\in D_2.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_2}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_1+D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_{\frac{1}{2}}^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^2(xy-1)\mathrm{d}y+4\\&=\frac{19}{4}+\ln2.\end{aligned}$$

例 15【解】由直线$y=x$及$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$将积分区域分为D_1,D_2和D_3，如图所示，则



$$I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}+\iint_{D_3}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\frac{3}{\cos\theta}}\frac{1}{\rho^4}\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\frac{4}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{2}{9}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi+6-3\sqrt{3}}{54}.$$

例 16【解】由已知

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=\lim_{R\to+\infty}2\pi\int_0^R\rho\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\pi\int_0^R\mathrm{e}^{-\rho^2}\cos\rho^2\mathrm{d}(\rho^2)\xlongequal{\rho^2=t}\lim_{R\to+\infty}\pi\int_0^{R^2}\mathrm{e}^{-t}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{-R^2}\sin R^2-\mathrm{e}^{-R^2}\cos R^2+1)$$

$$=\frac{\pi}{2}.$$

第九章 无穷级数

例 1【解】由于

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

因此

$$s_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$，所以级数 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ 收敛于1.

例 2【解】(1) 由于 $s_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2^i}+\frac{1}{3^i}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$，

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right]=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}$.

(2) 由于 $u_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$，则

$$s_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]=\frac{1}{4}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}$.

(3) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\neq 0$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot\sin\frac{\pi}{2n}$ 发散.

(4) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}\cdot n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}\cdot n^{\frac{1}{n}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}}\sqrt[n]{n} = \frac{1}{e^0} = 1 \neq 0,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ 发散.

例 3【答案】(C).

【解析】如果 $k=0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ku_n$ 收敛，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 未必收敛，(A)不正确；

如果 $u_n=(-1)^n$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 发散，(B)，(D)均不正确.

故选(C).

例 4【解】(1) 由于 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} > \dfrac{1}{\sqrt[3]{(n+2)^3}} = \dfrac{1}{n+2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2}$ 发散，由比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$ 发散.

(2) 由于 $\dfrac{3+(-1)^n}{2^n} < \dfrac{4}{2^n}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛，由比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3+(-1)^n}{2^n}$ 收敛.

(3) 当 $a=1$ 时，$u_n=\dfrac{1}{1+a^n}=\dfrac{1}{2}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散；

当 $0<a<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+a^n}=1\neq 0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+a^n}$ 发散；

当 $a>1$ 时，$0<\dfrac{1}{1+a^n}<\dfrac{1}{a^n}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^n$ 收敛，由比较判别法可知级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ 收敛.

例 5【解】(1)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\cos\frac{2}{n}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{2}}{n}}{\frac{1}{n}}=\sqrt{2},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法的极限形式可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{1-\cos\frac{2}{n}}$ 发散.

(2)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}=1,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较判别法的极限形式可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛.

例 6【解】(1)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1,$$

由比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(2)由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2n+1)!!}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{(2n-1)!!}{3^n n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3(n+1)}=\frac{2}{3}<1,$$

由比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{3^n\cdot n!}$ 收敛.

例 7【解】(1)由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2+(-1)^n}{2^n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n},$$

因为$2+(-1)^n$有界，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+(-1)^n}=1$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\dfrac{1}{2}<1$，

由根值判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛.

(2) 由于

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{2n+n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^{2+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^2\left(\frac{3n+1}{3n-2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-2}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{3n-2}\right)^{\frac{3n-2}{3}\cdot\frac{3n}{3n-2}}=\mathrm{e}>1,$$

由根值判别法可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-2}\right)^{2n+1}$发散.

例 8【解】 设$f(x)=\dfrac{1}{x\ln^p x}$，显然函数$f(x)$单调递减且$f(x)>0,x\in[2,+\infty)$.

当$p=1$时，

$$\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}(\ln x)=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty},$$

极限不存在，反常积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$发散.

当$p\neq1$时，

$$\int_2^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x=\int_2^{+\infty}\frac{1}{\ln^p x}\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{1-p}\frac{1}{\ln^{p-1}x}\Bigg|_2^{+\infty},$$

若$p>1$时，反常积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x$收敛；若$p<1$时，反常积分$\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x$发散.

综上当$p>1$时，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}$收敛；当$p\le1$时，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^p n}$发散.

例 9【解】 (1) 设$f(x)=\dfrac{1}{x-\ln x}$，则$f'(x)=\dfrac{1-x}{x(x-\ln x)^2}<0(x>1)$.

因此$u_n=\dfrac{1}{n-\ln n}$单调递减，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\ln n}=0$，故级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n-\ln n}$收敛.

(2)设$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0(x>\mathrm{e})$.

因此$u_n=\dfrac{\ln n}{n}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$收敛.

例 10【答案】(A).

【解析】由于$\left|\dfrac{\sin na}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2}$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin na}{n^2}$绝对收敛.

故选(A).

例 11【答案】(D).

【解析】设$u_n=(-1)^n\sqrt{n}\sin\dfrac{1}{n^\alpha}$，则当$n\to\infty$时，$|u_n|\sim\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$，从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$的收敛性相同，故有$\alpha-\dfrac{1}{2}>1$，即$\alpha>\dfrac{3}{2}$.

又由级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$条件收敛可知$0<2-\alpha\le1$，即$1\le\alpha<2$.

综上可得$\dfrac{3}{2}<\alpha<2$.

故选(D).

例 12【解】因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1,$$

所以收敛半径$R=\dfrac{1}{\rho}=1$.

当$x=-1$时，原级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n+1)(-1)^n$，发散；

当$x=1$时，原级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n(n+1)$，发散.

因此幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}n(n+1)x^n$的收敛域为$(-1,1)$.

例13【解】 记$u_n(x)=\dfrac{(x-1)^{2n}}{2^n\cdot n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n(x-1)^{2n+2}}{2^{n+1}\cdot(n+1)(x-1)^{2n}}=\frac{(x-1)^2}{2},$$

当$\dfrac{(x-1)^2}{2}<1$，即$|x-1|<\sqrt{2}$时，级数收敛；当$|x-1|>\sqrt{2}$时，级数发散. 所以幂级数的收敛半径$R=\sqrt{2}$，收敛区间为$|x-1|<\sqrt{2}$，即$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

当$x=1\pm\sqrt{2}$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，发散.

因此幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{2^n\cdot n}$的收敛域为$(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$.

例14【答案】(B).

【解析】 因为级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$条件收敛，即$x=2$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$条件收敛，所以$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛半径为1，收敛区间为$(0,2)$.

幂级数逐项求导不改变收敛区间，则$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^n$的收敛区间仍为$(0,2)$，因而$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-1)^n$的收敛点和发散点.

故选(B).

例15【解】(1)由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1,$$

所以收敛半径$R=1$，收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=-1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n$，发散；当$x=1$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}n$，发散. 故幂

级数$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$的收敛域为$(-1,1)$.

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, x\in(-1,1)$，则

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t\right)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x},$$

因此

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}, x\in(-1,1).$$

(2) 由于

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n}{2^{n+1}\cdot(n+1)}=\frac{1}{2},$$

所以收敛半径$R=2$，收敛区间为$(-2,2)$.

当$x=-2$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛；当$x=2$时，原级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散.

故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}x^n$的收敛域为$[-2,2)$.

令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}x^n, x\in[-2,2)$，则$S(0)=0$，

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}x^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x},$$

所以

$$S(x)=S(x)-S(0)=\int_0^x S'(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1}{2-t}\mathrm{d}t=\ln 2-\ln(2-x), x\in[-2,2).$$

例 16【解】由于$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}=0$，故幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

由已知可得

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=y(x),$$

即 $y(x)$ 满足微分方程 $y''-y=0$.

微分方程 $y''-y=0$ 对应的特征方程为 $\lambda^2-1=0$，解得 $\lambda=\pm1$，故齐次方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$.

又 $y(0)=1,y'(0)=0$，解得 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$，因此 $y(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$. 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=y(x)-1=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-1,x\in(-\infty,+\infty).$$

例 17【解】(1) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$，所以考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$，且收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n$，则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}x^n=2x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^n,$$

其中令 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则 $\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$，从而 $S_1(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$，所以 $S(x)=\frac{2x}{(1-x)^2}-\frac{x}{1-x},x\in(-1,1)$.

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=4-1=3$.

(2) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(\sqrt{2})^{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(\sqrt{2})^{2n-1}}$，所以考虑幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$，且收敛域为 $(-1,1)$.

令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}$，则 $S(0)=0$，

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}t+S(0)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1).$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(\sqrt{2}+1).$

例 18【解】因为

$$f(x)=\frac{x}{2+x-x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x},$$

又

$$\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}},|x|<2,$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,|x|<1,$$

所以

$$f(x)=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2^n}-(-1)^n\right]x^n,|x|<1.$$

例 19【答案】1.

【解析】$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos 2x\mathrm{d}x=1.$

例 20【答案】$\frac{3}{2}$.

【解析】由于 $x=1$ 为间断点，根据狄利克雷收敛定理 $f(x)$ 在 $x=1$ 处收敛于

$$\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{3}{2}.$$

例 21【答案】$-\frac{1}{4}$.

【解析】由已知条件，将 $f(x)$ 展开的是正弦级数，可以看成是周期为 2 的函数，所作延拓为奇延拓，因此

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}.$$

例 22【解】因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $b_n=0, n=1,2,\cdots$，且

$$a_0=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}0, & n\text{为偶数},\\ \dfrac{-4}{n^2\pi^2}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

由于函数 $f(x)=2+|x|$ 在 $x\in[-1,1]$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件，故

$$f(x)=2+|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$$

令 $x=0$，则 $f(0)=2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=0$，解得 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

又由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

解得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

第十章 空间解析几何、方向导数与多元微分在几何中的应用(数学一)

例 1【解】因为 $\overrightarrow{AB}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$，所以

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2.$$

于是

$$e=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

例 2【解】(1) 由向量积的定义知，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 既垂直于 $\boldsymbol{a}$ 又垂直于 $\boldsymbol{b}$，且

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&2\\-1&1&0\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

又 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{9}=3$，故所求的单位向量为

$$\boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{3}(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

(2) 由向量积的几何意义知，以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\frac{1}{2}\cdot 3=\frac{3}{2}.$$

例 3【解】由题设知所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 既垂直于向量 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$，又垂直于已知平面的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,1)$，则

$$n=\overrightarrow{M_1M_2}\times n_1=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,-1),$$

故所求平面方程为$2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$，即

$$2x-y-z=0.$$

例 4【解】由题设知所求平面与已知平面平行，可设平面方程为$2x-5y-3z+D=0$，在已知平面上任取点$M(1,1,1)$，则点M到平面$2x-5y-3z+D=0$的距离为

$$\sqrt{38}=\frac{|2-5-3+D|}{\sqrt{4+25+9}},$$

解得$D_1=44, D_2=-32$，故所求平面方程为

$$2x-5y-3z+44=0\text{和}2x-5y-3z-32=0.$$

例 5【解】所求直线平行于已知两平面，因此所求直线的方向向量为

$$s=(1,0,2)\times(0,1,-3)=(-2,3,1),$$

故所求的直线方程为

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-5}{3}=z-2.$$

例 6【解】方法一 过点$P(2,1,3)$作垂直于已知直线L的平面，则该平面的方程为

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0,$$

又直线L的参数方程为

$$x=3t-1, y=2t+1, z=-t,$$

代入平面方程解得$t=\frac{3}{7}$，可得该平面与直线L的交点为$\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$，从而所求直线的方向向量为$s=\left(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}\right)$，故所求直线的方程为$\frac{x-2}{-\frac{12}{7}}=\frac{y-1}{\frac{6}{7}}=\frac{z-3}{-\frac{24}{7}}$，即

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

方法二 设所求直线的方向向量 $\boldsymbol{s}_1=(m,n,p)$，且直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}_2=(3,2,-1)$，以点 $P(2,1,3)$ 为始点，直线 L 上点 $Q(-1,1,0)$ 为终点的向量为 $\overrightarrow{PQ}=(-3,0-3)$.

由于三向量 $\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 共面，则 $\begin{vmatrix} m & n & p \\ -3 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0$，即 $p-m+2n=0$.

又所求直线与 L 互相垂直，则 $3m+2n-p=0$，从而解得 $m=\dfrac{1}{2}p,n=-\dfrac{1}{4}p$，故所求直线的方程为

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

例 7【解】直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,-1,-1)\times(2,-1,1)=(-2,-3,1)$，又 $M_0(1,1,1)\in L$，从而直线 L 的点向式方程为

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{1},$$

故点 M 到直线 L 的距离为 $d=\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\dfrac{|(0,-2,1)\times(-2,-3,1)|}{\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+1^2}}$

$$=\frac{|(1,-2,-4)|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

例 8【解】设 $M(x,y,z)$ 是曲面上任一点，根据题意有 $\dfrac{|\overrightarrow{OM}|}{|\overrightarrow{M_0M}|}=\dfrac{1}{2}$，即

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

故所求方程为

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}.$$

例 9【解】以 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替双曲线方程 $4x^2-9y^2=36$ 中的 y，得该双曲线绕 x 轴旋转一周而生成的旋转曲面方程为 $4x^2-9(\pm\sqrt{y^2+z^2})^2=36$，即

$$4x^2-9(y^2+z^2)=36.$$

以$\pm\sqrt{x^2+z^2}$代替双曲线方程$4x^2-9y^2=36$中的x，得该双曲线绕y轴旋转一周而生成的旋转曲面程为$4(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2-9y^2=36$，即

$$4(x^2+z^2)-9y^2=36.$$

例 10【解】将$z=x^2+y^2$代入$x^2+y^2+2z^2=1$得

$$x^2+y^2+2(x^2+y^2)^2=1,$$

即$x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$为所求柱面方程.

例 11【解】方法一　直线L的方向向量$\boldsymbol{s}=(1,1,-1)$，平面π的法向量$\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，设平面π^*过直线L且垂直于平面π，其法向量为$\boldsymbol{n}^*$，则$\boldsymbol{n}^*\perp\boldsymbol{s}$且$\boldsymbol{n}^*\perp\boldsymbol{n}$，从而

$$\boldsymbol{n}^*=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\1&-1&2\end{vmatrix}=(1,-3,-2),$$

又直线L上的点$P(1,0,1)$在平面π^*上，故π^*的方程为$(x-1)-3(y-0)-2(z-1)=0$，即

$$x-3y-2z+1=0.$$

因此所求投影直线L_0的方程为$\begin{cases}x-3y-2z+1=0,\\x-y+2z-1=0.\end{cases}$

将L_0写成参数方程$\begin{cases}x=2y,\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1).\end{cases}$则$L_0$绕$y$轴旋转一周所得的曲面方程为

$$x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2=\frac{17}{4}y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}.$$

方法二　由于直线L的方程可改写为$\begin{cases}x-y-1=0,\\y+z-1=0.\end{cases}$

过直线L的平面束方程为$(x-y-1)+\lambda(y+z-1)=0$，即

$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(1+\lambda)=0.$$

设平面 π^* 过直线 L 且垂直于平面 π，从而 $1-(\lambda-1)+2\lambda=0$，解得 $\lambda=-2$，则平面 π^* 的方程为 $x-3y-2z+1=0$.

因此所求投影直线 L_0 的方程为 $\begin{cases} x-3y-2z+1=0, \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

旋转曲面方程同方法一.

例 12【答案】$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

【解析】因为 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,2,3)}=\left.\dfrac{x}{3}\right|_{(1,2,3)}=\dfrac{1}{3}$，同理 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,2,3)}=\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,2,3)}=\dfrac{1}{3}$，故

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 13【答案】$(1,1,1)$.

【解析】令 $u=xy+\dfrac{z}{y}$，则

$$u_x'\big|_{(2,1,1)}=y\big|_{(2,1,1)}=1, u_y'\big|_{(2,1,1)}=\left.\left(x-\frac{z}{y^2}\right)\right|_{(2,1,1)}=1, u_z'\big|_{(2,1,1)}=\left.\frac{1}{y}\right|_{(2,1,1)}=1,$$

所以 $\left.\mathbf{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\right|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$.

例 14【解】$(2,1,3)$ 是曲线对应 $t=1$ 的点，则曲线在该点处切线的方向向量为

$$\boldsymbol{s}=(x'(t),y'(t),z'(t))\big|_{t=1}=(4,1,6).$$

因此切线方程为

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-3}{6}.$$

法平面方程为 $4(x-2)+(y-1)+6(z-3)=0$，即

$$4x+y+6z-27=0.$$

例 15【解】抛物面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的切平面法向量为

$$\boldsymbol{n}=(z_x',z_y',-1)\big|_{(1,2)}=(2,4,-1).$$

因此切平面方程为 $2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0$，即

$$2x+4y-z-5=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-5}{-1}.$$

例 16【解】 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-6$，则在点 $(1,1,1)$ 处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(F_x',F_y',F_z')\big|_{(1,1,1)}=(2,4,6).$$

因此切平面方程为 $2(x-1)+4(y-1)+6(z-1)=0$，即

$$x+2y+3z-6=0.$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}.$$

第十一章 三重积分、曲线积分与曲面积分（数学一）

例 1【解】

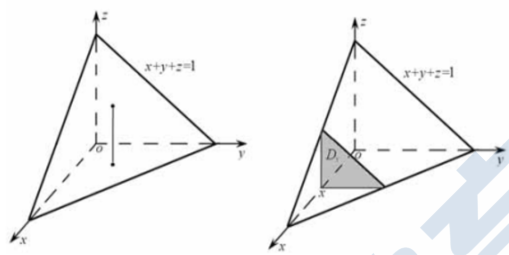


图 11-1(a)　　　　图 11-1(b)

方法一　“先一后二”如图 11-1(a)所示，将 Ω 投影在 xOy 面上，其投影区域 D_{xy} 由直线 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成的三角形，即

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\},$$

过 D_{xy} 内任一点 (x,y) 作平行于 z 轴的直线，交 Ω 的上方边界为 $z=1-x-y$，下方边界为 $z=0$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{24}.$$

方法二　“先二后一”如图 11-1(b)，将空间区域 Ω 向 x 轴投影，可得 x 的变化范围为 $[0,1]$，过点 $x\in[0,1]$ 作平行 yOz 面的平面，并截得 Ω 的截面 D_x 为一直角三角形区域，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}(1-x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{24}.$$

例 2【解】由已知空间闭区域可表示为

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2},-c\le z\le c\right.\right\}.$$

如图 11-2 所示，被积函数仅是单变量 z 的函数，则

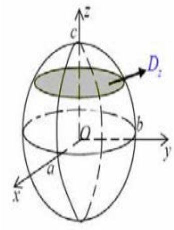


图 11-2

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\cdot\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4}{15}\pi abc.$$

例 3【解】由已知积分区域 Ω 在柱面坐标下可表示为

$$\Omega=\left\{(\rho,\theta,z)\left|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},0\le\rho\le 2\cos\theta,0\le z\le a\right.\right\},$$

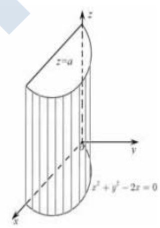


图 11-4

于是

$$I=\iiint_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^{a}z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{8a^2}{9}.$$

例 4【解】由已知积分区域 Ω 在球面坐标下可表示为

$$\Omega=\left\{(r,\varphi,\theta)\left|\cos\varphi\le r\le 2\cos\varphi,0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},0\le\theta\le 2\pi\right.\right\},$$

于是

$$I=\iiint_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}r^3\mathrm{d}r$$

$$=\frac{15\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{5\pi}{4}.$$

例 5【答案】(C).

【解析】积分区域Ω_1关于 yOz, zOx 面对称，所以

$$\iiint_{\Omega_1} x\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega_1} y\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}v=0,\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}v.$$

又积分区域Ω_2具有轮换对称性，则$\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega_2} z\mathrm{d}v$，所以

$$\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}v.$$

故选(C).

例 6【答案】$\dfrac{4\pi}{15}(m^2+n^2+p^2)$.

【解析】由于空间区域Ω关于 xOy, yOz, zOx 面对称，且具有轮换对称性，所以

$$\iiint_{\Omega} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

$$\iiint_{\Omega} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}(mx+ny+pz)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint_{\Omega}(m^2x^2+n^2y^2+p^2z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\frac{m^2+n^2+p^2}{3}\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\frac{m^2+n^2+p^2}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r\\&=\frac{4\pi}{15}(m^2+n^2+p^2).\end{aligned}$$

例 7【答案】$\dfrac{2}{3}$.

【解析】由已知

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 z\cdot\pi z\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\pi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v = \int_0^1 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \pi z \mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi,$$

故 $\bar{z} = \dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi}{\frac{1}{2}\pi} = \dfrac{2}{3}$.

例 8【解】 取上半球面的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，则它在 xOy 面上的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}.$$

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$，得

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

则上半球面的表面积为

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2 + y^2 \le a^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi a^2.$$

因此整个球面的表面积为 $4\pi a^2$.

例 9【解】方法一 曲线 L 的方程为 $y = \sqrt{a^2 - x^2}\,(0 \le x \le a)$，于是

$$\int_L xy\mathrm{d}s = \int_0^a x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2} \mathrm{d}x = a\int_0^a x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}a^3.$$

方法二 曲线 L 的参数方程为 $x = a\cos t, y = a\sin t \left(0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\int_L xy\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t \cdot a\sin t \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a^3 \sin^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}a^3.$$

方法三 曲线 L 的极坐标方程为 $\rho = a\left(0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right)$，于是

$$\int_L xy\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho\cos\theta \cdot \rho\sin\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\theta = a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}a^3.$$

例 10【解】由积分曲线 L 既关于 x 轴，也关于 y 轴对称，函数 $2xy^2$ 是关于 x 的奇函数，则

$$\oint_L 2xy^2\mathrm{d}s = 0,$$

所以

$$\oint_L (2xy^2+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s = \oint_L (3x^2+4y^2)\mathrm{d}s = 12\oint_L \left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s$$

$$=12\oint_L \mathrm{d}s = 12l.$$

例 11【解】曲线 L 的参数方程为 $x=2\cos t, y=\sin t$，t 从 0 到 π，且 $x^2+4y^2=4$，所以

$$\int_L \frac{(x+4y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x}{x^2+4y^2} = \frac{1}{4}\int_L (x+4y)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}[(2\cos t+4\sin t)\cos t+(2\cos t-\sin t)(-2\sin t)]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

例 12【解】(1) 曲线 L 方程为 $y=x^2$，x 从 0 到 1，则

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y = \int_0^1 [x\cdot x^2+(x^2-x)\cdot 2x]\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

(2) 曲线 L 方程为 $x=y^2$，y 从 0 到 1，则

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y = \int_0^1 [y^2y\cdot 2y+(y-y^2)]\mathrm{d}y = \frac{17}{30}.$$

(3) 曲线 L 参数方程为 $x=1+\cos\theta, y=\sin\theta$，$\theta$ 从 π 到 $\dfrac{\pi}{2}$，则

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}\{-(1+\cos\theta)\sin^2\theta+[\sin\theta-(1+\cos\theta)]\cos\theta\}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(1+\cos\theta-\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}.$$

(4) 在 OB 上，曲线 L 方程为 $y=0$，x 从 0 到 1；在 BA 上，曲线 L 方程为 $x=1$，y 从 0 到 1，则

$$\int_L xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=\int_{OB}xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y+\int_{BA}xy\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y$$

$$=0+\int_0^1(y-1)\mathrm{d}y=\left[\frac{y^2}{2}-y\right]_0^1=-\frac{1}{2}.$$

例 13【解】 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

记 L 所围成的闭区域为 D. 当 $(0,0)\notin \mathrm{D}$ 时，由格林公式得

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0.$$

当 $(0,0)\in D$ 时，选取适当小的 $r>0$，作位于 D 内的圆周 $l:x^2+y^2=r^2$. 记 L 和 l 所围成的闭区域为 D_1 (图 11-9)，对于复连通区域 D_1 应用格林公式，得

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0,$$

其中 l 的方向取逆时针方向. 于是

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2}\oint_l x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{r^2}\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{r^2}\times\pi r^2=2\pi.$$

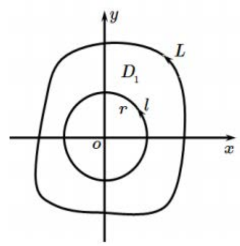


图 11-9

例 14【解】 补线 $L_1: x=0$，从点 $(0,2)$ 到点 $(0,0)$，记 L 和 L_1 所围成的闭区域为 D，由格林公式得

$$\oint_{L+L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\cdot 4\pi-\frac{1}{2}\cdot\pi$$

$$=\frac{\pi}{2},$$

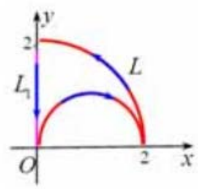


图 11-10

又

$$\int_{L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^2+x-2y)\mathrm{d}y=-2\int_2^0 y\mathrm{d}y=4,$$

所以

$$I=\oint_{L+L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{L_1} 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}-4.$$

例 15【解】 令 $P(x,y)=x^2-y, Q(x,y)=-(x+\sin^2 y)$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，因此所求积分与积分路径无关，改变积分路径沿直线 $y=x$ 积分，x 从 0 到 1，所以

$$\int_L (x^2-y)\mathrm{d}x-(x+\sin^2 y)\mathrm{d}y=\int_0^1 (x^2-2x-\sin^2 x)\mathrm{d}x=\frac{\sin 2}{4}-\frac{7}{6}.$$

例 16【解】 令 $P(x,y)=1-2xy-y^2, Q(x,y)=-(x+y)^2$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2x-2y=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，在整个 xOy 面内恒成立，因此 $(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分.

方法一 在平面上任取一定点 $M_0(0,0)$ 作为起点，而动点 $M(x,y)$ 作为终点，则所求函数为

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x \mathrm{d}x+\int_0^y -(x+y)^2\mathrm{d}y+C$$

$$=x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$$

方法二 设所求函数为 $u(x,y)$，那么由已知

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)=1-2xy-y^2,\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=-(x+y)^2,$$

$$u(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x=\int(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x=x-x^2y-xy^2+C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-x^2-2xy+C'(y)=-(x+y)^2,$$

从而$C'(y)=-y^2$，即$C(y)=\int(-y^2)\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}y^3+C$.

因此$u(x,y)=x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C$.

方法三 由于

$$\begin{aligned}(1-2xy-y^2)\mathrm{d}x-(x+y)^2\mathrm{d}y&=\mathrm{d}x-y^2\mathrm{d}y-(y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y)-(2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y)\\&=\mathrm{d}x+\mathrm{d}\left(-\frac{1}{3}y^3\right)+\mathrm{d}(-xy^2)+\mathrm{d}(-x^2y)\\&=\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{3}y^3-xy^2-x^2y\right),\end{aligned}$$

所以

$$u(x,y)=x-x^2y-xy^2-\frac{1}{3}y^3+C.$$

例 17【答案】$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

【解析】方法一 曲面Σ关于zOx面对称，函数y是关于y的奇函数，则

$$\oiint_{\Sigma} y\mathrm{d}S=0,$$

又由轮换对称性得

$$\begin{aligned}\oiint_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S&=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{4\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

方法二 曲面 Σ 关于 xOy, yOz, zOx 面对称，$\Sigma_1 : z = 1 - x - y$ 为 Σ 在第一卦限的部分，其在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$，则

$$\oiint_{\Sigma} (|x| + y)\mathrm{d}S = \oiint_{\Sigma} |x|\,\mathrm{d}S = 8\iint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}S = 8\sqrt{3}\iint_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

例 18【解】曲面 Σ 的方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，$\Sigma$ 在 xOy 面上的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2 - h^2\},$$

又

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是

$$\iint_{\Sigma} \frac{1}{z}\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2 - h^2}} \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{a^2 - \rho^2} = 2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2 - r^2)\right]\Bigg|_0^{\sqrt{a^2 - h^2}}$$

$$= 2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

例 19【解】曲面 Σ 的方程为 $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$，取下侧，且 Σ 在 xOy 面上的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}.$$

于是

$$\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1 - x^2 - y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{15}.$$

例 20【解】由两类曲面积分之间的关系，可得

$$\iint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}(x+z^2)\cos\alpha\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}(x+z^2)\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

在曲面 Σ 上有

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\cos\gamma=\frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

于是

$$\iint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}[(x+z^2)(-x)-z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

再按对坐标的曲面积分的计算法，便得

$$\iint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[x+\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 D_{xy} 关于 y 轴对称，又 $\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2(-x)$ 关于 x 为奇函数，则

$$\iint_{D_{xy}}\frac{1}{4}x(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

从而

$$\iint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

又 D_{xy} 关于 $y=x$ 对称，则 $\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，故

$$\iint_{\Sigma}(x+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^2\cdot\rho\mathrm{d}\rho=8\pi.$$

例 21【解】由高斯公式，有

$$I=\oiint_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}3z\mathrm{d}v=3\int_0^1z\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 3z\cdot 2\pi(1-z)\mathrm{d}z$$

$$=\pi.$$

例 22【解】设 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\le h^2,\\ z=h,\end{cases}$ 取上侧，记 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域为 Ω，由高斯公式得

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}v=2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v$$

$$=2\int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\pi\int_0^h z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi h^4,$$

又

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1}z^2\mathrm{d}S=h^2\iint\limits_{\Sigma_1}\mathrm{d}S=\pi h^4,$$

因此

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\pi h^4-\pi h^4=-\frac{1}{2}\pi h^4.$$

例 23【答案】(D).

【解析】由已知条件，

$$P(x,y,z)=x^2+yz,Q(x,y,z)=y^2+xz,R(x,y,z)=z^2+xy,$$

那么

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2x+2y+2z=2(x+y+z),$$

故选(D).

例 24【解】方法一　由斯托克斯公式

$$I=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y & -x & z\end{vmatrix}$$

$$=-2\iint_{\Sigma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi.$$

方法二　曲线 Γ 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=1$，t 从 0 到 2π，于是

$$I=\oint_{\Gamma}y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}(-\sin t\cdot\sin t-\cos t\cdot\cos t+0)\mathrm{d}t=-2\pi.$$

例 25【解】取 Σ 为平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$，由斯托克斯公式

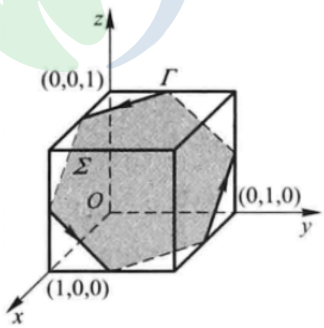
$$I=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

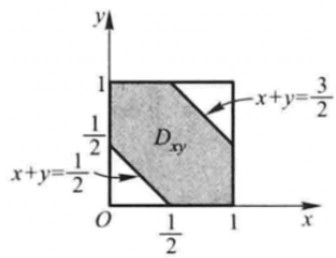
$$=-\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=-2\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_{xy} 为 Σ 在 xOy 面上的投影区域，于是

$$I=-6\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-6\cdot\frac{3}{4}=-\frac{9}{2}.$$





例 26【解】取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，Σ 的单位法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，故所求环流量为

$$I=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2-y & 4z & x^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=4\pi .$$

例 27【解】由题可得

$$\mathbf{grad}u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=(2xy+2y^2,x^2+4xy-3z^2,-6yz),$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}u)=\frac{\partial(2xy+2y^2)}{\partial x}+\frac{\partial(x^2+4xy-3z^2)}{\partial y}+\frac{\partial(-6yz)}{\partial z}$$

$$=2y+4x-6y=4(x-y),$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}u)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy+2y^2 & x^2+4xy-3z^2 & -6yz\end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{0}.$$