1. 设 $F'(x)=f(x)$，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数；√ $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt + C$

（2）若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 为奇函数；× $F(x)=\sin x+1$ $f(x)=\cos x$

（3）若 $f(x)$ 为周期函数，则 $F(x)$ 为周期函数；× $F(x)=\sin x+x$ $f(x)=\cos x+1$

（4）若 $f(x)$ 为单调函数，则 $F(x)$ 为单调函数. × $F(x)=x^2$ $f(x)=2x$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3, & x\le 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的（ ）

(A) 左、右导数都存在

(B) 左导数存在，右导数不存在 √

(C) 左导数不存在、右导数存在

(D) 左、右导数都不存在

3. 设 $f(x)$ 可导，则 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的（ ）

(A) 充分必要条件 √

(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件

(D) 既非充分条件又非必要条件

$$F_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}$$

$$=f'(0)-f(0)$$

$$F_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}$$

$$=f'(0)+f(0)$$

$$F_-'(0)=F_+'(0)\Leftrightarrow f'(0)-f(0)=f'(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$$

$$f(-x)=-f(x)\Rightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$$

4. 证明：（1）若 $f(x)$ 为可导的奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

$$f(-x)=f(x)\Rightarrow -f'(-x)=f'(x)\Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$$

（2）若 $f(x)$ 为可导的偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

（3）若 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0)=0$.

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xlongequal{t=-x}\lim_{t\to 0^+}\frac{f(-t)-f(0)}{-t-0}=-\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=-f'_+(0)$$

又由 $f'(0)=f'_-(0)=f'_+(0)$

$\therefore f'(0)=0$

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ ax+b, & x>1\end{cases}$，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导，a,b 应取什么值？

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$

$$f(1)=1$$

$\therefore a+b=1$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=a$$

$\therefore a=2$

故当 $a=2,b=-1$ 时 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导

6. 试从 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$ 导出：$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$，$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)/dx}{dy/dx}=\frac{-\frac{1}{y'^2}\cdot y''}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}$$

$$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)}{dy}=\frac{d\left(-\frac{y''}{y'^3}\right)}{dy}=\frac{d\left(-\frac{y''}{y'^3}\right)/dx}{dy/dx}=-\frac{y'''y'^3-3y'^2y''^2}{y'^6\cdot y'}=\frac{3y''^2-y'y'''}{y'^5}$$

7. 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)(n\ge 3)$.

$$f(x)=x^2\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-2)}x^{n-2}+\cdots\right)$$

$$=x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n-2}x^n+\cdots$$

$$\Rightarrow\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\quad\Rightarrow f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n!}{n-2}$$

8. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y=1+xe^{xy}$ 所确定，求 $y'|_{x=0},y''|_{x=0}$.

方程两边同时对 x 求导 $\quad y'=e^{xy}+xe^{xy}(y+xy')$ ①

当 $x=0$ 时 $y=1$ 从而 $y'=1$

对①式两边同时对 x 求导 $\quad y''=e^{xy}(y+xy')+e^{xy}(y+xy')+x\cdot e^{xy}(y+xy')^2+xe^{xy}(y'+y'+xy'')$

$$y''=1+1=2$$

即 $y'|_{x=0}=1\quad y''|_{x=0}=2$

9. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

由题意 $f(1)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=8$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}-3\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{-\sin x}\cdot\frac{-\sin x}{x}$$

$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)=8$$

$\therefore f'(1)=2 \Rightarrow f'(6)=2$ 故所求切线方程为 $y-0=2(x-6)$

即 $y=2x-12$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f(0)=f''(0)=0$，试求函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$ 的导数.

当 $x\neq 0$ 时 $g'(x)=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$

当 $x=0$ 时 $g'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$

$=\dfrac{1}{2}f''(0)$

即 $g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2} & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}f''(0) & x=0\end{cases}$

11. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 确定的隐函数，则 $\dfrac{dy}{dx}=$________.

方程两边同时对 x 求导 $\dfrac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot(2x+2yy')$

$\Rightarrow y'x-y=x+yy'$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+y}{x-y}$

12. 已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x-e^x\sin t+1=0\\ y=t^3+2t\end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$

$x-e^x\sin t+1=0$ 两边同时对 t 求导

$$\frac{dx}{dt}-e^x\cdot\frac{dx}{dt}\sin t-e^x\cos t=0 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{e^x\cos t}{1-e^x\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3t^2+2}{\frac{e^x\cos t}{1-e^x\sin t}}=\frac{(3t^2+2)(1-e^x\sin t)}{e^x\cos t}$$

当 $t=0$ 时 $x=-1$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{2}{e^{-1}}=2e$$

13. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\cos 2t \end{cases}$ 所确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{-2\sin 2t}{\cancel{\cos t}\cos t}=-4\sin t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{d(\frac{dy}{dx})/dt}{dx/dt}=\frac{-4\cos t}{\cos t}=-4$$

14、设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是：（　）

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

15. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格中：

(1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的<u>充分</u>条件，$f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的<u>必要</u>条件；

(2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的<u>充要</u>条件；

(3) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的<u>充要</u>条件.

16. 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$　$(n\geq 2)$，则 $f'(0)=$________.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}{x}=\lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$$

$$=n!$$

17. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是：(　)

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

18. 设函数 $f(x)$ 可导且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}=1$，则 $f'(x_0), f''(x_0)$ 分别为(　　).

(A) 0,1　　(B) 0,2　　(C) 2,1　　(D) 2,0

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0 \Rightarrow f(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{x-x_0}}{x-x_0}=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0 \Rightarrow f'(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{2(x-x_0)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{2}f''(x_0)=1 \Rightarrow f''(x_0)=2$

19. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内有定义，且满足 $3x\le f(x)\le x^2+x+1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为________.

① $f(1)=3$

② $3x-3\le f(x)-f(1)\le x^2+x+1-3$

$\Rightarrow \frac{3x-3}{x-1} \underset{\geq}{\leq} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{\geq}{\leq} \frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$　　$x\to1^+$　$x\to1^-$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=3$　　切线方程 $y-3=3(x-1)$　即 $y=3x$

20. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导，其反函数为 $y=g(x)$，若 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2x-2}{x^2}=1$，则 $g'(2)=$ $\underline{-\frac{1}{2}}$，$g''(2)=$ $\underline{\frac{1}{4}}$.

$f(0)=2$　　$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+2x-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)+2}{2x}=1 \Rightarrow f'(0)=-2$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)+2}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}f''(0)=1 \Rightarrow f''(0)=2$

$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$　　$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{1}{y'}\right)/dx}{dy/dx}=-\frac{y''}{y'^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{y'^3}$