考研高数常用公式整理

导数公式：

$$(tgx)' = \sec^2 x \qquad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(ctgx)' = -\csc^2 x \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\sec x)' = \sec x \cdot tgx \qquad (arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cdot ctgx \qquad (arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

基本积分表：

$$\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C$$

$$\int \sec xdx = \ln|\sec x + tgx| + C$$

$$\int \csc xdx = \ln|\csc x - ctgx| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sec^2 xdx = tgx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \csc^2 xdx = -ctgx + C$$

$$\int \sec x \cdot tgxdx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cdot ctgxdx = -\csc x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int shxdx = chx + C$$

$$\int chxdx = shx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n xdx = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = tg\frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

三角函数公式：

·和差角公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\quad\sin\alpha\sin\beta$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\quad tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta\quad 1}{ctg\beta\pm ctg\alpha}$$

·和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

·倍角公式：

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$$

·半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\qquad ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

·正弦定理： $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ **·余弦定理：** $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

·反三角函数性质： $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$ $\quad arctgx=\frac{\pi}{2}-arcctgx$

高阶导数公式——莱布尼兹（Leibniz）公式：

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

$$=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\quad+\frac{n(n-1)\quad(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\quad+uv^{(n)}$$

中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$\mathrm{F}(x)=x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理。

曲率：

弧微分公式：$ds=\sqrt{1+y'^2}dx$,其中$y'=tg\alpha$

平均曲率:$\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|.\Delta\alpha$:从M点到M′点，切线斜率的倾角变化量；Δs：$MM$弧长。

M点的曲率：$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}.$

直线：$K=0;$

半径为a的圆：$K=\dfrac{1}{a}.$

定积分的近似计算：

矩形法:$\int_a^b f(x)\approx\dfrac{b-a}{n}(y_0+y_1+\quad+y_{n-1})$

梯形法:$\int_a^b f(x)\approx\dfrac{b-a}{n}[\dfrac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+\quad+y_{n-1}]$

抛物线法:$\int_a^b f(x)\approx\dfrac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\quad+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\quad+y_{n-1})]$

定积分应用相关公式：

功：$W=F\cdot s$

水压力：$F=p\cdot A$

引力：$F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$,k为引力系数

函数的平均值:$\overline{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

均方根:$\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)dt}$

空间解析几何和向量代数：

空间2点的距离：$d=\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi$，$\varphi$是$\overrightarrow{AB}$与$u$轴的夹角。

$\Pr j_u(a_1+a_2)=\Pr ja_1+\Pr ja_2$

$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，是一个数量，

两向量之间的夹角：$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_x^{\ 2}+b_y^{\ 2}+b_z^{\ 2}}}$

$c=a\times b=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$，$|c|=|a|\cdot|b|\sin\theta$.例：线速度：$v=w\times r$.

向量的混合积：$[abc]=(a\times b)\cdot c=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=|a\times b|\cdot|c|\cos\alpha$，$\alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积。

平面的方程：

1、点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$n=\{A,B,C\}$，$M_0(x_0,y_0,z_0)$

2、一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$

3、截距世方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，其中$s=\{m,n,p\}$；参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

二次曲面：

1、椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

2、抛物面：$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$，（$p,q$同号）

3、双曲面：

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用

全微分：$dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy \qquad du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz$

全微分的近似计算：$\Delta z \approx dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z = f[u(t), v(t)] \qquad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial t}$

$z = f[u(x, y), v(x, y)] \qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}$

当$u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$时，

$du = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \qquad dv = \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x, y) = 0$，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(-\dfrac{F_x}{F_y}) + \dfrac{\partial}{\partial y}(-\dfrac{F_x}{F_y})\cdot\dfrac{dy}{dx}$

隐函数$F(x, y, z) = 0$，$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \qquad J = \dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \qquad \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \qquad \dfrac{\partial v}{\partial y} = -\dfrac{1}{J}\cdot\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$

微分法在几何上的应用：

空间曲线$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$在点$M(x_0, y_0, z_0)$处的切线方程：$\dfrac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$

在点M处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$，则切向量$T = \{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\}$

曲面$F(x, y, z) = 0$上一点$M(x_0, y_0, z_0)$，则：

1、过此点的法向量：$n = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$

2、过此点的切平面方程：$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

3、过此点的法线方程：$\dfrac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$

方向导数与梯度：

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向l的方向导数为：$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中φ为x轴到方向l的转角。

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathrm{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}i+\frac{\partial f}{\partial y}j$

它与方向导数的关系是：$\frac{\partial f}{\partial l}=\mathrm{grad}\,f(x,y)\cdot e$，其中$e=\cos\varphi\cdot i+\sin\varphi\cdot j$，为$l$方向上的单位向量。

$\therefore\frac{\partial f}{\partial l}$是$\mathrm{grad}f(x,y)$在$l$上的投影。

多元函数的极值及其求法：

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$

$$
\text{则：}\begin{cases}AC-B^2>0\text{时，}\begin{cases}A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值}\\A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值}\end{cases}\\AC-B^2<0\text{时，}\qquad\text{无极值}\\AC-B^2=0\text{时，}\qquad\text{不确定}\end{cases}
$$

重积分及其应用：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdrd\theta$$

曲面$z=f(x,y)$的面积$A=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$

平面薄片的重心：$\bar{x}=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint_D x\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$，$\quad\bar{y}=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint_D y\rho(x,y)d\sigma}{\iint_D\rho(x,y)d\sigma}$

平面薄片的转动惯量：对于x轴$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma$，$\quad$对于$y$轴$I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$

平面薄片（位于xoy平面）对z轴上质点$M(0,0,a),(a>0)$的引力：$F=\{F_x,F_y,F_z\}$，其中：

$$F_x=f\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_y=f\iint_D\frac{\rho(x,y)yd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\qquad F_z=-fa\iint_D\frac{\rho(x,y)xd\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在L上连续，L的参数方程为：$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$，$(\alpha\le t\le\beta)$,则：

$$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt\quad(\alpha<\beta)\qquad\text{特殊情况：}\begin{cases}x=t\\y=\varphi(t)\end{cases}$$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设L的参数方程为$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，则：

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt$$

两类曲线积分之间的关系：$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角。

格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$格林公式：$\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

当$P = -y, Q = x$，即：$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$时，得到$D$的面积：$A = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx$

•平面上曲线积分与路径无关的条件：

1、G是一个单连通区域；

2、$P(x,y)$，$Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$。注意奇点，如(0,0)，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

•二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$时，$Pdx + Qdy$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中：

$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$，通常设$x_0 = y_0 = 0$。

曲面积分：

对面积的曲面积分：$\iint_\Sigma f(x,y,z)ds = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dxdy$

对坐标的曲面积分：$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$，其中：

$\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]dxdy$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint_\Sigma P(x,y,z)dydz = \pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]dydz$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint_\Sigma Q(x,y,z)dzdx = \pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]dzdx$，取曲面的右侧时取正号。

两类曲面积分之间的关系：$\iint_\Sigma Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$

高斯公式：

$$\iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv=\oiint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

高斯公式的物理意义 ——通量与散度：

散度： $\operatorname{div}\nu=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$,即：单位体积内所产生 的流体质量，若 $\operatorname{div}\nu<0$,则为消失...

通量: $\iint_{\Sigma}A\cdot nds=\iint_{\Sigma}A_n ds=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$，

因此，高斯公式又可写 成: $\iiint_{\Omega}\operatorname{div}A dv=\oiint_{\Sigma}A_n ds$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz$$

上式左端又可写成: $\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无关的条件: $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

旋度： $\operatorname{rot}A=\begin{vmatrix}\mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

向量场A沿有向闭曲线Γ的环流量: $\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz=\oint_{\Gamma}A\cdot t\,ds$

常数项级数：

等比数列: $1+q+q^2+\quad+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列: $1+2+3+\quad+n=\frac{(n+1)n}{2}$

调和级数: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\quad+\frac{1}{n}$是发散的

级数审敛法：

1、正项级数的审敛法——根植审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2、比值审敛法：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$，则$\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3、定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n;\lim\limits_{n\to\infty}s_n$存在，则收敛；否则发散。

交错级数$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$(或$-u_1+u_2-u_3+\cdots,u_n>0$)的审敛法——莱布尼兹定理：

如果交错级数满足$\begin{cases}u_n\geq u_{n+1}\\ \lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\end{cases}$，那么级数收敛且其和$s\leq u_1$,其余项$r_n$的绝对值$|r_n|\leq u_{n+1}$。

绝对收敛与条件收敛：

(1)$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$，其中$u_n$为任意实数；

(2)$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots+|u_n|+\cdots$

如果(2)收敛，则(1)肯定收敛，且称为绝对收敛级数；

如果(2)发散，而(1)收敛，则称(1)为条件收敛级数。

调和级数:$\sum\dfrac{1}{n}$发散，而$\sum\dfrac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数:$\sum\dfrac{1}{n^2}$收敛；

p级数:$\sum\dfrac{1}{n^p}$ $\begin{cases}p\leq 1\text{ 时发散}\\ p>1\text{时收敛}\end{cases}$

幂级数：

$1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$ $\begin{cases}|x|<1\text{时，收敛于}\dfrac{1}{1-x}\\ |x|\geq 1\text{时，发散}\end{cases}$

对于级数(3)$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$，如果它不是仅在原点收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存在R，使$\begin{cases}|x|<R\text{时收敛}\\ |x|>R\text{时发散，其中}R\text{称为收敛半径。}\\ |x|=R\text{时不定}\end{cases}$

求收敛半径的方法：设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$，其中$a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则$\begin{cases}\rho\neq 0\text{时，}R=\dfrac{1}{\rho}\\ \rho=0\text{时，}R=+\infty\\ \rho=+\infty\text{时，}R=0\end{cases}$

一些函数展开成幂级数：

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \quad + \frac{m(m-1)\quad(m-n+1)}{n!}x^n + \qquad (-1<x<1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \quad + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad 或\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2} \end{cases}$$

傅立叶级数：

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)，\ 周期 = 2\pi$$

$$其中\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad (n=0,1,2\quad) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad (n=1,2,3\quad) \end{cases}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \quad = \frac{\pi^2}{8} \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \quad = \frac{\pi^2}{6}（相加）$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \quad = \frac{\pi^2}{24} \qquad 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \quad = \frac{\pi^2}{12}（相减）$$

正弦级数：$a_n = 0$，$b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \qquad n = 1,2,3 \qquad f(x) = \sum b_n \sin nx$是奇函数

余弦级数：$b_n = 0$，$a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx \qquad n = 0,1,2 \qquad f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum a_n \cos nx$是偶函数

微分方程的相关概念：

一阶微分方程：$y' = f(x,y)$ 或 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)dy = f(x)dx$的形式，解法：

$\int g(y)dy = \int f(x)dx$ 得：$G(y) = F(x) + C$称为隐式通解。

齐次方程：一阶微分方程可以写成$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y) = \varphi(x,y)$，即写成$\dfrac{y}{x}$的函数，解法：

设$u = \dfrac{y}{x}$，则$\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$，$u + \dfrac{du}{dx} = \varphi(u)$，$\therefore \dfrac{dx}{x} = \dfrac{du}{\varphi(u) - u}$分离变量，积分后将$\dfrac{y}{x}$代替$u$，即得齐次方程通解。