勤学如春起之苗，不见其增，日有所长；

辍学如磨刀之石，不见其损，日有所亏。

——————陶渊明

例 1、讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性.

【答案】

解　先求极限得到 $f(x)$ 的表达式，再讨论 $f(x)$ 的连续性.

当 $x\neq 0$ 时，有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ x^2, & |x|>1,\end{cases}$

故在 $(-\infty,-1)$，$(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$ 内 $f(x)$ 连续.

又因为 $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=1,\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-1$，

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$，

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1,\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1$，

所以 $f(x)$ 在 $x=0,\pm1$ 处间断，是第一类间断点，其中 $x=0$ 是可去间断点.

例 2、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $a<c<d<b$，证明：在 (a,b) 内必存在一点 ξ，使得 $mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi)$，其中 m,n 为任意给定的自然数.

【答案】

证　由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上取得最小值 k 和最大值 K.

由于

$$(m+n)k\leqslant mf(c)+nf(d)\leqslant(m+n)K$$

故 $k\leqslant\dfrac{mf(c)+nf(d)}{m+n}\leqslant K$.

由介值定理，存在一点 $\xi\in[c,d]\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{mf(c)+nf(d)}{m+n}$，即

$$mf(c)+nf(d)=(m+n)f(\xi).$$

例 3、设 $x_1=\sqrt{a}(a>0)$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值.

【答案】

解　依题意，有 $x_1=\sqrt{a}$，$x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\cdots$，$x_n=\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots+\sqrt{a}}}}_{n个根号},\cdots$，

可知$\{x_n\}$严格单调增加.

由$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，得$x_{n+1}^2=a+x_n$，故$x_{n+1}=\dfrac{a}{x_{n+1}}+\dfrac{x_n}{x_{n+1}}<\dfrac{a}{x_{n+1}}+1$.

而$x_{n+1}>\sqrt{a}$，因此$x_{n+1}<\dfrac{a}{\sqrt{a}}+1=\sqrt{a}+1$，即$\{x_n\}$有上界，故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，等式$x_{n+1}^2=a+x_n$两边同时取极限$(n\to\infty)$，得$A^2=a+A$，解得

$$A_1=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2},\ A_2=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}\ (\text{舍去}),$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

例 4、设$f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq\pm1,\\ 0, & x=\pm1,\end{cases}$，则$f(x)$(　　).

A.在$x=1,x=-1$处都连续　　B.在$x=1,x=-1$处都间断

C.在$x=-1$处间断，$x=1$处连续　　D.在$x=-1$处连续，$x=1$处间断

【答案】D.

解　当$x\to-1$时，$\arctan\dfrac{1}{x^2-1}$有界，$x+1\to0$，故

$$\lim_{x\to-1}f(x)=0=f(-1),$$

即$f(x)$在$x=-1$处连续.又因

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\pi,\lim_{x\to1^+}f(x)=\pi,$$

所以$f(x)$在$x=1$处间断.

例 5、求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}$；

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}=\lim\limits_{x\to0}\left[\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{x^2}}\right]^{\frac{-x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}}$，且

$$\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}{x^2}=-2,$$

故原式$=e^{-2}$.