# 2026 考研数学

# 基础讲义

**总策划**　文都集团教学研究院

# 前 言

线性代数是数学的一个重要分支，是考研数学的重要组成部分。

线性代数以行列式、矩阵为主要工具，以线性方程组为主线，以行列式、矩阵、线性方程组、向量组、矩阵的特征值和特征向量、二次型为基本内容，具有较强的抽象性、逻辑性。

在本书的编写过程中，编者严格按照教育部教育考试院编撰的最新《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的要求，以教师易教，学生易懂为理念，把线性代数中抽象复杂的理论知识加以条理化、简单化. 本书着重突出以下几个特色：

1. 选编内容覆盖面全. 选编内容涵盖了数学考研大纲所有的知识点及考点. 呈现给读者完整的知识框架，重要题型及解题方法的归纳. 旨在提高学生的复习效率、理解基本的概念、基本性质、基本定理，掌握知识点的关联性，形成完整的知识体系。

2. 选编例题紧扣考试大纲. 选编习题紧紧围绕最新数学考试大纲，做到例题由易到难，层层递进. 选取具有代表性的能突出体现所学知识点的基础性练习题，有助于读者进一步掌握所学基本知识点，选取适量的考研真题，有助于读者能尽早接触真题，了解所学知识点在真题中的重要性，选取适量的综合性的题目，有助于读者进一步掌握知识点之间的关联性，形成知识体系。

3. 知识点更加具有条理性. 在编写过程中通过简单易懂的例子作为引入，把抽象复杂的问题简单化、具体化，使读者能更快、更易学好线性代数。

本书适用于数学一、数学二、数学三，并且编者针对不同数学种类的考试内容的不同部分给出了说明。

建议主讲教师在使用本书时，不要就题论题，而是通过对例题的解答、比较、思考和总结，发现题目设置的内在规律，弄清楚命题者的意图，帮助学生掌握应试技能，取得满意的效果。

本书虽经过作者的深思熟虑和反复推敲，但疏漏及不妥之处在所难免，恳请读者和广大同仁批评指正，使本书在教学实践中不断完善，在完善中不断提高。

2024 年 10 月

# 目　录

# 第一章 行列式

## 教学重难点

行列式的概念，行列式的基本性质，行列式按行(列)展开定理，行列式的基本计算方法，行列式的应用(克拉默法则).

## 考纲点击

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.
2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.
3. 会用克拉默法则解线性方程组.

## 教学建议

建议教学时长为$3$课时.

## 内容聚焦

## 第一节 $n$阶行列式的定义

### 一、全排列与逆序数

**1. 排列**

由正整数$1,2,\cdots,n$组成的一个有序数组称为一个$n$级排列.

**【注】** $n$个不同元素的排列共有$n!$种.

**2. 逆序数**

在一个排列中，若大的数排在小的数之前，称这两个数构成一个逆序. 一个$n$级排列中所有逆序的总数称为这个排列的逆序数，记作$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

如计算$362154$的逆序数：$3$后面有$2$个比它小的数；$6$后面有$4$个比它小的数；$2$后面有$1$个比它小的数；$1$后面没有比它小的数；$5$后面有$1$个比它小的数；$4$后面没有数，因此

$$\tau(362154)=2+4+1+0+1=8.$$

## 二、$n$阶行列式的定义

二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

$n$阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行、不同列的$n$个元素$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$乘积的代数和，其中$j_1j_2\cdots j_n$为自然数$1,2,\cdots,n$的一个$n$级排列. 当$j_1j_2\cdots j_n$是偶排列时，该项取正号；当$j_1j_2\cdots j_n$是奇排列时，该项取负号. 即$n$阶行列式

$$D_n = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

其中$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$表示对所有的$n$级排列求和.

**【注】**①$n$阶行列式的定义中，每项的$n$个元素来自不同行不同列，并对$n!$项排列求和.

②每项中各元素按行标由小到大的标准次序排列，每项的正负号由各元素列标排列的逆序数确定，奇数为负，偶数为正.

**例 1** 设$f(x) = \begin{vmatrix} x & 2x & 1 & 0 \\ 1 & 3x & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2x & -2 \\ 1 & 1 & -1 & x \end{vmatrix}$，则$f(x)$展开式中$x^4$的系数为________，$x^3$的系数为________.

**【考查知识点】**行列式的定义.

**【答案】**6，$-4$.

**【解析】**在$f(x)$的展开式中只有$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$相乘才会出现$x^4$，而列标构成的全排列1234的逆序数为0，所以含$x^4$的项为$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 6x^4$，系数为6.

只有$a_{12}, a_{21}, a_{33}, a_{44}$相乘才会出现$x^3$，而列标构成的全排列2134的逆序数为1，所以含$x^3$的项为$-a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -4x^3$，系数为$-4$.

## 三、行列式的性质

1. **行列式与它的转置行列式相等.**

2. **对换行列式的两行(列)，行列式变号**：交换行列式的两行(列)，行列式的值变号. 特别地，行列式中某两行(列)对应元素相同，则行列式为零.

【注】交换行(列)奇数次，行列式变号；交换行(列)偶数次，行列式不变.

3. **提公因子**：用一个数$k$乘行列式，相当于用$k$乘行列式的某一行(列)，也即行列式某一行(列)所有元素的公因子可提到行列式外. 特别地，行列式中某行(列)元素全为$0$，则行列式等于零.

4. **成比例为零**：行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零.

5. **分行(列)可加性**：行列式的某行(列)中各元素均为两数之和，则该行列式可拆分为两个行列式之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a_{i1}' & a_{i2}+a_{i2}' & \cdots & a_{in}+a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}' & a_{i2}' & \cdots & a_{in}' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

【注】若$n$阶行列式中每个元素均为两数之和，则行列式可分解为$2^n$个行列式之和.

6. **倍加不变**：行列式的某一行(列)所有元素的$k$倍加到另一行(列)的对应元素上，行列式不变.

**例 2** 若$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$，则$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}-2a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}-2a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}-2a_{32} \end{vmatrix}=$________.

【考查知识点】利用行列式的性质计算行列式.

【答案】$12$.

【解析】由行列式的性质，得

$$D_1=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11}-2a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21}-2a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31}-2a_{32} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & a_{11} \\ 2a_{21} & a_{23} & a_{21} \\ 2a_{31} & a_{33} & a_{31} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{13} & -2a_{12} \\ 2a_{21} & a_{23} & -2a_{22} \\ 2a_{31} & a_{33} & -2a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=0+2\cdot(-2)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix}=4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=4\times 3=12.$$

**例(选讲)**三阶行列式$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-5$，则下列行列式中，结果为$-10$的是(　　).

(A) $|2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3|$

(B) $|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|$

(C) $|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3|$

(D) $|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|$

**【考查知识点】**行列式的性质.

**【答案】**(D).

**【解析】**$|2\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_3|=8|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-40$.

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\xlongequal{c_1-c_2}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-5.$$

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3|\xlongequal[i=3,2]{c_i-c_{i-1}}|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-5.$$

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|\xlongequal{c_1-c_2+c_3}|2\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1|$$

$$=2|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=-10.$$

故选(D).

## 四、常用的特殊行列式

**1. 主对角行列式、上(下)三角行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

**2. 副对角行列式**

$$D=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

**例 3** 行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=$_________.

**【考查知识点】**“爪形”行列式的计算；行列式的性质.

**【答案】**$-2$.

**【解析】** $D\xlongequal{c_1-\frac{1}{2}c_2}\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}&1&1&1\\0&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-\frac{1}{3}c_3}\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$

$$\xlongequal{c_1-\frac{1}{4}c_4}\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\times2\times3\times4=-2.$$

**【注】**对于爪型行列式，分别利用主对角线元素和副对角线元素将行列式三角化后再进行计算.

# 第二节　$n$阶行列式按行(列)展开

## 一、余子式和代数余子式

**1. 余子式**

在$n$阶行列式中，划去元素$a_{ij}$所在的第$i$行和第$j$列，余下来的元素按原顺序构成的$n-1$阶行列式，称为元素$a_{ij}$的余子式，记作$M_{ij}$.

**2. 代数余子式**

记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$A_{ij}$称为元素$a_{ij}$的代数余子式.

**【注】**$M_{ij}$与$A_{ij}$都是行列式，其值只与$a_{ij}$的位置有关，而与$a_{ij}$的取值无关，且

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，$M_{ij}=(-1)^{i+j}A_{ij}$.

## 二、行列式按行(列)展开

**定理** 行列式等于它任意一行(列)各元素与其对应代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\ (i=1,2,\cdots,n)\text{(按第}\ i\ \text{行展开)};$$

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\ (j=1,2,\cdots,n)\text{(按第}\ j\ \text{列展开)}.$$

【注】利用行列式按行(列)展开定理计算行列式时，一般对零元素较多的行(列)进行展开.

**推论** 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j);$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j).$$

**例 4** 已知3阶行列式中第一列的元素依次为$1,2,1$，其对应的余子式依次为$3,2,1$，则该行列式的值为________.

**【考查知识点】**行列式按行按列展开定理.

**【答案】**$0$.

**【解析】**由行列式按行按列展开，将行列式按第一列展开得，

$$D=1\times(-1)^{1+1}\times3+2\times(-1)^{2+1}\times2+1\times(-1)^{3+1}\times1=0.$$

**例 5** 计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix}2&1&0&6\\3&2&0&0\\100&3&5&8\\-1&1&0&0\end{vmatrix}$；　　(2) $D=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}$

**【考查知识点】**行列式展开定理的应用.

**【解】**(1)将行列式按照第三列展开，则

$$D=\begin{vmatrix}2&1&0&6\\3&2&0&0\\100&3&5&8\\-1&1&0&0\end{vmatrix}=5\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&1&6\\3&2&0\\-1&1&0\end{vmatrix}$$
$$=5\cdot6\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&2\\-1&1\end{vmatrix}=150.$$

(2) 将行列式按照第三行展开，

$$D=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-1&2\\-3-\lambda&3\end{vmatrix}+(-2-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&-1\\5&-3-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-2\lambda-3+(-2-\lambda)(\lambda^2+\lambda-1)=-(\lambda+1)^3.$$

**例 6** 已知$D=\begin{vmatrix}1&0&1&5\\2&1&-1&4\\1&0&-1&2\\-1&3&1&2\end{vmatrix}$，求

(1) $A_{11}-A_{21}-A_{31}+A_{41}$；

(2) $2A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$；

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}$.

【考查知识点】行列式展开定理及推论的应用.

【解】(1) 由行列式展开定理的推论，行列式第1列元素对应的代数余子式与第3列元素乘积之和为0，即

$$a_{13}A_{11}+a_{23}A_{21}+a_{33}A_{31}+a_{43}A_{41}=A_{11}-A_{21}-A_{31}+A_{41}=0;$$

(2) 方法一

$$\begin{aligned}2A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}&=2A_{41}+A_{42}-A_{43}+4A_{44}-3A_{44}\\&=a_{21}A_{41}+a_{22}A_{42}+a_{23}A_{43}+a_{24}A_{44}-3A_{44}\\&=0-3\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\1&0&-1\end{vmatrix}=(-3)\times(-2)=6.\end{aligned}$$

方法二 将原行列式第四行元素依次换为$2,1,-1,1$，则$2A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}$的值即为新的行列式的值，故

$$2A_{41}+A_{42}-A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&0&1&5\\2&1&-1&4\\1&0&-1&2\\2&1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&1&5\\2&1&-1&4\\1&0&-1&2\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}1&0&1\\2&1&-1\\1&0&-1\end{vmatrix}=6.$$

(3) $M_{11}+M_{12}+M_{13}+M_{14}=A_{11}-A_{12}+A_{13}-A_{14}$

$$=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\2&1&-1&4\\1&0&-1&2\\-1&3&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-1&1&-1\\0&3&-3&6\\0&1&-2&3\\0&2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-3&6\\1&-2&3\\2&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&3&-3\\1&-2&3\\0&6&-5\end{vmatrix}=-3.$$

## 三、数值型行列式的计算

**例 7** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}$.

【考查知识点】行列式的性质，行列式按行按列展开定理

【解】$D=\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&x-1&1&-1\\x+1&-1&1&-1\end{vmatrix}\overset{c_2+c_1}{\underset{c_3-c_1,\ c_4+c_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1&0&0&x\\1&0&x&0\\1&x&0&0\\x+1&x&-x&x\end{vmatrix}$

$$=-x\begin{vmatrix}1&0&x\\1&x&0\\x+1&x&-x\end{vmatrix}+x\begin{vmatrix}1&0&0\\1&0&x\\1&x&0\end{vmatrix}$$

$$=-x\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\1 & x & 0\\x+2 & x & 0\end{vmatrix}-x^3=-x^2\begin{vmatrix}1 & x\\x+2 & x\end{vmatrix}-x^3$$

$$=-x^2(x-x^2-2x)-x^3=x^4.$$

**例 8** 计算 $n$ 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}x & a & a & \dots & a & a\\a & x & a & \dots & a & a\\a & a & x & \dots & a & a\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\a & a & a & \dots & a & x\end{vmatrix}$.

**【考查知识点】**行(列)和相等的行列式的计算；行列式化为上(下)三角行列式.

**【解】**由于行列式列和相等，故将其余所有行加到第一行，则

$$D=\begin{vmatrix}x & a & a & \dots & a & a\\a & x & a & \dots & a & a\\a & a & x & \dots & a & a\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\a & a & a & \dots & a & x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\a & x & a & \dots & a & a\\a & a & x & \dots & a & a\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\a & a & a & \dots & a & x\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1\\0 & x-a & 0 & \dots & 0 & 0\\0 & 0 & x-a & \dots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-a\end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a]\cdot(x-a)^{n-1}.$$

**【注】**对于每行(列)元素之和均相等的行列式，把所有列(行)的元素都加到第一列(行)对应的元素上，提出公因子后，利用性质化成上，下三角行列式，再进行计算.

**例 9** 计算 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a & b & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & a & b & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & a & b\\b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}$.

**【考查知识点】**行列式展开定理的应用.

**【解】**将行列式按第1列展开，得

$$D_n=a\begin{vmatrix}a & b & \cdots & 0 & 0\\0 & a & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a & b\\0 & 0 & \cdots & 0 & a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}b & 0 & \cdots & 0 & 0\\a & b & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & b & 0\\0 & 0 & \cdots & a & b\end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}b^n.$$

【注】对于“两线一星”型行列式，按星所在的行(列)展开进行计算.

**例(选讲)** 已知$\prod_{i=1}^{n}b_i\neq 0$，计算$n$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} b_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & b_3+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b_n+a_n \end{vmatrix}.$$

**【考查知识点】**利用行列式的性质将行列式化为“爪形”行列式进行计算.

**【解】方法一** 将行列式各行元素减去第一行对应元素，则

$$D_n=\begin{vmatrix} b_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -b_1 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_1 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_1 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+\frac{b_1}{b_i}c_i\,(i=2,3,\cdots,n)} \begin{vmatrix} b_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right) & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\prod_{i=1}^{n}b_i.$$

**方法二** 加边法，原行列式增加一行一列，使行列式的值保持不变，即

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & b_1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & b_2+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 & b_3+a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & b_n+a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ 1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1+\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n} & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \cdots & -a_n \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\right)\prod_{i=1}^{n}b_i.$$

**例(选讲)** 计算 $n$ 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

**【考查知识点】**行列式展开定理的应用.

**【解】方法一 递推法**

将行列式按第1列展开，得

$$D_n=2D_{n-1}+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=2D_{n-1}-D_{n-2},$$

于是得到递推式

$$D_n-D_{n-1}=D_{n-1}-D_{n-2}=D_{n-2}-D_{n-3}=\cdots=D_2-D_1=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-2=1,$$

因此，

$$D_n=D_{n-1}+1=D_{n-2}+2=\cdots=D_1+n-1=n+1.$$

**方法二 归纳法**

当 $n=1$ 时，$D_1=2=1+1$；

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3=2+1$；

当 $n=3$ 时，$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=4=3+1$；

设当$n\le k$时，$D_n=n+1$成立；

当$n=k+1$时，

$$D_{k+1}=2D_k+(-1)\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&0&0&\cdots&0&0\\-1&2&-1&\cdots&0&0\\0&-1&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&2&-1\\0&0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}$$

$$=2D_k-D_{k-1}$$

$$=2(k+1)-(k-1+1)=k+2.$$

因此由数学归纳法得$D_n=n+1$.

**【注】**对于“三线”型行列式，通常采用递推法和归纳法计算.

## 三、范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j).$$

**例 10** 计算方程$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&-3&1&x\\4&9&1&x^2\\8&-27&1&x^3\end{vmatrix}=0$的根.

**【考查知识点】**范德蒙德行列式的计算.

**【解】**该行列式为范德蒙德行列式，故

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&-3&1&x\\4&9&1&x^2\\8&-27&1&x^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&-3&1&x\\2^2&(-3)^2&1^2&x^2\\2^3&(-3)^3&1^3&x^3\end{vmatrix}$$

$$=(x-1)(x+3)(x-2)(1+3)(1-2)(-3-2)=0,$$

得$x=2$或$-3$或$1$.

**例 11** 计算$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\n&n-1&n-2&n-3\end{vmatrix}$.

**【考查知识点】**行列式性质；范德蒙德行列式的计算.

**【解】**由行列式性质可化为范德蒙德行列式.

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\n&n-1&n-2&n-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\n+1&n+1&n+1&n+1\end{vmatrix}$$

$$=(n+1)\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\\1&1&1&1\end{vmatrix}=-(n+1)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&2^2&3^2&4^2\\1&2^3&3^3&4^3\end{vmatrix}$$

$$=-(n+1)(4-1)(4-2)(4-3)(3-2)(3-1)(2-1)$$

$$=-12(n+1).$$

# 第三节 克拉默法则

对下述 $n$ 个方程 $n$ 个未知数的两个方程组：

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}\text{(I) 与}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}\text{(II)}$$

其中 (II) 称为非齐次线性方程组，(I) 称为 (II) 对应的齐次线性方程组.

## 一、非齐次线性方程组的克拉默法则

对 $n$ 个方程 $n$ 个未知数的非齐次线性方程组，如果方程组的系数行列式不为零，即

$$D=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

那么方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 是方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换系数行列式 $D$ 中的第 $j$ 列得到的行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_n&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\cdots,D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_n\end{vmatrix}.$$

【注】①克拉默法则适用于 $n$ 个方程 $n$ 个未知数的线性方程组.

②当系数行列式 $D=0$ 时，方程组可能有无穷多解，也可能无解.

## 二、齐次线性方程组的克拉默法则

对 $n$ 个方程 $n$ 个未知数的齐次线性方程组，如果方程组的系数行列式不为零，即

$$D=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组仅有零解(没有非零解).

【注】若齐次方程组的系数行列式 $D=0$，则齐次线性方程组有非零解.

**例 12** 设齐次线性方程组 $\begin{cases}(3-\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\(2-\lambda)x_2-x_3=0,\\4x_1-2x_2+(1-\lambda)\ x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=$________.

【考查知识点】克拉默法则的应用.

【答案】$\lambda=3$ 或 $4$ 或 $-1$.

【解析】由克拉默法则可知，齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D=0$.

$$D=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 4 & -6 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(3-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-6]$$

$$=(3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1)=0,$$

解得 $\lambda=3$ 或 $4$ 或 $-1$.

**例 13** 当 $\lambda$ 为何值时，方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+2x_2+x_3=2,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda\end{cases}$ 有唯一解？当 $\lambda=3$ 时，求方程组的解.

【考查知识点】克拉默法则的应用及非齐次线性方程组的求解.

【解】系数行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda-1$.

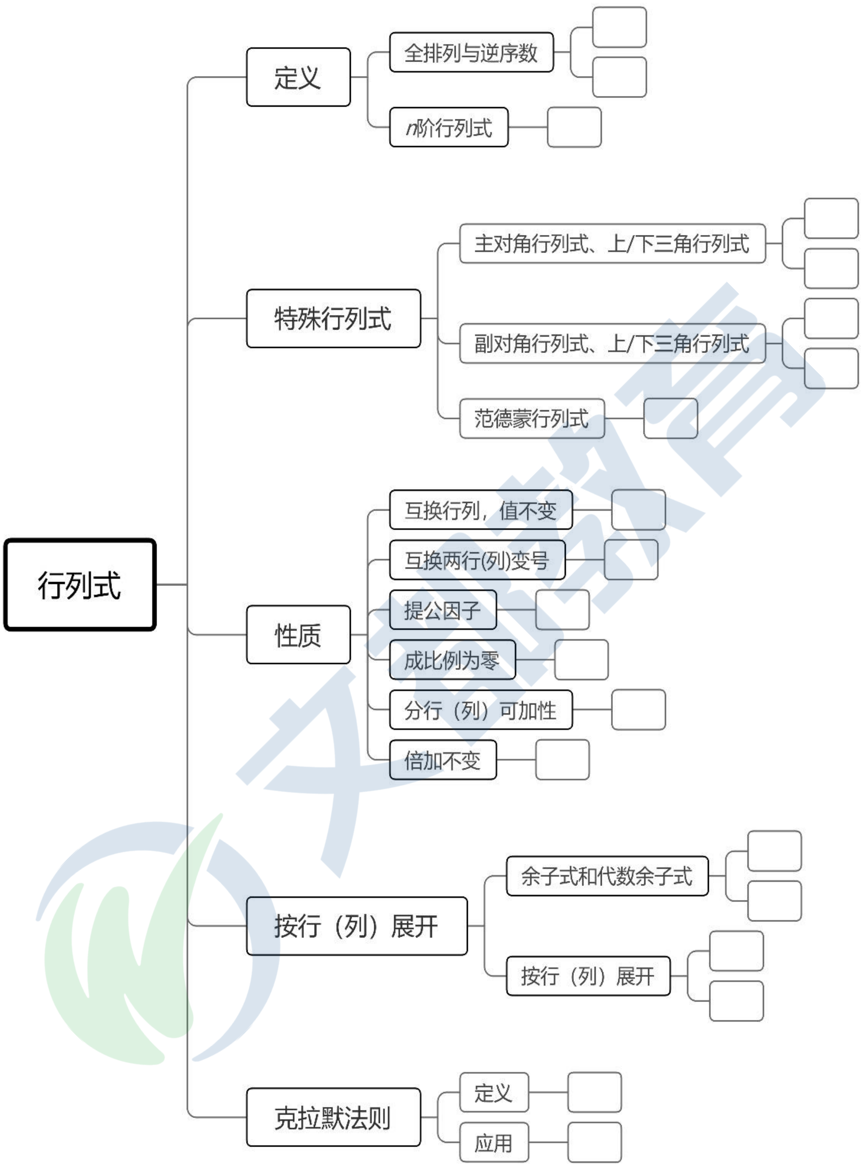
由克拉默法则，当 $D\neq 0$ 时，即 $\lambda\neq 1$ 时，方程组有唯一解.

当 $\lambda=3$ 时，$D=2$，

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}=-2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=2,\quad D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=2,$$

故 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=-1$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=1$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}=1$.

## 本章小结


行列式
定义
全排列与逆序数
n阶行列式
特殊行列式
主对角行列式、上/下三角行列式
副对角行列式、上/下三角行列式
范德蒙行列式
性质
互换行列，值不变
互换两行(列)变号
提公因子
成比例为零
分行（列）可加性
倍加不变
按行（列）展开
余子式和代数余子式
按行（列）展开
克拉默法则
定义
应用

# 第二章 矩阵

## 教学重难点

矩阵的概念，矩阵的线性运算，矩阵的乘法，方阵的幂，方阵乘积的行列式，矩阵的转置，逆矩阵的概念和性质，矩阵可逆的充分必要条件，伴随矩阵，矩阵的初等变换，初等矩阵，矩阵的秩，矩阵的等价，分块矩阵及其运算.

## 考纲点击

1. 理解矩阵的概念，了解单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵以及它们的性质.

2. 掌握矩阵的线性运算、乘法、转置以及它们的运算规律，了解方阵的幂与方阵乘积的行列式的性质.

3. 理解逆矩阵的概念，掌握逆矩阵的性质以及矩阵可逆的充分必要条件，理解伴随矩阵的概念，会用伴随矩阵求逆矩阵.

4. 理解矩阵初等变换的概念，了解初等矩阵的性质和矩阵等价的概念，理解矩阵的秩的概念，掌握用初等变换求矩阵的秩和逆矩阵的方法.

5. 了解分块矩阵及其运算.

## 教学建议

建议教学时长为5课时.

## 内容聚焦

# 第一节 矩阵的定义及其运算

## 一、矩阵的概念

**1. 矩阵的定义**

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m$ 行 $n$ 列矩阵，简称为 $m\times n$ 矩阵，记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，简记为 $\boldsymbol{A}$.

这 $m\times n$ 个数称为矩阵的元素，数 $a_{ij}$ 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列.

【注】行列式与矩阵是两个不同的概念，行列式是一个数值，而矩阵是一张数表.

**2. 同型矩阵**

两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的行数相等、列数也相等时，就称它们为同型矩阵.

**3. 矩阵相等**

若同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 对应位置的元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

**4. 几种特殊矩阵**

(1) **行矩阵**：只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_n)$ 称为行矩阵，又称为行向量.

(2) **列矩阵**：只有一列的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 称为列矩阵，又称为列向量.

(3) $n$ **阶矩(方)阵**：如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数相等，即 $m=n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵或 $n$ 阶方阵.

(4) **零矩阵**：所有元素都是 0 的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$.

【注】不同型的零矩阵不同.

(5) **单位矩阵**：主对角线元素都是 1，其余元素都是 0 的方阵称为 $n$ 阶单位矩阵，简称单位阵，记为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

(6) **对角矩阵**：主对角线元素不全为 0，其余元素全都是 0 的方阵称为对角矩阵，记为

$$\boldsymbol{\varLambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

(7) **数量矩阵**：主对角线元素都是 $a$ 的 $n$ 阶对角矩阵称为 $n$ 阶数量矩阵. 它是对角矩阵的特例，记作 $a\boldsymbol{E}$.

(8) **三角矩阵**：主对角线以下元素全为 0 的 $n$ 阶矩阵，称为 $n$ 阶上三角矩阵；主对角线以上元素全为 0 的矩阵，称为 $n$ 阶下三角矩阵. 上、下三角矩阵统称为三角矩阵.

## 二、矩阵的运算

### 1. 矩阵的加法与数乘

**(1)矩阵的加法**

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

【注】只有同型矩阵才能进行加法运算.

**(2)矩阵的数乘**

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\lambda$ 为常数，则数 $\lambda$ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**(3)矩阵的线性运算**

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，$\lambda,\mu$ 为实数，则有

①交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

②结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

③ $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}$；

④ $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

⑤ $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$；

⑥ $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$；

⑦ $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$；

⑧ $1\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

**例(选讲)**设矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{C}$ .

【考查知识点】矩阵加法与数乘运算.

【解】由 $3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C})=2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$，得 $\boldsymbol{C}=\frac{1}{5}(2\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A})$. 又

$$2\boldsymbol{B}-3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 2 & -6 & 10 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 9 & 18 \\ -3 & 9 & 15 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 5 & -15 & -5 \end{pmatrix},$$

于是，$\boldsymbol{C}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -5 & -10 \\ 5 & -15 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

**2. 矩阵的乘法**

**(1) 定义**

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $n\times p$ 矩阵，规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,p),$$

并把此乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{C}$ 中的元素 $c_{ij}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 中第 $i$ 行的 $n$ 个元素分别与 $\boldsymbol{B}$ 中第 $j$ 列的 $n$ 个元素对应的乘积之和.

【注】①矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可乘的条件是左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数；

②乘积矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 的行数等于左边矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，列数等于右边矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数；

③一个 $1\times n$ 行矩阵与一个 $n\times 1$ 列矩阵的乘积是一个数；

④一个 $n\times 1$ 列矩阵与 $1\times n$ 行矩阵相乘结果为 $n$ 阶方阵；

⑤若两个 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

**(2) 运算规律**

①结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；$(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})=\lambda(\boldsymbol{AB})$（$\lambda$ 为实数）；

②分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$；$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$.

**例 1** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}$.

(1) 计算 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 是否成立？

(3) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 是否成立？

**【考查知识点】** 矩阵的乘法运算.

**【解】** (1) 由矩阵乘法可得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&-32\\8&16\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

(2) 由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2$，且 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$. 所以

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2.$$

(3) 由于 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2$，且 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，故

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{B}^2\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2.$$

【注】事实上，从上例可知

①矩阵的乘法一般不满足交换律，即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

②一般情况下，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{AB}$. 仅当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时，上述等式才成立. 特别地，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 与任意同阶方阵都可交换，故可以得到：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}，(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}.$$

③矩阵乘法没有消去律，即由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 不能得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论.若 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 而 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{O}$，不能得出 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

④对单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}$.

## 三、方阵的幂

**1. 定义**

对于 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 和正整数 $k$，$\boldsymbol{A}^k=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{A}}_{k个}$ 称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 次幂.

**2. 运算律**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，$k,l$ 为正整数，则

(1) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$；

(2) $(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

**【注】**①只有方阵才有幂运算.

②一般而言 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$，当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可交换时才成立.

**3. 对角阵的幂**

设 $n$ 阶对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&0&\cdots&0\\0&\lambda_2^n&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n^n\end{pmatrix}$.

**例 2** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$，定义 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$，称其为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式，则 $f(\boldsymbol{A})=$（　　）.

(A) $\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}2&0\\3&3\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}2&3\\-1&0\end{pmatrix}$

**【考查知识点】**方阵幂的计算，矩阵多项式的概念.

**【答案】**(C).

**【解析】**

由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-5\\-15&12\end{pmatrix},$$

所以

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}7&-5\\-15&12\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

故选(C).

**例 3** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

**【考查知识点】** 方阵 $n$ 次幂的计算.

**【答案】** $3^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$.

**【解析】** 由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&3\\0&9&0\\6&0&6\end{pmatrix}=3\boldsymbol{A},$$

则 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{A}^2=3^2\boldsymbol{A}$，…，$\boldsymbol{A}^n=3^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&3&0\\2&0&2\end{pmatrix}$.

**例(选讲)** 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n=$________.

**【考查知识点】** 矩阵 $n$ 次幂的计算.

**【答案】** $\begin{pmatrix}1&n&\dfrac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$.

**【解析】** 由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$n\geq 3$时，$\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$($\boldsymbol{B}$ 为幂零矩阵)，所以

$$\boldsymbol{A}^n=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{E}^n+n\boldsymbol{E}^{n-1}\boldsymbol{B}+\frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{E}^{n-2}\boldsymbol{B}^2$$

$$=E+n\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

【注】若 $\boldsymbol{A}$ 可拆分为数量矩阵和幂零矩阵之和，求 $\boldsymbol{A}^n$，可将 $\boldsymbol{A}$ 拆分后运用二项式展开定理计算，即

$$\boldsymbol{A}^n=(k\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=(k\boldsymbol{E})^n+C_n^1(k\boldsymbol{E})^{n-1}\boldsymbol{B}+C_n^2(k\boldsymbol{E})^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+C_n^{n-1}(k\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}^{n-1}+\boldsymbol{B}^n,$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 一般为幂零矩阵(方阵的较低次幂为零矩阵).

**例(选讲)** 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(2,1,-3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

**【考查知识点】**矩阵的乘法和方阵的 $n$ 次幂.

**【解】**由于 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(2,1,-3)=\begin{pmatrix}2&1&-3\\0&0&0\\2&1&-3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=(1,0,1)\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}=-1$.

所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\\&=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(-1)^{n-1}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2(-1)^{n-1}&(-1)^{n-1}&-3(-1)^{n-1}\\0&0&0\\2(-1)^{n-1}&(-1)^{n-1}&-3(-1)^{n-1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

【注】若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 $n$ 维列向量，$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i=k$，$k$ 为常数.则

$$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=k^{n-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=k^{n-1}\boldsymbol{A}.$$

## 四、矩阵的转置

**1. 定义**

把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n},\quad\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}_{n\times m}.$$

**2. 运算性质**

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；  (2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；  (4) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$；

推广：$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{k-1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}$.

**3. 对称矩阵**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，若满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

【注】对称矩阵的元素以主对角线为对称轴对应相等.

**4. 反对称矩阵**

设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵.

【注】反对称矩阵的元素以主对角线为对称轴对应互为相反数，且主对角线上的元素全都为 $0$.

## 五、方阵的行列式

**1. 定义**

由 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$.

【注】只有方阵才可以求行列式.

**2. 运算性质**

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶方阵，$\lambda$ 为常数.

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^{n}|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$；

(4) $|\boldsymbol{A}^{n}|=|\boldsymbol{A}|^{n}$；

(5) $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$.

**例 4** 设 4 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$，则 $\left|\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=$______.

【考查知识点】利用方阵行列式的性质计算行列式.

【答案】$-\dfrac{3}{16}$.

【解析】由于 $\left|\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4}|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\dfrac{1}{16}|\boldsymbol{A}|$，且

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}=-3,$$

故 $\left|\dfrac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|=-\dfrac{3}{16}$.

**例 5** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{E}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

**【考查知识点】**方阵行列式的计算.

**【答案】** $\dfrac{27}{2}$.

**【解析】**由 $\boldsymbol{AB}=2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{E}$，得 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{E}$，两边取行列式得

$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}|=|3\boldsymbol{E}|=27，且|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=2，故|\boldsymbol{B}|=\frac{27}{2}.$$

# 第二节 伴随矩阵与逆矩阵

## 一、伴随矩阵

### 1. 伴随矩阵的定义

设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}$ 所构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=(A_{ij})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n1}&A_{n2}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

**【注】**只有方阵才存在对应的伴随矩阵.

### 2. 伴随矩阵的运算公式

(1) 重要公式：$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$；

证明：设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则

$$\boldsymbol{AA}^*=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{A}|&0&\cdots&0\\0&|\boldsymbol{A}|&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&|\boldsymbol{A}|\end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}，$$

故 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$. 类似有 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 可得如下公式:

(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$;

(3) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$, $(\boldsymbol{A}^n)^*=(\boldsymbol{A}^*)^n$;

(4) $(k\boldsymbol{A})^*=k^{n-1}\boldsymbol{A}^*$;

(5) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$;

(6) $|(\boldsymbol{A}^*)^*|=|\boldsymbol{A}|^{(n-1)^2}$;

(7) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

**例 6** 求三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&2&-1\\1&1&2\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵.

**【考查知识点】** 伴随矩阵的定义.

**【解】** 由于

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=1$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-1$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}=0$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=3$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0&-1\\-1&-1\end{vmatrix}=-1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0&2\\-1&-1\end{vmatrix}=-2$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&-1\\1&2\end{vmatrix}=5$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0&-1\\1&2\end{vmatrix}=-1$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=-2$,

所以 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&-1&-1\\0&-2&-2\end{pmatrix}$.

**例(选讲)** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=$________.

**【考查知识点】** 伴随矩阵的运算公式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$.

**【答案】** $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

**【解析】** 由于 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=2$, 根据伴随矩阵的重要公式 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$ 可得

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix},$$

于是 $A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$，$A^*\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$，$A^*\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$，故

$$A^*\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+A^*\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+A^*\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}.$$

## 二、可逆矩阵

### 1. 可逆矩阵的定义

对于 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，记为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

可逆矩阵又称为非奇异矩阵，也称为满秩矩阵. 不可逆矩阵又称为奇异矩阵，也称为降秩矩阵.

**【注】**①可逆矩阵的逆矩阵是同阶方阵，单位矩阵的逆矩阵为自身.

②若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 唯一.

### 2. 矩阵可逆的充分必要条件

$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$.

**例 7** 求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

**【考查知识点】**可逆矩阵的计算.

**【解】**求出 $|\boldsymbol{A}|$ 及 $\boldsymbol{A}^*$，代入公式 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*$ 进行求解.

由于 $|\boldsymbol{A}|=-2\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在. $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式为

$$A_{11}=4，\ A_{12}=-3，\ A_{21}=-2，\ A_{22}=1.$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*=-\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\ \dfrac{3}{2}&-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$.

**【注】**对于二阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，可以得到 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，即 $ad-bc\neq 0$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$，也即“主对调，副变号，行列式往下跑”.

**例 8** 已知 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}$. 证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

**【考查知识点】**可逆矩阵的定义.

【证明】由题设，$A^2+A=2E$，即 $A(A+E)=2E$，得 $A\cdot\frac{1}{2}(A+E)=E$.

由逆矩阵的定义可知 $A$ 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+E)$.

**例（选讲）** 设 $\alpha=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$ 是 $n$ 维列向量，$A=E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，$B=E-k\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$，若 $A$ 的逆矩阵是 $B$，则 $k=$________.

**【考查知识点】** 逆矩阵的定义.

**【答案】** $\frac{2}{3}$.

**【解析】** 由题意可知 $AB=E$，即

$$(E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}})(E-k\alpha\alpha^{\mathrm{T}})=E+(1-k)\alpha\alpha^{\mathrm{T}}-k\alpha(\alpha^{\mathrm{T}}\alpha)\alpha^{\mathrm{T}}=E,$$

由于 $\alpha^{\mathrm{T}}\alpha=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}$，故 $\left(1-k-\frac{k}{2}\right)\alpha\alpha^{\mathrm{T}}=O$，故 $1-\frac{3k}{2}=0$，$k=\frac{2}{3}$.

**3. 可逆矩阵的性质**

(1) 若 $A$ 可逆，则 $A^{-1}$ 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$，$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$；

(2) 若 $A$ 可逆，常数 $\lambda\neq 0$，则 $\lambda A$ 可逆，且 $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$；

(3) 若 $A,B$ 为同阶方阵且均可逆，则 $AB$ 也可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$；

(4) 若 $A$ 可逆，则 $A^{\mathrm{T}}$ 也可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

(5) 若 $A$ 可逆，则 $A^{*}$ 也可逆，且 $(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}=\frac{A}{|A|}$.

(6) 若 $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&\cdots&0\\0&\lambda_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$ 可逆，则 $\Lambda^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1}&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{\lambda_2}&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}$；

若 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 可逆，则 $\boldsymbol{\Lambda}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**【注】**①当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都可逆时，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 不一定可逆.

②一般情况下，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$.

③若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 可得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

**例 9** 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}$，则 $|(2\boldsymbol{A})^{-1}-3\boldsymbol{A}^*|=$________.

**【考查知识点】**可逆矩阵与伴随矩阵关系式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$ 的应用.

**【答案】**$-2$.

**【解析】**因为 $|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{2}\neq 0$，所以 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$，$(2\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}$，

于是，

$$|(2\boldsymbol{A})^{-1}-3\boldsymbol{A}^*|=\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}-\frac{3}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|-\boldsymbol{A}^{-1}|=(-1)^3\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=-2.$$

**例 10** 已知 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $(\boldsymbol{A}^{-1})^*=$________.

**【考查知识点】**可逆矩阵与伴随矩阵关系式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 的应用.

**【答案】**$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -4 & -10 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

**【解析】**由已知，$|\boldsymbol{A}|=\frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-\frac{1}{4}\neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*=\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=-2\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ -4 & -10 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

**例 11** 设 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆（$n\geq 2$），$\boldsymbol{A}^*$ 是其伴随矩阵，则下列选项正确的是（　　）.

(A) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-1}\boldsymbol{A}$　　(B) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+1}\boldsymbol{A}$

(C) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}$　　(D) $(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}|^{n+2}\boldsymbol{A}$

**【考查知识点】**可逆矩阵与伴随矩阵关系式 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$ 的应用.

【答案】(C).

【解析】因为$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$，则有

$$(\boldsymbol{A}^*)^*=|\boldsymbol{A}^*|(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\big||\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}\big|(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}$$
$$=\frac{|\boldsymbol{A}|^n}{|\boldsymbol{A}|}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=|\boldsymbol{A}|^{n-2}\boldsymbol{A}.$$

故选(C).

# 第三节 矩阵的初等变换与初等矩阵

## 一、矩阵的初等变换

### 1. 初等变换的定义

对矩阵的行(列)施以下述三种变换，称为矩阵的初等行(列)变换：

(1)**行(列)互换**：互换矩阵的两行(列)；

(2)**数乘变换**：用一个非零数乘矩阵某一行(列)的所有元素；

(3)**倍加变换**：把矩阵某一行(列)的$k$倍加至另一行(列)对应的元素上.

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的初等变换.

### 2. 行阶梯形、行最简形、标准形矩阵的定义

(1)行阶梯形矩阵

$$\begin{pmatrix}1&3&1&2&1\\0&1&-2&-2&1\\0&0&0&2&5\\0&0&0&0&-4\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}_1,$$

称这样的矩阵为行阶梯形矩阵，其特点是：

①非零行在零行的上面；

②非零行的首非零元所在列在上一行(如果存在的话)的首非零元所在列的右面.

(2)行最简形矩阵

$$\boldsymbol{J}_1\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&7&0&0\\0&1&-2&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{J}_2,$$

在行阶梯形的基础上，继续对矩阵作初等行变换，可化为行最简形，其特点是：

①非零行的首非零元为1；

②首非零元所在列的其他元均为$0$.

(3) 标准形矩阵

$$J_2 \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_A,$$

对行最简形矩阵施以初等列变换，可化为标准形矩阵，其特点为：

①左上角为一个单位矩阵；

②其余元全为$0$.

综上可知，对于$m \times n$矩阵$\boldsymbol{A}$，总可以经过初等变换（行变换和列变换）把它化为标准形$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}_{m \times n}$，其中$r$为行阶梯形矩阵中非零行的行数.

## 二、初等矩阵

### 1. 定义

由单位矩阵$\boldsymbol{E}$经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

三种初等变换对应三种初等矩阵：

(1) 行(列)互换，记作$\boldsymbol{E}_{i,j}$，即将单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第$i, j$行互换(或将第$i, j$列互换)得到的初等矩阵.

例如$\boldsymbol{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，表示将单位矩阵$\boldsymbol{E}$的$1,2$两行互换(或$1,2$两列互换)得到的初等矩阵.

(2) 数乘变换，记作$\boldsymbol{E}_i(k)$，即以数$k \neq 0$乘单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第$i$行(或第$i$列)得到的初等矩阵.

例如$\boldsymbol{E}_3(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$，表示将单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第$3$行乘以$-2$(或第$3$列乘以$-2$）得到的初等矩阵.

(3) 倍加变换，记作$\boldsymbol{E}_{i,j}(k)$，即单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第$j$行的$k$倍加到第$i$行（或单位矩阵$\boldsymbol{E}$的第$i$列的$k$倍加到第$j$列）得到的初等矩阵.

例如$\boldsymbol{E}_{2,1}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，表示将$\boldsymbol{E}$第$1$行的$4$倍加到第$2$行（或第$2$列的$4$倍加到第

1列)得到的初等矩阵.

**2. 性质**

初等矩阵均可逆，且其逆仍为同型的初等矩阵.

(1) $\boldsymbol{E}_{i,j}{}^{-1}=\boldsymbol{E}_{i,j}$，$|\boldsymbol{E}_{i,j}|=-1$；

(2) $\boldsymbol{E}^{-1}{}_{i}(k)=\boldsymbol{E}_{i}\left(\dfrac{1}{k}\right)(k\neq 0)$，$|\boldsymbol{E}_{i}(k)|=k$；

(3) $\boldsymbol{E}_{i,j}{}^{-1}(k)=\boldsymbol{E}_{i,j}(-k)$，$|\boldsymbol{E}_{i,j}(k)|=1$.

【注】$\boldsymbol{E}_{i,j}{}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}_{i,j},\boldsymbol{E}_{i,j}{}^{*}=-\boldsymbol{E}_{i,j};\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}{}_{i}(k)=\boldsymbol{E}_{i}(k),\boldsymbol{E}_{i}^{*}(k)=k\boldsymbol{E}_{i}\left(\dfrac{1}{k}\right)$；$\boldsymbol{E}_{i,j}{}^{\mathrm{T}}(k)=\boldsymbol{E}_{j,i}(k)$，$\boldsymbol{E}_{i,j}{}^{*}(k)=\boldsymbol{E}_{i,j}(-k)$.

**3. 初等变换与初等矩阵的关系**

(1)用初等矩阵左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行一次相应的初等行变换；用初等矩阵右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$，相当于对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行一次相应的初等列变换.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，则有：

①对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行变换相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘相应的 $m$ 阶初等矩阵.

$\boldsymbol{E}_{i,j}\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行与第 $j$ 行互换所得矩阵；

$\boldsymbol{E}_{i}(k)\Leftrightarrow$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行乘以非零常数 $k$ 所得矩阵；

$\boldsymbol{E}_{i,j}(k)\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $j$ 行的 $k$ 倍加到第 $i$ 行所得矩阵.

②对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变换相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘相应的 $n$ 阶初等矩阵.

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j}\Leftrightarrow$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列与第 $j$ 列互换所得矩阵；

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i}(k)\Leftrightarrow$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列乘以非零常数 $k$ 所得矩阵；

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{i,j}(k)\Leftrightarrow$ 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 列的 $k$ 倍加到第 $j$ 列所得矩阵.

(2)任何可逆矩阵均可化为若干个初等矩阵的乘积.

**4. 矩阵等价**

(1)矩阵等价的定义

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等行变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 行等价；

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等列变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列等价；

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

(2)等价矩阵的性质

①反身性：$\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{A}$；

②对称性：若 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}$ 也等价于 $\boldsymbol{A}$；

③传递性：若 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$ 等价于 $\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}$ 等价于 $\boldsymbol{C}$.

【注】矩阵 $\boldsymbol{A}$ 等价于其行阶梯形、行最简形和标准形.

(3)矩阵等价的充要条件

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，则

① $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 行等价的充分必要条件是存在 $m$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$；

② $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 列等价的充分必要条件是存在 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{AQ}=\boldsymbol{B}$；

③ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是存在 $m$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及 $n$ 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

**例 12** 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，将 $\boldsymbol{A}$ 的第1列与第2列交换得到 $\boldsymbol{B}$，再把 $\boldsymbol{B}$ 的第2列加到第3列得 $\boldsymbol{C}$，若 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为(　　).

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\2&0&-1\end{pmatrix}$

**【考查知识点】**初等变换与初等矩阵的关系.

**【答案】**(D).

**【解析】**由题设，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}$，于是

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}.$$

因此，

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}\left[\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right]^{-1}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\2&0&-1\end{pmatrix}.$$

故选(D).

例(选讲) 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{P}^m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{A}$，则 $m,n$ 可取( ).

(A) $m=5,n=6$ (B) $m=5,n=5$

(C) $m=6,n=6$ (D) $m=6,n=5$

**【考查知识点】**初等变换与初等矩阵的关系.

**【答案】**(C).

**【解析】**根据初等矩阵及初等变换的性质，当 $m,n$ 均为偶数时，$\boldsymbol{P}^m\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{A}$. 故选(C).

例(选讲) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$，且 $|\boldsymbol{A}|=m$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{13}&2a_{11}+a_{12}\\a_{21}&a_{23}&2a_{21}+a_{22}\\a_{31}&a_{33}&2a_{31}+a_{32}\end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{B}|=$________.

(A) $m$ (B) $-m$ (C) $2m$ (D) $-2m$

**【考查知识点】**初等变换与初等矩阵的关系及行列式的性质.

**【答案】**(B).

**【解析】方法一** 由矩阵的初等变换，可知

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

于是，

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|\begin{vmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=m\times1\times(-1)=-m.$$

**方法二** 由行列式的性质，可知

$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&2a_{11}+a_{12}\\a_{21}&a_{23}&2a_{21}+a_{22}\\a_{31}&a_{33}&2a_{31}+a_{32}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}\\a_{31}&a_{33}&a_{32}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-m.$$

## 三、初等变换的应用

**1. 求矩阵的行阶梯形、行最简形和标准形**

用矩阵的初等变换可将矩阵化为行阶梯形、行最简形和标准形矩阵.

**2. 初等变换求逆矩阵(求数值型矩阵的逆矩阵)**

方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}$ 行等价，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{E}$，故有求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵的方法：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}^{-1}).$$

**3. 求解矩阵方程**

矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{X}$ 可用初等变换求得.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\xrightarrow{\text{初等行变换}}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

**例 13** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&-2\\5&-4&1\end{pmatrix}$，利用矩阵的初等变换，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

**【考查知识点】**初等行变换求解逆矩阵.

**【解】**对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 施行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-1&1&0&0\\3&4&-2&0&1&0\\5&-4&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-3r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&1&-3&1&0\\0&-14&6&-5&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-7r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-1&1&0&0\\0&-2&1&-3&1&0\\0&0&-1&16&-7&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-r_3]{r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&0&-15&7&-1\\0&-2&0&13&-6&1\\0&0&-1&16&-7&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3,-\frac{1}{2}r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&-2&1&0\\0&1&0&-\dfrac{13}{2}&3&-\dfrac{1}{2}\\0&0&1&-16&7&-1\end{array}\right),$$

故 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&0\\-\dfrac{13}{2}&3&-\dfrac{1}{2}\\-16&7&-1\end{pmatrix}$.

**例 14** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$，求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

**【考查知识点】**利用初等变换求逆矩阵，并求解矩阵方程.

**【解】**对 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{X}$ 两边左乘 $\boldsymbol{A}$ 得，

$$\boldsymbol{AA}^*\boldsymbol{X}=\boldsymbol{AA}^{-1}+2\boldsymbol{AX}.$$

由于 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$，故 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=4\boldsymbol{E}$，所以

$4\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{AX}$，即 $2(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}$.

$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$可逆,且

$$\left(2(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}),\boldsymbol{E}\right)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&\frac{1}{2}&0&0\\1&1&-1&0&\frac{1}{2}&0\\-1&1&1&0&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&\frac{1}{2}&0&0\\0&2&-2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&2&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&1&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&-1&0&\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{array}\right),$$

所以 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

# 第四节 矩阵的秩

## 一、矩阵的秩的定义

**1.** $k$ **阶子式**

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵，从 $\boldsymbol{A}$ 中任取 $k$ 行 $k$ 列($k\le\min(m,n)$)，位于这些行列交叉处的 $k^2$ 个元素按原来的次序组成的一个 $k$ 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 $k$ 阶子式.

【注】$m\times n$ 矩阵的 $k$ 阶子式共有 $C_m^kC_n^k$ 个.

**2. 矩阵的秩的定义**

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式的阶数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记作 $r(\boldsymbol{A})$.

【注】①当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$1\le r(\boldsymbol{A})\le\min(m,n)$.

②若 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶子式都为 $0$，则 $r(\boldsymbol{A})<k$；若 $\boldsymbol{A}$ 中某一 $k$ 阶子式不等于 $0$，则 $r(\boldsymbol{A})\ge k$.

③若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=k$，则 $\boldsymbol{A}$ 中存在不为 $0$ 的 $k$ 阶子式，且所有 $k+1$ 阶子式(如果存在的话)都为 $0$.

**例(选讲)** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$r(\boldsymbol{A})=r<\min(m,n)$，则 $\boldsymbol{A}$ 中(　　).

(A)所有 $r$ 阶子式均不为零，所有 $r+1$ 阶子式均为零

(B)存在等于零的 $r$ 阶子式，所有 $r+1$ 阶子式均为零

(C)存在不为零的 $r$ 阶子式，所有 $r+1$ 阶子式均为零

(D)所有 $r$ 阶子式均不为零，至少有一个不为零的 $r+1$ 阶子式

**【考查知识点】**矩阵秩的定义.

**【答案】**(C).

**【解析】**根据矩阵秩的定义，$r(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 中存在不为零的 $r$ 阶子式，而 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)均为零，故选(C).

## 二、矩阵秩的基本性质

1. 若 $\boldsymbol{A}\ne\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})\ge 1$；$r(\boldsymbol{A})=0\Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

2. $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件 $r(\boldsymbol{A})=n$；$|\boldsymbol{A}|\ne 0$ 的充要条件 $r(\boldsymbol{A})=n$；

3. 同型矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$.

4. $r(\boldsymbol{A})=r(k\boldsymbol{A})(k\ne 0)$.

5. $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

6. $r(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\le r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$.

7. $r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\le\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$.

8. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$，且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$.

9. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，若 $\boldsymbol{P}_{m\times m},\boldsymbol{Q}_{n\times n}$ 均为可逆矩阵，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})=r(\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q})$，即初等变换不改变矩阵的秩.

10. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{C})$；若 $r(\boldsymbol{B})=n$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{C})$.

11. 设 $\boldsymbol{A}_{m\times n},\boldsymbol{B}_{n\times s}$，若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，且 $r(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

12. $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$

**【注】**抽象矩阵秩的计算常用矩阵秩的性质.

**例 15** 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&a\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，则 $a=$(　　).

(A) $-1$　　(B) $1$　　(C) $0$　　(D) $2$

【考查知识点】$r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A}^*)$ 的关系及矩阵秩的计算.

【答案】(A).

【解】由 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，得 $r(\boldsymbol{A})=2$. 故

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&0&a+1\end{vmatrix}=2(a+1)=0,$$

得 $a=-1$. 故选(A).

**例 16** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times3}$ 的秩等于 $2$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A})=(\quad)$.

(A) $1$　　(B) $2$　　(C) $3$　　(D) $0$

【考查知识点】矩阵秩的性质.

【答案】(B).

【解析】因为 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$，而 $|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}0&0&2\\0&1&0\\-1&0&2\end{vmatrix}=2\neq0$，即 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 可逆.

故 $r(\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A})=r[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})]=r(\boldsymbol{A})=2$.

故选(B).

## 三、初等变换法求矩阵的秩

对于数值型矩阵，由于初等变换不改变矩阵的秩，则对矩阵进行初等行变换化为行阶梯形后，非零行的数量即为矩阵的秩.

**例 17** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,并求 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式.

【考查知识点】矩阵秩的定义；矩阵的初等变换求秩.

【解】对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换得

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\3&2&0&5&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{r_2-3r_1,r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-20&15&9&-13\\0&-12&9&7&-11\\0&-16&12&8&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-20&15&9&-13\\0&-12&9&7&-11\\0&-4&3&2&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_4}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&2&-3\\0&-12&9&7&-11\\0&-20&15&9&-13\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-5r_2]{r_3-3r_2}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&2&-3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&2&-3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$r(\boldsymbol{A})=3$，且其中一个最高阶非零子式为由第1,2,3行与1,2,4列交叉处元素构成的三阶行列式$\begin{vmatrix}3&2&5\\3&-2&6\\2&0&5\end{vmatrix}$.

**例(选讲)** $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm T}$均为$n\times1$非零矩阵，若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}$，则$r(\boldsymbol{A})=$________.

**【考查知识点】**矩阵秩的计算.

**【答案】**1.

**【解析】**由矩阵的乘法可得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix},$$

可知$\boldsymbol{A}$的各行成比例，各列成比例，故$r(\boldsymbol{A})=1$.

**例18** 已知三阶矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}$的秩为2，则$t=$________.

**【考查知识点】**矩阵秩的计算.

**【答案】**3.

**【解析】**由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\2&0&t&0\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&t+2&-2\\0&-4&5&-2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&5&-2\\0&-4&t+2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&5&-2\\0&0&t-3&0\end{pmatrix},$$

$r(\boldsymbol{A})=2$，故$t=3$.

**例(选讲)** 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&a\\-1&a&1\\1&-1&2\end{pmatrix}$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价，求 $a$ 的取值.

**【考查知识点】**矩阵等价的充要条件及矩阵秩的计算.

**【解】**同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价，则 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{B})$.

对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&a\\0&0&(a-3)(a+1)\end{pmatrix}.$$

对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换，有

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&a\\-1&a&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&2&a-2\\0&0&(a-4)(a+1)\end{pmatrix}.$$

当 $a=3$ 时，$r(\boldsymbol{A})=2$，$r(\boldsymbol{B})=3$，此时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价；

当 $a=4$ 时，$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\boldsymbol{B})=2$，此时 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价.

因此，当 $a=3$ 或 $4$ 时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价.

# 第五节 分块矩阵

## 一、分块矩阵的定义

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线和横线分成许多个小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的矩阵称为分块矩阵.

同一矩阵根据不同的需要可以进行不同的分块.

例如，有四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&4&0\\0&5&6&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

(1) 按列分块：$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}0\\3\\5\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\4\\6\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}$ 可记为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$；

(2) 按行分块：$\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0,0)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,3,4,0)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(0,5,6,0)$，$\boldsymbol{\beta}_4=(0,0,0,2)$，则 $\boldsymbol{A}$ 可记为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\boldsymbol{\beta}_3\\\boldsymbol{\beta}_4\end{pmatrix}$；

(3) 对 $\boldsymbol{A}$ 按照下图分块：$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:cc:c}1&0&0&0\\ \hdashline 0&3&4&0\\0&5&6&0\\ \hdashline 0&0&0&2\end{array}\right)$，令 $\boldsymbol{A}_{11}=(1)$，$\boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix}3&4\\5&6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{33}=(2)$，则 $\boldsymbol{A}$ 可简记为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&&\\&\boldsymbol{A}_{22}&\\&&\boldsymbol{A}_{33}\end{pmatrix}$.

【注】本部分中子块的下标不是子块的行数、列数，只表示它在分块矩阵中所处的位置.

## 二、分块矩阵的运算

**1. 分块矩阵的加法**

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数均相同，采用相同的分块法，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1r}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{B}_{ij}$ 的行数和列数均相等，那么

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

**2. 分块矩阵的数乘**

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1r}\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，$\lambda$ 为数，那么 $\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\lambda\boldsymbol{A}_{1r}\\\vdots&&\vdots\\\lambda\boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\lambda\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$.

**3. 分块矩阵的乘法**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times l$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $l\times n$ 矩阵，分块成

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1t}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{st}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_{11}&\cdots&B_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ B_{t1}&\cdots&B_{tr}\end{pmatrix},$$

其中 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j},B_{2j},\cdots,B_{tj}$ 的行数，那么

$$C=AB=\begin{pmatrix}C_{11}&\cdots&C_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ C_{s1}&\cdots&C_{sr}\end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{t}A_{ik}B_{kj}\ (i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,r)$.

**4. 分块矩阵的转置**

设 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{s1}&\cdots&A_{sr}\end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm T}=\begin{pmatrix}A_{11}^{\mathrm T}&\cdots&A_{s1}^{\mathrm T}\\ \vdots&&\vdots\\ A_{1r}^{\mathrm T}&\cdots&A_{sr}^{\mathrm T}\end{pmatrix}$.

【注】分块矩阵的转置：整体转置，分块转置.

## 三、分块对角阵

**1. 分块对角阵概念**

设 $A$ 为 $n$ 阶方阵，若 $A$ 的分块矩阵只在主对角线上有非零子块，其余子块都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵，即

$$A=\begin{pmatrix}A_1&&&O\\&A_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_s\end{pmatrix},$$

其中 $A_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵，那么称 $A$ 为分块对角矩阵.

**2. 分块对角阵的行列式**

若 $A$ 为 $n$ 阶方阵，$B$ 为 $m$ 阶方阵，则有

$$\begin{vmatrix}A&O\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A&O\\C&B\end{vmatrix}=|A||B|;$$

$$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}C&A\\B&O\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O&A\\B&C\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|.$$

【注】不要求 $A,B$ 为同阶方阵，即不要求 $m=n$.

**3. 分块对角阵的逆矩阵**

若 $A,B$ 分别是 $m$ 阶与 $n$ 阶可逆矩阵，则

$$\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}A^{-1}&O\\O&B^{-1}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

【注】可推广到 $n$ 阶分块对角阵，结论仍然成立.

**4. 分块对角阵的幂**

若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $m$ 阶与 $n$ 阶方阵，则 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^n \end{pmatrix}$.

【注】可推广到 $n$ 阶分块对角阵，结论仍然成立.

**例 19** 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，计算 $|\boldsymbol{A}|$，$\boldsymbol{A}^{-1}$.

**【考查知识点】**分块矩阵的行列式和逆矩阵的计算.

**【解】**设 $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，分块对角阵

$$\boldsymbol{A} = \left(\begin{array}{cc:cc} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{O} \end{pmatrix},$$

于是，

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2| = (-1)^{2\times 2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\times 1 = -2,$$

由于 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}_1^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}_1^*}{|\boldsymbol{A}_1|} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2^{-1} = \frac{\boldsymbol{A}_2^*}{|\boldsymbol{A}_2|} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1} \\ \boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**例 20** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为二阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*,\boldsymbol{B}^*$ 均为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，若 $|\boldsymbol{A}| = 2$，$|\boldsymbol{B}| = 3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = (\quad)$.

(A) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{B}^* \\ 2\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 3\boldsymbol{A}^* \\ 2\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{A}^* \\ 3\boldsymbol{B}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

**【答案】**(B).

**【解析】**$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^* = \begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}^{-1} = (-1)^{2\times 2}|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1} \\ \boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 6\boldsymbol{B}^{-1} \\ 6\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^* \\ 3\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}.$$

故选(B).

**例(选讲)**四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ b_3 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_4 & a_4 & 0 \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) $a_1a_2a_3a_4 - b_1b_2b_3b_4$　　(B) $a_1a_2a_3a_4 + b_1b_2b_3b_4$

(C) $(a_1a_2 - b_1b_2)(a_3a_4 - b_3b_4)$　　(D) $(a_2a_3 - b_2b_3)(a_1a_4 - b_1b_4)$

**【考查知识点】**分块矩阵求行列式.

**【答案】**(D).

**【解析】**由行列式的性质，先交换行列式的二、四列，再交换所得行列式的一、三行，可以得到

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & b_2 \\ b_3 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & b_4 & a_4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_3 & a_3 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & a_1 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} b_3 & a_3 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = (b_2b_3 - a_2a_3)(b_1b_4 - a_1a_4).$$

故选(D).

**例(选讲)** 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^n =$________.

**【考查知识点】**分块矩阵幂的计算.

**【答案】**$\begin{pmatrix} 3^n & n\cdot 3^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\cdot 6^{n-1} & 9\cdot 6^{n-1} \\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 3\cdot 6^{n-1} \end{pmatrix}$.

**【解析】**设 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}$. 由分块对角阵求幂的计算

公式得,

$$A^n=\begin{pmatrix}B & O\\ O & C\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}B^n & O\\ O & C^n\end{pmatrix},$$

因此只需分别计算 $B^n$ 与 $C^n$.

由于 $B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=3E+B_1$,由于 $B_1^2=O$,则

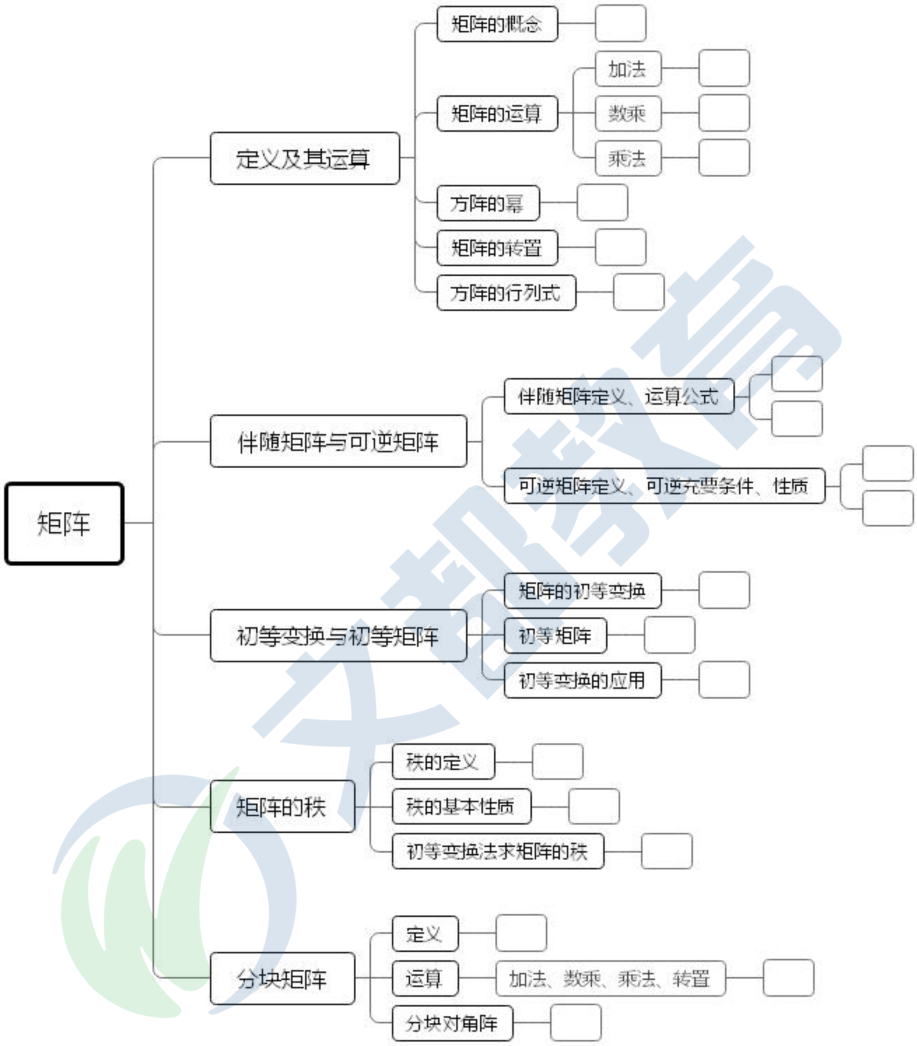
$$\begin{aligned}B^n&=(3E+B_1)^n=(3E)^n+n(3E)^{n-1}B_1\\&=\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}+n\cdot 3^{n-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3^n & n\cdot 3^{n-1}\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

又由于 $C=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}(1\quad 3)$,则

$$\begin{aligned}C^n&=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}(1\quad 3)\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}(1\quad 3)\cdots\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}(1\quad 3)\\&=\left[(1\quad 3)\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\right]^{n-1}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}(1\quad 3)\\&=6^{n-1}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}(1\quad 3)=6^{n-1}\begin{pmatrix}3 & 9\\ 1 & 3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

因此,$A^n=\begin{pmatrix}3^n & n\cdot 3^{n-1} & 0 & 0\\ 0 & 3^n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\cdot 6^{n-1} & 9\cdot 6^{n-1}\\ 0 & 0 & 6^{n-1} & 3\cdot 6^{n-1}\end{pmatrix}$.

# 本章小结


矩阵
定义及其运算
矩阵的概念
矩阵的运算
加法
数乘
乘法
方阵的幂
矩阵的转置
方阵的行列式
伴随矩阵与可逆矩阵
伴随矩阵定义、运算公式
可逆矩阵定义、可逆充要条件、性质
初等变换与初等矩阵
矩阵的初等变换
初等矩阵
初等变换的应用
矩阵的秩
秩的定义
秩的基本性质
初等变换法求矩阵的秩
分块矩阵
定义
运算
加法、数乘、乘法、转置
分块对角阵

# 第三章 向量

## 教学重难点

向量的概念，向量的线性组合和线性表示，向量组的线性相关与线性无关，向量组的极大无关组，等价向量组，向量组的秩，向量组的秩与矩阵的秩之间的关系，向量空间及其相关概念(仅数一)，$n$维向量空间的基变换与坐标变换(仅数一)，过渡矩阵(仅数一).

## 考纲点击

1. 理解$n$维向量、向量的线性组合与线性表示的概念.

2. 理解向量组线性相关、线性无关的概念，掌握向量组线性相关、线性无关的有关性质及判别法.

3. 理解向量组的极大线性无关组和向量组的秩的概念，会求向量组的极大线性无关组及秩.

4. 理解向量组等价的概念，理解矩阵的秩与其行(列)向量组的秩之间的关系.

5. 了解$n$维向量空间、子空间、基、维数、坐标等概念(仅数一).

6. 了解基变换和坐标变换公式，会求过渡矩阵(仅数一).

## 教学建议

建议教学时长5课时.

## 内容聚焦

## 第一节 向量组及其线性组合

### 一、向量的定义及运算

**1. 向量的定义**

**定义** $n$个有次序的数$a_1,a_2,\cdots,a_n$构成的有序数组，称为$n$维向量. 这$n$个数称为该向量的分量.

$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，称为$n$维行向量.

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$，称为$n$维列向量.

【注】零向量的每个分量都是$0$，记作$\mathbf{0}$，即$\mathbf{0}=(0,0,\cdots,0)$.

**2. 向量的运算**

**定义** 设$\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{\mathrm{T}}$.

(1) 向量内积：$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$.

(2) 向量相等：$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow a_i=b_i\ (i=1,2,\cdots n)$，即向量每个对应分量都相等.

【注】由于行向量等同于行矩阵，列向量等同于列矩阵，因此向量的加法运算与数乘运算按照矩阵运算规则进行.

**3. 向量组**

**定义** 若干个同维数的列(行)向量所组成的集合称为向量组.

## 二、向量的线性组合

**定义** 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，对于任意一组实数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，表达式

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

称为向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_n$称为这个线性组合的系数.

## 三、向量的线性表示

**1. 线性表示的定义**

给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和向量$\boldsymbol{\beta}$，如果存在一组数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$的线性组合，称向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

**2. 线性表示的判定**

**定理** 向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示的充分必要条件是$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，其中$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta})$.

**例 1** 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(6,2,-1,-2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,3,1,t)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(10,4,-1,-5)^{\mathrm{T}}$，若$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，则(　　).

(A) $t=-3$　　(B) $t=1$　　(C) $t\neq 1$　　(D) $t\neq -3$

【考查知识点】向量线性表示的判定.

【答案】(D).

【解析】设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$组成的矩阵为$\boldsymbol{A}$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$组成的矩阵为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$，对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$进行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}2&6&4&10\\1&2&3&4\\0&-1&1&-1\\-1&-2&t&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&3&4\\2&6&4&10\\-1&-2&t&-5\\0&-1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&3&4\\0&2&-2&2\\0&0&t+3&-1\\0&-1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&2&3&4\\0&1&-1&1\\0&0&t+3&-1\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

故当$t+3\neq 0$，即$t\neq -3$时，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$，$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

**例(选讲)** 设向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,t,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(t,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(4,t^2,-4)^{\mathrm{T}}$，当$t=$________时，$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

**【考查知识点】**向量线性表示的判定.

**【答案】**$-1$.

**【解析】**设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$组成的矩阵为$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$组成的矩阵为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$. 对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$进行初等行变换，有

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&t&4\\-1&t&1&t^2\\1&-1&2&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&t&4\\0&t+1&t+1&t^2+4\\0&-2&2-t&-8\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&t&4\\0&2&t-2&8\\0&t+1&t+1&t^2+4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&t&4\\0&2&t-2&8\\0&0&\frac{1}{2}(t+1)(4-t)&t(t-4)\end{array}\right).$$

当$\frac{1}{2}(t+1)(4-t)=0$且$t(t-4)\neq 0$，即$t=-1$时，$r(\boldsymbol{A})=2,r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=3$，此时$\boldsymbol{\beta}$不能由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示.

**例 2** 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$，判断向量$\boldsymbol{\beta}$能否由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示, 若能，写出其组合系数.

**【解】**设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$组成的矩阵为$\boldsymbol{A}$，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}$组成的矩阵为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$. 对矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$进行初等行变换，

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&2&1\\0&2&1&-1&0\\1&3&2&0&0\\1&1&0&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&2&1\\0&2&1&-1&0\\0&2&2&-2&-1\\0&0&0&-1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&2&1\\0&2&1&-1&0\\0&0&1&-1&-1\\0&0&0&-1&0\end{array}\right),$$

由于$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=4$，故$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性表示，对$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$继续施以初等行变换，化为行最简形得

$$(A,\beta)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{array}\right),$$

故 $\beta=\frac{1}{2}\alpha_1+\frac{1}{2}\alpha_2-\alpha_3+0\alpha_4$.

## 四、向量组等价

### 1. 向量组线性表示

(1) 定义

设有两个向量组 (I) : $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ , (II) : $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ , 若 (II) 中的每个向量都能由向量组 (I) 线性表示，则称向量组 (II) 能由向量组 (I) 线性表示.

**【注】**把向量组 (I) 和 (II) 构成的矩阵记作 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ 和 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$ ，向量组 (II) 能由向量组 (I) 线性表示，即对每个向量 $\beta_j\,(j=1,2,\cdots,n)$，存在数

$k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{mj}$，使 $\beta_j=k_{1j}\alpha_1+k_{2j}\alpha_2+\cdots+k_{mj}\alpha_m=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{1j}\\k_{2j}\\\vdots\\k_{mj}\end{pmatrix}$，

从而

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{mn}\end{pmatrix},$$

记 $K=\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1n}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{m1}&k_{m2}&\cdots&k_{mn}\end{pmatrix}$，$K$ 为这一表示的系数矩阵，故 $B=AK$，即 $B$ 的列向量组能由 $A$ 的列向量组线性表示.

由此，若 $A_{m\times l}B_{l\times n}=C_{m\times n}$，则矩阵 $C$ 的列向量能由 $A$ 的列向量线性表示，$B$ 为这一表示的系数矩阵;同理矩阵 $C$ 的行向量能由 $B$ 的行向量线性表示，$A$ 为这一表示的系数矩阵.

(2) 性质

向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 能由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则 $r(B)\le r(A)$，其中 $A$ 和 $B$ 分别为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$ 构成的矩阵.

(3) 向量组线性表示的判定

向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示的充分必要条件为$r(A)=r(A,B)$，其中$A$和$B$分别为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_l$构成的矩阵.

**2. 向量组等价**

(1) 定义

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$能相互线性表示，称这两个向量组等价.

**【注】**向量组等价时，向量个数可以不同，但向量维数相同.

(2) 性质

等价的向量组具有反身性、对称性和传递性.

(3) 向量组等价的判定

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$等价的充分必要条件是

$$r(A)=r(B)=r(A,B),$$

其中$A$和$B$分别为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$构成的矩阵.

**例 3** 已知向量组(I)：$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，(II)：$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}2\\4\\t\end{pmatrix}$. 若向量组(I)与向量组(II)等价，则$t=$________.

**【考查知识点】**向量组等价的判定.

**【答案】**2.

**【解析】**记$A=(\alpha_1,\alpha_2)$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，向量组(I)与向量组(II)等价，则$r(A)=r(B)=r(A,B)$.

对向量组构成的矩阵$(A,B)$进行初等行变换，有

$$(A,B)=\left(\begin{array}{cc:ccc}0&1&-1&1&2\\1&1&0&2&4\\1&0&1&1&t\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:ccc}1&1&0&2&4\\0&1&-1&1&2\\0&-1&1&-1&t-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc:ccc}1&1&0&2&4\\0&1&-1&1&2\\0&0&0&0&t-2\end{array}\right),$$

$t-2=0$，即$t=2$时，$r(A)=r(B)=r(A,B)=2$，向量组(I)与向量组(II)等价.

**例 4** 设$A$是3阶方阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是线性无关的三维列向量组，且

$$A\alpha_1=\alpha_1-2\alpha_2,A\alpha_2=\alpha_2-2\alpha_3,A\alpha_3=\alpha_3-2\alpha_1,$$

则$|A|=$________.

**【考查知识点】**向量组的线性表示.

**【答案】**$-7$.

**【解析】**由于$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3$均可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，故

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

从而

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix},$$

又由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，即三阶矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$可逆，$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\neq 0$，对上述等式两边取行列式得，

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix},$$

所以$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\0&1&-4\\0&-2&1\end{vmatrix}=-7$.

# 第二节 向量组的线性相关性

## 一、向量组线性相关与线性无关的定义

**定义** 给定向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，若存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0},$$

则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性相关.

若当且仅当$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$成立，则称向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.

## 二、向量组线性相关性的判定及性质

**1. 线性相关**

向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关

$\Leftrightarrow$ 向量组中至少有一个向量能由其余$s-1$个向量线性表示；

$\Leftrightarrow$ 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$构成的矩阵$\boldsymbol{A}$的秩小于向量组的个数，即$r(\boldsymbol{A})<s$；

$\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$有非零解.

特别的，

$n$ 个 $n$ 维向量线性相关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|=0$；

$n+1$ 个 $n$ 维向量一定线性相关；

一个向量线性相关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；

两个向量线性相关的充分必要条件是它们对应的分量成比例.

**2. 线性无关**

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow$ 向量组中任意一个向量都不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示；

$\Leftrightarrow$ 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于向量的个数，即 $r(\boldsymbol{A})=s$；

$\Leftrightarrow$ 齐次方程组 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_s\end{pmatrix}=\mathbf{0}$ 只有零解.

特别的，

$n$ 个 $n$ 维向量线性无关 $\Leftrightarrow |\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n|\neq 0$；

一个向量线性无关的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$；

**例 5** $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s(3\le s\le n)$ 线性无关的充要条件是(　　).

(A)存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\neq 0$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性无关

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 存在一个向量不能由其余向量线性表示

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一个向量不能由其余向量线性表示

**【考查知识点】**向量组线性无关的定义及判定.

**【答案】**(D).

**【解析】**向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则对任一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $\sum\limits_{i=1}^{s}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\neq 0$，故(A)为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的必要非充分条件.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任两个向量都线性无关，反之不成立，(B)不正确.

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任一向量均不可由其余向量线性表示，(C)不正确，(D)正确.

故选(D).

**例 6** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$ 线性相关，则 $a=$________.

**【考查知识点】**向量组线性相关的定义及判定.

**【答案】**$-1$.

**【解析】**由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)<3$，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\2&a+2&4\\3&1&a+8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&a&2\\0&-2&a+5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&0&2+2a\\0&0&a+1\end{pmatrix},$$

故 $a=-1$.

**例(选讲)** 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,1,1)^{\mathrm{T}}$，已知 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，则 $a=$________.

**【考查知识点】**向量组线性相关的定义及判定.

**【答案】**$-1$.

**【解析】**由于 $\boldsymbol{A\alpha}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，由两个非零向量线性相关的充要条件可得 $\boldsymbol{A\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}$，即 $\dfrac{a}{a}=\dfrac{2a+3}{1}=\dfrac{3a+4}{1}$，得 $a=-1$.

**例 7** 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$. 证明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

**【考查知识点】**向量组线性相关性的定义及判定.

**【证明】方法一** 由题意，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，即

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)&=(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)\\&=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&2\\-1&1&-1\\2&-1&3\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AC}$.

又因为$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&-1\\2&-1&3\end{vmatrix}=0$，故$r(\boldsymbol{C})\le 2$，又$|\boldsymbol{C}|$中存在一个二阶子式$\begin{vmatrix}1&0\\-1&1\end{vmatrix}$不为零，即$r(\boldsymbol{C})\ge 2$，故可得$r(\boldsymbol{C})=2$.

由于$r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{AC})\le\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{C})\}=2<3$，故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.

**方法二** 设存在常数$k_1,k_2,k_3$，使得$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，则

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{0},$$

整理可得，

$$(k_1+2k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-k_1+k_2-k_3)\boldsymbol{\alpha}_2+(2k_1-k_2+3k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，所以

$$\begin{cases}k_1+2k_3=0,\\-k_1+k_2-k_3=0,\\2k_1-k_2+3k_3=0,\end{cases}$$

齐次线性方程组的系数行列式$\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&-1\\2&-1&3\end{vmatrix}=0$，故该齐次线性方程组有非零解，即存在不全为零的$k_1,k_2,k_3$，满足$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$，故向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$线性相关.

**【注】** 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，若$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C}$.

(1) $m=n$时，$\boldsymbol{C}$为方阵，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关的充要条件是$|\boldsymbol{C}|\ne 0$，线性相关的充要条件$|\boldsymbol{C}|=0$.

(2) $m\ne n$时，$\boldsymbol{C}$不为方阵，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$线性无关的充要条件是$r(\boldsymbol{C})=m$.

**例(选讲)** 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，则下列向量组中线性无关的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+22\boldsymbol{\alpha}_3,3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$

**【考查知识点】** 向量组线性相关性的定义与判定.

**【答案】** (C).

**【解析】** 由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix},$$

且$\begin{vmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{vmatrix}=12\ne 0$，所以由上题可知$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

故选(C).

**例 8** 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\t+2\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}t-1\\1\\-1\end{pmatrix}$线性相关，但任意两个向量线性无关，则$t=$________.

**【考查知识点】**向量组线性相关与线性无关的定义及判定.

**【答案】**$-5$.

**【解析】**由于向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，故可得

$$|\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3|=\begin{vmatrix}1&2&t-1\\t+2&-1&1\\3&1&-1\end{vmatrix}=(t+1)(t+5)=0,$$

所以$t=-1$或$t=-5$.

当$t=-1$时，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$，此时$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关. 故$t=-1$不符合题意.

当$t=-5$时，

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&2&-6\\-3&-1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{4}{5}\\0&1&-\frac{17}{5}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

此时，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$中任意两个向量线性无关，故$t=-5$符合题意.

综上可得$t=-5$.

**3．向量组线性相关与线性无关的性质**

(1) 向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，且$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$线性相关，则向量$\boldsymbol{\beta}$可由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示，且表示方法唯一.

(2) $m$个$n$维向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，当维数$n$小于向量个数$m$时一定线性相关. 特别地，$n+1$个$n$维向量线性相关.

(3) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，若$s>t$，则$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性相关.

(4) 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$能由向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$线性表示，若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，则$s\le t$.

(5) 若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$也线性相关；反之，若向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1}$线性无关，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$也线性无关.

【注】部分组相关，则整体相关；整体无关，则部分组无关.

(6)若$r$维向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关，对每个向量$\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$都加上$n-r$个分量得到$n$维向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性无关.

(7)若向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关，对每个向量$\boldsymbol{\beta}_i\ (i=1,2,\cdots,s)$都删去若干个具有相同序号的分量得到向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$，则向量组$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$线性相关.

【注】低维无关，则高维无关；高维相关，则低维相关.

**例 9** 若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，则(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

(C) $\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示

**【考查知识点】**线性相关和线性无关的性质.

**【答案】**(A).

**【解析】**$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关，故$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关. 又$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性相关，因此$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，且表示法唯一.

(B)中若$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，又$\boldsymbol{\alpha}_1$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示，故$\boldsymbol{\alpha}_4$可由$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$表示，与$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关矛盾, (B)不正确.

同理可得(C)(D)均不正确，故选(A).

**例 10** 对任意实数$a,b,c$，下列向量组线性无关的是(　　).

(A) $(a,1,2)^{\mathrm{T}},(2,b,c)^{\mathrm{T}},(0,0,0)^{\mathrm{T}}$

(B) $(b,1,1)^{\mathrm{T}},(1,a,3)^{\mathrm{T}},(2,3,c)^{\mathrm{T}},(a,0,c)^{\mathrm{T}}$

(C) $(1,a,1,1)^{\mathrm{T}},(1,b,1,0)^{\mathrm{T}},(1,c,0,0)^{\mathrm{T}}$

(D) $(1,1,a)^{\mathrm{T}},(2,2,2a)^{\mathrm{T}},(2,7,b)^{\mathrm{T}},(0,1,c)^{\mathrm{T}}$

**【考查知识点】**线性相关的定义及性质.

**【答案】**(C).

**【解析】**对于(A)，包含零向量的向量组必线性相关，(A)不正确.

对于(B)，4个三维向量必线性相关，(B)不正确.

对于(D)，向量组的部分组$(1,1,a)^{\mathrm{T}},(2,2,2a)^{\mathrm{T}}$线性相关，故整个向量组线性相关，(D)不正确.

对于(C)，记3个向量构成的矩阵为$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&1\\a&b&c\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，其秩不超过列数，即$r(\boldsymbol{C})\le 3$，

又三阶子式$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=-1\ne 0$，故$r(\boldsymbol{C})\ge 3$，可知$r(\boldsymbol{C})=3$，所以向量组线性无关.

故选(C).

# 第三节 向量组的秩

## 一、向量组的极大线性无关组及秩的定义

**定义** 设有向量组 $A$，若从 $A$ 中选取 $r$ 个向量构成向量组 $A_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，满足

(1) 向量组 $A_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关；

(2) 向量组中任意 $r+1$ 个向量(如果存在的话)都线性相关，

则称向量组 $A_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是向量组 $A$ 的一个极大线性无关组，简称极大无关组.

极大无关组中所含向量的个数 $r$ 称为向量组 $A$ 的秩，记作 $r(A)=r$.

**【注】**①规定只含零向量的向量组的秩为 $0$.

②一个向量组的极大无关组通常不唯一，但是一个向量组的所有极大无关组所含向量个数均为 $r$，这些极大无关组等价.

③向量组与其自身的极大无关组等价.

④线性无关向量组的极大线性无关组就是它本身，秩为它所含向量的个数.

## 二、向量组秩的性质

(1) 若 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)=r$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 $r$ 个线性无关的向量都可组成该向量组的一个极大无关组.

(2) 矩阵的秩等于它列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩.

(3) $n$ 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示的充分必要条件是

$$r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n).$$

(4) $n$ 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，则

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\le r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

(5) 设两个 $n$ 维列向量组 $(\mathrm{I}):\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，$(\mathrm{II}):\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，则向量组 $(\mathrm{I})$ 和 $(\mathrm{II})$ 等价的充要条件为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=r(\mathrm{I},\mathrm{II})$.

**【注】** $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$ 为向量组 $(\mathrm{I})$ 和 $(\mathrm{II})$ 等价的必要条件，而非充分条件.

**例 11** 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,t,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-4,5,-2)^{\mathrm{T}}$ 的秩为 $2$，则 $t=$________.

**【考查知识点】**向量组秩的求解.

**【答案】**3.

**【解析】**对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 进行初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&0&-4\\-1&t&5\\1&0&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&-4&-4\\0&t+2&5\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&t-3&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

由于$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$，故$t=3$.

**例 12** 已知向量$\alpha_1=(1,0,2,3)^{\mathrm T}$，$\alpha_2=(1,1,3,5)^{\mathrm T}$，$\alpha_3=(1,2,4,a)^{\mathrm T}$，$\alpha_4=(1,1,b,5)^{\mathrm T}$线性相关. 求$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$及$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的一个极大线性无关组，并把其余向量用极大无关组表示.

**【考查知识点】**向量组的秩，极大无关组的计算.

**【解】**由于$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，故$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 3$.

对向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$组成的矩阵进行初等行变换，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&1\\2&3&4&b\\3&5&a&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&a-7&0\\0&0&0&b-3\end{pmatrix}.$$

(1) 当$a=7,b=3$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=2$，极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2$，此时

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，$\alpha_4=\alpha_2$.

(2) 当$a=7,b\ne 3$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，此时

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_4$.

(3) 当$a\ne 7,b=3$时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3$，极大线性无关组为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，此时

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\to\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故$\alpha_4=0\alpha_1+\alpha_2+0\alpha_3$.

**例 13** 设$m\times n$阶非零矩阵$\boldsymbol A$，$n\times s$阶非零矩阵$\boldsymbol B$，满足$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol O$，则必有(　　).

(A) $\boldsymbol A$的列向量组线性相关，$\boldsymbol B$的行向量组线性相关

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关， $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关， $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关， $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

**【考查知识点】**向量组秩的性质：矩阵的秩既等于行向量组的秩，又等于列向量组的秩.

**【答案】**(A).

**【解析】**由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，故 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\le n$，又 $\boldsymbol{A}$， $\boldsymbol{B}$ 均为非零矩阵，故 $r(\boldsymbol{A})\ge 1$，$r(\boldsymbol{B})\ge 1$，从而 $r(\boldsymbol{A})<n$，$r(\boldsymbol{B})<n$，即 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

故选(A).

# 第四节 向量空间（仅数一）

## 一、向量空间的定义

### 1. 向量空间的定义

**定义** 设$V$是$n$维向量集合，若集合$V$非空，且集合$V$对于向量的加法和数乘两种运算封闭，即

(1)任意$\boldsymbol{\alpha}\in V,\boldsymbol{\beta}\in V$，则$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$；

(2)任意$\boldsymbol{\alpha}\in V,\lambda\in\mathbf{R}$，则$\lambda\boldsymbol{\alpha}\in V$，

则称$V$为一个向量空间.

### 2. 子空间的定义

**定义** 设有向量空间$V_1$及$V_2$，若$V_1\subseteq V_2$，则称$V_1$是$V_2$的子空间.

## 二、向量空间的基

### 1. 向量空间的基与维数

**定义** 设$V$ 为向量空间，若$r$个向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\in V$，且满足：

(1)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性无关；

(2)$V$ 中任一向量都可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，

称$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为向量空间$V$ 的一个基，称$r$为向量空间$V$ 的维数，并称$V$ 是$r$维向量空间.

特别地，在$n$维向量空间中取单位坐标向量组$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为基，称$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$为$n$维向量空间的自然基.

**2. 向量在基下的坐标**

**定义** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为向量空间$V$的一个基，$\boldsymbol{x}$是向量空间$V$的任意一个向量，则

$$\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

称有序数组$x_1,x_2,\cdots,x_r$为向量$\boldsymbol{x}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$下的坐标.

一般地，由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$生成的向量空间为

$$V=\{\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_r\boldsymbol{\alpha}_r\mid x_1,x_2,\cdots,x_r\in\mathbf{R}\}.$$

## 三、基变换与坐标变换

**1. 基变换公式**

**定义** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$与$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$分别是$r$维向量空间的两个基，从而$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表示，即

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=c_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{r1}\boldsymbol{\alpha}_r,\\ \boldsymbol{\beta}_2=c_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{r2}\boldsymbol{\alpha}_r,\\ \qquad\qquad\vdots\\ \boldsymbol{\beta}_r=c_{1r}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2r}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{rr}\boldsymbol{\alpha}_r,\end{cases}$$

也即

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rr}\end{pmatrix},$$

记$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1r}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rr}\end{pmatrix}$，上式写为$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)\boldsymbol{C}$，则该变换为基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的基变换公式.

矩阵$\boldsymbol{C}$称为由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的过渡矩阵.

**2. 坐标变换**

设$\boldsymbol{x}$是向量空间中的任意一个向量，它在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$下的坐标为$(x_1,x_2,\cdots,x_r)^{\mathrm{T}}$，在基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$下的坐标为$(y_1,y_2,\cdots,y_r)^{\mathrm{T}}$，则坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_r\end{pmatrix}=\boldsymbol{C}^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_r\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{C}$是由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$的过渡矩阵.

**例14** 已知三维向量空间的一组基为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$，则向量$\boldsymbol{\beta}=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$在上述基下的坐标是________.

**【考查知识点】**坐标变换.

**【答案】**$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

**【解析】方法一** 设$\boldsymbol{\beta}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3$，则$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$，即$x_1,x_2,x_3$满足方程组$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_1+x_3=1,\\x_2+x_3=1.\end{cases}$

非齐次线性方程组的系数矩阵的行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2，\quad D_1=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0，$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&1\\0&1&1\end{vmatrix}=0，\quad D_3=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2.$$

由克拉默法则，

$$x_1=\frac{D_1}{D}=0，\quad x_2=\frac{D_2}{D}=0，\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

因此，向量$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标是$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

**方法二**

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}，\quad(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}，$$

因此，向量$\boldsymbol{\beta}$在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$下的坐标是$(0,0,1)^{\mathrm{T}}$.

**例 15** 已知三维向量空间的两组基为

(I) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$；

(II) $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,3,4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(3,4,3)^{\mathrm{T}}$.

求由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵.

【考查知识点】过渡矩阵.

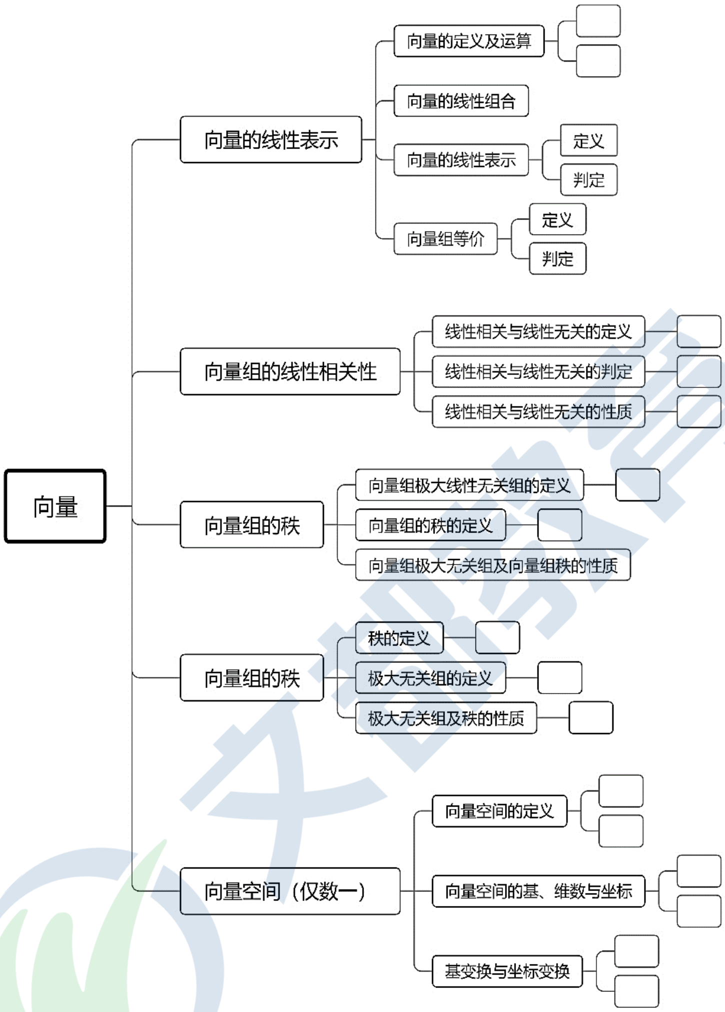
【解】设基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$的过渡矩阵为$\boldsymbol{C}$，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3),$$

因此，

$$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)^{-1}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$$

# 本章小结


向量
向量的线性表示
向量的定义及运算
向量的线性组合
向量的线性表示
定义
判定
向量组等价
定义
判定
向量组的线性相关性
线性相关与线性无关的定义
线性相关与线性无关的判定
线性相关与线性无关的性质
向量组的秩
向量组极大线性无关组的定义
向量组的秩的定义
向量组极大无关组及向量组秩的性质
向量组的秩
秩的定义
极大无关组的定义
极大无关组及秩的性质
向量空间（仅数一）
向量空间的定义
向量空间的基、维数与坐标
基变换与坐标变换

# 第四章 线性方程组

## 教学重难点

齐次线性方程组有非零解的充分必要条件，非齐次线性方程组有解的充分必要条件，线性方程组解的性质和解的结构，齐次线性方程组的基础解系和通解，非齐次线性方程组的通解.

## 考纲点击

1. 掌握非齐次线性方程组有解和无解的判定方法.

2. 理解齐次线性方程组的基础解系的概念，掌握齐次线性方程组的基础解系和通解的求法.

3. 理解非齐次线性方程组通解的概念及结构.

4. 掌握用初等行变换求解线性方程组的方法.

## 教学建议

建议教学时长为3课时.

## 内容聚焦

# 第一节 线性方程组

## 一、线性方程组的基本概念

### 1、非齐次线性方程组

(1) 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

其中 $b_i(i=1,\cdots,m)$ 不全为 $0$，则此方程组称为 $m$ 个方程 $n$ 个未知数的非齐次线性方程组.

如果记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=(A,b)=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为非齐次线性方程组的系数矩阵， $\boldsymbol{B}$ 为非齐次线性方程组的增广矩阵.

(2) 非齐次线性方程组的矩阵表示式为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$.

(3) 若将系数矩阵按列分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则非齐次线性方程组的向量形式为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}.$$

**2、齐次线性方程组**

(1) 如果非齐次线性方程组的常数项 $b_i(i=1,\cdots,m)$ 均为 $0$，即方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

称为齐次线性方程组.

此齐次线性方程组称为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组.

(2) 齐次线性方程组的矩阵表示式为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.

(3) 齐次线性方程组的向量形式为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$.

# 第二节 线性方程组的求解

第二章我们已经学习了矩阵的初等变换，求解线性方程组我们采用的是加减消元法，实质上就是对系数矩阵施行初等行变换. 求解方程组之前我们需先掌握方程组有解的判定，解的性质和结构.

## 一、齐次线性方程组的解

**1、齐次线性方程组解的判定**

齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r<n$. 若 $r(\boldsymbol{A})=n$，则方程组仅有零解.

(1) 当 $m<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

(2) 当 $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是 $|\boldsymbol{A}|=0$；若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程组仅有零解.

**例 1** 已知齐次线性方程组$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ x_1+ax_2+2x_3=0, \\ ax_1+4x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+(a+2)x_2-5x_3=0 \end{cases}$有非零解，则 $a=$________.

**【考查知识点】** 齐次线性方程组解的判定.

**【答案】** 2.

**【解析】** 设方程组系数矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ a & 4 & 3 \\ 2 & a+2 & -5 \end{pmatrix}$，方程组有非零解，故可知 $r(\boldsymbol{A})<3$.

将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ a & 4 & 3 \\ 2 & a+2 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 4-2a & 3-a \\ 0 & a-2 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & 5-a \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

若 $a=2$，则 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=2$.

若 $a\neq 2$，$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{A})=3$；

综上可得 $a=2$.

**2、齐次线性方程组解的性质**

**性质 1** 若向量 $\xi_1,\xi_2$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则向量 $\xi_1+\xi_2$ 也是该方程组的解.

**性质 2** 若向量 $\xi_1$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则对于任意实数 $k$，有 $k\xi_1$ 也是该方程组的解.

**性质 3** 若向量 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_t$ 都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$$

也是该方程组的解，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_t\in\mathbf{R}$.

**3、齐次线性方程组的基础解系**

**定义** 设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，满足

(1) $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性无关；

(2) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的任一解 $\xi$ 都可由 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 线性表示，

则称$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系.

**定理** 设$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为$r(\boldsymbol{A})=r$,则齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中向量个数为$n-r(\boldsymbol{A})=n-r$.

**例 2** $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系,试证向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$$

也为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

**【考查知识点】**基础解系,齐次线性方程组的解.

**【证明】**由题可得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,且$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中向量的个数为$3$.

由齐次线性方程组的性质可知

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\ \boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$$

均为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解.

又因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

且$\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=2\neq0$,故矩阵$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$可逆,于是

$$r(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=3,$$

故$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

综上可知该向量组也是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系.

**例3** 设矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&0&a&0\\0&1&2&1\\1&-3&-5&b\end{pmatrix}$,$\xi_1,\xi_2$为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系,则$a=$________,$b=$________.

**【考查知识点】**基础解系.

**【答案】**$2,-3$.

**【解析】**由题意可知$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中有两个向量,故$r(\boldsymbol{A})=4-2=2$,将$\boldsymbol{A}$化为行阶梯形

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&3&1\\2&0&a&0\\0&1&2&1\\1&-3&-5&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&3&1\\0&1&2&1\\0&0&a-2&0\\0&0&0&b+3\end{pmatrix},$$

故 $a=2$， $b=-3$.

**4、基础解系的计算方法**

(1) 对方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 施行初等行变换，化为行最简形矩阵；

(2) 确定方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})=r$，由此再确定方程组的 $n-r$ 个自由未知量；

(3) 求出方程组的一个基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$；若自由未知量为 $x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n$，则基础解系的取法如下:

$$\xi_1=\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\cdots,\xi_{n-r}=\begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**5、齐次线性方程组的通解**

设齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r(\boldsymbol{A})=r<n$， $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r},$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

**例 4** 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} -6x_1+9x_2+3x_3=0, \\ -2x_1+3x_2+5x_3+4x_4=0, \\ -4x_1+6x_2+4x_3+2x_4=0 \end{cases}$$

的基础解系及通解.

**【考查知识点】**利用初等变换法求解齐次线性方程组的通解.

**【解】**对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换化为行最简形矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -6 & 9 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 & -12 \\ -2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应的同解方程组为$\begin{cases} x_1-\frac{3}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4=0, \\ x_3+x_4=0. \end{cases}$于是$\begin{cases} x_1=\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}x_4, \\ x_3=-x_4. \end{cases}$

取自由未知量为$x_2,x_4$，则基础解系为$\xi_1=\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

故原方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}k_1-\frac{1}{2}k_2 \\ k_1 \\ -k_2 \\ k_2 \end{pmatrix},\ k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

**例(选讲)** 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}$，$r(\boldsymbol{A})=3$，且$\boldsymbol{A}$的每行元素之和为$0$，那么方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解是____________.

**【考查知识点】**齐次线性方程组解的结构.

**【答案】** $\boldsymbol{x}=k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$， $k$为任意常数.

**【解析】**因为$r(\boldsymbol{A})=3$，所以方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中仅有$1$个线性无关的向量，又$\boldsymbol{A}$的每行元素之和为$0$，即$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，于是$\boldsymbol{\xi}=(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$为方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个非零解，从而方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的通解为$\boldsymbol{x}=k(1,1,1,1)^{\mathrm{T}}$， $k$为任意常数.

**例(选讲)** 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,1,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}}$可表示齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任意一个解，试求$r(\boldsymbol{A})$及满足条件的一个矩阵$\boldsymbol{A}$.

**【考查知识点】**齐次线性方程组解的性质及结构.

**【解】**由于四维列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$可表示方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的任意一个解，故$\boldsymbol{A}$的列数为$4$，且$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系与向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$等价，即$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=4-r(\boldsymbol{A})$.

由于

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)=2$，故$r(\boldsymbol{A})=2$.

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 可作为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系，于是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{O}$，两边取转置得 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2)$，由于

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1&-1\\3&1&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{pmatrix},$$

所以方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{y}_1=(-1,1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}_2=(-1,-3,0,2)^{\mathrm{T}}$. 因此满足条件的一个矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2&0\\-1&-3&0&2\end{pmatrix}.$$

## 二、非齐次线性方程组的解

### 1、非齐次线性方程组解的判定

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r$.

当 $r=n$ 时，方程组有唯一解；当 $r<n$ 时，方程组有无穷多解；

若 $r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$，则方程组无解.

**例 5** 已知方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=a-3,\\x_1+ax_2+x_3=-2,\\x_1+x_2+ax_3=-2,\end{cases}$$

有无穷多解，则 $a=$________.

**【考查知识点】**非齐次线性方程组解的判定.

**【答案】**1.

**【解析】**由题意可得方程组的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}a&1&1&a-3\\1&a&1&-2\\1&1&a&-2\end{array}\right)$，将 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 化为行阶梯形得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}a&1&1&a-3\\1&a&1&-2\\1&1&a&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&-2\\1&a&1&-2\\a&1&1&a-3\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&0\\0&1-a&1-a^2&3a-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&a&-2\\0&a-1&1-a&0\\0&0&2-a-a^2&3a-3\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)(a+2) & 3(a-1)\end{array}\right),$$

由于方程组有无穷多解，故 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})<3$.

若 $a=1$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=1<3$；

若 $a=-2$，则 $r(\boldsymbol{A})=2, r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$；

若 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$.

综上可得 $a=1$.

**例(选讲)** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 所对应的齐次线性方程组, 则下列结论正确的是(　　).

(A) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解

(B) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解

(C) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解

(D) 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解

**【考查知识点】** 齐次线性方程组, 非齐次线性方程组解的判定.

**【答案】** (D).

**【解析】** 由于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解的情况, 不能推得 $r(\boldsymbol{A})$ 与 $r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 是否相等，所以(A)，(B)均不正确.

由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多个解可知，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})<n$. 根据齐次线性方程组有非零解的充分必要条件可知，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解.

故选(D).

**2、非齐次线性方程组解的性质**

**性质 1** 若向量 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

**性质 2** 若向量 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解, 向量 $\boldsymbol{\xi}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.

**3、非齐次线性方程组通解**

设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$，若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=r<n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，$\boldsymbol{\eta}^*$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解, 则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*,$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

**例6** 设$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$是三元非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的3个解，且$r(\boldsymbol{A})=2$，

$$\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix},$$

求方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解.

**【考查知识点】** 非齐次线性方程组解的结构.

**【解】** 由$r(\boldsymbol{A})=2$知，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中只含一个线性无关的向量，而$\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\eta}_3-\boldsymbol{\eta}_2=(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_3)-(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个非零解，故$\boldsymbol{\xi}$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系. 又因为

$$\boldsymbol{A}[\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)]=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A\eta}_1+\boldsymbol{A\eta}_2)=\boldsymbol{b},$$

所以$\boldsymbol{\eta}^*=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个特解，从而方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}^*+k\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ k\text{ 为任意常数.}$$

**例（选讲）** 设$\boldsymbol{A}$为3阶非零矩阵，满足$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，若非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$有解，则其线性无关解向量的个数为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

**【考查知识点】** 非齐次线性方程组解的性质.

**【答案】** (C).

**【解析】** $\boldsymbol{A}$为3阶非零矩阵，故$r(\boldsymbol{A})\geq 1$. $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{A})\leq 3$，$r(\boldsymbol{A})\leq\frac{3}{2}$，即$r(\boldsymbol{A})\leq 1$，故可得$r(\boldsymbol{A})=1$.

齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系中有$3-r(\boldsymbol{A})=2$个向量，故非齐次方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的线性无关的解向量的个数为3.

故选(C).

**例（选讲）** 设$\boldsymbol{A}$为$n(n>2)$阶方阵，$r(\boldsymbol{A}^*)=1$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的两个不同解，$k$为任意常数，则方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解为（　　）.

(A) $(k-1)\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$　　(B) $(k-1)\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\alpha}_2$

(C) $(k+1)\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\alpha}_2$　　(D) $(k+1)\boldsymbol{\alpha}_1-k\boldsymbol{\alpha}_2$

**【考查知识点】** 非齐次线性方程组解的结构.

【答案】(D).

【解析】由于 $r(A^*)=1$，故 $r(\boldsymbol{A})=n-1$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中有 $n-r(\boldsymbol{A})=1$ 个向量. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同解，故 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，即为基础解系，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\boldsymbol{\alpha}_1$ 或 $\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\boldsymbol{\alpha}_2$，$k$ 为任意常数.

故选(D).

**4. 非齐次线性方程组通解的求法**

(1)对方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 施行初等行变换，化为行阶梯形矩阵；

(2)求出方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$；

(3)求出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解 $\boldsymbol{\eta}^*$；

(4)构造非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解

$$\boldsymbol{x}=k_1\xi_1+k_2\xi_2\cdots+k_{n-r}\xi_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*,$$

其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}$ 为任意常数.

**例 7** 解方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+2x_4=-3,\\3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=3,\\4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=-6,\\3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=21.\end{cases}$$

**【考查知识点】**利用初等变换法求非齐次线性方程组的解.

**【解】**对增广矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$ 施行初等行变换将其化为行最简形矩阵.

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&2&-3\\3&5&6&-4&3\\4&5&-2&3&-6\\3&8&24&-19&21\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&-2&2&-3\\0&2&12&-10&12\\0&1&6&-5&6\\0&5&30&-25&30\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&0&-8&7&-9\\0&1&6&-5&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

对应最简同解方程组为

$$\begin{cases}x_1-8x_3+7x_4=-9,\\x_2+6x_3-5x_4=6.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_1=-9+8x_3-7x_4,\\x_2=6-6x_3+5x_4.\end{cases}$$

取自由未知量 $x_3,x_4$，则基础解系为 $\xi_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}$，特解为 $\begin{pmatrix}-9\\6\\0\\0\end{pmatrix}$，故方程组通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-9\\6\\0\\0\end{pmatrix}(k_1,k_2\in\mathbf{R}).$$

**例 8** 线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1,\\x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1,\end{cases}$ $\lambda$ 取何值时有唯一解、无穷多解、无解？在有无穷多解时，求其通解.

**【解】** 由于

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\\1&1&1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&\lambda&1&1\\1&1&\lambda&1\\1&1&1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&\lambda-1&0&0\\1&0&\lambda-1&0\\1&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)^3.$$

(1) 当 $\lambda\neq-3$ 且 $\lambda\neq1$ 时，方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda=-3$ 时，增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}-3&1&1&1&1\\1&-3&1&1&1\\1&1&-3&1&1\\1&1&1&-3&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&-3&1\\0&-4&0&4&0\\0&0&-4&4&0\\0&4&4&-8&4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&-3&1\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&1\end{array}\right),$$

$r(\boldsymbol{A})=3$，$r(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，方程组无解；

(3) 当 $\lambda=1$ 时，增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

$r(\overline{\boldsymbol{A}})=r(\boldsymbol{A})=1<4$，方程组有无穷多解. 且基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

故通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}，\ k_1,k_2,k_3\text{为任意常数}.$$

**例(选讲)**设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 $a,b$ 为何值时，存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$，并求所有矩阵 $\boldsymbol{C}$.

**【考查知识点】**矩阵方程，非齐次方程组的求解.

**【解】**令 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，代入矩阵方程 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 化为方程组求解.

由于

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+ax_3&x_2+ax_4\\x_1&x_2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2&ax_1\\x_3+x_4&ax_3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\begin{pmatrix}-x_2+ax_3&-ax_1+x_2+ax_4\\x_1-x_3-x_4&x_2-ax_3\end{pmatrix},$$

则由 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$ 得非齐次线性方程组

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\-ax_1+x_2+ax_4=1,\\x_1-x_3-x_4=1,\\x_2-ax_3=b,\end{cases}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 存在，故此线性方程组有解，将方程组增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{D}}$ 化为行最简形，

$$\overline{\boldsymbol{D}}=\left(\begin{array}{cccc:c}0&-1&a&0&0\\-a&1&0&a&1\\1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&b\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1&0&-1&-1&1\\0&1&-a&0&0\\0&0&0&0&1+a\\0&0&0&0&b\end{pmatrix},$$

所以当 $a=-1,b=0$ 时，线性方程组有解，即存在矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{AC}-\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{B}$.

此时 $\overline{D}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-1&1\\0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$，所以通解为

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1\\-k_1\\k_1\\k_2\end{pmatrix}，k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

所以满足条件的所有矩阵 $C=\begin{pmatrix}k_1+k_2+1&-k_1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

**例(选讲)** 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\m&1&3&n\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-1&0&-1\\1&-2&-1\end{pmatrix}$，若 $r(A)=2$，求 $m,n$ 的值及满足 $AX=B$ 的所有矩阵.

**【解】** 对矩阵 $A$ 作初等行变换，得

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\m&1&3&n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&1&-5\\0&0&4-2m&4m+n-5\end{pmatrix},$$

由 $r(A)=2$，得 $m=2,n=-3$.

此时 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\2&1&3&-3\end{pmatrix}$，设 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，$X=(x_1,x_2,x_3)$，其中 $x_1,x_2,x_3$ 均为四维列向量，且

$$(A,B)=\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&1&1&1&-1&1&0\\4&3&5&-1&-1&0&-1\\2&1&3&-3&1&-2&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|ccc}1&0&2&-4&2&-3&-1\\0&1&-1&5&-3&4&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

所以

$$Ax=\beta_1\text{的通解为 }x_1=k_1\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-3\\0\\0\end{pmatrix},k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_2$ 的通解为 $\boldsymbol{x}_2=k_3\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_4\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\4\\0\\0\end{pmatrix}$, $k_3,k_4$ 为任意常数.

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_3$ 的通解为 $\boldsymbol{x}_3=k_5\begin{pmatrix}-2\\1\\1\\0\end{pmatrix}+k_6\begin{pmatrix}4\\-5\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, $k_5,k_6$ 为任意常数.

故可得满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的所有矩阵为

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)=\begin{pmatrix}2-2k_1+4k_2 & -3-2k_3+4k_4 & -1-2k_5+4k_6\\ -3+k_1-5k_2 & 4+k_3-5k_4 & 1+k_5-5k_6\\ k_1 & k_3 & k_5\\ k_2 & k_4 & k_6\end{pmatrix},$$

其中 $k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6$ 为任意常数.

## 三、公共解与同解

### 1、公共解

同时满足线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_1$ 与线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}_2$ 的解称为这两个方程组的公共解.

### 2、同解

线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解是指这两个线性方程组的解完全相同.

线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解的充分必要条件是:

$$r(\boldsymbol{A})=r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{B}).$$

**例 9** 设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases} \qquad ①$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1 \qquad ②$$

有公共解, 求 $a$ 的值及所有公共解.

**【考查知识点】**方程组公共解的求法.

**【解】方法一** 联立求解

将①与②联立得非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0, \\ x_1+2x_2+x_3=a-1. \end{cases} \qquad ③$$

故方程组③有解，其解即为所求全部公共解.

对③的增广矩阵 $\overline{A}$ 作初等行变换得

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 1 & 4 & a^2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & a-1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-2)(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \end{array}\right).$$

(1) 当 $a=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组①与②有公共解，其全部公共解即为③的通解，此时 $\overline{\boldsymbol{A}} \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，其基础解系为 $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，所以①与②的全部公共解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

(2) 当 $a=2$ 时，有 $r(\boldsymbol{A})=r(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组③有唯一解，此时 $\overline{\boldsymbol{A}} \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$，故①与②有唯一公共解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

**方法二** 代入法求解

由题意可得 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{vmatrix}=(a-1)(a-2)$.

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq 2$ 时，方程组①只有零解，但它不是②的解，此时①与②没有公共解.

当 $a=1$ 时，$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，方程组①的通解为 $k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数，将其代入方程②成立，故 $k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 也是方程组②的解.

所以①与②的全部公共解为 $\boldsymbol{x}=k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $k$ 为任意常数.

当 $a=2$ 时, $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, 方程组①的通解为 $k\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $k$ 为任意常数，

将其代入方程 $x_1+2x_2+x_3=2-1$, 得 $k=-1$.

即①与②有唯一公共解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$.

**例 10** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶方阵，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解　　(B) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

(C) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 无非零公共解　　(D) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

**【考查知识点】**线性方程组同解和公共解.

**【答案】**(B).

**【解析】**线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有两个线性无关的解，故 $n-r(\boldsymbol{A})\geq 2$，即 $r(\boldsymbol{A})\leq n-2$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=0$，即 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$.

对任意的 $n$ 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{O}$ 成立，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，反之不成立.

由于 $r(\boldsymbol{A})\leq n-2$，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解即为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的非零公共解.

综上可得(B)正确.

**例(选讲)** 证明 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

**【考查知识点】**线性方程组同解, 线性方程组基础解系.

**【证明】**设由矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 所构成的齐次线性方程组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{x}_0$ 为方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}_0)=\boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{x}_0$ 也为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

若 $\boldsymbol{x}_0$ 为方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $\boldsymbol{x}_0{}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=0$, 即 $(\boldsymbol{Ax}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}_0)=0$, 从而 $\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{x}_0$ 也为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

综上可得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解, 故 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})$.

**例(选讲)** 已知齐次线性方程组

(I) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0\end{cases}$ 和(II) $\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$ 同解, 求 $a,b,c$ 的值.

**【考查知识点】**线性方程组同解的判定.

**【解】**因为方程组(II)中方程个数少于未知量个数, 故必有非零解, 所以(I)必有非零解.

因此(I)的系数行列式必为0, 即$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{vmatrix}=2-a=0$, 即$a=2$.

对(I)系数矩阵作初等行变换, 由$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$可求出方程组(I)的通解是$k(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$， $k$为任意常数.

由题意知, $(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$是方程组(II)的解, 故有

$$\begin{cases}-1-b+c=0,\\-2-b^2+c+1=0,\end{cases}$$

解得$b=1,c=2$或$b=0,c=1$.

当$b=0,c=1$时, 方程组(II)为$\begin{cases}x_1+x_3=0,\\2x_1+2x_3=0,\end{cases}$因其系数矩阵的秩为1, 从而(I)与(II)有不同的解, 故$b=1,c=2$.

综上可得，当$a=2,b=1,c=2$时, 方程组(I)与(II)同解.

## 本章小结


线性方程组
线性方程组的概念
非齐次线性方程组
齐次线性方程组
线性方程组的求解
齐次线性方程组
解的判定
解的性质
基础解系
通解
非齐次线性方程组
解的判定
解的性质
通解
公共解与同解
公共解
同解

# 第五章 矩阵的特征值和特征向量

## 教学重难点

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质,相似变换、相似矩阵的概念和性质,矩阵可相似对角化的充分必要条件及相似对角阵,实对称阵的特征值、特征向量及其相似对角阵.

## 考纲点击

1. 理解矩阵的特征值和特征向量的概念及性质,会求矩阵的特征值和特征向量.

2. 理解相似矩阵的概念、性质及矩阵可相似对角化的充分必要条件,掌握将矩阵化为相似对角矩阵的方法.

3. 掌握实对称阵的特征值和特征向量的性质.

## 教学建议

建议教学时长为5课时.

## 内容聚焦

## 第一节 向量的内积、长度及正交性

### 一、向量的内积

**1. 内积的定义**

设有 $n$ 维向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

令 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，则 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 称为列向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的内积.

**【注】** 对于向量的内积有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

**2. 内积的性质**

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$ 为 $n$ 维向量, $\lambda$ 为实数,则有

(1) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$;

(2) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$;

(3) $(\lambda\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\lambda(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$;

(4) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})\geq 0$, 当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时, $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})>0$;

(5) 施瓦茨不等式: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})^2\leq(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})$.

## 二、向量的长度

### 1. 定义

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，令

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

则 $\|\boldsymbol{x}\|$ 称为 $n$ 维列向量 $\boldsymbol{x}$ 的长度.

**【注】** 行向量的长度可类似定义，本书中关于列向量长度的所有性质，对于行向量都有类似情形，后面不再赘述.

### 2. 性质

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 $n$ 维向量，$\lambda$ 为实数，则有

(1) 非负性：当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|=0$；当 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 时，$\|\boldsymbol{x}\|>0$；

(2) 齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$；

(3) 三角不等式：$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$.

### 3. 单位向量与向量的单位化

(1) 当 $\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，称 $\boldsymbol{x}$ 为单位向量；

(2) 任意非零向量 $\boldsymbol{x}$ 都可以化为相应的单位向量 $\boldsymbol{e}=\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$，由 $\boldsymbol{x}$ 得到 $\boldsymbol{e}$ 的过程称为向量 $\boldsymbol{x}$ 的单位化.

## 三、正交向量组与施密特正交化

### 1. 向量的正交

设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 为 $n$ 维向量，若 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$，则称向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交.

**【注】** 对任意向量 $\boldsymbol{x}$ 按内积定义有 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{0})=0$，即零向量与任意向量正交.

### 2. 正交向量组

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中的向量都是 $n$ 维非零向量，并且任意两个向量都正交，则称这个向量组是正交向量组.

若正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 中每个向量都是单位向量，则称此向量组为正交单位向量组.

**定理 1** 若 $n$ 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 中任意两个向量都正交且没有零向量，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

**【注】** 非零正交组一定是无关组.

**例（选讲）** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$，试求一个非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

**【考查知识点】** 向量组的正交性.

**【解】** 注意到 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 要使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交，只需 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 分别与

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 正交. 设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm T}$, 于是由 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=0$ 及 $(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=0$ 得

$$\begin{cases}-x_1-x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+3x_3=0.\end{cases}$$

由于

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-5\\0&1&4\end{pmatrix},$$

从而方程组的基础解系为 $(5,-4,1)^{\mathrm T}$, 取 $\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-4,1)^{\mathrm T}$， 则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 两两正交.

**3. 施密特正交化**

**定理 2** 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 若取

1) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$,

2) $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1$,

……

$r$) $\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_r-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\cdots-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r-1})}{(\boldsymbol{\beta}_{r-1},\boldsymbol{\beta}_{r-1})}\boldsymbol{\beta}_{r-1}$,

则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 为一组与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价的正交向量组, 这里由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 得到一组与之等价的正交向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的方法, 称为施密特正交化方法.

完成施密特正交化后, 如果将向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 单位化, 得到向量组

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|},\cdots,\ \boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{\beta}_r}{\|\boldsymbol{\beta}_r\|},$$

则称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_r$ 为与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价的单位正交向量组.

**例(选讲)** 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}$, 用施密特正交化方法把这组向量先正交化后再单位化.

**【考查知识点】**施密特正交化，单位化.

**【解】** 取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-5\\3\end{pmatrix}+\dfrac{10}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}$,

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}3\\2\\8\\-7\end{pmatrix}-\frac{30}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix}+\frac{26}{26}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

再把它们单位化

$$e_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\2\\2\\-1\end{pmatrix},\ e_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\\2\end{pmatrix},\ e_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-2\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 即为单位正交向量组.

## 四、正交矩阵

**1. 正交矩阵的定义**

如果 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ (即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ ), 则称 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵.

**2. 正交矩阵的性质**

(1) $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组是单位正交向量组;

(2) $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组是单位正交向量组;

(3) 正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 $1$ 或 $-1$;

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ , $\boldsymbol{A}^*$ 都是正交矩阵;

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是同阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都是正交矩阵.

**例 1** 设 $\boldsymbol{x}$ 为 $n$ 维列向量, $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$, 令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$, 证明: $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

**【考查知识点】**正交矩阵的定义.

**【证明】**因为

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H},$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵.

由于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$，于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^2&=(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{E}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}})\\&=\boldsymbol{E}-4\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\\&=\boldsymbol{E},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{H}$ 是正交矩阵，因此 $\boldsymbol{H}$ 是对称的正交矩阵.

# 第二节 矩阵的特征值与特征向量

## 一、特征值与特征向量

**1. 定义**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵, 如果存在数 $\lambda$ 和 $n$ 维非零列向量 $\boldsymbol{x}$ , 使得

$$\boldsymbol{Ax}=\lambda\boldsymbol{x}$$

成立, 则称 $\lambda$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的关于特征值 $\lambda$ 的特征向量.

行列式

$$f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

称为 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

方程 $f(\lambda)=0$ 称为 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程,特征方程的根称为 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 主对角线上元素之和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹,记为 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$.

**2. 特征值和特征向量的求解**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵,在实数范围内特征值与特征向量求解步骤如下:

1)写出矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式: $f(\lambda)=|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|$;

2)解出特征方程 $f(\lambda)=0$ 的根: $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$(重根按照重数计算),即得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值;

3)求出特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots n)$ 对应齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系:

$$\boldsymbol{p}_{i1},\boldsymbol{p}_{i2},\cdots,\boldsymbol{p}_{i(n-r_i)},$$

因此

$$k_1\boldsymbol{p}_{i1}+k_2\boldsymbol{p}_{i2}+\cdots+k_{n-r_i}\boldsymbol{p}_{i(n-r_i)}$$

是方阵 $\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda_i$ 的全部特征向量的一般形式,其中 $k_1,k_2,\cdots,k_{n-r_i}$ 为不全为零的任意常数,这里 $r_i=r(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})$(重根只计算一次对应的齐次线性方程组).

**例 2** 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

**【考查知识点】**特征值与特征向量的定义.

**【解】**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & -5-\lambda & 1 \\ 3 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda+2)^2,$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=-2$, $\lambda_3=-1$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 时,解方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得基础解系为 $\boldsymbol{p}_1=(1,0,-3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{p}_2=(0,1,3)^{\mathrm{T}}$,因此属于特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2$ 的全部特征向量为 $c_1\boldsymbol{p}_1+c_2\boldsymbol{p}_2$, 其中 $c_1,c_2$ 不全为零.

当$\lambda_3=-1$时，解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2&-3&1\\3&-4&1\\3&-3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系为$\boldsymbol{p}_3=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$，矩阵$\boldsymbol{A}$的属于特征值$\lambda_3=-1$对应的特征向量为$c_3\boldsymbol{p}_3$，其中$c_3$为不为零的常数.

**例 3** 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$的一个特征向量为$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的全体特征值与特征向量.

**【考查知识点】**特征值与特征向量的定义.

**【解】**设对应于特征向量$\boldsymbol{p}_1$的特征值为$\lambda_1$，则由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1=\lambda_1\boldsymbol{p}_1$得

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

则$\begin{pmatrix}-1\\a+2\\b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_1\\-\lambda_1\end{pmatrix}$，解得$\lambda_1=-1$, $a=-3$, $b=0$.

故$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$，由

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&2\\5&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{c_1+c_2-c_3}\begin{vmatrix}-\lambda-1&-1&2\\-\lambda-1&-3-\lambda&3\\1+\lambda&0&-2-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&-3-\lambda&3\\-1&0&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)\begin{vmatrix}1&-1&2\\0&-2-\lambda&1\\0&-1&-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=-(\lambda+1)^3=0,$$

解得矩阵$\boldsymbol{A}$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$时，解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3&-1&2\\5&-2&3\\-1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量为 $\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$. 所以 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的全部特征向量为 $c\boldsymbol{p}$，其中 $c$ 为不为零的常数.

**3. 特征值与特征向量的性质**

**性质 1** 设 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$；

(2) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$.

**性质 2** 如果 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_s$ 都是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量，那么对任意不全为零的常数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\boldsymbol{p}_1+k_2\boldsymbol{p}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{p}_s$ 也是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda$ 的特征向量.

**性质 3** 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $m(m\le n)$ 个特征值，$\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 是依次对应的特征向量，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 各不相同，则 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_m$ 线性无关. 即方阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

**性质 4** 如果 $\lambda$ 是 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $m(m\le n)$ 重特征根，则属于 $\lambda$ 的线性无关特征向量的个数不超过 $m$ 个.

**相关重要结论**

| 矩阵 | $\boldsymbol{A}$ | $k\boldsymbol{A}$ | $\boldsymbol{A}^k$ | $\varphi(\boldsymbol{A})$ | $\boldsymbol{A}^{-1}$ | $\boldsymbol{A}^*$ | $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ | $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 特征值 | $\lambda$ | $k\lambda$ | $\lambda^k$ | $\varphi(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}(\lambda\ne0)$ | $\frac{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}{\lambda}(\lambda\ne0)$ | $\lambda$ | $\lambda$ |
| 特征向量 | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | $\boldsymbol{x}$ | × | $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ |

**【注】** 这里 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$，$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$.

**例 4** 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，有一特征值为 $2$，且 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=|\boldsymbol{A}|=6$，求 $|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|=$ ________.

**【考查知识点】** 特征值与特征向量的性质.

**【答案】** $-81$.

**【解析】** 由题可知 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值 $\lambda_1=2$，设其余两个特征值分别为 $\lambda_2$，$\lambda_3$，由特征值的性质，得

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=2+\lambda_2+\lambda_3=6,\ |\boldsymbol{A}|=2\lambda_2\lambda_3=6,$$

由根与系数的关系可得 $\lambda_2$，$\lambda_3$ 满足方程

$$\lambda^2-4\lambda+3=0,$$

解得 $\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$.

故 $\boldsymbol{A}$ 的三个特征值分别为 $2,1,3$，则 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为 $3,6,2$，$\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为 $4,1,9$，由特

征值的性质可得 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为$3,-3,9$，故$|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^*+2\boldsymbol{E}|=-81$.

# 第三节 矩阵的相似对角化

## 一、相似矩阵

### 1. 相似矩阵的定义

**定义** 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶方阵，若存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B},$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 对 $\boldsymbol{A}$ 进行 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 运算称为对 $\boldsymbol{A}$ 进行相似变换，可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为相似变换矩阵.

### 2. 相似矩阵的性质

设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为$n$阶方阵，$\lambda$ 为实数，则

(1) 反身性： $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

(2) 对称性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似.

(3) 传递性：若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

(4) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|,\ |\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}),\ r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B}).$$

(5) 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 相似，$\boldsymbol{A}^m$ 与 $\boldsymbol{B}^m$ 相似（$m$ 为正整数），$\boldsymbol{A}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{B}^{-1}$（当 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可逆时）相似，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}$ 相似.

(6) 设 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $f(\boldsymbol{A})$ 与 $f(\boldsymbol{B})$ 相似.

**例 5** 已知$n$阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，且$|\boldsymbol{A}|=5,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=3$，求$|\boldsymbol{B}^*|$， $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，$|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}|$.

**【考查知识点】**相似矩阵的性质.

**【解】**因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，所以有$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})$，于是 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{B})=3$.

又因$|\boldsymbol{B}^*|=|\boldsymbol{B}|^{n-1}$，于是$|\boldsymbol{B}^*|=5^{n-1}$，$|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}|=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}|}=\dfrac{1}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}=\dfrac{1}{25}$.

**例 6** 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$1,2,-1$，若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列矩阵中可逆矩阵是（　　）.

(A) $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$　　(B) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$

(C) $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$

**【考查知识点】**相似矩阵的性质，矩阵特征值的性质.

**【答案】**(D).

**【解析】**由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为$1,2,-1$，则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$ 的特征值为$0,1,-2$；$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 的特征值为$2,3,0$，$\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}$ 的特征值为$-1,0,-3$，$\boldsymbol{B}+2\boldsymbol{E}$ 的特征值为$3,4,1$.

所以$|B+2E|=12$，即$B+2E$可逆.

故选(D).

**例7** 已知$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&x&2\\-5&1&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$相似，则(　　)

(A) $x=1,y=0$ (B) $x=1,y=0$

(C) $x=0,y=-2$ (D) $x=1,y=-2$

**【考查知识点】**矩阵相似的性质.

**【答案】**(C).

**【解析】**由于矩阵$A$与$B$相似，故$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$,即$-2+x+1=-1+2+y$.

由于$\lambda=2$为矩阵$B$的特征值，故也为矩阵$A$的特征值，即$|A-2E|=0$,所以

$$\begin{vmatrix}-4&0&0\\3&x-2&2\\-5&1&-1\end{vmatrix}=-4(2-x-2)=0,$$

故$x=0$，$y=-2$.

## 二、矩阵的相似对角化

### 1. 矩阵相似对角化的定义

**定义** 对于$n$阶方阵$A$,若存在可逆矩阵$P$,使$P^{-1}AP$为对角阵,即$A$与某个对角阵相似,则称$A$可以相似对角化,简称为$A$可对角化.

### 2. 矩阵相似对角化的条件

**定理1** $n$阶方阵$A$可对角化的充分必要条件是$A$有$n$个线性无关的特征向量.

**【注】证明** (必要性)若$A$可对角化,则存在可逆矩阵$P$使得$P^{-1}AP=\Lambda$，令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

则由$AP=P\Lambda$，得

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\cdots,\lambda_n\alpha_n),$$

因此$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2,\cdots,A\alpha_n=\lambda_n\alpha_n$,又由$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$可逆，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$A$的特征向量,所以矩阵$A$有$n$个线性无关的特

征向量.

(充分性)取 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ ,令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$ ,则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

即 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ ，所以 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$ .即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

**推论 1** 若 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个不同的特征值, 则 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化.

**定理 2** $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是对 $\boldsymbol{A}$ 的每个 $k$ 重特征值 $\lambda_k$ 都有 $n-r(\boldsymbol{A}-\lambda_k\boldsymbol{E})=k$ ，从而 $\lambda_k$ 对应 $k$ 个线性无关的特征向量.

**例 8** 下列矩阵不可以相似对角化的是(　　).

(A) $\begin{pmatrix}1&0&2\\2&0&4\\3&0&6\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

(C) $|\boldsymbol{A}_{2\times2}|<0$　　(D) $|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}|=0$

**【考查知识点】**矩阵可相似对角化的条件，相似对角化的判别.

**【答案】**(B).

**【解析】**令(A)中矩阵为 $\boldsymbol{A}$ , 则

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&2\\2&-\lambda&4\\3&0&6-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-7)=0,$$

解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=7$ , 又由于 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $3-r(\boldsymbol{A})=2$，即 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 对应两个线性无关的特征向量，故 $\boldsymbol{A}$ 有3个线性无关的特征向量，即可相似对角化.

令(B)选项中的矩阵为 $\boldsymbol{B}$ ,

$$|\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&1\\0&1-\lambda&0\\0&0&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$，又由于 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=2$，

$3-r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=1$，故 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化.

$|A_{2\times2}|<0$ 说明矩阵 $A$ 有两个互不相同的特征值，故可相似对角化.

$|A-2E|=|A+E|=|A|=0$，由特征值的定义可得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=0$，特征值互不相同，故 $A$ 可相似对角化.

综上可得(B)中矩阵不可相似对角化. 故选(B).

**例(选讲)**已知 $A$ 是三阶矩阵，$r(A)=1$，则 $\lambda=0$（　　）.

(A)必是 $A$ 的二重特征值　　(B)至少是 $A$ 的二重特征值

(C)至多是 $A$ 的二重特征值　　(D)无法确定

**【考查知识点】**矩阵特征值，特征向量的概念.

**【答案】**(B).

**【解析】**由于 $r(A)=1$，故 $|A|=0$，$\lambda=0$ 为 $A$ 的特征值，且 $Ax=\mathbf{0}$ 的基础解系中有 $2$ 个向量，即特征值 $\lambda=0$ 对应两个线性无关的特征向量.

由于特征值 $\lambda=0$ 对应线性无关的特征向量的个数不能超过特征值的重数，故 $\lambda=0$ 的重数至少为 $2$，即 $\lambda=0$ 至少是 $A$ 的二重特征值.

故选(B).

**3. 矩阵相似对角化的方法**

设 $A$ 是 $n$ 阶方阵，$A$ 的相似对角化步骤如下：

1)由特征方程 $|A-\lambda E|=0$，求得 $A$ 的 $n$ 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

2)由 $(A-\lambda_i E)x=\mathbf{0}$，求得 $A$ 的特征向量；

3)对于 $A$ 的各不相同的特征值对应的特征向量线性无关，对 $A$ 的 $k$ 重特征值，若能对应 $k$ 个线性无关的特征向量，则 $A$ 可对角化，若对应小于 $k$ 个线性无关的特征向量，此时 $A$ 不可对角化；

4)若 $A$ 有 $n$ 个线性无关的特征向量 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n$，则令矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n)$，从而有

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

对角阵 $\Lambda$ 对角线上特征值的次序按照对应特征向量顺序排列.

**例 9** 判断矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$ 是否可相似对角化，若能够相似对角化，求出可逆矩阵 $P$，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

**【考查知识点】**特征值与特征向量的计算，矩阵可对角化的判定.

**【解】**矩阵 $A$ 的特征多项式为

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0,$$

故矩阵 $A$ 有 3 个互不相同的特征值 $\lambda_1=-1$ $\lambda_2=1$ $\lambda_3=2$，从而 $A$ 可相似对角化.

当 $\lambda_1=-1$时，解方程组 $(A+E)x=\mathbf{0}$. 由

$$A+E=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得对应特征向量为 $p_1=(0,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=1$时，解方程组 $(A-E)x=\mathbf{0}$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得对应特征向量为 $p_2=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=2$时，解方程组 $(A-2E)x=\mathbf{0}$. 由

$$A-2E=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得对应特征向量为 $p_3=(0,2,1)^{\mathrm{T}}$.

令 $P=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$.

例 10 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ a & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，则 $a=($　　$)$.

(A) 1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) $-1$

【考查知识点】矩阵相似对角化的充要条件.

【答案】(D).

【解析】$A$ 有三个线性无关的特征向量，故 $A$ 可相似对角化.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 2\\ a & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=-(1-\lambda)^2(\lambda+2)=0,$$

解得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-2$.

$A$ 可相似对角化，故 $\lambda_1=\lambda_2=1$对应两个线性无关的特征向量，即 $3-r(A-E)=2$，$r(A-E)=1$.

$$A-E=\begin{pmatrix}-2&0&2\\a&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得 $a+1=0$，$a=-1$.

故选(D).

**例 11** 已知 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-1\end{pmatrix}$，其中 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\alpha_1$ 为矩阵 $A$ 属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量，$\alpha_2,\alpha_3$ 为矩阵 $A$ 属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的线性无关的特征向量，令 $Q=\left(2\alpha_2,\alpha_2-3\alpha_3,\frac{1}{2}\alpha_1\right)$，则 $Q^{-1}AQ=$(　　).

(A) $\begin{pmatrix}-2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$　　(B) $\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix}-1&&\\&2&\\&&-1\end{pmatrix}$　　(D) $\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$

**【考查知识点】** 矩阵特征值特征向量的性质，矩阵的相似对角化.

**【答案】** (B).

**【解析】** $\alpha_1$ 为矩阵 $A$ 属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量，$\alpha_2,\alpha_3$ 为矩阵 $A$ 属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的线性无关的特征向量，由特征值特征向量的性质可得 $2\alpha_2$ 为 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的特征向量，$\alpha_2-3\alpha_3$ 为 $\lambda_2=\lambda_3=-1$ 对应的特征向量，且 $2\alpha_2$，$\alpha_2-3\alpha_3$ 线性无关. $\frac{1}{2}\alpha_1$ 为 $\lambda_1=2$ 对应的特征向量.

由于

$$Q=\left(2\alpha_2,\alpha_2-3\alpha_3,\frac{1}{2}\alpha_1\right)$$
$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&1&0\\0&-3&0\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&1&0\\0&-3&0\end{pmatrix},$$

且 $\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&1&0\\0&-3&0\end{pmatrix}$ 可逆，$P$ 可逆，故 $Q=\left(2\alpha_2,\alpha_2-3\alpha_3,\frac{1}{2}\alpha_1\right)$ 可逆，所以

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&\\&&2\end{pmatrix}.$$

故选(B).

**例(选讲)** 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 $a,b$ 的值;

(2) 求可逆矩阵 $P$, 使得 $P^{-1}AP=B$.

**【考查知识点】** 矩阵相似的性质，特征值特征向量的求法，相似变换矩阵的求法.

**【解】** (1) 由于矩阵 $A$ 与 $B$ 相似，故 $\begin{cases}\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B),\\|A|=|B|,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0+3+a=1+b+1,\\2a-3=b.\end{cases}$ 解之得 $a=4,b=5$.

(2) 由于 $A$ 与 $B$ 相似，则它们的特征值相同，$|B-\lambda E|=-(1-\lambda)^2(\lambda-5)=0$, 由此得 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=5$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 解方程组 $(A-E)x=0$. 由

$$A-E=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\-1&2&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得对应线性无关的特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $p_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_3=5$ 时, 解方程组 $(A-5E)x=0$. 由

$$A-5E=\begin{pmatrix}-5&2&-3\\-1&-2&-3\\1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&-8&-8\\0&-4&-4\\1&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得对应特征向量为 $p_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $P_1=(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$, 且 $P_1$ 可逆，即存在可逆矩阵 $P_1$ 使得

$$P_1^{-1}AP_1=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}.$$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$时，解方程组$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&4&0\\0&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得对应线性无关的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

当$\lambda_3=5$时，解方程组$(\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 由

$$\boldsymbol{B}-5\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-4&-2&0\\0&0&0\\0&3&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}\\0&1&-\frac{4}{3}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得对应的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$.

令$\boldsymbol{P}_2=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&4\\0&1&3\end{pmatrix}$，且$\boldsymbol{P}_2$可逆，即存在可逆矩阵$\boldsymbol{P}_2$使得

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}.$$

综上可知$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{\Lambda}$，故$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\boldsymbol{B}$，令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}$，则

$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，且$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&4\\0&1&3\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&-3\\1&\frac{1}{4}&0\\0&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$.

**例 12** 已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$相似，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$相似

(B) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$相似，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$不相似

(C) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$不相似，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$相似

(D) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$不相似，$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$不相似

【考查知识点】方阵可对角化的条件, 矩阵相似的性质.

【答案】(B).

【解析】由题设条件得 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 的特征值相同，均为 $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$，且 $\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵.

由 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 得 $r(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})=1$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应 2 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{A}$ 可相似对角化, 因此 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

由 $\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 得 $r(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{E})=2$, 则矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应 1 个线性无关的特征向量, 故 $\boldsymbol{B}$ 不可相似对角化, 因此 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

故选(B).

**例(选讲)** 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}9\\18\\-18\end{pmatrix}$，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1(-2,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(2,0,1)^{\mathrm{T}}+(1,2,-2)^{\mathrm{T}},$$

其中 $k_1,k_2$ 为任意常数，求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【解】由题可得 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=0$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=0$，$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\boldsymbol{\beta}=9\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$，且 $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ 线性无关, 故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=9$, 对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}-2&2&1\\1&0&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}$，故

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&9\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}.$$

# 第四节 实对称矩阵的正交相似对角化

## 一、实对称矩阵特征值与特征向量的性质

**定理1** 实对称矩阵的特征值均为实数.

**定理2** 设 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ 是对应的特征向量, 则 $\boldsymbol{p}_1$ 与 $\boldsymbol{p}_2$ 正交.

**定理3** 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 重特征值恰好对应 $k$ 个线性无关的特征向量.

## 二、实对称矩阵的正交相似对角化

**1. 正交相似对角化**

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵, 则必有正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda},$$

这里 $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$, 其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值.

**2. 实对称矩阵 $A$ 正交相似对角化的步骤:**

①求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t(t\le n)$, 它们的重数依次为

$$k_1,k_2,\cdots,k_t(k_1+k_2+\cdots+k_t=n).$$

②对每个 $k_i$ 重特征值 $\lambda_i$, 求齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系, 解得 $k_i$ 个线性无关的特征向量, 把这 $k_i$ 个向量正交单位化, 得 $k_i$ 个规范正交的特征向量. 由于

$$k_1+k_2+\cdots+k_t=n,$$

故可得 $n$ 个规范正交的特征向量.

③用这 $n$ 个规范正交的特征向量构成正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 则

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

为对角阵.

**【注】** $\boldsymbol{\Lambda}$ 中对角元的排列次序与 $\boldsymbol{Q}$ 中列向量的排列次序相对应.

**例13** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$, 求一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$ 为对角阵.

**【考查知识点】** 实对称矩阵的对角化, 正交矩阵的求法.

**【解】** $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)^2(\lambda-1),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\lambda_3=3$.

当 $\lambda_1=1$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

当 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时, 解方程组 $(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

$$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

得对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 两两正交，故只需将其单位化，得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)^{\mathrm{T}},$$

取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 3 & \\ & & 3\end{pmatrix}$.

**例 14** 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$, 属于 $\lambda_1$, $\lambda_2$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$,

(1) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(2) 求 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})^{2026}$

**【考查知识点】**实对称矩阵的性质，利用相似对角化求方程的 $n$ 次幂.

**【解】**(1) 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, 由实对称矩阵

不同特征值对应的特征向量正交得 $(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_3)=0$ ，即 $\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ x_1+x_2+x_3=0, \end{cases}$ 解得对应的特征向量为 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 两两正交，故单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 8\end{pmatrix}.$$

(2) 由 (1) 得 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$，所以

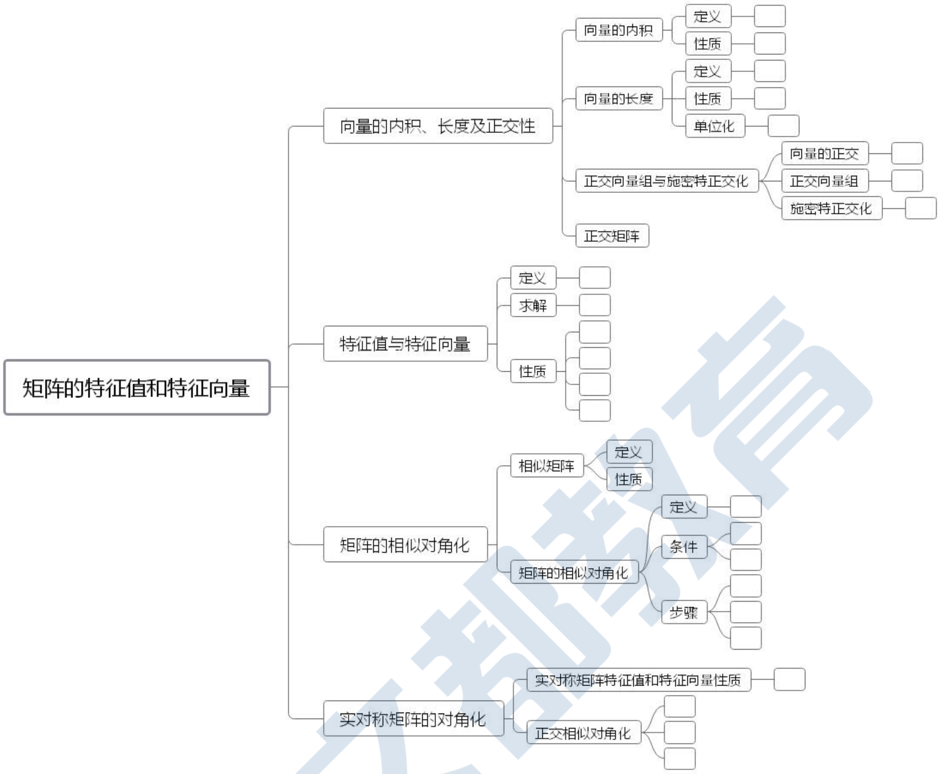
$$\boldsymbol{A}^{2026}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{2026}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$$

$$=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^{n}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}^{2026}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

# 本章小结



矩阵的特征值和特征向量
向量的内积、长度及正交性
向量的内积
定义
性质
向量的长度
定义
性质
单位化
正交向量组与施密特正交化
向量的正交
正交向量组
施密特正交化
正交矩阵
特征值与特征向量
定义
求解
性质
矩阵的相似对角化
相似矩阵
定义
性质
矩阵的相似对角化
定义
条件
步骤
实对称矩阵的对角化
实对称矩阵特征值和特征向量性质
正交相似对角化

# 第六章 二次型

## 教学重难点

二次型及其矩阵表示形式，合同变换与合同矩阵，二次型的秩，惯性定理，二次型的标准形和规范形，用正交变换和配方法化二次型为标准形，二次型及其矩阵的正定性.

## 考纲点击

1. 掌握二次型及其矩阵表示，了解二次型秩的概念，了解合同变换与合同矩阵的概念，了解二次型的标准形、规范形的概念以及惯性定理.

2. 掌握用正交变换化二次型为标准形的方法，会用配方法化二次型为标准形.

3. 理解正定二次型、正定矩阵的概念，并掌握其判别法.

## 教学建议

建议教学时长为 3 课时.

## 内容聚焦

## 第一节 二次型及其标准形

### 一、二次型的概念

**1. 二次型的定义**

含有 $n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n$$
$$+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

称为 $n$ 元二次型，简称为二次型.

**2. 二次型的矩阵形式**

若记 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，则二次型的矩阵形式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，则称 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为二次型的矩阵形式，$n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f$ 的矩阵，$f$ 称为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型. $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f$ 的秩，记作 $r(f)$.

**【注】**任给一个二次型,都可以唯一地确定一个实对称矩阵;反之,任给一个实对称矩阵,也可唯一地确定一个二次型.即二次型与实对称矩阵之间存在一一对应关系.

**例 1** 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3,$$

写出二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$，并求二次型的秩 $r(f)$.

**【考查知识点】**二次型的矩阵及二次型的秩.

**【解】**由于二次型对应的矩阵为对称矩阵，故可得

$$a_{11}=1,a_{22}=4,a_{33}=1,a_{12}=a_{21}=2,a_{13}=a_{31}=-1,\ a_{23}=a_{32}=-2,$$

于是二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，因此，$r(f)=r(\boldsymbol{A})=1$.

## 二、二次型的标准形和规范形

### 1. 二次型的标准形

只含有平方项的二次型

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

称为二次型的标准形.

### 2. 二次型的规范形

如果标准形的系数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 只在 $1,-1,0$ 三个数中取值，即

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

称为二次型的规范形.

# 第二节 化二次型为标准形

## 一、二次型的线性变换

### 1. 线性变换定义

设

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

取 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$, 称 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 为线性变换, 这里 $\boldsymbol{C}$ 称为对应线性变换的矩阵.

如果 $\boldsymbol{C}$ 是可逆矩阵, 那么称 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 为可逆变换;

如果 $\boldsymbol{C}$ 是正交矩阵, 那么称 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 为正交变换.

### 2. 二次型的可逆变换

对二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 作可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为新的二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$, 即

$$f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y},$$

得到以 $\boldsymbol{y}$ 为变量的二次型, 此二次型的矩阵为 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$.

【注】当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 中 $\boldsymbol{C}$ 为正交矩阵时, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 称为二次型的正交变换.

## 二、合同矩阵

### 1. 合同矩阵的定义

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶方阵, 如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 也称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的合同矩阵.

### 2. 合同矩阵的性质

(1) 反身性: $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同;

(2) 对称性: 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同;

(3) 传递性: 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同;

(4) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 反之不成立.

### 3. 矩阵合同定理

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值中正、负、零的个数分别相等.

【注】①任一对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都合同于一个对角阵 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

② $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶对称矩阵,若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

**例2** 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ (　　).

(A)合同且相似　　(B)合同但不相似

(C)不合同但相似　　(D)不合同也不相似

**【考查知识点】**实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似与合同的充分必要条件.

**【答案】**(B).

**【解析】**由于

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-1&-1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&2-\lambda&-1\\-1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-3)^2,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $3,3,0$ ,而 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $1,1,0$ ,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 特征值不相同,故不相似.

又矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为对称矩阵,且特征值中正、负、零的个数分别相等,于是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同,故选(B).

## 三、化二次型为标准形的方法

任意一个实二次型都可经可逆线性变换化为标准形,即任一实对称矩阵与一个对角矩阵合同.

【注】二次型 $f$ 经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为标准形, 即

$$\begin{aligned}f&=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}\\&=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2\\&=(y_1,y_2,\cdots y_n)\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\end{aligned}$$

只要 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}k_1&&&\\&k_2&&\\&&\ddots&\\&&&k_n\end{pmatrix}$, 故只需把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同对角化.

### 1. 惯性定律

设二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 $r$ ,若存在两个可逆线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 及 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$ 使二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 分别化为

$$f = k_1 y_1^2 + k_2 y_2^2 + \cdots + k_r y_r^2 (k_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r),$$
$$f = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 + \cdots + \lambda_r z_r^2 (\lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, r),$$

则 $k_1, k_2, \cdots, k_r$ 中正数个数与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 中正数个数相同.

【注】二次型标准形不唯一.

### 2. 惯性指数

二次型的标准形中正系数的个数 $p$ 称为二次型的正惯性指数，负系数的个数 $q$ 称为负惯性指数，$p+q=r(f)=r$.

二次型的规范形中二次项系数1的个数 $p$ 为二次型的正惯性指数，二次项系数 $-1$ 的个数 $q$ 为二次型的负惯性指数.

### 3. 正交变换法

**定理** 对任意 $n$ 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，总存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 使二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值.

正交变换法化标准形的步骤为：

(1) 写出二次型 $f$ 所对应的 $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求 $n$ 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$；

(3) 对于每个特征值 $\lambda_i (i=1,2,\ldots,n)$，求对应的齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i \boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，即此特征值对应的线性无关的特征向量（重根只算一次对应的齐次线性方程组）；

(4) 对于单根特征值，对应的特征向量只需单位化，对于 $k_i$ 重特征值，先将其对应的 $k_i$ 个线性无关的特征向量进行施密特正交化，再进行单位化，于是得到 $\boldsymbol{A}$ 的一个单位正交向量组
$$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n;$$

(5) 令 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为 $n$ 阶正交矩阵，通过正交变换（合同变换）$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 可将二次型 $f$ 化为标准形 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

【注】$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$ 的各列与对应的特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 相对应.

**例 3** 已知三元二次型为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，则 $f$ 的正惯性指数为________.

【考查知识点】二次型的惯性指数.

【答案】2.

【解析】由于二次型表示为 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$，记 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$ 不为实对称矩阵，故不为二次型的矩阵，设 $\boldsymbol{A}$ 为二次型矩阵，则

$$A=\frac{B+B^{\mathrm{T}}}{2}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix},$$

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-2\\2&4-\lambda&4\\-2&4&-3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda&2&-2\\2&4-\lambda&4\\2\lambda-2&0&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda&2&-2\\2&4-\lambda&4\\-2&0&1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda-4&2&-2\\10&4-\lambda&4\\0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-36)=0,$$

所以 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$，从而 $f$ 的正惯性指数为 $2$.

**例 4** 用正交变换法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

为标准形，再用可逆线性变换将标准形化为规范形.

**【考查知识点】**正交变换法化二次型为标准形.

**【解】**二次型 $f$ 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$, 矩阵 $A$ 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda-10),$$

可得 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=10$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$时, 解方程组 $(A-E)x=\mathbf{0}$, 由

$$A-E=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得两个正交的特征向量为 $p_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$, $p_2=(4,-1,1)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=10$时, 解方程组 $(A-10E)x=\mathbf{0}$. 由

$$A-10E=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量为 $p_3=(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$.

由于 $p_1,p_2,p_3$ 两两正交，故只需将它们单位化得，

$$e_1=\frac{p_1}{\|p_1\|}=\frac{1}{\sqrt2}(0,1,1)^{\mathrm{T}},\ e_2=\frac{p_2}{\|p_2\|}=\frac{1}{3\sqrt2}(4,-1,1)^{\mathrm{T}},\ e_3=\frac{p_3}{\|p_3\|}=\frac13(1,2,-2)^{\mathrm{T}}.$$

令 $Q=(e_1,e_2,e_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，则 $Q$ 为正交矩阵，故在正交变换 $x=Qy$ 下二次型化为标准形 $f=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$.

令 $\begin{cases} z_1=y_1, \\ z_2=y_2, \\ z_3=\sqrt{10}y_y, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} y_1=z_1, \\ y_2=z_2, \\ y_3=\frac{\sqrt{10}}{10}z_3, \end{cases}$ 即在可逆线性变换 $y=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}z$ 下，将二次型的标准形化为规范形 $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$.

**例 5** 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$ 经正交变换可化为标准形 $f=4y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$，则 $a=($ $)$.

(A) 1 (B) 0 (C) $-1$ (D) 3

**【考查知识点】**正交变换法化二次型为标准形.

**【答案】**(B).

**【解析】**设二次型的矩阵为 $A$，由题意可得 $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}$.

二次型经正交变换化为标准形 $f=4y_1^2-2y_2^2-2y_3^2$，即矩阵 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=4,\lambda_2=-2,\lambda_3=-2$.

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & a-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & a-\lambda \end{vmatrix}=(a-\lambda+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & a-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=(a-\lambda+4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-\lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & a-\lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=(a-\lambda+4)(a-\lambda-2)^2=0,$$

所以 $A$ 得特征值为 $a+4,a-2,a-2$，即 $a-2=-2$，$a=0$.

故选(B).

**例(选讲)** 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+ax_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$，其中二次型的秩 $r(f)=2$.

(1) 求 $a$；

(2)用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形;

(3)将该二次型化为规范形，并写出可逆线性变换.

**【考查知识点】**二次型的秩与正交变换法化二次型为标准形.

**【解】**(1)二次型 $f$ 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}$，又二次型 $f$ 的秩为 $2$，故 $r(A)=2$，则 $|A|=0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&24&-12\\-1&5&-3\\0&12&a-9\end{vmatrix}=24(a-9)+144=0,$$

解得 $a=3$.

(2) $a=3$时，$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{pmatrix}$，则矩阵 $A$ 的特征多项式

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda&-1&3\\-1&5-\lambda&-3\\3&-3&3-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-4)(\lambda-9),$$

故 $A$ 的特征值为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=4$，$\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=0$ 时，解方程组 $(A-0E)x=\mathbf{0}$，

$$A-0E=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量 $p_1=(-1,1,2)^{\mathrm T}$.

当 $\lambda_2=4$ 时，解方程组 $(A-4E)x=\mathbf{0}$，

$$A-4E=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\3&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量 $p_2=(1,1,0)^{\mathrm T}$.

当 $\lambda_3=9$ 时，解方程组 $(A-9E)x=\mathbf{0}$，

$$A-9E=\begin{pmatrix}-4&-1&3\\-1&-4&-3\\3&-3&-6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&15&15\\-1&-4&-3\\0&-15&-15\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得特征向量 $p_3=(1,-1,1)^{\mathrm T}$.

将 $\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3$ 单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{p}_1}{\|\boldsymbol{p}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{p}_2}{\|\boldsymbol{p}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{p}_3}{\|\boldsymbol{p}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵，故在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下二次型化为标准形 $f=4y_2^2+9y_3^2$.

(3) 由于二次型的标准形为 $f=4y_2^2+9y_3^2$，故令 $\begin{cases}z_1=y_1,\\ z_2=2y_2,\\ z_3=3y_3,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}y_1=z_1,\\ y_2=\frac{1}{2}z_2,\\ y_3=\frac{1}{3}z_3,\end{cases}$ 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}$，其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

故在可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 下，二次型化为规范形 $f=z_2^2+z_3^2$，其中

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{9}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{9}\\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{9}\end{pmatrix},$$

即可逆线性变换为 $\begin{cases}x_1=-\frac{\sqrt{6}}{6}z_1+\frac{\sqrt{2}}{4}z_2+\frac{\sqrt{3}}{9}z_3,\\ x_2=\frac{\sqrt{6}}{6}z_1+\frac{\sqrt{2}}{4}z_2-\frac{\sqrt{3}}{9}z_3,\\ x_3=\frac{\sqrt{6}}{3}z_1+\frac{\sqrt{3}}{9}z_3.\end{cases}$

**例(选讲)** 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为1，特征值之积为 $-12$.

(1) 求 $a,b$ 的值；

(2) 利用正交变换法将二次型 $f$ 化为标准形，并写出所用的正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 和对应的正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

**【考查知识点】**特征值的性质；正交变换法化二次型为标准形.

**【解】**(1) 由题可知二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$，且

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=1=a+2-2，\ |\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=2(-2a-b^2)=-12,$$

解得 $a=1$，$b=2$.

(2) 由 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0$，得特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$，$\lambda_3=-3$.

$\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\xi}_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$.

$\lambda_3=-3$ 时，$\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(-1,0,2)^{\mathrm{T}}$.

由于 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 两两正交，故将其单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=(0,1,0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,0,2)^{\mathrm{T}}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，则在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 下二次型化为标准形 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

**4. 配方法**

用正交变换法化二次型为标准形，具有保持几何形状不变的优点，通过配方法(可逆线性变换)也可以把二次型化为标准形.

任意 $n$ 元二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 都可用配方法将其化为标准形.

配方法化标准形的一般步骤：

(1) 若二次型中含有 $x_i$ 平方项，先将含有 $x_i$ 的所有项放在一起完成配方，然后依次对余下的 $x_j (n \ge j > i)$ 项配方，最后二次型将化为几个平方和或差的形式，即经可逆线性变换得到标准形；

(2) 若二次型中只有交叉混合项，一般先使用平方差变换化交叉混合项为有平方项的二次型，再使用 (1) 方法化为标准形.

**【注】**①如果配方的次序不同，则所得到的标准形不一定相同.

②二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 经配方法得到的标准形的系数与特征值无关，但和特征值的正负个数一致.

**例 6** 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3$$

为标准形，并求所用的可逆线性变换.

**【考查知识点】**配方法化二次型为标准形.

**【解】**由于 $f$ 中含有变量 $x_1$ 的平方项，故直接配方得

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 3x_2x_3 \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2x_3 \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3)^2 - \frac{1}{4}\left[(x_2 + x_3)^2 - (x_2 - x_3)^2\right] \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3)^2 - \left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - x_3}{2}\right)^2 . \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = \dfrac{x_2 + x_3}{2}, \\ y_3 = \dfrac{x_2 - x_3}{2}, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = \dfrac{y_1}{2} - y_3, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3. \end{cases}$ 用矩阵形式表示为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

设 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆，故通过可逆线性变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 可将二次型 $f$ 化成标准形

$f = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$.

# 第三节 二次型的正定性

## 一、正定二次型的概念

1. 设二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$（当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时 $f = 0$），则称二次型 $f$ 为正定二次型，此时 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

2. 设二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$（当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 时 $f = 0$），则称二次型 $f$ 为负定二次型，此时 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵.

3. 设二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \geq 0$，则称二次型 $f$ 为半正定二次型，此时 $\boldsymbol{A}$ 是半正定矩阵.

4 设二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq 0$，则称二次型 $f$ 为半负定二次型，此时 $\boldsymbol{A}$ 是半负定矩阵.

5. 设二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，若对任意 $\boldsymbol{x}$，不能确定 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} > 0$ 或 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} < 0$，则称二次型 $f$ 为不定二次型.

## 二、二次型正定性的判定

1. 二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 标准形中平方项的 $n$ 个系数都为正数；

2. 二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $n$ 个特征值全为正；

3. 二次型 $f = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 二次型的正惯性指数为 $n$；

4. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$，即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同；

5. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$；

6. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正定 $\Leftrightarrow$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各阶顺序主子式全为正，即

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\quad \cdots,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

7. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 负定 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶主子式为负，偶数阶主子式为正.

**例 7** 判定二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$ 是否为正定二次型.

**【考查知识点】**二次型正定性的判别方法.

【解】二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{pmatrix}$，各阶顺序主子式为

$$a_{11}=2>0,\ \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\2&5\end{vmatrix}=6>0,$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{vmatrix}=10>0,$$

故矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，对应的二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为正定二次型.

**例 8** 设二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 $2$，二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$，若 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定，则 $k$ 的取值范围为________.

**【考查知识点】**二次型正定的判别方法.

**【答案】**$(1,+\infty)$.

**【解析】**由题意可知 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 $\lambda_1=0$.

由 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}|=0$，得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_2=-1,\lambda_3=2$，故 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 的特征值分别为 $k,k-1,k+2$，若 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 正定，则 $k>0,k-1>0,k+2>0$，解得 $k>1$.

**例 9** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n$ 阶可逆矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

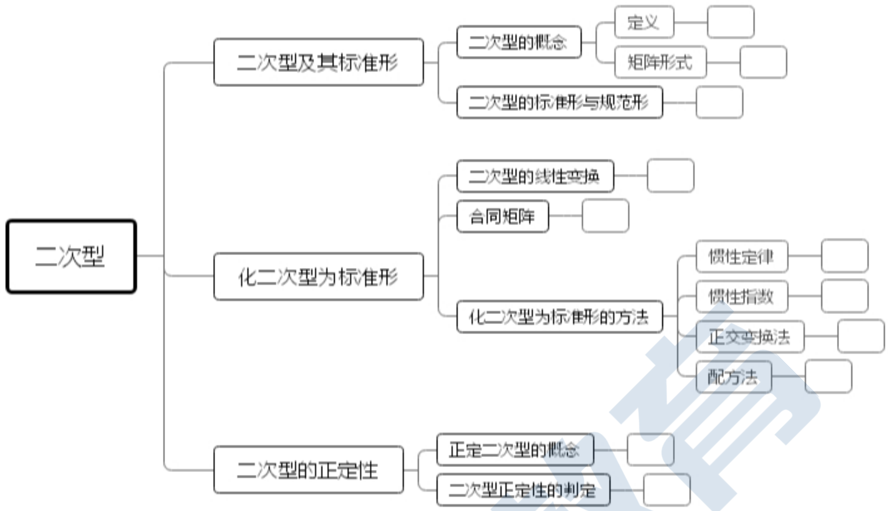
**【考查知识点】**二次型正定的判别方法.

**【证明】**因为 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵. 由 $\boldsymbol{A}$ 可逆得 $r(\boldsymbol{A})=n$，故方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，即对任给的 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，必有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2>0,$$

故二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 是正定二次型，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

## 本章小结


二次型
二次型及其标准形
二次型的概念
定义
矩阵形式
二次型的标准形与规范形
化二次型为标准形
二次型的线性变换
合同矩阵
化二次型为标准形的方法
惯性定律
惯性指数
正交变换法
配方法
二次型的正定性
正定二次型的概念
二次型正定性的判定