

1. 设 $F'(x) = f(x)$, 则下列陈述中哪些是对的, 哪些是错的? 如果是对的, 说明理由; 如果是错的, 试给出一个反例.

- (1) 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $F(x)$ 为偶函数;
- (2) 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 $F(x)$ 为奇函数;
- (3) 若 $f(x)$ 为周期函数, 则 $F(x)$ 为周期函数;
- (4) 若 $f(x)$ 为单调函数, 则 $F(x)$ 为单调函数.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的 ()

- (A) 左、右导数都存在
- (B) 左导数存在, 右导数不存在
- (C) 左导数不存在、右导数存在
- (D) 左、右导数都不存在

3. 设 $f(x)$ 可导, , 则 $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 ()

- (A) 充分必要条件
- (B) 充分条件但非必要条件
- (C) 必要条件但非充分条件
- (D) 既非充分条件又非必要条件

4. 证明：（1）若 $f(x)$ 为可导的奇函数，则 $f'(x)$ 为偶函数；

（2）若 $f(x)$ 为可导的偶函数，则 $f'(x)$ 为奇函数；

（3）若 $f(x)$ 为偶函数，且 $f'(0)$ 存在，则 $f'(0) = 0$ 。

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$ ，为了使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且可导， a, b 应取什么值？

6. 试从 $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$ 导出： $\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{y''}{(y')^2}$ ， $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3(y'')^2 - y'y'''}{(y')^5}$

7. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) (n \geq 3)$ 。

8. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y = 1 + xe^{xy}$ 所确定，求 $y'|_{x=0}, y''|_{x=0}$ 。

9. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+o(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6, f(6))$ 处的切线方程.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $f(0)=f'(0)=0$, 试求函数

$$g(x)=\begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ 的导数.}$$

11. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2+y^2}$ 确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 已知函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x-e^x \sin t + 1 = 0 \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ 所确定, 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}$

13. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos 2t \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是: ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$ (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$
(C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在 (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

15. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格中:

- (1) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 连续的_____条件, $f(x)$ 在点 x_0 连续是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件;
(2) $f(x)$ 在点 x_0 的左导数 $f'_-(x_0)$ 及右导数 $f'_+(x_0)$ 都存在且相等是 $f(x)$ 在点 x_0 可导的_____条件;
(3) $f(x)$ 在点 x_0 可导是 $f(x)$ 在点 x_0 可微的_____条件.

16. 设 $f(x) = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n)$ ($n \geq 2$), 则 $f'(0) =$ _____.

17. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义, 则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是: ()

(A) $\lim_{h \rightarrow +\infty} h \left[f\left(a + \frac{1}{h}\right) - f(a) \right]$ 存在 (B) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h) - f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ 存在 (D) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}$ 存在

18. 设函数 $f(x)$ 可导且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^2} = 1$, 则 $f'(x_0), f''(x_0)$ 分别为 ().

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 2,1 (D) 2,0

19. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 的某邻域内有定义, 且满足 $3x \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为_____.

20. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 其反函数为 $y=g(x)$, 若

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2x - 2}{x^2} = 1$, 则 $g'(2) =$ _____, $g''(2) =$ _____.