勤学如春起之苗，不见其增，日有所长；

辍学如磨刀之石，不见其损，日有所亏。

——————陶渊明

例 1、 设 $f(x)=\ln^2 x$， $g(x)=x$， $h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x>1)$，则当 x 充分大时，(　　).

A. $f(x)<g(x)<h(x)$　　B. $g(x)<h(x)<f(x)$

C. $h(x)<g(x)<f(x)$　　D. $g(x)<f(x)<h(x)$

【答案】A.

解　由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0<1$$

故当 x 充分大时， $g(x)=x>0,\dfrac{f(x)}{g(x)}<1$，即 $f(x)<g(x)$.又

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{x}{2}}=+\infty>1$$

故当 x 充分大时， $g(x)=x>0,\dfrac{h(x)}{g(x)}>1$，即 $h(x)>g(x)$ .A 正确.

【注】此题本质是无穷大量阶的比较：从低阶到高阶有

$$\ln^{\lambda} n，\ n^{\alpha}，\ a^{n}，\ n!，\ n^{n}(n\to\infty)，$$

其中 $\lambda\geqslant 1，\alpha>0，a>1$.

例 2、函数 $f(x)=\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$ 在 $x=0$ 处为(　　).

A.可去间断点　　B.跳跃间断点

C.无穷间断点　　D.振荡间断点

【答案】A.

解　$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断，考虑间断点处的左、右极限.

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1，$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，A 正确.

例 3、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0,\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$__________.

【答案】-2.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2ax}-1}{x}=2+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2ax}{x}=2+2a$.

又由函数连续的定义，可得 $2+2a=a$，解得 $a=-2$.

例 4、$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{e^{x^4}-1}=$__________.

【答案】$\dfrac{1}{12}$.

解 当 $x\to0$ 时，有 $e^{x^4}-1\sim x^4$，故

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to0}e^{2-2\cos x}\cdot\frac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{12}$$

【注】解答中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-e^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}e^{2-2\cos x}\cdot\dfrac{e^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}$，这一步采取的方法是分子提取公因式 $e^{2-2\cos x}$，提取公因式是考研试题中常用的技巧.

一般以下三种情形常可考虑提取公因式：①$\infty-\infty$；②指数函数；③幂函数.

例 5、求下列极限：

（I）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$

（II）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$；

解（I）依题意，得

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} \leqslant \frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n} \leqslant \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$，

故根据夹逼准则，原式$=\frac{1}{2}$.

（II） $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n}{\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n-1)}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$