2026 考研数学基础讲义

概率论与数理统计

文都集团教学研究院

目　录

第一章　随机事件和概率

例 1【解】(1) 2024 年国庆节可能下雨，也可能不下雨，但这种试验不能在相同条件下重复进行，因此这不是随机试验.

(2) 目标可能被击中 $0,1,2,3$ 次，这是随机试验.

样本空间为 $\Omega=\{0,1,2,3\}$. 事件 $A=\{1,2,3\}$.

(3) 记灯泡的使用寿命为 t 小时，则对 t 的测试是随机试验.

样本空间为 $\Omega=\{t\mid t>0\}$. 事件 $A=\{t\mid t>1000\}$.

例 2【答案】B.

【解析】由于 $B-A=B$，即 $B=\overline{A}B=\overline{A}\cap B$，从而

$$A\cap B=A\cap(\overline{A}\cap B)=(A\cap\overline{A})\cap B=\varnothing.$$

故选 B.

例 3【答案】D.

【解析】当 $A=B$，且 $AB=\varnothing$ 时，则 $AB=BB=AA=\varnothing$，即 $A=B=\varnothing$.

故选 D.

例 4【答案】B.

【解析】由于 $AB=\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}$，因此

$$\overline{A}\cup\overline{B}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(AB)=(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}})=\Omega.$$

故选 B.

例 5【解】样本空间基本事件总数为 $n=\mathrm{C}_{10}^{4}=210$，有利于所求事件发生的基本事件数为 $k=\mathrm{C}_{6}^{3}\mathrm{C}_{4}^{1}=80$，故所求概率为

$$p=\frac{k}{n}=\frac{80}{210}=\frac{8}{21}.$$

例 6【解】设 x,y 分别表示在区间 $(0,1)$ 中随机取到的两个数，则

$$D=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\}.$$

事件 A 表示“两数之和大于 1，且两数之积小于 $\frac{1}{2}$”，则

$$A=\left\{(x,y)\middle| x+y>1, xy<\frac{1}{2},(x,y)\in D\right\}.$$

由几何概型 $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(D)}=\dfrac{\frac{1}{2}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(1-\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x}{1}=\dfrac{1}{2}\ln 2$.

例 7【答案】C.

【解析】由于概率为 0 的事件不一定是不可能事件，概率为 1 的事件不一定是必然事件，因此 A，B 均不正确.

由减法公式 $P(A\bigcap\overline{B})=P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)$，D 不正确.

由加法公式 $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，C 正确.

故选 C.

例 8【答案】B.

【解析】由已知 $AB\subset C$，则 $P(C)\geq P(AB)$.

又由于 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\bigcup B)\geq P(A)+P(B)-1$，所以

$$P(C)\geq P(AB)\geq P(A)+P(B)-1.$$

故选 B.

例 9【解】方法一 设事件 A 表示“第一次取得红球”，B 表示“第二次取得白球”，则

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{6\times 4}{10\times 9}}{\frac{6}{10}}=\frac{4}{9}.$$

方法二 当第一次取得红球时，袋中还剩下 9 只球，其中 5 只红球和 4 只白球. 此时再从袋中任取一只球，则该球为白球的概率为 $\frac{4}{9}$，因此已知在第一次取得红球的条件下，第二次取得白球的概率为 $\frac{4}{9}$.

例 10【答案】D.

【解析】由于

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+0.6-P(AB)=0.82,$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(AB)}{0.6}=0.3,$$

解得 $P(AB)=0.18, P(A)=0.4$，从而

$$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B-A)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

$$=\frac{0.6-0.18}{0.6}=0.7.$$

故选 D.

例 11【答案】 $\frac{3}{4}$.

【解析】 由乘法公式

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12},$$

$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}.$$

因此

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}.$$

例 12【解】 设 $A_i(i=1,2,3,4)$ 表示“第 i 次取到红球”，则所求的概率为

$$P(A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(\overline{A}_3|A_1A_2)\cdot P(\overline{A}_4|A_1A_2\overline{A}_3)$$

$$=\frac{C_3^1}{C_5^1}\times\frac{C_4^1}{C_6^1}\times\frac{C_2^1}{C_7^1}\times\frac{C_3^1}{C_8^1}=\frac{3}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{7}\times\frac{3}{8}$$

$$=\frac{3}{70}.$$

例 13【解】 设 A_1 表示“该考生完全掌握相关知识”，A_2 表示“该考生掌握部分相关知识”，A_3 表示“该考生完全不掌握相关知识”，B 表示“该考生选对答案”，则

$$P(A_1)=0.6, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.2,$$

$$P(B|A_1)=1, P(B|A_2)=0.5, P(B|A_3)=0.25.$$

(1) 由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=0.6\times1+0.2\times0.5+0.2\times0.25=0.75.$$

(2) 由贝叶斯公式，得

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.6\times 1}{0.75}=0.8.$$

例 14【解】 设 $A_i(i=1,2)$ 表示“取出的零件是第 i 台车床加工的”，B 表示“取出的零件是合格品”，则

$$P(A_1)=\frac{2}{3},P(A_2)=\frac{1}{3},$$

$$P(B|A_1)=1-0.03=0.97,P(B|A_2)=1-0.02=0.98.$$

(1) 由全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A_1)P(B|A_1)+P(B)P(A|A_2)\\&=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.98\\&=\frac{292}{300}.\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式，得

$$P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{1-P(B)}=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{100}}{1-\frac{292}{300}}=\frac{1}{4}.$$

例 15【答案】 B.

【解析】 由 A 与 B 相互对立和互不相容的定义知，若 A 与 B 相互对立，则 A 与 B 互不相容，故选 B.

例 16【答案】 0.125.

【解析】 由于 A 与 C 互不相容，则 $AC=\varnothing$，从而

$$\begin{aligned}P(C|A\cup B)&=\frac{P(AC\cup BC)}{P(A\cup B)}=\frac{P(BC)}{P(A)+P(B)-P(AB)}\\&=\frac{P(B)P(C|B)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}\\&=\frac{0.5\times 0.2}{0.6+0.5-0.6\times 0.5}\\&=0.125.\end{aligned}$$

例 17【答案】 0.625.

【解析】 设 A 表示“甲命中目标”，B 表示“乙命中目标”，则所求概率为

$$P(B|A\cup B)=\frac{P(B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}$$

$$=\frac{0.5}{0.6+0.5-0.6\times0.5}=0.625.$$

例 18【答案】$\frac{19}{27}$.

【解析】设 A,B,C 分别表示“第一个，第二个，第三个人独立译出密码”，则 A,B,C 相互独立，从而所求的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$$

$$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{19}{27}.$$

例 19【答案】$\frac{1}{3}$.

【解析】$P(AC\mid A\cup B)=\frac{P[AC(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC\cup ABC)}{1-P(\overline{A\cup B})}$

$$=\frac{P(AC)}{1-P(\overline{A}\overline{B})}=\frac{P(A)P(C)}{1-P(\overline{A})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

例 20【答案】A.

【解析】已知 A,B,C 两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C).$$

又 A 与 BC 相互独立 $\Leftrightarrow$ $P[A(BC)]=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C)$.

故选 A.

例 21【答案】$1-\frac{1}{3^n};\frac{1+2n}{3^n}$.

【解析】出现“至少”两个字，一般考虑对立事件. A 至少发生一次的对立事件是 A 一次也没发生，其概率为 $\left(1-\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3^n}$，因此 A 至少发生一次的概率为 $1-\frac{1}{3^n}$.

A 至多发生一次，有两种可能：一次也没发生或只发生了一次，其概率为

$$\frac{1}{3^n}+n\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1+2n}{3^n}.$$

第二章　随机变量及其分布

例 1【答案】 A.

【解析】 因为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 为分布函数，所以 $F_1(+\infty)=F_2(+\infty)=1$.

若 $F(x)=aF_1(x)+bF_2(x)$ 是某随机变量的分布函数，则 $F(+\infty)=1$，即

$$F(+\infty)=aF_1(+\infty)+bF_2(+\infty)=a+b=1.$$

故选 A.

例 2【解】 由分布函数的性质，有

$$F(+\infty)=1, F(2+0)=F(2)=0,$$

解得 $a=1,b=2$，因此 $F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{4}{x^2}, & x>2,\\ 0, & x\le 2.\end{cases}$

所以 $P\{1<X\le 4\}=F(4)-F(1)=\dfrac{3}{4}-0=\dfrac{3}{4}$.

例 3【答案】 $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.

【解析】 $P\{X=1\}=F(1)-F(1-0)=1-\mathrm{e}^{-1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.

例 4【答案】 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【解析】 由概率分布的性质，有

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=C\mathrm{e},$$

解得 $C=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

例 5【解】 X 的可能取值为 $0,1,2$，且

$$P\{X=0\}=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}=0.1,$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{6}{10}=0.6,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}=0.3.$$

故 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.1	0.6	0.3

例 6【解】(1) X 的分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$.

当 $x<-2$ 时, $F(x)=0$;

当 $-2\le x<0$ 时, $F(x)=P\{X=-2\}=0.1$;

当 $0\le x<3$ 时, $F(x)=P\{X=-2\}+P\{X=0\}=0.1+0.2=0.3$;

当 $3\le x<6$ 时, $F(x)=P\{X=-2\}+P\{X=0\}+P\{X=3\}$

$$=0.1+0.2+0.3=0.6;$$

当 $x\ge 6$ 时, $F(x)=1$.

故 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ 0.1, & -2\le x<0,\\ 0.3, & 0\le x<3,\\ 0.6, & 3\le x<6,\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$$

(2) 由(1)知

$$P\{X\le 0\}=F(0)=0.3,$$

$$P\{-1<X\le 4\}=F(4)-F(-1)=0.6-0.1=0.5,$$

$$P\{X\ge -2\}=1-P\{X<-2\}=1-F(-2-0)=1-0=1.$$

或由概率分布知

$$P\{X \le 0\} = P\{X = -2\} + P\{X = 0\} = 0.3,$$

$$P\{-1 < X \le 4\} = P\{X = 0\} + P\{X = 3\} = 0.5$$

$$P\{X \ge -2\} = P\{X = -2\} + P\{X = 0\} + P\{X = 3\} + P\{X = 6\} = 1.$$

例 7【解】 X 的可能取值为$0,1,2$，且

$$P\{X = 0\} = F(0) - F(0-0) = 0.2 - 0 = 0.2,$$

$$P\{X = 1\} = F(1) - F(1-0) = 0.4 - 0.2 = 0.2,$$

$$P\{X = 2\} = F(2) - F(2-0) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

故 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.2	0.2	0.6

例 8【解】由于 $X \sim B(2,p)$，则 $P\{X = 0\} = (1-p)^2$.

又 $P\{X \ge 1\} = 1 - P\{X = 0\}$，则 $P\{X = 0\} = 1 - P\{X \ge 1\} = 1 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{4}{9}$.

从而 $(1-p)^2 = \dfrac{4}{9}$，解得 $p = \dfrac{1}{3}$，因此 $Y \sim B\left(3,\dfrac{1}{3}\right)$，于是

$$\begin{aligned} P\{Y \ge 2\} &= 1 - P\{Y = 0\} - P\{Y = 1\} \\ &= 1 - \left(1-\frac{1}{3}\right)^3 - \mathrm{C}_3^1\left(\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

例 9【解】已知 $X \sim P(\lambda)$，则 X 的概率分布为

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, k = 0,1,2,\cdots.$$

又 $P\{X = 1\} = P\{X = 2\}$，即 $\dfrac{\lambda}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \dfrac{\lambda^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}$，解得 $\lambda = 2$.

故 $P\{0<X^2<3\}=P\{X=1\}=2\mathrm{e}^{-2}$.

例 10【答案】 $P\{X=k\}=\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\frac{5}{6},\ k=1,2,\cdots$.

【解析】 X 的可能取值为$1,2,\cdots$，当 $X=k$ 时，则“前 $k-1$ 次测到的都是次品，而第 k 次测到的是正品”，故 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\frac{5}{6},\ k=1,2,\cdots.$$

例 11【解】 设 X 表示100次独立重复测量中测量误差的绝对值大于19.6的次数，则

$$X\sim B(100,0.05).$$

从而所求的概率为

$$\begin{aligned}\alpha&=P\{X\geq 3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}\\&=1-0.95^{100}-100\times 0.05\times 0.95^{99}-\frac{100\times 99}{2}\times 0.05^2\times 0.95^{98}.\end{aligned}$$

由泊松定理，X 近似服从参数 $\lambda=np=100\times 0.05=5$ 的泊松分布，从而

$$\begin{aligned}\alpha&\approx 1-\mathrm{e}^{-\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}=1-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)\\&=1-0.007\times(1+5+12.5)\\&=0.87.\end{aligned}$$

例 12【答案】 C.

【解析】 对于 A，$\int_{-\infty}^{+\infty}2f(x)\mathrm{d}x=2\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2$，A 不正确.

对于 B，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(2x)\mathrm{d}x\xlongequal{2x=t}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$，B 不正确.

对于 C，显然 $f(1-x)\geq 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(1-x)\mathrm{d}x\xlongequal{1-x=t}-\int_{+\infty}^{-\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1$，C 正确.

对于 D，$\int_{-\infty}^{+\infty}[1-f(x)]\mathrm{d}x$ 不存在，D 不正确.

故选 C.

例 13【解】 (1) 由概率密度的额性质，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_1^4\frac{a}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2a=1,$$

解得 $a=\frac{1}{2}$.

(2) 由 (1) 知 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}}, & 1<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此 $P\{|X|\le 3\}=\int_{-3}^{3}f(x)\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\sqrt{3}-1$.

(3) 当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；

当 $1\le x<4$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{1}^{x}\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t=\sqrt{x}-1$；

当 $x\ge 4$ 时，$F(x)=1$.

故 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \sqrt{x}-1, & 1\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$

例 14【答案】 0.8.

【解析】 已知 X 在区间 $(1,6)$ 上服从均匀分布，则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}, & 1<x<6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

又方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根 $\Leftrightarrow \Delta=X^2-4\ge 0$，从而所求的概率为

$$P\{X^2-4\ge 0\}=P\{X\le -2\}+P\{X\ge 2\}=\int_{2}^{6}\frac{1}{5}\mathrm{d}x=0.8.$$

例 15【答案】 0.9.

【解析】 由于

$$P\{5<X<10\}=P\left\{0<\frac{X-5}{\sigma}<\frac{5}{\sigma}\right\}=\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)-\Phi(0)$$

$$=\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)-0.5=0.4,$$

解得$\Phi\left(\dfrac{5}{\sigma}\right)=0.9$，从而

$$P\{X>0\}=1-P\{X\le 0\}=1-P\left\{\frac{X-5}{\sigma}\le -\frac{5}{\sigma}\right\}$$

$$=1-\Phi\left(-\frac{5}{\sigma}\right)=1-\left[1-\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)\right]=\Phi\left(\frac{5}{\sigma}\right)$$

$$=0.9.$$

例 16【答案】 $1-\dfrac{1}{e^2}$.

【解析】 由指数分布的无记忆性，有

$$P\{Y\le 2\,|\,Y>1\}=1-P\{Y>2\,|\,Y>1\}=1-P\{Y>1\}$$

$$=P\{Y\le 1\}=F(1)=1-\frac{1}{e^2}.$$

例 17【解】 (1) Y 的可能取值为$-1,0,1,2$，且

$$P\{Y=-1\}=P\{X+1=-1\}=P\{X=-2\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=0\}=P\{X+1=0\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{6},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X+1=1\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=2\}=P\{X+1=2\}=P\{X=1\}=\frac{1}{3}.$$

故Y的概率分布为

Y	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$

(2) Y 的可能取值为$0,1,4$，且

$$P\{Y=0\}=P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X^2=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=1\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2},$$

$$P\{Y=4\}=P\{X^2=4\}=P\{X=-2\}=\frac{1}{4}.$$

故 Y 的概率分布为

Y	0	1	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

例 18【解】 已知 $X\sim U(0,1)$，则 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

随机变量 $Y=X^2+1$ 的取值范围是 $(1,2)$，设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2+1\le y\}.$$

当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $1\le y<2$ 时，$F_Y(y)=P\{X^2+1\le y\}=P\{-\sqrt{y-1}\le X\le\sqrt{y-1}\}$

$$=P\{0\le X\le\sqrt{y-1}\}=\int_0^{\sqrt{y-1}}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt{y-1};$$

当 $y\ge 2$ 时，$F_Y(y)=1$.

故 Y 的概率密度为 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}, & 1<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

例 19【解】 由于 $X\sim E(\lambda)$，则 X 的概率密度和分布函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

随机变量 $Y=1-\mathrm{e}^{-\lambda X}$ 的取值范围是 $(0,1)$，设 Y 的分布函数为 $F_Y(y)$，则

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{1-\mathrm{e}^{-\lambda X}\le y\}.$$

当 $y<0$ 时，$F(y)=0$；

当 $0 \le y < 1$ 时，$F(y) = P\{1-e^{-\lambda X} \le y\} = P\left\{X \le -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right\}$

$$= F_X\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right] = 1-(1-y)$$

$$= y;$$

当 $y \ge 1$ 时，$F(y) = 1$.

故 Y 的概率密度为

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

可以看出，随机变量 $Y = 1-e^{-\lambda X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

第三章　多维随机变量及其分布

例 1【答案】B.

【解析】方法一　记 $A=\left\{X\le\frac{1}{2}\right\},B=\{Y\le 1\}$，由分布函数的定义可知

$$F\left(\frac{1}{2},1\right)=P\left\{X\le\frac{1}{2},Y\le 1\right\}.$$

因此

$$P\left\{X>\frac{1}{2},Y>1\right\}=P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$

$$=1-P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}-P\{Y\le 1\}+P\left\{X\le\frac{1}{2},Y\le 1\right\}$$

$$=1-F\left(\frac{1}{2},+\infty\right)-F(+\infty,1)+F\left(\frac{1}{2},1\right)$$

$$=1-(1-\mathrm{e}^{-1})-(1-\mathrm{e}^{-1})+(1-\mathrm{e}^{-1})^2$$

$$=\mathrm{e}^{-2}.$$

故选 B.

方法二　X 和 Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然对于任意实数 x 和 y，有 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$，因此随机变量 X 和 Y 相互独立.

从而 $P\left\{X>\frac{1}{2},Y>1\right\}=P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}P\{Y>1\}=\left[1-P\left\{X\le\frac{1}{2}\right\}\right][1-P\{Y\le 1\}]$

$$=\left[1-F_X\left(\frac{1}{2}\right)\right][1-F_Y(1)]=e^{-1}\cdot e^{-1}$$

$$=e^{-2}.$$

故选 B.

例 2【解】(1) (X,Y) 的可能取值为 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$，且

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_4^1C_3^1}{C_9^1C_8^1}=\frac{1}{6},P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_4^1C_5^1}{C_9^1C_8^1}=\frac{5}{18},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^1C_8^1}=\frac{5}{18},P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_5^1C_4^1}{C_9^1C_8^1}=\frac{5}{18}.$$

所以 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$
1	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$

(2) 由 (1) 知

$$P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{6}+\frac{5}{18}=\frac{4}{9}.$$

例 3【答案】C.

【解析】由 $P\{XY\neq 1\}=\frac{3}{8}$，则 $P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=1-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$，从而

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1\}-P\{X=1,Y=1\}=\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}-P\{X=1,Y=1\}=\frac{3}{4}-\frac{5}{8}=\frac{1}{8}.$$

所以 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	

从而 $P\{X=Y\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{8}+\frac{5}{8}=\frac{3}{4}$.

故选 C.

例 4【解】 (X,Y) 的可能取值为 $(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)$，且

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=0,$$

同理 $P\{X=2,Y=2\}=P\{X=3,Y=3\}=0$.

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6},$$

同理 $P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=1\}=P\{X=2,Y=3\}$

$$=P\{X=3,Y=1\}=P\{X=3,Y=2\}=\frac{1}{6}.$$

从而 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	1	2	3	
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

由分布律可知

$$P\{X=1|Y=2\}=\frac{P\{X=1,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=2|Y=2\}=\frac{P\{X=2,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=0,$$

$$P\{X=3|Y=2\}=\frac{P\{X=3,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

所以在$Y=2$的条件下，X的条件概率分布为

X	1	2	3
$P\{\cdot\|Y=2\}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

例 5【答案】 C.

【解析】 $P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}$

$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}$$

$$+P\{X=3\}P\{Y=-1\}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}.$$

故选 C.

例 6【解】 (1) 由概率密度的性质，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{c}{6}=1,$$

解得$c=6$.

(2) 当$x<0$或$y<0$时，$F(x,y)=0$；

当$x\geq 0,y\geq 0$时，$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{y}f(u,v)\mathrm{d}v=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^y 6\mathrm{e}^{-(3u+2v)}\mathrm{d}v$

$$=(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-2y}).$$

故 $F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-3x})(1-\mathrm{e}^{-2y}), & x\geq 0,y\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(3) $P\{Y\leq X\}=\iint\limits_{y\leq x}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{e}^{-2y}\mathrm{d}y=\frac{2}{5}.$

例 7【解】 因为区域D的面积为$S_D=2$，因此(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\le x\le 2,0\le y\le 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(U,V) 的可能取值为 $(0,0)(0,1),(1,0),(1,1)$，且

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y,X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}=\iint\limits_{x\le y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y,X>2Y\}=0,$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=\iint\limits_{y<x\le 2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

因此 (U,V) 的概率分布为

$U \backslash V$	0	1	
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

例 8【答案】$\dfrac{1}{2}$.

【解析】已知 $(X,Y)\sim N(0,1;1,1;0)$，则 $\rho_{XY}=0$，从而 X 与 Y 相互独立，且

$$X\sim N(0,1),Y\sim N(1,1).$$

因此 $P\{XY-X<0\}=P\{X(Y-1)<0\}=P\{X>0,Y<1\}+P\{X<0,Y>1\}$

$$=P\{X>0\}P\{Y<1\}+P\{X<0\}P\{Y>1\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}.$$

例 9【解】区域 G 的面积 $S_G=\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{6}$，因此 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & 0<x<1, x^2<y<x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}6\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}6(x-x^2), & 0<x<1,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{y}^{\sqrt{y}}6\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例 10【解】(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^2\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & 其他\end{cases}$

$$=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x, & 0<y<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(2) 当 $f_Y(y)>0$ 时，即 $0<y<2$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{6x^2+2xy}{2+y}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $f_X(x)>0$ 时，即 $0<x<1$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\frac{3x+y}{6x+2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3) $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}y=\frac{65}{72}.$

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\middle|X<\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{X<\frac{1}{2},Y<\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X<\frac{1}{2}\right\}}=\frac{\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\int_0^{\frac{1}{2}}\left(2x^2+\frac{2}{3}x\right)\mathrm{d}x}=\frac{5}{32}.$$

由(2)知，当 $X=\frac{1}{3}$ 时，$f_{Y|X}(y|x)=\frac{1+y}{4}$，故

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\middle|X=\frac{1}{3}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+y}{4}\mathrm{d}y=\frac{5}{32}.$$

例 11【解】(1)由题设知 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y, & x^2<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(2) Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(3)当 $f_Y(y)>0$，即 $0<y<1$ 时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\frac{3x^2}{2y^{\frac{3}{2}}}, & -\sqrt{y}<x<\sqrt{y},\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

例 12【证明】由于

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_{\sqrt{2}}^{2}3x^2y\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^1 3x^2y\mathrm{d}x, & \sqrt{2}<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}y, & \sqrt{2}<y<2,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

显然 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，因此 X,Y 相互独立.

例 13【解】由分布律的性质，有

$$0.1+0.2+a+b+0.1+0.2=1,$$

即 $a+b=0.4$.

又 $P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+0.1=0.4$，

解得 $a=0.3$，从而 $b=0.1$.

(1) 随机变量 $Z=X+Y$ 的可能取值为 $-1,0,1,2$，且

$$P\{Z=-1\}=P\{X+Y=-1\}=P\{X=0,Y=-1\}=0.1,$$

$$P\{Z=0\}=P\{X+Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.3,$$

$$P\{Z=1\}=P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=0.4,$$

$$P\{Z=2\}=P\{X+Y=2\}=\{X=1,Y=1\}=0.2.$$

故随机变量 $Z=X+Y$ 的概率分布为

Z	-1	0	1	2
P	0.1	0.3	0.4	0.2

(2) 随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的可能取值为 $0,1$，且

$$P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=0,Y=0\}=0.3,$$

$$P\{Z=1\}=P\{\max(X,Y)=1\}=1-0.3=0.7.$$

故随机变量 $Z=\max(X,Y)$ 的概率分布为

Z	0	1
P	0.3	0.7

(3) 随机变量 $Z=\min(X,Y)$ 的可能取值为 $-1,0,1$，且

$$P\{Z=-1\}=P\{\min(X,Y)=-1\}=P\{X=0,Y=-1\}+P\{X=1,Y=-1\}=0.2,$$

$$P\{Z=1\}=P\{\min(X,Y)=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0.2,$$

$$P\{Z=0\}=P\{\min(X,Y)=0\}=1-0.2-0.2=0.6.$$

故随机变量 $Z=\min(X,Y)$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	0.2	0.6	0.2

例 14【解】(1) X 和 Y 的边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}1-\dfrac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)**方法一**　设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X-Y\le z\}=\iint\limits_{2x-y\le z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $z<0$ 时，$F_z(z)=0$；

当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=1-\iint\limits_{2x-y>z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y$

$$=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}(2x-z)\mathrm{d}x$$

$$=z-\frac{z^2}{4};$$

当 $z\ge 2$ 时，$F_z(z)=1$.

从而 $Z=2X-Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z{}'(z)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{2}z, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

方法二　$Z=2X-Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,2x-z)\mathrm{d}x$，其中

$$f(x,2x-z)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<2x-z<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x=1-\dfrac{z}{2}$.

从而 $Z=2X-Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 15【解】已知 $X\sim U(0,1),Y\sim E(1)$，则 X 和 Y 的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

又随机变量 X 和 Y 相互独立，则 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0<x<1, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

方法一 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{2X+Y\le z\}=\iint\limits_{2x+y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0\le z<2$ 时，$F_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{z}{2}+\frac{1}{2}e^{-z}-\frac{1}{2}$；

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{z-2x}e^{-y}\mathrm{d}y=1-\frac{1}{2}(e^{2-z}-e^{-z})$.

从而 $Z=2X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0<z<2,\\ \frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1), & z>2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

方法二 $Z=2X+Y$ 的概率密度为 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-2x)\mathrm{d}x$，其中

$$f(x,z-2x)=\begin{cases}e^{2x-z}, & 0\le x\le 1, z-2x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $0<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}}e^{2x-z}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1-e^{-z})$；

当 $z>2$ 时，$f_Z(z)=\int_0^1 e^{2x-z}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^{-z}(e^2-1)$.

从而 $Z=2X+Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-z}), & 0<z<2,\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-z}(\mathrm{e}^{2}-1), & z>2,\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

例 16【解】 设 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}\\ &=P\{X+Y\le z,X=0\}+P\{X+Y\le z,X=1\}\\ &=P\{Y\le z,X=0\}+P\{Y\le z-1,X=1\}\\ &=P\{X=0\}P\{Y\le z\}+P\{X=1\}P\{Y\le z-1\}\\ &=\frac{1}{2}P\{Y\le z\}+\frac{1}{2}P\{Y\le z-1\}\\ &=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1),\end{aligned}$$

其中 $F_Y(z)$ 为 Y 的分布函数，从而 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z{}'(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1).$$

当 $0<z<1$ 时，$-1<z-1<0$，则 $f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)=\frac{3}{2}z^2$；

当 $0<z-1<1$ 时，$1<z<2$，则 $f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z-1)=\frac{3}{2}(z-1)^2$.

因此 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{2}z^2, & 0<z<1,\\ \frac{3}{2}(z-1)^2, & 1<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

例 17【解】 由于 $X\sim E(\lambda_1),Y\sim E(\lambda_2)$，则 X,Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}\quad F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又 X,Y 相互独立，因此 $M=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_{\max}(z)&=P\{M\le z\}=P\{\max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}\\ &=F_X(z)F_Y(z)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 z})(1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 z}), & z>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}\end{aligned}$$

故 $M=\max\{X,Y\}$ 的概率密度为

$$f_{\max}(z)=F_{\max}'(z)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 z}+\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}-(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理 $N=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=P\{N\le z\}=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}\\&=1-P\{X>z,Y>z\}=1-P\{X>z\}P\{Y>z\}\\&=1-[1-P\{X\le z\}][1-P\{Y\le z\}]\\&=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]\\&=\begin{cases}1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\end{aligned}$$

故 $Z=\min\{X,Y\}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)z}, & z>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 18【答案】 $\dfrac{1}{9}$.

【解析】 $P\{\max(X,Y)\le 1\}=P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

第四章 随机变量的数字特征

例 1【解】 X 的可能取值为 $0,1,2,3$，且

$$P\{X=0\}=\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}=\frac{1}{20}, P\{X=1\}=\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}=\frac{9}{20},$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}=\frac{9}{20}, P\{X=3\}=\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{20}.$$

即 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

从而 $E(X)=0\times\frac{1}{20}+1\times\frac{9}{20}+2\times\frac{9}{20}+3\times\frac{1}{20}=\frac{3}{2}$.

例 2【解】 已知 $X\sim P(\lambda)$，则 X 的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\cdots.$$

从而 $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}$$

$$=\lambda.$$

例 3【解】 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{0}x(1+x)dx+\int_{0}^{1}x(1-x)dx=0$.

例 4【解】 已知 $X\sim E(\lambda)$，则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}\lambda xe^{-\lambda x}d(\lambda x)$

$$\xlongequal{\lambda x=t}\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{+\infty}te^{-t}dt=\frac{1}{\lambda}.$$

例 5【解】 由已知

$$E(2X+1)=[2\times(-2)+1]\times0.4+[2\times0+1]\times0.3+[2\times2+1]\times0.3=0.6,$$

$$E(X^2)=(-2)^2\times0.4+0^2\times0.3+2^2\times0.3=2.8,$$

$$E(\sin X)=\sin(-2)\times0.4+\sin0\times0.3+\sin2\times0.3=-0.1\sin2.$$

例 6【解】 由已知

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x=0,$$

$$E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|x|\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{12},$$

$$E(XY)=E(X\cos X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cos x\cdot f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\cos x\mathrm{d}x=0.$$

例 7【解】 由已知

$$E(X)=0\times\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)+1\times\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{6},$$

$$E(X+Y)=(0+0)\times\frac{2}{3}+(0+1)\times\frac{1}{6}+(1+0)\times\frac{1}{12}+(1+1)\times\frac{1}{12}=\frac{5}{12},$$

$$E(XY)=0\times0\times\frac{2}{3}+0\times1\times\frac{1}{6}+1\times0\times\frac{1}{12}+1\times1\times\frac{1}{12}=\frac{1}{12}.$$

例 8【解】 由已知

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}x\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}y\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$\begin{aligned}E(Y^2)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}y^2\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{4},\end{aligned}$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}xy\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

例 9【解】 由于 $X_i\sim U(0,1)(i=1,2,\cdots,n)$，则 X_i 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge1.\end{cases}$$

(1) 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则 $U=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ 的分布函数为

$$F_U(u)=[F(u)]^n=\begin{cases}0, & u<0,\\ u^n, & 0\le u<1,\\ 1, & u\ge1.\end{cases}$$

从而 U 的概率密度为 $f_U(u)=F_U'(u)=\begin{cases}nu^{n-1}, & 0<u<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

因此 $E(U)=\int_{-\infty}^{+\infty}uf_U(u)\mathrm{d}u=\int_0^1u\cdot nu^{n-1}\mathrm{d}u=n\int_0^1u^n\mathrm{d}u=\dfrac{n}{n+1}.$

(2) 由于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则 $V=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_V(v)=1-[1-F(v)]^n=\begin{cases}0, & v<0,\\ 1-(1-v)^n, & 0\le v<1,\\ 1, & v\ge 1.\end{cases}$$

从而 V 的概率密度为 $f_V(v)=F_V'(v)=\begin{cases}n(1-v)^{n-1}, & 0<v<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

因此 $E(V)=\int_{-\infty}^{+\infty} v f_V(v)\mathrm{d}v=\int_0^1 v\cdot n(1-v)^{n-1}\mathrm{d}v=\dfrac{1}{n+1}$.

(3) $E(U+V)=E(U)+E(V)=\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{1}{n+1}=1$.

例 10【解】 由于

$$E(X)=-2\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=0,$$

$$E(X^2)=(-2)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=2.$$

因此

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-0^2=2.$$

例 11【解】 已知 $X\sim E(\lambda)$，则 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty}(\lambda x)^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}(\lambda x)$

$$\xlongequal{\lambda x=t}\frac{1}{\lambda^2}\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=\frac{2}{\lambda^2}.$$

由例 4 知 $E(X)=\dfrac{1}{\lambda}$，因此

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}.$$

例 12【答案】 2.

【解析】 由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(2x)^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(2x)=1,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}4x^3\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(2x)=\frac{3}{2}.$$

因此

$$D(1-2X)=4D(X)=4\{E(X^2)-[E(X)]^2\}=4\left(\frac{3}{2}-1^2\right)=2.$$

例 13【答案】 D.

【解析】由概率密度的性质，有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(a+bx)\mathrm{d}x=a+\frac{b}{2},$$

即 $2a+b=2$.

又 $0.5=E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x(a+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}$，即 $3a+2b=3$.

由 $\begin{cases}2a+b=2,\\3a+2b=3,\end{cases}$ 解得 $a=1,b=0$，从而 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

因此 $X\sim U(0,1)$，于是 $D(X)=\frac{1}{12}$.

故选 D.

例 14【答案】 $1,\frac{7}{6}$.

【解析】已知 $X\sim E(2),Y\sim U(1,3)$，则

$$E(X)=\frac{1}{2},D(X)=\frac{1}{4},E(Y)=2,D(Y)=\frac{1}{3}.$$

又 X 与 Y 相互独立，从而

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\frac{1}{2}\times 2=1,$$

$$\begin{aligned}D(XY)&=E[(XY)^2]-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(XY)]^2\\&=\{D(X)+[E(X)]^2\}\{D(Y)+[E(Y)]^2\}-[E(XY)]^2\\&=\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left(\frac{1}{3}+2^2\right)-1\\&=\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

例 15【答案】 $5,\frac{34}{3}$.

【解析】由于 $X\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right),Y\sim N\left(0,\frac{1}{3}\right),Z\sim P(1)$，则

$$E(X)=2,D(X)=1,E(Y)=0,D(Y)=\frac{1}{3},E(Z)=1,D(Z)=1.$$

从而 $E(U)=E(X-2Y+3Z)=E(X)-2E(Y)+3E(Z)=2-2\times 0+3\times 1=5$.

又 X,Y,Z 相互独立，从而

$$\begin{aligned}D(U)&=D(X-2Y+3Z)=D(X)+4D(Y)+9D(Z)\\&=1+4\times\frac{1}{3}+9\times 1\\&=\frac{34}{3}.\end{aligned}$$

例 16【解】由于

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x(x+y)\mathrm{d}x=\frac{7}{12},$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 y(x+y)\mathrm{d}x=\frac{7}{12},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 xy(x+y)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

因此

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\times\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}.$$

例 17【答案】 7.

【解析】 由于

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4+2\mathrm{Cov}(X,Y)=3,$$

解得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=-1$，从而

$$\begin{aligned}D(X-Y)&=D(X)+D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=1+4-2\times(-1)=7.\end{aligned}$$

例 18【答案】 A.

【解析】 由于 $P\{X+Y=n\}=1$，即 $P\{Y=-X+n\}=1$，因此 $\rho_{XY}=-1$.

故选 A.

例 19【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】 由题设知 $X\sim N(0,2),Y\sim N(0,1)$，且 X,Y 相互独立，则

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=D(X)-D(Y)=2-1\\&=1,\end{aligned}$$

$$D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)=3,$$

$$D(V)=D(X-Y)=D(X)+D(Y)=3.$$

从而

$$\rho_{UV}=\frac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{1}{3}.$$

例 20【解】 由于 (X,Y) 服从单位圆盘上的均匀分布，因此 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}x\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}y\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le1}xy\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

由于 $E(XY)=E(X)E(Y)$，因此 X 与 Y 不相关. 又

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}, & -1<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 不独立.

例 21【解】 由于 $X\sim P(\lambda)$，因此 $E(X)=D(X)=\lambda$，又

$$\begin{aligned}1=E[(X-1)(X-2)]&=E(X^2)-3E(X)+2\\&=D(X)+[E(X)]^2-3E(X)+2\\&=\lambda^2-2\lambda+2,\end{aligned}$$

即 $(\lambda-1)^2=0$，故 $\lambda=1$.

例 22【解】 (1) 由 $(X,Y)\sim N\left(0,1;1,4;-\frac{1}{2}\right)$ 可知,

$$E(X)=0,E(Y)=1,D(X)=1,D(Y)=4,\rho_{XY}=-\frac{1}{2},$$

则

$$\begin{aligned}E(XY)&=\mathrm{Cov}(X,Y)+E(X)E(Y)\\&=\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}+E(X)E(Y)\\&=-\frac{1}{2}\times1\times2+0\times1=-1.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}D(2X+Y)&=4D(X)+D(Y)+4\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=4D(X)+D(Y)+4\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=4\times1+4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1\times2=4.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(2X+Y,X+Y)&=2\mathrm{Cov}(X,X)+3\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=2D(X)+3\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}+D(Y)\\&=2\times1+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1\times2+4=3.\end{aligned}$$

(4) 由于 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}$$

$$=1+4+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times1\times2=3.$$

因此随机变量 $2X+Y$ 与 $X+Y$ 的相关系数为

$$\rho_{2X+Y,X+Y}=\frac{\mathrm{Cov}(2X+Y,X+Y)}{\sqrt{D(2X+Y)}\sqrt{D(X+Y)}}=\frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

第五章 大数定律与中心极限定理

例 1【答案】 $\frac{1}{12}$.

【解析】 由已知

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)=0,$$

$$\begin{aligned}D(X+Y)&=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)\\&=D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}\\&=3.\end{aligned}$$

由切比雪夫不等式，有

$$P\{|X+Y|\ge 6\}=P\{|X+Y-E(X+Y)|\ge 6\}\le\frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{1}{12}.$$

例 2【答案】 6.

【解析】 由于 $X_i\sim P(2)$，因此 $E(X_i)=D(X_i)=2$，从而

$$E(X_i^2)=D(X_i)+[E(X_i)]^2=6.$$

又 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 同分布，所以 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2,\cdots$ 同分布，由辛钦大数定律，Y_n 依概率收敛于

$$E(Y_n)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=E(X_i^2)=6.$$

例 3【答案】 C.

【解析】 由于 $X_i\sim E(\lambda),i=1,2,\cdots$，因此

$$\mu=E(X_i)=\frac{1}{\lambda},\sigma^2=D(X_i)=\frac{1}{\lambda^2},$$

由列维-林德伯格中心极限定理，得

$$\begin{aligned}\Phi(x)&=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{\lambda}}\le x\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\le x\right\}.\end{aligned}$$

故选 C.

例 4【答案】 0.84.

【解析】设 X 表示100次独立重复试验中试验成功的次数，则 $X \sim B(100, 0.2)$，从而

$$E(X) = 100 \times 0.2 = 20,$$
$$D(X) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16.$$

由棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理知，X 近似服从正态分布 $N(20,16)$，故

$$\begin{aligned} P\{16 \le X \le 32\} &\approx \Phi\left(\frac{32-20}{4}\right) - \Phi\left(\frac{16-20}{4}\right) \\ &= \Phi(3) - \Phi(-1) = \Phi(3) - [1 - \Phi(1)] \\ &= 0.9987 - (1 - 0.8413) \\ &= 0.84. \end{aligned}$$

第六章 数理统计的基本概念

例 1【答案】 C.

【解析】 根据统计量的定义，统计量中不能含有总体的任何未知参数，由于 μ 是未知参数.

故选 C.

例 2【解】 由已知 $X_1 \sim N(0,9), X_2+X_3 \sim N(0,18), X_4+X_5+X_6 \sim N(0,27)$，从而

$$\frac{X_1}{\sqrt{9}} \sim N(0,1), \frac{X_2+X_3}{\sqrt{18}} \sim N(0,1), \frac{X_4+X_5+X_6}{\sqrt{27}} \sim N(0,1),$$

且相互独立，则

$$\frac{X_1^2}{9}+\frac{(X_2+X_3)^2}{18}+\frac{(X_4+X_5+X_6)^2}{27} \sim \chi^2(3),$$

故 $a=\frac{1}{9}, b=\frac{1}{18}, c=\frac{1}{27}$.

例 3【答案】 35.

【解析】 由于 $\chi^2 \sim \chi^2(5)$，因此 $E(\chi^2)=5, D(\chi^2)=2\times 5=10$，从而

$$E(\chi^2)^2=D(\chi^2)+[E(\chi^2)]^2=10+5^2=35.$$

例 4【答案】 D.

【解析】 由 $X_1+X_2+\cdots+X_9 \sim N(0,81)$，得 $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9} \sim N(0,1)$，

由 $Y_i \sim N(0,9)$，得 $\frac{Y_i}{3} \sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,9)$，从而

$$\left(\frac{Y_1}{3}\right)^2+\left(\frac{Y_2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_9}{3}\right)^2 \sim \chi^2(9).$$

由于 $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9}$ 与 $\left(\frac{Y_1}{3}\right)^2+\left(\frac{Y_2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_9}{3}\right)^2$ 相互独立，因此

$$\frac{\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{9}}{\sqrt{\frac{\left(\frac{Y_1}{3}\right)^2+\left(\frac{Y_2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_9}{3}\right)^2}{9}}}=\frac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}} \sim t(9),$$

故选 D.

例 5【答案】 D.

【解析】 由于 t 分布的概率密度函数是偶函数，且 $\beta>0$，则

$$P\{X \le x\} = 1 - P\{X > x\} = 1 - \frac{1}{2}P\{|X| > x\} = 1 - \frac{\beta}{2},$$

从而 $x = t_{\frac{\beta}{2}}$，故选 D.

例 6【答案】 C.

【解析】 由 $X_i \sim N(0,4)$，得 $\frac{X_i}{2} \sim N(0,1)(i=1,2,\cdots,15)$，从而

$$\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(10),$$

$$\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_{12}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(5).$$

由于 $\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2$ 与 $\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_{12}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2$ 相互独立，

因此

$$\frac{\dfrac{\left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2}{10}}{\dfrac{\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \left(\frac{X_{12}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2}{5}} = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \cdots + X_{15}^2)} \sim F(10,5).$$

故选 C.

例 7【答案】 $F(1,1)$.

【解析】 由已知 (X,Y) 服从二维正态分布 $N(0,0;2,2;0)$，则

$$X \sim N(0,2), Y \sim N(0,2), \rho_{XY} = 0,$$

从而 X 与 Y 相互独立.

又 $\frac{X}{\sqrt{2}} \sim N(0,1), \frac{Y}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，从而 $\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1), \left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi^2(1)$，且 $\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2$ 与 $\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2$ 相互独立，故 $\dfrac{\left(\frac{X}{\sqrt{2}}\right)^2 \Big/ 1}{\left(\frac{Y}{\sqrt{2}}\right)^2 \Big/ 1} \sim F(1,1)$，即 $\frac{X^2}{Y^2} \sim F(1,1)$.

例 8【答案】 C.

【解析】 由 $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$，且 $\mu = 1, \sigma = 2$，因此 $\frac{\overline{X} - 1}{2 / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$，故选 C.

例 9【答案】 D.

【解析】由$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，且$\sigma^2=1$，因此$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，故选 D.

例 10【答案】$n\sigma^2$，$2n\sigma^4$.

【解析】由$\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=n,D\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=2n,$$

从而$E\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=n\sigma^2,D\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=2n\sigma^4$.

例 11【答案】σ^2，$\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$.

【解析】由$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$，则

$$E\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\frac{n-1}{\sigma^2}E(S^2)=n-1,$$

$$D\left[\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right]=\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}D(S^2)=2(n-1),$$

从而$E(S^2)=\sigma^2,D(S^2)=\dfrac{2\sigma^4}{n-1}$.

第七章 参数估计

例 1【答案】B.

【解析】由矩估计法，令 $E(X)=\overline{X},E(X^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，即 $\mu=\overline{X},\sigma^2+\mu^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，解得 $\mu=\overline{X},\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，所以均值 μ 和方差 σ^2 的矩估计量为

$$\hat{\mu}=\overline{X},\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

故选 B.

例 2【解】由于

$$E(X)=0\times\theta^2+1\times(1-\theta-2\theta^2)+2\times(\theta^2+\theta)=1+\theta,$$

$$\overline{x}=\frac{1+2+1+0+2+0+1+2+2}{9}=\frac{11}{9}.$$

由矩估计法，令 $E(X)=\overline{x}$，解得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{2}{9}$.

例 3【解】因为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{2\theta}x\cdot\frac{2x}{3\theta^2}\mathrm{d}x=\frac{10}{9}\theta.$$

由矩估计法，令 $\frac{10}{9}\theta=\overline{X}$，解得 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{9}{10}\overline{X}=\frac{9}{10n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

例 4【解】(1) $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1x\cdot(\theta+1)x^\theta\mathrm{d}x=\frac{\theta+1}{\theta+2}$，由矩估计法，令 $E(X)=\overline{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^\theta, & 0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n<1$ 时，似然函数两边取对数得

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 $\theta=-1-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，

故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

例 5【解】 矩估计值:

$$E(X)=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta,$$

$$\overline{x}=\frac{3+1+3+0+3+1+2+3}{8}=2,$$

由矩估计法,令 $E(X)=\overline{x}$,解得 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$.

最大似然估计值:

对于给定的样本值,似然函数为

$$L(\theta)=\theta^2\times[2\theta(1-\theta)]^2\times\theta^2\times(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4.$$

似然函数两边取对数得

$$\ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta).$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\dfrac{6}{\theta}+\dfrac{2}{\theta-1}+\dfrac{8}{2\theta-1}=\dfrac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(\theta-1)(2\theta-1)}=0$,解得

$$\theta_1=\frac{7-\sqrt{13}}{12},\ \theta_2=\frac{7+\sqrt{13}}{12}\text{(不合题意舍去)},$$

故 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

例 6【解】 由于 $X\sim U(0,\theta)$,因此 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值,则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0<x_i<\theta,i=1,2,\cdots,n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<x_1,x_2,\cdots,x_n<\theta$ 时,似然函数两边取对数得

$$\ln L(\theta)=-n\ln\theta.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{n}{\theta}<0$,所以 $\ln L(\theta)$ 是关于 θ 的单调递减函数.

又 $0\le x_i\le\theta,i=1,2,\cdots,n$,因此 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,故 θ 的最大似然估计量为 $\hat{\theta}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

(2) 由于 $X\sim U(0,\theta)$,因此 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta,\\ 1, & x\ge\theta.\end{cases}$

从而 $\hat{\theta}$ 的分布函数和概率密度分别为

$$F_{\hat{\theta}}(x)=[F(x)]^n=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^n}{\theta^n}, & 0\le x<\theta,\\ 1, & x\ge\theta.\end{cases}$$

$$f_{\hat{\theta}}(x)=F_{\hat{\theta}}'(x)=\begin{cases}\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}, & 0<x<\theta,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}x\cdot\dfrac{n}{\theta^n}x^{n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{n}{n+1}\theta$.

例 7【答案】 2.

【解析】 已知总体 $X\sim P(\lambda)$，$\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，故

$$E(\bar{X})=E(X)=\lambda, E(S^2)=D(X)=\lambda,$$

又 $(a-1)\bar{X}+2S^2$ 为 3λ 的无偏估计量，即

$$E[(a-1)\bar{X}+2S^2]=(a-1)E(\bar{X})+2E(S^2)=(a-1)\lambda+2\lambda=3\lambda,$$

解得 $a=2$.

例 8【答案】 B.

【解析】 由无偏估计的定义知，$\hat{\mu}_1,\hat{\mu}_2,\hat{\mu}_3$ 都是 μ 的无偏估计量，由于

$$D(\hat{\mu}_1)=\frac{1}{3}\sigma^2, D(\hat{\mu}_2)=\frac{13}{25}\sigma^2, D(\hat{\mu}_3)=\frac{7}{18}\sigma^2,$$

因此 $D(\hat{\mu}_1)$ 最小，故选 B.

例 9【证明】 由于 $X\sim U(\theta,2\theta)$，因此 $E(X)=\dfrac{3}{2}\theta, D(X)=\dfrac{\theta^2}{12}$，从而

$$E(\hat{\theta})=\frac{2}{3}E(\bar{X})=\frac{2}{3}E(X)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}\theta=\theta,$$

故 $\hat{\theta}=\dfrac{2}{3}\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计量.

由于 $D(\bar{X})=D\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}D(X_i)=\dfrac{1}{n}D(X)=\dfrac{\theta^2}{12n}$，因此

$$D(\hat{\theta})=D\left(\frac{2}{3}\bar{X}\right)=\frac{4}{9}D(\bar{X})=\frac{\theta^2}{27n}.$$

对于 $\forall\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式，

$$1\ge P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=P\{|\hat{\theta}-E(\hat{\theta})|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D(\hat{\theta})}{\varepsilon^2}=1-\frac{\theta^2}{27n\varepsilon^2}\to 1(n\to\infty),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$，故 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计量.

例 10【解】(1) 由于总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，因此 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},-\infty<x<+\infty.$$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2},-\infty<x_i<+\infty.$$

似然函数两边取对数得

$$\ln L(\sigma^2)=-n\ln\sqrt{2\pi}-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0$，解得 $\sigma^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，

故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.

(2) 由于 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，因此 $E\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=n$，从而

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=E\left[\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=\frac{\sigma^2}{n}\cdot n=\sigma^2,$$

故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

(3) 由于 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$，因此 $D\left[\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=2n$，从而

$$D(\hat{\sigma}^2)=D\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right]=D\left[\frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$=\frac{\sigma^4}{n^2}D\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right]=\frac{\sigma^4}{n^2}\cdot 2n=\frac{2\sigma^4}{n}.$$

对于 $\forall\varepsilon>0$，由切比雪夫不等式，

$$1 \ge P\{|\hat{\sigma}^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=P\{|\hat{\sigma}^2-E(\hat{\sigma}^2)|<\varepsilon\}\ge 1-\frac{D(\hat{\sigma}^2)}{\varepsilon^2}=1-\frac{2\sigma^4}{n\varepsilon^2}\to 1(n\to\infty),$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\sigma}^2-\sigma^2|<\varepsilon\}=1$，故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的一致估计量.

例 11【答案】 C.

【解析】 由于 μ 未知，因此参数 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).$$

又 $n=16,1-\alpha=0.90,\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.05}(15),\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.95}(15),s=1$，则 σ^2 的置信度为 0.90 的置信区间为 $\left(\frac{15}{\chi^2_{0.05}(15)},\ \frac{15}{\chi^2_{0.95}(15)}\right)$，故选 C.

例 12【答案】 $(4.51,5.49)$.

【解析】 当 σ^2 已知时，均值 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

又 $\overline{x}=5,n=16,1-\alpha=0.95,\sigma=1,u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$，因此

$$\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=5-\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96=4.51,$$

$$\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}=5+\frac{1}{\sqrt{16}}\times 1.96=5.49,$$

故 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(4.51,5.49)$.

第八章 假设检验（仅数一）

例1【答案】A.

【解析】根据显著性检验的定义，显著性水平是指给定的犯第一类错误的概率，即原假设H_0成立，经检验被拒绝的概率，故选A.

例2【答案】D.

【解析】α越小，显著性差异越小，越容易接受H_0，若$\alpha=0.05$时接受H_0，则$\alpha=0.01$时显著性变弱，更加容易接受H_0，故选D.

例3【解】本题是在显著水平$\alpha=0.05$下，检验假设

$$H_0:\mu\ge 1000, H_1:\mu<1000,$$

检验统计量

$$u=\frac{\overline{X}-1000}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),$$

拒绝域为

$$W=\{u\le -u_\alpha\}=\{u\le -u_{0.05}=-1.65\},$$

其中 $n=25,\sigma=100,\overline{x}=950$，经计算$u=\dfrac{950-1000}{100/\sqrt{25}}=-2.5$，故拒绝原假设，即认为这批元件不合格.

例4【解】本题是在显著水平$\alpha=0.05$下，检验假设

$$H_0:\mu=70, H_1:\mu\ne 70,$$

检验统计量

$$t=\frac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1),$$

拒绝域为

$$W=\{|t|\ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=\{|t|\ge t_{0.025}(35)=2.0301\},$$

其中 $n=36,s=15,\overline{x}=66.5$，经计算$t=\dfrac{66.5-70}{15/\sqrt{36}}=-1.4$，故接受原假设，即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分.

例5【解】本题是在显著水平$\alpha=0.05$下，检验假设

$$H_0:\sigma^2\le 100^2, H_1:\sigma^2>100^2,$$

检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{100^2}\sim\chi^2(n-1),$$

拒绝域为

$$W=\{\chi^2\ge\chi^2_\alpha(n-1)\}=\{\chi^2\ge\chi^2_{0.05}(39)=54.572\},$$

其中 $n=40, s^2=15000$，经计算 $\chi^2=\dfrac{39\times15000}{100^2}=58.5$，故拒绝原假设，即认为灯泡寿命的波动性显著增大.