**勤学如春起之苗，不见其增，日有所长；**

**辍学如磨刀之石，不见其损，日有所亏。**

**——————陶渊明**

**例 1**、 设函数 $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$ ，则(　　).

A. $f(x)$ 为偶函数

B. $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 为无界函数

D. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

【答案】B.

解　由 $f(-x)=\sqrt{1-x+x^2}-\sqrt{1+x+x^2}=-f(x)$ ，知 $f(x)$ 是奇函数.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}}=1$$

同理可得 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ，故 D 错误.根据极限的有界性，可知 C 错误.

**例 2**、极限设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 均不存在，则下列选项正确的是(　　).

A.若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

B.若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必存在

C.若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

D.若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必存在

【答案】C.

解　对 C 选项：用反证法，若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(a_n-b_n)+(a_n+b_n)\right]=\lim\limits_{n\to\infty}2a_n$ ，极限存在，与已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在相矛盾，故 C 正确.

**例 3**、已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$ ，则(　　).

A. $a=1,b=1$

B. $a=-1,b=1$

C. $a=1,b=-1$

D. $a=-1,b=-1$

【答案】C.

解　由已知，可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$，

有 $1-a=0$，$a+b=0$，故 $a=1$，$b=-1$，C 正确.

**例 4、** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+2)^{49}(an+1)^2}{(n^2+n+1)^{50}}=4$，则 $a=$________.

**思路点拨** 本题考查多项式之比极限的计算.注意到分子分母 $x$ 的最高幂次相同，极限就是分子与分母关于 $x$ 最高幂次系数的比值.

**解** 应填 $\pm 2$.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2)^{49}(an+1)^2}{(n^2+n+1)^{50}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{2}{n^2})^{49}(a+\frac{1}{n^2})^2}{(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})^{50}}=a^2=4$$

由已知可得 $a=\pm 2$.

**例 5、** 当 $x\to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$__________.

【答案】$-\dfrac{3}{2}$.

解　当 $x\to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1\sim\dfrac{1}{3}ax^2,\cos x-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，故 $a=-\dfrac{3}{2}$.