1、(1)数列的有界性是数列收敛的什么条件？必要

(2)无界数列是否一定发散？一定

(3)有界数列是否一定收敛？不一定　$x_n=(-1)^n$ 有界但不收敛

2. 下列关于数列$\{x_n\}$的极限是a的定义，哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，试说明理由；如果是错的，试给出一个反例.

(1)对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in N_+$，当$n>N$时，不等式$x_n-a<\varepsilon$成立；×

$x_n=(-1)^n$　$a=1$

(2)对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in N_+$，当$n>N$时，有无穷多项x_n，使不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立；×　$x_n=(-1)^n$　$a=1$

(3)对于任意的$\varepsilon>0$，存在$N\in N_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<c\varepsilon$成立，其中c为某个正常数；√

(4) 对于任意的$m\in N_+$，存在$N\in N_+$，当$n>N$时，不等式$|x_n-a|<\frac{1}{m}$成立. √

3. 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例。

(1) $a_n<b_n$对任意n成立；

(2) $b_n<c_n$对任意n成立；

(3) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在；

√(4) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明：即使数列$\{|u_n|\}$有极限，数列$\{u_n\}$也未必有极限

证: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a \Rightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in N_+$ 当$n>N$时 $|u_n-a|<\varepsilon$

而 $\big||u_n|-|a|\big|\leq|u_n-a|<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$

反之不成立　$u_n=(-1)^n$

5. 设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

证：由于$\{x_n\}$有界，设$|x_n|\leq M$ $(M>0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \Rightarrow \forall \frac{\varepsilon}{M}>0$，$\exists N\in N_+$ 当$n>N$时 $|y_n|<\frac{\varepsilon}{M}$

从而$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

6. 对于数列$\{x_n\}$，若$x_{2k-1}\to a$ $(k\to\infty)$，$x_{2k}\to a$ $(k\to\infty)$，证明

$x_n\to a$ $(n\to\infty)$.

$x_{2k-1}\to a \Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N_+$，当$2k-1>N_1$时 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$

$x_{2k}\to a \Rightarrow$ $\exists N_2\in N_+$，当$2k>N_2$时 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$ 则当$n>N$时 $|x_n-a|<\varepsilon$

$\therefore x_n\to a$

7. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例。

(1) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在； ✓

(2) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$不存在； ✗

(3) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$不存在. ✗

(4) 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$都不存在，那么$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$不存在. ✗

8. 函数$y=x\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内是否有界？这个函数是不是$x\to+\infty$时的无穷大？为什么？

无界　　不是无穷大

$y=f(x)$在I上无界 $\Leftrightarrow \forall M>0$. $\exists x\in I$，使$|f(x)|>M$

9. 证明：函数$y=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$在$(0,1]$内无界，但这个函数不是$x\to0^+$时的无穷大.

证明：$\forall M>0$，要使$|y|=|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}|>M$，若取$x_n=\frac{1}{n\pi}$

只需$|y|=n\pi>M \Rightarrow n>\frac{M}{\pi}$

取$x_n=\frac{1}{([\frac{M}{\pi}]+1)\pi}$　则$|y|>M$　$\therefore y=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$无界

又由若取$x_n'=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 则$y=0$ ∴函数不是$x\to0^+$时的无穷大

10. 根据函数极限或无穷大定义，填写下表：

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，即有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	~~$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$~~ $\forall M>0, \exists\delta>0$ 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$时 有 $f(x)<-M$
$x\to x_0^+$	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 当$0<x-x_0<\delta$时 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当 $0<x-x_0<\delta$时 $\lvert f(x)\rvert>M$ ~~$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$~~	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当$0<x-x_0<\delta$时 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当 $0<x-x_0<\delta$时 $f(x)<-M$
$x\to x_0^-$	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ 当$0<x_0-x<\delta$时 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当$0<x_0-x<\delta$时 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当$0<x_0-x<\delta$时 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$ 当$0<x-x_0<\delta$时 $f(x)<-M$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$ 当 $\lvert x\rvert>X$时 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\exists X>0$ 使当 $\lvert x\rvert>X$ 时，即有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当$\lvert x\rvert>X$时 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当$\lvert x\rvert>X$时 $f(x)<-M$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$ 当 $x>X$ 时 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x>X$时 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当 $x>X$时 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当$x>X$时 $f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0, \exists X>0$ 当$x<-X$时 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当$x<-X$时 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当$x<-X$时 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists X>0$ 当$x<-X$时 $f(x)<-M$

① $x_1<2$ 假设 $n=k$ 时 $x_k<2$，则 $n=k+1$ 时

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+2}=2 \Rightarrow \{x_n\}\text{有上界}$$

② $$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-x_n=\frac{2+x_n-x_n^2}{\sqrt{2+x_n}+x_n}=\frac{(2-x_n)(1+x_n)}{\sqrt{2+x_n}+x_n}>0$$

$\Rightarrow \{x_n\}$ 单增

11. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n\in N_1)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

③ 由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则

由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 得 $A=\sqrt{2+A}$

$\therefore A=2$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

12. 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1\in(0,\pi)$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n\in N_+)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

① $x_{n+1}=\sin x_n<1 \Rightarrow \{x_n\}$ 有下界

② $x_{n+1}=\sin x_n<x_n \Rightarrow \{x_n\}$ 单减

③ 由单调有界准则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 则

由 $x_{n+1}=\sin x_n$ 得 $A=\sin A$ $\therefore A=0$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

13. 下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例。

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 a 连续，那么 $|f(x)|$ 也在 a 连续；✓

(2) 如果函数 $|f(x)|$ 在 a 连续，那么 $f(x)$ 也在 a 连续. ✗

$f(x)$ 在 $x=a$ 连续

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

从而 $\big||f(x)|-|f(a)|\big|\le|f(x)-f(a)|<\varepsilon$

$\therefore |f(x)|$ 也在 a 连续

14. 设 $f(x)$ 在 R 上连续，且 $f(x)\neq0$，$\varphi(x)$ 在 R 上有定义，且有间断点，则下列陈述中哪些是对的，哪些是错的？如果是对的，说明理由；如果是错的，试给出一个反例。

(1) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点；$\begin{cases} f(x)=1 \\ \varphi(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\le0\end{cases}\end{cases}$ (2) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点；

(3) $f[\varphi(x)]$ 未必有间断点； ✓(4) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

$$\begin{cases} f(x)=x \\ \varphi(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x\le0\end{cases}\end{cases}$$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x=\begin{cases} x & |x|<1 \\ 0 & |x|=1 \\ -x & |x|>1 \end{cases}$$

$$f(-1-0)=\lim_{x\to -1^-}f(x)=\lim_{x\to -1^-}(-x)=1,\quad f(-1+0)=\lim_{x\to -1^+}f(x)=\lim_{x\to -1^+}x=-1$$

$\Rightarrow x=-1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点

15. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}x\ \ (n\in N_+)$ 的连续性，若有间断点，则判断其类型.

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x=1 \quad f(1+0)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(-x)=-1$$

$\Rightarrow x=1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

16. 在“充分”“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格中：

(1) 数列 $\{x_n\}$ 有界是数列 $\{x_n\}$ 收敛的<u>必要</u>条件，数列 $\{x_n\}$ 收敛是数列 $\{x_n\}$ 有界的<u>充分</u>条件；

(2) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的<u>必要</u>条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有界的<u>充分</u>条件；

(3) $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 存在的<u>必要</u>条件，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 是 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内无界的<u>充分</u>条件；

(4) $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限 $f(x_0^+)$ 及左极限 $f(x_0^-)$ 都存在且相等是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在<u>充分必要</u>条件.

17. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，$x\to 0$，则当 $x\to 0$ 时，有（　　）

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小　　(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小 ✓

(C) $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小　　(D) $f(x)$ 是比 x 低阶的无穷小

$a^x-1\sim x\ln a$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{x}=\ln 6$$

18. 设 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点 ✓　　(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

19. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}, & 0<|x|<\frac{\pi}{2} \\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续，则 $a=$ $e^{\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left[(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}}\right]^{(\cos x-1)\cdot\frac{1}{-x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{-x^2}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{-x^2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}=f(0)=a$$

20. 证明方程 $\sin x+x+1=0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

设 $f(x)=\sin x+x+1$，则 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上连续

$f(-\frac{\pi}{2})=\sin(-\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{2}+1=-\frac{\pi}{2}$　$f(\frac{\pi}{2})=\sin\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+1=2+\frac{\pi}{2}$

由零点定理，$\exists\xi\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，使 $f(\xi)=0$

即方程 $\sin x+x+1=0$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内至少有一个根.

21. 证明方程 $x=a\sin x+b$，其中 $a>0,b>0$，至少有一个正根，并且它不超过 $a+b$.

设 $f(x)=x-a\sin x-b$　则 $f(x)$ 在 $[0,a+b]$ 上连续

$f(0)=-b$　　$f(a+b)=a-a\sin(a+b)=a(1-\sin(a+b))$

① 若 $\sin(a+b)=1$，则 $x=a+b$ 为 $x=a\sin x+b$ 的根

② 若 $\sin(a+b)<1$，则 $f(0)\cdot f(a+b)<0$，由零点定理，$\exists\xi\in(0,a+b)$，使 $f(\xi)=0$，即 $\xi=a\sin\xi+b$ 从而方程至少有一个正根且不超过 $a+b$

22. 证明：若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 必在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，不妨设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Rightarrow$ 取 $\varepsilon=1$，$\exists X>0$，当 $|x|>X$ 时 $|f(x)-A|<1$

$\therefore |f(x)|=|f(x)-A+A|\leq|f(x)-A|+|A|=1+|A|$

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上有界

$\Rightarrow \exists M_1>0$，当 $x\in[-M,M]$ 时 $|f(x)|\leq M$

取 $M=\max\{1+|A|,M_1\}$，则 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $|f(x)|\leq M$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

23. 求曲线 $y=x\ln(e+\frac{1}{x})$ 的渐近线.

水平　$\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty} x\ln(e+\frac{1}{x})=\infty$　无水平

垂直　$\lim\limits_{x\to 0^+} y=\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(e+\frac{1}{x})=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=0$　无垂直

斜　$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(e+\frac{1}{x})=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}(x\ln(e+\frac{1}{x})-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(e+\frac{1}{x})-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e+\frac{1}{x}}=\frac{1}{e}$

斜渐近线 $y=x+\frac{1}{e}$

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

24、若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$ $(n\ge 3)$，证明：在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

证：由题意 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上连续，由最值定理 $f(x)$ 在 $[x_1,x_n]$ 上有最小值 m 和最大值 M

$\therefore$ $m\le f(x_1)\le M$，$m\le f(x)\le M$，$\cdots$，$m\le f(x_n)\le M$

则 $m\le \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$

由介值定理至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_n]\subset(a,b)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$

25. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

证：$\because$ $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\le\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又 $\because$ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$