1．设 $x>0$，证明 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

2．证明不等式 $\left|\arctan a-\arctan b\right|\le\left|a-b\right|$.

3．证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

4．讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可导, 且 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$, 则当 $x\in(a,b)$ 时, 有不等式:

(A) $\dfrac{f(x)}{f(a)}>\dfrac{g(x)}{g(a)}$

(B) $\dfrac{f(x)}{f(b)}>\dfrac{g(x)}{g(b)}$

(C) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(D) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$.

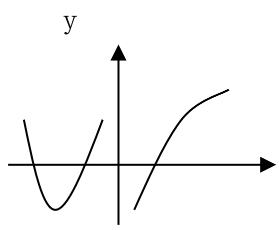
5. 方程 $\ln x=ax\ (a>0)$ 有几个实根?

6. 试证:当 $x>0$ 时, $1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　　）



(A) 一个极小值点和两个极大值点。

(B) 两个极小值点和一个极大值点。

(C) 两个极小值点和两个极大值点。

(D) 三个极小值点和一个极大值点。.

11. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$， $f''(x)>0$， Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量， Δx 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分。若 $\Delta x>0$，则

(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$　　(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$.

12. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为_______.

13. 设在$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$或$f(0)-f(1)$这几个数的大小顺序为(　　)

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

14. 设$f'(x_0)=f''(x_0)=0$，，$f'''(x_0)>0$，则(　　)

(A) $f'(x_0)$是$f'(x)$的极大值　　(B) $f(x_0)$是$f(x)$的极大值

(C) $f(x_0)$是$f(x)$的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点

15. 当$e<a<b<e^2$时，证明不等式$\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

16. 设$y=f(x)$在$x=x_0$的某邻域内具有三阶连续导数，如果$f''(x_0)=0$，而$f'''(x_0)\neq 0$，试问$(x_0,f(x_0))$是不是拐点，为什么？

17. 设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，且 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，

$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，证明：

（1）当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 x_0 处不取得极值；

（2）当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 x_0 处取得极值，且当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值，当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内可微，且 $f(a)<0, f(b)<0$，又有一点 $c\in(a,b)$，$f(c)>0$. 证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)+f'(\xi)=0$.

19. 已知函数 $f(x)$ 在[0，1]上连续，在(0, 1)内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$。

证明：

(I)存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(II)存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

20. 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上二阶可导， $f'(a)=f'(b)=0$ 。求证：$\exists\xi\in(a,b)$ ，使得 $|f''(\xi)|\ge 4\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$.

21. 设函数 $f(x)=x-2\arctan x$ ，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；（2）求曲线 $y=f(x)$ 的凹、凸区间和拐点.

22. 设极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的（　　）

(A) 极大值点　　(B) 极小值点　　(C) 驻点，但非极值点　　(D) 非驻点