1. 微分方程 $ydx+xdy=0$ 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解为________.

$\Rightarrow xdy=-ydx \Rightarrow \frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \ln|y|=-\ln|x|+C_1$

$\Rightarrow y=\frac{C}{x}$　　$y|_{x=1}=C=1$　　$\therefore y=\frac{1}{x}$

2. 已知 $f(x)$ 为可导函数，并且 $f(x)>0$，满足方程 $f(x)=9+\int_0^x \frac{f(t)\sin t}{1+\cos t}dt$，求 $f(x)$.

$\Rightarrow f'(x)=\frac{f(x)\sin x}{1+\cos x}$　　$f(0)=9$

$\Rightarrow y'=\frac{y\sin x}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{y}=\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\frac{-d(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$\ln|y|=-\ln(1+\cos x)+C_1$

$y=\frac{C}{1+\cos x}$

$y(0)=\frac{C}{2}=9$　$\therefore C=18$　　故 $f(x)=\frac{18}{1+\cos x}$

3. 解方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

① $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1} \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{2}{x+1}dx$

$\Rightarrow \ln|y|=2\ln|x+1|+C_1$

$\Rightarrow y=C(x+1)^2$

② 设 $y=C(x)\cdot(x+1)^2$ 为原方程的解，则

$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=C'(x)(x+1)^2+2C(x)(x+1)-2C(x)(x+1)$

$=C'(x)(x+1)^2=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

$\Rightarrow C'(x)=(x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow C(x)=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C$

故 $y=\left(\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right)(x+1)^2=C(x+1)^2+\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$

4. 解方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x+y}$

$\frac{dx}{dy}=x+y \Rightarrow \frac{dx}{dy}-x=y \Rightarrow x=e^{-\int -dy}\left[C+\int y e^{\int -dy}dy\right]$

$=e^{y}\left(C+\int ye^{-y}dy\right)=e^{y}\left(C-ye^{-y}-e^{-y}\right)$

$=Ce^{y}-y-1$

5. 求微分方程 $(1+x^2)y''=2xy', y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=3$ 的特解.

令 $y'=p$　则 $y''=\frac{dp}{dx}$

$\frac{dp}{dx}=\frac{2xp}{1+x^2}$

$\frac{dp}{p}=\frac{2x}{1+x^2}dx$

$\ln|p|=\ln(1+x^2)+C_1$

$p=C(1+x^2)$

$\frac{dy}{dx}=C(1+x^2)$

$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=C=3$

$\therefore \frac{dy}{dx}=3(1+x^2)$

$y=3x+x^3+C_2$

$y|_{x=0}=C_2=1$

故 $y=3x+x^3+1$.

6、解方程 $yy''-y'^2=0$

$$令\ y'=p \quad 则\ y''=\frac{dp}{dy}\cdot p$$

$$y\cdot p\frac{dp}{dy}=p^2 \Rightarrow y\frac{dp}{dy}=p \Rightarrow \frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$$

$$\Rightarrow \ln|p|=\ln|y|+C_1 \Rightarrow p=C_1y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=C_1y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y}=C_1dx \Rightarrow \ln|y|=C_1x+C$$

$$\Rightarrow y=C_2e^{C_1x}$$

7、求微分方程 $y''-y=3e^{2x}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=4$ 的特解.

① $y''-y=0$

特征方程 $\lambda^2-1=0$ $\therefore \lambda_1=1, \lambda_2=-1$

齐次方程通解 $Y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

② 设特解 $y^*=Ae^{2x}$

$y^{*''}-y=4Ae^{2x}-Ae^{2x}=3Ae^{2x}=3e^{2x}$

$\therefore A=1$ $\quad y^*=e^{2x}$

$\therefore$ 原方程通解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}+e^{2x}$

③ $y'=-C_1e^{-x}+C_2e^{x}+2e^{2x}$

$y|_{x=0}=C_1+C_2+1=1$

$y'|_{x=0}=-C_1+C_2+2=4$

$\therefore C_1=-1, C_2=1$

故 $y=-e^{-x}+e^{x}+e^{2x}$

8、求微分方程 $y''-4y=4e^{2x}+1$ 的通解.

① $y''-4y=0$

特征方程 $\lambda^2-4=0$ $\therefore \lambda_1=-2, \lambda_2=2$

齐次方程通解 $Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$

② 对 $f_1(x)=4e^{2x}$ $\quad$ 设 $y_1^*=Axe^{2x}$

$y_1^{*'}=(A+2Ax)e^{2x}$

$y_1^{*''}=(2A+2A+4Ax)e^{2x}$

$y_1^{*''}-4y_1^*=(4A+4Ax-4Ax)e^{2x}$

$\qquad =4Ae^{2x}=4e^{2x}$

$\therefore A=1$ $\quad y_1^*=xe^{2x}$

对 $f_2(x)=1$ $\quad$ 设 $y_2^*=A$

$y_2^{*''}-4y_2^*=-4A=1$

$\therefore A=-\frac{1}{4}$ $\quad y_2^*=-\frac{1}{4}$

从而所求通解 $y=Y+y_1^*+y_2^*$

$\qquad =C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+xe^{2x}-\frac{1}{4}$

9. 已知 $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为____________.

$y=C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$

$\lambda^2-\lambda-2=0$

$\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$

10．对微分方程 $y''-y'-2y=xe^{-x}$，利用待定系数法求其特解 y^* 时，下列特解设法正确的是（　　）．

(A) $y^*=x(Ax+B)e^{-x}$　　(B) $y^*=(Ax+B)e^{-x}$

(C) $y^*=Axe^{-x}$　　(D) $y^*=x^2(Ax+B)e^{-x}$

11．设非齐次线性微分方程 $y'-P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解为（　　）．

(A) $C[y_1(x)-y_2(x)]$　　(B) $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x)+y_2(x)]$　　(D) $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

12．具有特解 $y_1(x)=e^{-x},y_2(x)=2xe^{-x},y_3(x)=3e^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是（　　）．　$\lambda_1=\lambda_2=-1$　　$\lambda_3=1$

(A) $y'''-y''-y'+y=0$　　(B) $y'''+y''-y'-y=0$

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　(D) $y'''-2y''-y'+2y=0$

$\Rightarrow (\lambda+1)^2(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow (\lambda^2+2\lambda+1)(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow \lambda^3+2\lambda^2+\lambda-\lambda^2-2\lambda-1=0 \Longrightarrow \lambda^3+\lambda^2-\lambda-1=0$

13．设函数 $f(x)$ 连续且满足 $f(x)=x^3+\int_0^x (t-x)f(t)dt$，求 $f(x)$．

$=x^3+\int_0^x tf(t)dt-x\int_0^x f(t)dt$　　$f(0)=0$

$f'(x)=3x^2+xf(x)-\int_0^x f(t)dt-xf(x)$

$=3x^2-\int_0^x f(t)dt$　　$f'(0)=0$

$f''(x)=6x-f(x) \Rightarrow f''(x)+f(x)=6x$

齐次方程 $f''(x)+f(x)=0$

特征方程 $\lambda^2+1=0$

$\therefore \lambda=\pm i$

齐次方程通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$

设特解 $y^*=Ax+B$

则 $y^{*''}+y^*=Ax+B=6x$

$\therefore A=6$　$B=0$　　$y^*=6x$

从而方程通解 $y=Y+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+6x$

$y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+6$

$y|_{x=0}=C_1=0$　　$y'|_{x=0}=C_2+6=0$

$\therefore C_1=0$　　$C_2=-6$　　故 $f(x)=-6\sin x+6x$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'} \qquad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{y'^2}$$

14. 设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$， $x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数。

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{dy^2}+(y+\sin x)(\frac{dx}{dy})^2=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程。 $\Rightarrow -\frac{y''}{y'^2}+(y+\sin x)\frac{1}{y'^2}=0 \Rightarrow y''-y=\sin x$

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解。

齐次方程 $y''-y=0$

特征方程 $\lambda^2-1=0$

$\therefore \lambda_1=-1,\ \lambda_2=1$

齐次方程通解

$Y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

设特解 $y^*=A\cos x+B\sin x$

$y^{*\prime}=-A\sin x+B\cos x$

$y^{*\prime\prime}=-A\cos x-B\sin x$

$y^{*\prime\prime}-y^*=-2A\cos x-2B\sin x=\sin x$

$\therefore A=0 \quad B=-\frac{1}{2} \quad y^*=-\frac{1}{2}\sin x$

从而通解 $y=Y+y^*=C_1e^{-x}+C_2e^{x}-\frac{1}{2}\sin x$

$y'=-C_1e^{-x}+C_2e^{x}-\frac{1}{2}\cos x$

$y|_{x=0}=C_1+C_2=0 \qquad y'|_{x=0}=-C_1+C_2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

15. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$， $\therefore C_1=-1,\ C_2=1$

则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$________ $\Rightarrow y=-e^{-x}+e^{x}-\frac{1}{2}\sin x$

$\lambda_1=\lambda_2=1 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0$

$\Rightarrow a=-2 \quad b=1$

设 $y^*=Ax+B \qquad y^{*\prime\prime}-2y^{*\prime}+y^*=-2A+Ax+B=x$

$\therefore A=1 \qquad B=2$

$y^*=x+2$

$y=Y+y^*=(C_1+C_2x)e^x+x+2 \qquad y|_{x=0}=C_1+2=2$

$y'=C_2e^x+(C_1+C_2x)e^x+1 \qquad y'|_{x=0}=C_2+C_1+1=0$

$\therefore C_1=0 \quad C_2=-1$

从而所求 $y=-xe^x+x+2$.