1. 设 $x>0$，证明 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

设 $f(t)=\ln t$. 则当 $x>0$ 时 $f(t)$ 在 $[1,1+x]$ 上连续，在 $(1,1+x)$ 内可导

由Lagrange中值定理，$\exists \xi\in(1,1+x)$，使得 $f'(\xi)=\frac{f(1+x)-f(1)}{(1+x)-1}$

即 $\frac{1}{\xi}=\frac{\ln(1+x)}{x}$

$\because$ $1<\xi<1+x$ $\therefore$ $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{\xi}<1$

从而 $\frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1$ 即 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

2. 证明不等式 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$.

① 当 $b=a$ 时，结论显然成立

② 当 $b\neq a$ 时，不妨设 $b<a$

设 $f(x)=\arctan x$

则 $f(x)$ 在 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导

由Lagrange中值定理，$\exists \xi\in(b,a)$

使得 $f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$

即 $\frac{1}{1+\xi^2}=\frac{\arctan a-\arctan b}{a-b}$

$\because$ $\frac{1}{1+\xi^2}\le 1$

$\therefore$ $\left|\frac{\arctan a-\arctan b}{a-b}\right|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right|\le 1$

故 $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$

3. 证明方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根.

设 $f(x)=x^5+x-1$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续

$f(0)=-1<0$ $f(1)=1>0$

由零点定理，$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)=0$

即 $x^5+x-1=0$ 至少有一个正根

$\because$ $f'(x)=5x^4+1>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加

从而方程 $x^5+x-1=0$ 只有一个正根

4. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\ln\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{e}+1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{e}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x\cdot e}\cdot e\cdot\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x-\frac{1}{2}x^2-x+o(x^2)}{x^2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}$

$f(0)=e^{-\frac{1}{2}}$

$\because$ $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

5. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)<0$，则当 $x\in(a,b)$ 时，有不等式：

$(f(x)g(x))'<0 \Rightarrow f(x)g(x)\searrow$

(A) $\dfrac{f(x)}{f(a)}>\dfrac{g(x)}{g(a)}$　　　　(B) $\dfrac{f(x)}{f(b)}>\dfrac{g(x)}{g(b)}$

(C) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$　　　　(D) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$. ✓

$f(b)g(b) < f(x)g(x) < f(a)g(a)$

5. 方程 $\ln x=ax\ (a>0)$ 有几个实根？

设 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$　$x\in(0,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow x=e$

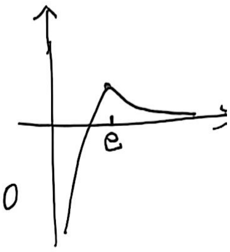
列表

x	$(-\infty,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$

$f(e)=e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$



当 $a>e^{-1}$ 时　方程无实根

当 $a=e^{-1}$ 时　方程有唯一实根

当 $0<a<e^{-1}$ 时　方程有两个实根

6. 试证：当 $x>0$ 时，$1+\dfrac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$.

令 $f(x)=1+\frac12x-\sqrt{1+x}$

$f'(x)=\dfrac12-\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}$

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0$

$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加

从而当 $x>0$ 时　$f(x)>f(0)=0$

即 $1+\frac12x-\sqrt{1+x}>0$

也即 $1+\frac12x>\sqrt{1+x}$

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{\left(\cos x-e^{x^2}\right)\sin x^2}$. $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac12x^2-\left(1+\frac12x^2+\frac{\frac12\cdot(\frac12-1)}{2!}x^4+o(x^4)\right)}{-\frac32x^2\cdot x^2}$

$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$

$e^{x^2}=1+x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac18x^4+o(x^4)}{-\frac32x^4}=-\dfrac{1}{12}$

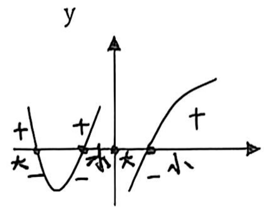
8. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$. $\xlongequal{t=\frac1x}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-\ln(1+t)}{t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{t-(t-\frac12t^2)+o(t^2)}{t^2}$

$=\dfrac12$

9.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有（　　）

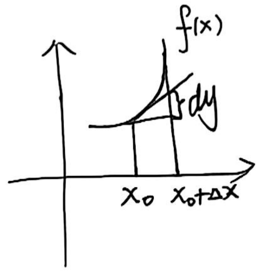


(A) 一个极小值点和两个极大值点。

(B) 两个极小值点和一个极大值点。

(C) 两个极小值点和两个极大值点。

(D) 三个极小值点和一个极大值点。.



11. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δx 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分。若 $\Delta x>0$，则

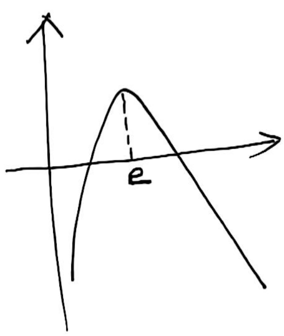
(A) $0<dy<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$　　(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$.

12. 设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内零点的个数为 2个.

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}=0 \Rightarrow x=e$

列表

x	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	极大	$\searrow$



$f(e)=1-1+k=k>0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\frac{x}{e}+k)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x-\frac{x}{e}+k)=-\infty$

$\Rightarrow f'(x)\uparrow$

13. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 这几个数的大小顺序为（　）

$=f'(\xi)(1-0)=f'(\xi)$

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$ ✓

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

14. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则（　）

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}$$

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值　　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值　　(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点 ✓

①设 $f(x)=\ln^2 x$

对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上用Lagrange中值定理 $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

即 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{2\ln\xi}{\xi}$

15. 当 $e<a<b<e^2$ 时，证明不等式 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$.

②设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$　　$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$g(x)$ 在 $[e,e^2]$ 上连续，在 (e,e^2) 内 $g'(x)<0$

$\therefore g(x)$ 在 $[e,e^2]$ 上单调递减

从而 $g(\xi)>g(e^2)\Rightarrow\frac{\ln\xi}{\xi}>\frac{2}{e^2}$

故 $\frac{\ln^2 b-\ln^2 a}{b-a}=\frac{2\ln\xi}{\xi}>\frac{4}{e^2}$

即 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{e^2}(b-a)$

16. 设 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域内具有三阶连续导数，如果 $f''(x_0)=0$，而 $f'''(x_0)\neq 0$，试问 $(x_0,f(x_0))$ 是不是拐点，为什么？

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)^3$$　ξ 介于 x 与 x_0 之间

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f'''(\xi)}{6}(x-x_0)^3$$

$$f'(x)=f'(x_0)+\frac{f'''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$$

$$f''(x)=f'''(\xi)(x-x_0)$$

$\because$ 在 x_0 的左右邻域内 $f''(x)$ 的符号异号

$\therefore (x_0,f(x_0))$ 是拐点

由 $f''(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}$ 由$n-2$为奇数，~~则f''(x)异~~ 则在x_0的左右邻域内 $f''(x)$异号

故 $(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

17. 设$f(x)$在x_0处有n阶导数$(n\geq 2)$，且$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0$，证明：

（1）当n为奇数时，$f(x)$在x_0处不取得极值且$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

（2）当n为偶数时，$f(x)$在x_0处取得极值，且当$f^{(n)}(x_0)<0$时，$f(x_0)$为极大值，当$f^{(n)}(x_0)>0$时，$f(x_0)$为极小值.

证：由Taylor展开 $f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$

当$x\to x_0$时 $R_n(x)$是$(x-x_0)^n$的高阶无穷小量. 因此，在x_0的某邻域内 $f(x)-f(x_0)$的符号由 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ 决定

①当n为奇时 $f(x)-f(x_0)$在x_0邻域内有正有负，不取得极值

②当n为偶时，--------------与$f^{(n)}(x_0)$的正负相同

故当$f^{(n)}(x_0)<0$ 取得极大值

当$f^{(n)}(x_0)>0$ 取得极小值

18. 设函数$f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)内可微，且$f(a)<0, f(b)<0$，又有一点$c\in(a,b)$，$f(c)>0$. 证明：存在一点$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)+f'(\xi)=0$.

由零点定理 $\exists\, \xi_1\in(a,c)$ $\xi_2\in(c,b)$ 使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$

设 $F(x)=e^x f(x)$

在$[\xi_1,\xi_2]$上对$F(x)$用Rolle中值定理. $\exists\,\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$

使 $F'(\xi)=0$ 即 $e^{\xi}f(\xi)+e^{\xi}f'(\xi)=0$

故 $f(\xi)+f'(\xi)=0$

19. 已知函数$f(x)$在$[0，1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$，$f(1)=1$。

证明：

(I)存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$；

(II)存在两个不同的点$\eta,\zeta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(I) 令$g(x)=f(x)-1+x$ 则$g(x)$在$[0,1]$上连续 $g(0)=-1<0$ $g(1)=1>0$

由零点定理，存在$\xi\in(0,1)$，使得$g(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=1-\xi$

(II) 在$[0,\xi]$和$[\xi,1]$上对$f(x)$用Lagrange中值定理.

$\exists\,\eta\in(0,\xi)$ 使 $f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}=\frac{1-\xi}{\xi}$

$\exists\,\zeta\in(\xi,1)$ 使 $f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}$

从而 $f'(\eta)\cdot f'(\zeta)=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1$

20、设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上二阶可导，$f'(a)=f'(b)=0$。求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $|f''(\xi)|\geq 4\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(a)+f'(a)\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2$$
$$=f(a)+\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2}$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f(b)+f'(b)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2$$
$$=f(b)+\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b$$

两式相减 $8\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}=f''(\xi_1)-f''(\xi_2)$

$$\Rightarrow 8\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|=|f''(\xi_1)-f''(\xi_2)|\leq|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|\leq 2|f''(\xi)|$$

取 $\xi=\begin{cases}\xi_1 & |f''(\xi_1)|\geq|f''(\xi_2)|\\ \xi_2 & |f''(\xi_2)|>|f''(\xi_1)|\end{cases}$

从而 $|f''(\xi)|\geq 4\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^2}\right|$

21. 设函数 $f(x)=x-2\arctan x$，（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值；（2）求曲线 $y=f(x)$ 的凹、凸区间和拐点.

$f(x)$的定义域为R且在定义域内连续

$f'(x)=1-\dfrac{2}{1+x^2}=\dfrac{x^2-1}{1+x^2}=0\Rightarrow x=\pm1$

$f''(x)=\dfrac{2x(1+x^2)-(x^2-1)2x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{4x}{(1+x^2)^2}=0\Rightarrow x=0$

列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+
$f(x)$	↗	极大	↘	拐点	↘	极小	↗

故 $f(x)$的单增区间为 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$

单减区间为 $[-1,1]$

极大值 $f(-1)=-1+\frac{\pi}{2}$

极小值 $f(1)=1-\frac{\pi}{2}$

曲线 $y=f(x)$的凹区间为 $[0,+\infty)$

凸区间为 $(-\infty,0]$

拐点为 $(0,0)$

22. 设极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的（　　）

(A) 极大值点　　(B) 极小值点　　(C) 驻点，但非极值点　　(D) 非驻点

√ 保号性