Διακριτά Μαθηματικά

Εαρινό Εξάμηνο 2022-2023

Ασκήσεις #1

Στοιχεία μαθηματικής λογικής

Προτασιακή και κατηγορηματική λογική, έλεγχος εγκυρότητας επιχειρήματος

Ανακοίνωση: Τρίτη 4 Απριλίου

1. Δείξτε ότι οι λ.τ. $(p \land (\neg((\neg p) \lor q))) \lor (p \land q)$ και p είναι λογικά ισοδύναμοι.

   Απάντηση: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $(p \land (\neg((\neg p) \lor q))) \lor (p \land q) \Leftrightarrow p$, ή με άλλα λόγια ότι ο λογικός τύπος $(p \land (\neg((\neg p) \lor q))) \lor (p \land q) \leftrightarrow p$ είναι μια ταυτολογία. ΄Εχουμε:

$(p \land (\neg((\neg p) \lor q))) \lor (p \land q) \Leftrightarrow (p \land (\neg(\neg p) \land \neg q)) \lor (p \land q)$ (νόμος *DeMorgan*) $\Leftrightarrow (p \land (p \land \neg q)) \lor (p \land q)$ (νόμος διπλής άρνησης)

$\Leftrightarrow ((p \land p) \land \neg q) \lor (p \land q)$ (προσεταιριστικός νόμος)

$\Leftrightarrow (p \land \neg q) \lor (p \land q)$ (νόμος ουδετερότητας)

$\Leftrightarrow p \land (\neg q \lor q)$ (επιμεριστικός νόμος)

$\Leftrightarrow p \land (q \lor \neg q)$ (αντιμεταθετικός νόμος)

$\Leftrightarrow p \land t$ (νόμος άρνησης)

$\Leftrightarrow p$ (νόμος ταυτότητας)

Εναλλακτικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας για τους δύο λογικούς τύπους – παρακάτω συμβολίζουμε με P το σύνθετο λογικό τύπο $p \land (\neg((\neg p) \lor q))$.

p q $P \lor (p \land q)$

$p \land q$	$\neg p$	$(\neg p) \lor q$	$\neg((\neg p) \lor q)$	P
0	1	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1
1	0	1	0	0

0 0 0
0 1 0
1 0 1
1 1 1

Παρατηρούμε ότι η 1η και τελευταία στήλη του πίνακα ταυτίζονται, γεγονός που αποδεικνύει ότι $p \Leftrightarrow (p \land (\neg((\neg p) \lor q))) \lor (p \land q)$.

2. Να εξετάσετε αν οι λ.τ. $(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$ και $\neg p \lor q$ είναι λογικά ισοδύναμοι. Απάντηση: ΄Εχουμε:

$(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q) \Leftrightarrow ((p \lor \neg p) \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$ (επιμεριστικός νόμος) $\Leftrightarrow (t \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$ (νόμος άρνησης)

$\Leftrightarrow q \lor (\neg p \land \neg q)$ (νόμος ταυτότητας)

$\Leftrightarrow (q \lor \neg p) \land (q \lor \neg q)$ (επιμεριστικός νόμος)

$\Leftrightarrow (q \lor \neg p) \land t$ (νόμος άρνησης)

$\Leftrightarrow q \lor \neg p$ (νόμος ταυτότητας)

$\Leftrightarrow \neg p \lor q$ (αντιμεταθετικός νόμος)

1

Εναλλακτικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας για τους δύο λογικούς τύπους – παρακάτω συμβολίζουμε με P το σύνθετο λογικό τύπο $(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$:

p q $\neg p \lor q$

$\neg p$	$\neg q$	$p \land q$	$\neg p \land q$	$\neg p \land \neg q$	P
1 1 0 0	1 0 1 0	0 0 0 1	0 1 0 0	1 0 0 0	1 1 0 1

0 0 1
0 1 1
1 0 0
1 1 1

Παρατηρούμε ότι οι δύο τελευταίες στήλες του πίνακα ταυτίζονται, γεγονός που αποδεικνύει ότι οι λ.τ. $(p \land q) \lor (\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$ και $\neg p \lor q$ είναι λογικά ισοδύναμοι.

3. Να εξετάσετε αν οι λ.τ. $p \to (q \to r)$ και $(p \land q) \to r$ είναι λογικά ισοδύναμοι. Απάντηση: Έχουμε:

$p \to (q \to r) \Leftrightarrow \neg p \lor (q \to r)$ (εξ΄ ορισμού)

$\Leftrightarrow \neg p \lor (\neg q \lor r)$ (εξ΄ ορισμού)

$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q) \lor r$ (προσεταιριστικός νόμος)

$\Leftrightarrow \neg(p \land q) \lor r$ (νόμος *DeMorgan*)

$\Leftrightarrow (p \land q) \to r$ (εξ΄ ορισμού)

Εναλλακτικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας για τους δύο λογικούς τύπους.

p q r $(p \land q) \to r$

$q \to r$	$p \to (q \to r)$	$p \land q$
1	1	0
1	1	0
0	1	0
1	1	0
1	1	0
1	1	0
0	0	1
1	1	1

0 0 0 1
0 0 1 1
0 1 0 1
0 1 1 1
1 0 0 1
1 0 1 1
1 1 0 0
1 1 1 1

Εφόσον στον παραπάνω πίνακα οι στήλες που αντιστοιχούν στους δύο λογικούς τύπους ταυτίζονται συνε πάγεται ότι αυτοί είναι λογικά ισοδύναμοι.

4. Βρείτε τον πίνακα αληθείας του λ.τ. $(p \land q) \lor (q \land \neg r)$.

Απάντηση: Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας αληθείας.

p q r $(p \land q) \lor (q \land \neg r)$

$\neg r$	$p \land q$	$q \land \neg r$
1	0	0
0	0	0
1	0	1
0	0	0
1	0	0
0	0	0
1	1	1
0	1	0

0 0 0 0
0 0 1 0
0 1 0 1
0 1 1 0
1 0 0 0
1 0 1 0
1 1 0 1
1 1 1 1

5. Δείξτε ότι $P \to (Q \wedge R) \equiv (P \to Q) \wedge (P \to R)$.

Απάντηση: ΄Εχουμε:

$$\begin{aligned} P \to (Q \wedge R) &\Leftrightarrow \neg P \vee (Q \wedge R) \text{ (εξ΄ ορισμού)} \\ &\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \text{ (επιμεριστικός νόμος)} \\ &\Leftrightarrow (P \to Q) \wedge (P \to R) \text{ (εξ΄ ορισμού)} \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα αληθείας για τους δύο λογικούς τύπους.

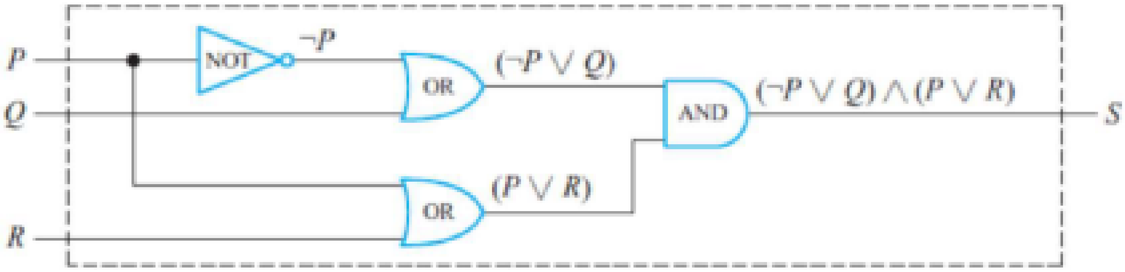
P	Q	R	$Q \wedge R$	$P \to (Q \wedge R)$	$P \to Q$	$P \to R$	$(P \to Q) \wedge (P \to R)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

Εφόσον στον παραπάνω πίνακα οι στήλες που αντιστοιχούν στους δύο λογικούς τύπους ταυτίζονται συνε πάγεται ότι αυτοί είναι λογικά ισοδύναμοι.

6. Σχεδιάστε το κύκλωμα που αντιστοιχεί στην Μπουλιανή έκφραση:

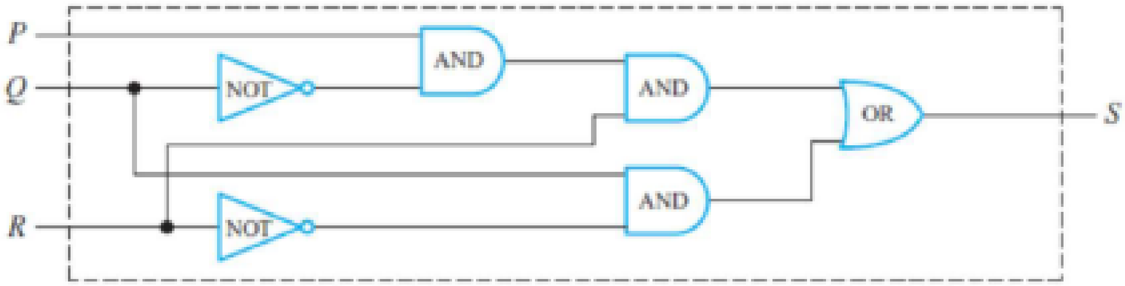
(α) $(\neg P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.

Απάντηση: Το κύκλωμα είναι το παρακάτω.



(β) $(P \land \neg Q \land R) \lor (Q \land \neg R)$.

Απάντηση: Το κύκλωμα είναι το παρακάτω.



3

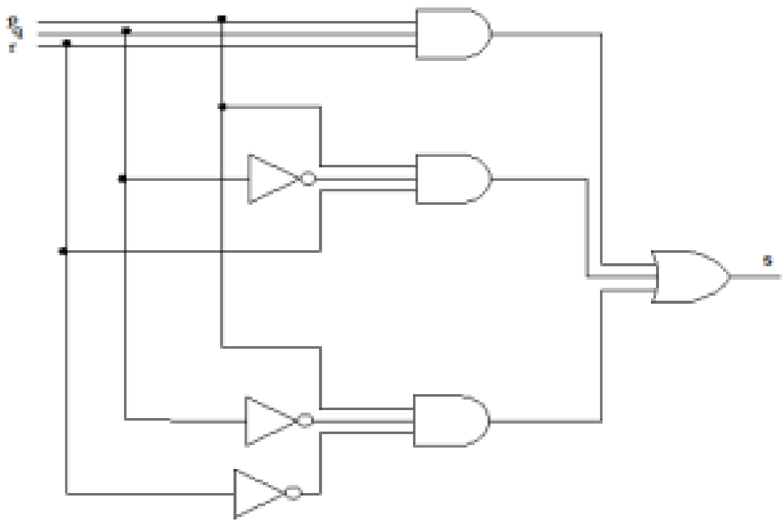
7. Σχεδιάστε το απλούστερο δυνατό κύκλωμα που αντιστοιχεί στον παρακάτω πίνακα εισόδου/εξόδου:

είσοδος			έξοδος
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Απάντηση: Αρχικά γράφουμε μια Μπουλιανή έκφραση που έχει ως πίνακα αληθείας τον πίνακα αυτό. Για να το κάνουμε αυτό ξεχωρίζουμε τις γραμμές στις οποίες η έξοδος είναι 1, δηλαδή στην περίπτωσή μας τις γραμμές 5, 6 και 8. Για κάθε μια απ΄ αυτές τις γραμμές, κατασκευάζουμε μια 'ΚΑΙ' έκφραση που παράγει 1 για τον συνδυασμό των τιμών εισόδου αυτής ακριβώς της γραμμής και 0 για όλους τους άλλους συνδυασμούς των τιμών εισόδου. Για παράδειγμα, για την 8η γραμμή η έκφραση είναι $p \land q \land r$ γιατί η $p \land q \land r$ παράγει 1 αν $p = 1$, $q = 1$ και $r = 1$, και 0 για όλες τις άλλες τιμές των p, q και r. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι εκφράσεις για την 6η και 5η γραμμή είναι $p \land \neg q \land r$ και $p \land \neg q \land \neg r$, αντίστοιχα. Τώρα οποιαδήποτε Μπουλιανή έκφραση με το δοσμένο πίνακα ως πίνακα αλήθειάς της, έχει την τιμή 1 στην περίπτωση που $p \land q \land r = 1$, ή στην περίπτωση που $p \land \neg q \land r = 1$, ή στην περίπτωση που $p \land \neg q \land \neg r = 1$ και σε καμιά άλλη περίπτωση. Επομένως η Μπουλιανή έκφραση με το δοσμένο πίνακα αληθείας είναι η:

$$(p \land q \land r) \lor (p \land \neg q \land r) \lor (p \land \neg q \land \neg r)$$

Το κύκλωμα που αντιστοιχεί σ΄ αυτή την έκφραση είναι το ακόλουθο:



Το κύκλωμα αυτό δεν είναι το απλούστερο δυνατό. Κατά συνέπεια πρέπει να βρούμε έναν

απλοποιημένο 4

ισοδύναμο λογικό τύπο:

$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \Leftrightarrow p \wedge ((q \wedge r) \vee (\neg q \wedge r)) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

(επιμεριστικός νόμος) $\Leftrightarrow p \wedge ((q \vee \neg q) \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$

(επιμεριστικός νόμος)

$\Leftrightarrow p \wedge (t \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ (νόμος άρνησης)

$\Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ (νόμος ταυτότητας)

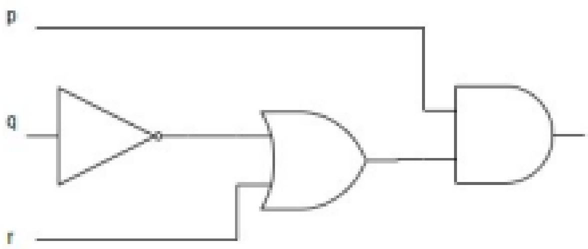
$\Leftrightarrow p \wedge (r \vee (\neg q \wedge \neg r))$ (επιμεριστικός νόμος)

$\Leftrightarrow p \wedge ((r \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r))$ (επιμεριστικός νόμος)

$\Leftrightarrow p \wedge ((r \vee \neg q) \wedge t)$ (νόμος άρνησης)

$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee r)$ (νόμος ταυτότητας)

Το τελικό κύκλωμα είναι το εξής:



8. Να προσδιορίσετε την τιμή αληθείας για κάθεμια από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο ορισμού όλων των μεταβλητών είναι το R.

   (α) $\forall x \exists y(2x - y = 0)$.

   Απάντηση: Αληθής. Για κάθε τιμή της μεταβλητής x η τιμή $y = 2x$ ικανοποιεί την εξίσωση. (β) $\exists y \forall x(2x - y = 0)$.

   Απάντηση: Ψευδής. Η μοναδική περίπτωση για να ισχύει η εξίσωση είναι $y = 2x$. Συνεπώς, δεν υπάρχει τιμή του y για την οποία να ισχύει η εξίσωση για κάθε τιμή του x.

   (γ) $\forall x \exists y(x - 2y = 0)$.

   Απάντηση: Αληθής. Για κάθε τιμή της μεταβλητής x η τιμή $y = \frac{x}{2}$ ικανοποιεί την εξίσωση. (δ) $\exists y \exists z(y + z = 100)$.

   Απάντηση: Αληθής. Οι τιμές $y = 1$ και $z = 99$ ικανοποιούν την εξίσωση.

   (ε) $\forall x \exists y(y > x \land \exists z(y + z = 100))$.

   Απάντηση: Αληθής. Για κάθε αριθμό x, η τιμή $y = x + 1$ ικανοποιεί το κατηγόρημα $y > x$. Θέτοντας $z = 100 - y$ ικανοποιείται το κατηγόρημα $y + z = 100$. Εφόσον υπάρχουν τιμές των y και z που ικανοποιούν τα δύο κατηγορήματα, η παραπάνω πρόταση είναι αληθής.

   (στ) $\exists x \exists y(x + y\ 6= y + x)$.

   Απάντηση: Ψευδής. Για την πράξη της πρόσθεσης ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

   (ζ) $\forall x(x\ 6= 0 \rightarrow \exists y(xy = 1))$.

   Απάντηση: Αληθής. Η τιμή $y = \frac{1}{x}$, $x\ 6= 0$ ικανοποιεί την εξίσωση.

   (η) $\exists x \forall y(y\ 6= 0 \rightarrow xy = 1)$.

   Απάντηση: Ψευδής. Δεν υπάρχει ένας αριθμός x που για κάθε τιμή $y\ 6= 0$ να ικανοποιεί την $xy = 1$.

   (θ) $\forall x \exists y(x + y = 2 \land 2x - y = 1)$.

   Απάντηση: Ψευδής. Υπάρχει η τιμή $x = 0$ για την οποία το σύστημα δεν έχει λύση.

9. Να προσδιορίσετε την τιμή αληθείας για κάθεμια από τις παρακάτω προτάσεις αν το πεδίο ορισμού όλων των μεταβλητών είναι το N.

   (α) $\forall x(x < 7 \rightarrow \exists a \exists b \exists c(a^2 + b^2 + c^2 = x))$.

   Απάντηση: Αληθής. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ακέραιο μικρότερο του επτά, μπορούμε να βρούμε a, b και c τέτοια ώστε το άθροισμα των τετραγώνων τους να ισούται με το x. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές των a, b και c για κάθε δυνατή τιμή του $x < 7$, $x \in$ N.

x	a	b	c
6	2	1	1
5	2	1	0
4	2	0	0
3	1	1	1
2	1	1	0
1	1	0	0
0	0	0	0

(β) $\exists x \exists y((x-4)^2 = 25 \wedge (y-4)^2 = 25)$.

Απάντηση: Αληθής. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια τιμή για τα x και y που να ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις. Αυτό ισχύει για τις τιμές $x = 9$ και $y = 9$.

10. Τρεις άνθρωποι είναι ύποπτοι για ληστεία κοσμηματοπωλείου: ο Αντώνης, ο Βασίλης και ο Γιώργος. Η προκαταρκτική έρευνα οδήγησε στα ακόλουθα συμπεράσματα:

(α) Αν ο Γιώργος εμπλέκεται στο έγκλημα, τότε εμπλέκεται και ο Βασίλης.

(β) Αν ο Αντώνης είναι ένοχος, τότε ο Βασίλης είναι επίσης ένοχος.

Το πρώτο συμπέρασμα της προκαταρκτικής έρευνας αποδείχθηκε αληθές και το δεύτερο αποδείχθηκε ψευδές. Ποιος διέπραξε τη ληστεία;

Απάντηση: Έστω A - 'ο Αντώνης είναι ένοχος', B - 'ο Βασίλης είναι ένοχος', G - 'ο Γιώργος είναι ένοχος'. Έστω επίσης, $S = (G \rightarrow B) \wedge \neg(A \rightarrow B) = P \wedge Q$, όπου $P = (G \rightarrow B)$ και $Q = \neg(A \rightarrow B)$. Ο πίνακας αληθείας της S είναι:

A	S	B	G	P	$A \rightarrow B$	Q
F	F	F	F	T	T	F
F	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	F
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	F

Από τα συμπεράσματα (α) και (β) της προκαταρκτικής έρευνας συνεπάγεται ότι η τιμή αληθείας της *S* είναι *T*, αφού η τιμή αληθείας της *P* και της *Q* είναι *T*. Από τον πίνακα αληθείας έχουμε ότι η σύνθετη πρόταση *S* παίρνει την τιμή αληθείας *T* μόνο σε μία περίπτωση, συγκεκριμένα όταν οι προτάσεις *B* και *G* είναι ψευδείς και η πρόταση *A* είναι αληθής. Το συμπέρασμα επομένως είναι ότι ο Αντώνης είναι ο ένοχος της ληστείας.

11. Μια ροή εργασίας παρέχει το ακόλουθο σχήμα λειτουργίας τεσσάρων μηχανών $S_1 - S_4$. Αν η πρώτη μηχανή λειτουργεί, τότε η δεύτερη και η τρίτη λειτουργούν επίσης. Η τρίτη μηχανή λειτουργεί, αν και μόνο αν η τέταρτη λειτουργεί. Επιπλέον, αν η δεύτερη μηχανή λειτουργεί, πρέπει να σταματήσει η τέταρτη. Βρείτε ποιες μηχανές λειτουργούν αυτή τη στιγμή, αν είναι γνωστό ότι τώρα λειτουργεί η πρώτη ή η δεύτερη μηχανή (αλλά όχι και οι δυο ταυτόχρονα).

Απάντηση: ΄Εστω $S_i = T$, αν η *i*-μηχανή λειτουργεί, όπου $i = 1, 2, 3, 4$, και $S_i = F$ διαφορετικά. Από τα δεδομένα της άσκησης συμπεραίνουμε ότι οι ακόλουθες σύνθετες προτάσεις έχουν τιμή αληθείας T:

$$P_1 = S_1 \rightarrow (S_2 \wedge S_3)$$
$$P_2 = S_3 \leftrightarrow S_4$$
$$P_3 = S_2 \rightarrow \neg S_4$$
$$P_4 = (S_1 \oplus S_2)$$

Ας συντάξουμε τον πίνακα αληθείας για τις λογικές εκφράσεις που αντιστοιχούν στις συνθήκες λειτουργίας των μηχανών.

S_1 P_4

S_2	S_3	S_4	P_1	P_2	P_3
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*
T	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*
T	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*
T	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*F*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*F*	*F*	*T*
F	*F*	*F*	*F*	*T*	*T*
T	*T*	*T*	*T*	*T*	*F*
T	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*
T	*F*	*T*	*T*	*F*	*F*
T	*F*	*F*	T	T	T
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*T*	*F*	*T*
F	*F*	*T*	*T*	*F*	*T*
F	*F*	*F*	*T*	*T*	*T*

T F
T F
T F

T F
T T
T T
T T
T T
F T
F T
F T
F T
F F
F F
F F
F F

Από τον πίνακα αληθείας έπεται ότι κρίσιμη γραμμή είναι η γραμμή 12, όπου όλες οι λογικές εκφράσεις που αντιστοιχούν στις συνθήκες λειτουργίας των μηχανών είναι *T*, δηλ. $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = T$. Στη γραμμή αυτή $S_1 = S_3 = S_4 = F$, $S_2 = T$.
Συνεπώς, μόνο η δεύτερη μηχανή λειτουργεί τώρα.

12. ΄Εστω λογική συνάρτηση *F* τεσσάρων μεταβλητών *A*, *B*, *X* και *Y* , η οποία παίρνει τιμή 1 αν ο διψήφιος δυαδικός αριθμός *AB* είναι μικρότερος από τον διψήφιο δυαδικό αριθμό *XY* και 0 διαφορετικά. Να κατα σκευάσετε τον πίνακα αληθείας της συνάρτησης *F*. Υπόδειξη: αν *A* = 1, *B* = 0, *X* = 1 και *Y* = 1, τότε ο *AB* είναι ο δυαδικός αριθμός $(10)_2$ και είναι μικρότερος του *XY* που είναι ο δυαδικός αριθμός $(11)_2$, οπότε η τιμή της *F* θα είναι 1.

Απάντηση: Ο πίνακας αληθείας της συνάρτησης *F* είναι:.

7
A F

B	*X*	*Y*
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

0 0 0 1 0 1 0 1 0 0
0 0 0 1 0 1 1 0 1 0

1 0 1 1 1 0 1 0 1 0
1 0