# ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΛΩΝΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

## ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΑΠΛΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ
## ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

**α)** $\int 1dx = x + c$

**β)** $\int 0dx = c$

**γ)** $\int \frac{1}{x}dx = \ln x$

**δ)** $\int e^x dx = e^x + c$

**ε)** $\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$

**στ)** $\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$

**ζ)** $\int x^\kappa dx = \frac{x^{\kappa+1}}{\kappa+1} + c$

**η)** $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \varepsilon\phi x + c$

**θ)** $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\phi x + c$

**ι)** $\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln\alpha} + c$

**κ)** $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \eta\mu^{-1} x + c$

**λ)** $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \varepsilon\phi^{-1} x + c$

**μ)** $\int \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = \frac{1}{\alpha}\varepsilon\varphi^{-1}(\frac{x}{\alpha}) + c$.

### 1Η ΜΕΘΟΔΟΣ
### ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΟΥΣ ΤΥΠΟΥΣ

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}}$, β) $\int_{-2}^{2}(e^{4x} + e^x)dx$, γ) $\int_{1}^{2}(\frac{2}{x^3} - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x})dx$, δ) $\int_{-2}^{1} \frac{dx}{x+3}$,

ε) $\int_{-1}^{3}(3x^3 - 5x^2 + 2x)dx$, στ) $\int \sigma\upsilon\nu 3x dx$ , ζ) $\int \frac{6-e^x}{e^{3x}}dx$ , η) $\int \eta\mu\frac{5x}{8}dx$,

θ) $\int e^{(2x+5)}dx$, ι) $\int$συν (2x-4) dx.

**ΛΥΣΗ**

**α)** $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^5}} = \int x^{-5/6}dx = 6\sqrt[6]{x} + c$

**β)** $\int_{-2}^{2}(e^{4x} + e^x)dx = \int_{-2}^{2} e^{4x}dx + \int_{-2}^{2} e^x dx = [\frac{e^{4x}}{4} + e^x]_{-2}^{2} = \frac{e^8}{4} + e^2 - \frac{e^{-8}}{4} - e^{-2}$

**γ)** $\int_1^2 (\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^2}-\frac{3}{x})dx=[-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}-3\ln x]_1^2=-\frac{5}{4}-3\ln 2$

**δ)** $\int_{-2}^{1}\frac{dx}{x+3}=[\ln(x+3)]_{-2}^{1}=\ln 4$

**ε)** $\int_{-1}^{3}(3x^3-5x^2+2x)dx=[\frac{3x^4}{4}-\frac{5x^3}{3}+x^2]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$

**στ)** $\int \sigma\upsilon\nu 3x dx=\int(\frac{\eta\mu 3x}{3})'dx=\frac{\eta\mu 3x}{3}+c$

**ζ)** $\int\frac{6-e^x}{e^{3x}}dx=6\int e^{-3x}dx-\int e^{-2x}dx=-2e^{-3x}+\frac{e^{-2x}}{2}+c$

**η)** $\int \eta\mu\frac{5x}{8}dx=\frac{8}{5}\int(-\sigma\upsilon\nu\frac{5x}{8})'dx=-\frac{8}{5}\sigma\upsilon\nu\frac{5x}{8}+c$

**θ)** $\int e^{2x+5}dx=\int(\frac{e^{2x+5}}{2})'dx=\frac{e^{2x+5}}{2}+c$

**ι)** $\int \sigma\upsilon\nu(2x-4)dx=\int(\frac{\sigma\upsilon\nu(2x-4)}{2})'dx=\frac{1}{2}\eta\mu(2x-4)+c$ .

**2Η ΜΕΘΟΔΟΣ**
**ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ**
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2**

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$ , β) $\int\frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}dx$, γ) $\int(4x-1)e^{(2x^2-x+4)}dx$,

δ) $\int 4^{\sqrt{2x+1}}dx$ , ε) $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(\ln x)^3}$ , στ) $\int x^2e^{2x^3}dx$ , ζ) $\int\frac{xdx}{\sqrt{5x-3}}$ ,

η) $\int(x+2)\eta\mu(x^2+4x-6)dx$ , θ) $\int\frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$, ι) $\int\frac{1}{x(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}dx$ ,

κ) $\int\frac{x\eta\mu^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$

**ΛΥΣΗ**

**α)** $\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$ , ΘΕΤΩ $u=\ln(\ln x)$, $du=\frac{1}{x\ln x}dx$ . ΑΡΑ

$$\int\frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}=\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+c=\ln|\ln(\ln x)|+c$$

**β)** $\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}dx$, ΘΕΤΩ $u=1+\ln^2 x$, $du=\frac{2\ln x}{x}dx$. ΑΡΑ

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln|u|+c=\frac{1}{2}\ln(1+\ln^2 x)+c$$

**γ)** $\int (4x-1)e^{(2x^2-x+4)}dx$, ΘΕΤΩ $u=2x^2-x+4$, $du=(4x-1)dx$. ΑΡΑ

$$\int (4x-1)e^{(2x^2-x+4)}dx=\int e^u du=e^u+c=e^{2x^2-x+4}+c,$$

**δ)** $\int 4^{\sqrt{2x+1}}dx$ ΘΕΤΩ $u=\sqrt{2x+1}$, $du=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx \Leftrightarrow dx=udu$. ΑΡΑ

$$\int 4^{\sqrt{2x+1}}dx=\int 4^u udu=\int (\frac{4^u}{\ln 4})'udu=\frac{4^u}{\ln 4}u-\int \frac{4^u}{\ln 4}du=\frac{4^u}{\ln 4}u-\frac{4^u}{\ln^2 4}+c=$$

$$\frac{4^{\sqrt{2x+1}}}{\ln(4)}\sqrt{2x+1}-\frac{4^{\sqrt{2x+1}}}{\ln^2(4)}+c$$

**ε)** $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(\ln x)^3}$, ΘΕΤΩ $u=\ln x$, $du=\frac{1}{x}dx$, $\begin{matrix} x\to e \Rightarrow u\to 1 \\ x\to e^2 \Rightarrow u\to 2 \end{matrix}$ ΑΡΑ

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x(\ln x)^3}=\int_1^2 \frac{1}{u^3}du=[-\frac{1}{2u^2}]_1^2=\frac{3}{8}$$

**στ)** $\int x^2 e^{2x^3}dx$ , ΘΕΤΩ $u=2x^3$, $du=6x^2dx$. ΑΡΑ

$$\int x^2e^{2x^3}dx=\frac{1}{6}\int e^u du=\frac{e^u}{6}+c=\frac{e^{2x^3}}{6}+c$$

**ζ)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{5x-3}}$, ΘΕΤΩ $u=5x-3 \Leftrightarrow x=\frac{u+3}{5}$, $du=5dx$. ΑΡΑ

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{5x-3}}=\frac{1}{25}\int \frac{u+3}{\sqrt{u}}du=\frac{1}{25}\int \frac{u}{\sqrt{u}}du+\frac{1}{25}\int \frac{3}{\sqrt{u}}du=$$

$$\frac{1}{25}\int u^{1/2}du+\frac{3}{25}\int u^{-1/2}du=\frac{2}{75}u^{3/2}+\frac{3}{25}u^{1/2}+c=$$

$$\frac{2}{75}\sqrt{(5x-3)^3}+\frac{6}{25}\sqrt{5x-3}+c$$

**η)** $\int (x+2)\eta\mu(x^2+4x-6)dx$ ΘΕΤΩ $u=x^2+4x-6$, $du=(2x+4)dx$. ΑΡΑ

$$\int (x+2)\eta\mu(x^2+4x-6)dx=\frac{1}{2}\int \eta\mu u du=-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu(x^2+4x-6)+c$$

**θ)** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$ ΘΕΤΩ $u = e^x + 1$, $du = e^x dx$. ΑΡΑ

$$\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \int \frac{u}{\sqrt{u}}du - \int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \int u^{1/2}du - \int u^{-1/2}du =$$

$$\frac{2}{3}u^{3/2} - 2u^{1/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(e^x+1)^3} - 2\sqrt{e^x+1} + c$$

**ι)** $\int \frac{1}{x(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}dx$, ΘΕΤΩ $u = \frac{x}{x-1}$, $du = \frac{-1}{(x-1)^2}dx$. ΑΡΑ

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}dx = -\int \frac{x-1}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}}\frac{-1}{(x-1)^2}dx = -\int \frac{\sqrt[3]{u}}{u}du =$$

$$\int u^{-2/3}du = -3\sqrt[3]{u} + c = -3\sqrt[3]{\frac{x}{x-1}} + c$$

**κ)** $\int \frac{x\eta\mu^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$, ΘΕΤΩ $u = x^2$, $du = 2xdx$. ΑΡΑ

$$\int \frac{x\eta\mu^{-1}x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\eta\mu^{-1}u}{\sqrt{1-u^2}}du,$$ ΘΕΤΩ $t = \eta\mu^{-1}u \Rightarrow u = \eta\mu t$, $du = \sigma\upsilon\nu t dt$. ΑΡΑ

$$\frac{1}{2}\int \frac{\eta\mu^{-1}u}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{1}{2}\int \frac{t}{\sqrt{1-\eta\mu^2 t}}\sigma\upsilon\nu t dt = \frac{1}{2}\int \frac{t}{\sigma\upsilon\nu t}\sigma\upsilon\nu t dt = \frac{1}{2}\int t dt = \frac{t^2}{4} + c = \frac{(\eta\mu^{-1}x^2)^2}{4} + c$$

**ΣΗΜΕΙΩΣΗ:** Ολοκληρώματα που είναι της μορφής $\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ λύνονται με αντικατάσταση $x = \alpha\eta\mu y$, και ολοκληρώματα που είναι της μορφής $\sqrt{\alpha^2 + x^2}$ λύνονται με αντικατάσταση $x = \alpha\varepsilon\varphi y$.

**ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΟΝΤΑΙ**

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \qquad \eta\mu^2\omega = \frac{\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \qquad \eta\mu 2\omega = 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \begin{matrix}\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1-\eta\mu^2\omega \\ \eta\mu^2\omega = 1-\sigma\upsilon\nu^2\omega\end{matrix}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\omega + 1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega \Rightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\omega}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\omega = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3**

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{dx}{1+x^2}$, β) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2+9})^3}$

**ΛΥΣΗ**

**α)** $\int \frac{dx}{1+x^2}$ ΘΕΤΩ $x = \varepsilon\phi\omega$, $dx = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} d\omega$.

ΑΡΑ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} d\omega = \int \sigma\upsilon\nu^2\omega \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} d\omega = \int d\omega = \omega + c = \varepsilon\varphi^{-1}x + c$

Ισχύει $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\omega}$

**β)** $\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2+9})^3}$ ΘΕΤΩ $x = 3\varepsilon\phi\omega$, $dx = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} d\omega$.

ΑΡΑ $\sqrt{x^2+9} = \sqrt{9\varepsilon\phi^2\omega+9} = \sqrt{\frac{9}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}} = \frac{3}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

$\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2+9})^3} = \frac{1}{9}\int \sigma\upsilon\nu\omega d\omega = \frac{1}{9}\eta\mu\omega + c$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu 5x\sigma\upsilon\nu 3x dx$

**ΛΥΣΗ**

$\int \eta\mu 5x\sigma\upsilon\nu 3x dx = \frac{1}{2}\int (\eta\mu(5x-3x) + \eta\mu(5x+3x))dx = \frac{1}{2}\int \eta\mu 2x dx + \frac{1}{2}\int \eta\mu 8x dx =$

$-\frac{1}{4}\sigma\upsilon\nu 2x - \frac{1}{16}\sigma\upsilon\nu 8x + c$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$

**ΛΥΣΗ**

$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$, ΘΕΤΩ $x = 2\eta\mu t$, $dx = 2\sigma\upsilon\nu t dt$. ΑΡΑ

$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\eta\mu^2 t}{\sqrt{4-4\eta\mu^2 t}} 2\sigma\upsilon\nu t dt = \int \frac{4\eta\mu^2 t}{2\sigma\upsilon\nu t} 2\sigma\upsilon\nu t dt = \int 4\eta\mu^2 t dt =$

$\int 2(1-\sigma\upsilon\nu 2t)dt = 2t - \eta\mu 2t + c$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \eta\mu^4 x\, \sigma\upsilon\nu^4 x\, dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int \eta\mu^4 x\sigma\upsilon\nu^4 x dx = \int\left(\frac{1}{2}\eta\mu 2x\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int \eta\mu^4 2x dx = \frac{1}{16}\int (\eta\mu^2 2x)^2 dx =$$

$$\frac{1}{16}\int [\frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu 4x)]^2 dx = \frac{1}{64}\int (1-2\sigma\upsilon\nu 4x+\sigma\upsilon\nu^2 4x)dx =$$

$$\frac{1}{64}[\int 1dx - \int 2\sigma\upsilon\nu 4x dx + \int \frac{1}{2}(1+\sigma\upsilon\nu 8x)dx] = \frac{x}{64} - \frac{\eta\mu x}{128} + \frac{x}{128} + \frac{\sigma\upsilon\nu 8x}{512} + c$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

**ΛΥΣΗ**

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$, Βρίσκω το ΕΚΠ των ριζών που είναι 6. ΘΕΤΩ $t=\sqrt[6]{x} \Rightarrow x=t^6$, $\sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2 \ dx = 6t^5 dt$. ΑΡΑ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1}dt =$$

$$\int (t^2-t+1)dt - 6\int \frac{1}{t+1}dt = 6(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t) - 6\ln|t+1| + c = 2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+c =$$

$$2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln(\sqrt[6]{x}+1)+c$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

**ΛΥΣΗ**

Θέτω

$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2}$ οπότε θα έχουμε $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = 4\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt$

Αλλά $\frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)} = \frac{\mathrm{A}}{t-1}+\frac{\mathrm{B}}{t+1}+\frac{\Gamma t+\Delta}{t^2+1} \Rightarrow \mathrm{A}=\frac{1}{4}, \mathrm{B}=-\frac{1}{4}, \Gamma=0, \Delta=\frac{1}{2}$

Άρα θα έχουμε

$$4\int \frac{t^2}{(t^2-1)(t^2+1)}dt = \int \frac{1}{t-1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt + 2\int \frac{1}{t^2+1}dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + 2\varepsilon\phi^{-1}t + c$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+2+\sqrt{x+2}}dx$

### ΛΥΣΗ

Θέτω $\sqrt{x+2}=t \Rightarrow x+2=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$, οπότε

$$\int \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+2+\sqrt{x+2}}dx=\int \frac{2t(t-1)}{t^2+t}dt=\int \frac{2t(t-1)}{t(t+1)}dt=$$

$$2\int \frac{t-1}{t+1}dt=2\int \frac{t+1}{t+1}dt-\int \frac{4}{t+1}dt=2t-4\ln|t+1|+c$$

## 3Η ΜΕΘΟΔΟΣ
## ΜΕ ΔΙΑΣΠΑΣΗ ΑΠΛΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

### Α) ΟΤΑΝ Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΝΟΜΑΣΤΗ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΒΑΘΜΟ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΙΑΣΠΑΣΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ

$$\frac{3x}{x^2-5x+6}=\frac{3x}{(x-2)(x-3)}=\frac{\mathrm{A}}{x-2}+\frac{\mathrm{B}}{x-3}$$

$$\frac{3x}{x^2\left(x^2-5x+6\right)}=\frac{3x}{x^2(x-2)(x-3)}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}}{x^2}+\frac{\Gamma}{x-2}+\frac{\Delta}{x-3}$$

$$\frac{2}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma}{x+1}+\frac{\Delta}{(x+1)^2}+\frac{\mathrm{E}}{(x+1)^3}$$

$$\frac{2}{(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{\mathrm{A}}{x-1}+\frac{\mathrm{B}}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+1}$$

$$\frac{2}{(x-2)(x^2+2)^2}=\frac{\mathrm{A}}{x-2}+\frac{\mathrm{B}x+\Gamma}{x^2+2}+\frac{\Delta x+\mathrm{E}}{\left(x^2+2\right)^2}$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$ , β) $\int \frac{7dx}{x^2+3x-10}$ , γ) $\int \frac{(4x^2-3x+5)dx}{x^3-3x+2}$ ,

δ) $\int \frac{7}{(x-2)(x+5)}dx$ .

### ΛΥΣΗ

**α)** $\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx$

$$\frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}=\frac{\mathrm{A}}{x-3}+\frac{\mathrm{B}}{2x+5} \Leftrightarrow \mathrm{A}(2x+5)+\mathrm{B}(x-3)=6-x \Leftrightarrow \mathrm{A}=\frac{3}{11},\mathrm{B}=-\frac{17}{11}.$$

ΑΡΑ

$$\int \frac{6-x}{(x-3)(2x+5)}dx=\frac{3}{11}\int \frac{1}{x-3}dx-\frac{17}{11}\int \frac{1}{2x+5}dx=\frac{3}{11}\ln|x-3|-\frac{17}{22}\ln|2x+5|+c$$

**β)** $\int \frac{7dx}{x^2+3x-10}$

$\frac{7}{(x-2)(x+5)} = \frac{\mathrm{A}}{x-2} + \frac{\mathrm{B}}{x+5} \Leftrightarrow \mathrm{A}(x+5)+\mathrm{B}(x-2)=7 \Leftrightarrow \mathrm{A}=1, \mathrm{B}=-1$. ΑΡΑ

$$\int \frac{7}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+5}dx = \ln|x-2| - \ln|x+5| + c$$

**γ)** $\int \frac{(4x^2-3x+5)dx}{x^3-3x+2}$

$$\frac{4x^2-3x+5}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{\mathrm{A}}{x-1} + \frac{\mathrm{B}}{(x-1)^2} + \frac{\Gamma}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$\mathrm{A}(x-1)(x+2)+\mathrm{B}(x+2)+\Gamma(x-1)^2 = 4x^2-3x+5 \Leftrightarrow \mathrm{A}=1, \mathrm{B}=2, \Gamma=3$$

$$\int \frac{(4x^2-3x+5)dx}{x^3-3x+2} = \int \frac{1}{x-1}dx + \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{3}{x+2}dx =$$

$$\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + 3\ln|x+2| + c$$

**δ)** $\int \frac{7}{(x-2)(x+5)}dx$,

$\frac{7}{(x-2)(x+5)} = \frac{\mathrm{A}}{x-2} + \frac{\mathrm{B}}{x+5} \Leftrightarrow \mathrm{A}(x+5)+\mathrm{B}(x-2)=7 \Leftrightarrow \mathrm{A}=1, \mathrm{B}=-1$. ΑΡΑ

$$\int \frac{7}{(x-2)(x+5)}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+5}dx = \ln|x-2| - \ln|x+5| + c$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{3x+2}{x^2-6x+9}dx$

**ΛΥΣΗ**

$\int \frac{3x+2}{x^2-6x+9}dx = \int \frac{3x+2}{(x-3)^2}dx$ Οπότε έχουμε

$$\frac{3x+2}{(x-3)^2} = \frac{\mathrm{A}}{x-3} + \frac{\mathrm{B}}{(x-3)^2} \Rightarrow \frac{3x+2}{(x-3)^2} = \frac{\mathrm{A}(x-3)+\mathrm{B}}{(x-3)^2} \Rightarrow \mathrm{A}(x-3)+\mathrm{B} = 3x+2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}=3 \\ -3\mathrm{A}+\mathrm{B}=2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{A}=3, \mathrm{B}=11$$

Άρα θα έχουμε

$$\int \frac{3x+2}{(x-3)^2}dx = \int \frac{3}{x-3}dx + \int \frac{11}{(x-3)^2}dx = 3\ln|x-3| - \frac{11}{x-3} + c$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\frac{2}{x^2(x^2+1)}=\frac{\mathrm{A}}{x}+\frac{\mathrm{B}}{x^2}+\frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+1}\Rightarrow\frac{2}{x^2(x^2+1)}=\frac{\mathrm{A}x(x^2+1)+\mathrm{B}(x^2+1)+(\Gamma x+\Delta)x^2}{x^2(x^2+1)}\Rightarrow$$

$$\mathrm{A}x^3+\mathrm{A}x+\mathrm{B}x^2+\mathrm{B}+\Gamma x^3+\Delta x^2=2\Rightarrow$$

$$\mathrm{A}+\Gamma=0$$

$$\begin{pmatrix}\mathrm{B}+\Delta=0\\ \mathrm{A}=0\\ \mathrm{B}=2\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{A}=0,\mathrm{B}=2,\Gamma=0,\Delta=-2$$

Άρα $\int \frac{2}{x^2\left(x^2+1\right)}dx=\int\frac{0}{x}dx+\int\frac{2}{x^2}dx+\int\frac{0x-2}{x^2+1}dx=-\frac{2}{x}-2\varepsilon\phi^{-1}x+c$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{x^2+2x+10}dx$

**ΛΥΣΗ**

$x^2+2x+10=(x+1)^2+9$ Οπότε έχουμε

$$\int\frac{1}{x^2+2x+10}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+9}dx$$

Θέτω $x+1=3y\Rightarrow dx=3dy$. Οπότε έχουμε

$$\int\frac{1}{(x+1)^2+9}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{y^2+1}dy=\frac{1}{3}\varepsilon\phi^{-1}y+c=\frac{1}{3}\varepsilon\phi^{-1}\left(\frac{x+1}{3}\right)+c$$

**<u>Β) ΟΤΑΝ Ο ΒΑΘΜΟΣ ΤΟΥ ΠΑΡΑΝΟΜΑΣΤΗ ΕΙΝΑΙ ΜΙΚΡΟΤΕΡΟΣ Ή ΙΣΟΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΒΑΘΜΟ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΗΤΗ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΚΑΝΩ ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ</u>**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int\frac{x^2}{x+3}dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int\frac{x^2}{x+3}dx=\int\frac{(x+3)(x-3)+9}{x+3}dx=\int(x-3)dx+9\int\frac{1}{x+3}dx=\frac{x^2}{2}-3x+9\ln|x+3|+c.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int\frac{2x-1}{x+3}dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int\frac{2x-1}{x+3}dx=\int\frac{2(x+3)-7}{x+3}dx=\int2dx-7\int\frac{1}{x+3}dx=2x-7\ln|x+3|+c.$$

## 4$^{Η}$ ΜΕΘΟΔΟΣ
## ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ

$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$.

**α) (πολυωνυμική)$\cdot$(εκθετική) βρίσκω την παράγουσα της εκθετικής.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int xe^x dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\mathrm{I} = \int xe^x dx = \int x\left(e^x\right)' dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

**β) (πολυωνυμική)$\cdot$(τριγωνομετρική) βρίσκω την παράγουσα της τριγωνομετρικής.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int x\eta\mu x dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int x\eta\mu x dx = \int x(-\sigma\upsilon\nu x)' dx = -x\sigma\upsilon\nu x + \int \sigma\upsilon\nu x dx = -x\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + c$$

**γ) (πολυωνυμική)$\cdot$(λογαριθμική) βρίσκω την παράγουσα της πολυωνυμικής.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 18**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \ln x dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int \ln x dx = \int 1\cdot \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int 1 dx = x\ln x - x + c$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 19**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int x\ln(x+3)dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int x\ln(x+3)dx = \int (\frac{x^2}{2})'\ln(x+3)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+3}dx =$$

$$\frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int \frac{(x+3)(x-3)-9}{x+3}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+3) - \frac{1}{2}\int (x-3)dx - \frac{9}{2}\int \frac{1}{x+3}dx =$$

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}\right)\ln(x+3) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} + c$$

**δ) (τριγωνομετρική)$\cdot$(εκθετική) βρίσκω την παράγουσα της εκθετικής.**

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int e^x \eta\mu x dx$

**ΛΥΣΗ**

Βάζω $\mathrm{I} = \int e^x \eta\mu x dx$

$$\mathrm{I} = \int e^x\eta\mu x dx = \int (e^x)'\eta\mu x dx = e^x\eta\mu x - \int e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x dx = e^x\eta\mu x - \int \left(e^x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x dx =$$

$$e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x - \int e^x\eta\mu x dx = e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x - \mathrm{I}$$

ΑΡΑ $\mathrm{I} = e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x - \mathrm{I} \Rightarrow 2\mathrm{I} = e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow \mathrm{I} = \dfrac{e^x\eta\mu x - e^x\sigma\upsilon\nu x}{2}$

## <u>ΔΕΝ ΞΕΧΝΩ:</u>

arctanx $= \varepsilon\phi^{-1}x = \tau o\xi\varepsilon\varphi x$ sinx=ημχ, cosx=συνχ

arcsinx $= \eta\mu^{-1}x = \tau o\xi\eta\mu x$ tanx=εφχ, cotx= σφχ

$ar\,\mathrm{ccos}\,x = \sigma\upsilon\nu^{-1}x = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu x$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{arctanx} = \frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{arctanx} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-1} \mathrm{arccosx} = \pi,\ \lim_{x\to1} \mathrm{arccosx} = 0$$

$$\lim_{x\to1} \mathrm{arctanx} = \frac{\pi}{4},\ \lim_{x\to-1} \mathrm{arctanx} = -\frac{\pi}{4}$$

### ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΑΡΑΔΕΪΓΜΑΤΑ:

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 21

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{e^x+1}dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}dx = \int \frac{1+e^x}{e^x+1}dx - \int \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int 1dx - \int \frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx =$$
$$x - \ln\left(e^x+1\right) + c$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 22

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int \frac{1}{x^2-4x+5}dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+1}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \arctan(x-2)+c$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{x^2-4x+7}dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int \frac{1}{x^2-4x+7}dx = \int \frac{1}{x^2-4x+4+3}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\frac{(x-2)^2}{3}+1}dx =$$
$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24**

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{x}{x^2-x+1}dx$

**ΛΥΣΗ**

$$\int \frac{x}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-x+1\right)'}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{{}^{1}\!/_{2}}{{}^{3}\!/_{4}}\int \frac{1}{\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{{}^{3}\!/_{4}}+1}dx =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{4}{6}\int \frac{1}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{{}^{\sqrt{3}}\!/_{2}}\right)^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{4}{6}\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{{}^{\sqrt{3}}\!/_{2}}\right)+c =$$

$$\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+c$$

# ***ΑΣΚΗΣΕΙΣ***

**1.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

**1.** $\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$, **2.** $\int \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx$ , **3.** $\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x dx$ , **4.** $\int \frac{\ln x}{x}dx$, **5.** $\int 2xe^{x^2}\eta\mu(e^{x^2})dx$

**6.** $\int \ln(1+x)dx$, **7.** $\int x^2 e^x dx$, **8.** $\int (3x+2)^5 dx$, **9.** $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x+1}}dx$, **10.** $\int \frac{x^2+3}{x^2+5x+6}dx$,

**11.** $\int \frac{2x+7}{x^2+4x+3}dx$, **12.** $\int \eta\mu^5 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$, **13.** $\int \eta\mu^6 x\sigma\upsilon\nu x dx$, **14.** $\int \frac{6x^3+x^2-2x+1}{2x-1}dx$

**15.** $\int \frac{1}{\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$, **16.** $\int x^2\sigma\upsilon\nu 3x dx$, **17.** $\int e^{2x}\sigma\upsilon\nu 3x dx$, **18.** $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$

**19.** $\int \frac{1}{x^2+x}dx$, **20.** $\int \eta\mu(\ln x)dx$, **21.** $\int x^4\eta\mu x dx$, **22.** $\int \frac{x}{x^3-1}dx$, **23.** $\int \frac{-x^2+3x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

**24.** $\int \frac{2x^4-x^3-16x^2-9}{x^3-9x}dx$, **25.** $\int \frac{3x^2+x+2}{x^2(\mathrm{x}^2+1)}dx$, **26.** $\int \arctan(2x)dx$,

**27.** $\int \frac{dx}{x(\ln x+3)}$, **28.** $\int \frac{e^{2x}-7e^x+2}{e^x}dx$, **29.** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$, **30.** $\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx$ ,

**31.** $\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx$, **32.** $\int \ln^2 x dx$, **33.** $\int \frac{9x^2}{\sqrt{1-x^3}}dx$, **34.** $\int \frac{arc\sin x}{\sqrt{1+x}}dx$

**35.** $\int \frac{(x+1)^2}{x^2-x}dx$, **36.** $\int \frac{1}{1-x^4}dx$ **37.** $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2\frac{1}{x}dx$, **38.** $\int \frac{1}{4x^2+5}dx$.

**ΛΥΣΕΙΣ: 1.** $\varepsilon\phi x+c$, **2.** $-\sqrt{3-2x}+c$, **3.** $\frac{\eta\mu^3 x}{3}+c$, **4.** $\frac{(\ln x)^2}{2}+c$,

**5.** $-\sigma\upsilon\nu(e^{x^2})+c$, **6.** $x\ln(x+1)-\ln(x+1)+c$, **7.** $x^2e^x-2xe^x+2e^x+c$ **, 8.** $\frac{(3x+2)^6}{18}+c$

**9.** $\frac{4}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+6(x+1)^{\frac{1}{2}}+c$, **10.** $x+7\ln|x+2|-12\ln|x+3|+c$,

**11.** $\frac{5}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|x+3|+c$ , **12.** $\frac{\eta\mu^6 x}{6}-\frac{\eta\mu^8 x}{8}+c$, **13.** $\frac{\eta\mu^7 x}{7}+c$,

**14.** $x^3+x^2+\ln|2x-1|+c$, **15.** $-2\sigma\upsilon\nu 2x+c$ , **16.** $\frac{1}{3}x^2\eta\mu x+\frac{2}{9}x\sigma\upsilon\nu 3x-\frac{2}{27}\eta\mu 3x+c$

**17.** $\frac{1}{13}e^{2x}(2\sigma\upsilon\nu 3x+3\eta\mu 3x)+c$, **18.** $-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+c$ **,**

**19.** $\ln|x|-\ln|x+1|+c$, **20.** $\frac{x[\eta\mu(\ln x)-\sigma\upsilon\nu(\ln x)]}{2}+c$. (ΥΠΟΔΕΙΞΗ: ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΖΩ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΩ ΜΕ $x$),

**21.** $-x^4\sigma\upsilon\nu x+4x^3\eta\mu x+12x^2\sigma\upsilon\nu x-24x\eta\mu x-24\sigma\upsilon\nu x+c$,

**22.** $\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln[(\mathrm{x}+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}]+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$,

**23.** $\ln|x|-2\ln|x-1|-\dfrac{3}{x-1}+c$, **24.** $x^2+x+\ln|x|-\ln|x-3|+2\ln|x+3|+c$ **,**

**25.** $\ln|x|-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+\arctan x+c$, **26.** $x\arctan(2x)-\dfrac{1}{4}\ln(1+4x^2)+c$,

**27.** $\ln|\ln x+3|+c$ **28.** $-2e^{-x}+e^{x}-7x+c$ **29.** $\dfrac{e^x}{x+1}+c$ (υπόδειξη: πρώτα διάσπαση κλασμάτων και μετά ολοκλήρωση κατά παράγοντες),

**30.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)+\arctan(x-1)+c$, **31.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+5)-\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x+1}{2}\right)+c$,

**32.** $x\ln^2 x-2x\ln x+2x+c$, **33.** $-6\sqrt{1-x^3}+c$, **34.** $2\sqrt{1+x}\arcsin x+2\sqrt{1-x}+c$,

**35.** $x-\ln|x|+4\ln|x-1|+c$, **36.** $\dfrac{1}{4}\ln|1-x|+\dfrac{1}{4}\ln|x+1|+\dfrac{1}{2}\arctan x+c$,

**37.** $-3\ln|x-1|-\dfrac{9}{x-1}+4\ln|x|+c$, **38.** $\dfrac{\sqrt{5}}{10}\arctan\dfrac{2x}{\sqrt{5}}+c$.

**2.** Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

**1.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-11}{x^2-2x-3}dx$, **2.** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^3+x^2-7x+3}{x^2-3x+2}dx$ , **3.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{6x+5}{3x-2}dx$ , **4.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{x+3}{x-1}dx$,

**5.** $\displaystyle\int_3^4 \frac{2x-5}{x^2-3x+2}dx$ , **6.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2-2x-3}dx$, **7.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{6}{9x^2-1}dx$, **8.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x-3}{x^2-x}dx$,

**9.** $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^2+6x+4}{x^2+2x-3}dx$, **10.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-13}{x^2-x-2}dx$, **11.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-4}dx$, **12.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2-10}{x^2+2x}dx$,

**13.** $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{-x+3}{x^2-3x+2}dx$, **14.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2-33x+92}{(x-5)^2(x-7)}dx$, **15.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$, **16.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$,

**17.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx$, **18.** $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$, **19.** $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx$, **20.** $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} x^2\sin x^3 dx$,

**21.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$, **22.** $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}dx$ **23.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\cos x}{2\sin x+5}dx$ **24.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

**25.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}dx$ **26.** $\displaystyle\int_1^3 \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$ **,** **27.** $\displaystyle\int_1^{e^5} \frac{1}{x\sqrt{4+\ln x}}dx$,

**28.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3(\sin x+1)^2\cos x dx$ **29.** $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx$ **30.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ **31.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{e^{2x}+3e^x+2}dx$

**32.** $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$ **33.** $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx$ **34.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4}$ **35.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}dx$ **36.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{(x-1)^3}dx$

**37.** $\int_{-2}^{-1} x\sqrt{x+2}dx$ **38.** $\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$ **39.** $\int_{0}^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)\ln(e^{2x}+1)}dx$ **40.** $\int_{e}^{e^2} \frac{\ln^2 x-3\ln x+2}{x\ln x}dx$

**41.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$ **42.** $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin xdx$ **43.** $\int_{0}^{2} (x^2-2x)e^x dx$ **44.** $\int_{0}^{\pi} \mathrm{e}^{2x}\cos 3xdx$

**45.** $\int_{0}^{\pi} \mathrm{x}\sin^2 xdx$ **46.** $\int_{0}^{\pi} (\mathrm{x}^2-3\mathrm{x})\sin 2xdx$ **47.** $\int_{-1}^{0} (x+1)e^x dx$ **48.** $\int_{0}^{1} xe^{2x}dx$

**49.** $\int_{-1}^{0} \frac{2x+3}{e^x}dx$ **50.** $\int_{0}^{+\infty} x^2e^x dx$, **51.** $\int_{1}^{e} \ln xdx$ **52.** $\int_{2}^{4} \mathrm{x}\ln^2 xdx$ **53.** $\int_{1}^{2} (\mathrm{x}^3-2\mathrm{x})\ln xdx$

**54.** $\int_{e^{-1}}^{1} \frac{\ln x}{x^2}dx$ **55.** $\int_{-1}^{2} \left(3x^2-2|x-1|\right)dx$ **56.** $\int_{-1}^{3} \left(2|x-2|+1\right)dx$ **57.** $\int_{-3}^{4} \left(|x+1|+|x-3|\right)dx$

**58.** $\int_{-2}^{4} \left(3|x^2-2x-3|+4\right)dx$

**ΛΥΣΕΙΣ: 1.** $\ln 18$, **2.** $\frac{7}{2}-\ln 6$, **3.** $2+6\ln 2$, **4.** $1+4\ln 2$, **5.** $\ln\frac{27}{16}$, **6.** $-\ln 3$,
**7.** $\ln\frac{10}{7}$ **, 8.** $\ln\frac{27}{16}$, **9.** $2+\ln\frac{20}{3}$, **10.** $1+7\ln 2$, **11.** $1-\ln 3$, **12.** $3-\ln\frac{128}{3}$,
**13.** $\ln\frac{8}{3}$, **14.** $\ln\frac{4}{5}+2\ln\left(\frac{6}{7}\right)-\frac{1}{20}$, **15.** $\frac{\pi}{2}-\arctan 1$, **16.** $\ln 2$, **17.** $e-1$, **18.** $\ln(\pi-1)$**,**
**19.** $\frac{e-1}{2}$, **20.** $\frac{2}{3}$, **21.** $\sqrt{17}-4$, **22.** 1, **23.** $\ln\frac{5}{7}$ **24.** $e-1$, **25.** $\sqrt{3}-1$ **26.** $\sin(\ln 3)$ **27.** 2,
**28.** 7, **29.** $\frac{1}{2}$ **, 30.** 1, **31.** $\ln\frac{4e(e+2)}{3(e+1)^2}$ **32.** 2, **33.** $\ln 2$ **34.** $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}-\arctan 1)$ **35.** $-2$
**36.** $\frac{3}{8}$ **37.** $\frac{-14}{15}$ **38.** $2+\ln\frac{3}{2}$ **39.** $\frac{1}{2}\ln\frac{\ln 10}{\ln 2}$ **40.** $-\frac{3}{2}+2\ln 2$ **41.** $\frac{\pi}{2}-1$ **, 42.** $\pi-2$,
**43.** -4, **44.** $-\frac{2(e^{2\pi}+1)}{13}$ **45.** $\frac{\pi^2}{4}$ **46.** $\frac{3\pi-\pi^2}{2}$ **47.** $\frac{1}{e}$ **48.** $\frac{e^2+1}{4}$ **49.** $3e-5$ **50.** $+\infty$,
**51.** 1 **52.** $30\ln^2 2-14\ln 2+3$ **53.** $\frac{9}{16}$ **54.** $-1$ **55.** 4 **56.** 14, **57.** 33 **58.** 70.