M. K. Gavurin, Nonlinear functional equations and continuous analogues of iteration methods, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1958, Number 5, 18–31

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1958 МАТЕМАТИКА № 5 (6)

М. К. Гаврин

НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕПРЕРЫВНЫЕ АНАЛОГИ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ

В § 1 рассматривается группа методов, в которых нахождение решения функционального уравнения осуществляется путем решения задачи Коши для некоторого абстрактного дифференциального уравнения на бесконечном промежутке. При этом попутно получаются некоторые теоремы существования.

Теоремы существования, справедливые при более слабых предположениях, приведены в § 2. Однако, используемые там доказательства не имеют конструктивного характера. В том же параграфе приведена и некая теорема единственности корня.

§ 1

1°. Пусть X и Y (вещественные или комплексные) пространства Банаха, $\varphi(x)$ — непрерывная функция из X в Y. Для простоты мы считаем $\varphi(x)$ определенной во всем пространстве X. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x)=0. \tag{1}$$

Среди итеративных методов решения этого уравнения выделим те, в которых $n+1$-е-приближение определяется по данным, относящимся к n-му приближению (без использования данных, относящихся к предыдущим приближениям).

Большинство методов такого рода может быть описано следующей схемой. Уравнение (1) заменяется на уравнение

$$\psi(x)=0, \tag{2}$$

в некотором смысле эквивалентное (1), где $\psi(x)$ — непрерывная функция из X в X. Уравнение (2) решается методом обычной итерации

$$x_{n+1}=x_n-\psi(x_n). \tag{3}$$

Эквивалентность уравнений (1) и (2) означает, что искомый корень x^* уравнения (1) является также корнем уравнения (2). При этом желательно, чтобы уравнение (2) не имело лишних корней (по крайней мере, вблизи x^*).

Итеративный метод решения уравнения (1) описывается заданием способа построения функции $\psi(x)$ по данной функции $\varphi(x)$.

Так, в методе Ньютона (см., например, [2])

$$\psi(x)=\varphi'(x)^{-1}\varphi(x).$$

Здесь $\varphi'(x)$ есть производная Фреше[1]) функции $\varphi(x)$. Существование ее предполагается. В методе наискорейшего спуска [2] X есть пространство Гильберта, $Y=X$ и

$$\psi(x)=\varepsilon(x)\varphi(x),$$

где $\varepsilon(x)$ — некоторая функция с числовыми значениями[2]).

2°. Выбор того или иного итеративного метода означает, по существу, выбор некоторой стратегии, служащей для достижения корня x^*. Для каждой точки x эта стратегия указывает поправку

$$\Delta x = -\psi(x), \tag{4}$$

что и определяет итеративный процесс (3).

Можно заметить, что во многих случаях выбор **направления** поправки (4) основан на более детальном анализе ситуации, чем выбор ее **величины**. Последний всегда связан с некоторыми экстраполяционными соображениями, неизбежно имеющими лишь ограниченную надежность. Поэтому имеет смысл противопоставить стратегиям указанного типа иные, которые мы для краткости назовем **непрерывными**. Они отличаются тем, что в каждой точке определяется лишь направление наивыгоднейшей (в смысле данной стратегии) поправки. Величина же поправки берется бесконечно малой. Это значит, если перейти к точным терминам, что вместо дискретного параметра n вводится непрерывный t (мы будем называть его временем), последовательность приближений x_n заменяется непрерывно меняющимся (во времени) приближением $x(t)$ и соотношение (4) заменяется на

$$dx(t) = -\psi(x(t))\,dt$$

или

$$x' = -\psi(x) \quad (x(0)=x_0). \tag{5}$$

Каждый итеративный метод порождает, таким образом, свой непрерывный аналог.

3°. Естественно ожидать в некоторых условиях сходимости непрерывного итеративного метода, если он является аналогом сходящегося в тех же условиях дискретного процесса. Более продуктивным может, однако, служить иной подход, основанный на том, что *если уравнение* (5) *имеет решение в промежутке* $0 \leqslant t < \infty$ *и если длина кривой* $x=x(t)$ *окажется конечной, то* $x(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ *есть корень уравнения* (2). Доказательство этого утверждения очевидно. Длина кривой $x=x(t)$ есть $\int\limits_0^\infty \|x'(t)\|\,dt$. Следовательно, конечность этого интеграла влечет равенство $\lim\limits_{t\to\infty}\|x'(t)\|=0$ или $\lim\limits_{t\to\infty}\|\psi(x(t))\|=0$. Для завершения доказательства достаточно вспомнить, что конечность длины $x(t)$ влечет существование $x(\infty)$ и что $\psi(x)$ предположена непрерывной.

Что касается теории уравнений вида (5), то основные факты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений, остаются в силе и для уравнений, в которых значения искомой функции лежат в пространстве Банаха. Для нас важна лишь теорема существования, согласно которой единственное решение уравнения (5) существует

---

1) Производная Фреше функции $\varphi(x)$ из X в Y есть такой ограниченный линейный оператор A из X в Y, что $\varphi(x+\xi)-\varphi(x)=A\cdot\xi+\rho$, где $\|\rho\|\,\|\xi\|^{-1}\to 0$ при $\xi\to 0$. Вторая производная есть производная от первой производной (см. [3]).

2) Метод наискорейшего спуска применяется, вообще говоря, к разысканию корней линейных функций $\varphi(x)=Ax-f$, где A — самосопряженный положительно-определенный ограниченный оператор.

в окрестности всякой точки t_0, если задано $x(t_0)$ и если $\psi(x)$ удовлетворяет в окрестности точки $x(t_0)$ условию Липшица (в частности, если в этой окрестности существует ограниченная по норме линейная производная Гато [1] $\psi'(x)$. (По этому поводу см., например, [8]).

4°. Остановимся теперь подробнее на непрерывном аналоге метода Ньютона. Уравнение (5) в этом случае приобретает вид

$$x' = -\varphi'(x)^{-1}\varphi(x) \quad (x(0)=x_0). \tag{6}$$

Для уравнения (6) легко находится интеграл. Умножим обе части на $\varphi'(x)$. Тогда получим

$$\frac{d}{dt}\varphi(x(t)) = -\varphi(x(t)) \quad (x(0)=x_0).$$

Решение этого уравнения очевидно

$$\varphi(x(t)) = e^{-t}\varphi(x_0). \tag{7}$$

Кривая $x=x(t)$ такова, что ее φ-образ $y=\varphi(x(t))$ есть отрезок, соединяющий точку $\varphi(x_0)$ с нулем. Процесс, описываемый уравнением (6), может не привести к цели лишь в том случае, если при каком-то t перестанет существовать обратный к линейному оператору $\varphi'(x(t))$.

Можно сформулировать следующие две теоремы о сходимости непрерывного аналога метода Ньютона, которые одновременно являются и теоремами о существовании корня.

Теорема 1. *Пусть в сфере*

$$\| x - x_0 \| < B \| \varphi(x_0) \| \tag{8}$$

существуют производная Фреше $\varphi'(x)$ и линейная производная Гато $\varphi''(x)$, причем линейный оператор $\varphi'(x)$ имеет обратный $\varphi'(x)^{-1}$, для которого выполнено неравенство

$$\| \varphi'(x)^{-1} \| \leqslant B, \tag{9}$$

а $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки из сферы (8).

Тогда 1) *уравнение* (6) *имеет решение $x=x(t)$ для значений t в промежутке $0 \leqslant t < \infty$, причем его значения лежат в сфере* (8);

2) *существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$, служащий корнем $\varphi(x)$.*

Доказательство. В силу локальной ограниченности $\varphi''(x)$, правая часть уравнения (6) имеет локально-ограниченную производную. Отсюда следует, что решение уравнения (6) существует для t достаточно малых.

Из (6) и (7) получаем

$$x' = -\varphi'(x)^{-1}\varphi(x_0)e^{-t}.$$

Отсюда следует неравенство

$$\| x(t) - x_0 \| = \left\| \int_0^t x'(\tau)\,d\tau \right\| \leqslant B \| \varphi(x_0) \| (1 - e^{-t}),$$

показывающее, что для тех t, для которых $x(t)$ определено из уравнения (6), значения $x(t)$ лежат в сфере (8). Поэтому $x(t)$ определено для всех положительных t. Применение формулы (7) завершает доказательство.

---

[1] Линейный оператор A из X в Y называется линейной производной Гато функции $\varphi(x)$ в точке x_0, если для любого $\xi \in X$

$$\varphi(x_0 + \tau\xi) - \varphi(x_0) = \tau A\xi + \rho,$$

где $\|\rho\| \, |\tau|^{-1} \to 0$ при $\tau \to 0$ (τ вещественное) (см. [3]). Производная Фреше тем более является производной Гато.

Замечание 1. Теорема может быть несколько усилена за счет того, что при ее доказательстве оператор $\varphi'(x)^{-1}$ применяется лишь к одному элементу $\varphi(x_0)$. Именно, можно потребовать, чтобы в сфере

$$\| x - x_0 \| < C \tag{8'}$$

соблюдалось неравенство

$$\| \varphi'(x)^{-1} \varphi(x_0) \| \leqslant C.$$

Тогда $x(\infty)$ будет лежать в замыкании сферы (8').

В такой форме оценка $\| x^* - x_0 \| \leqslant C$ становится точной для всякой линейной функции.

Замечание 2. Уравнение (6) может быть использовано также для доказательства теоремы существования решения, установленной Л. В. Канторовичем [2] при помощи метода Ньютона. При этом доказательство получается несколько более коротким, чем у Л. В Канторовича.

Теорема 1 имеет локальный характер, т. е. устанавливает существование решения при наличии достаточно хорошего к нему приближения. Непрерывный аналог метода Ньютона позволяет иногда установить существование корня и без наличия хорошего приближения.

Теорема 2. *Пусть G — некоторая область в X, а x_0 — точка в G и пусть в G существуют производная Фреше $\varphi'(x)$ и линейная производная Гато $\varphi''(x)$, причем линейный оператор $\varphi'(x)$ имеет обратный $\varphi'(x)^{-1}$, ограниченный в G, а $\varphi''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки из G. Пусть, наконец, существует функционал $f_0(y)$, определенный в Y и такой, что*

а) $f_0(ty) = tf_0(y)$ *для* $t > 0$,

б) $f_0(\varphi(x)) \geqslant f_0(\varphi(x_0)) > 0$ *для всех x на границе G.*

Тогда 1) *уравнение* (6) *имеет решение $x = x(t)$ для значений t в промежутке $0 \leqslant t < \infty$, причем его значения лежат в G;*

2) *существует предел $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = x^*$, служащий корнем $\varphi(x)$.*

Доказательство. Решение уравнения (6) существует, по крайней мере, для малых t. При этом $\varphi(x(t)) = e^{-t}\varphi(x_0)$. Отсюда следует, что $f_0(\varphi(x(t))) = e^{-t} f_0(\varphi(x_0))$ и, следовательно, кривая $x = x(t)$ не может при $t > 0$ пересечь границу G и потому лежит вся внутри G. В свою очередь, это влечет существование $x(t)$ для всех положительных t. Завершается доказательство так же, как в теореме 1.

Замечание 1. Условию а) удовлетворяют, например, $f_0(y) = fy$, где f — линейный функционал в Y, а также $f_0(y) = \| y \|$.

Замечание 2. Условие б) может быть заменено на следующее: $f_0(\varphi(x)) \leqslant 0 < f_0(\varphi(x_0))$ для всех x на границе G.

5°. Пусть теперь $X = Y$ есть гильбертово пространство и пусть имеется некоторый функционал $F(x)$, определенный в X и достигающий минимума в корне функции $\varphi(x)$. Тогда естественно определять $x(t)$ из условия возможно более быстрого убывания $F(x)$.

Будем для определенности рассматривать функционал

$$F(x) = (\varphi(x),\ \varphi(x)).$$

Тогда при $x = x(t)$ будет

$$\frac{d}{dt} F(x) = 2(\varphi'(x)x',\ \varphi(x)) = 2(x',\ \varphi'(x)^* \varphi(x)).$$

Ясно, что направление наибыстрейшего убывания $F(x(t))$ задается вектором $-\varphi'(x)^*\varphi(x)$. Мы приходим, таким образом, к дифференциальному уравнению

$$x' = -\varphi'(x)^*\varphi(x) \quad (x(0)=x_0). \tag{10}$$

Метод определения корня как предельной точки кривой $x=x(t)$, определяемой уравнением (10), давно известен (см., например, [7]) и носит название градиентного. Соответствующий дискретный метод применяется в различных вариантах преимущественно для решения линейных уравнений (см., например, [2]).

Сходимость процесса (10) доказывается при более жестких условиях, чем для непрерывного аналога метода Ньютона.

Теорема 3. *Пусть в сфере*

$$\|x-x_0\| < MB^2\|\varphi(x_0)\| \tag{11}$$

существуют производная Фреше** $\varphi'(x)$ **и линейная производная Гато** $\varphi''(x)$, **причем линейный оператор** $\varphi'(x)$ **имеет обратный** $\varphi'(x)^{-1}$, **и справедливы неравенства

$$\|\varphi'(x)\| \leqslant M,$$
$$\|\varphi'(x)^{-1}\| \leqslant B,$$

***а** $\varphi''(x)$ **ограничена в окрестности каждой точки в сфере** (11).*

Тогда 1) ***уравнение** (10) **имеет решение** $x=x(t)$ **для значений** t **в промежутке** $0 \leqslant t < \infty$, **причем его значения лежат в** сфере (11);*

2) ***существует предел** $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x^*$, **служащий корнем** $\varphi(x)$.*

Доказательство. Решение уравнений (10) существует, по крайней мере, для t достаточно малых. Для тех t, для которых $x(t)$ определена, имеем

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = 2(\varphi'(x)x', \varphi(x)) = -2\|\varphi'(x)^*\varphi(x)\|^2.$$

Далее

$$\|\varphi(x)\| \leqslant \|[\varphi'(x)^*]^{-1}\|\,\|\varphi'(x)^*\varphi(x)\| = \|\varphi'(x)^{-1}\|\,\|\varphi'(x)^*\varphi(x)\| \leqslant$$
$$\leqslant B\|\varphi'(x)^*\varphi(x)\|;$$

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) \leqslant -\frac{2}{B^2}\|\varphi(x)\|^2 = -\frac{2}{B^2}F(x(t)).$$

Решая это дифференциальное неравенство, находим

$$F(x(t)) \leqslant F(x_0)e^{-\frac{2t}{B^2}}$$

или

$$\|\varphi(x(t))\| \leqslant \|\varphi(x_0)\|e^{-\frac{t}{B^2}}.$$

Используя дифференциальное уравнение (10), получаем

$$\|x'\| \leqslant M\|\varphi(x_0)\|e^{-\frac{t}{B^2}}.$$

Из этого неравенства непосредственно следует, что кривая $x=x(t)$ определена для всех $t>0$, лежит в сфере (11) и имеет конечную длину. Этим теорема доказана.

Имеет также место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть, сверх того,* $\varphi'(x)$ *ограничена в* G.

Тогда 1) *уравнение* (10) *имеет решение* $x=x(t)$ *для значений* t *в промежутке* $0 \leqslant t < \infty$, *причем его значения лежат в* G;

2) *существует* $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = x^*$, *служащий корнем* $\varphi(x)$.

Доказательство этой теоремы, содержащее дополнительное условие ограниченности $\varphi'(x)$ по сравнению с теоремой 2, совпадает почти полностью с доказательством последней.

6°. Пусть X есть комплексное гильбертово пространство. Попробуем выяснить, какая структура $\varphi(x)$ может гарантировать сходимость решения дифференциального уравнения (5) к корню $\psi(x)$. При этом естественно ограничиться локальным рассмотрением, т. е. предполагать, что начальное приближение x_0 уже близко к x^*. Так как в малом всякая гладкая функция линейна, то надлежит сначала рассмотреть интересующий нас вопрос для линейной функции.

Итак, пусть нам дано уравнение

$$Ax - f = 0,$$

где A — ограниченный линейный оператор из X в X, для которого предполагается существование обратного A^{-1}. Составляем дифференциальное уравнение

$$x' = -(Ax - f), \quad (x(0) = x_0). \tag{12}$$

Его решение, как хорошо известно, есть

$$x(t) = x^* + e^{-At}(x_0 - x^*), \tag{13}$$

где

$$x^* = A^{-1} f, \quad e^{-At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} A^k t^k.$$

Легко устанавливается равенство

$$(e^{-At})' = -Ae^{-At},$$

с помощью которого проверяется, что функция (13) удовлетворяет уравнению (12).

Воспользуемся соотношением (см. [6], стр. 460)

$$e^{-At} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{-zt} R_z \, dz, \tag{14}$$

где $R_z = (A - zE)^{-1}$ — резольвента оператора A, а Γ — окружность на плоскости комплексной переменной z, внутри которой содержится спектр A. Соотношение (14) позволяет снова получить равенство

$$(e^{-At})' = -Ae^{-At},$$

а также установить, что оператор e^{-At} имеет при $t \to \infty$ пределом 0, если спектр A лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant m > 0$. Если же спектр A имеет точки в полуплоскости $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ при $z \neq 0$, то e^{-At} не стремится к нулю.

Таким образом (и это также хорошо известно), для сходимости процесса, описываемого линейным уравнением (12), достаточно, чтобы спектр A располагался в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant m > 0$, причем это условие близко к необходимому.

Естественно ожидать наличия асимптотической устойчивости по первому приближению, т. е. того, что эти условия будут достаточными и для сходимости в нелинейном случае, если A есть $\psi'(x^*)$ и x_0 взято достаточно близким к x^*.

Мы, однако, можем доказать лишь более слабое утверждение.

Теорема 5. *Пусть*

1) x^* *есть корень* $\psi(x)$;

2) в X *существует локально ограниченная производная Фреше* $\psi'(x)$;

3) *если* $A=\psi'(x^*)$, *то значения квадратичной формы*

$$G(x)=\frac{(Ax,\ x)}{(x,\ x)} \qquad (x \in X)$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant m > 0$.

Тогда функция $x=x(t)$, *определенная из уравнения* (5), *имеет при* $t \to \infty$ *пределом* x^*, *если только* x_0 *достаточно близко к* x^*.

Доказательство. Представим $\psi(x)$ в виде

$$\psi(x)=A(x-x^*)+\rho(x) \tag{15}$$

и обозначим

$$\alpha(\tau)=\sup_{\|x-x^*\| \leqslant \tau} \|\rho(x)\|,$$

$\alpha(\tau)$ монотонно возрастает и, согласно определению производной Фреше, $\frac{1}{\tau}\alpha(\tau) \to 0$ при $\tau \to 0$.

Составим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$y'=-A(y-x^*),\quad y(0)=x_0.$$

Его решение дается формулой (13)

$$y(t)=x^*+e^{-At}(x_0-x^*).$$

Положим теперь в уравнении (5)

$$x(t)=y(t)+\xi(t).$$

Для ξ получается дифференциальное уравнение

$$\xi'=-A\xi-\rho(y+\xi), \qquad \xi(0)=0.$$

Умножим обе части этого уравнения слева и справа скалярно на ξ и, учитывая, что

$$\frac{1}{2}[(\xi,\ \xi)+(\xi,\ \xi')]=\|\xi\|\ \|\xi\|',$$

получим

$$\|\xi\|\ \|\xi\|'=-\operatorname{Re}(A\xi,\ \xi)-\operatorname{Re}(\rho(y+\xi),\ \xi) \leqslant -m\|\xi\|^2+|(\rho(y+\xi),\ \xi)|$$

или

$$\|\xi\|' \leqslant -m\|\xi\|+\|\rho(y+\xi)\| \leqslant -m\|\xi\|+\alpha(\|y-x^*\|+\|\xi\|).$$

Для оценки $\|y-x^*\|$ воспользуемся формулой (14), взяв в качестве Γ круг достаточно большого радиуса r, лежащий в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant \frac{m}{2}$. Тогда

$$\|y(t)-x^*\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_\Gamma e^{-zt}R_z(x_0-x^*)\,dz\right\| \leqslant$$

$$\leqslant r\max_{z\in\Gamma}\|R_z\|\|x_0-x^*\|e^{-\frac{m}{2}t}=c_0\|x-x^*\|e^{-\frac{m}{2}t}.$$

Таким образом, $\sigma=\|\xi\|$ удовлетворяет следующему дифференциальному неравенству

$$\sigma' \leqslant -m\sigma + \alpha\left(c_0\|x_0-x^*\|e^{-\frac{m}{2}t}+\sigma\right). \tag{16}$$

Пусть $\|x_0-x^*\|$ столь мала, что для $0<c\leqslant c_0$ верно неравенство

$$\frac{\alpha(2c\|x_0-x^*\|)}{2c\|x_0-x^*\|}<\frac{m}{2}. \tag{17}$$

Утверждаем, что для всех $t\geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\sigma(t)<c_0\|x_0-x^*\|. \tag{18}$$

Во всяком случае (18) справедливо для t близких к нулю, так как $\sigma(0)=0$. Рассуждая от противного, допустим, что неравенство (18) нарушается впервые при $t=T$. Тогда должно быть $\sigma'(T)\geqslant 0$. С другой стороны, (16) дает

$$\sigma'(T)\leqslant -mc_0\|x_0-x^*\|+\alpha\left(c_0\|x_0-x^*\|\left(e^{-\frac{m}{2}T}+1\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant -mc_0\|x_0-x^*\|+\alpha(2c_0\|x_0-x^*\|)<0.$$

Полученное противоречие доказывает неравенство (18).

Так как при условии (18) можно написать

$$c_0\|x_0-x^*\|e^{-\frac{m}{2}t}+\sigma=2c\|x_0-x^*\|, \qquad 0<c<c_0,$$

то из (17) мы получаем

$$\alpha\left(c_0\|x_0-x^*\|e^{-\frac{m}{2}t}+\sigma\right)<\frac{m}{2}c_0\|x_0-x^*\|e^{-\frac{m}{2}t}+\frac{m}{2}\sigma,$$

так что из (16) следует

$$\sigma'\leqslant -\frac{m}{2}\sigma+\frac{m}{2}c_0\|x_0-x^*\|e^{-\frac{m}{2}t}.$$

Поэтому

$$\sigma(t)\leqslant \frac{m}{2}c_0\|x_0-x^*\|te^{-\frac{m}{2}t}.$$

Таким образом,

$$\|\xi\|\xrightarrow[t\to\infty]{}0,$$

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}y(t)=x^*.$$

Теорема доказана.

7°. Теорема 5 носит локальный характер и предполагает, что X есть комплексное пространство Гильберта. Однако, в этих пределах она является весьма общей и из нее следует ряд предложений о сходимости различных непрерывных итеративных методов.

Для метода Ньютона

$$\psi(x)=\varphi'(x)^{-1}\varphi(x),$$

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\left[\varphi'(x)^{-1}\right]\varphi(x)+\varphi'(x)^{-1}\varphi'(x),$$

$$\psi'(x^*)=E.$$

Для градиентного метода

$$\psi(x)=\varphi'(x)^*\varphi(x),$$

$$\psi'(x)=\frac{d}{dx}\left[\varphi'(x)^*\right]\varphi(x)+\varphi'(x)^*\varphi'(x),$$

$$\psi'(x^*)=\varphi'(x^*)^*\varphi'(x^*).$$

Если O не является точкой спектра $\varphi'(x^*)$, то $\varphi'(x^*)^* \varphi'(x^*)$ является положительно определенным оператором, и условия теоремы 5 соблюдены.

Пусть, наконец, мы имеем дело с некоторым непрерывным итеративным методом, сходимость дискретного аналога которого устанавливается с помощью теоремы о сжатых отображениях. Это равносильно тому, что при $A = \psi'(x^*)$ (существование этой производной предполагается) будет

$$\|E - A\| = q < 1.$$

Тогда

$$G(x) = \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = 1 - \frac{((E - A)x, x)}{(x, x)},$$

$$\operatorname{Re} G(x) \geqslant 1 - q > 0.$$

Следовательно, применима теорема 5, и рассматриваемый непрерывный метод сходится.

8°. С точки зрения вычислительной интегрирование уравнения (5) предполагает применение какой-нибудь формулы численного интегрирования. Таким образом, мы вновь возвращаемся к дискретным итеративным методам. Однако, мы можем при этом использовать богато развитый аппарат численного интегрирования дифференциальных уравнений. Вопрос о выборе подходящих разностных формул требует дополнительного исследования. Поскольку предполагается асимптотическая устойчивость решения уравнения (5), то следует ожидать численной устойчивости разностных методов.

Заменой переменной можно привести уравнение (5) к виду

$$x' = -\frac{1}{\alpha(t)}\psi(x) \qquad (x(0) = x_0),$$

где $\alpha(t) > 0$ при $0 \leqslant t < 1$ и

$$\int_0^1 \frac{dt}{\alpha(t)} = \infty.$$

Тогда

$$x^* = \lim_{t \to 1} x(t).$$

Метод дифференцирования по параметру (см. [1]), в котором также решение уравнения $\varphi(x) = 0$ сводится к интегрированию некоторого дифференциального уравнения, не принадлежит к числу рассмотренных в данной статье. Он обладает тем преимуществом, что дифференциальное уравнение получается не особенным, но зато нет и асимптотической устойчивости.

§ 2

9°. Теоремы 1—4 являются по существу также и теоремами существования. С этой точки зрения теоремы 1 и 2, полученные применением непрерывного аналога метода Ньютона, являются более удовлетворительными, чем теоремы 3—4. Во-первых, они относятся к произвольным пространствам Банаха. Во-вторых, они формулируются при меньших предположениях о функции $\varphi(x)$. Именно, не требуется ограниченности $\|\varphi''(x)\|$. В третьих, что менее существенно, радиус сферы (8), вообще говоря, меньше радиуса сферы (11).

Однако, и в теоремах 1 и 2 содержатся требования, связанные лишь с применяемым методом, но не с существом задачи. Действительно, существование и локальная ограниченность φ'' служат лишь для того, чтобы установить существование решения дифференциального уравнения.

Желая установить теоремы существования корня в минимальных предположениях о гладкости $\varphi(x)$, мы будем пользоваться методом, близким непрерывному аналогу метода Ньютона. По существу, мы будем строить приближенные решения уравнения (6) (в условиях, при которых установить существование точного решения не удается) методом ломаных Эйлера. При этом приходится брать длину каждого звена малой. В результате простая последовательность звеньев может не привести к цели, и в доказательстве приходится прибегать к трансфинитной индукции (см. [5]).

Существенным является то, что производную, существование которой предполагается, можно понимать как линейную производную Гато.

10° Лемма 1. *Пусть α — порядковое число первого или второго числового класса и $\{t_\gamma\}_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}$ — вполне упорядоченная по возрастанию последовательность вещественных чисел, причем для чисел β второго рода*

$$t_\beta = \lim_{\gamma\nearrow\beta} t_\gamma .$$

Тогда имеет место равенство

$$t_\alpha = t_0 + \sum_{0\leqslant\gamma<\alpha} (t_{\gamma+1} - t_\gamma).$$

Лемма 2. *Пусть α — порядковое число первого или второго числового класса и $\{x_\gamma\}_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}$ — вполне упорядоченная последовательность элементов X, причем для чисел β второго рода*

$$x_\beta = \lim_{\gamma\nearrow\beta} x_\gamma .$$

Тогда

$$\| x_\alpha - x_0 \| \leqslant \sum_{0\leqslant\gamma<\alpha} \| x_{\gamma+1} - x_\gamma \| .$$

В этих леммах определение сумм не вызывает трудностей, так как слагаемые неотрицательны и количество их счетно. Доказательства легко осуществляются индукцией по α.

Теорема 6. *Пусть в сфере*

$$\| x - x_0 \| \leqslant \frac{B}{1-2\varepsilon} \| \varphi(x_0) \| \quad \left(0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\right) \tag{19}$$

существует линейная производная Гато $\varphi'(x)$, причем линейный оператор $\varphi'(x)$ имеет обратный $\varphi'(x)^{-1}$, для которого выполнено неравенство

$$\| \varphi'(x)^{-1} \| \leqslant B. \tag{20}$$

Тогда уравнение (1) *имеет корень в сфере* $\| x - x_0 \| \leqslant B \| \varphi(x_0) \|$.

Доказательство. Строим вполне упорядоченные последовательности чисел t_α и элементов $x_\alpha \in X$ по следующим правилам:

$t_0 = 0$, x_0 задано.

Пусть уже построены t_γ и x_γ для $\gamma < \alpha$, причем соблюдены неравенства

$$\| \varphi(x_\gamma) \| \leqslant e^{-(1-\varepsilon)t_\gamma} \| \varphi(x_0) \| \tag{21_γ}$$

и для чисел первого рода $\gamma+1$

$$0 < t_{\gamma+1} - t_\gamma < \frac{1}{1-\varepsilon} \ln \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}, \tag{$22_{\gamma+1}$}$$

$$\| x_{\gamma+1} - x_\gamma \| < B \| \varphi(x_0) \| e^{-(1-\varepsilon)t_\gamma} (t_{\gamma+1} - t_\gamma), \tag{$23_{\gamma+1}$}$$

а для чисел γ второго рода

$$t_\gamma = \lim_{\beta\nearrow\gamma} t_\beta, \quad x_\gamma = \lim_{\beta\nearrow\gamma} x_\beta . \tag{24_γ}$$

Из (23) с применением (22), (24) и лемм 2 и 1 получаем для произвольного $\gamma_0 < \gamma$

$$\| x_\gamma - x_{\gamma_0} \| \leqslant \sum_{\gamma_0 \leqslant \beta < \gamma} \| x_{\beta+1} - x_\beta \| < B \| \varphi(x_0) \| \sum_{\gamma_0 \leqslant \beta < \gamma} e^{-(1-\varepsilon) t_\beta} (t_{\beta+1} - t_\beta) =$$

$$= B \| \varphi(x_0) \| \sum_{\gamma_0 \leqslant \beta < \gamma} e^{(1-\varepsilon)(t_{\beta+1} - t_\beta)} e^{-(1-\varepsilon) t_{\beta+1}} (t_{\beta+1} - t_\beta) <$$

$$< \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} B \| \varphi(x_0) \| \sum_{\gamma_0 \leqslant \beta < \gamma} e^{-(1-\varepsilon) t_{\beta+1}} (t_{\beta+1} - t_\beta) <$$

$$< \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} B \| \varphi(x_0) \| \sum_{\gamma_0 \leqslant \beta < \gamma} \int_{t_\beta}^{t_{\beta+1}} e^{-(1-\varepsilon)\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} B \| \varphi(x_0) \| \int_{t_{\gamma_0}}^{t_\gamma} e^{-(1-\varepsilon)\tau} d\tau. \tag{25}$$

В частности,

$$\| x_\gamma - x_0 \| < \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} B \| \varphi(x_0) \| \int_0^\infty e^{-(1-\varepsilon)\tau} d\tau = \frac{B \| \varphi(x_0) \|}{1-2\varepsilon}.$$

Все точки x_γ оказываются лежащими внутри сферы (19).

Построение x_α зависит от того, существует ли $x_{\alpha-1}$.

Пусть сначала $x_{\alpha-1}$ существует. Если $\varphi(x_{\alpha-1}) = 0$, то утверждение теоремы справедливо. Поэтому допустим, что $\varphi(x_{\alpha-1}) \neq 0$. Положим

$$\xi_\alpha = -\varphi'(x_{\alpha-1})^{-1} \varphi(x_{\alpha-1})$$

и напишем

$$\varphi(x_{\alpha-1} + \tau\xi_\alpha) = \varphi(x_{\alpha-1}) + \tau\varphi'(x_{\alpha-1})\xi_\alpha + \rho_\alpha(\tau, \xi_\alpha).$$

Найдем δ_α столь малое, что если $0 < \tau < \delta_\alpha$, то

$$\frac{1}{\tau} \| \rho_\alpha(\tau, \xi_\alpha) \| < \varepsilon \| \varphi(x_{\alpha-1}) \|.$$

После этого выбираем τ_α под условиями

$$\tau_\alpha < \delta_\alpha; \quad \tau_\alpha < \frac{1}{1-\varepsilon} \ln \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}$$

и полагаем

$$t_\alpha = t_{\alpha-1} + \tau_\alpha; \quad x_\alpha = x_{\alpha-1} + \tau_\alpha \xi_\alpha.$$

Имеем

$$\varphi'(x_{\alpha-1})\xi_\alpha = -\varphi(x_{\alpha-1}).$$

Следовательно,

$$\varphi(x_\alpha) = \varphi(x_{\alpha-1}) + \tau_\alpha\varphi'(x_{\alpha-1})\xi_\alpha + \rho_\alpha(\tau_\alpha, \xi_\alpha) = (1-\tau_\alpha)\varphi(x_{\alpha-1}) + \rho_\alpha(\tau_\alpha, \xi_\alpha).$$

Ввиду выбора τ_α

$$\| \varphi(x_\alpha) \| \leqslant (1-\tau_\alpha) \| \varphi(x_{\alpha-1}) \| + \varepsilon\tau_\alpha \| \varphi(x_{\alpha-1}) \| = (1-(1-\varepsilon)\tau_\alpha) \| \varphi(x_{\alpha-1}) \| <$$
$$< e^{-(1-\varepsilon)\tau_\alpha} \| \varphi(x_{\alpha-1}) \|$$

и по индуктивному предположению $(21_{\alpha-1})$

$$\| \varphi(x_\alpha) \| < e^{-(1-\varepsilon) t_\alpha} \| \varphi(x_0) \|. \tag{21_α}$$

Далее получаем, используя (20) и $(21_{\alpha-1})$,

$$\| x_\alpha - x_{\alpha-1} \| = \tau_\alpha \| \xi_\alpha \| \leqslant \tau_\alpha \| \varphi'(x_{\alpha-1})^{-1} \| \| \varphi(x_{\alpha-1}) \| \leqslant$$
$$\leqslant (t_\alpha - t_{\alpha-1}) B e^{-(1-\varepsilon) t_{\alpha-1}} \| \varphi(x_0) \|. \tag{23_α}$$

Таким образом построены t_α и x_α, причем соблюдены условия (21_α), (22_α), ($2_\alpha 3$).

Пусть теперь $x_{\alpha-1}$ не существует, т. е. α есть число второго рода. Положим

$$t_\alpha = \lim_{\gamma \nearrow \alpha} t_\gamma .$$

Построим последовательность порядковых чисел γ_n, которые, возрастая, стремятся к α. Из неравенства (25) следует, что

$$\| x_{\gamma_{n+1}} - x_{\gamma_n} \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0,$$

так что последовательность x_γ имеет предел, который мы обозначим x_α. Предельный переход в (21_{γ_n}) дает (21_α). Равенства (24_α) также верны.

Описанный итеративный процесс оборвется, когда для некоторого числа α второго рода окажется $t_\alpha = \infty$. В этом случае неравенство (21_α) означает, что x_α есть корень функции φ. Теорема доказана.

В статье А. Островского [9] аналогичная теорема доказана (методом, примыкающим к методу дифференцирования по параметру [1]) для конечномерного случая при дополнительном предположении непрерывности $\varphi'(x)$.

Теорема 7. *Пусть G — некоторая область в X, а x_0 — точка G, и пусть в G существует линейная производная Гато $\varphi'(x)$, причем линейный оператор $\varphi'(x)$ имеет обратный $\varphi'(x)^{-1}$, ограниченный в G. Пусть, далее, в Y определен функционал $f_0(y)$, обладающий свойствами:*

а) $f_0(ty) = tf_0(y)$ *для* $t > 0$,

б) $|f_0(y') - f_0(y'')| \leqslant N \| y' - y'' \|$ *для* $y', y'' \in \varphi(G)$,

в) $f_0(\varphi(x)) \geqslant f_0(\varphi(x_0)) > 0$ *для всех x на границе G.*

Тогда уравнение (1) *имеет корень в замыкании G.*

Доказательство получается некоторым дополнением доказательства теоремы 6. Осуществим построение вполне упорядоченных последовательностей $\{t_\alpha\}$ и $\{x_\alpha\}$, которое мы проводили при доказательстве теоремы 6, взяв в качестве ε любое положительное число, меньшее $\frac{1}{2}$. Нам достаточно установить следующий факт: вполне упорядоченная последовательность $\{x_\alpha\}$ может быть построена так, что все элементы x_α лежат внутри G. Этот факт доказывается индукцией по α.

Допустим, что для всех $\gamma < \alpha$ x_γ уже определены, причем справедливы (21_γ), ($22_{\gamma+1}$), ($23_{\gamma+1}$) и для чисел γ второго рода (24_γ). Пусть, сверх того, справедливы неравенства

$$f_0[\varphi(x_{\gamma'})] > f_0[\varphi(x_{\gamma''})] \quad \text{при} \quad \gamma' < \gamma'', \tag{26}$$

$$e^{-3t_\gamma} f_0[\varphi(x_0)] \leqslant f_0[\varphi(x_\gamma)] \tag{27_γ}$$

и для чисел первого рода $\gamma + 1$

$$f_0[\varphi(x_\gamma + \tau(x_{\gamma+1} - x_\gamma))] < f_0[\varphi(x_\gamma)] \quad (0 < \tau < 1). \tag{$28_{\gamma+1}$}$$

Построим функцию $x(t)$, полагая $x(t_\gamma) = x_\gamma$ $(0 \leqslant \gamma < \alpha)$ и считая $x(t)$ линейной в промежутках $(t_\gamma, t_{\gamma+1})$. Равенства (24) гарантируют, что область, определенная $x(t)$, есть промежуток и что $x(t)$ непрерывна. Из неравенства (26) и (28) следует, что кривая $x = x(t)$ нигде не пересекает границ G, так что $x_\gamma \in G$ $(0 \leqslant \gamma < \alpha)$.

Рассмотрим случай, когда существует $\alpha - 1$. Число δ_α, фигурирующее в доказательстве теоремы 6, подчиним дополнительному условию: если $0 < \tau < \delta_\alpha$, то

$$\frac{\| \rho_\alpha(\tau, \xi_\alpha) \|}{\tau} \leqslant \frac{\varepsilon}{N} f_0[\varphi(x_{\alpha-1})].$$

Это условие осуществимо, так как, в силу ($27_{\alpha-1}$),

$$f_0[\varphi(x_{\alpha-1})] > 0.$$

Выбираем

$$\tau_\alpha < \min\left[\delta_\alpha, \frac{1}{1-\varepsilon}\ln\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}, \mu, \frac{1}{2}\right],$$

где μ—положительное число такое, что если $0<\tau<\mu$, то

$$1-2\tau > e^{-3\tau}.$$

Тогда, дополнительно к соотношениям, установленным при доказательстве теоремы (6), будем иметь для $0<\tau\leqslant\tau_\alpha$

$$f_0[\varphi(x_{\alpha-1}+\tau\xi_\alpha)] = f_0[(1-\tau)\varphi(x_{\alpha-1})+\rho_\alpha(\tau, \xi_\alpha)] =$$

$$=(1-\tau)f_0\left[\varphi(x_{\alpha-1})+\frac{\rho_\alpha(\tau, \xi_\alpha)}{1-\tau}\right]=(1-\tau)f_0[\varphi(x_{\alpha-1})]+\sigma,$$

где

$$|\sigma|=(1-\tau)\left|f_0\left[\varphi(x_{\alpha-1})+\frac{\rho_\alpha(\tau, \xi_\alpha)}{1-\tau}\right]-f_0[\varphi(x_{\alpha-1})]\right|\leqslant$$

$$\leqslant(1-\tau)N\left\|\frac{\rho_\alpha(\tau, \xi_\alpha)}{1-\tau}\right\|\leqslant\tau\varepsilon f_0[\varphi(x_{\alpha-1})].$$

Следовательно,

$$f_0[\varphi(x_{\alpha-1}+\tau\xi_\alpha)]\leqslant f_0[\varphi(x_{\alpha-1})](1-\tau+\tau\varepsilon)<f_0[\varphi(x_{\alpha-1})].$$

Таким образом, установлены неравенство (26) для случая $\gamma''=\alpha$ и неравенство (28_α).

С другой стороны,

$$f_0[\varphi(x_{\alpha-1}+\tau_\alpha\xi_\alpha)]\geqslant f_0[\varphi(x_{\alpha-1})](1-\tau_\alpha-\tau_\alpha\varepsilon)>$$

$$>(1-2\tau_\alpha)f_0[\varphi(x_{\alpha-1})]>e^{-3\tau_\alpha}e^{-3t_{\alpha-1}}f_0[\varphi(x_0)]=e^{-3t_\alpha}f_0[\varphi(x_0)],$$

чем доказано и неравенство (27_α).

В случае, когда $\alpha-1$ не существует и α есть предел возрастающей последовательности γ_n, по индуктивному предположению числа $f_0[\varphi(x_{\gamma_n})]$ образуют строго убывающую последовательность и потому $f_0[\varphi(x_\alpha)]=\lim\limits_{n\to\infty}f_0[\varphi(x_{\gamma_n})]$ строго меньше $f_0[\varphi(x_{\gamma_n})]$. Отсюда легко выводится, что (26) верно и при $\gamma''=\alpha$. Предельным переходом получается и неравенство (27_α).

Мы доказали возможность так проводить построение вполне упорядоченных последовательностей $\{t_\alpha\}$ и $\{x_\alpha\}$, что будут соблюдены (26)—(28), а это, как уже упоминалось, доказывает включение $x_\alpha\in G$ и, вместе с тем, утверждение теоремы.

11° Мы пользуемся случаем, чтобы привести следующую теорему единственности.

Теорема 8. *Пусть G — выпуклое множество в X и пусть в G существует линейная производная Гато $\varphi'(x)$, причем линейный оператор $\varphi'(x)$ имеет обратный $\varphi'(x)^{-1}$. Предположим, что для $x\in G$ соблюдены неравенства*

$$\|\varphi'(x)^{-1}\|\leqslant B,$$

$$\|\varphi''(x)\|\leqslant K,$$

$$\operatorname{diam} G<\frac{4}{BK}. \quad (29)$$

Тогда уравнение (1) имеет в G не более одного корня.

Доказательство осуществляется от противного. Пусть $x_1, x_2 \in G$, $x_1 \neq x_2$; $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Имеем

$$0 = \varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(x_3)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} [\varphi'(x) - \varphi'(x_3)]\,dx.$$

Здесь $x_3 = \frac{1}{2}[x_1 + x_2]$ — середина отрезка $[x_1, x_2]$. Имеет место оценка

$$\|\varphi'(x) - \varphi'(x_3)\| \leqslant K\|x - x_3\|,$$

так что

$$\left\| \int_{x_1}^{x_2} [\varphi'(x) - \varphi'(x_3)]\,dx \right\| = \left\| \int_{-1}^{1} \left[\varphi'\left(x_3 + \tau\frac{x_2 - x_1}{2}\right) - \varphi'(x_3)\right] \frac{x_2 - x_1}{2}\,d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant K\frac{\|x_2 - x_1\|^2}{4} \int_{-1}^{1} |\tau|\,d\tau = K\frac{\|x_2 - x_1\|^2}{4}.$$

С другой стороны,

$$\left\| \int_{x_1}^{x_2} \varphi'(x_3)\,dx \right\| = \|\varphi'(x_3)(x_2 - x_1)\| \geqslant \frac{1}{\|\varphi'(x_3)^{-1}\|}\|x_2 - x_1\| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{B}\|x_2 - x_1\|.$$

Следовательно, мы имеем неравенство

$$0 \geqslant \frac{1}{B}\|x_2 - x_1\| - \frac{K}{4}\|x_2 - x_1\|^2 = \frac{1}{B}\|x_2 - x_1\|\left[1 - \frac{BK}{4}\|x_2 - x_1\|\right],$$

что противоречит условию (29).

Теорема доказана.

Замечание. В статье И. П. Мысовских [4] формулируются более слабые утверждения (теоремы 1 и 2). Там предполагается, что G есть сфера с центром в точке x_0 и налагаются ограничения на $\|\varphi(x_0)\|$; $\varphi'(x)$ предполагается производной Фреше.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Ф. Давиденко. ДАН 88, 4, стр. 601—604, 1953. Укр. матем. журн. 5, 2, стр. 196—206, 1953.
2. Л. В. Канторович. Усп. мат. наук 3, 6, стр. 89—195, 1948.
3. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. ГИТТЛ, М., 1951.
4. И. П. Мысовских. Вестник ЛГУ, сер. матем., физ. и хим. 11, стр. 25—48, 1953.
5. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. ГИТТЛ, М., 1957.
6. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. ИЛ, М., 1954.
7. R. Courant. Bull. Amer. Math. Soc. 41, 1, 1943.
8. A. Michal, V. Elconin. Acta Math. 68, 1—2, pp. 72—107, 1937.
9. A. M. Ostrowski. Nat. Bur. of Stand. Appl. Math., Ser. 29, pp. 29—34, 1953.