Доклады Академии Наук СССР
1953. Том LXXXVIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Д. Ф. ДАВИДЕНКО

ОБ ОДНОМ НОВОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 1 XII 1952)

В настоящей статье мы предлагаем метод приближенного решения систем нелинейных уравнений, основанный на приведении этих систем к системам обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и численном интегрировании последних.

Пусть дана система n уравнений с n неизвестными

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где λ — параметр, принимающий заданные значения на конечном интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$.

Предположим, что при некотором заданном значении параметра λ, скажем, $\lambda = \lambda_0$, решение системы (1) нам известно:

$$x_1 = x_1^{(0)}, \; x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}. \tag{2}$$

Предположим также, что: 1) все функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ определены и непрерывны в некоторой $(n+1)$-мерной области G изменения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$, содержащей точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda)$; 2) существуют и непрерывны в G частные производные от этих функций по всем аргументам; 3) функциональный определитель $J = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ в точке $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_0)$ отличен от нуля.

Требуется найти приближенные решения системы (1) для заданных значений параметра $\lambda > \lambda_0$.

Для нахождения указанных решений поступаем следующим образом. Принимая параметр λ за независимую переменную и считая $x_1, x_2, \ldots, x_n$ функциями от λ, дифференцируем уравнения (1) по этой переменной. В результате будем иметь систему линейных уравнений относительно неизвестных $dx_r/d\lambda$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_r} \frac{dx_r}{d\lambda} = -\frac{\partial f_k}{\partial \lambda}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Предположим, что определитель этой системы во всех точках области G отличен от нуля, т. е.

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) \neq 0.$$

Разрешив систему (3) относительно производных $dx_r/d\lambda$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\frac{dx_r}{d\lambda} = \frac{\Delta_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)}{\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)} = F_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda), \quad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где $\Delta_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ — определители, получающиеся из определителя системы (3) путем замены элементов r-го столбца свободными членами. Очевидно, что кривая

$$x_1 = x_1(\lambda),\ x_2 = x_2(\lambda), \ldots, x_n = x_n(\lambda), \tag{5}$$

определяемая системой (1) и проходящая через точку $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}, \lambda_0)$, будет интегральной кривой системы дифференциальных уравнений (4).

Чтобы определить для заданных λ точки кривой (5), или, что то же самое, решения системы (1), систему (4) численно интегрируем на интервале $\lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*$ при начальных условиях (2): $\lambda = \lambda_0$, $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}, \ldots, x_n = x_n^{(0)}$. При этом шаг интегрирования выбираем по возможности с таким расчетом, чтобы точками деления интервала были заданные значения параметра λ.

Полученные при интегрировании численные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для каждого заданного значения параметра λ и будут искомыми приближенными решениями системы (1). Число верных цифр в полученных результатах будет, вообще говоря, на единицу меньше, чем число цифр, сохранявшихся при вычислениях.

Заметим, что особый интерес представляют случаи, когда в некоторой точке $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$ области G, являющейся решением системы (1), определитель $\Delta(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, \lambda_i)$ обращается в нуль или одновременно $\Delta(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}, \lambda_i) = 0$ и $\Delta_r(x_1^{(i)}, x_2^{(i)} \ldots, x_n^{(i)}, \lambda_i) = 0$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Метод весьма просто применим также и к нахождению приближенных решений систем нелинейных уравнений

$$\Phi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{6}$$

не содержащих параметра λ. В этом случае необходимо только предварительно преобразовать систему (6) к виду (1). С этой целью в систему (6) вводим параметр λ так, чтобы: 1) при $\lambda = 1$ преобразованная система обращалась в исходную (6); 2) при $\lambda = 0$ можно было без затруднений найти ее решение.

С преобразованной системой поступаем аналогично вышеизложенному, причем полученную систему дифференциальных уравнений интегрируем на интервале $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. В качестве начальных условий берем значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, соответствующие $\lambda = 0$. Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ при $\lambda = 1$ будут искомым решением системы (6). Заметим, что эффективность решения системы (6) в значительной мере зависит от способа введения параметра λ.

Предлагаемый метод пригоден как для решения систем алгебраических, так и трансцендентных уравнений, даже в тех случаях, когда известные до сих пор методы ([1-4]) неприменимы или трудно применимы. Он может быть непосредственно применен и к вопросу о численном решении нелинейных интегральных уравнений. При этом на каждом шаге придется решать только линейные интегральные уравнения, являющиеся соответствующими уравнениями в вариациях.

В заключение выражаю глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР Н. Н. Боголюбову за предложенную тему и ряд ценных советов.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
18 XI 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Скарборо, Численные методы математического анализа, 1934. [2] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, в. 6 (28), 89 (1948). [3] Д. М. Загадский, Ленинград, Уч. зап. пед. ин-та, 28, 245 (1939). [4] H. Curry, Quarterly of Appl. Math., 2, No. 3, 258 (1944).