FOM

Séquence 4 : Applications

Exercice 1

a) ~~Oui~~ Non   b) Non   c) Oui   d) Non

↳ ϕ continues. d)

↳ plusieurs ordonnées pour une même abscisse.

Exercice 2

1) L'application est surjective : pour $x = 1$ et $y = 2$

$$f(x) = f(y) = 1$$

L'application n'est pas injective donc elle n'est pas bijective.
↳ ~~elle va de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$~~

2) $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, [1;2], 4\}$

$f([2,4]) = [0;1]$

3) L'application est surjective mais pas injective donc elle n'est pas bijective.

4) $g([\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}]) = [1 ; \frac{3}{2}]$

$g^{-1}([0;1]) = [0; +\infty[$

Exercice 3

1) Montrons que f injective. Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tq $f(n) = f(n')$
Donc $2n = 2n'$ donc $n = n'$. f est bien injective.
Pour montrer la surjectivité, on considère $m \in \mathbb{N}$ tq :
$f(n) = m$ donc $2n = m$ donc $n = \frac{m}{2}$. Or, pour $m = 9$,
$n = 4{,}5$ et $n \notin \mathbb{N}$. Donc f n'est pas surjective.
Elle n'est donc pas bijective.

② Injectivité : Soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tq $g(n) = g(n')$

Or, si $n = 3$ et $n' = 2$

alors $g(n) = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$g(n') = \frac{2}{2} = 1$

donc $g(n) = g(n')$ mais $n \neq n'$ donc g n'est pas injective.

(donc pas bijective)

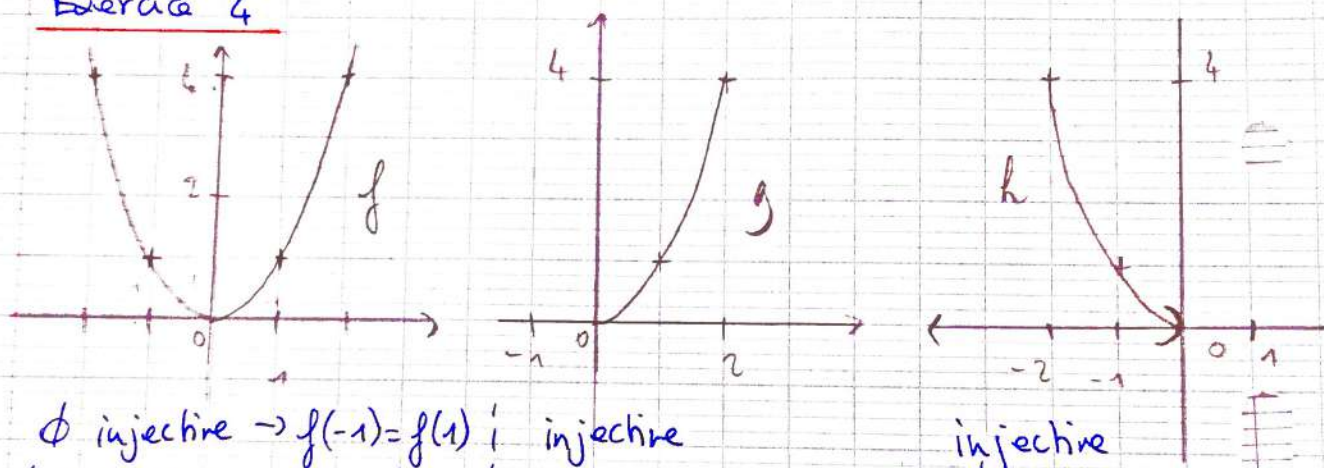
Surjectivité : Soit $m \in \mathbb{N}$ tq $g(n) = m$

donc $m = \frac{n}{2}$ si n pair

$m = \frac{n-1}{2}$ si n impair.

$m \in \mathbb{N}$ $\forall n$ donc l'application est surjective.

Exercice 4



$\not\!\!$ injective $\to f(-1) = f(1)$

$\not\!\!$ surjective

$\hookrightarrow$ pas de solutions dans $\mathbb{R}^-$

injective

$\not\!\!$ surjective

injective

$\not\!\!$ surjective.

Exercice 5

1) f est injective : $f(n) = f(n') \Leftrightarrow n+1 = n'+1$

$\Leftrightarrow n = n'$

f n'est pas surjective : $f(n) = 0$

$\Leftrightarrow n+1 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{N}$

Ex 5 2) g est injective : $g(n) = g(n') \Leftrightarrow n+1 = n'+1$
$\Leftrightarrow n = n'$

Mq g est surjective. Soit $z \in \mathbb{Z}$ tq :
$g(n) = z \Leftrightarrow n+1 = z$ est vrai car tout entier relatif peut s'écrire sous la forme d'un entier relatif $+1$ (tout entier relatif a un antécédent)
Donc g est surjective.
g est injective et surjective donc g est bijective.

Exercice 6

1) Non car il y a plus d'éléments dans l'ensemble de départ (5 personnes) que dans l'ensemble d'arrivée (4 instruments) donc un même instrument peut être joué par 2 personnes différentes.

2) Oui : Annie → violon
Pierre → piano
Léa → accordéon
Jean → saxo
Thomas → violon

3) a) $f(A) = \{$violon, accordéon$\}$
b) $A_1 = \{$Annie, Pierre, Léa, Jean$\}$
c) $f(A_1) = \{$violon, accordéon$\}$
d) $A_2 = A_1$
e) $f(A_2) = f(A_1) = f(A)$.

Exercice 7

C'est une application uniquement si l'on considère que chaque

habitant a un et un seul logement. Cela ne fonctionne donc qu'en excluant les personnes sans domicile et les multi-propriétaires.
Dans ce cas hypothétique, cette application n'est pas injective (il y a plusieurs habitant·e·s dans une même rue) ni surjective (toutes les rues de Rennes ne sont pas habitées).

Exercice 8

C'est bien une application, tout le monde a un nombre défini et unique de frères et soeurs.
Elle n'est pas injective, plusieurs personnes peuvent avoir le même nombre de frères et soeurs.
Elle n'est pas surjective : $900 \in \mathbb{N}$ et il semble douteux qu'une personne ait 900 frères et soeurs.

Exercice 9.

1) $A = \{1; -1\}$ $\quad B = \{1, 2\}$
$f : A \to B$
$x \mapsto x^2$ $\quad$ 2 n'a pas d'antécédents.

2) $A = \{1; -1\}$ $\quad B = \{1; 2\}$
$f : A \to B$
$x \mapsto x^2$ $\quad f(1) = f(-1) = 1$ donc pas injective.

3) $A = \{1; 2; 3\}$ $\quad B = \{1, 2, 3, 4\}$
$f : A \to B$
$x \mapsto x + 1$

4) $A = \{-1; 1; 2\}$ $\quad B = \{1; 4\}$
$f : A \to B$
$x \mapsto x^2$

Exercice 10

1) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto x$

2) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto x$

3) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto 2$

4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto x+1$

5) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto x$

6) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$x \mapsto x$

Exercice 11

f ne peut pas être injective car sur 250 étudiants, il y en a forcément qui ont le même âge.
f ne peut être surjective, si tous les étudiants sont majeurs alors 12 par exemple n'a pas d'antécédent par f dans E.

Exercice 12

1) $f(1;1) = 2^1 \times 3^1 = 6$
$f(2;1) = 2^2 \times 3^1 = 12$

2) Oui, son antécédent est $(1;0)$: $2^1 \times 3^0 = 2$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq : $f(p;q) = n$ donc $2^p 3^q = n$
Donc n est forcément un multiple de 2 ou de 3.
Donc pour $n = 5$, on n'a pas d'antécédents donc f n'est pas surjective.

4) L'application f est injective car les puissances de 3 ne sont pas divisibles par 2 donc un nombre ne peut s'écrire que par une combinaison unique de puissances de 2 et de 3.

Exercice 13

1) • Cas 1 : $x \in A$, $x \notin B$:

$$f(x) = f(A)$$

• Cas 2 : $x \in B$, $x \notin A$

$$f(x) = f(B)$$

• Cas 3 : $x \in A$, $x \in B$

$$f(x) = f(A \cap B)$$

Or $(A \cap B) \in A$ et $(A \cap B) \in B$ → cas 1 ou 2.

On a donc finalement :

$$\forall x \in (A \cup B),\ f(x) = f(A) \cup f(B)$$

d'où $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) Soit $x \in f(A \cap B)$ donc $x \in F$ car $f : E \to F$

Or $f(A) \in F$ et $f(B) \in F$

Donc $(f(A) \cap f(B)) \in F$

De plus $(A \cap B) \in A$ et $(A \cap B) \in B$.

D'où $x \in f(A) \cap f(B)$

Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ $\quad A = \{1\}$, $B = \{-1\}$

$$f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$$

$f(A) \cap f(B) = 1$ Or $1 \notin \emptyset$ donc

$$f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B).$$

Il n'y a pas égalité entre les deux ensembles.

Ex 13 3) Soit $x \in (A \cap B)$. On pose f injective.
Alors si f injective, avec $x' \in E$, $f(x) = f(x')$
$\Rightarrow x = x'$

Soit $y \in F$ tq : $f(x) = y$
$x \in (A \cap B)$ donc $x \in A$ donc comme f injective :
$f(A) = y$
De même, $x \in B$ donc : $f(B) = y$
D'où : $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = y$.

4)

Exercice 14

1) Soit $B = \phi$
$f(A \cup B) = f(A \cup \phi)$
Or $(A \cup \phi) = A$
Donc $f(A \cup \phi) = f(A)$
Comme $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$, par identification on a bien $f(\phi) = 0$.

2) • Cas 1 : A et B sont des ensembles dijoints : donc : $A \cap B = \phi$.
D'où : $f(A) + f(B) - f(A \cap B)$
$= f(A) + f(B) - 0$ d'après la question précédente
$= f(A \cup B)$

• Cas 2 : A et B non disjointes

Donc $(A \cap B) \neq \emptyset$. Montrons l'égalité par double inclusion

• Soit $x \in f(A \cup B)$

$x \in f(A \cup B)$ donc $x \in f(A)$

$x \in f(B)$

Donc $x \in \left(f(A) + f(B) - f(A \cap B)\right)$

$f(A \cup B) = x \quad f(A) = x$

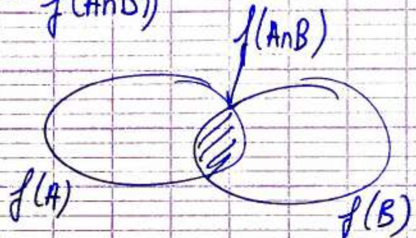
$f(B) = x \quad \Rightarrow 2x - x = x$

$f(A \cap B) = x$

$f(A \cup B) \subset \left(f(A) + f(B) - f(A \cap B)\right)$

• $x \in \left(f(A) + f(B) - f(A \cap B)\right)$

Schématiquement :



Donc x appartient soit à $f(A)$ soit à $f(B)$, $f(A)$ et $f(B)$ disjoints.

Donc $x \in f(A \cup B)$ donc on a bien l'égalité.

Exo 7 - Exercices

Exercice 1

$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1)$

$= 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$

$= (3x + 1)^2$

$= 9x^2 + 6x + 1$

donc $f \circ g \neq g \circ f$

Exercice 2

$f : [0,1] \to [0,1]$. Soit $x \in [0,1]$.

Donc $f(x) = x$

Donc $f \circ f(x) = f(f(x)) = x = id$.

Exercice 3

• Injectivité : Soit $(x, x') \in [1; +\infty[^2$ tq :

$f(x) = f(x')$

Donc $x^2 - 1 = x'^2 - 1$

$\iff x^2 = x'^2$

D'où $x = x'$ car $(x, x') \in [1; +\infty[^2$.

Donc f est injective.

• Surjectivité : Soit $x \in [1; +\infty[$, $y \in [0; +\infty[$ tq :

$f(x) = y$

Donc $x^2 - 1 = y$

$\iff x^2 = y + 1$

$\iff x = \sqrt{y+1}$ Or, $\sqrt{y-1} \in [1; +\infty[$

Donc f est surjective.

Donc f est bijective.

Exercice 7

• Soit $x \in A$. $g \circ f$ injective. Donc, soit $x' \in A$, on a :

$g \circ f(x) = g \circ f(x') \iff x = x'$

Donc, soit $(y, y') \in B$ tq $f(x) = y$, $f(x') = y'$

$g(y) = g(y') \iff x = x'$

Donc $f(x) = f(x') \iff x = x'$ donc f injective.

- $g \circ f$ surjective : Soit $y \in C$, on a alors :
  $g \circ f(x) = y$ existe.

donc $g(f(x)) = y$ existe

On pose $x' = f(x)$, on a alors :

$g(x') = y$ existe donc g est surjective.

① Montrons $\Rightarrow$

- $g \circ f$ bijective.

En particulier, $g \circ f$ injective donc f injective.
$g \circ f$ surjective donc g surjective.

$h \circ g$ bijective.

En particulier, $h \circ g$ injective donc g injective
$h \circ g$ surjective donc h surjective.

Donc g est bijective.

On peut écrire f tq :

$$f = \underbrace{(g^{-1} \circ g)}_{id} \circ f$$

$f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ donc f est bijective car composée d'app° bijectives.

De même : $h = h \circ g \circ g^{-1}$
$h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ est bijective.

② Montrons $\Leftarrow$: f, g et h bijectives.

La composée d'applications bijectives est bijective donc :
$g \circ f$ est bijective et $h \circ g$ est bijective

③ On a montré $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ donc on a montré l'équivalence.