Fondamentaux Mathématiques

Feuille n°2 : Théorie des ensembles

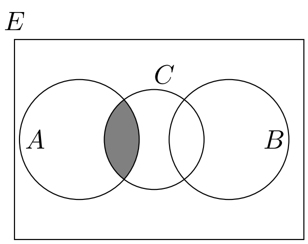
SOLUTIONS

Solution de l'exercice 1

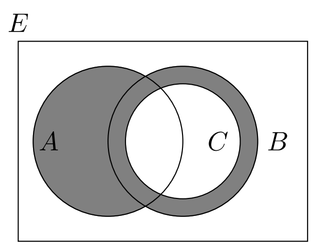
Il peut y avoir plusieurs façons de déterminer la zone grisée. Nous en donnons quelques-unes.

1. $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. $(E \setminus B) \cup A = E \setminus (B \setminus A)$.
3. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
5. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
6. $A \cap B \cap C$.
7. $(A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.
8. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.
9. $(A \cap C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (C \setminus B)$.

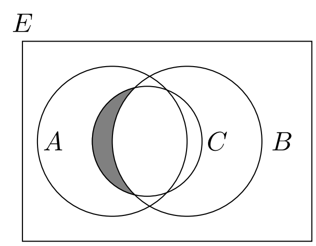
Solution de l'exercice 2



$(C \cap \overline{B}) \cap A$



$(B \cup A) \backslash C$



$(A \backslash B) \cap C$

Solution de l'exercice 3

1. On remarque que l'on a $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$ et $64 = 2^6$. Comme $1 = 2^0$, on peut donc écrire $A = \{2^k \mid k \in \{0, ..., 6\}\}$.
2. Il faut remarquer que $14 = 1 \times 2 \times 7$, donc 1, 2, 7 et 14 sont tous les diviseurs positifs de 14. Donc $B = \{q \in \mathbb{N} \mid q \text{ divise } 14\}$.

Solution de l'exercice 4

1. A est l'ensemble des réels x vérifiant $x(x+5) = 14$. C'est donc l'ensemble des solutions du trinôme $x^2 + 5x - 14 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 5^2 + 4 \times 14 = 25 + 56 = 81 = 9^2$. Les deux racines sont donc 2 et -7. Donc $A = \{-7, 2\}$.
2. B est l'ensemble des **entiers naturels** n vérifiant $n(2n+3) = 14$. C'est donc l'ensemble des solutions **entières** du trinôme $2n^2 + 3n - 14 = 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 3^2 + 4 \times 2 \times 14 = 9 + 112 = 121 = 11^2$. Les deux racines sont donc $-\frac{7}{2}$ et 2. On ne considère que les racines entières donc $B = \{2\}$.

Solution de l'exercice 5

1. $E \cap F$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à E et à F donc $E \cap F = \{2, 4, 5\}$. De même $E \cap G = \{3, 5\}$, $F \cap G = \{1, 5\}$ et $E \cap F \cap G = \{5\}$.
2. $E \cup F \cup G$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à l'un des trois ensembles E, F ou G donc $E \cup F \cup G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$.
3. $E \cap G$ n'est pas inclus dans F car 3 est dans $E \cap G$ mais n'est pas dans F.

Solution de l'exercice 6

1. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
2. $A \cap B = \{4, 5\}$.
3. $A \cap C = \{4, 5\}$.
4. $\overline{B}$ est le complémentaire de B, c'est donc l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à B. Donc $\overline{B} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$.
5. $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas éléments de B donc $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$.
6. $B \setminus A = \{6, 7\}$.

Solution de l'exercice 7

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$),
   $\mathbb{Z}$ est celui des entiers relatifs ($\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$),
   $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des fractions rationnelles ($\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\,; p \in \mathbb{Z}, q \in N \setminus \{0\}\}$
   $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.
   On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
2. Toutes les inclusions sont strictes car $-1 \in \mathbb{Z}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 8

1. On prend par exemple $A = \{0, 2\}$ et $B = \{1, 2\}$ et on a $A \cap B = \{2\}$. Le plus petit élément de A est 0 et celui de B est 1.
2. Ce n'est pas possible car le plus petit élément de $A \cup B$ est plus petit que tous les éléments de A et de B donc c'est forcément le plus petit élément de A ou de B.

Solution de l'exercice 9

On va poser P l'ensemble des poètes, H l'ensemble des gens heureux, B l'ensemble des banquiers et R l'ensemble des gens riches. Les affirmations se traduisent de la façon suivante :

(1) Les poètes sont des gens heureux : $P \subset H$
(2) Tout banquier est riche : $B \subset R$.
(3) Personne ne peut être à la fois riche et heureux : $H \cap R = \emptyset$.

a. On veut savoir s'il existe un poète riche ou pas, c'est-à-dire si l'ensemble $P \cap R$ est vide ou pas. Comme $P \subset H$, $P \cap R \subset H \cap R$. Or $H \cap R = \emptyset$. Donc il n'y a pas de poète riche.
b. On veut savoir s'il existe ou pas des banquiers heureux, donc si l'ensemble $B \cap H$ est vide ou pas. Comme $B \subset R$, $B \cap H \subset R \cap H = \emptyset$. Donc il n'existe pas de banquier heureux.
c. On veut savoir s'il existe, ou pas, des banquiers poètes, donc si $B \cap P$ est vide ou pas. Comme $B \subset R$, on a $B \cap P \subset R \cap H = \emptyset$. Donc personne ne peut être à la fois banquier et poète.

Solution de l'exercice 10

1. Non, par exemple si $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2\}$ et $C = \{1, 2\}$.
2. Non, par exemple si $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2\}$ et $C = \{0\}$.
3. Non, par exemple si $E = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{0, 2\}$ et $C = \{1, 2\}$.

Solution de l'exercice 11

1. On veut trouver tous les sous-ensembles de E, puisque $\mathscr{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. On va raisonner par nombre d'éléments des sous-ensembles de E. Nécessairement, comme E a 3 éléments, un sous-ensemble de E a soit 0 élément, soit 1 élément, soit, 2 éléments, soit 3 éléments.
   Il n'existe qu'un sous-ensemble de E à 0 élément, c'est l'ensemble vide : $\emptyset$.
   Un sous-ensemble de E à 1 élément est un singleton $\{a\}$ où a est un élément de E. Il y a donc 3 tels sous-ensembles : $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$.
   Un sous-ensemble de Eà 2 élément est une paire $\{a, b\}$ où a et b sont deux éléments distincts de E. Il y a donc 3 tels sous-ensembles : $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$. (attention la paire $\{1, 2\}$ est le même ensemble que la paire $\{2, 1\}$!)
   Le seul sous-ensemble de E à 3 élément est E lui-même.
   On en déduit $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$ (attention aux accolades !).
2. Comme E a 1 élément, les sous-ensembles de E ont soit 0 élément, soit 1 élément donc $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, E\}$.
   $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, E\}$ a donc 2 éléments. Ses sous-ensembles auront donc soit 0 élément (et c'est l'ensemble vide), soit 1 élément, soit 2 éléments (et c'est l'ensemble entier). Il reste à déterminer les sous-ensembles de $\mathscr{P}(E)$ ayant un élément, ce sont donc des singletons contenant un élément de $\mathscr{P}(E)$; or $\mathscr{P}(E)$ a 2 éléments : $\emptyset$ et E. Les sous-ensembles de $\mathscr{P}(E)$ ayant un élément sont donc les singletons $\{\emptyset\}$ et $\{E\}$.

   On a donc $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{E\}, \mathscr{P}(E)\}$.
   Attention : $\emptyset$ est l'ensemble vide, donc un ensemble ne contenant pas d'élément, alors que $\{\emptyset\}$ est un ensemble contenant un élément (qui est l'ensemble vide). Les accolades sont importantes !

Solution de l'exercice 12

On va montrer que si $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$ alors $E \subset F$. Or E est un sous-ensemble de E donc $E \in \mathscr{P}(E)$. Comme $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{P}(F)$, on a $E \in \mathscr{P}(F)$ donc $E \subset F$.
Remarque : par symétrie on a, si $\mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E)$ alors $F \subset E$ donc si $\mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$ alors $E = F$.

Solution de l'exercice 13

On a toujours $E \in \mathscr{P}(E)$. Pour les ensembles finis, E est l'élément de $\mathscr{P}(E)$ contenant le plus d'éléments donc $E = \{a, b\}$.

Solution de l'exercice 14

1. Non, 4 n'appartient à aucune partie, or l'union des parties doit être égale à E.
2. Non, les parties ne sont pas disjointes ($\{1, 5, 7\} \cap \{3, 5, 6\} = \{5\} \neq \emptyset$).
3. Oui.
4. Non, 10 n'appartient pas à E, or l'union des parties doit être égale à E.

Solution de l'exercice 15

1. Par définition, E_a, E_e, E_i, E_o et E_u sont inclus dans E. Tous les mots de E contiennent une voyelle et il n'y a pas d'autres voyelles que a, e, i, o et u en langue française donc $E = E_a \cup E_e \cup E_i \cup E_o \cup E_u$.
2. Non car *oiseau* $\in E_a \cap E_e$. Il appartient d'ailleurs à $E_a \cap E_e \cap E_i \cap E_o \cap E_u$.

Solution de l'exercice 16

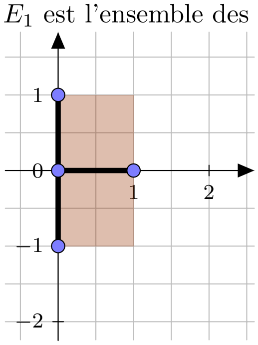
1. 0, 3 et 6 appartiennent à E_0, 1, 4 et 7 appartiennent à E_1 et 2, 5 et 8 appartiennent à E_2.
2. Oui, ils sont bien non vides d'après la question précédente. Si on effectue la division euclidienne d'un entier naturel par 3, le reste est soit 0, soit 1, soit 2. Donc ces 3 ensembles sont disjoints deux à deux et leur union est bien $\mathbb{N}$ tout entier.

Solution de l'exercice 17

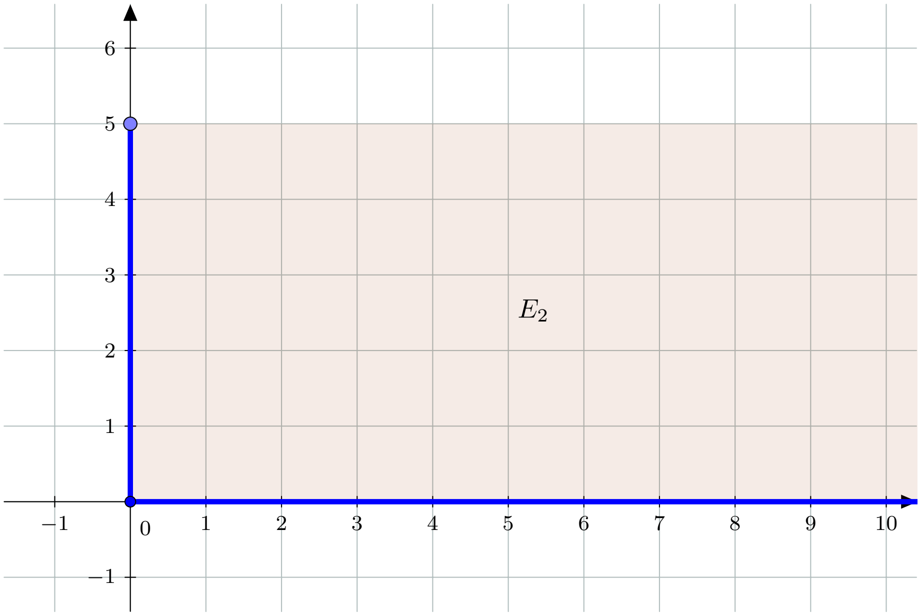
1. $E \times F = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ et
   $F \times E = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$.
2. $E \times F$ et $F \times E$ ont le même nombre d'éléments (6) mais sont différents car, par exemple, $(3,1) \in E \times F$ mais $(3,1) \notin F \times E$.

Solution de l'exercice 18

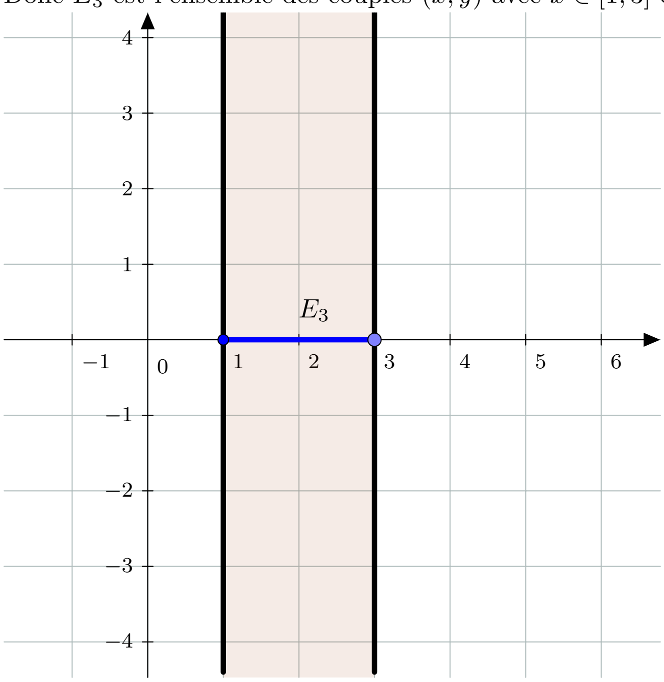
1. E_1 est l'ensemble des couples (x,y) avec $x \in [0,1]$ et $y \in [-1,1]$.



2. E_2 est l'ensemble des couples (x,y) avec $x \geq 0$ et $y \in [0,5[$.



3. E_3 est l'ensemble des couples (x, y) avec $|x-2| \leq 1$ et $y \in \mathbb{R}$.
   Or $|x-2| \leq 1 \iff -1 \leq x-2 \leq 1 \iff 1 \leq x \leq 3$.
   Donc E_3 est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in [1,3]$ et $y \in \mathbb{R}$.



Solution de l'exercice 19

1. $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{b\}\}$.
2. $\mathscr{P}(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{b\}, \{1,2\}, \{1,b\}, \{2,b\}, \{1,2,b\}\}$.
3. Attention $\mathscr{P}(A \cup B) \neq \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$! Mais on a toujours $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$.

Solution de l'exercice 20

1. $(A \cap B) \cup \overline{B} = (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B}) = (A \cup \overline{B}) \cap E = A \cup \overline{B}$.
   $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = A \cup B$ d'après ci dessus avec A et $\overline{B}$.
2. On calcule

$$\begin{aligned}(C \setminus D) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup D &= [(C \setminus D) \cup D] \cup \left[(A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A \cap B}\right] \\ &= C \cup D \cup \overline{C} \cup (A \cap B) \\ &= E \cup D \cup (A \cap B) \\ &= E\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 21

Oui, le patron obtiendra le résultat demandé. Il faut commencer par voir que le problème revient à savoir si $[(A \cap B) \cup (C \cap B)] \setminus [(A \cap B) \cap (C \cap B)] = [(A \cup C) \setminus (A \cap C)] \cap B$. On commence par calculer

$$[(A \cup C) \setminus (A \cap C)] \cap B = (A \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B.$$

Puis on calcule

$$\begin{aligned}[(A \cap B) \cup (C \cap B)] \setminus [(A \cap B) \cap (C \cap B)] &= [(A \cap B) \cup (C \cap B)] \setminus (A \cap B \cap C), \\ &= [(A \cap B) \cup (C \cap B)] \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}), \\ &= (A \cup C) \cap (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap B \cap (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}), \\ &= (A \cup C) \cap (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap [(B \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{C})], \\ &= (A \cup C) \cap (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap B \cap (B \cup \overline{C}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}), \\ &= (A \cup C) \cap [(A \cap \overline{A}) \cup B] \cap [B \cup (C \cap \overline{C})] \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B, \\ &= (A \cup C) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B.\end{aligned}$$

On obtient bien une égalité entre les deux ensembles.

Solution de l'exercice 22

Non, par exemple $E = F = \{0, 1\}$ et $X = \{(0, 0), (1, 1)\}$.

Solution de l'exercice 23

1. On calcule

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) &= [(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B)] \cap [(A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] \\ &= [(A \cap \overline{A}) \cup B)] \cap [(A \cap \overline{A}) \cup \overline{B})] \text{ par distributivité} \\ &= [\emptyset \cup B)] \cap [\emptyset \cup \overline{B})] \text{ car } A \cap \overline{A} = \emptyset \\ &= B \cap \overline{B} \\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

2. On calcule

$$\begin{aligned}(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= [(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)] \cup [(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})], \\ &= B \cup \overline{B}, \\ &= E.\end{aligned}$$

Ou on peut remarquer que c'est le complémentaire de la question précédente.

3. On calcule

$$\begin{aligned}
[(\overline{A} \cup \overline{C}) \cap (\overline{B} \cup \overline{C})] \cup [(A \cup B) \cap C] &= [(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup \overline{C}] \cup [(A \cup B) \cap C], \\
&= [\overline{(A \cup B) \cap C}] \cup [(A \cup B) \cap C], \\
&= E.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 24

Si on prend les complémentaires des ensembles dans la propriété P_1, on obtient $\overline{A_1} \neq \emptyset$, $\overline{A_2} \neq \emptyset$ et $\overline{A_3} \neq \emptyset$. Si on prend les complémentaires des ensembles dans la propriété P_2, on obtient $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \emptyset$. Et si on prend les complémentaires des ensembles dans la propriété P_3, on obtient $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = E$.
Ce qui prouve que $\{\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}\}$ est une partition de E.

Solution de l'exercice 25

1. L'égalité est vraie, la démonstration repose sur les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
(x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C) &\Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ et } y \in C \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cup B) \times C
\end{aligned}$$

2. Ceci est faux. Par exemple $E = F = \{0, 1\}$, $A = C = \{0\}$ et $B = D = \{1\}$. La vraie formule est la suivante

$$(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times C) \cup (B \times D).$$