Fon

Exercices : Théorie des ensembles

Ség 2

Exercice 1

1) $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2) $\cancel{(C_E B \cup (A \cap B)'}$ $(E \setminus B) \cup A'$

3) $A \setminus (\cancel{A \cap} B)$

4) $A \cup (B \cap C)$

5) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$

6) $A \cap B \cap C$

7) $(A \cap C) \cup (\cancel{A} \cap B)$

8) $(A \cap B) \setminus C$

9) $(A \cap C) \setminus B$

Exercice 3

1) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 6, n^2\}$

2) $B = \{n \in \mathbb{N}, n \leq 14, \frac{14}{n} \in \mathbb{N}\}$

ou "n divise 14"

Exercice 4

1) $A = \{-7 ; 2\}$

2) $B = \{2\}$

Exercice 5

1) $E \cap F = \{2, 4, 5\}$ $E \cap G = \{3, 5\}$

$F \cap G = \{1, 5\}$ $E \cap F \cap G = \{5\}$

2) $E \cup F \cup G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$

3) $E \cap G = \{3, 5\}$ $\quad F = \{1, 2, 4, 5, 7\}$

Donc $(E \cap G) \not\subset F$ car $\{3\} \notin F$.

Exercice 6

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{4, 5\}$ $\quad A \cap C = \{4, 5\}$

$\bar{B} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$ $\quad A \setminus B = \{1, 2, 3\}$

$B \setminus A = \{6, 7\}$

Exercice 7.

1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

entiers naturels — relatifs — rationnels — réel

2) L'inclusion stricte est telle que : $A \subsetneq B$ signifie que $A \subset B$ avec $A \neq B$

Donc ces inclusions sont bien strictes car :

$\mathbb{N} \neq \mathbb{Z} \neq \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

Par exemple, $-1 \in \mathbb{Z}$ mais $-1 \notin \mathbb{N}$ etc.

Exercice 8

1) $A = \{0, 2, 3, 4\}$ $\quad B = \{1, 2, 5\}$

Le plus petit élément de $A \cap B$ est 2 donc ni le + petit de A, ni le + petit de B.

Ex 8 2) C'est impossible car l'union réunit tous les éléments de A et B donc le plus petit élément de $A \cup B$ sera forcément le plus petit élément de A ou de B.

Exercice 9

a) Oui b) Non c) oui

Exercice 10

1) Non :

$A = \{1, 4, 5\}$
$B = \{4, 5\}$
$C = \{1\}$ $A \neq B$

2) Non, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{2, 3\}$
et $C = \{2, 3\}$
$A \cap C = B \cap C$ mais $A \neq B$

3) Non, si $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{2, 3\}$
$C = \{1, 4\}$

$A \cup C = B \cup C$
mais $A \neq B$

Exercice 11.

1) $P(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1,$

2) $P(E) = \{\emptyset, \{1\}\}$

$P(P(E)) = \{\emptyset, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\{1\}\}\}$

$\{\emptyset\}$

Exercice 12

Soit $x \in E$, $y \in F$. Comme $x \in E$, $x \in P(E)$
$y \in F$, $y \in P(F)$

2

Donc, si $P(E) \subset P(F)$, $x \in P(E) \Rightarrow x \in P(F)$
Or si $x \in P(F)$, $x \in F$
Donc si $x \in E$ et $P(E) \subset P(F)$ alors $x \in F$, on a bien $E \subset F$.

Exercice 13

$E = \{a, b\}$

Exercice 14

1) Ce n'est pas une partition car $4 \notin P_1$ donc leur union n'est pas égale à E.
2) Ce n'est pas une partition car ils ne sont pas 2 à 2 disjoints : $E_1 = \{1, 5, 7\}$ et $E_3 = \{3, 5, 6\}$ ont tous les deux $5 \in E_1$ et $5 \in E_3$
3) C'est une partition
4) $10 \notin E$ donc ce n'est pas une partition.

Exercice 15

$E_a = \{$abracadabra, oiseau, panda$\}$
$E_e = \{$oiseau$\}$
$E_i = \{$mistigri, oiseau$\}$
$E_o = \{$oiseau, loto$\}$
$E_u = \{$oiseau, urubu$\}$

$E_a \cup E_e \cup E_i \cup E_o \cup E_u = \{$abracadabra, mistigri, oiseau, panda, loto, urubu$\} = E$
oiseau $\in (E_a, E_e, E_i, E_u)$ donc les sous-ensembles ne sont pas 2 à 2 disjoints donc ils ne forment pas une partition de E.

Exercice 16

1) ~~3~~ $\{3, 6, 9\} \in E_0$ $\{4, 7, 10\} \in E_1$

$\{5, 8, 11\} \in E_2$

2) Oui :

- aucune des parties n'est vide : on a listé des éléments appartenant à E_0, E_1, E_2
- leur union est égale à $\mathbb{N}$: un entier naturel est soit divisible par 3, soit son reste est 1, soit son reste est 2
- de même, les ensembles E_0, E_1 et E_2 sont disjoints car un entier ne peut avoir un reste de 1 et être divisible par 3 par exemple, donc :

  si $n \in E_0$, $n \notin (E_1, E_2)$

  $n \in E_1$, $n \notin (E_0, E_2)$

  $n \in E_2$, $n \notin (E_0, E_1)$

Exercice 17

1) $E \times F = \{ \cancel{(x,y)}\ (x,y) \mid x \in \{1,2,3\}, y \in \{1,2\}$

$E \times F = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

couples différents

$F \times E = \{(x,y) \mid x \in \{1,2\}, y \in \{1,2,3\}\}$

$F \times E = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$

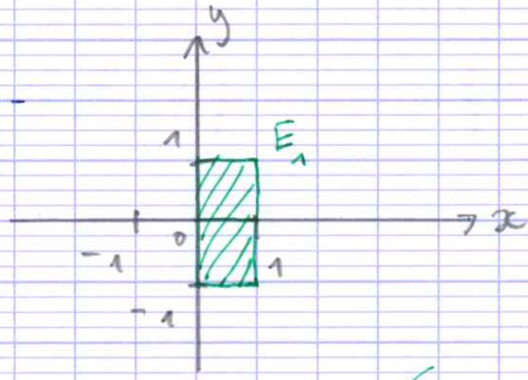
2) $\text{card}(E \times F) = \text{card}(F \times E) = 6$

mais $(3,1) \in E \times F$ alors que $(3,1) \notin F \times E$ donc ils ne sont pas égaux

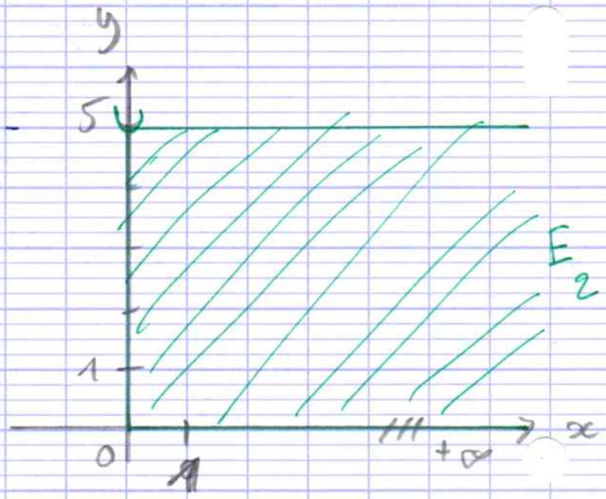
3

Exercice 18

1 -



2 -



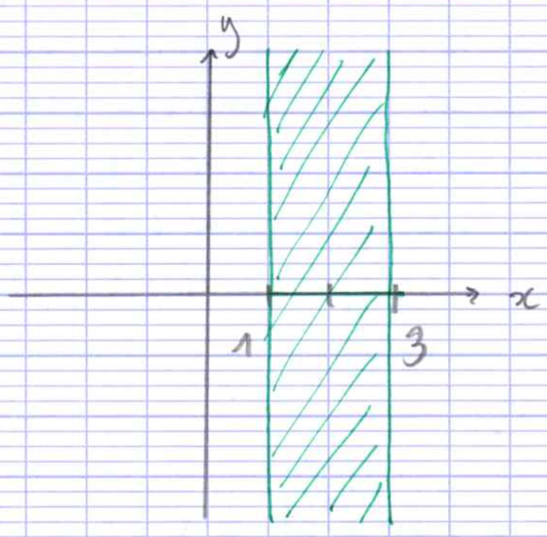
3 - $|x-2| \leqslant 1 \iff x-2 \leqslant 1$ ou $-(x-2) \leqslant 1$

$\iff x \leqslant 3$ ou $-x+2 \leqslant 1$

$\iff x \leqslant 3$ ou $x \geqslant 1$

$\iff 1 \leqslant x \leqslant 3$

Donc :



Exercice 19

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ $P(B) = \{\phi, \{b\}\}$

1) $P(A) \cup P(B) = \{\phi, \{1,2\}, \{1\}, \{b\}, \{2\}\}$

2) $A \cup B = \{1, 2, b\}$

$P(A \cup B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{b\}, \{1,2\}, \{1,b\}, \{2,b\}, \{1,2,b\}\}$

3) $P(A) \cup P(B) \neq P(A \cup B)$ et $(P(A) \cup P(B)) \subset P(A \cup B)$

$\text{card}((P(A) \cup P(B)) = 5 \neq \text{card}(P(A \cup B)) = 8$

Fon
Séq 2

Exercice 20

1) $(A \cap B) \cup \overline{B} = (A \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B})$

Or $B \cup \overline{B} = E$ donc on a bien $(A \cap B) \cup \overline{B} = A \cup \overline{B}$ (1)

$(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$ car $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

$= (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)$

$= A \cup B$ car $\overline{B} \cup B = E$ (2)

2) $E = A \cup B \cup C \cup D \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \cup \overline{D}$

Montrons que $E = (C \setminus D) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup D$

$E = (C \setminus D) \cup D \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A} \cup \overline{B}$

$E = (C \cup D) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A} \cup \overline{B}$ d'après (2)

$E = ((C \cup D) \cup ((A \cap B) \cap \overline{C}) \cup (\overline{A \cap B})$ d'après les propriétés des complémentaire

$E = (C \cup D) \cup \overline{C} \cup (\overline{A \cap B})$ d'après (1)

$E = C \cup D \cup \overline{C} \cup \overline{A} \cup \overline{B}$

Or $C \cup \overline{C} = E$

Donc $(C \setminus D) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup \overline{A} \cup \overline{B} \cup D = E$.

Exercice 21

Le travail de Léon est le suivant (demandé par le patron

① $L_1 = A \cap B$ ② $L_2 = B \cap C$

③ Trouver $E = (L_1 \cup L_2) \cap (\overline{L_1 \cap L_2})$

Le travail de Nicole et Léon ~~pour~~ répondre à la demande est

$F = (A \cup C) \cap (\overline{A \cap C})$ puis Léon cherche $F \cap B$

$$E = (L_1 \cup L_2) \cap (\overline{L_1 \cap L_2})$$
$$= [(A \cap B) \cup (B \cap C)] \cap [\overline{(A \cap B) \cap (B \cap C)}]$$
$$= [(A \cap B) \cup (B \cap C)] \cap [\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(B \cap C)}]$$

Voir correction.

$$F \cap B = [(A \cup C) \cap (\overline{A \cap C})] \cap B$$
$$= ((B \cap (A \cup C)) \cap (B \cap (\overline{A \cap C}))$$
$$= [(B \cap A) \cup (B \cap C)] \cap (B \cap (\overline{A \cap C}))$$

Or $(B \cap (\overline{A \cap C})) \neq [\overline{(A \cap B) \cap (B \cap C)}] = [\overline{(A \cap B)} \cup \overline{(B \cap C)}]$

Donc il n'obtiendra pas le résultat attendu.

Exercice 22.

Non, par exemple, posons : $E = \{1, 2, 3\}$
$F = \{4, 5, 6\}$

X sous-ensemble de $E \times F$ tel que : $X = \{1, 2\}$

On peut exprimer X tel que : $\{1\} \times \{2\}$

Or $\{2\} \notin P(F)$ donc la propriété n'est pas respectée.

Exercice 23

$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset$ $\quad$ $(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) = \emptyset$

1) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset$

$$= [\underbrace{(A \cap \bar{A})}_{\emptyset} \cup (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A}) \cup \underbrace{(B \cap \bar{B})}_{\emptyset}] \cap [\underbrace{(A \cap \bar{A})}_{\emptyset} \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap \bar{A}) \cup \underbrace{(\bar{B} \cap \bar{B})}_{\bar{B}}]$$

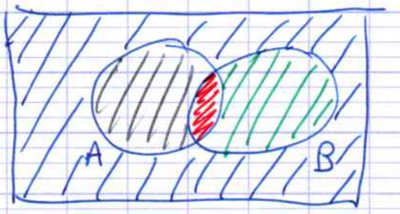
$$= [(A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})] \cap [\bar{B} \cup (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{B} \cap \bar{A})]$$

Fon
Ex 23

2) $(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})$

$= \left[(A\cap B)\cup(\bar{A}\cap\bar{B})\right]\cup\left[(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap\bar{B})\right]$

$= E$



E

3) $\left[\underbrace{(\bar{A}\cup\bar{C})\cap(\bar{B}\cup\bar{C})}\right]\cup\left[(A\cup B)\cap C\right]$

réduire

$= \left[(\bar{A}\cup\bar{C})\cap(\bar{B}\cup\bar{C})\right]\cup\left[(A\cap C)\cup(B\cap C)\right]$

facteur commun.

$= \left[(\bar{A}\cup\bar{C})\cup(A\cap C)\right]\cup\left[(\bar{A}\cup\bar{C})\cup(B\cap C)\right]\cap\left[(\bar{B}\cup\bar{C})\cup(B\cap C)\right]$
$\cap\left[(\bar{B}\cup\bar{C})\cup(A\cap C)\right]$

$= \left[\underbrace{(\overline{A\cap C})\cup(A\cap C)}_{E}\right]\cup\left[(\overline{A\cap C})\cup(B\cap C)\right]\cap\left[\underbrace{(\overline{B\cap C})\cup(B\cap C)}_{E}\right]$
$\cap\left[(\overline{B\cap C})\cup(A\cap C)\right]$

$= \left[(\overline{A\cap C})\cup(B\cap C)\right]\cap\underbrace{\left[(\overline{B\cap C})\cup(A\cap C)\right]}_{\text{impossible.}}$

$= \emptyset$

CORRECTION: $\left[(\bar{A}\cup\bar{C})\cap(\bar{B}\cup\bar{C})\right]\cup\left[(A\cup B)\cap C\right]$

$= \left[(\bar{A}\cap\bar{B})\cup\bar{C}\right]\cup\left[(A\cup B)\cap C\right]$

$= \left[\overline{(A\cup B)\cap C}\right]\cup\left[(A\cup B)\cap C\right]$

$= E$

Exercice 24

La famille $\{\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}\}$ est une partition de E ssi :

(1) $\overline{A_1} \neq \emptyset$, $\overline{A_2} \neq \emptyset$, $\overline{A_3} \neq \emptyset$

(2) $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = E$

(3) $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \emptyset$ $\quad (\overline{A_1} \cap \overline{A_3}) = \emptyset$ $\quad (\overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = \emptyset$

(2) E est un ensemble non vide et A_1, A_2, A_3 sont des sous-ensembles de E. On cherche à montrer (2)

$\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = E$

$\iff \overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = E$

Or, d'après P_3 : $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$ et E non-vide

donc $\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3} = E$ est vrai, donc (2) est vérifié.

(3) De même : $(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) = \emptyset \iff (\overline{A_1 \cup A_2}) = \emptyset$

Or, d'après P_2 : $A_1 \cup A_2 = E$ donc $\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{E} = \emptyset$

On a donc : $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = \emptyset$

(1) On a $\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} = E$

Or E est non-vide et l'union d'ensembles vides ne peut être vide. De plus, d'après P_1 : $A_1, A_2, A_3 \neq E$

Donc $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3} \neq \emptyset$

On a donc vérifié (1), (2) et (3) donc la famille $\{\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}\}$ est une partition de E.

OK

Exercice 25

1) Oui toujours vrai : soit $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$.

$(A \times C) = \{(x,z)\}$ $\quad (B \times C) = \{(y,z)\}$ donc $(A \times C) \cup (B \times C) = \{(x,z),(y,z)\}$

$(A \cup B) = \{x, y\}$ $\quad (A \cup B) \times C = \{(x,z),(y,z)\}$

donc on a bien : $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$

Fon
Ex 25

2) Faux. On pose : $A = \{1\}$ $B = \{2\}$ $C = \{3\}$ $D = \{4\}$

$A \cup B = \{1, 2\}$ $C \cup D = \{3, 4\}$ donc $(A \cup B) \times (C \cup D)$
$= \{(1,3), (1,4), (2,3), (2$

$A \times C = \{(1,3)\}$ $B \times D = \{(2,4)\}$ donc $(A \times C) \cup (B \times D)$
$= \{(1,3), (2,4)\}$

6