Fon
Séq 3

Propositions quantifiées et raisonnement

Exercice 1

1. Oui 2. Oui 3. Non 4. Oui 5. Oui 6. Oui

Exercice 2.

$(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x)g(x)=0) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)=0 \text{ ou } g(x)=0)$

↳ pas la même proposition que l'énoncé ≠ car le produit des deux peut dépendre de x donc faux (pas toujours f ou g nulle)

Exercice 3

On peut écrire la proposition d'Arnaud:

$\forall$élève $\in$ classe, yeux = bleus.

Donc, pour montrer que cette proposition est fausse, il suffit de montrer qu'il existe élève tq yeux ≠ bleus.

Donc la remarque de Charles n'est pas exacte et Bertrand avait raison.

Exercice 4

1. Ce raisonnement ne montre qu'un exemple, la proposition n'est pas démontrée $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. La proposition est bien démontrée car on a montré l'existence d'un $n \in \mathbb{N}$ qui vérifiait cette propriété.

Exercice 5

1. $\forall x \in E, \overset{x \in}{p(x)}$ 2. $\forall x \in E, x \notin p(x)$

3. $\forall (x,y) \in e(x)^2, \overset{(x,y)\in}{m(x,y)}$

4. $\forall x \in a(x), x \notin t(x)$

5. Les absents n'ont pas tous tort $\Rightarrow$ il existe des absents qui ont tort

Donc : $\exists x \in a(x), x \in t(x)$

Négation des propositions :

1. $\exists x \in E, x \notin p(x)$ 2. $\exists x \in E, x \in p(x)$

3. $\exists (x,y) \in e(x)^2, (x,y) \notin m(x,y)$

4. $\exists x \in a(x), x \in t(x)$ 5. $\forall x \in a(x), x \notin t(x)$

Exercice 6

1. A la proposition b)

2. a) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m = 2n$ $P(n)$

Démonstration par récurrence :

Init : $n=0$, $\exists m \in \mathbb{N}, m = 2\times 0$ car $m=0$

$P(0)$ vraie.

Héréd : $n \geq 0$, $P(n)$ vraie. Mq $P(n+1)$ vraie.

$P(n+1)$: $\exists m \in \mathbb{N}, m = 2(n+1)$

$m = 2n + 2$

Or il existe m_n tq $m_n = 2n$ car $P(n)$ vraie

Donc $m = m_n + 2$

$m \in \mathbb{N}$ ~~donc~~ car $m_n \in \mathbb{N}$ donc $P(n+1)$ vraie

Ccl° : On a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m = 2n$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! m \in \mathbb{N}, m = 2n$ $Q(n)$

Faux, 4 est le double de 2 mais 6 est le double de 3

donc comme $4 \neq 6$, $Q(n)$ est faux.

implication : $P \Rightarrow Q \Leftrightarrow$ non P ou Q
négation implication : P et non Q

Exercice 7

1) non(P_1) : $\exists x \in \mathbb{R}, (x < 1 \text{ et } x < 1)$
$\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x < 1$

non(P_2) : $\forall x \in \mathbb{R}, (x < 1 \text{ et } x \leq 3)$

2) non(P_1) : vraie, on pose $x = 0{,}5$, x vérifie bien non(P_1)
non(P_2) : Faux, on pose $x = 6$, $x \geq 1$ et $x > 3$ donc non(P_2) fausse.

Exercice 8

$\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}$ tq $|u_n| \geq M$ est la négation.
On cherche une suite qui vérifie : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < M$.
La suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} \end{cases}$ vérifie la propriété pour $M = 2$ par exemple.

La suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n)^2 \end{cases}$ ne vérifie pas la propriété.

Exercice 9

1) $\forall x \in \mathbb{N}^*, \exists y \in \mathbb{N}^*$ $xy = 1$
Faux, il n'existe aucun y tq $xy = 1$ pour $x = 25$ par exemple : $25y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{25}$, Or $\frac{1}{25} \notin \mathbb{N}^*$

$\forall x \in \mathbb{Q}^*, \exists y \in \mathbb{Q}^*, xy = 1$
Soit $x \in \mathbb{N}^*$, $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$

Or, $x \in \mathbb{Q}^*$ donc $\frac{1}{x} \in \mathbb{Q}^*$ donc $\exists y \in \mathbb{Q}^*$ tq $xy = 1$ donc vrai

2) $\exists y \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{N}^*, xy = 1$ → faux, même raisonnement

$\exists y \in \mathbb{Q}^*, \forall y \in \mathbb{Q}^*, xy = 1$ → ~~faux~~ vrai.

Exercice 10

Contraposée : $x \geq 2 \Rightarrow x^3 \neq 2$

Soit $x \geq 2$, $x^3 > x$ car $x \geq 0$

$x \in \mathbb{R}$ Or, $x \geq 2$ donc : $x^3 > 2$

Donc $x \neq 2$. On a montré que $x \geq 2 \Rightarrow x^3 \neq 2$, donc par contraposition : $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$

Exercice 11

Par la contraposée, on veut montrer que si n n'est pas pair, alors n^2 n'est pas pair.

Soit $n \in \mathbb{N}$, n impair. Donc $\exists k \in \mathbb{N}$ tq : $n = 2k+1$

$n^2 = (2k+1)^2$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

$n^2 = 2l + 1$ avec $l = 2k^2 + 2k$

donc l pair.

Donc n^2 impair, on a vérifié la propriété.

Exercice 12

premiers entre eux => fraction irréductible

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors, $\exists (x,y) \in \mathbb{Z}$ tq :

$\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ donc $2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$. D'après l'exercice précédent

Donc $\exists (k,k') \in \mathbb{N}^2, 2 = \frac{2k}{2k'}$ x et y pairs,

Donc x et y divisibles par 2, ils ne sont donc pas premiers entre eux. Donc le postulat de départ est faux, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 13

Soit $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$

Init : $n=0$, On a bien $\sum_{k=0}^{0} (2k+1) = 2\times 0 + 1 = 1 = (0+1)^2 = 1^2 = 1$

$P(0)$ vraie.

Héréd : Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ vraie.
Montrons que $P(n+1)$ vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = \left(\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\right) + 2(n+1)+1$$

$$= (n+1)^2 + (2(n+1)+1) \quad \text{car } P(n) \text{ vraie}$$

$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 + 1$$

$$= n^2 + 4n + 4$$

$$= (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2$$

Donc, on a bien :

$$\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) = ((n+1)+1)^2$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Ccl° : On a vérifié l'hérédité, d'où par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$

Exercice 14

1) $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 5$ multiple de 3
$\Leftrightarrow P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, 4^n + 5 = 3k$

Init : $n=0$ $\quad 4^0 + 5 = 1 + 5 = 6 = 2 \times 3$ donc $k = 2$

$P(0)$ vraie.

Héréd : Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie. Montrons que $P(n+1)$ vraie.
$P(n)$ vraie, donc $\exists k \in \mathbb{N}$, $4^n + 5 = 3k \Leftrightarrow 4^n = 3k - 5$

$4^{n+1} + 5 = 4^n \times 4 + 5 = (3k - 5) \times 4 + 5$

Donc $4^{n+1} + 5 = 12k - 20 + 5 = 12k - 15$

$= 3 \times (4k - 5)$

$= 3l$ où $l = 4k - 5$

Donc $4^{n+1} + 5$ est un multiple de 3, $P(n+1)$ vraie

Ccl°: Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est multiple de 3.

2) $P(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(10^n + 7 = 9k \Rightarrow 10^{n+1} + 7 = 9k')$

$\exists (k, k') \in \mathbb{N}^2$

Init: $n = 0$ $\quad 10^0 + 7 = 8$ pas multiple de 9

$n = 1$ $\quad 10^1 + 7 = 17$ " " "

$n = 2$ $\quad 10^2 + 7 = 107$ " " " etc...

De même : $10^{0+1} + 7 = 17$ pas multiple de 9

F $\Rightarrow$ F, donc $P(0)$ vraie

Héréd: Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie.

Montrons que $P(n+1)$ vraie.

On en déduit que $10^n + 7$ n'est jamais multiple de 9 $\forall n \in \mathbb{N}$, ~~de même~~ donc par récurrence, $10^{n+1} + 7$ ne sera pas multiple de 9. L'implication est donc vraie.

Exercice 15

1) Soit $n \geq 3$, P_n vraie, montrons que P_{n+1} vraie.

P_n vraie donc :

$$2^n > n^2 \Leftrightarrow 2^{n+1} > 2n^2$$

On a : $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

Mq: $2n^2 > n^2 + 2n + 1$ (1)

(1) $\Leftrightarrow$ $n^2 > 2n+1 \Leftrightarrow n^2-2n-1>0$

$\Delta = 8$ $\quad x_1 = 1+\sqrt{2}$ $\quad x_2 = 1-\sqrt{2}$

$x_1 \approx 2,4$ $\quad x_2 \approx -0,4$

Or $n \geq 3$ donc $n^2-2n-1>0$ vrai

D'où : $2^{n+1} > 2n^2 > (n+1)^2$

donc $2^{n+1} > (n+1)^2$ $\quad P(n+1)$ vrai

2) Donc $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ vraie $\forall n \geq 3$

<u>Exercice 16</u>

① $P(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

<u>Init</u> : $n=0$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0$ $\quad \frac{0\times(0+1)}{2} = 0$

$P(0)$ vraie

<u>Héréd</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie. Mq $P(n+1)$ vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + n+1$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{car } P(n) \text{ vraie.}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^2+n+2n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

Donc $P(n+1)$ vraie

<u>Ccl°</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

② $P(n) : \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Init: $n = 0 \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 = 0 = \dfrac{0 \times (0+1)(2 \times 0 + 1)}{6}$

$P(0)$ vraie

Héréd: Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie. Mq $P(n+1)$ vraie.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{car } P(n) \text{ vraie.}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

Or : $(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)$

$= (n+1)(n+2)(2n+3)$

$= (n^2 + 2n + n + 2)(2n+3) = 2n^3 + 3n^2 + 4n^2 + 6n + 2n^2 + 3n + 4n + 6$

$= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6$

Donc : $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \dfrac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

Donc $P(n+1)$ vraie.

Ccl°: Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 17

Non car $u_1 = \frac{1+u_0}{2+u_0} = \frac{1-2}{2-2}$ $\quad 2-2=0$ donc $u_1 \notin \mathbb{R}$

Avec $u_0 = -\frac{5}{3}$, $u_1 = -2$ donc $u_2 \notin \mathbb{R}$

$u_0 = -\frac{13}{8}$ $\quad u_1 = -\frac{5}{3}$ $\quad u_2 = -2$ donc $u_3 \notin \mathbb{R}$

$u_0 = 1$ $\quad u_1 = \frac{2}{3}$ ... $u_n > 0$ donc $(u_n) \in \mathbb{R}$

$u_0 = 2$ et $u_0 = 3$ $\quad (u_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
donc $(u_n) \in \mathbb{R}$.

Exercice 18

$u_n = 2^n - 1$

Exercice 19

$P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$ (u_n) : $\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n \\ u_1 = 1 \\ u_0 = 2 \end{cases}$, $\quad u_n = (-2)^n + 3^n$

Montrons cette propriété par double récurrence:

Init: $n=0$: $u_0 = 2 = (-2)^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$

$P(0)$ vraie. $n=1$, $u_1 = 1$ $\quad (-2) + 3 = 1$ $\quad P(1)$ vraie

Héréd: Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie et $P(n+1)$ vraie. Mq $P(n+2)$ vraie

$P(n)$ vraie: $u_n = (-2)^n + 3^n$

$P(n+1)$ vraie: $u_{n+1} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1}$

$u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$ par définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$u_{n+2} = (-2)^{n+1} + 3^{n+1} + 6 \times (-2)^n + 6 \times 3^n$

$u_{n+2} = (-2)^n(-2+6) + 3^n(3+6)$

$= (-2)^n(2^2) + 3^n \times 3^2$

$u_{n+2} = (-2)^{n+2} + 3^{n+2}$ $\quad P(n+2)$ vraie

Ccl°: Donc par principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \; v_n = (-2)^n + 3^n$.

Exercice 20 ?

1. Parmi tous les objets, si l'objet est un vélo alors il existe un curé qui en possède un.
2. Pour tous les humains, s'ils sont curés alors parmi tous les objets un curé ne peut posséder 2 vélos.
3. Il existe un humain qui est curé et qui ne possède pas de vélo.

Exercice 21

(1) Vrai : Cela revient à montrer que pour $y > 1$ et $x \neq 0$, on a : $y = x^2 + 1$

$\iff x^2 = y - 1$

$\iff x = \sqrt{y-1}$ → existe car $y > 1$ et la fonction racine est définie sur $\mathbb{R}^+$

(2) Vrai : même raisonnement

(3) Vrai : c'est la réciproque de la pté précédente.

Contraposée : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \; x \neq 0$ et $y = x^2 + 1 \Rightarrow y > 1$

(4) Cette propriété revient à dire qu'un nombre entier relatif peut toujours s'écrire sous la forme d'un produit de 2 entiers relatifs. C'est faux, par exemple : $x = 7 \in \mathbb{Z}$ mais ne peut pas s'écrire comme un produit de 2 entiers relatifs.

Exercice 22

1) $\forall p \in \mathbb{N}, (v_p = a \Rightarrow p = 2k)$

$\exists k \in \mathbb{N}$

Ex 22 2) $\forall p \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, (p = 2k \Rightarrow u_p = a)$

3) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m$.

(négation de : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m > n$)

4) $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, (n \times m = 0 \Rightarrow n = 0$ et $m = 0)$

5) $\forall x \in E, (x \in F \Rightarrow E \subset F)$

Exercice 23

$\forall (x,y) \in E^2, (x \neq y) \Rightarrow (x \in P(x)$ et $y \notin P(y))$

ou : $\exists ! x \in E, P(x)$

Exercice 24

1) Fausse, $\emptyset$ ne contient pas d'éléments donc ~~ne peut~~ ces seuls éléments sont vides.

Plus généralement, si P est un prédicat, "$\forall x \in \emptyset, P(x)$" est forcément faux.

2) Faux de la même manière.

Exercice 25

Soit E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

On raisonne par l'absurde en montrant que C peut s'écrire comme produit cartésien de E et F.

On a alors : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x_E, y_F) \in \mathbb{R}^2\}$ (1)

Or, on peut prendre $x_E = 3$ et $y_F = 4$, $(x_E, y_F) \in \mathbb{R}^2$.

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 > 1$ donc l'égalité (1) est fausse. Donc C ne peut s'écrire sous forme de produit cartésien.

Exercice 26

Soit $x \geqslant 0$, Mq $\forall y > 0$ $(x \leqslant y \Rightarrow x = 0)$

$$x \leqslant y \iff x - y \leqslant 0$$

Or $x \geqslant 0$ et $y > 0$ donc :

$$x - y \leqslant 0$$

$$\iff x = 0$$

Exercice 27

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$ $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

Init : $n = 0$ $(1+x)^0 = 1 = 1 + 0 \times x$

$P(0)$ vraie.

Héréd : Soit $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ vraie. Mq $P(n+1)$ vraie.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$P(n)$ vraie donc : $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$

$\iff (1+x)^{n+1} \geqslant (1+nx)(1+x)$ car $x \in \mathbb{R}_+^*$

$\iff (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + x + nx + nx^2$ donc $1 + x \geqslant 0$

$\iff (1+x)^{n+1} \geqslant nx^2 + (n+1)x + 1$

Montrons que : $nx^2 + (n+1)x + 1 \geqslant 1 + (n+1)x$ (1)

(1) $\iff$ $nx^2 \geqslant 0$ (1)

(1) est vrai car $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$ donc $nx^2 \geqslant 0$

D'où :

$(1+x)^{n+1} \geqslant nx^2 + (n+1)x + 1 \geqslant 1 + (n+1)x$

$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x$

Donc $P(n+1)$ vraie.

Ccl° : Par récurrence, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$