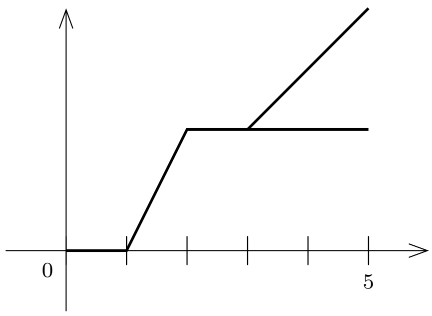
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fondamentaux Mathématiques

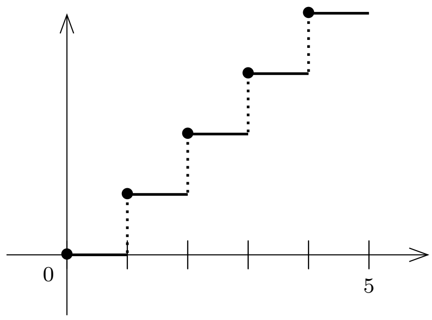
Feuille d'exercices n°4 : Applications

Exercice n°1

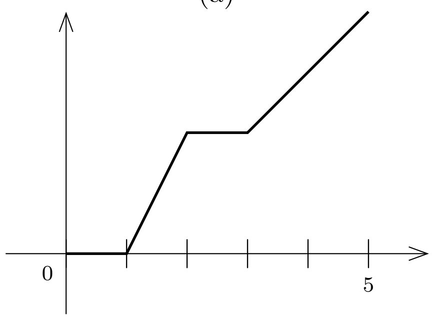
Les courbes suivantes sont-elles des graphes d'applications de $[0,5]$ dans $\mathbb{R}$?



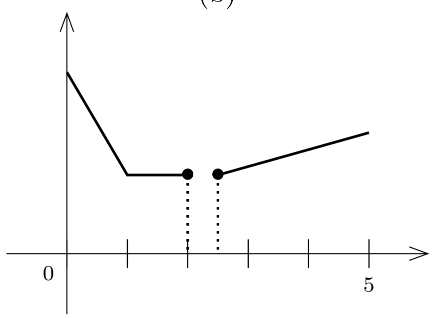
(a)



(b)



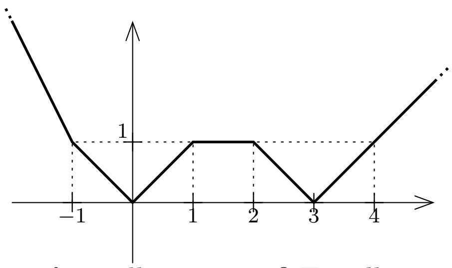
(c)

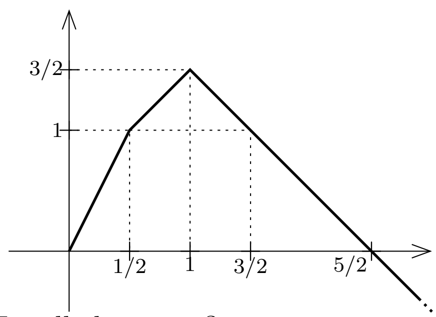


(d)

Exercice n°2

On considère les deux applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dont les graphes sont respectivement représentés ci-dessous :





1) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

2) Par lecture du graphe, déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f([2,4])$.

3) L'application g est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?

4) Par lecture du graphe, déterminer $g([1/2, 3/2])$ et $g^{-1}([0,1])$.

Exercice n°3

Soient les applications

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & 2n \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{array}$$

Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et de g.

Exercice n°4

On considère les applications suivantes :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \qquad \text{et} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_-^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Dessiner les graphes de ces applications. Sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Exercice n°5

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$\textbf{1)} \quad f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array} \qquad \textbf{2)} \quad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}$$

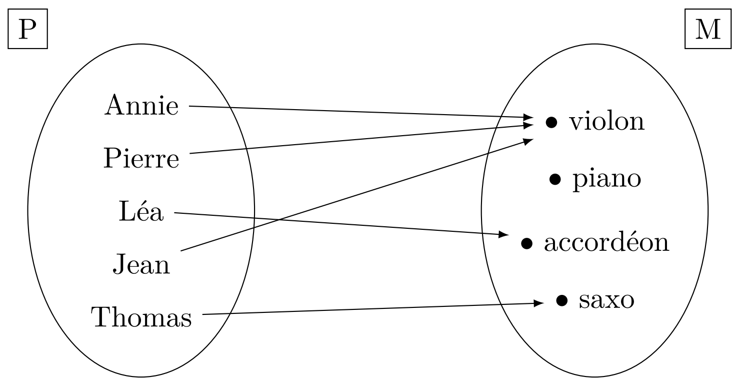
Exercice n°6

On considère un ensemble de personnes P = {Annie, Pierre, Léa, Jean, Thomas} ne jouant chacune que d'un instrument de musique et d'un seul de l'ensemble M = {violon, piano, accordéon, saxo}.
On définit l'application f de P vers M par : $f(x) = y$ si « x joue de y ».

1) Une telle application peut-elle être injective ? Si oui donnez un exemple.

2) Une telle application peut-elle être surjective ? Si oui donnez un exemple.

3) On considère l'application suivante :



a) Donner l'image par f de la partie $A =$ {Annie, Pierre, Léa} de P.

b) Donner l'image réciproque A_1 de $f(A)$.

c) Donner l'image de A_1 par f.

d) Donner l'image réciproque A_2 de $f(A_1)$.

e) Quelle est l'image de A_2 par f ?

Exercice n°7

On considère la relation qui associe à chaque habitant de Rennes le nom de sa rue. Est-ce bien une application ? Si oui est-elle injective ? surjective ? (justifier)

Exercice n°8

On associe à chaque habitant de Rennes son nombre de frères et soeurs dans $\mathbb{N}$. Définit-on ainsi une application de l'ensemble des habitants de Rennes dans $\mathbb{N}$? Si oui est-elle injective ? surjective ? (justifier)

$\boxed{\text{Exercice n°9}}$

Soient A, B deux ensembles non vides. Soit $f\colon A \to B$ une application. Dans chacun des cas, donner un exemple d'ensembles A et B et d'application $f\colon A \to B$ vérifiant simultanément les propriétés énoncées.

1) A et B ont chacun deux éléments et f n'est pas surjective.

2) A et B ont chacun deux éléments et f n'est pas injective.

3) A a trois éléments, B a quatre éléments et f est injective.

4) A a trois éléments, B a deux éléments et f est surjective.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fondamentaux Mathématiques

Applications : pour aller plus loin...

Exercice n°10

Dans chacun des cas suivants, construire si possible une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant la propriété donnée.

1) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f(x) = y.$

2) $\forall x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad f(x) = y.$

3) $\exists x \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{N} \quad f(x) = y.$

4) $\exists x \in \mathbb{N} \quad \exists y \in \mathbb{N} \quad f(x) = y.$

5) $\forall y \in \mathbb{N} \quad \exists x \in \mathbb{N} \quad f(x) = y.$

6) $\exists y \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{N} \quad f(x) = y.$

Exercice n°11

On considère l'ensemble E des étudiants de L1 Informatique - Électronique de l'Université de Rennes 1 et $F = \{n \in \mathbb{N}, 10 \leqslant n \leqslant 50\}$. Soit $f \colon E \to F$ l'application qui à un étudiant associe son âge en années entières. Sachant que le nombre d'étudiants inscrits en L1 Informatique-Électronique est 295 et que tous les étudiants sont majeurs, pensez-vous que l'application f peut être injective, surjective ?

Exercice n°12

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (p,q) & \longmapsto & 2^p 3^q \end{array}$

1) Donner l'image par f de $(1,1)$ ainsi que celle de $(2,1)$.

2) L'entier 2 a-t-il un antécédent par f ? Si oui, en déterminer un.

3) L'application f est-elle surjective ?

4) L'application f est-elle injective ?

Exercice n°13

Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, et A, B deux parties de E.

1) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

2) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Montrer, en donnant un exemple, que l'on n'a pas l'égalité en général.

3) Montrer que, si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

4) La formule $\forall (A,B) \in \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \quad A \subset B \Longleftrightarrow f(A) \subset f(B)$ est-elle toujours vraie ? On pourra, si besoin, donner un contre-exemple.

Exercice n°14

Soient E un ensemble et $f : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}$ une application, telle que pour toutes parties disjointes A, B de E on ait $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1) Montrer que $f(\emptyset) = 0$.

2) Montrer que pour toutes parties A, B de E on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.