(Version amendée pour les besoins du cours FOM de l'université de Rennes 1)

Exo7

Chapitre 1

Logique et raisonnements

Quelques motivations

- Il est important d'avoir un ***langage rigoureux***. La langue française est souvent ambigüe. Prenons l'exemple de la conjonction « ou » ; au restaurant « *fromage ou dessert* » signifie l'un ou l'autre mais pas les deux. Par contre si dans un jeu de carte on cherche « *les as ou les coeurs* » alors il ne faut pas exclure l'as de coeur. Autre exemple : que répondre à la question « *As-tu 10 euros en poche ?* » si l'on dispose de 15 euros ?
- Il y a des notions difficiles à expliquer avec des mots : par exemple la continuité d'une fonction est souvent expliquée par « *on trace le graphe sans lever le crayon* ». Il est clair que c'est une définition peu satisfaisante. Voici la définition mathématique de la continuité d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ en un point $x_0 \in I$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad (|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

  C'est le but de ce chapitre de rendre cette ligne plus claire ! C'est la ***logique***.
- Enfin les mathématiques tentent de ***distinguer le vrai du faux***. Par exemple « *Est-ce qu'une augmentation de 20 %, puis de 30 % est plus intéressante qu'une augmentation de 50% ?* ». Vous pouvez penser « oui » ou « non », mais pour en être sûr il faut suivre une démarche logique qui mène à la conclusion. Cette démarche doit être convaincante pour vous mais aussi pour les autres. On parle de ***raisonnement***.

Les mathématiques sont un langage pour s'exprimer rigoureusement, adapté aux phénomènes complexes, qui rend les calculs exacts et vérifiables. Le raisonnement est le moyen de valider ou d'infirmer une hypothèse et de l'expliquer à autrui.

1. Logique

1.1. Assertions

Une ***assertion*** est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps. On emploie aussi le terme de ***proposition*** à la place d'assertion.
Exemples :

- « Il pleut. »
- « Je suis plus grand que toi. »
- « $2+2=4$ »
- « $2 \times 3 = 7$ »
- « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$. »
- « Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z| = 1$. »

Si P est une assertion et Q est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de P et de Q.

L'opérateur logique « et »

L'assertion « P ***et*** Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P et Q » est fausse sinon. On résume ceci en une ***table de vérité*** :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figure 1.1 - Table de vérité de « P et Q »

Par exemple si P est l'assertion « *Cette carte est un as* » et Q l'assertion « *Cette carte est un coeur* » alors l'assertion « P et Q » est vraie si la carte est l'as de coeur et est fausse pour toute autre carte.

L'opérateur logique « ou »

L'assertion « P ***ou*** Q » est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P ou Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Figure 1.2 - Table de vérité de « P ou Q »

Si P est l'assertion « *Cette carte est un as* » et Q l'assertion « *Cette carte est un cœur* » alors l'assertion « P ou Q » est vraie si la carte est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de coeur).

Remarque
Pour définir les opérateurs « ou », « et » on fait appel à une phrase en français utilisant les mots ou, et ! Les tables de vérités permettent d'éviter ce problème.

La négation « non »

L'assertion « ***non*** P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie. :

P	non P
V	F
F	V

Figure 1.3 - Table de vérité de « non P »

L'implication $\Longrightarrow$

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion « (non P) ou Q » est notée « P $\Longrightarrow$ Q ».

Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	P $\Longrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Figure 1.4 - Table de vérité de « P $\Longrightarrow$ Q »

L'assertion « P $\Longrightarrow$ Q » se lit en français « P *implique* Q ».
Elle se lit souvent aussi « *si P est vraie alors Q est vraie* » ou « *si P alors Q* ».
Par exemple :

- « $0 \leqslant x \leqslant 25 \Longrightarrow \sqrt{x} \leqslant 5$ » est vraie (prendre la racine carrée).
- « $x \in]-\infty, -4[\Longrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ » est vraie (étudier le binôme).
- « $\sin(\theta) = 0 \Longrightarrow \theta = 0$ » est fausse (regarder pour $\theta = 2\pi$ par exemple).
- « $2 + 2 = 5 \Longrightarrow \sqrt{2} = 2$ » est vraie ! Et oui, si P est fausse alors l'assertion « P $\Longrightarrow$ Q » est toujours vraie.

Si « P $\Longrightarrow$ Q » est vraie, on dit que Q est une ***condition nécessaire*** pour P, et que P est une ***condition suffisante*** pour Q.

L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L' ***équivalence*** est définie par :

$$\boxed{\text{« P} \Longleftrightarrow \text{Q » est l'assertion « (P} \Longrightarrow \text{Q) et (Q} \Longrightarrow \text{P) ».}}$$

On dira « P *est équivalent à* Q » ou « P *équivaut à* Q » ou « P *si et seulement si* Q ». Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses. La table de vérité est :

P	Q	P $\Longleftrightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Figure 1.5 - Table de vérité de « P $\Longleftrightarrow$ Q »

Exemples :

- Pour $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, l'équivalence « $x.x' = 0 \Longleftrightarrow (x = 0$ ou $x' = 0)$ » est vraie.
- Voici une équivalence toujours fausse (quelle que soit l'assertion P) : « P $\Longleftrightarrow$ non(P) ».

On s'intéresse davantage aux assertions vraies qu'aux fausses, aussi dans la pratique et en dehors de ce chapitre on écrira « P $\Longleftrightarrow$ Q » ou « P $\Longrightarrow$ Q » uniquement lorsque ce sont des assertions vraies. Par exemple si l'on écrit « P $\Longleftrightarrow$ Q » cela sous-entend « P $\Longleftrightarrow$ Q *est vraie* ». Attention rien ne dit que P et Q soient vraies. Cela signifie que P et Q sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

Proposition 1

Soient P, Q, R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :

1. P $\Longleftrightarrow$ non(non(P))
2. (P et Q) $\Longleftrightarrow$ (Q et P)
3. (P ou Q) $\Longleftrightarrow$ (Q ou P)
4. non(P et Q) $\Longleftrightarrow$ (non P) ou (non Q)
5. non(P ou Q) $\Longleftrightarrow$ (non P) et (non Q)

Ce sont les ***lois de De Morgan***.

6. $\big($ P et (Q ou R)$\big)$ $\Longleftrightarrow$ (P et Q) ou (P et R)
7. $\big($ P ou (Q et R)$\big)$ $\Longleftrightarrow$ (P ou Q) et (P ou R)

On parle de ***distributivité*** du « et » par rapport au « ou » et du « ou » par rapport au « et ».

8. « P $\Longrightarrow$ Q » $\Longleftrightarrow$ « non(Q) $\Longrightarrow$ non(P) ». L'implication « non(Q) $\Longrightarrow$ non(P) » est appelée ***implication contraposée*** de « P $\Longrightarrow$ Q ».

Démonstration

Voici des exemples de démonstrations :

4. Il suffit de comparer les deux assertions « non(P et Q) » et « (non P) ou (non Q) » pour toutes les valeurs possibles de P et Q. Par exemple si P est vrai et Q est vrai alors « P et Q » est vrai donc « non(P et Q) » est faux ; d'autre part (non P) est faux, (non Q) est faux donc « (non P) ou (non Q) » est faux. Ainsi dans ce premier cas les assertions sont toutes les deux fausses. On dresse ainsi les deux tables de vérité et comme elles sont égales les deux assertions sont équivalentes.

P	Q	P et Q	non(P et Q)
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

P	Q	non P	non Q	(non P) ou (non Q)
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Figure 1.6 - Tables de vérité de « non(P et Q) » et de « (non P) ou (non Q) »

6. On fait la même chose mais il y a trois variables : P, Q, R. On compare les tables de vérité :

P	Q	R	Q ou R	P et (Q ou R)
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	F

P	Q	R	P et Q	P et R	(P et Q) ou (P et R)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Les deux assertions « P et (Q ou R) » et « (P et Q) ou (P et R) » ont la même table de vérité donc les assertions sont équivalentes.

8. Par définition, l'implication « P $\Longrightarrow$ Q » est l'assertion « (non P) ou Q ». Donc l'implication « non(Q) $\Longrightarrow$ non(P) » est équivalente à « non(non(Q)) ou non(P) » qui équivaut encore à « Q ou non(P) » et donc est équivalente à « P $\Longrightarrow$ Q ». On aurait aussi pu encore une fois dresser les deux tables de vérité et voir qu'elles sont égales