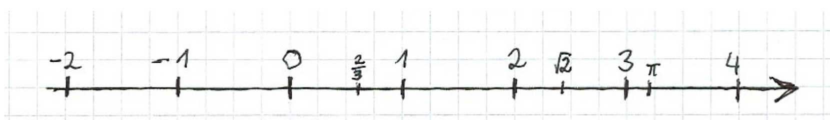
Bert Wiest
Université de Rennes 1
UFR Mathématiques et IRMAR

Cours MAT1 à l'ISTIC

CONTENTS

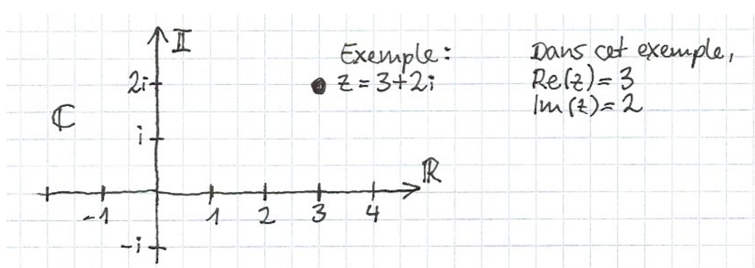
1. NOMBRES COMPLEXES

Rappel 1.1. Les nombres réels sont en correspondance avec les points sur une droite



Définition 1.2. Les nombres complexes sont en correspondance avec les points sur un plan. L'axe des abscisses contient les nombres réels $\mathbb{R}$, l'axe des ordonnées les "nombres *imaginaires*" $\mathbb{I}$. L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Un élément général z de $\mathbb{C}$ s'écrit $z = a + b \cdot i$, avec $a, b, \in \mathbb{R}$. Ici, a s'appelle la *partie réelle*, noté $Re(z)$, et b la *partie imaginaire*, notée $Im(z)$.



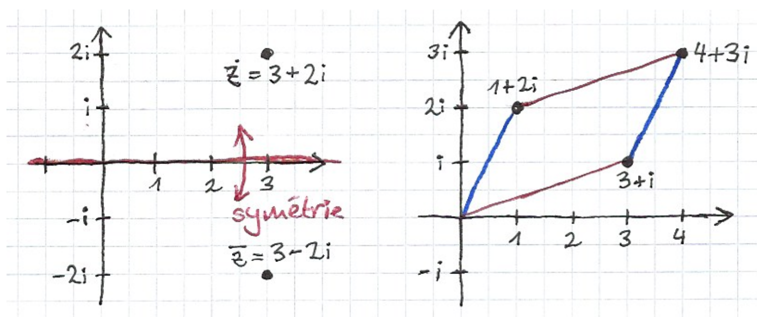
L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z = a + b \cdot i$ s'appelle l'écriture sous *forme algébrique*.

Calculs avec nombres complexes: on peut additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres complexes. Pour définir la multiplication, on définit

$$\boxed{i \cdot i \;=\; -1}$$

Aussi, si $z = a + b \cdot i$, on définit le *conjugué complexe* $\bar{z}$ de z par $\bar{z} = a - b \cdot i$

Exemple 1.3. • Si $z = (3 + 2i)$ alors $Re(z) = 3, Im(z) = 2$, et $\bar{z} = 3 - 2i$.



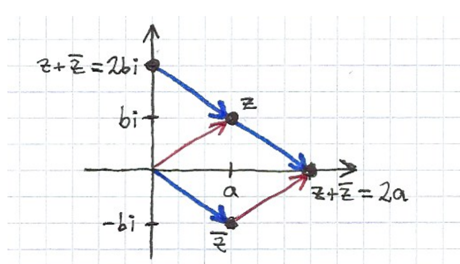
- $(3 + i) \;+\; (1 + 2i) = 4 + 3i$.
  Interprétation géométrique de l'addition: comme l'addition de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.
- $(3 + i) - (1 + 2i) = 2 - i$
- $(3 + i) \cdot (1 + 2i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2i + i \cdot 1 + i \cdot 2i = 3 + 6i + i - 2 = 1 + 7i$.
  Interprétation géométrique de la multiplication? Dans 30 minutes
- $\frac{3+i}{1+2i}$ =? Astuce pour calculer le quotient de deux nombres complexes: multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué complexe du dénominateur et utiliser la troisième identité remarquable :

$$\frac{3+i}{1+2i} = \frac{(3+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-5i}{1^2-(2i)^2} = \frac{5-5i}{5} = 1 - i.$$

Remarque 1.4. Formule (théoriquement intéressante, pas pour calculs pratiques): si $z \in \mathbb{C}$,

$$Re(z) = \tfrac{z+\bar{z}}{2}, \quad Im(z) = \tfrac{z-\bar{z}}{2i}$$

(Démonstration : si $z = a + bi$, alors $\frac{z+\bar{z}}{2} = \frac{a+b\cdot i+a-b\cdot i}{2} = \frac{2a}{2} = a$.)

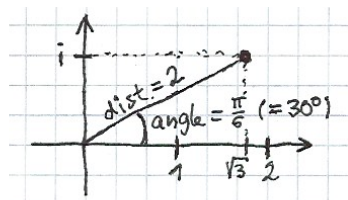


Définition 1.5. Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit le *module* $|z|$ et l'*argument* $arg(z)$ de z par un dessin :

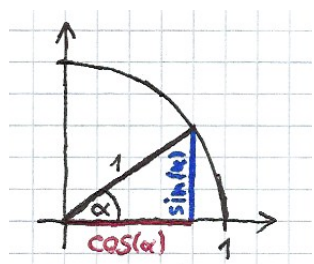
Formule pour le module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Autre formule pour la même chose : $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$. (Dém : $\sqrt{(a + b \cdot i)(a - b \cdot i)} = \sqrt{a^2 - (b \cdot i)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$)

Attention : $arg(z)$ n'est défini qu'à des multiples de 2π près.

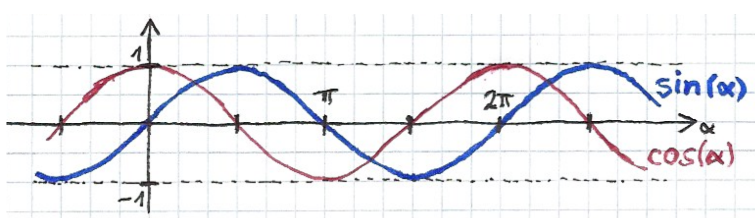
Exemple 1.6. Si $z = \sqrt{3} + i$, alors $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, et $arg(z) = \frac{\pi}{6}$ (ou $\frac{13\pi}{6}$ ou ...) – explication dans 5 minutes.



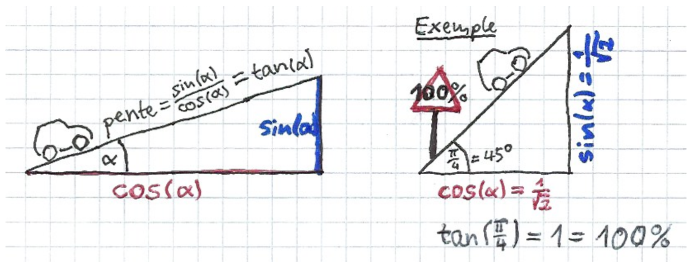
Rappel 1.7. (Les fonctions trigonométriques) Définition des fonctions sinus et cosinus par un dessin :



Les graphes de ces deux fonctions :



Définition de la fonction tangente : $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$. Interprétation géométrique : tangente = pente.



Valeurs particulières : $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$, $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1, \tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$.

Rappel notation : on écrit souvent $\sin^2(\alpha)$ pour $(\sin(\alpha))^2$

Formules :

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ pour tout α. (Démonstration : utiliser Pythagore)
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$,
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$. Sur la page web du cours vous trouverez une démonstration élémentaire de cette égalité.

Définition 1.8. L'écriture sous *forme trigonométrique* d'un nombre complexe z est

$$z = R \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

avec $R > 0, \varphi \in \mathbb{R}$.

Ici, R est le module de z (car $|z| = \sqrt{(R^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))} = \sqrt{R^2} = R$) et φ est l'argument de z.

Transformer entre formes algébrique et trigonométrique

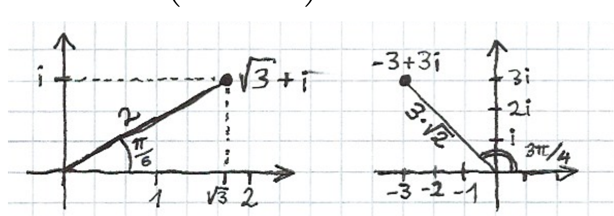
Question : comment transformer entre forme algébrique et forme trigo ? Rép : Transf. trig→alg. est facile, la transformation réciproque alg→trig plus délicate

Exemple 1.9. **(a) trig → alg :** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 2$, $arg(z) = \frac{\pi}{6}$, c.à.d.,

écriture sous forme trigo : $z = 2 \cdot \left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right) \implies$ écriture sous forme trigo ???

Réponse:

$$z = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$



(b) alg → trig : Soit $z = -3 + 3i$. Écriture de z sous forme trigo ? Rép : il faut calculer module et argument. $|z| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$, et $arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ par inspection. Donc $z = 3\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right)$.

Proposition 1.10. *En général, si $z = a + b \cdot i$, alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, et*

$$arg(z) = \arctan\left(\tfrac{b}{a}\right) \quad si \quad a > 0 \qquad et \qquad arg(z) = \pi + \arctan\left(\tfrac{b}{a}\right) \quad si \quad a < 0$$

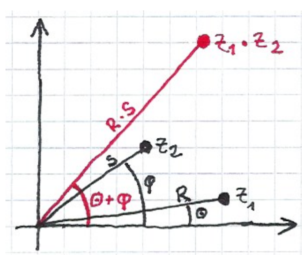
Interprétation géométrique de la multiplication

Écrivons $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ en forme trigo, et calculons $z_1 \cdot z_2$:

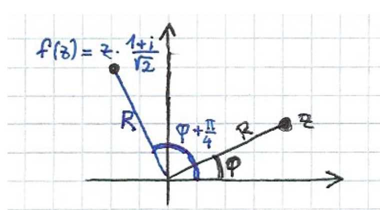
si $z_1 = R \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, $z_2 = S \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$, alors

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= R \cdot S \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \cdot (\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) \\ &= R \cdot S \cdot (\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi) + i \cdot (\cos(\theta)\sin(\varphi) + \sin(\theta)\cos(\varphi))) \\ &= R \cdot S \cdot (\cos(\theta + \varphi) + i\sin(\theta + \varphi)) \end{aligned}$$

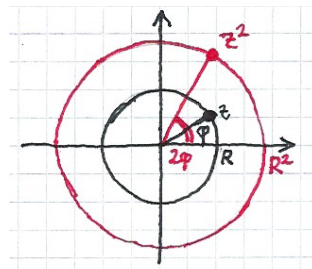
Proposition 1.11. *Si l'on multiplie deux nombres complexes, alors leurs modules sont multipliés, et leurs arguments sont additionnés.*



Exemple 1.12. • Visualisation de la fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Remarquez : $|\frac{1+i}{\sqrt{2}}| = 1$ et $arg(\frac{1+i}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$. Donc f = rotation par l'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de l'origine.



- Visualisation de la fonction $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z \cdot z = z^2$. Remarquez que si $|z| = R$ et $arg(z) = \varphi$, alors $|g(z)| = R^2$ et $arg(g(z)) = 2\varphi$.

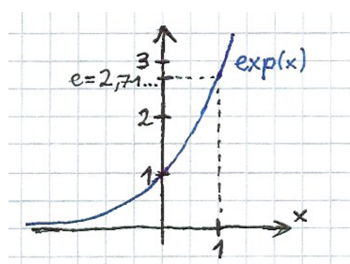


- Sur le site web du cours vous trouverez un programme qui permet de visualiser certaines fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

La forme exponentielle

Rappel 1.13. La fonction exponentielle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x) = e^x$ (deux notations pour même chose) est définie par le fait que

- $\exp(0) = 1$, et
- $\exp'(x) = \exp(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

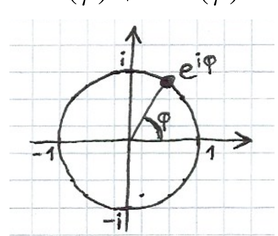


On acceptera sans démonstration le résultat suivant :

Proposition 1.14. *Il existe une fonction* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z) = e^z$ *telle que*

- *pour* $z \in \mathbb{R}$, $\exp(z)$ *coincide avec la fonction exponentielle que vous connaissez*
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
- *Donnée par la série :* $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$ *(Hors programme)*
- *La propriété magique :*

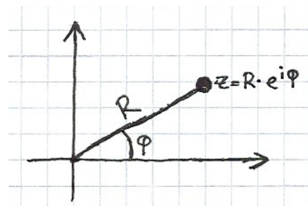
$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$$



Par exemple, $e^{i\pi} = -1$.

Jouez avec le programme sur le site web, pour bien visualiser la fonction exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$!

Définition 1.15. L'écriture sous *forme exponentielle* d'un nombre complexe z est $z = R \cdot e^{i\varphi}$, où $R > 0$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.



Remarque 1.16. Si $z = R \cdot e^{i\varphi}$, alors $|z| = R$, et $arg(z) = \varphi$. La forme exponentielle est donc juste une petite re-écriture de la forme trigonométrique.

Exemple 1.17.
- $\sqrt{3} + i = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ (voir Exemple 1.9)
- $(\sqrt{3} + i)^3 =$? Rép : $= (2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}})^3 = 2^3 \cdot (e^{i\frac{\pi}{6}})^3 = 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}\cdot 3} = 8 \cdot e^{i\pi/2} = 8i$.
- Pour tout angle φ, on a

$$\cos(\varphi) = Re(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \quad \text{et} \quad \sin(\varphi) = Im(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})$$

  Vous devrez connaître ces deux équations par coeur !

Linéarisation

Question 1.18. Étant donné une fonction de la forme

$$\cos^n(x) \cdot \sin^m(x) \;\; (n, m \in \mathbb{N})$$

est-ce qu'il est possible de la "linéariser", c.à.d., la re-écrire comme somme de fonctions $\cos(ax)$, $\sin(bx)$, où $a, b \in \mathbb{N}$?

Réponse Oui, il suffit de reécrire $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Exemple 1.19. $\cos^2(x) \cdot \sin(x) = (\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}))^2 \cdot \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{4}(e^{ix}e^{ix} + 2e^{ix}e^{-ix} + e^{-ix}e^{ix}) \cdot \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \cdot (e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{3ix} - e^{ix} + 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-ix} - e^{-3ix}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2i} \cdot (e^{3ix} - e^{-3ix} + e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{4}(\sin(3x) + \sin(x))$

Exercice 1.20. Linéariser $\sin^2(x)$ (Réponse : $\frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$)

Racines carrés d'un nombre complexe

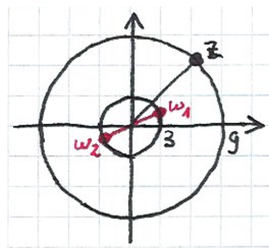
Question 1.21. Étant donné $z \in \mathbb{C}$, comment trouver des "racines carrées" de z, c.à.d. des $w \in \mathbb{C}$ tels que $w^2 = z$?

Remarque 1.22. Attention, interdiction !!! Vous n'avez pas le droit d'écrire $w = \sqrt{z}$, car en général il y a *deux* tels nombres w. (Il n'y a pas de *fonction* $\sqrt{\ }$: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$!)

Réponse 1.23. Il y a toujours exactement deux solutions, w_1 et $w_2 = -w_1$! (Sauf dans le cas $z = 0$, où il y a la seule solution $w = 0$.) Pour *trouver* ces solutions, il y a deux méthodes, qui sont plus ou moins pratiques selon la forme de z.

(a) Si z est donné (ou s'écrit de façon élégante) en forme trigo/exponentielle

Exemple : si $z = 9e^{i\frac{\pi}{4}}$. Alors les racines carrées de z sont $w_1 = \sqrt{9}e^{\frac{1}{2}\cdot i\frac{\pi}{4}} = 3e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $w_2 = 3e^{i\cdot\frac{9\pi}{8}}$.



En général, si $z = R\cdot e^{i\varphi}$, alors les racines carrées sont $w_1 = \sqrt{R}\cdot e^{i\frac{\varphi}{2}}$ et son négatif $w_2 = -w_1 = \sqrt{R}\cdot e^{i(\frac{\varphi}{2}+\pi)}$

(b) Si z est donné sous forme algébrique

Soit $z = a + b\cdot i$ donné. Nous cherchons $w = \alpha + \beta\cdot i$ tel que

$$w^2 = z, \quad \text{c.a.d.} \quad \alpha^2 - \beta^2 + (2\alpha\beta)\cdot i = a + b\cdot i, \quad \text{c.a.d.}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = a \ (*) \quad \text{et} \quad 2\alpha\beta = b \ (**)$$

Un tel w satisfera aussi $|w|^2 = |z|$, c.à.d.,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} \quad (***)$$

Méthode : on écrit les trois équations $(*), (**), (***)$, et on prend la somme de $(*)$ et $(***)$: $\alpha^2 - \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 = a + \sqrt{a^2+b^2}$

$$2\alpha^2 = a + \sqrt{a^2+b^2}$$

ce qui permet de calculer les deux valeurs possibles de α. Ensuite on utilise $(**)$ pour trouver les valeurs correspondantes de β.

Exemple : Si $z = 3 + 4i$, $(a = 3, b = 4)$, cherchons $w = \alpha + \beta\cdot i$ t.q. $w^2 = z$. Trois équations

$$\alpha^2 - \beta^2 = a = 3 \ (*), \qquad 2\alpha\beta = b = 4 \ (**), \qquad \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2+b^2} = 5 \ (***)$$

Somme de $(*)$ et $(***)$:

$$2\alpha^2 = 3 + 5 = 8, \quad \text{donc} \quad \alpha = \pm 2$$

Maintenant l'équation $(**)$ nous dit :

$$\text{si } \alpha = 2, \ \text{alors } \beta = \frac{4}{2\alpha} = 1; \qquad \text{si } \alpha = -2, \ \text{alors } \beta = \frac{4}{2\alpha} = -1.$$

On a trouvé les deux racines : $w_1 = 2 + i$, $w_2 = -(2 + i)$. (En général, la réponse est beaucoup moins sympathique !)

Équations du second dégré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Rappel 1.24. Comment calculer les racines réelles d'une équation $az^2 + bz + c = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$? Réponse : on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions z_1 et $z_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Si $\Delta = 0$, il y a une racine double $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$. Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de racine réelle.

Théorème 1.25. *Une équation du second degré dans* $\mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0, \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{C}$$

a les solutions

$$z_1 \text{ et } z_2 = \frac{-b \pm w}{2a} \quad \text{où } w \text{ est une racine carrée de } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Exemple 1.26. Résolvons l'équation

$$z^2 - (5 + 3i)z + (4 + 7i) = 0$$

Calcul : $\Delta = (-5-3i)^2 - 4 \cdot (4+7i) = 16 + 30i - 16 - 28i = 2i$. Calcul (exercice) : les racines carrées de Δ sont $\pm(1 + i)$. Les solutions de l'équation sont $z = \frac{5+3i}{2} \pm \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$. Autrement dit

$$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = 2 + i$$

Racines $n$èmes de l'unité

Question 1.27. Quelles sont les racines $n$èmes de 1 ("de l'unité"), c.à.d., quelles sont les solutions w de

$$w^n = 1 \text{ ?}$$

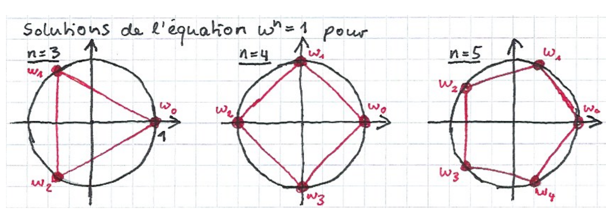
Si $w = R \cdot e^{i\varphi}$ est une telle racine, alors $R^n \cdot e^{in\varphi} = w^n = 1 = 1 \cdot e^{i0}$. Donc $R = 1$, et $n\varphi$ est un multiple de 2π.

$$\ldots n\varphi = -2\pi \;\text{ ou }\; n\varphi = 0 \;\text{ ou }\; n\varphi = 2\pi \;\text{ ou }\; n\varphi = 4\pi \ldots$$

Réponse 1.28. Il y a exactement n solutions :

$$w_0 = e^0 = 1,\; w_1 = e^{i \cdot 2\pi/n},\; w_2 = e^{i \cdot 4\pi/n},\; w_3 = e^{i \cdot 6\pi/n}, \ldots, w_{n-1} = e^{i \cdot (n-1)2\pi/n}.$$

(La solution suivante $e^{i \cdot 2n\pi/n} = e^{i \cdot 2\pi} = e^0$ est déjà vue.)



Exemple 1.29. Cas $n = 3$: les solutions de $w^3 = 1$ sont $w = 1$, $e^{2\pi/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, et $e^{4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Cas $n = 4$: les solutions de $w^4 = 1$ sont $w = 1,\; i,\; -1,\; -i$.

Racines $n$èmes d'un nombre complexe arbitraire

Question 1.30. Soit $z = R \cdot e^{i\varphi}$. Quelles sont les racines $n$èmes de z, c.à.d., les solutions w de

$$w^n = z\ ?$$

Réponse 1.31. Il y a exactement n racines :

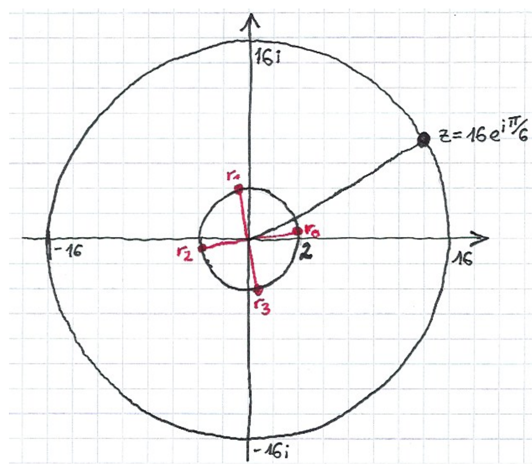
$$r_0 := \sqrt[n]{R} \cdot e^{i \cdot \varphi/n} \text{ (la racine “évidente”), et }, \ r_0 \cdot w_1, r_0 \cdot w_2, \ldots, \ r_0 \cdot w_{n-1},$$

où $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ sont les racines $n$èmes de l'unité.

(En général, étant donné $z \in \mathbb{C}$, si l'on connait *une* racine $n$ème w de z, et on veut les connaitre *toutes*, il suffit de multiplier w par les racines $n$èmes de l'unité.)

Exemple 1.32. Les racines quatrièmes de $z = 16 \cdot e^{i\pi/6}$ sont

$$r_0 = 2e^{i\pi/24}, \ r_1 = 2e^{i \cdot 13\pi/24}, \ r_2 = 2e^{i \cdot 25\pi/24}, \ r_3 = 2e^{i \cdot 37\pi/24}$$



2. Fonctions

Définition 2.1. Une *fonction* (ou *application*) est la donnée

- de deux ensembles A, B, et
- pour chaque élément a de A, d'un élément $b = f(a)$ de B, appelé la *valeur de f* en a.

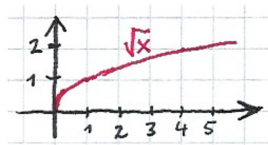
L'ensemble A s'appelle l'*ensemble de définition* de f. On note

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & a & \mapsto & f(a) \end{array}$$

Pour le reste du cours, on va s'intéresser aux *fonctions réelles*, c.à.d. aux fonctions

$$f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \text{où } A \subseteq \mathbb{R}$$

Remarque 2.2. Si je vous donne une fonction, par exemple $f(x) = \sqrt{x}$, sans spécifier le domaine de définition, alors vous devez toujours le faire vous-même ! Dans cet exemple, le domaine de définition de f est $[0, +\infty[$.

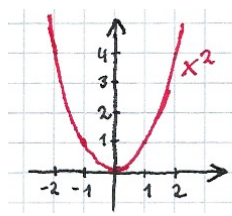


Définition 2.3. L'ensemble

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

s'appelle l'*image* de f, noté *Im*(f). (C'est un sous-ensemble de B.)

Exemple 2.4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Alors image de f est $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

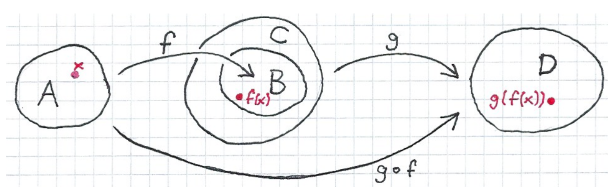


Définition 2.5. • Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ et $g\colon A \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit des fonctions $f + g$, $f \cdot g$ et λf de la manière évidente :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

• Si $f\colon A \to B$, et $g\colon C \to D$, où $B \subset C$, on peut définir la *composition*

$$g \circ f\colon A \to D,\ x \mapsto g(f(x))$$



Attention à l'ordre des lettres : $g \circ f$ veut dire, appliquer d'abord f, puis g. Attention aussi, $g \circ f(x) = g(f(x))$ n'est défini que si $f(x)$ est dans le domaine de définition de g.

Exemple 2.6. • $f\colon x \mapsto 1 + x$, $g\colon x \mapsto \sqrt{x}$, alors $g \circ f\colon \sqrt{1 + x}$, défini pour ?

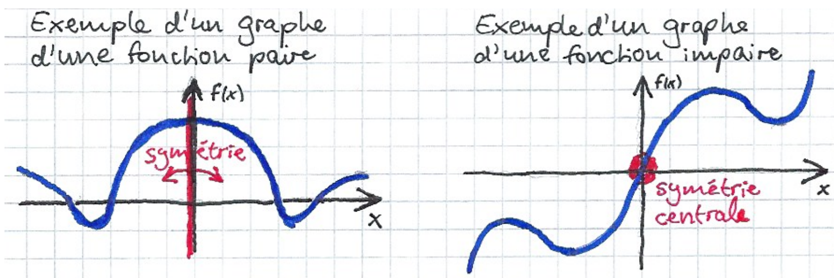
• $f\colon x \mapsto x^2$, $g\colon x \mapsto \sqrt{x}$, alors

$$g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x^2} = |x|, \quad \text{mais} \quad f \circ g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

Parité

Définition 2.7. Soit $f\colon\ A \to B$ une application ($A, B \subset \mathbb{R}$).

- On dit f est *paire* si, pour tout $x \in A$,
$$-x \in A, \text{ aussi, et } \ f(-x) = f(x)$$
De façon équivalente, le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- On dit f est *impaire* si, pour tout $x \in A$,
$$-x \in A, \text{ aussi, et } \ f(-x) = -f(x)$$
De façon équivalente, le graphe de f possède une symétrie centrale.



Exemple 2.8. Exemples de fonctions paires : $\cos(x), |x|,\ x^2,\ x^4$, plus généralement polynômes avec que des termes en degré pair : $P(x) = 3x^6 + \sqrt{2}x^4 - 12x^2 + 3$

Exemples de fonctions impaires : $\sin,\ x, x^3$, plus généralement polynômes avec que des termes en degré impair : $P(x) = 4x^5 - 2x^3 + 2{,}35x$

Exercice 2.9. Supposons f est une fonction, p une fonction paire, i, i_1, i_2 des fonctions impaires. Trouver la parité de
$$(a)\ f \circ p \qquad (b)\ p \circ i \qquad (c)\ i_2 \circ i_1$$

Définition 2.10. Une fonction $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est *périodique* de période T si, pour tout x on a $f(x) = f(x+T)$.

Exemple 2.11. Les fonctions $\sin, \cos, \tan$ sont périodiques de période 2π.

Fonction (dé)croissante

Définition 2.12. $f\colon\ A \to B$ (avec $A, B \subset \mathbb{R}$) est *croissante* si $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \leqslant x_2$ implique que $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Exercice : écrire la définition d'une fonction

- décroissante
- strictement croissante
- strictement décroissante

f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou décroissante.

Exemple 2.13.

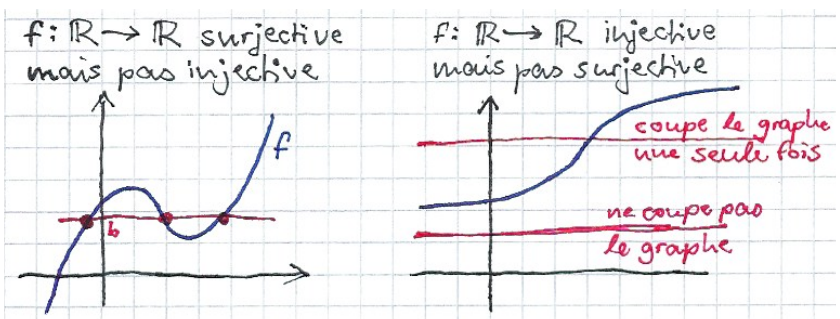
- $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est strictement croissante

- $g(x) = x^3$ est strictement croissante
- $h(x) = 0$ est croissante et décroissante (mais pas strictement).
- strictement monotone $\implies$ injective

Injectif - surjectif - bijectif

Rappel 2.14. Une fonction $f\colon A \to B$ (avec $A, B \subset \mathbb{R}$) est

- *injective* si pour tout $b \in B$, il y a *au plus un* $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Autrement dit, si chaque droite horizontale coupe le graphe au plus une fois.
- est *surjective* si pour tout $b \in B$, la droite horizontale à hauteur b coupe le graphe de f *au moins* une fois.
- Une fonction est *bijective* si elle est surjective et injective, c.à.d. si, pour tout $b \in B$, il y a *exactement un* $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Autrement dit, la droite horizontale à hauteur b coupe le graphe exactement une fois.

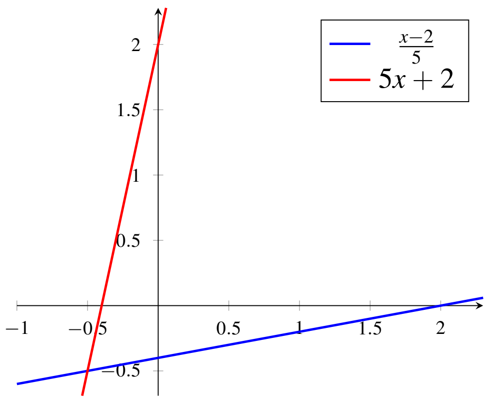


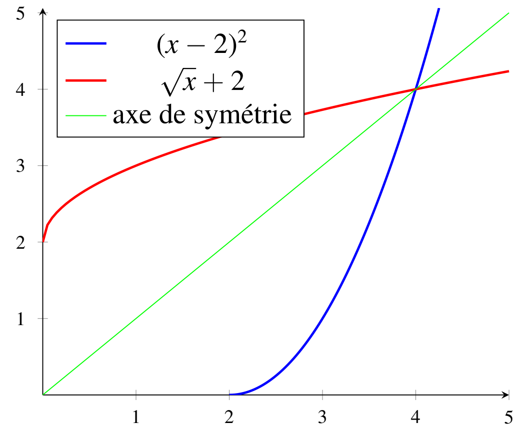
Définition 2.15. Soit $f\colon A \to B$ une fonction bijective. Alors on peut définir la *fonction réciproque* ou *fonction inverse* $f^{-1}\colon B \to A$ de la manière évidente : f^{-1} envoie $y \in B$ sur l'unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$.

Idée La fonction $y = f(x)$ exprime y en fonction de x. La fonction réciproque $x = f^{-1}(y)$ exprime x en fonction de y.

Exemple 2.16. • Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = \frac{x-2}{5}$. Pour voir si f^{-1} existe, et la trouver si oui, essayons d'exprimer x comme fonction de y. On trouve $x = 5y+2$, donc on a bien une fonction réciproque : $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y \mapsto 5y+2$.

• la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x-2)^2$ n'a pas de fonction réciproque, mais $f\colon [2,+\infty[\to [0,+\infty[$ a la réciproque $f^{-1}\colon [0,+\infty) \to [2,+\infty[$, $y \mapsto \sqrt{y}+2$.





Remarque 2.17. Pour tout $x \in A$ on a $f^{-1}(f(x)) = x$. Pour tout $y \in B$ on a $f(f^{-1}(y)) = y$.

Calculer la fonction réciproque revient à échanger les rôles de x et y. Conséquence :

Proposition 2.18. *Le graphe de f^{-1} est obtenu à partir du graphe de f en appliquant une symétrie dans la diagonale principale.*

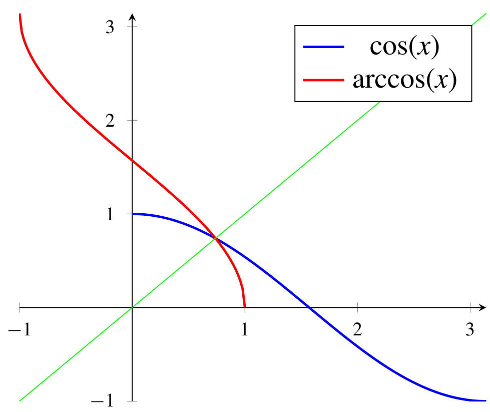
Exemples :

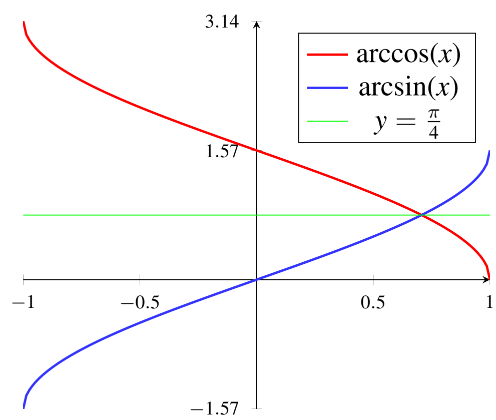
Définition 2.19. Les fonction trigonométriques réciproques arccosinus, arcsinus, et arctangente

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \text{ fonction réciproque de } \cos : [0,\pi] \to [-1,1] \text{ (décroissant)}$$

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \text{ fonction réciproque de } \sin : [-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}] \to [-1,1] \text{ (croiss.)}$$

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\text{ fonction réciproque de } \tan :]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$





Proposition 2.20. *Pour tout y entre -1 et 1,* $\arcsin(y) + \arccos(y) = \frac{\pi}{2}$

Démonstration admise.

Dans le reste de ce chapitre on verra quelques exemples classiques de fonctions.

- Polynômes
- Fractions rationnelles
- Fonction valeur absolue (que exercices)
- Exponentielle, puissances, logarithmes
- Déjà vu : fonctions trigonométriques (sin, cos, tan) et leurs réciproques arcsin, arccos, arctan.

Polynômes

Définition 2.21. Un *polynôme* à coefficients réels/complexes, de *degré* n est une fonction de la forme

$$P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + a_{n-2}X^{n-2} + \ldots + a_2X^2 + a_1X + a_0, \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N} \text{ et } a_i \in \mathbb{R} \text{ resp. } \mathbb{C}, a_n \neq 0$$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée X et à coefficients dans $\mathbb{R}$. (Semblable pour $\mathbb{C}[X]$...)

Notation : degré $\deg(P) = n$.

Il y a aussi le *polynôme trivial* $P(X) = 0$, et on définit $\deg(P) = -\infty$.

Exemple 2.22. $P(X) = 2X^2 + 3X - 1$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré 2.

$\frac{5}{7}X^9 - (1+2i)X$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ de degré 9.

On peut additionner et multiplier des polynômes :

Exemple 2.23. $(X^2 - 2X + 3) + (3X^3 - X + 4) = 3X^3 + X^2 - 3X + 7$

$(X^2 - 2X + 3) \cdot (3X^3 - X + 4) = 3X^5 - 6X^4 + 9X^3 - X^3 + 2X^2 - 3X + 4X^2 - 8X + 12 = 3X^5 - 6X^4 + 8X^3 + 6X^2 - 11X + 12$

Proposition 2.24. $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Division euclidienne de polynômes

Rappel 2.25. concernant la division de nombres : si A, B sont des entiers positifs, alors on peut effectuer la division avec reste A/B. Ça veut dire, il existe un unique couple d'entiers positifs ou nuls (Q, R) avec

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{et} \quad R < B.$$

On appelle Q le *quotient* et R le *reste* de la division. Informellement, on dit parfois "$A/B = Q$, reste R".

Exemple 2.26. Nous cherchons la division avec reste de $A = 73258$ par $B = 17$.

$$\begin{array}{ccccc|l}
5&3&2&5&8&1\,7\\ \cline{6-6}
6&8&&&&4\,3\,0\,9\\ \cline{1-5}
&5&2&&&\\
&5&1&&&\\ \cline{2-5}
&&1&5&&\\
&&&0&&\\ \cline{3-5}
&&1&5&8&\\
&&1&5&3&\\ \cline{3-5}
&&&&5&
\end{array}
\qquad \text{donc : } 73258 = 17 \cdot 4309 + 5$$

Maintenant: la même chose, pas avec des nombres, mais avec des polynômes $A[X], B[X] \in \mathbb{R}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.

Théorème 2.27. *Soient A, B deux polynômes, $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que*

$$A = B \cdot Q + R \quad \textit{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Démonstration admise, mais pas très dure!

Définition 2.28. On dit que le polynôme B *divise* le polynôme A si dans la division de A par B il n'y a pas de reste : $R = 0$.

Exemple 2.29. La division euclidienne de $A = X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ par $B = X^2 + 1$ s'écrit

$$\begin{array}{l|l}
X^3 + 3X^2 + 2X + 1 & X^2 + 1\\ \cline{2-2}
X^3 \qquad\quad + X & X + 3\\ \hline
\qquad 3X^2 + X + 1 & \\
\qquad 3X^2 \qquad + 3 & \\ \hline
\qquad\qquad X - 2 &
\end{array}$$

$$\underbrace{X^3 + 3X^2 + 2X + 1}_{A(X)} = \underbrace{(X^2+1)}_{B(X)} \cdot \underbrace{(X+3)}_{Q(X)} + \underbrace{(X-2)}_{R(X)}$$

Ici, B ne divise pas A, car on a un reste $(X - 2)$.

Notation 2.30. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ (ou $\mathbb{R}[X]$) un polynôme. Un nombre $a \in \mathbb{C}$ (ou $a \in \mathbb{R}$) est une *racine* de P si $P(a) = 0$.

Exemple 2.31. Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$. Alors 2 est une racine de P car $P(2) = 0$.

Observez : le polynôme $(X - 2)$ divise P. En effet, division euclidienne donne

$$X^3 - 3X^2 + 4 = (X - 2) \cdot (X^2 - X - 2) + 0$$

Le résultat suivant dit que ce phénomène est général :

Proposition 2.32. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (ou $\in \mathbb{C}[X]$) un polynôme et $a \in \mathbb{R}$ (ou $a \in \mathbb{C}$). Alors*

$$a \textit{ est une racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad (X - a) \textit{ divise } P.$$

(c.à.d. on peut décomposer $P(X) = (X-a) \cdot Q(X)$).

Démonstration : $\Longleftarrow$ est évident. $\Longrightarrow$: $P(X) = (X-a) \cdot Q(X) + R(X)$, où R est un polynôme de degré 0, c.à.d. $R(X) = a_0$. Pour $X = a$ on trouve $a_0 = 0$. c.q.f.d.

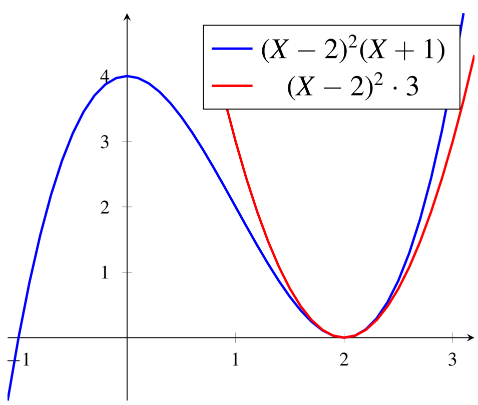
Exemple 2.33. Autre exemple : Le polynôme $P(X) = X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$; mais dans $\mathbb{C}$, il y a les racines i et $-i$. En effet, $X^2 + 1 = (X-i) \cdot (X+i)$.

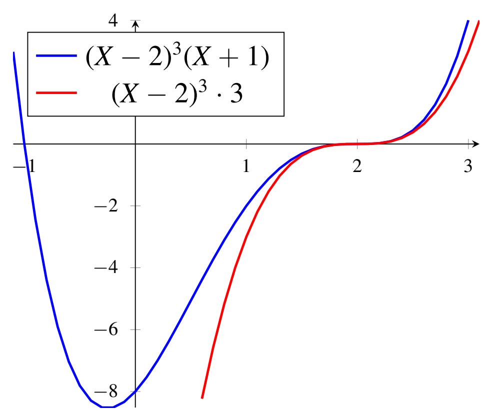
Définition 2.34. Le nombre a est une racine de *multiplicité* m (ou d'*ordre* m) si

- $(X-a)^m$ divise P, mais
- $(X-a)^{m+1}$ ne divise pas P

Exemple 2.35. • $a = 2$ est une racine double (de multiplicité 2) de $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$. En effet, $P(X) = (X-2)^2 \cdot (X+1)$.

• $a = 2$ est une racine triple (de multiplicité 3) de $P(X) = X^4 - 5X^3 + 6X^2 + 4X - 8$. En effet, $P(X) = (X-2)^3 \cdot (X+1)$.





Fractions rationnelles

Définition 2.36. Une *fraction rationnelle* est une fonction du type

$$f(X) = \frac{P_1(X)}{P_2(X)}$$

où P_1 et P_2 sont des polynômes.

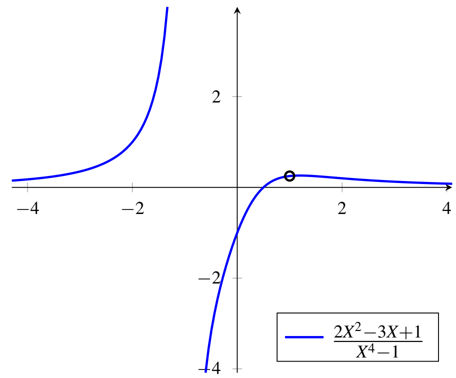
L'écriture $\frac{P_1(X)}{P_2(X)}$ est *irréductible* si P_1 et P_2 n'ont pas de diviseur de degré $\geqslant 1$ en commun.

Exemple 2.37. $f(X) = \frac{2X^2-3X+1}{X^4-1}$ est une fraction rationnelle, mais cette écriture n'est pas irréductible, car

$$\frac{2X^2 - 3X + 1}{X^4 - 1} = \frac{(X-1)(2X-1)}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{(2X-1)}{(X+1)(X^2+1)}$$

Cette dernière écriture est irréductible.

(Remarquez : dom. de déf$\left(\frac{2X^2-3X+1}{X^4-1}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ mais dom. de déf$\left(\frac{2X-1}{(X+1)(X^2+1)}\right) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.)



Définition 2.38. Un *pôle* d'une fraction rationnelle irréductible $\frac{P_1(X)}{P_2(X)}$ est une racine du dénominateur $P_2(X)$.

Remarquez que la fraction rationnelle est définie partout sauf dans ses pôles.

Partie entière d'une fraction rationnelle

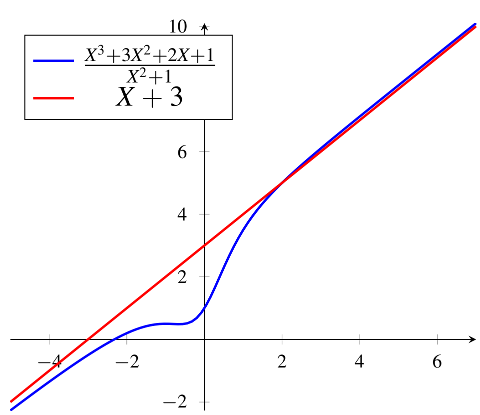
Soit $\frac{P_1(X)}{P_2(X)}$ une fraction rationnelle. Par division euclidienne, il existe des uniques polynômes Q (appelé la *partie entière* de la fraction rationnelle), et R, tel que

$$\frac{P_1(X)}{P_2(X)} = Q(X) + \frac{R(X)}{P_2(X)} \quad \text{t.q.} \quad \deg(R) < \deg(P_2)$$

Exemple 2.39. On reprend notre premier exemple de division de polynômes (Exemple 2.29) :

$$\frac{X^3 + 3X^2 + 2X + 1}{X^2 + 1} = (X+3) + \frac{X-2}{X^2+1}$$

partie entière



Décomposition en éléments simples

Proposition 2.40. *Soit* $\frac{P_1(X)}{P_2(X)}$ *une fraction rationnelle. Supposons*

(1) P_1 *est de degré 0 ou 1*
(2) P_2 *est de degré 2*
(3) P_2 *a deux racines réelles* distinctes r_1, r_2 *(*$r_1 \neq r_2$ *– c.à.d.* P_2 *a discriminant* > 0*).*

Alors il existent $a, b \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\frac{P_1(X)}{P_2(X)} = \frac{a}{X - r_1} + \frac{b}{X - r_2}$$

Comment trouver cette décomposition ?

Exemple 2.41.

$$f(x) = \frac{5X - 11}{X^2 - 5X + 4}$$

• Calculer les racines de $X^2 - 5x + 4$: $r_1 = 1$, $r_2 = 4$. Donc $X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$.

$\overset{Prop.2.40}{\Longrightarrow}$ il existe a, b tels que

$$f(x) = \frac{5X - 11}{(X-1)(X-4)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-4}$$

Pour trouver a et b :

• remettre sur dénominateur commun

$$= \frac{a(X-4) + b(X-1)}{(X-1)(X-4)} = \frac{(a+b)X - 4a - b}{(X-1)(X-4)}$$

• comparer coefficients:

$$a + b = 5$$
$$-4a - b = -11$$

• résoudre un système de deux équations à deux inconnues.

$$\overset{Exo}{\Longrightarrow} \; a = 2, \; b = 3$$

Résumé : $\frac{5X-11}{X^2-5x+4} = \frac{2}{X-1} + \frac{3}{X-4}$

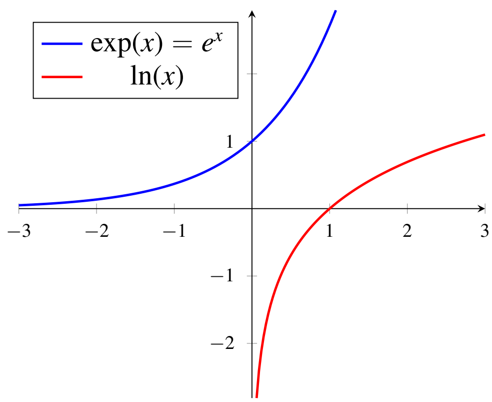
La fonction valeur absolue

Juste des exercices

Les fonctions exponentielle, logarithme, et puissance

Rappel 2.42. La fonction $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ satisfait

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x_1 + x_2) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2)$ (exemple : $\exp(5) = \exp(2) \cdot \exp(3)$)
  en particulier, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
- bijection



Définition 2.43. La fonction logarithme népérien (ou logarithme naturel)

$$\ln : \ ]0, +\infty[\ \to \ \mathbb{R}$$

est la fonction réciproque de $\exp$.

Remarque 2.44. Règles de calcul :

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$ – en particulier, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$
- $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$ (on verra : vrai même si $n \notin \mathbb{N}$ mais $n \in \mathbb{R}$)

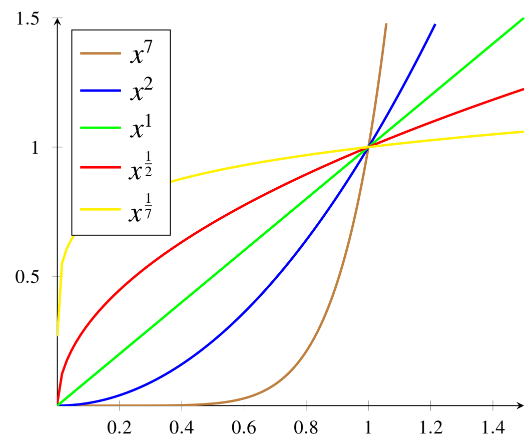
Définition 2.45. (Puissance) Si $x > 0$ (!!!) et $y \in \mathbb{R}$, on définit la *puissance* x^y par

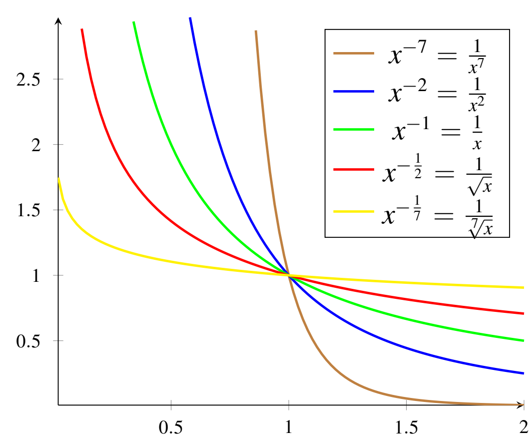
$$x^y = \exp(\ln(x) \cdot y)$$

Remarque 2.46. Définition bizarre ! Vérifions que $x^2 = x \cdot x$:

$$x^2 \stackrel{def}{=} \exp(2 \cdot \ln(x)) = \exp(\ln(x) + \ln(x)) = \exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(x)) = x \cdot x$$

Exemple 2.47. **(a)** **(b)**





Remarque 2.48. Règles de calcul : $(x_1x_2)^y = x_1^y x_2^y, \;\; x^{(y_1+y_2)} = x^{y_1} \cdot x^{y_2}, \;\; (x^{y_1})^{y_2} = x^{y_1 \cdot y_2} = (x^{y_2})^{y_1}$

Définition 2.49. (Logarithme avec base arbitraire) Pour $a > 0$, $a \neq 1$ on définit que la fonction *logarithme de base* a est la fonction inverse de a^x,

$$\log_a : \;]0, +\infty[\to \mathbb{R}, \; y \mapsto \text{ l'unique } x \text{ t.q. } a^x = y$$

Exemple 2.50. $\log_3(9) = 2$, car $3^{quoi} = 9$? Réponse : 2

Remarque 2.51. Comment calculer $\log_a$ à partir de ln ? Réponse : $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$.

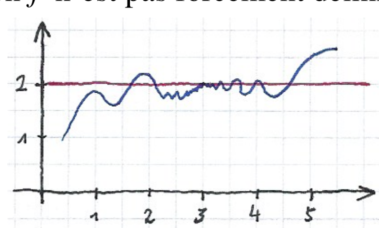
(Démonstration : $a^{\frac{\ln(y)}{\ln(a)}} = \exp\left(\ln(a) \cdot \frac{\ln(y)}{\ln(a)}\right) = \exp(\ln(y)) = y, \;$ c.q.f.d.)

3. Étude locale d'une fonction : limites, continuité, dérivée

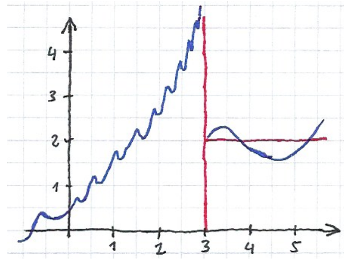
Limites

Notation 3.1. (Limite) Soit $f\colon A \to \mathbb{R}$ une fonction ($A \subseteq \mathbb{R}$). On va utiliser *sans définition formelle* les notations suivantes :

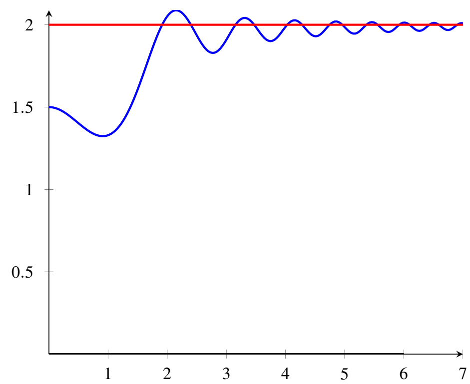
- $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$: "la limite de f en 3 est égale à 2", ou "$f(x)$ tend vers 2 quand x tend vers 3". Attention, la fonction f n'est pas forcément définie en $x = 3$!



- $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$: "la limite à droite de f en 3 est égale à 2" .
- $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$. "la limite à gauche de f en 3 est égale à $+\infty$".
  Exemple d'une fonction f avec $lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$ et $lim_{x\to 3^+} f(x) = 2$:



- $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$: “la limite de f en $+\infty$ est égale à 2”.



Exemple 3.2. (Règles de calcul, avec exemples)

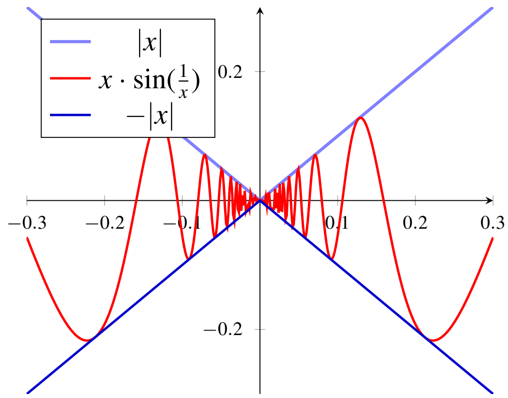
- (Somme) Exemple : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \arctan(x) = ?$ Réponse : $= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$.
  Règle générale : $\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ (en supposant que les limites $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent.)
- (Produit) Exemple : $\lim_{x\to 0} \sqrt{9+x} \cdot (2+x) = ?$ Réponse : $= \lim_{x\to 0} \sqrt{9+x} \cdot \lim_{x\to 0}(2+x) = 3 \cdot 2 = 6$
  Règle générale : $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$ (si ces limites existent)
- (Composition) Exemple : $\lim_{x\to\infty} \exp(\frac{1}{x}) = ?$ Réponse : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim_{x\to\infty} \exp(\frac{1}{x}) = \lim_{t\to 0} \exp(t) = 1$
- (“$c + \infty = \infty$”) Exemple : $\lim_{x\to 0^+} \cos(x) + \frac{1}{x} = +\infty$
- (“$c \cdot (+\infty) = +\infty$ si $c > 0$”) Exemple : $\lim_{x\to\infty} (2 + \frac{1}{x}) \cdot \exp(x) = +\infty$
- (“$\frac{c}{+\infty} = 0$”), exercice de trouver un exemple
- (“$\frac{c}{0^+} = +\infty$ si $c > 0$”), exercice

Remarque 3.3. Formes indéterminées (demandent étude plus détaillée) :

- $+\infty - \infty$, par exemple $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} = ?$
- $\infty \cdot 0$, par exemple $\lim_{x\to 0^+} \ln(x) \cdot x = ?$
- $\frac{\infty}{\infty}$, par exemple $\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x} = ?$
- $\frac{0}{0}$

Le théorème des gendarmes

Regardons la fonction $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.Il semble intuitivement clair que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Ceci est facile à démontrer si l'on utilise le



Théorème 3.4. *(Théorème des gendarmes) Soient $f, g_1, g_2 : A \to R$ trois fonctions, avec*

$$g_1(x) \leqslant f(x) \leqslant g_2(x) \quad \textit{pour tout } x \in A$$

Supposons que, quand x tend vers a, $g_1(x)$ et $g_2(x)$ possèdent une limite, et qu'en fait c'est la même limite :

$$\lim_{x\to a} g_1(x) = l \ \textit{ et } \ \lim_{x\to a} g_2(x) = l$$

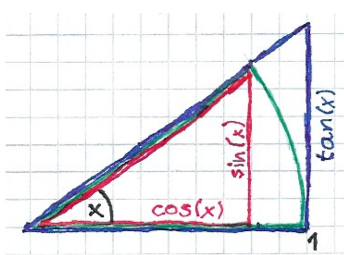
Alors la fonction f, elle aussi, converge :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

Exemple 3.5. Démonstration que $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$: on utilise l'encadrement $-|x| \leqslant x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant |x|$. Comme $\lim_{x\to 0} -|x| = 0$ et $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, on déduit par le Thm. des gendarmes que $\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Exemple 3.6. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Démonstration C'est une forme indéterminée "$\frac{0}{0}$" ! Montrons que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. En comparant les trois aires dans le dessin suivant



on obtient pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

et donc

$$\cos(x) \;<\; \frac{x}{\sin(x)} \;<\; \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad\qquad \stackrel{x\to 0}{\longrightarrow} 1$$

Le théorème des gendarmes implique $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1$. c.q.f.d.

Remarque 3.7. De façon semblable, si $f(x) > g(x)$ et $\lim g(x) = +\infty$, alors $\lim f(x) = +\infty$.

Étude de formes indéterminées : logarithme, polynômes, exponentielle

Dans cette section on va être un peu flou.

Slogan 3.8. *("Règle de la croissance comparée") L'exponentielle est super-forte. Un polynôme est moyennement fort. Un logarithme est très faible.*

Exemple 3.9.

- $\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = ?$ C'est une forme indéterminée du type $0^+ \cdot (-\infty)$. Qui gagne, le x, qui tire vers 0, ou le ln, qui tire vers $-\infty$? Réponse : le polynôme x gagne contre le logarithme :

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$$

- $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = ?$ (Forme indéterminée du type $\frac{+\infty}{+\infty}$.) C'est l'exp qui gagne contre le polynôme x^2 :

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$$

Remarque 3.10. On peut justifier ce procédé rigoureusement, mais nous n'allons pas le faire.

Étude de formes indéterminées : fractions rationnelles

Astuce pour déterminer des limites d'une fraction rationnelle : factoriser, dans numérateur et dénominateur, le terme de plus grand degré.

Exemple 3.11.

- $$\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{3x^3 - 4x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3(2 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3})}{x^3(3 - \frac{4}{x^2})} = \frac{2}{3}$$

- C'est même intéressant pour des polynômes :

$$\lim_{x\to +\infty} -2x^3 + x^2 = \lim_{x\to \infty} x^3(-2 + \frac{1}{x}) \stackrel{''+\infty\cdot(-2)=-\infty''}{=} -\infty$$

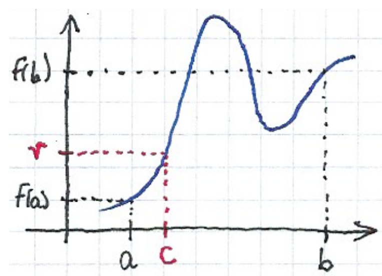
"Pour un polynôme $P(x)$, les limites $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ sont déterminés par le terme de plus grand degré de P."

Fonctions continues

Définition 3.12. • Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction qui est définie dans un voisinage de a, y compris en a. On dit que f est *continue en a* si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- On dit qu'une fonction est continue si elle est continue en tout point où elle est définie.

Exemple 3.13. • On admet que toutes les fonctions standard que nous avons rencontrées jusqu'ici sont continues : polynômes, fractions rationnelles, $|x|$, $\exp$, $\ln$, $\sin$, $\arccos$, etc.
- La fonction $f(x) = 1$ si $x \geqslant 0$, et $= -1$ si $x < 0$ n'est pas continue en 0.

Théorème 3.14. *(Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue qui est définie sur un intervalle $[a, b]$. Alors pour tout nombre r entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = r$.*



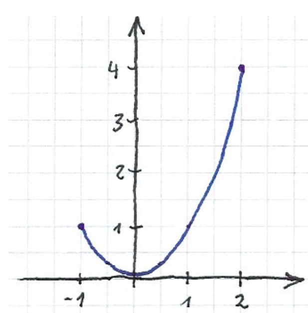
Exemple 3.15. Quelque part sur le chemin entre Rennes et Timbouctou il y a en ce moment (au mois de novembre) un endroit où il fait exactement 20°C.

Exemple 3.16. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair - par exemple $P(X) = 3X^5 - 2X^4 + 6x^3 - 8$. Alors P possède au moins une racine réelle.

Idée de la démonstration $\lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Donc, par le théorème des valeurs intermédiaires, quelque part le graphe doit couper l'axe x (axe des abscisses).

Remarque 3.17. On peut démontrer un résultat plus fort que Thm. 3.14 : l'image d'un intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction continue f est de nouveau un seul intervalle, qui est fermé.

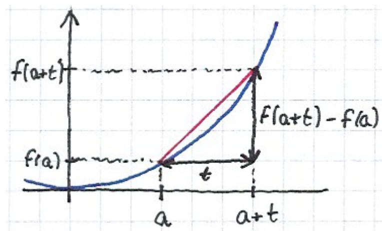
Par exemple, pour $f(x) = x^2$, et $[a, b] = [-1, 2]$ l'image est $f([-1, 2]) = [0, 4]$, un intervalle fermé. Le minimum 0 et le maximum 4 sont en effet atteints : $f(0) = 0$ et $f(2) = 4$.



La dérivée

Exemple 3.18. Regardons le graphe de $f(x) = x^2$. Quelle est sa *pente* au point $(a, f(a))$?

Réponse : C'est la pente du segment rouge du triangle suivant, pour t très petit :



Plus formellement,

$$\frac{f(a+t) - f(a)}{t} = \frac{(a+t)^2 - a^2}{t} = \frac{a^2 + 2at + t^2 - a^2}{t} = 2a + t \overset{t \to 0}{\longrightarrow} 2a$$

Donc la pente est $2a$.

Définition 3.19.
- Une fonction f est *dérivable en a* si la limite $\lim_{t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ existe et est réelle (pas $= +\infty$ ou $-\infty$). On note alors

$$f'(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \quad \text{la } \textit{dérivée} \text{ de } f \text{ en } a$$

- Une fonction f est *dérivable* si elle est dérivable partout où elle est définie. Sa dérivée au point a est alors noté $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$.

Remarque 3.20.
- Par changement de variables $x = a + t$ on obtient une expression équivalente :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- dérivable $\Longrightarrow$ continue, mais l'implication réciproque est fausse ! Exemple : $f(x) = |x|$ est continue, mais pas dérivable.

Exemple 3.21. On admet

- Si $f(x) = x^n$ alors $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ – par exemple si $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (c'est un joli exercice)
- Si $f(x) = \exp(x)$ alors $f'(x) = \exp(x)$.
- $\sin'(x) = \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Proposition 3.22. *(Règles de calcul) Soient f, g deux fonctions. Alors*

- *Somme – exemple : si $h(x) = x^2 + \sin(x)$ alors $h'(x) = 2x + \cos(x)$*
  Règle : $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- *Produit – exemple : si $h(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ alors $h'(x) = 2x\sin(x) + x^2\cos(x)$*
  Règle : $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

- *Quotient – exemple : si* $h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$, *alors* $h'(x) = \frac{\cos(x)x^2 - \sin(x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{\cos(x)}{x^2} - \frac{2\sin(x)}{x^3}$
  Règle : $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- *Composition – exemple : si* $h(x) = \sin(x^3)$ *alors* $h'(x) = 3x^2 \cdot \cos(x^3)$. *Si* $k(x) = (sin(x))^3$, *alors* $k'(x) = \cos(x) \cdot 3(\sin(x))^2$
  Règle pour dériver la composée $f \circ g\colon\ x \mapsto f(g(x))$ *(anglais : "chain rule") :* $(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

Démonstration pour le produit :

$$\frac{f(x+t)g(x+t) - f(x)g(x)}{t} = \frac{(f(x+t) - f(x))g(x+t) + f(x)(g(x+t) - g(x))}{t} =$$

$$= \frac{f(x+t) - f(x)}{t} g(x+t) + f(x) \frac{g(x+t) - g(x)}{t}$$

Le côté gauche tend vers $(fg)'(x)$, le droite vers $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Exemple 3.23. pour le quotient : si $h(x) = \tan(x) = \frac{\sin}{\cos}$, alors $h' = \frac{\cos^2 - \sin \cdot(-sin)}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$. Donc

$$\text{2 formules équivalentes : } \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \text{ou} \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$$

Dérivée de fonctions inverses

Supposons que $f\colon A \to B$ est bijective (c.à.d. il existe une fonction inverse $g\colon B \to A$), et que je sais calculer f'. Comment calculer g' ?

Réponse : g la fonction inverse de $f \implies f(g(x)) = x$ pour tout x. Dériver les deux côtés : $g'(x) \cdot f'(g(x)) = 1$. Donc

$$\text{Si } g = f^{-1} \text{ alors } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Exemple 3.24.

- Si $f = \tan$, $g = \arctan$, alors

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

  (Exercice : si $f = \sin$, $g = \arcsin$, alors $g'(x) = ?$ Solution : $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$)
- Si $f = \exp$, $g = \ln$, alors

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

Remarque 3.25. Application rigolote : $(1 + \frac{1}{1000})^{1000} \cong$? Réponse : $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.7172...$

Démonstration :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} \exp(x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})) \overset{(*)}{=} \exp(1) = e$$

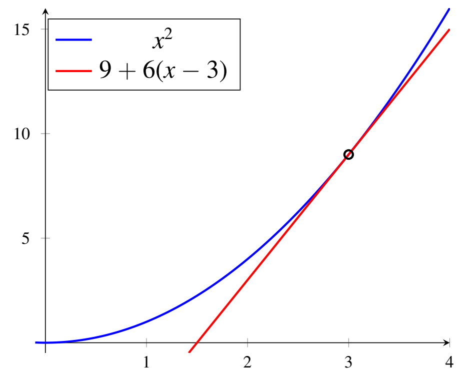
Pour comprendre $(*)$, il faut calculer $\lim_{x\to+\infty} x \cdot \ln(1+\frac{1}{x})$:

$$x \cdot \ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \ln(1)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x\to+\infty} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Exercice : soit $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to -1^-} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

La meilleure approximation de f par un polynôme de degré 1

Exemple 3.26. Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = x^2$ en $x = 3$ par un polynôme de degré 1 ?



Réponse : le graphe du polynôme doit traverser le point $(3,9)$, et il doit y être de pente $f'(3) = 6$. Donc c'est

$$h(x) = 9 + 6(x-3)$$

Nous n'avons pas définie "la meilleure approximation", mais on peut donner un sens exact à l'énoncé suivant :

Proposition 3.27. *La meilleure approximation d'une fonction dérivable f par un polynôme de degré 1 en un point a est $h(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.*

Remarque 3.28. Quelle est la meilleure approximation d'une fonction f par un polynôme de degré d ? Pour trouver la réponse, il faut étudier les polynômes de Taylor !

Règle de l'Hôpital

C'est une règle très puissante pour calculer des limites avec des formes indéterminés du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Voici l'idée :

Exemple 3.29. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = ?$

Difficulté : forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Astuce géniale :

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} \cdot \frac{x-0}{\sin(x)-\sin(0)} \xrightarrow{x\to 0} \frac{\ln'(1+0)}{\sin'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

Le principe était : $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$, et cette dernière expression était beaucoup plus facile à calculer.

Théorème 3.30. *(Règle de l'Hôpital) Soient f, g deux fonctions. Soit $a \in \mathbb{R}$, ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$. Supposons que*

- *f et g sont dérivables dans un voisinage de a (mais pas forcément dans a)*
- *$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim_{x\to a} g(x)$.*
- *la limite $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (cette limite a le droit de valoir $+\infty$ ou $-\infty$).*

Alors

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Démonstration admise.

Remarque 3.31. Il y a des versions du théorème pour des $\lim_{x\to a^+}$ et $\lim_{x\to a^-}$.

Exemple 3.32. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = ?$

Réponse : soit $f(x) = \ln(1+x)$, $g(x) = \sin(x)$. Alors $f'(x) = \frac{1}{1+x}$, $g'(x) = \cos(x)$, et d'après le théorème,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemple 3.33. (Croissance comparée) $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = ?$ Pour rentrer dans le cadre du théorème, on re-écrit

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'Hô}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{x} = 0$$

4. Étude globale d'une fonction réelle

Extrema, points critiques

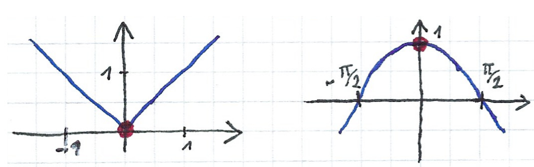
Rappel 4.1. Soit f une fonction, et $D_f \subseteq \mathbb{R}$ son domaine de définition. Un point $a \in D_f$ est un *maximum / minimum local* de f s'il existe un voisinage $V =]a-\epsilon, a+\epsilon[$ de a tel que

$$f(a) \geqslant \leqslant f(x) \quad \text{pour tout } x \in V \cap D_f$$

Un *extremum local* est un max ou un min local.

Exemple 4.2.

- $f(x) = |x|$ a un minimum local en $x = 0$.
- $f(x) = \cos(x)$ a un maximum local en $x = 0$.



Proposition 4.3. *Supposons $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable. Alors*

$$a \text{ est un extremum local de } f \quad\Longrightarrow\quad f'(a)=0$$

mais la réciproque $\Longleftarrow$ est fausse en général.

Démonstration de $\Longrightarrow$: supposons a est un maximum local.

Pour $x<a$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$, donc $\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$.

Pour $x>a$, on a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$, donc $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$.

Donc $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$. c.q.f.d.

Exemple qui montre $\not\Longleftarrow$: $f(x)=x^3$ satisfait $f'(0)=0$, mais f n'a pas de max ou min local en $x=0$.

Remarque 4.4. C'est un critère très utile : si l'on cherche tous les extrema d'une fonction, on peut souvent arriver à une très petite liste de *candidats* :

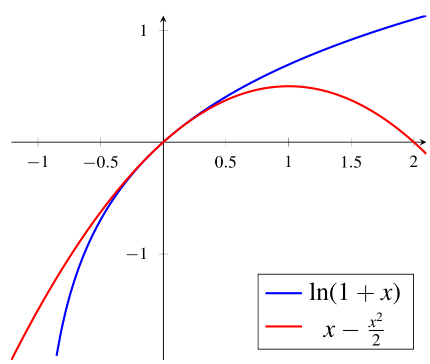
- les "points critiques" (ou "points stationnaires"), c.à.d., tous les x où $f'(x)=0$.
- les points où f n'est pas dérivable
- les points au bord du domaine de définition

Fonctions croissantes et décroissantes

Proposition 4.5. *Soit f une fonction, définie sur un intervalle et dérivable. Alors*

- *Si $f'(x)\geqslant 0$ pour tout x alors f est croissante.*
- *Si $f'(x)>0$ pour tout x alors f est strictement croissante.*
- *Pareil pour des fonctions (strictement) décroissantes.*

Exemple 4.6. En particulier, si f est une fonction avec $f(a)\geqslant 0$ et $f'(x)\geqslant 0$ pour tout $x>a$, alors $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x>a$. Exemple : démontrer que $\ln(1+x)\geqslant x-\frac{x^2}{2}$ pour tout $x>0$!

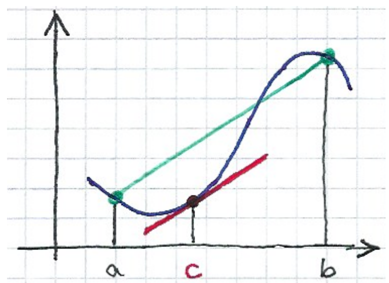


Solution : on veut montrer que $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\geqslant 0$ pour tout $x>0$. Or, c'est vrai parce que $f(0)=0$, et $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{1-(1+x)+x(1+x)}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}\geqslant 0$.

Démonstration de Proposition 4.5 admise, mais elle utilise le théorème suivant:

Théorème 4.7. *(Théorème des accroissements finis) Supposons f est définie et dérivable sur un intervalle $[a,b]$. Alors il existe un $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



(les lignes rouges et vertes sont parallèles)

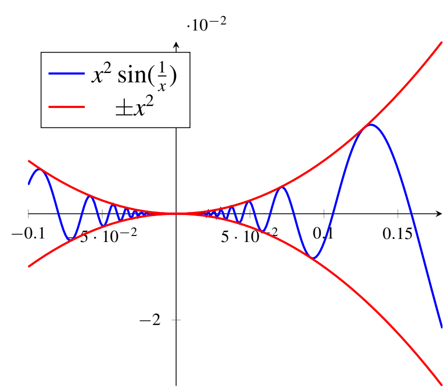
Démonstration admise (elle utilise Proposition 4.3 et Remarque 3.17).

Dérivées d'ordre supérieur, convexité

Définition 4.8.
- Une fonction f est *continument dérivable*, ou *de classe $\mathcal{C}^1$*, si f est dérivable, et en plus $f'(x)$ est continue.
- Si f' est dérivable, alors f est *deux fois dérivable*, et on note la dérivée seconde $f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}(x)$.
- Si en plus f'' est continue, alors f est *de classe $\mathcal{C}^2$*.
- f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est arbitrairement souvent continument dérivable.

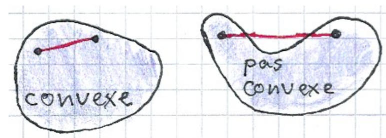
Exercice 4.9. Démontrer que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



est dérivable, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$. Plus précisément, montrer que $f'(0) = 0$ mais f' n'est pas continue en 0.

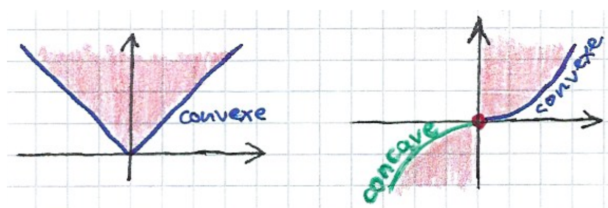
Rappel 4.10. Une patate P est *convexe* si pour tout couple de points $x, y \in P$, le segment de droite entre x et y est contenu dans P, aussi.



Définition 4.11. Une fonction $f\colon\ I \to \mathbb{R}$ est

- *convexe* si la partie du plan au-dessus du graphe de f est convexe au sens habituel.
- *concave* si la partie .... en dessous ....

Exemple 4.12.
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ est convexe.
- Pour $f(x) = x^3$: f est concave sur $]-\infty, 0[$, et convexe sur $[0, +\infty[$.



Proposition 4.13. *Soit f une fonction définie sur un intervalle, et deux fois dérivable. Alors*

$$f \text{ est convexe} \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \geqslant 0 \text{ pour tout } x$$

$$f \text{ est concave} \quad \Leftrightarrow \quad f''(x) \leqslant 0 \text{ pour tout } x$$

Intuitivement, si l'on roule en vélo sur le graphe de f, alors dans les parties convexes, le guidon est tourné à gauche, et dans les parties concaves, à droite.

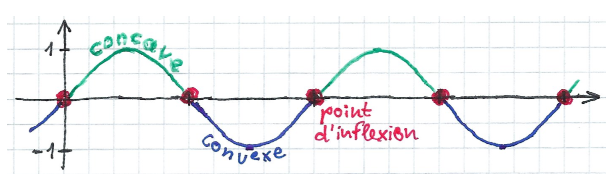
Démonstration admise.

Si l'on veut dessiner le graphe d'une fonction, il est utile de savoir où il est convexe/concave.

Définition 4.14. Un point a où $f''(x)$ change de signe s'appelle un *point d'inflexion*.

Exemple 4.15. Soit $f(x) = \sin(x)$. Alors $f'(x) = \cos(x)$ et $f''(x) = -\sin(x)$, et

- pour $x \in]0, \pi[$, $f''(x) < 0$. Donc $\sin(x)$ est concave sur l'intervalle $]0, \pi[$
- pour $x \in]\pi, 2\pi[$, $f''(x) > 0$. Donc $\sin(x)$ est convexe sur l'intervalle $]\pi, 2\pi[$
- en $x = 0, \pi, 2\pi, \ldots$, $f''(x)$ change de signe – ce sont donc des points d'inflexion.



Recherche de maxima, minima

Rappel 4.16. Si l'on veut trouver les maxima/minima locaux d'une fonction dérivable, on calcule d'abord ses points critiques. (Un *point critique*, ou *point stationnaire* d'une fonction f est un point x_{crit} où $f'(x_{crit}) = 0$.) Ayant trouvé un tel x_{crit}, comment décider si en x_{crit} la fonction f a un

- maximum local,
- minimum local, ou
- pas un extrémum du tout ?

Au choix, deux méthodes qui aident souvent à décider :

Méthode 1 Appliquer la définition : si $a < x_{crit} < b$ tel que

- pour $x \in]a, x_{crit}[$, $f'(x) > 0$ et
- pour $x \in]x_{crit}, b[$, $f'(x) < 0$

alors f a un maximum local en x_{crit}. Si c'est le contraire, alors c'est un minimum local.

Méthode 2 Calculer la dérivée seconde f''

Proposition 4.17. *Soit f une fonction deux fois dérivable, et soit x_{crit} un point critique de f.*

$$\textit{Si } f''(x_{crit}) > 0 \textit{ alors } f \textit{ a un minimum local en } x_{crit}$$

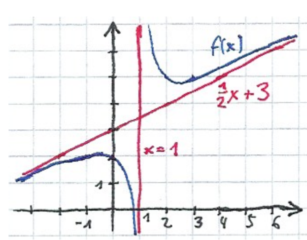
$$\textit{Si } f''(x_{crit}) < 0 \textit{ alors } f \textit{ a un maximum local en } x_{crit}$$

Exemple 4.18.
- Soit $f(x) = \sin(x)$. Alors $\frac{\pi}{2}$ est un point critique. Puisque $f''(\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$, c'est un maximum local.
- Soit $f(x) = x^4$. Alors 0 est un minimum local – même un minimum global, car $f(x) > f(0)$ pour tout x sauf $x = 0$. Remarquez que calculer f'' n'aide pas dans cet exemple, car $f''(0) = 4 \cdot 3 \cdot 0^2 = 0$.

Asymptotes

Pour une fonction f, nous allons étudier ses "branches infinies", c.à.d. le comportement quand $x \to \pm\infty$, ou quand $x \to a$ et $f(x) \xrightarrow{x \to a} \pm\infty$.

Exemple 4.19. Pour $f(x) = \frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x-1}$ il y a deux asymptotes :

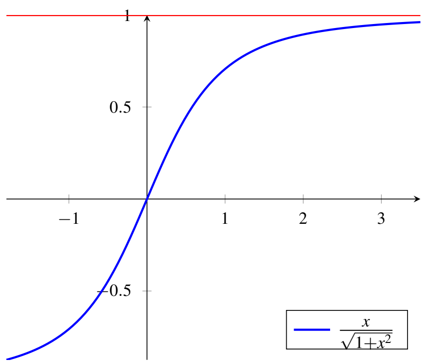


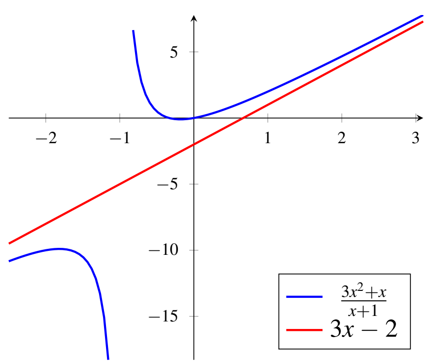
- la droite $x = 1$ est asymptote verticale au graphe.
- la droite $y = \frac{1}{2}x + 3$ est asymptote au graphe en $+\infty$.

Définition 4.20. (asymptote)

- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ ou $= -\infty$ (ou si $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$), alors on dit que la droite verticale $x = a$ est *asymptote verticale* de f.
- Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f(x) - (\alpha x + \beta) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, on dit que $\alpha x + \beta$ est asymptote (ou *asymptote oblique*) au graphe de f en $+\infty$.

Exercice 4.21. (1) Soit $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Asymptote en $+\infty$? Rép : l'horizontale $y = 1$.
(2) Soit $f(x) = \frac{3x^2+x}{x+1}$. Asymptote en $+\infty$? Indication : division de polynômes. Rép : $3x - 2$.





Remarque 4.22. Étant donné une fonction f, que faire pour décider si f possède une asymptote ? Rép : une stratégie (parmi d'autres) est : si une asymptote $\alpha x + \beta$ existe, alors forcément $\alpha = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Donc on peut

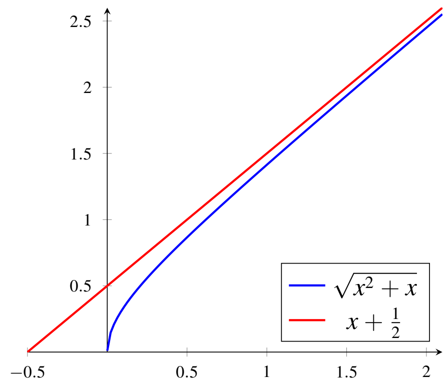
(1) calculer $\alpha := \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, et ensuite
(2) calculer $\beta := \lim_{x\to+\infty} f(x) - \alpha x$

Si une des deux limites n'existe pas (ou vaut $\pm\infty$), alors f n'a pas d'asymptote en $+\infty$.

Exemple 4.23. (1) Asymptote en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$? Solution : Comme $\alpha := \lim \frac{f(x)}{x} = \lim \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = 1$, on cherche une asymptote $y = 1 \cdot x + \beta$. Or

$$f(x) - 1 \cdot x = \sqrt{x^2 + x} - x \overset{3me.id.remarquable}{=} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{x(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Donc asymptote $x + \frac{1}{2}$.



(2) Asymptote en $+\infty$ de $f(x) = \sqrt{x}$? Solution : il n'y en a pas ! On calcule $\lim \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ (donc $\alpha = 0$) et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} - 0\cdot x = +\infty$. Donc pas d'asymptote.

Plan d'étude d'une fonction f

- Déterminer où est-ce que f est définie (domaine de définition), et où continue.
- Recherche de symétries : fonction paire, impaire, périodique...
- Où f est-elle dérivable ? Calculer f'. Déterminer où $f' > 0$ (f croissante), $f' < 0$ (f décroissante), $f' = 0$ (point critiques).
- Limites de f au bord du domaine de définition (par exemple en $\pm\infty$). Recherche d'asymptotes éventuelles
- Calculer f''. Déterminer où $f'' > 0$ (f convexe), $f'' < 0$ (f concave), $f'' = 0$ (éventuellement points d'inflexion)
- Résumé sous forme d'un tableau de variation
- Résumé sous forme d'un dessin du graphe.

5. Intégration et primitives

Primitives

Définition 5.1. Une *primitive* d'une fonction f est une fonction dérivable F dont la dérivée est f.

Exemple 5.2.
- Si $f(x) = 3x - 5$ alors une primitive est donnée par $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + 7$. Plus généralement, toute fonction de la forme $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, est une primitive.
- Si la fonction $f(t)$ représente la vitesse (positive ou négative) d'un objet à instant t, alors $F(t)$ représente la position de l'objet.

Proposition 5.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle.*

(a) *Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors pour tout nombre réel C, la fonction $F(x) + C$ est aussi une primitive.*

(b) *À cette ambiguité près, la primitive (quand elle existe) est unique : si F_1, F_2 sont deux primitives d'une fonction f, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F_2(x) = F_1(x) + C$ pour tout x.*

Idée de la démonstration de (b) : Soit $D(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Alors $D'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Donc (en utilisant le théorème des accroissements finis on conclut :) D est une fonction constante.

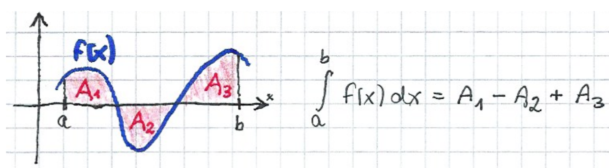
Notation 5.4. On écrit $\int f(x)\,dx$ pour la primitive (à constante additive près) de f. Exemple : $\int x^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + C$

Exemple 5.5. Nous connaissons déjà beaucoup de primitives de fonctions : $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|) + C$, $\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,x^{\alpha+1} + C$ (si $\alpha \neq -1$), $\int sin(3x)\,dx = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C$, $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C, \ldots$

Exercice 5.6. Vérifier que $\int \frac{1}{\sin(x)}\,dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)$. Soln : $\left(\frac{1}{2}\ln(\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)})\right)' = ...Exo... = \frac{1}{\sin(x)}$. C'était facile ! En revanche, trouver soi-même cette primitive aurait été très difficile.

Intégrales

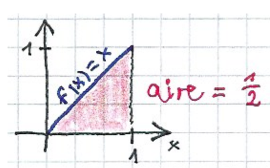
Définition 5.7. (Définition informelle) Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$. Alors l'*intégrale* de f entre a et b, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, est l'aire entre l'axe x et le graphe de f, avec $a \leqslant x \leqslant b$, mesuré algébriquement : quand $f(x) < 0$, l'aire est négative.



Remarque 5.8. Quand f est continue, (ou même quand f a un nombre *fini* de points de discontinuité), on peut montrer qu'on peut donner un sens exact a cette "définition", et donc bien définir $\int_a^b f(x)\,dx$. (Mot clé : sommes de Riemann.)

Dans ce cours, toutes les fonctions rencontrés sont de ce type, et nous nous contenterons de cette "définition" intuitive.

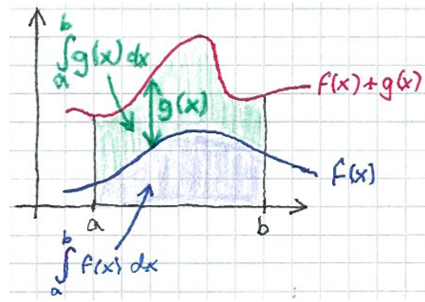
Exemple 5.9. $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$



Définition 5.10. Si $a < b$, on définit que $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Proposition 5.11. *(Linéarité de l'intégrale) Soient f, g continues sur l'intervalle $[a,b]$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors*

- $\int_a^b f(x) + g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$, *et*
- $\int_a^b \lambda \cdot f(x)\, dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

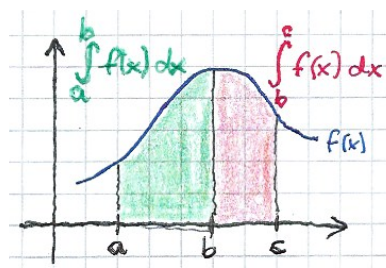


Proposition 5.12. • *Soit f une fonction continue sur un itervalle $[a,b]$. Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0$.*

- *Soient f,g deux fonctions continues sur $[a,b]$. Si $f(x) \geqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\, dx \geqslant \int_a^b g(x)\, dx$*

Proposition 5.13. *(Relation de Chasles) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si $a,b,c \in I$, alors*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$



Lien entre primitives et intégrales

Q : Comment calculer des intégrales ? Rép : grâce au

Théorème 5.14. *(Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) Dérivée et intégration sont des opérations réciproques. Plus précisement :*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors la fonction

$$\widetilde{F}(x) := \int_a^x f(t)\, dt$$

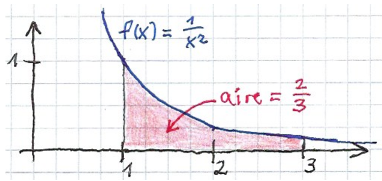
est une primitive de f, c.à.d. $\widetilde{F}'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

De plus, si l'on connaît une primitive F de f, alors on peut calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ par :

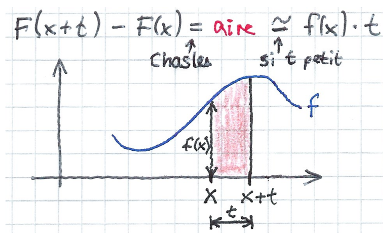
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Notation 5.15. $F(b) - F(a) = \big[\, F(x) \,\big]_{x=a}^{x=b}$

Exemple 5.16. $\int_1^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{-1}{3} - \frac{-1}{1} = \frac{2}{3}$.



Idée de la démonstration de la première partie : on veut $\lim_{t\to 0} \frac{F(x+t)-F(x)}{t} = f(x)$. Or,



Remarque 5.17. Parfois on peut définir $\int_a^b f(x)\,dx$ même si a ou b n'appartiennent pas au domaine de définition de f : "intégrales impropres". Pour les exemples suivants, regardez Ex. 2.47(b).

(1) Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{x=1}^{x\to+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} - \frac{-1}{1} = 1$

(2) Exemple : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{x\to 0}^{x=1} = 2\cdot\sqrt{1} - 2\cdot\sqrt{0} = 2$.

(3) Exemple : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_{x=1}^{x\to+\infty} = +\infty$. L'aire sous la courbe est infini ! On dit l'intégrale est *divergente*.

(4) Plus généralement....

	$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$	$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$
$0 < \alpha < 1$	$\frac{1}{1-\alpha}$	divergente
$\alpha = 1$	divergente	divergente
$\alpha > 1$	divergente	$\frac{1}{\alpha-1}$

Techniques d'intégration 1 : intégration par parties

Souvent utile pour intégrer un produit de deux fonctions.

Rappel 5.18.

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

Si deux fonctions sont égales, alors leurs primitives aussi. Donc :

$$u \cdot v = \int u'(x) \cdot v(x)\, dx + \int u(x) \cdot v'(x)\, dx$$

Théorème 5.19. *Une primitive de* $u(x) \cdot v'(x)$ *est*

$$\int u(x) \cdot v'(x)\, dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Remarque 5.20. Mémoriser :

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

Exemple 5.21. Cherchons une primitive de $x \cdot \sin(x)$. On utilise $u(x) = x$, $v'(x) = \sin(x)$. Alors $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos(x)$ et

$$\int x \cdot \sin(x)\, dx = x \cdot (-\cos(x)) - \int 1 \cdot (-\cos(x))\, dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C$$

À partir de la primitive, on peut aussi calculer des intégrales. Par exemple :

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(x)\, dx = ?$$

Réponse : $= [-x \cdot \cos(x) + \sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} = \ldots Exo \ldots = \pi$

Remarque 5.22. Il y a aussi une formule directe pour les *intégrales* : si u, v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx$$

Exemple 5.23. $\int_0^\pi x \cdot \sin(x)\, dx = ?$

$$\int_0^\pi x \cdot \sin(x)\, dx = [x \cdot (-\cos(x))]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos(x))\, dx = \pi - 0 - [-\sin(x)]_{x=0}^{x=\pi} = \pi$$

Techniques d'intégration 2 : intégration par changement de variable

Exemple 5.24. On cherche une primitive de $h(x) = \frac{2x+\cos(x)}{1+x^2+\sin(x)}$. Observation clé : le numérateur est juste la dérivée du dénominateur, c.à.d., $h(x)$ est de la forme $h(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$. Or, on sait déjà, pour une fonction dérivable $u(x)$,

$$(\ln(|u(x)|))' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \qquad \text{et donc} \qquad \int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln(|u|) + C$$

Par exemple, pour $h(x) = \frac{2x+\cos(x)}{1+x^2+\sin(x)}$ nous trouvons la primitive $H(x) = \ln(|1 + x^2 + \sin(x)|)$. D'autres exemples :

(1) Fraction rationnelle : $\int \frac{3x-1}{3x^2-2x+5}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{6x-2}{3x^2-2x+5}\, dx = \frac{1}{2} \ln(|3x^2 - 2x + 5|) + C$

(2) $\int \tan(x)\,dx = -\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = -\int \frac{\cos'(x)}{\cos(x)}\,dx = -\ln(|\cos(x)|) + C$

Exemple 5.25. De façon semblable, on sait

$$((u(x))^n)' = u'(x)\cdot n\cdot(u(x))^{n-1} \qquad \text{et donc} \qquad \int u'(x)\cdot n\cdot(u(x))^{n-1}\,dx = (u(x))^n + C$$

Par exemple on “voit” une primitive pour $\cos(x)\cdot\sin^7(x)$:

$$\int \cos(x)\cdot\sin^7(x)\,dx = \frac{1}{8}\int \cos(x)\cdot 8\cdot\sin^7(x)\,dx = \frac{1}{8}\sin^8(x) + C$$

Règle dérivée	Règle primitives	Exemple
$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$	$\int \frac{u'}{u}\,dx = \ln(u) + C$	$\int \frac{6x}{3x^2+5}\,dx = \ln(3x^2+5) + C$
$(u^n)' = u'\cdot n\cdot u^{n-1}$	$\int u'\cdot n\cdot u^{n-1}\,dx = u^n + C$	$\int \frac{-6x}{(3x^2+5)^2}\,dx = \frac{1}{3x^2+5} + C \quad$ (cas $n=-1$)
$(e^u)' = u'\cdot e^u$	$\int u'\cdot e^u\,dx = e^u + C$	$\int 6x\cdot e^{3x^2+5}\,dx = e^{3x^2+5} + C$
$(\sin(u))' = u'\cdot\cos(u)$	$\int u'\cdot\cos(u)\,dx = \sin(u) + C$	$\int 6x\cdot\cos(3x^2+5)\,dx = \sin(3x^2+5) + C$
$\arctan(u) = \frac{u'}{1+u^2}$	$\int \frac{u'}{1+u^2}\,dx = \arctan(u) + C$	$\int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \arctan(x^2) + C \quad (u(x) = x^2)$

En général, si vous cherchez une primitive d’une fonction de la forme $u'(x)\cdot f(u(x))$, et vous connaissez une primitive F de f, alors vous gagnez :

Proposition 5.26. *(Primitive par changement de variable)*

$$\int u'(x)\cdot f(u(x))\,dx = F(u(x)) + C$$

Pour les intégrales $\int_a^b$ on déduit :

Proposition 5.27. *(Intégration par changement de variable) Soit f une fonction continue et u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $[a,b]$ un intervalle où la composée $f\circ u$ est définie. Alors (attention au changement des bornes d’intégration !) :*

$$\int_a^b u'(x)\cdot f(u(x))\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\,dt$$

Remarque 5.28. Question : en pratique, comment effectuer un changement de variable si on ne “voit” pas tout de suite la primitive ? Réponse : pas besoin d ’apprendre la formule 5.27, ou le tableau ! On confond la variable t avec la fonction u, et interprète $u = u(x)$ comme une nouvelle variable. On écrit (de façon non-rigoureuse mais pratique) :

$$\frac{du}{dx} = u'(x) \implies dx = \frac{du}{u'(x)}$$

$$\implies \int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\cdot\frac{u'}{u'}\,du$$

x varie entre a et b donc u varie entre $u(a)$ et $u(b)$

Voici deux exemples, qui montrent qu'on peut utiliser le résultat "dans les deux directions"

Exemple 5.29. (a) Intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin^7(x)\, dx = ?$$

Changement de variable $u = \sin(x)$, donc $\frac{du}{dx} = \cos(x)$. En re-écrivant $dx = \frac{du}{\cos(x)}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot \sin^7(x)\, dx = \int_{\sin(0)}^{\sin(\frac{\pi}{2})} \cos(x) \cdot u^7 \,\frac{du}{\cos(x)} = \int_0^1 u^7\, du = \left[\frac{1}{8}u^8\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{8}$$

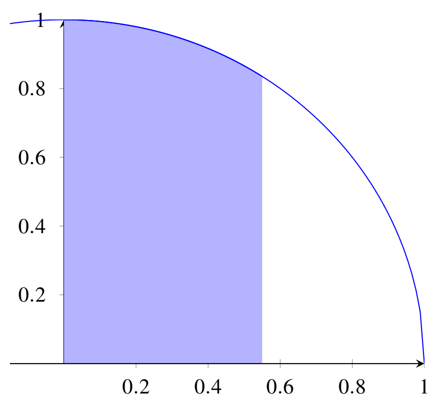
(b) Primitive :

$$\int \cos(x) \cdot \sin^7(x)\, dx = ?$$

Même changement de variables $u = \sin(x) \implies dx = \frac{du}{\cos(x)}$, et

$$\int \cos(x) \cdot \sin^7(x)\, dx = \int \cos(x) \cdot u^7 \,\frac{du}{\cos(x)} = \int u^7\, du = \frac{1}{8}u^8 + C = \frac{\sin^8(x)}{8} + C$$

Exemple 5.30. Calculons l'aire de la partie du disque (demi-disque de rayon 1, partie entre 0 et b. Par exemple, dans la figure, $b = 0.55$).



Première méthode : dessin. Aire$= \frac{\arcsin(b)}{2} + \frac{\sqrt{1-b^2}\cdot b}{2}$.

Deuxième méthode : calculer

$$\int_0^b \sqrt{1-u^2}\, du = ?$$

Essayons le changement de variable $u = \cos(x)$. Ainsi, $\sqrt{1-u^2} = \sqrt{1-\cos^2(x)} = \sin(x)$. En plus, c'est une bijection : si u varie entre 0 et b, alors x varie entre $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ et $\arccos(b)$.

Donc :

$$\int_0^b \sqrt{1-u^2}\, du = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(b)} \sin(x)\cdot(-\sin(x))\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(b)} \sin^2(x)\, dx$$

$$\overset{linearisation}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\arccos(b)} \frac{1-\cos(2x)}{2}\, dx = -\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\arccos(b)}$$

$$= -\left[\frac{x}{2} - \frac{2\cdot\sin(x)\cos(x)}{4}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\arccos(b)} = -\frac{1}{2}\left[x - \sqrt{1-\cos^2(x)}\cos(x)\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\arccos(b)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(b) + \sqrt{1-b^2}\cdot b\right) = \frac{1}{2}\left(\arcsin(b) + \sqrt{1-b^2}\cdot b\right)$$

Nous avons calculé : une primitive de $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est $F(x) = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\cdot x\right)$.

Techniques d'intégration 4 : intégration des fractions rationnelles

Théorème 5.31. *Regardons une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$, où $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$). Si l'on connait les racines du polynôme Q, alors on peut explicitement trouver une primitive de cette fraction rationnelle.*

Remarque 5.32. Nous n'apprendrons pas la méthode générale (trop laborieuse). Mais nous connaissons déjà plusieurs idées pour le calcul :

- Si $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$, re-écrire $\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, ($E$ la partie entière, R le reste de la division euclidienne)
- Si $Q(x)$ n'a pas de racines réelles, on peut parfois utiliser l'arctangente : $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x) + C$
- Si $P(x) = Q'(x)$, on sait intégrer aussi : $\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \ln(|1+x^2|) + C$
- Si $Q(x)$ as des racines réelles distinctes, essayer décomposition en éléments simples.

Exemple 5.33.

$$\int \frac{3x^3 - 13x^2 + 7x - 3}{x^2 - 5x + 4}\, dx = ?$$

Réponse :

$$\overset{DivEucl}{=} \int 3x+2+\frac{5x-11}{x^2-5x+4}\, dx \overset{*}{=} \int 3x+2+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-4}\, dx = \frac{3}{2}x^2+2x+2\ln(|x-1|)+3\ln(|x-4|)+C$$

$*=$ Exemple 2.41, décomposition en éléments simples

6. PROBABILITÉS

Combinatoire

Proposition 6.1. *Soit X un ensemble avec n éléments. Le nombre de* permutations *des éléments de X, c.à.d. le nombre de listes (ordonnées) qui contiennent tous les éléments de X sans répétition, est de :*

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad (n \text{ factoriel})$$

Exemple 6.2. Si $X = \{A, B, C\}$ alors il y a $3! = 6$ permutations : $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$.

Proposition 6.3. *Soit X un ensemble avec n éléments. Le nombre de sous-ensembles de X est de 2^n.*

Exemple 6.4. Si $X = \{A, B, C\}$, alors il y a $2^3 = 8$ sous-ensembles :

$$\emptyset, \{C\}, \{B\}, \{B, C\}, \{A\}, \{A, C\}, \{A, B\}, \{A, B, C\}.$$

(Car pour spécifier un sous-ensemble A de X, je dois choisir pour chaque élément $x \in X$ si oui ou non x fait partie de A. Il y a $2 \cdot \ldots \cdot 2$ choix différents.)

Étudions maintenant les *coefficients binomiaux* $\binom{n}{k}$.

Exemple 6.5. Vous avez 9 assiettes, chacune a un morceau de gâteau : fraise, caramel, pomme, ... , chocolat. Vous devez en choisir exactement 4. Combien de façons différentes de choisir ? Notons $\binom{9}{4}$ le nombre de possibilités. Valeur ??

Définition 6.6. Le *coefficient binomial* $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles avec k éléments d'un ensemble avec n éléments.

Exemple 6.7. Formule récursive :

$$\binom{9}{4} = \binom{8}{3} + \binom{8}{4}$$

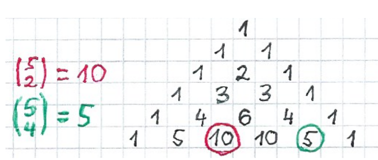
parce que

$$\{\text{Choix de 4 assiettes}\} = \{\text{ Choix de 4 assiettes, où choco fait partie du choix }\}$$
$$+ \{\text{ Choix de 4 assiettes, où choco ne fait pas partie du choix }\}$$

Proposition 6.8. *Pour $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$,*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Corollaire 6.9. *Les coefficients binomiaux apparaissent dans le triangle de Pascal :*



Exemple 6.10. Formule directe :

$$\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{\text{nombre de permutations d'un ensemble avec 4 éléments}} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 9\cdot 2\cdot 7 = 126$$

Ce calcul est faisable sans calculatrice !

Proposition 6.11.

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \quad \textit{(k facteurs en haut et en bas – formule pratique)}$$

$$= \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \textit{(formule correcte mais qui n'aide pas pour calculs pratiques)}$$

Théorème 6.12. *Étant donnée une urne avec n boules, étiquetés $1, ..., n$, on fait k tirages. Quatre protocoles possibles pour cette expérience :*

- *Sans ou avec remise des boules entre deux tirages.*
- *Quand on note les résultats, on peut tenir compte de l'ordre d'apparition des nombres (regarder les "arrangements") ou l'ignorer ("combinaisons").*

Le nombre de résultats possibles pour chaque protocole est :

	Sans remise ($\Rightarrow k \leqslant n$)	Avec remise (possible que $k > n$)
attention à l'ordre (arrangements)	$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ $= \frac{n!}{(n-k)!}$ **(1)**	$n^k = n\cdot n\cdot\ldots\cdot n$ **(2)**
en ignorant l'ordre (combinaisons)	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!p!}$ **(3)**	$\binom{k+n-1}{n-1}$ **(4)** Hors programme

Exemple 6.13. (1) Nombre de manières de choisir ses Top 10 ($k = 10$) parmi n chansons
(2) Nombre de textes possibles de longueur k (alphabet avec n lettres)
(3) Nombre de résultats du loto 6 sur 49 (ou k sur n)
(4) Nombre de répartitions possibles des voix quand k électeurs votent pour n candidats.

Démonstration du théorème (1), (2) OK

(3) déjà fait.

(4) Par exemple j'ai 4 boules, étiquetées 1, 2, 3, 4, et je tire 9 fois avec remise. Je note quelle boule a été tirée combien de fois (ça donne quatre nombres k_1, k_2, k_3, k_4). Pourquoi y a-t-il $\binom{9+4-1}{4-1} = \binom{12}{3}$ résultats possibles ? Dessinons 12 cercles

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

et voyons une correspondance entre les résultats possibles et les choix possibles de 3 cercles parmi ces 12 cercles. Par exemple si

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 4, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = 3$$

c.à.d. boule 1 est choisie 2 fois etc.

cela correspond au dessin

$$\bigcirc\bigcirc\otimes\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\otimes\otimes\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

c.q.f.d.

Remarque 6.14. Dans les exercices, on appliquera ces formules au calcul de probabilités.

Attention 6.15. Ne surtout pas confondre nombre de possibilités et probabilité ! Une probabilité est *toujours* un nombre réel entre 0 et 1 (par exemple $0,25 = 25\%$) !!!

Probabilités : vocabulaire et exemples

Cadre général Pour une "expérience aléatoire", soit Ω l'ensemble ("l'univers") de tous les résultats possibles. (Ces résultats n'apparaissent pas forcément tous avec la même probabilité.)

Exemple 6.16. (A) Expérience : parmi tous les humains nés vivants en 2017, je choisis un au hasard (tout le monde a une chance sur 130.000.000 d'être choisi). $\Omega = \{$ êtres humains nés en 2017$\}$. Rq : $|\Omega| \simeq 130.000.000$.

(B) Expérience : jeter 10 fois consécutivement une pièce pipée (proba(pile)$= 0.6$, proba(face)$= 0.4$.) $\Omega = \{$chaines de caracères "P" et "F" de longueur $10\}$. Rq : $|\Omega| = 2^{10}$, mais les éléments de Ω n'apparaissent pas tous avec la même proba !

(C) Expérience : mélanger un jeu de 32 cartes, écrire une liste des cartes obtenus. $\Omega = \{$listes sur lesquelles chaque carte apparaît exactement une fois$\}$. Rq : $|\Omega| = 32!$, tous ont la même probabilité.

(D) Expérience : je prends un atome de Meitnerium-276 et je mesure le temps jusqu'à sa décomposition (vers Bohrium-274). $\Omega =$ toutes les durées possibles, c.à.d. $\Omega = \{t$ secondes $\mid t \in \mathbb{R}_+\}$

Cadre général (cont.) Chaque élément ω de Ω, et plus généralement chaque sous-ensemble $A \subset \Omega$, apparaît avec une certaine probabilité. On note

$\mathbb{P}(\omega)$ la probabilité que le résultat de l'expérience soit $= \omega$

$\mathbb{P}(A)$ .... soit contenu dans A

Exemple 6.17. (A) Pour chaque bébé ω on a $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{130000000}$

(B) $\mathbb{P}(\text{"}PFFPFFFFFP\text{"}) = (0,6)\cdot(0,4)\cdot(0,4)\cdot(0,6)\cdot\ldots\cdot(0,6) = (0,6)^3\cdot(0,4)^7$, car il y a 3 fois Pile et 7 fois Face.

(C) Pour chaque arrangement ω on a $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{32!}$

(D) Attention, la durée de vie prend tout un spectre continu de valeurs, et chaque valeur individuelle apparaît avec probabilité 0 : $\mathbb{P}(4sec) = 0$, mais $\mathbb{P}(\text{entre 0 sec et 4 sec}) = \frac{1}{2}$ (c.à.d. la demi-vie est de 4 secondes), et $\mathbb{P}(\text{entre 4 sec et 8 sec}) = \frac{1}{4}$. Dans ce cours, on ne va pas étudier ces probabilités continues.

Cadre général (cont.) À chaque élément de Ω on peut associer un nombre. Une telle association (une fonction $\Omega \to \mathbb{R}$) s'appelle une *variable aléatoire*.

Très informellement, une variable aléatoire est un nombre choisi à partir d'une expérience aléatoire.

Exemple 6.18. (A) La variable aléatoire DuréeDeVie: $\Omega \to \mathbb{N}$ associe à chaque personne son age (en années) au moment de sa mort. Cette fonction nous est inconnue, mais elle est bien-définie.

(B) La variable aléatoire NombreDePile: $\Omega \to \{0, 1, \dots, 10\}$.

(C) La variable aléatoire CoeursAuDébut : $\Omega \to \{0, 1, 2, 3, 4\}$, qui mesure le nombre de cartes Coeur parmi les quatre premières cartes.

Cadre général (cont.) Je veux étudier la *loi* (anglais : "probability distribution") de la variable aléatoire, c.à.d. je veux connaître la probabilité que la variable aléatoire prend telle ou telle valeur. Remarquez : la probabilité est toujours un nombre entre 0 et 1.

Exemple 6.19. Notons $\mathbb{P}$ la probabilité. On veut connaître

(A) $\mathbb{P}(\text{DuréeDeVie} = 0) = 0,05 = 5\%$, $\mathbb{P}(\text{DuréeDeVie} = 1) = ?$, ... $\mathbb{P}(\text{DuréeDeVie} > 100) = ?$

(B) $\mathbb{P}(\text{NombreDePile} = 0) = (0,4)^{10} \simeq 0,000105 = 0,0105\%$. Mais $\mathbb{P}(\text{NombreDePile} = 3) = ?$ Nous allons étudier cette loi de probabilité et trouver la réponse $= \binom{10}{3} \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^7 = 0,042\dots$.

(C) $\mathbb{P}(\text{CoeursAuDébut} = 0) = ?$, $\mathbb{P}(\text{CoeursAuDébut} = 1) = ?$, ... , $\mathbb{P}(\text{CoeursAuDébut} = 4) = ?$

Définition 6.20. (informelle) Une *loi* de probabilité est une règle quel nombre réel est tiré avec quelle probabilité.

Lois de probabilité classiques

(1) Loi de Bernoulli

Exemple 6.21. Jouer au pile ou face avec une pièce qui tombe sur pile avec une probabilité p, et face avec probabilité $1 - p$. Si pile, je gagne 1Euro, si face je ne gagne rien. Soit la variable aléatoire X mon gain en Euros.

$$\text{Univers } \Omega = \{\text{pile, face}\}, \quad \text{et v.a. } X : \Omega \to \{0, 1\}, \text{ pile} \mapsto 1, \text{face} \mapsto 0.$$

Alors

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \quad \mathbb{P}(X = 1) = p$$

Définition 6.22. On dit une v.a. X *suit une loi de Bernoulli* de paramètre p (avec $0 < p < 1$) si

- Valeurs possibles de X : $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et
- $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$.

On note : $X \sim \mathcal{B}(1, p)$.

(2) Loi binomiale

Exemple 6.23. Jeter 10 fois consécutivement une pièce non-pipée. Alors

$$\Omega = \{\text{chaines de caractères "P" et "F" de longueur } 10\}$$

Rq : Ω a 2^{10} éléments, qui apparaissent tous avec la même probabilité $\frac{1}{2^{10}}$. Regardons la variable aléatoire

$$NombreDePile : \Omega \to \{0, 1, \ldots, 10\}$$

Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(NombreDePile = 3) &= \frac{\text{Nombre de chaines avec exactement 3 lettres P}}{\text{Nombre de chaines}}\\ &= \frac{\binom{3}{10}}{2^{10}} = \frac{15}{128} = 0,117... = 11,7\%\end{aligned}$$

En général, la probabilité que n jets d'une pièce non-pipée donnent exactement k fois Pile (et $n-k$ fois Face) est $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

Exemple 6.24. Jeter 10 fois consécutivement une pièce avec $\mathbb{P}(Pile) = 0,6$, $\mathbb{P}(Face) = 0,4$. On a le même ensemble Ω que précédemment, mais si une chaine $\omega \in \Omega$ a 3 lettres P et 7 lettres F, alors ω n'apparaît pas avec probabilité $(\frac{1}{2})^{10}$ mais avec probabilité $(0,6)^3 \cdot (0,4)^7$. (Par exemple, $\mathbb{P}(PFFPFFFFFP) = 0,6 \cdot 0,4 \cdot \ldots \cdot 0,6)$. Vu qu'il y a $\binom{10}{3}$ chaines contenant exactement 3 lettres P, on trouve

$$\mathbb{P}(NombreDePile = 3) = \binom{10}{3} \cdot (0,6)^3 \cdot (0,4)^7$$

Définition 6.25. On dit une v.a. X suit une *loi binomiale* de paramètres n et p (avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 < p < 1$) si

- $X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ et
- $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

On note : $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple 6.26. Si

$X =$ le nombre de "Pile" dans une série de n jets d'une pièce dont la probabilité de "Pile" est p.

alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

(3) Loi géométrique

En TD.