Plan

Chapitre 1 Représentation des nombres – Numération

I Système de numération

- I.1 - Introduction
- I.2 - nombres décimaux
- I.3 - nombres binaires
- I.4 - nombres hexadécimaux

II Conversions

- II.1 - Conversion d'un nombre en base b à un nombre en base 10
- II.2 - Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b
- II.3 - Conversion d'un nombre entre les bases 2 et 16

III Opérations

I.1 Introduction

Tout entier naturel N peut se décomposer dans la base b tel que

$N_{(b)} = \alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_1 \, \alpha_0$ → Représentation de N dans la base b

avec les symboles α_i → $0 \leq \alpha_i \leq b-1$

$N_{(10)} = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i b^i = \alpha_0 b^0 + \alpha_1 b^1 + \ldots + \alpha_p b^p$

b^i (b>1) : le poids associé au symbole α_i

- ✓ La signification du symbole dépend de son poids donc de sa place dans la suite des symboles représentant le nombre
- ✓ Même chose pour la parti fractionnaire avec b^i → i <0

I.2 Nombres décimaux – base 10

Développement en base 10 (ou écriture décimale) → le plus utilisé (10 doigts de la main)

Nombre entier (i ≥ 0)

$$N_{(10)} = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i 10^i = \alpha_0 10^0 + \alpha_1 10^1 + \ldots. + \alpha_p 10^p$$

avec $0 \leq \alpha_i \leq 9$ et "alphabet de α" $= \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$

symboles → chiffres de 0 à 9

poids → puissances positives de 10

Exemple → Décomposer 1987 sur la base de 10 sous la forme $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i 10^i$

$$1987_{(10)} = 7 * 10^0 + 8 * 10^1 + 9 * 10^2 + 1 * 10^3$$

I.2 Nombres décimaux

Partie fractionnaire(i <0)

$$n_{(10)} = \sum_{p}^{i=-1} \alpha_i 10^i$$

avec $0 \leq \alpha_i \leq 9$ et "alphabet de α" $= \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

les symboles → chiffres de 0 à 9
les poids → puissances négatives de 10

Exemple → Décomposer $25{,}308_{(10)}$ sur la base de 10 sous la forme $\sum_i \alpha_i 10^i$

$$25{,}308_{(10)} = 8 * 10^{-3} + 0 * 10^{-2} + 3 * 10^{-1} + 5 * 10^{0} + 2 * 10^{1}$$

I.3 Nombres binaires – base 2

Développement en base 2 → le plus utilisé en informatique

→ Plus petite quantité d'information qui ne peut prendre que 2 valeurs : 0 ou 1 (vrai/faux; true/false)
→ Base minimale (2 éléments) →Bit = Binary Digit
→ Octet = 8 bits / Word = 2 octets →Stockage des informations en octets

Nombre entier (i ≥ 0)

$$N_{(10)} = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i 2^i$$

$$= \alpha_0\, 2^0 + \alpha_1 2^1 + \ldots + \alpha_p\, 2^p$$

LSB : Least Significant Bit MSB : Most Significant Bit

avec $0 \leq \alpha_i \leq 1$ et "alphabet de α" $= \{0, 1\}$

!

Écriture $\boldsymbol{\alpha_p \alpha_{p-1} \ldots \alpha_1 \alpha_0}$

MSB LSB

symboles → "alphabet de α" $= \{0, 1\}$ $(\alpha_i = 0\ ou\ \alpha_i = 1)$
poids → puissances positives de 2

I.3 Nombres binaires

Exemple → Décomposer $101_{(2)}$ sur la base de 2 sous la forme $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i 2^i$

LSB

$$101_{(2)} = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2$$ MSB

Comme en décimal → partie fractionnaire avec des bits à droite de la virgule binaire.

Exemple → Décomposer $11{,}101_{(2)}$ sur la base de 2 sous la forme $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i 2^i$

$$11{,}101_{(2)} = 1 * 2^{-3} + 0 * 2^{-2} + 1 * 2^{-1} + 1 * 2^0 + 1 * 2^1$$

Tableau des puissances de 2

2^{10}	2^{9}	2^{8}	2^{7}	2^{6}	2^{5}	2^{4}	2^{3}	2^{2}	2^{1}	2^{0}	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125

I.4 Nombres hexadécimaux – base 16

Développement en base 16 → très utilisée en informatique pour l'affichage

→ Représentation compacte des nombres binaires (4 bits = 1 hexadécimal)

Nombre entier (i ≥ 0)

$$N_{(10)} = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i 16^i \qquad \text{avec } 0 \leq \alpha_i \leq 15$$

symboles → "alphabet de α" $= \{0, 1, \ldots 9, A, B, C, D, E, F\}$

poids → puissances positives de 16

Tableau de correspondance

A	B	C	D	E	F
10	11	12	13	14	15

Exemple → Décomposer AF,D8$_{(16)}$ sur la base de 16 sous la forme $\sum_{i=0}^{p} \alpha_i 16^i$

$$\mathrm{AF,D8}_{(16)} = 8 * 16^{-2} + \mathrm{D} * 16^{-1} + \mathrm{F} * 16^{0} + \mathrm{A} * 16^{1}$$

Plan

Chapitre 1 Représentation des nombres – Numération

I Système de numération

I.1 - Introduction
I.2 - nombres décimaux
I.3 - nombres binaires
I.4 - nombres hexadécimaux

II Conversions

II.1 - Conversion d'un nombre en base b à un nombre en base 10
II.2 - Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b
II.3 - Conversion d'un nombre entre les bases 2 et 16

III Opérations

II. Conversions (transcodage)

→ Opération pour changer de base
→ Plus la base est petite, plus le nombre de symboles est grand

II.1 Conversion d'un nombre en base b à un nombre en base 10

Toujours la même méthode → écriture polynomiale

$$\boxed{N_{(b)} = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i b^i = N_{(10)}}$$

Exemple → Convertir $10011_{(2)}$ en base 10
→ Convertir $1{,}101_{(2)}$ en base 10
→ Convertir $5EA_{(16)}$ en base 10

II. Conversions (transcodage)

II.1 Conversion d'un nombre en base b à un nombre en base 10

Exemples → Convertir $10011_{(2)}$ en base 10

$$110011_{(2)} = 1*2^0+1*2^1+0*2^2+0*2^3+1*2^4+1*2^5 = 1+2+16+32 = 51_{(10)}$$

→ Convertir $1{,}101_{(2)}$ en base 10

$$1{,}101_{(2)} = 1*2^{-3}+0*2^{-2}+1*2^{-1}+1*2^0 = 0{,}125+0{,}5+1 = 1{,}625_{(10)}$$

→ Convertir $5EA_{(16)}$ en base 10

$$5EA_{(16)} = A*16^0+E*16^1+5*16^2 = 10+14*16+5*256 = 1514_{(10)}$$

II.2 Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b (2 ou 16) : $N_{(10)} \rightarrow N_{(b)}$

→ **2 méthodes**

→ a - Méthode par soustraction

→ b - Méthode par divisions (partie entière) / multiplications successives (partie fractionnaire)

a - Méthode par soustraction

1 - Recherche du poids le plus proche inférieur de $N_{(10)} \rightarrow b^{k-1}$

2 - Soustraction de $N_{(10)}$ du nombre $\alpha_{k-1}b^{k-1} \rightarrow N_{(10)} - \alpha_{k-1}b^{k-1}$

3 - Retour à l'étape 2- avec le nombre obtenu

4 - Fin quand on arrive à b^0 pour la partie entière

NB : même méthode pour la partie fractionnaire, poids fort à droite de la virgule

Attention : procédé peut devenir infini (voir TD)

Nombre de bits nécessaires

$$k = \lfloor log_2(N_{(10)}) \rfloor + 1$$

ou

$$2^{k-1} < N_{(10)} < 2^k$$

II.2 Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b : $N_{(10)} \rightarrow N_{(b)}$

a – Méthode par soustraction

Exemple → $95_{(10)}$ en base 2, 16

base 2

$95 - 1*64(2^6) = 31$
$31 - 0*32(2^5) = 31$
$31 - 1*16(2^4) = 15$
$15 - 1*8(2^3) = 7$
$7 - 1*4(2^2) = 3$
$3 - 1*2(2^1) = 1$
$1 - 1*1(2^0) = 0$

Sens de lecture

$95_{(10)}=1011111_{(2)}$

base 16

$95 - 5*16 = 15$
$15 - 15*16^0 = 0$

$95_{(10)}=5F_{(16)}$

II.2 Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b : $N_{(10)} \rightarrow N_{(b)}$

b – Méthode par division euclidiennes successives par b – Partie entière

Lecture de bas en haut (symbole de poids faible d'abord)

Exemple → $95_{(10)}$ en base 2

95 = 2*47 + 1
47 = 2*23 + 1
23 = 2*11 + 1
11 = 2*5 + 1
5 = 2*2 + 1
2 = 2*1 + 0
1 = 2*0 + 1

Sens de lecture

OU
même méthode
écriture différente

95	2						
-94	47	2					
(LSB) 1	-46	23	2				
	1	-22	11	2			
		1	-10	5	2		
			1	-4	2	2	
				1	-2	1	2
					0	-0	0
						(MSB) 1	

Sens de lecture

stop

$95_{(10)}=1011111_{(2)}$

II.2 Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b : $N_{(10)} \rightarrow N_{(b)}$

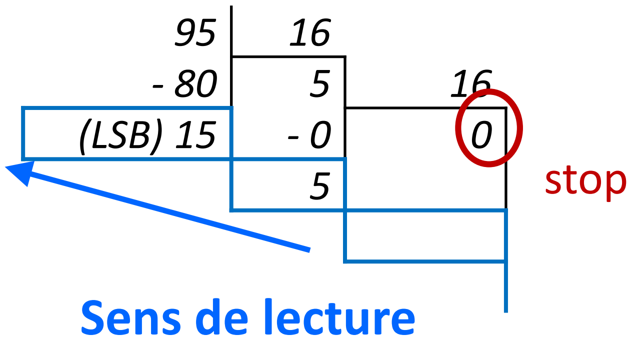
b – Méthode par division euclidiennes successives par b – Partie entière

Lecture de bas en haut (symbole de poids faible d'abord)

Exemple → $95_{(10)}$ en base 16

95 = 5*16 + 15
5 = 0*16 + 5

Sens de lecture



OU
même méthode
écriture différente

$95_{(10)} = 5F_{(16)}$

II.2 Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b : $N_{(10)} \rightarrow N_{(b)}$

b – Méthode par division euclidiennes successives par b – Partie entière

Pour les nombres entiers ou partie entière → Divisions successives par b

NB : Les multiples de b se termine par 0 → $2^1*7 = 14_{(10)} = 1110_{(2)}$
Les multiples de b^2 se termine par 00 → $2^2*3 = 12_{(10)} = 1100_{(2)}$
Les multiples de b^3 se termine par 000 → $2^3*3 = 24_{(10)} = 11000_{(2)}$

NB : Approche intuitive, pour la conversion en base binaire avec n bits → 2^n (valeurs de 0 à 2^n-1)

Nombre de bits	4	8	16	32
Plage de valeurs	0 à 15	0 à 255	0 à 65 535	0 à 4 294 672 296

II.2 Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b : $N_{(10)} \rightarrow N_{(b)}$

b – Méthode par multiplications successives – Partie fractionnaire

Pour la partie fractionnaire → Multiplications successives par b

NB : Arrêt des calculs au format défini (calcul infini)…
Une suite de symbole peut se répéter

Exemple → $0{,}375_{(10)}$ en base 2, 16

0,375*2 = 0,75
0,75*2 = 1,5
0,5*2 = 1,0

Sens de lecture

Stop

$0{,}375_{(10)}=0{,}011_{(2)}$

0,375*16 = 6,0

$0{,}375_{(10)}=0{,}6_{(16)}$

II.2 Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b : $N_{(10)} \rightarrow N_{(b)}$

b – Méthode par divisions/multiplications successives

Exemple → $0,5625_{(10)}$ en base 2, 16

Exemple → $18,5625_{(10)}$ en base 2, 16

II.3 Conversion d'un nombre entre les bases 2 et 16

→ Toutes ces bases sont des puissances de 2 : 2^1, 2^3, 2^4

→ Conversions rapides

Passage base hexa (16)

Hexa vers binaire → chaque symbole est remplacée par 4 bits

binaire vers hexa → paquet de 4 bits = 1 symbole

→ partie entière : de la droite vers la gauche

→ partie fractionnaire : de la gauche vers la droite

→ Rajouter des 0 si besoin

Exemple → $FA,8_{(16)}$ en base 2 et $10111,01_{(2)}$ en base 16

II.3 Conversion d'un nombre entre les bases 2 et 16

Exemple → $FA,8_{(16)}$ en base 2

$F\ A,8_{(16)}$

1111	1010	1000

→ $10111,01_{(2)}$ en base 16

$0001\ 0111,0100_{(2)}$

$1\ 7,4_{(16)}$

Rajout de 0 pour avoir des paquets de 4 bits

Plan

Chapitre 1 Représentation des nombres – Numération

I Système de numération

- I.1 - Introduction
- I.2 - nombres décimaux
- I.3 - nombres binaires
- I.4 - nombres hexadécimaux

II Conversions

- II.1 - Conversion d'un nombre en base b à un nombre en base 10
- II.2 - Conversion d'un nombre en base 10 à un nombre en base b
- II.3 - Conversion d'un nombre entre les bases 2 et 16

III Opérations

III. Opérations

a - Additions

Comme en décimal → Indiquer les retenues

Exemple → $111_{(2)} + 011_{(2)}$ $68_{(16)}+3A_{(16)}$

Base 2

$1_{(2)}+1_{(2)} = 10_{(2)}$

$1_{(2)}+0_{(2)} = 1_{(2)}$

$1_{(2)}+1_{(2)}+1_{(2)} = 11_{(2)}$

$$\begin{array}{r} {\color{red}1\ 1\ 1}\phantom{0_{(2)}} \\ 1\ 1\ 1_{(2)} \\ +\quad 0\ 1\ 1_{(2)} \\ \hline 1\ 0\ 1\ 0_{(2)} \end{array}$$

Base 16

Je complète la base 16

exemple

$C_{(16)}+8_{(16)} = C_{(16)}+4_{(16)}+4_{(16)}=14_{(16)}$

$10_{(16)}$

$$\begin{array}{r} {\color{red}1}\phantom{8_{(16)}} \\ 6\ 8_{(16)} \\ +\quad 3\ A_{(16)} \\ \hline A\ 2_{(16)} \end{array}$$

III. Opérations

b - Soustractions

Comme en décimal → Indiquer les retenues

Exemple → $111_{(2)} - 011_{(2)}$ et $100_{(2)} - 011_{(2)}$ $68_{(16)} - 3A_{(16)}$

Base 2

$1_{(2)} - 1_{(2)} = 0_{(2)}$

$10_{(2)} - 1_{(2)} = 1_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1_{(2)} \\ -\ 0\ 1\ 1_{(2)} \\ \hline 1\ 0\ 0_{(2)} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\ {}_{1}0\ {}_{1}0_{(2)} \\ -\ {}^{1+}0\ {}^{1+}1\ \ 1_{(2)} \\ \hline 0\ \ 0\ \ 1_{(2)} \end{array}$$

Base 16

Je complète la base 16

exemple

$15_{(16)} - 8_{(16)} = 15_{(16)} - 5_{(16)} - 3_{(16)} = D_{(16)}$

$10_{(16)}$

$$\begin{array}{r} 6\ {}_{1}8_{(16)} \\ -\ {}^{1+}3\ A_{(16)} \\ \hline 2\ E_{(16)} \end{array}$$