Licence 1 Informatique - Électronique

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fondamentaux Mathématiques

1 : Logique des propositions

1 Déterminer une table de vérité

Il s'agit de dresser un tableau en considérant toutes les valeurs de vérités possibles (Vrai ou Faux) de chaque proposition qui entre dans la composition de la proposition étudiée.
Cela s'avère très utile lorsqu'on veut comparer deux propositions données.

Exemple 1.1. Soit la proposition : « p ou (non(q)) ».

p	q	non(q)	p ou non(q)
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

Les deux premières colonnes du tableau donnent les valeurs de vérités de p et de q (4 cas possibles en tout).
A partir de la colonne « q », on déduit la valeur de vérité de la colonne « non(q) ».
Puis, à partir de la colonne « p » et de la colonne « non(q) », on déduit la valeur de vérité de « p ou non(q) ».

2 Comprendre une implication

L'expérience montre que l'implication est, de loin, le connecteur logique qui pose le plus de difficultés. Travailler avec la forme (équivalente) « non(p) ou q » à la place de « $p \Longrightarrow q$ » permet de prévenir certaines erreurs.

2.1 En langage naturel

Exemple 2.1. On admet, pour simplifier, que le code des impôts définit les contribuables soumis à la redevance audiovisuelle comme ceux qui satisfont à l'*unique* règle suivante :
« Un contribuable de moins 76 ans doit avoir un revenu fiscal de référence nul pour être exonéré. »
Quels sont les contribuables exonérés de redevance audiovisuelle ?

Il est possible d'assimiler la règle fiscale d'exonération sous la forme d'une implication simplifiée : « ($<$ 76 ans) $\Longrightarrow$ (revenu fiscal de référence =0). »
On pourra noter qu'un contribuable de 76 ans ou plus satisfait la règle. Ainsi, les contribuables exonérés sont ceux qui ont moins de 76 ans avec un revenu fiscal de référence nul ainsi que ceux qui ont au moins 76 ans.

2.2 En langage mathématique

Exemple 2.2. Déterminer l'ensemble des nombres réels x pour lesquels la proposition suivante est vraie : « Si $x \geq 0$ alors $x^2 - 1 \geq 0$ ».
La condition peut se réécrire « $x \geq 0 \Longrightarrow x^2 - 1 \geq 0$ » ou encore « ($x < 0$) ou ($x^2 - 1 \geq 0$) ». Donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \geq 0$ qui vérifient $x^2 - 1 \geq 0$ ainsi que tous les $x < 0$; on obtient donc $x \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$.

2.3 Distinguer négation, contraposée et réciproque d'une implication

Etant donnée une implication $p \Longrightarrow q$, il ne faut pas confondre :
- l'implication réciproque : $q \Longrightarrow p$,
- l'implication contraposée : $\text{non}(q) \Longrightarrow \text{non}(p)$,
- sa négation : p et $\text{non}(q)$.

Exemple 2.3. Soit la proposition (vraie) : « Si n est un entier pair alors n^2 est un entier pair. »
- l'implication réciproque (vraie) est : « Si n^2 est un entier pair alors n est un entier pair, »
- l'implication contraposée (vraie) est : « Si n^2 est un entier impair alors n est un entier impair, »
- sa négation (fausse) est : « n est un entier pair et n^2 est un entier impair. »

Exemple 2.4. Soit x un nombre réel. Considérons la proposition (vraie) : « $x > 1 \Longrightarrow |x| > 1$ »
- son implication réciproque (fausse) est : « $|x| > 1 \Longrightarrow x > 1$ »,
- son implication contraposée (vraie) est : « $|x| \leq 1 \Longrightarrow x \leq 1$ »,
- sa négation (fausse) est : « $x > 1$ et $|x| \leq 1$ ».

3 Nier une proposition

3.1 En général

On a les équivalences suivantes (d'après la Prop 1 du Cours) :
- $\text{non}(p \text{ ou } q) \Longleftrightarrow \text{non}(p) \text{ et } \text{non}(q)$,
- $\text{non}(p \text{ et } q) \Longleftrightarrow \text{non}(p) \text{ ou } \text{non}(q)$,
- $\text{non}(\text{non}(p)) \Longleftrightarrow p$.

qui permettent de nier une proposition fabriquée à partir d'autres propositions reliées à l'aide de connecteurs logiques.

Remarque : Il est important de noter qu'en pratique on utilise *successivement* les équivalences données ci-dessus. En effet, lorsqu'on établit que p est équivalente à q, puis que q est équivalente à r, alors on en déduit que p est équivalente à r. On parle de *transitivité* de l'équivalence.

Exemple 3.1. Comment nier « p ou $\text{non}(q)$ » ?

On a l'équivalence :

$$\text{non}(p \text{ ou } \text{non}(q)) \Longleftrightarrow \text{non}(p) \text{ et } \text{non}(\text{non}((q)),$$

puis on a l'équivalence :

$$\text{non}(p) \text{ et } \text{non}(\text{non}((q)) \Longleftrightarrow \text{non}(p) \text{ et } q.$$

La négation de notre proposition est donc équivalente à : « $\text{non}(p)$ et q ».

3.2 Le cas particulier d'une implication

Pour nier l'implication « $p \Longrightarrow q$ », le plus simple est de l'écrire sous la forme « $\text{non}(p)$ ou q » ; on obtient alors sa négation sous la forme « p et $\text{non}(q)$ ». Plutôt que d'apprendre par coeur ce dernier résultat, il est fortement conseillé de refaire le petit raisonnement à chaque fois.

3.2.1 En langage naturel

Exemple 3.2. Soit la proposition suivante : « Si j'allume ma télévision alors je passe une bonne soirée ». On peut y voir une implication qui se formaliserait grossièrement par « Télévision $\Longrightarrow$ bonne soirée ». Sa négation est alors « Télévision et mauvaise soirée » qu'on peut exprimer par « J'allume ma télévision et pourtant je passe une mauvaise soirée ».

3.2.2 En langage mathématique

Exemple 3.3. On cherche à nier la proposition $((p \text{ ou } q) \Longrightarrow q)$, c'est-à-dire la proposition non$(p$ ou $q)$ ou q.

On obtient alors (d'après la Prop 1 du Cours) la proposition équivalente

$$\text{non}(\text{non}(p \text{ ou } q) \text{ ou } q)$$

qui elle-même équivaut à

$$\text{non}(\text{non}(p \text{ ou } q)) \text{ et non}(q)$$

elle même équivalente à

$$(p \text{ ou } q)) \text{ et non}(q).$$

Par les Lois de Morgan (voir encore la Prop 1 du Cours), ceci est encore équivalent à

$$(p \text{ et non}(q))) \text{ ou } (q \text{ et non}(q)).$$

Comme $(q$ et non$(q))$ est toujours fausse, on déduit que la négation de $((p \text{ ou } q) \Longrightarrow q)$ s'exprime alors simplement par

$$p \text{ et non}(q).$$

4 Démontrer que deux propositions sont équivalentes

Dans le cas où on veut comparer deux formules données p et q dans le but de dire si elles sont équivalentes, ou dans le but de découvrir une formule équivalente (plus simple) à une formule donnée p, il y a deux grandes stratégies : l'approche sémantique (utiliser les tables de vérités) et l'approche syntaxique (utiliser les formules équivalentes).

4.1 Approche sémantique

On dresse la table de vérité des formules données et on peut alors décider si elles sont équivalentes.

Exemple 4.1. On veut montrer que les propositions « $p \Longrightarrow$ non(q) » et « non$(p$ et $q)$ » sont équivalentes. On dresse pour cela les tables de vérité de chacune d'elle :

p	q	non(q)	$p \Longrightarrow$ non(q)	non$(p$ et $q)$
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

On constate qu'elles ont même table de vérité, donc elles sont bien équivalentes.

L'inconvénient de cette approche sémantique est qu'elle devient de plus en plus lourde à mesure qu'augmente le nombre de propositions. C'est pourquoi on privilégie l'approche syntaxique lorsque les tables de vérité deviennent trop grandes.

4.2 Approche syntaxique

Il s'agit de trouver une proposition équivalente à une proposition donnée en appliquant des équivalences connues.

En pratique, on utilise successivement plusieurs équivalences connues ainsi que la *transitivité* de l'équivalence. A savoir : lorsqu'on établit que p est équivalente à q, puis que q est équivalente à r, alors on peut en déduire que p est équivalente à r.

Exemple 4.2. Montrons l'équivalence de « $p \Longrightarrow \text{non}(q)$ » et de « $\text{non}(p \text{ et } q)$ ».

On sait qu'on a l'équivalence

$$(p \Longrightarrow \text{non}(q)) \iff (\text{non}(p) \text{ ou } \text{non}(q))$$

Et aussi l'équivalence

$$(\text{non}(p) \text{ ou } \text{non}(q)) \iff \text{non}(p \text{ et } q)$$

Ce qui donne l'équivalence souhaitée par transitivité.