Fiche Nombres complexes

Formes des nombres complexes

Forme algébrique : $z = a + bi$
Forme trigonométrique : $z = |z| \times (\cos\theta + i\sin\theta)$
Forme exponentielle : $z = |z| \times e^{i\theta}$

Pour passer de la forme algébrique à une autre, il faut calculer le module et l'argument.

Propiétés du module

Définition du module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

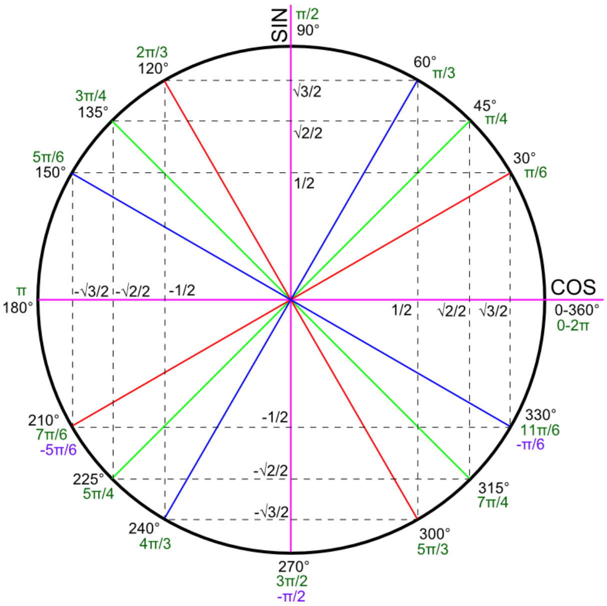
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $|z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = |-z|$
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $|z \cdot \overline{z}| = |z| \cdot |\overline{z}|$ et donc $\left|\frac{z}{\overline{z}}\right| = \frac{|z|}{|\overline{z}|}$
- $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$
- **Inégalité triangulaire :** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Propriétés de l'argument

Définition de l'argument : $\theta = arg(z)(mod(2\pi)) \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{Re(z)}{|z|} \\ \sin\theta = \frac{Im(z)}{|z|} \end{cases}$

- $arg(\overline{z}) = -arg(z)(mod\ 2\pi)$
- $arg(-\overline{z}) = \pi - arg(z)(mod\ 2\pi)$
- $arg(z) = \pi + arg(z)(mod\ 2\pi)$
- $arg(z \cdot z') = arg(z) + arg(z')(mod\ 2\pi)$ et donc $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')(mod\ 2\pi)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, arg(z^n) = n \cdot arg(z)(mod\ 2\pi)$

Trigonométrie



Formules de trigonométrie

Additions et soustractions :

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ et $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ et $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$
- $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
- $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

Autres formules

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

D'où les formules suivantes :

- $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

Tangente : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Formule d'Euler, application aux nombres complexes

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \iff 2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \iff 2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$$

Méthodes

Linéarisation

Objectif : Transformer des $\sin^n x$ et $\cos^n x$ en somme de $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$
Cela peut permettre de trouver des primitives par exemple

1. Réecriture des $\sin^n x$ et $\cos^n x$ en utilisant la **formule d'Euler**

$$\cos^n \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n$$

2. Développement avec le binôme de Newton :

$$\cos^n \theta = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{i\theta(n-k)} \cdot e^{i\theta k}\right)$$

3. Regroupement des exponentielles de même puissance. *Par exemple :
$cos^3x = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \iff \frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix}))$
4. Réutilisation des formules d'Euler $2\cos\theta = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et $2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$
Par exemple : $cos^3x = \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 3 \cdot 2\cos(x))$
5. Simplification par 2

Attention pour la linéarisation de sinus

Ne pas oublier les **i**, aussi bien dans les $\frac{1}{(2i)^n}$ que dans les formules d'Euler :
$2i\sin\theta = e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

On peut aussi utiliser les formules de trigonométrie usuelles pour linéariser.

Info

- Si la fonction à linéariser est paire, on obtiendra au final que des cosinus (car cos est paire)
- Si la fonction à linéariser est impaire, on aura au final que des sinus (car sin est impaire)

Equations du second degré

Équations du second degré

Proposition : Pour tout nombre complexe a non nul, l'équation $z^2 = a$ possède deux solutions distinctes opposées.

Théorème : Si a, b, c sont des complexes avec $a \neq 0$, alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ possède deux solutions éventuellement égales,

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b+\delta}{2a},$$

où δ est une des deux solutions de l'équation $z^2 = \Delta$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant.

Si z_1 et z_2 sont les deux racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, alors

$$z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$$
$$z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}.$$

Racines d'un nombre complexe

L'équation $z^n = a$ possède n solutions que l'on appelle les racines n-ièmes de a.
Par exemple, pour $z^2 = |z| \cdot e^{i\theta}$, ses racines sont $z_1 = |z|^{1/2} e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $z_2 = |z|^{1/2} e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$

Pour trouver les racines n-ièmes, il faut trouver la racine évidente ($z_1 = |z|^{1/n} e^{\frac{i\theta}{n}}$) et les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire, les solutions de : $w^n = 1$