Fondamentaux Mathématiques

Feuille d'exercices n°1 : Logique des propositions

NON, ET, OU

Exercice n°1

Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte. On considère les propositions suivantes :

$A =$ « la carte tirée est un cœur » et $B =$ « la carte tirée est un as ».

Exprimer tous les tirages correspondant à la proposition « A ET B » et tous les tirages correspondant à la proposition « A OU B »

Exercice n°2

Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte. On considère les propositions suivantes :

$A =$ « la carte tirée est un cœur » et $B =$ « la carte tirée est un as ».

Exprimer à l'aide d'une phrase « NON(A ET B) » et « NON(A OU B) »

Exercice n°3

On lance un dé à six faces. On considère les propositions suivantes :

$A =$ « le numéro est pair » et $B =$ « le numéro est un multiple de 3 ».

Donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « A ET B »

De même, donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « A OU B »

Exercice n°4

On lance un dé à six faces. On considère les propositions suivantes :

$A =$ « le numéro est pair » et $B =$ « le numéro est un multiple de 3 ».

Donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « NON(A ET B) »

De même, donner tous les lancers possibles correspondant à la proposition « NON(A OU B) »

Exercice n°5

Soit x et y deux réels. On considère les propositions $A =$ « $x \geq 0$ » et $B =$ « $y \geq 0$ ». Exprimer les propositions suivantes : NON(A) NON(B) NON(A et B) NON(A ou B)

*Pour les deux exercices qui suivent, on rappelle que deux formules ayant même table de vérité (elles sont donc équivalentes) sont dites **égales**.*

Exercice n°6

À l'aide d'une table de vérité, montrer que les formules « p OU $(q$ ET $r)$ » et « $(p$ OU $q)$ ET $(p$ OU $r)$ » sont égales.

Exercice n°7

Soit x et y deux réels. Montrer que les deux formules suivantes sont égales

f_1 : $((x = 0)$ ET $(x \neq y))$ OU $((x \neq 0)$ ET $(x = y))$

f_2 : NON$(((x = 0)$ OU $(x \neq y))$ ET $((x \neq 0)$ OU $(x = y)))$

1) en montrant que ces deux formules ont même table de vérité (*méthode sémantique*).

2) en utilisant les propriétés des connecteurs (*méthode syntaxique*).

NON, ET, OU : utilisation des symboles

On utilise parfois les symboles ¬, ∧, ∨ pour désigner respectivement les connecteurs NON , ET , OU
Ainsi, p et q étant des propositions, l'assertion :
- « NON p » est notée $\neg p$
- « p ET q » est notée $p \wedge q$
- « p OU q » est notée $p \vee q$

Exercice n°8

Former les négations des assertions suivantes : (1) $(p \vee q) \wedge r$ (2) $(p \wedge q) \vee r$

Exercice n°9

Simplifier l'expression $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)$

Exercice n°10

On considère la table de vérité de la formule f suivante :

p	q	f
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exprimer f en fonction des variables p et q.

Implication, Contraposée, Équivalence

Exercice n°11

Soit ABC un triangle. On note $\mathcal{P}$ la proposition « ABC est un triangle ~~équilatéral~~ isocèle » et Q la proposition « ABC est un triangle ~~isocèle~~ équilatéral ». Écrire, en langage naturel, la contraposée de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow Q$. Écrire (toujours en langage naturel) la négation de cette même implication.

Exercice n°12

Déterminer tous les entiers naturels non nuls n inférieurs ou égaux à 20 qui vérifient l'énoncé : « *Si n est un nombre pair, alors $n+1$ est un nombre premier.* »

Exercice n°13

On considère un jeu de cartes où chaque carte a une lettre sur une face et un nombre sur l'autre face. Quatre cartes sont disposées sur la table :

$\boxed{A}$ $\boxed{D}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$

Quelle(s) carte(s) est-il nécessaire de retourner pour savoir si la règle « *S'il y a un A sur une face, alors il y a un 4 sur l'autre face.* » est respectée ?

Exercice n°14

1) Hier j'affirmai : « S'il pleut, alors je ne viendrai pas ». Je ne suis pas venu. Peut-on en déduire qu'il a plu ?

2) Hier j'affirmai : « S'il pleut, alors je ne viendrai pas ». Je suis venu. Peut-on en déduire qu'il a plu ?

3) Hier j'affirmai : « S'il pleut ou si mon réveil tombe en panne, alors je ne viendrai pas ». Je ne suis pas venu. Que peut-on en déduire ?

4) Hier j'affirmai : « S'il il y a grève et si mon réveil ne fonctionne pas, alors je ne viendrai pas ». Je suis venu. Peut-on en déduire qu'il y avait des grèves ?

5) Hier j'affirmai : « S'il pleut ou si mon réveil tombe en panne, alors je ne viendrai pas ». Je suis venu. Que peut-on en déduire ?

Exercice n°15

1) Quelle est la valeur de vérité des propositions suivantes ?

(a) π vaut 4 et la somme des angles d'un triangle vaut 180°

(b) π vaut 4 implique que la somme des angles d'un triangle vaut 200°

(c) si 49 est multiple de 5 alors 567 est multiple de 43

2) Donner la négation de ces propositions.

3) Nier les affirmations suivantes :

- ce quadrilatère n'est ni un rectangle ni un losange
- 35 n'est pas multiple de 4 mais est multiple de 5
- s'il pleut et que ma voiture marche, alors je vais au cinéma

Exercice n°16

Soit G = (Paul est grand) et M = (Paul est maladroit).
Traduire formellement chacun des énoncés suivants en utilisant G, M, et les connecteurs usuels :

(1) Paul est grand mais pas maladroit
(2) Si Paul est grand alors Paul est maladroit
(3) Il est faux que Paul soit petit ou maladroit
(4) Paul est maladroit quand il est grand
(5) Paul n'est ni grand ni maladroit
(6) Paul est maladroit parce qu'il est grand
(7) Paul est maladroit bien qu'il soit petit
(8) Paul est maladroit dès qu'il est grand
(9) Pour que Paul soit maladroit il faut qu'il soit grand
(10) Il suffit que Paul soit grand pour qu'il soit maladroit

Exercice n°17

Écrire la négation des phrases suivantes :
1) Paul a un pantalon bleu et une chemise rouge
2) Nasser va à la plage ou au tennis
3) S'il neige, alors je fais du ski
4) Évariste est heureux si et seulement s'il fait de la logique

Pour les trois exercices qui suivent, on rappelle que l'on dit qu'une formule est une ***tautologie*** *si elle est toujours vraie. Par exemple, $(p \vee \neg p)$ est une tautologie.*

Exercice n°18

Donner les tables de vérité des formules suivantes et indiquer, le cas échéant, si ce sont des tautologies :

1) p OU NON p (principe du tiers exclu) ;
2) NON $(p$ OU $q) \Longleftrightarrow (($ NON $p)$ ET $($ NON $q))$;
3) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow ($ NON $(p$ ET NON $q))$;
4) $((p \Longrightarrow q)$ ET $(q \Longrightarrow r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow r)$ (transitivité de la relation d'implication) ;

Exercice n°19

Vérifier que les formules suivantes sont des tautologies :

(1) $p \Longrightarrow p$
(2) $p \Longrightarrow (p \vee q)$
(3) $(\neg p \vee q) \vee p$
(4) $p \Longrightarrow (q \Longrightarrow p)$
(5) $((p \Longrightarrow q) \wedge p) \Longrightarrow q$
(6) $((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow p) \Longrightarrow p$ (Théorème de Peirce)

Exercice n°20

Les formules suivantes sont-elles des tautologies ?

1) $p \vee \neg(p \wedge q)$ **2)** $(p \wedge q) \Longrightarrow p$ **3)** $(p \vee q) \Longrightarrow (p \wedge q)$ **4)** $(p \wedge q) \Longrightarrow (p \vee q)$

Exercice n°21

Soit x et y deux réels. Écrire la négation de chacune des propositions suivantes :

1) $0 < x \leq 1$ **2)** $xy = 0$ **3)** $x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$

Vers le raisonnement...

Exercice n°22

Soit x, y et z trois réels parmi lesquels il y a zéro et deux réels non nuls de signe contraire. On suppose que les trois implications suivantes sont vraies :

$p_1 : x = 0 \Longrightarrow y > 0$ $p_2 : x > 0 \Longrightarrow y < 0$ $p_3 : y \neq 0 \Longrightarrow z > 0.$

Comparer (ordonner) x, y et z.

Exercice n°23

On considère quatre propositions A, B, C et D dont on ignore les valeurs de vérité. On suppose que les quatre propositions suivantes sont vraies :

$p_1 : C \Longrightarrow [(\textsc{non}\ A)\ \textsc{et}\ (\textsc{non}\ B)]$ $p_2 : (\textsc{non}\ D) \Longrightarrow (\textsc{non}\ C)$

$p_3 : D \Longleftrightarrow B$ $p_4 : \textsc{non}\ [A\ \textsc{et}\ (\textsc{non}\ B)\ \textsc{et}\ (\textsc{non}\ C)\ \textsc{et}\ (\textsc{non}\ D)]$.

On suppose A vraie. Quelles sont les valeurs de vérité de B, C et D ? Donner toutes les solutions possibles.

Exercice n°24

Trois jeunes gens, Marie, Paule et René, ont prononcé les phrases suivantes :

Marie : « J'ai 22 ans. J'ai deux ans de moins que Paule. J'ai un an de plus que René. »

Paule : « Je ne suis pas la plus jeune. René et moi avons trois ans d'écart. René a 25 ans. »

René : « Je suis plus jeune que Marie. Marie a 23 ans. Paule a trois ans de plus que Marie. »

Peut-on déterminer l'âge de chacun, sachant qu'une et une seule des trois assertions de chaque jeune gens est fausse.

Exercice n°25

Trois élèves sont placés en file indienne de telle sorte que le dernier voit les deux premiers, le deuxième voit le premier et le premier ne voit personne. Leur professeur a cinq chapeaux : trois rouges et deux jaunes. Il en choisit trois secrètement et les pose sur la tête de chaque élève. Il demande à chacun s'il peut en deviner la couleur. Le dernier répond que non puis le deuxième répond que non et enfin le premier dit que oui, il est capable de deviner la couleur de son chapeau. Comment est-ce possible ?

Exercice n°26

Fernand est un étudiant devant se rendre journellement à l'université. Soient les propositions suivantes :

($\mathcal{P}_1$) Si Fernand a une voiture, il n'aime pas prendre le bus ou il habite loin d'une ligne de bus.

($\mathcal{P}_2$) S'il n'a pas de bicyclette, alors il a nécessairement une voiture.

($\mathcal{P}_3$) S'il craint la marche à pied et s'il habite loin d'une ligne de bus, alors il a une bicyclette.

($\mathcal{P}_4$) S'il n'a pas de bicyclette, alors il craint la marche à pied.

($\mathcal{P}_5$) S'il n'aime pas prendre le bus, alors il habite loin d'une ligne de bus.

1) Formaliser la proposition $\mathcal{P}_2$, puis les propositions $\mathcal{P}_1$, (non $\mathcal{P}_2$), $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_5$ en utilisant les notations suivantes : C : « Fernand craint la marche à pied. » L : « Fernand habite loin d'une ligne de bus. »
V : « Fernand a une voiture. » B : « Fernand a une bicyclette. » A : « Fernand aime prendre le bus. »

On suppose que les propositions ($\textsc{non}\ \mathcal{P}_2$), $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_5$ sont vraies.

2) Fernand a-t-il une voiture ? Quelle est la valeur de vérité de la proposition $\mathcal{P}_1$?

3) Montrer que Fernand n'habite pas loin d'une ligne de bus. Fernand aime-t-il prendre le bus ?

4) Donner alors les valeurs de vérité des propositions V, B, A, C et L puis vérifier que les propositions ($\textsc{non}\ \mathcal{P}_2$), $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_5$ sont vraies.