Fondamentaux Mathématiques

Feuille n°2 : Théorie des ensembles

INDICATIONS

Liste des exercices en lien avec le cours ou les méthodes

Cours

- Définir des ensembles : 3, 7
- Inclusion, union, intersection, complémentaire : 1, 2, 8, 1, 13, 19, 23, 24, 25
- Règles de calculs : 4, 5, 6, 9, 10, 20, 21, 23, 24
- Produit cartésien : 17, 18, 22, 25
- Partition : 14, 15, 16, 19, 24

Méthodes

- Décrire un ensemble : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 14, 15, 16, 19, 21
- Trouver des ensembles vérifiant des propriétés : 8, 10
- Décrire ou reconnaître le produit cartésien de deux ensembles : 17, 18, 22, 25

Indications par exercice

1. On peut essayer de voir la région grisée comme la réunion de plusieurs régions, ou comme le complémentaire d'une zone plus facile à décrire, ou ....
2. On peut faire le travail en plusieurs étapes. Par exemple, pour $(C \cap \overline{B}) \cap A$, on représente d'abord $C \cap \overline{B}$. Ensuite, on prend l'intersection avec A.
3. Essayer d'écrire les éléments de A comme les puissances d'un même nombre et B comme les diviseurs d'un même nombre.
4. Les éléments de A et de B sont les solutions d'une équation du second degré. Attention, ceux de B sont en plus des entiers naturels.
5. Revenir à la définition de l'intersection et de la réunion. Pour montrer qu'un ensemble A n'est pas inclus dans un ensemble B, il suffit de trouver un élément de A qui n'est pas dans B.
6. Il suffit d'utiliser les définitions de la réunion, l'intersection et la différence d'ensembles.
7. Un entier naturel est un entier relatif. $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
8. Il suffit que le plus petit élément de A ne soit pas dans $A \cap B$ et que le plus petit élément de B ne soit pas dans $A \cap B$. $A \cup B$ contient tous les éléments de A et de B, y compris leur plus petit élément.
9. Poser P l'ensemble des poètes, H l'ensemble des gens heureux, B l'ensemble des banquiers et R l'ensemble des gens riches et écrire sous forme ensembliste les affirmations (1), (2) et (3).
10. Pour montrer que $P \Longrightarrow Q$, on suppose P vraie et on montre que Q est vraie. Par exemple, si $A \setminus C = B \setminus C$, est-ce que $A = B$? En fait les trois affirmations sont fausses...
11. $\mathscr{P}(E)$ a $2^3 = 8$ éléments si $E = \{1, 2, 3\}$.
12. E est un élément de $\mathscr{P}(E)$.
13. E est un élément de $\mathscr{P}(E)$ donc E est un des quatre éléments de $\mathscr{P}(E)$.
14. Revenir à la définition d'une partition. Les éléments 4, 5 et 10 sont à regarder de plus près.
15. Il n'y a pas d'autres voyelles que a, e, i, o et u en langue française, le mot « oiseau » les contient toutes.
16. Que peut valoir le reste de la division euclidienne d'un entier par 3 ?
17. $(3, 1) \in E \times F$ mais $(3, 1) \notin F \times E$.
18. Tous ces ensembles sont inclus dans $\mathbb{R}^2$ donc sont des sous-ensembles du plan.
19. Déterminer d'abord $\mathscr{P}(A)$, $\mathscr{P}(B)$ et $A \cup B$.
20. On peut utiliser les formules de distributivité.
21. Le problème se ramène à montrer que $[(A \cap B) \cup (C \cap B)] \setminus [(A \cap B) \cap (C \cap B)] = [(A \cup C) \setminus (A \cap C)] \cap B$.
22. On peut faire un dessin dans le plan ou travailler sur des ensembles finis pour trouver un contre-exemple.
23. Utiliser les propriétés de distributivité.
24. Écrire les propriétés P_i en utilisant les complémentaires.
25. La première égalité est vraie, la deuxième est fausse.