Vade-mecum **FOM**

Théorie des ensembles

1 Généralités sur les ensembles

1.1 Définitions

On appelle *ensemble* toute collection d'objets où le rang et la multiplicité ne comptent pas. Les objets sont appelés les *éléments* de l'ensemble.

Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

On note $x \in A$ le fait que l'objet x est élément de l'ensemble A, et $x \notin A$ sinon.

1.2 Extension - Compréhension

On dit qu'un ensemble est décrit *en extension* si on dresse la liste de ses éléments.
ex : $E = \{-1, 1\}$ $\quad$ $F = \{a, e, i, o, u, y\}$

NB : On peut éventuellement décrire en extension des ensembles infinis :
ex : $P = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$

On dit qu'un ensemble est décrit *en compréhension* si on définit ses éléments par une propriété.

ex : $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ qui se lit « ensemble des x réels *tels que* $x^2 = 1$ »
$\mathcal{L} = \{x \mid x \text{ est une lettre de l'alphabet}\}$
$F = \{x \in \mathcal{L} \mid x \text{ est une voyelle}\}$

1.3 Ensemble vide - Singleton

- On note $\emptyset$ l'ensemble qui n'a aucun élément.
  ex : $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -1\} = \emptyset$

- On appelle *singleton* un ensemble qui n'a qu'un seul élément.
  ex : $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 0\} = \{0\}$

1.4 Parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On dit que l'ensemble A est une *partie* (ou un sous-ensemble) de E si tous les éléments de A sont dans E.

On note $A \subset E$, ou éventuellement $E \supset A$.

Propriétés :

- pour tout ensemble E, on a $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$
- pour toutes parties A, B, C, de E, on a : $(A \subset B \text{ ET } B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$
$(A \subset B \text{ ET } B \subset A) \Longleftrightarrow A = B$

Définition : On appelle *ensemble des parties* d'un ensemble E l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ dont les éléments sont toutes les parties de E.

$$\mathscr{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$$

ex : si $E = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathscr{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

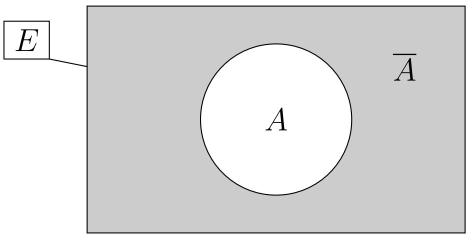
NB :
- $\mathscr{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, qui est différent de $\emptyset$
- pour tous ensembles X et Y, on a : $X \subset Y \Longleftrightarrow X \in \mathscr{P}(Y)$

2 Opérations sur les ensembles

Soit A, B, et C trois parties d'un ensemble E.

2.1 Complémentaire

On appelle *complémentaire* de A dans E l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$, ou aussi A^c.

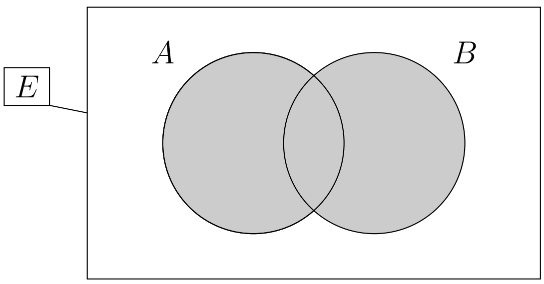


$\overline{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$

Remarques :
- $\overline{(\overline{A})} = A$
- $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

2.2 Union

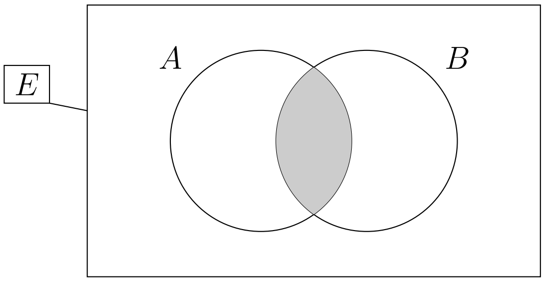
On appelle *union* de A et B l'ensemble $A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \text{ OU } (x \in B)\}$



Remarque : $(A \cup B = B) \Longleftrightarrow (A \subset B)$

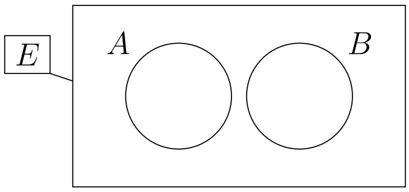
2.3 Intersection

On appelle *intersection* de A et B l'ensemble $A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \text{ ET } (x \in B\}$



Remarque : $(A \cap B = A) \Longleftrightarrow (A \subset B)$

Définition : Si $A \cap B = \emptyset$, alors on dit que les parties A et B sont *disjointes*.



2.4 Propriétés de la réunion et de l'intersection

a. $A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad A \cap \overline{A} = \emptyset$
$A \cup E = E \quad A \cap E = A \quad A \cup \overline{A} = E$
$A \cup A = A \quad A \cap A = A$ (idempotence)

b. commutativité : $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

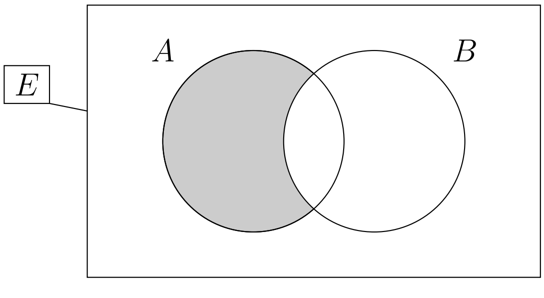
c. associativité : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

d. distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e. formules de De Morgan : $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.5 Différence

On appelle *différence* de A et B l'ensemble
$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \in A \mid x \notin B\} \\ &= A \cap \overline{B} \end{aligned}$$



2.6 Produit cartésien

Étant donnés deux ensembles A et B, on appelle *produit cartésien* de A et B l'ensemble de tous les couples (a, b) tels que $a \in A$ et $b \in B$.

On note $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \text{ ET } (b \in B)\}$

On a : $\left| \begin{array}{l} (a, b) \neq (b, a), \text{ bien que } \{a, b\} = \{b, a\} \\ \big((a, b) = (c, d)\big) \Leftrightarrow (a = c \text{ et } b = d) \end{array} \right.$

Remarques

- lorsque $A = B$, on note A^2 au lieu de $A \times A$
- $(A \times B = \emptyset) \Longleftrightarrow \big((A = \emptyset) \text{ OU } (B = \emptyset)\big)$
- en général, le produit $A \times B$ n'est pas égal au produit $B \times A$

Généralisation

On peut définir le produit cartésien de n ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où pour tout i, $a_i \in A_i$.

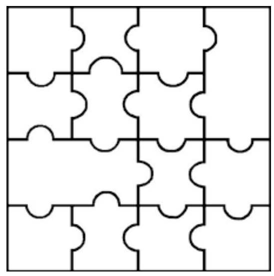
On note $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid (a_1 \in A_1) \text{ ET } (a_2 \in A_2) \text{ ET } \ldots \text{ ET } (a_n \in A_n)\}$

3 Partition

Soit un ensemble E.

On dit que des parties de E forment une *partition* de E si elles sont toutes non vides, deux à deux disjointes, et si leur union est égale à E.

Chaque élément de E appartient alors à une et une seule de ces parties.



Exemples :

$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$ est une partition de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$

$\{\{1, 3, 4\}, \{2\}\}$ est une autre partition de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$