

INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO



# Apuestas Óptimas

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

PRESENTA

ROMÁN ALBERTO VÉLEZ JIMÉNEZ

ASESOR

DR. JOSÉ MANUEL LECUANDA ONTIVEROS

REVISOR

DR. ALFREDO GARBUNO ÍÑIGO

“Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada ‘**Apuestas Óptimas**’, otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Baillères Jr., autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación.”

**Román Alberto Vélez Jiménez**

---

FECHA

---

FIRMA

*A mi madre y mi padre,  
a mi hermana y a mi hermano,  
a mi abuela y Fernando,  
y a Dios.*

# Agradecimientos

Creo que esta es la sección más complicada de escribir. Empiezo por agradecer mi existencia, porque es la casualidad de la casualidad de la casualidad a la décima potencia; y aún más, agradezco el estar hoy donde estoy. Gracias Dios.

Vivir no solo se trata de existir, sino también de sentir, de aprender, de fracasar, de experimentar, de llorar, de reír, y esto no se puede hacer sin *el otro*. Agradezco a todas las personas que serán, son y fueron parte de mi vida, ya sea directa o indirectamente. Estoy seguro que sin ustedes no sería quien soy hoy.

Gracias familia, gracias amigas, gracias amigos, gracias profesoras, gracias profesores, gracias totales.

Específicamente, gracias papá por tus casualidades y haberme incitado a entrar a la licenciatura en Actuaría, que después terminó siendo en Matemáticas Aplicadas. Gracias mamá por haber sustentado las casualidades de mi papá, apoyándome con el pago de mi universidad. También a ti abuela y también a ti Fernando. Sobre todo, gracias hermana y gracias hermano, porque por ustedes mi carrera valió la pena. Los amo.

Personalmente, estoy en deuda con todas las personas que hicieron, hacen y harán matemáticas, siendo o no su profesión. Puesto que gracias a ustedes puedo vivir infinitos infinitos con tan solo un lápiz y un papel.

# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>I Teoría</b>	<b>3</b>
<b>1. Apuestas Deportivas</b>	<b>4</b>
1.1. Elección . . . . .	4
1.2. Momios y Probabilidades . . . . .	6
1.3. Equivalencia entre Momios . . . . .	7
1.4. Premios y Consecuencias . . . . .	8
1.5. Apuestas Justas . . . . .	9
1.5.1. Comisiones . . . . .	10
1.5.2. Arbitraje . . . . .	11
<b>2. Incertidumbre</b>	<b>13</b>
2.1. ¿Por qué hay Incertidumbre? . . . . .	14
2.1.1. Gatos y Demonios . . . . .	14
2.1.2. ¿Frecuencias o Creencias? . . . . .	15
2.2. Teoría de la Información . . . . .	17
2.2.1. Entropía . . . . .	17
2.2.2. Divergencia Kullback Leiber . . . . .	18
2.3. Aprendizaje Profundo . . . . .	19
2.3.1. Redes Neuronales . . . . .	20
2.3.2. Perceptrón . . . . .	21
2.3.3. Tipos de Activación . . . . .	23
2.3.4. Pérdida y Regularización . . . . .	25
2.3.5. Aprendizaje y Predicción . . . . .	28

<b>3. Racionalidad, Recompensas y Riesgos</b>	<b>32</b>
3.1. Teoría de la Utilidad . . . . .	33
3.1.1. Preferencias . . . . .	34
3.1.2. Apuestas y Loterías . . . . .	35
3.1.3. Utilidad . . . . .	37
3.1.4. Teorema de Utilidad Esperada . . . . .	38
3.2. Racionalidad en Decisiones . . . . .	39
3.2.1. Aversión al Riesgo . . . . .	39
3.2.2. Tipos de Aversión al Riesgo . . . . .	41
3.3. Teoría Media-Varianza . . . . .	44
3.3.1. Teoría de Portafolios . . . . .	44
3.3.2. Diversificación . . . . .	45
3.4. Criterio de Inversión de Kelly . . . . .	49
3.4.1. Tasa de Retorno Exponencial . . . . .	50
3.4.2. Propiedades del Criterio de Kelly . . . . .	52
3.4.3. Apuestas Multivariadas . . . . .	56
3.4.4. Apuestas Multivariadas & Simultaneas . . . . .	58
3.4.5. Apuestas Multiperiódicas . . . . .	59
<b>Conclusiones Teoría: La Apuesta Óptima</b>	<b>61</b>
 <b>II Práctica</b>	 <b>65</b>
<b>4. Los Datos</b>	<b>66</b>
4.1. <i>English Premier League</i> . . . . .	67
4.2. Obtención de Datos . . . . .	68
4.3. Síntesis de la Información Recopilada . . . . .	69
4.3.1. Mercado de Apuestas . . . . .	69
4.3.2. Estadísticas de los Equipos . . . . .	70
4.4. Datos Finales . . . . .	72
<b>5. Modelo de Aprendizaje Profundo de Probabilidades</b>	<b>73</b>
5.1. Metodología . . . . .	73
5.2. Selección de Variables . . . . .	75
5.3. Selección de Modelos . . . . .	76
5.3.1. Optimización Hiperparamétrica . . . . .	77
5.3.2. Mejor Modelo . . . . .	78
5.4. Resultados Predictivos . . . . .	79

<b>6. Modelo Financiero para Apuestas de la EPL</b>	<b>81</b>
6.1. Precedentes . . . . .	81
6.2. Optimización de Estrategias . . . . .	82
6.2.1. Estrategias Completas . . . . .	83
6.2.2. Estrategias Restringidas . . . . .	85
6.3. Comparativa de Modelos . . . . .	86
 <b>III Resultados y Reflexiones</b>	 <b>89</b>
<b>7. Conclusiones</b>	<b>90</b>
7.1. ¿Existe la Suerte? . . . . .	91
7.1.1. Monos v.s. Matemáticos . . . . .	91
7.1.2. Validación de Supuestos . . . . .	92
7.2. Teoría y Práctica . . . . .	93
7.2.1. Cartas a Santa Claus . . . . .	93
7.2.2. Regalos, Carbones y Reflexiones . . . . .	93
7.2.3. Epitafio . . . . .	94
 <b>8. Futuras Investigaciones</b>	 <b>95</b>
8.1. Modelos Estadísticos . . . . .	95
8.2. Portafolios . . . . .	96
8.3. General . . . . .	97
 <b>IV Anexos</b>	 <b>98</b>
<b>A. Teorema de Utilidad Esperada</b>	<b>99</b>
<b>B. Algoritmos Feedforward y Backpropagation</b>	<b>104</b>
<b>C. Análisis Exploratorio de Datos</b>	<b>109</b>
C.1. Información General . . . . .	109
C.2. Momios de las Casas de Apuesta . . . . .	110
C.3. Mercado de Comisiones . . . . .	111
C.4. Goles Esperados . . . . .	114
C.5. Calificación de los Equipos por EA Sports . . . . .	116
C.6. Presupuesto de Mercado . . . . .	118
C.7. Ponderación Temporal de los npGD . . . . .	118

<b>D. Descripción de las variables de las bases de datos</b>	<b>124</b>
D.1. Football Data U.K. . . . .	124
D.2. Understats . . . . .	125
D.3. SoFIFA . . . . .	127
D.4. Variables Finales . . . . .	129



# Introducción

El 17 de junio de 2018 sucedió algo inédito: México venció a la Alemania campeona del mundo en la fase de grupos del mundial de fútbol en Rusia. Los jugadores, aficionados, el autor y probablemente Dios, no esperaban ese resultado. Sin embargo, el presente escritor apostó a que sucedía.

Dicho partido ofrecía \$1.5, \$7.7, \$4.54 por cada dolar apostado a la victoria alemana, al empate o a la victoria mexicana, respectivamente. Si la lectora tuviera \$100 dolares disponibles, ¿cuánto y a qué resultados apostaría? En la presente tesis se analiza dicha interrogante: *dada la información, cuáles son las apuestas óptimas de un jugador racional, con determinado apetito de riesgo, que debería elegir para maximizar su utilidad esperada.*

La pregunta se puede diseccionar en la obtención de información y la caracterización de sus preferencias. Con respecto a la primer cuestión, el presente texto usa herramientas de aprendizaje profundo para extraer información relevante de los datos históricos para predecir la verosimilitud de cada posible resultado. Finalmente, para solventar la segunda incógnita, se recurrió a técnicas de Teoría Moderna de Portafolios para encontrar el conjunto de apuestas óptimas de una jugadora con cierto perfil de riesgo, dadas las predicciones obtenidas en la primera parte.

El objetivo de la presente tesis es mostrar cómo encontrar los portafolios óptimos de distintos perfiles de riesgo con los datos disponibles a partir de predicciones con redes neuronales artificiales y portafolios financieros contruidos a partir del Sharpe Ratio y del Criterio de Kelly.

Para resolver la pregunta de investigación y saciar el objetivo de la tesis, el presente trabajo se dividió en 2 partes:

1. **Teoría.** Se desarrollan las herramientas necesarias para resolver científicamente la pregunta de investigación, con el fin de dar sustento teórico a la metodología usada.
2. **Práctica.** Se pone en práctica la teoría, usando como ejemplo real el problema de elección de una apostadora racional en la liga inglesa de fútbol soccer. En dicho ejemplo se ejemplifica la metodología para encontrar dichos portafolios óptimos.

No sobra mencionar que la teoría del presente trabajo es general para cualquier apuesta, siempre y cuando los eventos relevantes a apostar sean finitos.

La motivación de la presente tesis es poner a prueba las habilidades obtenidas en la carrera en Matemáticas Aplicadas y combinarlos con un hobby y pasión, las apuestas y los deportes, respectivamente. Se ponen a prueba los conocimientos obtenidos en licenciatura debido a que se utilizan las capacidades de programación adquiridas; toda la rama de estadística para la creación, validación y prueba del modelo; los conocimientos de álgebra lineal para optimizar estructuras de datos y operaciones; el cálculo numérico para optimizar problemas con y sin restricciones; y lo más importante: se pone en tela de juicio la habilidad de modelar problemas.

En caso de monetizar, los fondos recaudados serán destinados al pago de la deuda universitaria del autor, esto como símbolo que las matemáticas no solo son bellas, sino también útiles.

*Todos* los resultados pueden replicarse con los códigos construidos por el autor. Dichos procesos computacionales pueden consultarse en el repositorio [https://github.com/romanAVJ/Optimal\\_Bets\\_PremierLeague](https://github.com/romanAVJ/Optimal_Bets_PremierLeague).

# Parte I

# Teoría

# Capítulo 1

## Apuestas Deportivas

El humano apuesta todo el tiempo. Desde que se levanta, se aventura en tomar decisiones que conllevan en ganancias o pérdidas para si mismo. Dichas consecuencias dependen del evento resultante y de la decisión tomada. El individuo intenta tomar las elecciones más convenientes a su juicio; busca las decisiones que le resulten más favorables o las menos perjudiciales, racionalmente. Estas posturas ante situaciones con incertidumbre, en específico en apuestas deportivas, es lo que se estudia en la primera sección de la presente tesis. Primero se analizan los objetos a considerar en la toma de decisiones, luego sus propiedades, y por último, cómo encontrar la mejor decisión.

### 1.1. Elección

Este trabajo empieza definiendo qué es un problema de decisión. Esto en aras de establecer un marco formal al problema de investigación.

**Definición 1.1.1** (Problema de Decisión). *Un problema de decisión es la situación donde un agente se enfrenta a seleccionar una y solo una decisión de un conjunto de decisiones  $D$ .*

Un problema de decisión está completamente caracterizado por la siguiente tupla  $(D, E, C, (\geq))$ :

1. El conjunto de decisiones  $D = \{d_i | i = 1, 2, \dots, m\}$  en donde  $d_i$  es la decisión de hacer  $i$ .
2. El conjunto de eventos relevantes. Para cada decisión  $d_i \in D$  se le asigna un espacio posible de eventos  $E_i = \{e_{i,j} | j = 1, 2, \dots, n_i\}$  cuyos elementos

$e$  son una partición del espacio muestral  $\Omega$ . Al conjunto de espacios posibles  $E = \bigcup_j E_j$  se le conoce como el conjunto de eventos inciertos relevantes.

3. El conjunto de consecuencias  $C = \bigcup_j C_j$ . Aquí  $C_i = \{c_{i,j} | j = 1, 2, \dots, n_i\}$  es el conjunto de consecuencias que el resultado sea  $e_{i,j}$  al haber elegido  $d_i$ .
4. Una relación de preferencia ( $\succeq$ ) definida en  $C$ , y por ende en  $D$ , tal que  $c_{i,j} \succ c_{i,k}$  si y solo si el agente prefiere más  $c_{i,j}$  que  $c_{i,k}$ .

Las decisiones  $d \in D$  serán juzgadas completamente por las consecuencias que conllevan al sujeto, lo que significa que una misma decisión puede ser mejor o peor dependiendo de las preferencias del individuo. Notar también que hay dos tipos de naturalezas para  $D$ : decisiones con certidumbre y decisiones con incertidumbre.

De esta forma, una apuesta se puede analizar como un problema de decisión con incertidumbre, puesto que se busca encontrar la mejor apuesta (decisión) con base en los premios y consecuencias *probables* de acuerdo a las preferencias del jugador.

Se observa que en el problema del apostador, el conjunto  $D$  tiene dos componentes a considerar: los eventos a elegir y cuánto invertir en cada uno de ellos. También, se puede extender  $E_i = \mathcal{E}$ ,  $\forall i$  de tal suerte que el problema de decisión admita una representación común<sup>1</sup> para cada decisión. Por último, y quizá más importante, se aclara que aunque las preferencias de las preferencias residen totalmente en la subjetividad del individuo, en este trabajo se supone *racionalidad* en dichas preferencias.

La formalidad y desarrollo teórico de la Teoría de la Decisión quedan fuera del alcance del presente trabajo<sup>2</sup>, sin embargo, se usan varias herramientas de esta teoría como marco de referencia para responder la pregunta de investigación. Para un mayor tratamiento del tema, se recomienda la consulta de «Estadística Bayesiana» de M. Mendoza y P. Regueiro.

---

<sup>1</sup>A estas representaciones de las decisiones-eventos-consecuencias se le conocen como tablas de Savage (Steele y Stefánsson, 2020).

<sup>2</sup>En la presente tesis se usará la teoría desarrollada en 1944 por Von Neumann y Morgenstern. También se mencionan las teorías desarrolladas en 1954 por L. Savage en sus célebres Axiomas de Coherencia o la Teoría Conductual de D. Kahneman y A. Tversky dada a luz en 1979, pero estas no serán el enfoque principal del presente trabajo.

## 1.2. Momios y Probabilidades

Retomando el ejemplo del partido de México contra Alemania en el mundial de Rusia 2018, el presente autor apostó, por decir, \$1,000 pesos a que México ganaría el partido, donde la casa de apuestas Pinnacle Sports ofrecía un “momio” de +354 a que esto sucediera. El mundo entero recuerda la gran hazaña del jugador Hirving Lozano al minuto 35 que le dió la victoria a México y que también le otorgó una ganancia total al autor de \$3,540 pesos por haber elegido (apostado) a dicho evento. Los momios ofrecidos por la casa de apuestas para el partido fueron los siguientes (Shark, 2018).

	Alemania	Empate	México
Momio	-203	+670	+354

Popularmente estos, momios conocidos como *americanos*, expresan cuánto ganarás en total por cada \$100 apostados si el momio es positivo y en el caso de ser negativo dicen cuánto debes apostar para ganar \$100. Confuso, ¿no? El motivo del porqué se presenta de esta forma la información (Kahneman, 2011) (Buchdahl, 2016) es prácticamente para sesgar la decisión. Por lo mismo a continuación se desarrollan expresiones y definiciones para facilitar la comprensión de las apuestas deportivas.

**Definición 1.2.1** (Momio). *Se define como momio  $\phi$  del evento  $e$  a la razón de la probabilidad  $p$  que el evento suceda entre la probabilidad que no suceda el evento  $q := 1 - p$ .*

$$i.e. \quad \phi = \frac{p}{1 - p}.$$

Esta definición a pesar de ser bastante informativa, generalmente no se usa en las apuestas. De hecho, dependiendo del tipo de deporte y la región, la forma de presentar los momios varía.

Definimos  $W_0$  la apuesta inicial,  $W_1$  la ganancia de haber apostado  $W_0$  sin contar este mismo monto inicial y al retorno  $R$  como la ganancia bruta de la apuesta, i.e.  $R = W_1 + W_0$ . Notar que  $W_0, W_1 > 0$ , si no la apuesta sería inexistente.

**Definición 1.2.2** (Momio Fraccionado  $\phi_f$ ). *Los momios fraccionados  $\phi_f$  se definen como la razón entre la ganancia neta y la cantidad a apostar para obtener dicha ganancia.*

$$i.e. \quad \phi_f = \frac{W_1}{W_0}.$$

Esta forma de presentar los *odds* es muy común en apuestas de carreras de caballos y en las regiones de Reino Unido e Irlanda. Por lo general se denotan como  $W_1/W_0$ . Además vemos que  $\sigma_f > 0$ .

**Definición 1.2.3** (Momio Decimal  $\sigma_d$ ). *Se le conoce como momio decimal  $\sigma_d$  a la razón entre el retorno y la cantidad a apostar para obtener dicha ganancia.*

$$i.e. \quad \sigma_d = \frac{\overbrace{W_1 + W_0}^R}{W_0}.$$

Los momios decimales son muy comunes en Europa, Australia y Canadá. Vemos que necesariamente  $\sigma_d > 1$ .

**Definición 1.2.4** (Momio Americano  $\sigma_a$ ). *Se define como momio americano  $\sigma_a$  a la ganancia neta del jugador por cada \$100 apostados si  $\sigma_a$  es positivo, o como la cantidad a apostar para ganar \$100 si  $\sigma_a$  es negativo.*

$$i.e. \quad \sigma_a = \begin{cases} \text{Ganancia bruta por cada \$100} & \text{si } \sigma_a \geq 100, \\ \text{Apuesta para ganar \$100} & \text{si } \sigma_a \leq -100 \end{cases}.$$

Como bien dice el nombre, este formato es usado ampliamente en Norte América. Notamos que  $|\sigma_a| \geq 100$ .

## 1.3. Equivalencia entre Momios

Es de nuestro interés observar si se tiene la misma información entre momios, solo que expresada de distinta manera, para siempre poder tomar la mejor decisión. Tenemos primero la equivalencia entre momios fraccionados y momios decimales a partir de la siguiente derivación:

$$\sigma_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{W_0 + W_1}{W_0} = 1 + \sigma_f.$$

Para el caso del momio americano notamos que

$$\sigma_a = \begin{cases} 100\sigma_f & \text{si } \sigma_f \geq 1, \\ -100/\sigma_f & \text{si } \sigma_f < 1 \end{cases}.$$

Ambas ecuaciones muestran que los tres tipos de momios son equivalentes entre si. La siguiente tabla con los momios del partido del Mundial de Rusia 2018 lo ejemplifica.

Momio \ Apuesta	Alemania	Empate	México
Americano	-203	+670	+354
Fraccionado	1/2	67/10	177/50
Decimal	1.5	7.7	4.54

## 1.4. Premios y Consecuencias

En el ejemplo anterior tenemos tres posibles eventos: México gana, hay empate ó Alemania gana. Estos posibles resultados son excluyentes, puesto que no pueden suceder al mismo tiempo. Por tanto, forman un universo de posibilidades  $\Omega$  de los resultados finales en un partido de fútbol. Es decir, forman una partición del conjunto. Como cada evento es probable mas no seguro, entonces el premio o la consecuencia neta  $\varrho$  de apostar \$1 al evento  $e$  es aleatoria.

**Definición 1.4.1** (Ganancia Neta  $\varrho$ ). *La ganancia neta  $\varrho$  de apostar una unidad al evento  $e \in \mathcal{E}$  y que suceda, es el momio fraccional  $\sigma_f$  asociado a dicho resultado; la consecuencia neta de invertir una unidad al evento  $e$  y que no suceda, es de dicha unidad apostada.*

$$i.e. \varrho = \begin{cases} \sigma_f & \text{con probabilidad } p, \\ -1 & \text{con probabilidad } q. \end{cases} = \sigma_d \theta - 1, \quad \theta \sim \text{bernoulli}(p).$$

En el caso donde hay  $m$  eventos, la ganancia neta de cada evento se define como el vector aleatorio  $\underline{\varrho}$ , donde la entrada  $i$ -ésima es la variable aleatoria  $\varrho_i$ : las ganancias o pérdidas de apostar una unidad al evento  $e_i \in \mathcal{E}$ . O bien,

$$\underline{\varrho} = \underbrace{\text{diag}(\underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m}_{\underline{\sigma}})}_{D_\sigma} m - \mathbf{1}, \quad m \sim \text{multinomial}(1; \underbrace{p_1, p_2, \dots, p_m}_{\underline{p}}). \quad (1.1)$$

Por otro lado, la ganancia total  $R(\ell)$  del 100 % de la riqueza inicial por apostar  $\ell$  porcentaje de la riqueza al evento  $e$  es igual a la riqueza inicial más la ganancia o consecuencia aleatoria  $\ell\varrho$ .

**Definición 1.4.2** (Ganancia Total  $R(\ell)$ ).

$$R(\ell) = 1 + \ell\varrho.$$

Para extender el análisis a  $m$  posibles resultados, se presenta la siguiente notación: para el  $i$ -ésimo evento  $e_i \in \mathcal{E}$ , el momio decimal asociado se denota como  $\sigma_i^{(d)}$  (de forma análoga para los otros tipos de momios), el porcentaje



de la riqueza apostada a dicho evento es  $\ell_i$  y la ganancia neta aleatoria se escribe como  $\varrho_i$ . Para compactar la notación se denota a  $\underline{\ell}$  como el vector de apuestas, por lo que la suma de sus componentes no puede exceder del 100 % de la riqueza total del apostador, i.e.  $\sum_{i=1}^m \ell_i \leq 1$ , y por simplicidad de los resultados, se presupone un mercado sin *short selling*, i.e.  $\underline{\ell} \geq 0$ .

Por lo mencionado anteriormente, la ganancia total es el 100 % de la riqueza inicial más la suma de todas las utilidades y pérdidas de las distintas apuestas  $\ell_i$  a los distintos eventos  $e_i$ .

$$\therefore R(\underline{\ell}) = 1 + \sum_{i=1}^m \ell_i \varrho_i = 1 + \underline{\ell}' \underline{\varrho}. \quad (1.2)$$

Además, la ganancia total puede tomar únicamente el valor de cero cuando el jugador llega a su ruina: cuando apuesta toda su fortuna en ciertos eventos que no sucedieron. Por ende  $R(\underline{\ell}) \geq 0, \quad \forall \underline{\ell} \in [0, 1]^m$ .

Se hace hincapié que el conjunto de decisiones para el caso bivariado es

$$D = \{d_\ell \mid d \text{ es la decisión de apostar } \ell \text{ al evento } e, \ell \in [0, 1]\}.$$

La lectora curiosa seguramente observó que la decisión  $d_0$  = no apostar, está incluida en  $D$ , puesto que si se elige  $\ell = 0$  equivale a decidir no apostar.

Para el caso multivariado

$$D = \left\{ d_\underline{\ell} \mid d \text{ es la decisión de apostar } \ell_i \text{ al evento } e_i \quad \forall i, \underline{\ell} \in [0, 1]^m, \sum_{i=1}^m \ell_i \leq 1 \right\}.$$

## 1.5. Apuestas Justas

¿Cuánto un individuo debería ganar de forma neta  $\sigma_f$  al apostar \$1 al evento  $e$ , cuya probabilidad es de  $p$ , para considerar que es un juego justo? Intuitivamente, una apuesta justa es aquella que, en promedio, la ganancia neta es nula.

$$\text{i.e. } \mathbb{E}[\varrho] = p\sigma_f + (1-p)(-1) = \sigma_d p - 1.$$

Entonces, el valor justo de  $\sigma_f$  es aquél que anule la esperanza, por tanto

$$\sigma_d p - 1 = 0 \iff \sigma_d = 1/p. \quad (1.3)$$

Es decir, ¡si la apuesta es justa, los momios decimales son lo mismo que el inverso de la probabilidad del evento!

### 1.5.1. Comisiones

¿Cuáles habrán sido las probabilidades de aquél partido entre México y Alemania? Si *suponemos* que el inverso de los momios decimales representan las probabilidades, la tabla inferior contiene un resumen de la distribución de las probabilidades por evento.

	Alemania	Empate	México
$\sigma_d^{-1}$	0.666	0.1298	0.2202

El lector se habrá percatado que  $\sigma_{\text{ALE}}^{-1} + \sigma_{\text{EMP}}^{-1} + \sigma_{\text{MEX}}^{-1} = 1.0168$ , ¡la suma de las probabilidades suman más de uno! A este excedente  $tt$  se le conoce como la comisión (*track take*) que cobra el casino. Si los momios *reflejaran* las probabilidades reales, entonces habría que ajustar  $\sigma_d^{-1}$  dividiéndolo entre  $1 + tt$  para que sumen 1. Por lo que las probabilidades “reales” serían:

	Alemania	Empate	México
$\sigma_d^{-1}/(1 + tt)$	0.6556	0.1277	0.2166

Si se apuesta \$1 a cada posible resultado, la ganancia neta esperada sería de  $0.6556 \times \$1.5 - 1 = -\$0.0168$  para Alemania,  $0.1277 \times \$7.7 - 1 = -\$0.0168$  para el empate, y, como habrá adivinado el lector,  $0.2166 \times \$4.54 - 1 = -\$0.0168$  para México. Por lo que, en promedio, la casa de apuestas se queda con \$0.0168 ( $tt$ ) por cada unidad apostada en este partido si los momios representaran las probabilidades de los eventos.

Peor aún, si la estrategia es

$$\ell_i^{(A)} = \left( \sigma_i^{(d)} \right)^{-1} / (1 + tt), \quad (1.4)$$

lo que son el inverso de los momios fraccionales pero corregidos, entonces la ganancia total esta dada por

$$R(\omega_i; \underline{\ell}_A) = 1 + \underline{\ell}'_A \varrho(\omega_i) = 1 + \ell_i^{(A)} \sigma_i^{(d)} - \underbrace{\sum_{j=1}^m \ell_j^{(A)}}_{=1} = (1 + tt)^{-1}, \quad \forall \omega_i \in \Omega.^3 \quad (1.5)$$

Como hay comisión, entonces  $R(\underline{\ell}^A) = (1 + tt)^{-1} < 1$  para cualquier evento. Siempre se pierde. Sin embargo, aunque las casas de apuestas tengan incorporadas sus comisiones dentro de sus momios, como el mercado no es

---

<sup>3</sup>En este caso  $\mathcal{G}$  es la partición de cada átomo muestral del universo de los posibles resultados finales para el partido. Por lo que necesariamente  $e_i = \omega_i$ ,  $\forall i$ .

eficiente clásicamente, existe alguna casa de apuestas que ofrezca mejor pago para el resultado del evento- $i$  que las demás (Jakobsson, Karlsson y col., 2007). Por tanto hay que considerar más de una casa de apuestas al realizar cualquier apuesta.

En el presente trabajo no se suponen apuestas mínimas, ni impuestos generados por ganancias, ni comisiones adicionales al *track take*. Adicionalmente, se suponen precios fijos una vez dados al mercado: es decir, los momios publicados por las casas de apuestas no cambian de un instante a otro. Esto en fin de simplificar los resultados del presente trabajo.

### 1.5.2. Arbitraje

Por el contrario, una ineficiencia del mercado es aquella donde  $\sum_i^r 1/\phi_i^{(d)} = 1 + tt < 1$ , lo cual implica una comisión negativa, *i.e.*  $tt < 0$  y por ende apuestas seguras<sup>4</sup>. Esta seguridad está basada en que si se apuesta  $\underline{\ell}^A$ , entonces por la ecuación (1.4) se tiene que  $R(\underline{\ell}^A) = (1 + tt)^{-1} > 1$  para cualquier evento.

Por ejemplo, para el partido entre el Chelsea y el Newcastle disputado el 15 de febrero de 2021, se encontró que la casas de apuestas Victor Chandler, Pinnacle Sports e Interwetten ofrecían unos momios decimales de 1.29, 6.85, 13 para la victoria local, el empate y victoria visitante, respectivamente. Observamos que el *track take* es de  $-0.001898$ , por lo que al apostar  $\underline{\ell}^A$ , la ganancia total segura es de  $R(\underline{\ell}^A) = (1 + tt)^{-1} = 1.001901$ . Ganar 0.1 % en 90 minutos sin riesgo, no es para nada despreciable. En la parte práctica de la presente tesis se muestra cómo encontrar partidos con Teoría Moderna de Portafolios, al igual que la cantidad de encuentros con dicha característica<sup>5</sup>.

Una vez estudiados los premios y consecuencias que pueden conllevar ciertas apuestas, lo siguiente es ver en cómo saber en qué eventos apostar como también saber cuánto invertir en los mismos.

Se observó que dichos premios se resumen en los momios ofrecidos por las casas de apuesta pero, no los premios justos. ¿Serán dichas tasas de retorno las verdaderas? ¿Cómo una apostadora debería calcular sus propios momios y valorar si las apuestas valen realmente la pena o no?

En el siguiente capítulo se da una introducción al aprendizaje estadístico, cuyo objetivo es aprender del pasado para predecir el futuro con la mayor

---

<sup>4</sup>Una apuesta segura es aquella que tiene ganancias con probabilidad 1.

<sup>5</sup>Aunque suene poco creíble, en la temporada 2017/2018 de la *English Premier League*, ¡se encontraron 111 partidos con arbitraje! Esta información se encuentra disponible en el Capítulo 4 del presente trabajo.

precisión posible. Todo apostador profesional debe de tener en cuenta estas técnicas para poder valorar las apuestas disponibles.

## Capítulo 2

# Incertidumbre

Históricamente, el hombre ha hecho un esfuerzo por controlar su futuro y manipular su suerte para vencer al sistema, y por tanto, la vida. Pero la realidad ofrece muy pocas certezas y mucha incertidumbre, por lo que controlar el futuro se vuelve en parte ilusión y en parte habilidad.

Un método científico para *inferir* los fenómenos que suceden en la vida es la inferencia estadística. Lo que se quiere es entender un fenómeno manifestado a través de datos que presentan variabilidad o incertidumbre a partir de un conjunto de herramientas racionales para poder inferir sus resultados, parafraseando a Manuel Mendoza Ramírez.

¿El hombre es un ser estadístico? Sí, pero sesgado y con falacias. Kahneman, Stanovich y West observan que el humano naturalmente tiende a buscar patrones y causalidades en sus experiencias de forma inconsciente y rápida, quizá un fenómeno darwinista de supervivencia, a esto dichos autores lo nombraron Sistema 1. Por otro lado, la evolución de animales a hombres en parte se ha dado gracias a la facultad de cuestionar nuestro entorno a partir de un esfuerzo mental, el nombrado Sistema 2 (Stanovich y West, 2000) (Kahneman, 2003). Existe una dialéctica entre ambos sistemas: el rápido pero sesgado, y el lento pero demandante. Por lo tanto el Sistema 1, el generador de impresiones, intuiciones y sentimientos, es quien predetermina y sesga los pensamientos; el Sistema 2, en cambio, es el que detecta los errores y corrige los sesgos y falacias de las ideas, pero solo cuando es invocado por el individuo. Por ende, se tiende a exagerar la verosimilitud de creencias previas pero a negar con facilidad información atípica de las experiencias (Kahneman, 2003).

Por lo dicho anteriormente, ningún individuo racional debe confiar

ciegamente en su intuición, su Sistema 1, mucho menos una apostadora. Como la tarea de aprender debe ser llevada con rigor y precisión, debe ser liderada por el Sistema 2 de forma analítica. La propuesta es inferir de los datos, representados de forma numérica, el fenómeno observado a partir de modelos matemáticos para obtener la mayor información posible del fenómeno.

¿Se podrá tener certeza definitiva? ¿Si así fuera; se habría podido determinar *a priori* si México ganaría, empataría o perdería el partido contra Alemania? Y en caso de no ser así, ¿por qué no?

## 2.1. ¿Por qué hay Incertidumbre?

### 2.1.1. Gatos y Demonios

En la Era de La Ilustración, mientras empezaba a gestarse la Teoría de Probabilidad y Estadística, reinaba la Era del Racionalismo y Determinismo científico, encabezado por Sir Isaac Newton e impresa en sus Leyes de Movimiento (Buchdahl, 2016). La influencia de esta época motivó a Jacob Bernoulli y De Moivre a pensar que todo sucede por factores determinados, lo cual motivaría a Laplace a postular en 1814 lo siguiente (Laplace, 2012):

“ We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes. ”

Es decir, si existiera un ente o demonio que conociese *absolutamente* todas las condiciones de un fenómeno, este (el fenómeno) podría describir y predecir con *exactitud*, así como las Leyes de Newton. Incluso Poincaré insistía que la incertidumbre era únicamente causada por la ignorancia (Poincaré y Maitland, 2003). Pero, ¿qué serían *todas* las condiciones? ¿Hasta qué punto deberíamos, o podríamos, saber todo?

Werner Heisenberg responde con su abrumador Principio de Incertidumbre, afirmando grosso modo que, o bien se sabe la posición de una partícula o su incercia, pero no ambas. Seguido de otro *uppercut* de Einstein con su Teoría

de la Relatividad, el cual generó un cambio de paradigma total en la ciencia y filosofía. Desde otra perspectiva, Steven Hawking llegó a sugerir que Dios está acotado por el Principio de Incertidumbre y que además tiene continuo hábito de apostar el futuro sin saber siquiera cuál será el resultado final. Albert Einstein quedó superado, tanto así que en una carta a su colega Max Born, escribe (Sassoli de Bianchi, 2013):

“ Quantum mechanics is certainly imposing. But an inner voice tells me that it is not yet the real thing. The theory says a lot, but does not really bring us any closer to the secret of the old one. I, at any rate, am convinced that He does not throw dice. ”

Esta idea, sobre la incertidumbre inducida por la mecánica cuántica, es plasmada exageradamente por Schrödinger en un gato, cuya vida está “determinada” por el decaimiento de un átomo radioactivo: si el átomo se extingue en menos de una hora entonces el gato se muere, si no, se salva. Dado el principio definido por Heisenberg, no se puede determinar en ningún momento a priori si el gato está vivo o muerto.

Al respecto, ¿qué va con el apostador? Por lo general, no se apuestan vidas de gatos, pero sí algún volado de una moneda. Suponiendo que el jugador quiere *determinar con certidumbre* si la moneda cae sol con la ayuda de su demonio que lo sabe “todo”, el gato de Schrödinger sabotearía “todo” con las fluctuaciones a nivel atómico de las moléculas del aire, que al interactuar y generar *caos* entre ellas su efecto cuántico se amplificaría al punto de afectar también lo macro. De hecho, Albrecht y Phillips muestran que basta con solo 8 choques para que la incertidumbre domine, o en su caso, que el gato venza al demonio (Albrecht y Phillips, 2014).

### 2.1.2. ¿Frecuencias o Creencias?

Una apostadora lo que desea es formar un conjunto de pensamientos lógicos, que, con premisas adecuadas, pueda inferir la verosimilitud del resultado esperado. Como se mencionó, el mundo y sus fenómenos están regidos por la incertidumbre más que por el determinismo: por lo tanto, la jugadora debe basarse en el conjunto de reglas que proporciona la Teoría de la Probabilidad para determinar el grado de verosimilitud de su hipótesis dadas sus premisas, y con base en ello tomar la mejor decisión.

La variabilidad de los fenómenos, que se da a luz desde el mundo cuántico, se manifiesta en tres formas principales en el mundo macro:

1. **Incertidumbre intrínseca del fenómeno.** Este punto reside en lo comentado anteriormente: en el caos. Condiciones iniciales infinitas y sensibles que generan estocasticidad. Por ejemplo, el lanzamiento de un dado al aire.
2. **Observación incompleta.** Información que el individuo desconoce no saber y concluir con base en la información parcial que se tiene disponible: “what you see is all there is”, WYSIATI (Kahneman, 2011). Por ejemplo, el Juego de Trile, donde el mago dice esconder una pelota en un vaso de tres posibles; el mago sabe dónde está pero el jugador no.
3. **Modelo incompleto.** Falta de información debido a que no fue factible observar el fenómeno completo, ya sea por costos de operación, tiempo, pocas repeticiones, entre otros posibles problemas con el recolectado de datos. Por ejemplo, se lleva a cabo un juego de póquer entre dos personas con las últimas 10 cartas que sobraron de todos los juegos anteriores. Si el jugador llevó un conteo de cartas, sabe con exactitud las cartas de su oponente, pero este nivel de memoria es casi imposible, por lo que sus predicciones tendrán incertidumbre.

¿Qué *significa* la incertidumbre? En especial, ¿qué es la probabilidad? *Supongamos* que tenemos un dado justo, por lo que la probabilidad que salga un dos es de  $1/6$ . En otra mano, pensemos que el autor *crea* que la probabilidad que México le ganara a Alemania en aquel partido de la copa mundial 2018 era de 0.21. En el primer caso, se puede interpretar la probabilidad como una frecuencia. Es decir, de 600 lanzamientos de dados, *esperaríamos* que en 100 saliera un dos. Para el segundo caso, podría pensarse la probabilidad como una medida de creencia. A cada perspectiva se le conoce como Estadística Frecuentista o Estadística Bayesiana (Goodfellow y col., 2016).

En el presente texto, se entiende la probabilidad como una frecuencia más que como una medida de creencia. Aunque ambos puntos son válidos, la filosofía del primer tipo de estadística mencionada va más acorde a lo que enfrenta un apostador profesional. Aparte, el supuesto que el jugador tenga el tiempo de dictaminar la creencia a priori para cada partido es poco viable, y basarse en la creencia colectiva de cada juego, a pesar de ser una excelente idea (Surowiecki, 2005), conllevaría a una recolección de datos bastante costosa y ambigua. No obstante, sería interesante realizar el mismo análisis del presente texto pero desde la otra filosofía estadística.



## 2.2. Teoría de la Información

### 2.2.1. Entropía

Un primo de la Teoría Estadística es la Teoría de la Información. Así como la primera teoría busca entender los fenómenos que conllevan incertidumbre, el paradigma de esta última teoría es cuantificar cuánto conocimiento hay en una señal (dato). Esta concepción de la información fue desarrollada primero por Claude Shannon en *A Mathematical Theory of Communication*. Un buen paper es aquel que tiene una gran idea, este, tiene dos:

- Es más informativo observar un evento inusual que un evento común. Esta medida de información, para una observación  $x$  que proviene de una distribución  $F$  y densidad  $f$ , está dada por:

$$I(x) := -\log(f(x)).$$

Como  $f$  es una función de densidad y por ende  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$  entonces  $I(x)$  siempre está definida y  $I(x) \in \mathbb{R}^+$ .

- Una medida de incertidumbre de *todo* el fenómeno se puede medir a partir de la entropía

$$H(X) := -\mathbb{E}_F[\log(f(x))] = -\int \log(f)dF. \quad (2.1)$$

La derivación de esta relación puede ser encontrada en el anexo 2 del paper original de C.E. Shannon<sup>1</sup>.

Un apostador que tenga una decisión con entropía baja significa que sabe que sucederá con gran seguridad y viceversa. Pues, por ejemplo, supongamos que un jugador entra a una apuesta de  $m$  caballos, donde el pago para cada caballo es igual, pero la persona no tiene información sobre el desempeño de estos mismos, por lo que les asigna una probabilidad uniforme de ganar a cada uno, es decir  $\mathbb{P}[\{\text{Caballo } i \text{ gana}\}] = 1/m$ . No obstante, se observa que  $f(x) = 1/m$ ,  $\forall x = 1, 2, \dots, m$  es la solución única al problema

$$\max \left\{ H(F) = -\sum_{i=1}^m p_i \log(p_i) \right\} \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^m p_i = 1. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>La base del logaritmo original propuesta por J. W. Tukey es la base 2, puesto que representa bits de información. Igualmente, se llega a encontrar en la literatura la base 10, usada para medir la información en dígitos. Por simplicidad en los cálculos, en el presente trabajo se usa el logaritmo natural. Como las bases son equivalentes al ser múltiplos entre ellas, los resultados se conservan para cualquier base.

Ya que resolviendo por el método de multiplicadores de Lagrange, se tiene que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i} &= \log(p_i) + 1 + \lambda, \quad \forall i \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= \sum_{i=1}^n p_i - 1. \end{aligned}$$

Así que, por las condiciones necesarias de primer orden, se concluye que  $p_i^* = e^{-(1+\lambda)}$ . Pero, sumando todas las probabilidades se llega a que  $1 = me^{-(1+\lambda)}$ . Por tanto  $p_i^* = 1/m$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ . Luego, es fácil ver que  $\nabla_{\underline{p}}^2 \mathcal{L}(\underline{p}_*) = -\frac{1}{m} I_m$ , la cual es simétrica negativa definida, y, por las Condiciones Suficientes de Segundo Orden, el máximo es único.

¡Su asignación uniforme de probabilidades induce la mayor incertidumbre (entropía) posible! Cuando un apostador es ignorante al juego, la entropía es máxima.

### 2.2.2. Divergencia Kullback Leiber

Por otro lado, si se desea medir que tan lejana es la distribución  $G$  a la de  $F$  del mismo proceso, se puede estimar a través de la divergencia de Kullback-Leiber:

$$D_{\text{KL}}(F||G) := \mathbb{E}_F \left[ \log \left( \frac{f(X)}{g(X)} \right) \right] = \int \log \left( \frac{f}{g} \right) dF. \quad (2.3)$$

Es importante notar que  $D_{\text{KL}}(F||G) \neq D_{\text{KL}}(G||F)$ , es decir, la divergencia no es simétrica. Una de las grandes propiedades de  $D_{\text{KL}}(F||G)$  es que es no negativa en cualquier medida. Otra, es que se relaciona con la entropía cruzada

$$H(F, G) := -\mathbb{E}_F[\log(g(X))], \quad (2.4)$$

puesto que minimizar  $H(F, G)$  con respecto a  $G$ , equivale a minimizar  $D_{\text{KL}}(F||G)$ , ya que

$$D_{\text{KL}}(F||G) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_F [\log(f) - \log(g)] = H(F, G) - H(F). \quad (2.5)$$

Siguiendo el mismo hilo, si se recuerda que el estimador máximo verosímil de  $\underline{\theta}$  para una muestra aleatoria de  $X \sim F$ , está dado por

$$\hat{\underline{\theta}}_{\text{MV}} := \arg \max_{\underline{\theta}} \left\{ \prod_{j=1}^n f(\underline{x}_j; \underline{\theta}) \right\},$$

donde  $L(\underline{\theta}; \underline{x}) := \prod_{j=1}^n f(x_j; \underline{\theta})$  es la verosimilitud y per se la log-verosimilitud  $l(\underline{\theta}; \underline{x}) := \sum_{j=1}^n \log(f(x_j; \underline{\theta}))$ . Entonces

$$\begin{aligned}\hat{\underline{\theta}}_{\text{MV}} &= \arg \max \{L(\underline{\theta}; \underline{x})\} = \arg \max \{l(\underline{\theta}; \underline{x})\} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \arg \max \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(f(x_j; \underline{\theta})) \right\} = \arg \max \left\{ \mathbb{E}_{\hat{F}_{\text{emp}}} [\log(f(x_j; \underline{\theta}))] \right\} \\ &= \arg \min \{H(\hat{F}_{\text{emp}}, F)\} = \arg \min \{D_{\text{KL}}(\hat{F}_{\text{emp}} || F)\},\end{aligned}$$

donde  $\hat{F}_{\text{emp}}$  es la distribución empírica de los datos. Es decir, el estimador máximo verosímil  $\hat{\underline{\theta}}_{\text{MV}}$  se encuentra tanto al maximizar la verosimilitud como al minimizar la divergencia-KL entre la distribución empírica de los datos y la real.

La ventaja de optimizar con respecto a  $D_{\text{KL}}(\hat{F}_{\text{emp}} || F)$ , es que el resultado numérico de la función evaluada da una medida de cuánta falta de información queda, en contraste con el valor de  $L(\underline{\theta}; \underline{x})$  que no tiene una interpretación su valor. Aunado, en el mejor caso  $D_{\text{KL}}(\hat{F}_{\text{emp}} || F) = 0$ , el cual dice que se tiene toda la información posible del fenómeno observado, cosa que no sucede en  $L(\underline{\theta}_*; \underline{x})$ .

## 2.3. Aprendizaje Profundo

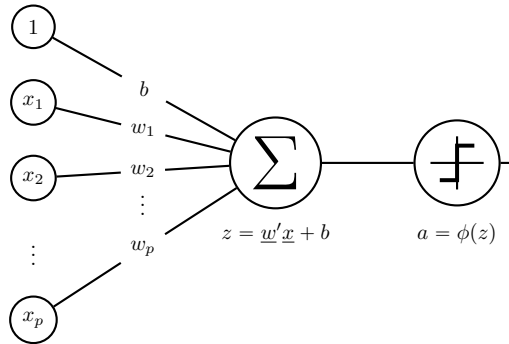


Figura 2.1. Estructura de un perceptrón.

### 2.3.1. Redes Neuronales

Así como el ave inspiró a Da Vinci a bosquejar el avión y los abrojos a De Mestral a crear el velcro, las neuronas a McCulloch y W.Pitts en 1943 a inventar las Redes Neuronales Artificiales (RNA). Aunque estas no son modelos que ejemplifiquen realmente el aprendizaje del cerebro, son una inspiración para un tipo de aprendizaje estadístico.

La idea es: las señales eléctricas, los datos  $\underline{x}$ , fluyen de una capa de neuronas a la siguiente capa a través de las terminales sinápticas, los pesos  $w_{i,j}^l$  de la neurona  $j$  de la capa  $l - 1$  a la neurona  $j$  de la capa  $l$ , posteriormente esta información se condensa en el axón en una sola señal (sinapsis)  $\underline{z} = \underline{w}'\underline{x}$ . La activación del impulso  $\underline{z}$  es determinado por el núcleo  $\phi$  de la neurona y por la magnitud de energía liberada  $\underline{a} = \phi(\underline{z})$  para las subsecuentes capas de neuronas. La última capa de neuronas  $L$  determina la señal final  $\hat{\underline{y}}$  a partir del conocimiento previo de todas las capas de neuronas pasadas  $W_1, W_2, \dots, W_L$ . Esta señal es comparada con el fenómeno  $\underline{y}$  a partir de una medida de pérdida de información  $C_\theta(\hat{\underline{y}}, \underline{y})$ . Finalmente, este error cometido por el conocimiento previo  $\underline{\theta}$  se propaga a cada capa de neurona de forma recursiva para poder aprender ex post.

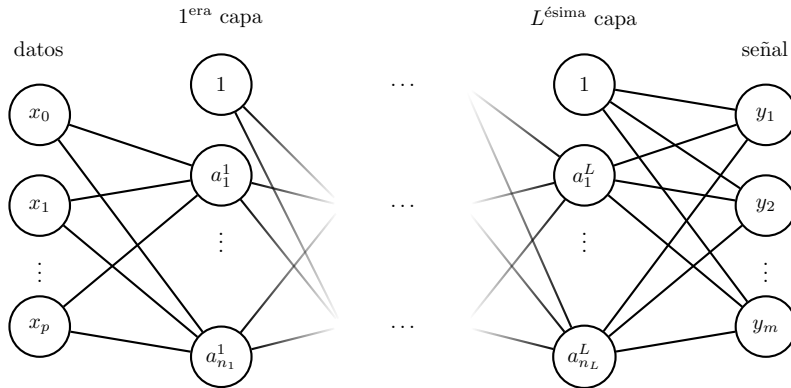


Figura 2.2. Red Neuronal Artificial con  $L$  capas,  $p$  datos de entrada y  $m$  señales de salida. La  $l^{\text{ésima}}$  capa tiene  $n_l$  neuronas.

Para entender las RNA, se define la siguiente notación:

- $l \in \{1, 2, \dots, L\}$  denota la  $l$ -ésima capa de neuronas de la RNA con  $L$  capas.
- $n_l$  denota el número de neuronas en la  $l$ -ésima capa.

- $w_{i,j}^l$  es el peso de la neurona  $j$  en la capa  $l-1$  a la neurona  $i$  en la capa  $l$ .
- $b_i^l$  es el sesgo de la  $i$ -ésima neurona de la capa  $l$ .
- $z_i^l$  es el impulso de la neurona- $j$  de la capa  $l$ .
- $a_i^l$  es la activación de la neurona- $j$  de la capa  $l$ .
- $\phi_l$  es la función de activación de cualquier neurona en la capa  $l$ -ésima. Además, se pide que sea derivable en casi todos lados<sup>2</sup>.
- $\underline{\theta}$  es un pequeño abuso de notación para denotar *todos* los pesos y sesgos de la red.
- Definimos  $\underline{a}_0 := \underline{x}$  y  $\underline{a}_L := \underline{\hat{y}}$ .

Bajo estas definiciones se tiene

$$a_i^l = \phi_l \left( \sum_{j=1}^{n_{l-1}} w_{i,j}^l a_j^l + b_i^l \right).$$

De forma matricial, esto se escribe como

$$\underline{a}_l = \phi_l \left( \underbrace{W_l \underline{a}_{l-1} + \underline{b}_l}_{z_l} \right), \quad (2.6)$$

donde  $W_l$  es la matriz de pesos de la  $l-1$ -ésima capa de neuronas a la  $l$ -ésima capa de neuronas. Algebráicamente  $W_l = \left[ \underline{w}_1^l \mid \underline{w}_2^l \mid \cdots \mid \underline{w}_{n_{l-1}}^l \right]$ , donde  $\underline{w}_i^l$  es el vector de todos los pesos de la  $l-1$ -ésima capa de neuronas a la neurona  $i$  de la  $l$ -ésima capa. Por ende  $W_l \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n_l, n_{l-1})$ . La definición vectorial es análoga para  $\underline{z}_l, \underline{a}_l$  y  $\underline{b}_l$ . Para el caso de  $\phi_l$ , se extiende su espacio de correspondencia, de forma que  $\phi_l : \mathbb{R}^{n_l} \rightarrow \mathbb{R}^{n_l}$  y donde  $\phi_i^l \equiv \phi_l$  para toda  $i = 1, 2, \dots, n_l$ .

### 2.3.2. Perceptrón

Una sola neurona, perceptrón, es la estructura más simple de una RNA. En la figura 2.1 se observa que las variables  $X_1, X_2, \dots, X_p$  son ponderadas por los pesos  $w_1, w_2, \dots, w_n$  y son sesgadas por  $b$ , para finalmente producir el hiperplano

$$\mathcal{H}_{\underline{w}, b} = \{z \mid z = \underline{w}' \underline{x} + b, \quad \forall \underline{x}\}.$$

---

<sup>2</sup> *Casi todos lados* se refiere a conjuntos reales de medida distinta a cero.

Para ejemplificar el uso del perceptrón, supongamos que el problema del apostador es predecir el resultado *binario*  $Y$  dada cierta información fija  $\underline{X}$ . A partir de los datos previos  $\mathbb{X}$  se busca aprender un hiperplano que separe los datos asociados a los distintos resultados del evento  $Y$ .

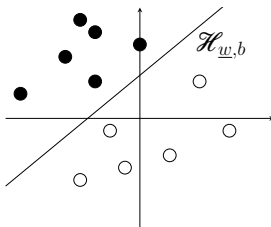


Figura 2.3. Hiperplano separador.

A partir de la activación  $\phi(\underline{z})$ , se predice el evento  $\hat{y}$  dado  $\underline{x}$ . Cuando las observaciones previas son linealmente separables<sup>3</sup>, una sola neurona basta para resolver el problema de clasificación binaria. Pero, ¿y si los datos no fueran linealmente separables? Por ejemplo, supongamos que se quiere determinar si Messi o Cristiano Ronaldo anotan gol en una jornada, pero no ambos<sup>4</sup>. Sea  $X_1 = 1$  si el actual jugador del PSG, Lionel Andrés Messi Cuccittini, mete gol, y en su defecto  $X_1 = 0$ . Análogamente para Cristiano. Por lo que el espacio muestral está dado por la siguiente gráfica:

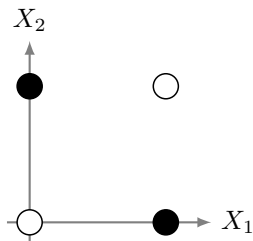


Figura 2.4. Problema XOR.

Se observa que no existe un solo hiperplano que separe los puntos. Parece que un solo perceptrón no es lo suficientemente capaz de resolver el problema de clasificación. Este hecho llevó a Minsky y Papert's en 1969 a postular que,

<sup>3</sup>Se dice que las observaciones  $y|\mathbb{X}$  son linealmente separables si existe un hiperplano  $\mathcal{H}_{\underline{w},b}$  tal que  $\underline{w}'\underline{x} + b > 0$  si  $y|x = 1$  y  $\underline{w}'\underline{x} + b$  es negativo para el caso contrario. Notar que  $\mathcal{H}_{\underline{w},b}$  no es único.

<sup>4</sup>A este problema de clasificación se le conoce como el problema de la función XOR (“exclusive or”).

a pesar de ser interesantes los perceptrones, son métodos con un futuro estéril. Sin embargo, el lector se habrá dado cuenta que existen *dos* hiperplanos que sí separan los datos. Fue hasta 1987 que Rumelhart y McClelland mostraron que los modelos de perceptrones anidados -multicapa- son capaces de cumplir con este y muchos otros problemas de clasificación y regresión (Berkeley, 1997).

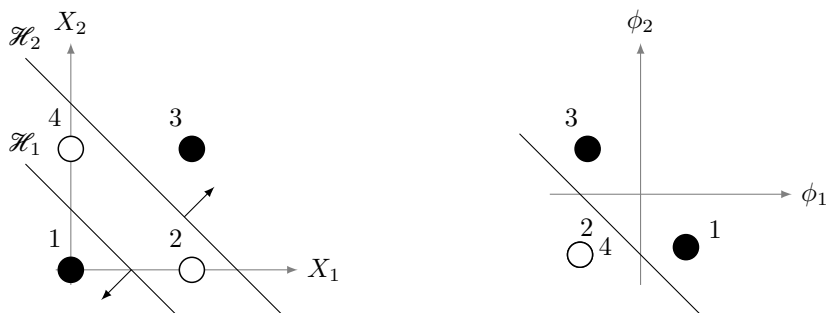


Figura 2.5. Solución al Problema XOR con dos perceptrones. En este caso, las funciones de activación  $\phi(z)$  son la identidad.

Ahora bien, si un apostador quiere saber a que caballo apostar de los  $m$  caballos que hay en un hipódromo, dada  $\underline{x}$ , ¿cómo debería ser la arquitectura de la RNA? Se observó como se puede resolver un problema de clasificación binaria para datos linealmente o no separables, pero el reto ahora es multclasificación. Observando cuidadosamente la capa de salida, se percibe que una sola neurona dictamina dos posibles clases, por lo que habría que tener  $m - 1$  neuronas en la capa de salida para predecir el posible caballo ganador. Aunque, en la práctica se común usar  $m$  neuronas.

### 2.3.3. Tipos de Activación

Para intentar clasificar a que resultado pertenece  $y|\underline{x}$ , de forma numérica se define una función  $\phi$  tal que sus valores se asocian a a cada evento.

#### Sigmoide

La función de activación clásica para el problema de clasificación binario es la sigmoide:

$$\sigma(z) := \frac{1}{1 + e^{-z}} = \frac{e^z}{1 + e^z} \in (0, 1).$$

Por convención, si  $\sigma(z) \geq 0.5$ <sup>5</sup> entonces se predice que  $\hat{y} = 1$ , en su

---

<sup>5</sup> El umbral 0.5 es arbitrario, y este se ajusta acorde a las necesidades del tomador de

defecto se infiere el evento contrario. De hecho, el valor de  $\sigma(z)$  representa una estimación de  $\mathbb{P}[y = 1|\underline{x}]$ . Por consiguiente  $\sigma(z)^{-1}$  aproxima el momio decimal a ese evento, por 1.3.

La sigmoide sirve para dictaminar el resultado del problema de separación binario. ¿También las funciones de activación de las demás capas, las capas ocultas, *deben* ser sigmoides? No necesariamente. Solo se pide que no sean funciones lineales y que sean derivables en casi cualquier lado. A continuación se presentan un par de las funciones de activación que más se emplean en la práctica.

## Tangente Hiperbólica

Primero se exhibe la Tangente Hiperbólica: esta función se encuentra íntimamente relacionada con la sigmoide, de hecho es casi una transformación afín de esta última. La ventaja de la tangente hiperbólica sobre la sigmoide es que su derivada se satura<sup>6</sup> menos. No obstante, sus valores carecen de interpretación en comparación con  $\sigma(z)$ . La función en cuestión se define de la siguiente forma

$$\tanh(z) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2\sigma(2z) - 1.$$

## ReLU

La otra función de activación que es altamente utilizada, sino es que la más, es la *Rectified Linear Unit* (ReLU). Esta función es, como se infiere del nombre, una rectificación de  $z$  en los valores no negativos y una anulación en su defecto. La ventaja de esta función es que su derivada es la unidad para  $z \in \mathbb{R}_+$ , y la nulidad para  $z \in \mathbb{R}_-$ . A pesar que la derivada no está definida en el cero, en la práctica este detalle suele ser intrascendente. Dicho esto, se precisa la forma de la función ReLU como

$$\text{ReLU}(z) := \max\{0, z\}.$$

## Softmax

Finalmente, para un problema de clasificación múltiple, comúnmente se emplea la función *softmax*. Esta función se puede ver como una generalización de la sigmoide, la cual estima la probabilidad  $\mathbb{P}[y = i|\underline{x}]$ , respetando siempre

---

decisiones. La calibración de este mismo se verá en las secciones posteriores.

<sup>6</sup>Se dice que la función  $f$  está saturada en  $z$  si  $f'(z) \approx 0$ .



los Axiomas Probabilísticos de Kolmogorov. Por tanto, la entrada  $i$ -ésima de la función softmax  $\varsigma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  está dada por

$$\varsigma(\underline{z})_i := \frac{e^{z_i}}{\sum_{j=1}^m e^{z_j}}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, m.$$

De esta forma, se podría definir que  $\hat{y}|\underline{z} = j$  si  $j = \arg \max_k \{\varsigma(\underline{z})_k\}$ .

Es fundamental hacer hincapié que la selección de las funciones de activación  $\phi_l$  para cada capa oculta  $l$  como para la capa de salida  $L$  depende exclusivamente del problema a tratar y de los datos. No existe una función mejor que otra para todos los problemas, tampoco existe un número fijo de número de neuronas por capa óptimo  $n_l$ , ni un tamaño de profundidad óptimo  $L$  para todas las RNA. Por lo que es trabajo del estadístico probar con distintas arquitecturas.

### 2.3.4. Pérdida y Regularización

Recordemos que el objetivo principal es *predecir* el fenómeno  $\underline{Y}$  dada las características  $\underline{X}$  a partir del historial  $(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ . Bajo el supuesto que  $\underline{Y}$  depende *únicamente* de  $\underline{X}$ , es sensato pensar que

$$\underline{Y} = f(\underline{X}) + \underline{\varepsilon},$$

donde  $\underline{\varepsilon}$  es un ruido intrínseco de  $\underline{Y}$ , el cual es independiente de  $\underline{X}$ . Por lo que estimar la relación  $f$  resuelve el problema. Esta aproximación  $\hat{f}(\underline{X})$  se hace a partir de una RNA  $\Phi$  con  $L$  capas y  $n_l$  neuronas en cada una de estas mismas. Por tanto

$$\hat{f}(\underline{X}) := \Phi(\underline{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\phi}_L \circ \tilde{\phi}_{L-1} \circ \dots \circ \tilde{\phi}_1(\underline{X}), \quad (2.7)$$

con  $\tilde{\phi}_l(\underline{X}) = \phi_l(W_l \underline{X} + \underline{b}_l)$ . Al tener que  $\underline{\varepsilon}$  es ruido blanco, i.e.  $\mathbb{E}[\underline{\varepsilon}] = \underline{0}$  y que  $\underline{\varepsilon} \perp \underline{X}$ , entonces

$$\mathbb{E}[\underline{y}|\underline{X} = \underline{x}] = \mathbb{E}\left[\hat{f}(\underline{X}) + \underline{\varepsilon} \mid \underline{X} = \underline{x}\right] = \hat{f}(\underline{x}).$$

Por lo que predecir un valor de  $\underline{y}$  dado  $\underline{x}$ , equivale a calcular  $\Phi(\underline{x})$ . Es decir  $\hat{y} = \hat{f}(\underline{x}) = \Phi(\underline{x})$ .

Ahora bien, ¿cómo se podría medir qué tan buena es la predicción? Para poder comparar esto mismo, se propone una medida de pérdida individual  $C(\theta; \underline{y}, \hat{\underline{y}})$  que defina el costo total  $J(\theta, \mathbb{Y}, \hat{\mathbb{Y}})$  a partir de alguna relación de interés al estadístico. Pero, ¿qué medida sería la adecuada, especialmente para el caso de un problema de clasificación múltiple?

En la sección dos del presente capítulo se presentó la divergencia entre dos distribuciones vía  $D_{\text{KL}}(F||G)$ , la cual mide que tan cercana es  $G$  de  $F$ . Por ende, la apostadora debe juzgar la calidad de sus predicciones con respecto a los datos vía la  $D_{\text{KL}}(F_{\text{emp}}||\hat{F})$  e intentar disminuir dicha medida. Pero también se vio en dicha sección que minimizar  $D_{\text{KL}}(F||G)$  con respecto a  $G$  equivale a minimizar la entropía cruzada  $H(F, G)$  por medio de la relación 2.5. Es por ello que el profesional también podría proponer  $C(\theta; \underline{y}, \hat{f}(\underline{x})) = H(\underline{y}, \hat{f}(\underline{x}))$ ,  $H$  definida como en 2.4, como el costo de su predicción.

## Métodos de Penalización

Por otro lado, junto con la definición del costo total  $J$  a partir de las pérdidas individuales  $C_j$ , en la práctica se suelen usar técnicas para reducir el error de los datos de prueba «*out of the sample*» a costa de perder precisión en los datos de entrenamiento «*in the sample*».

$$\tilde{J}(\underline{\theta}) = J(\underline{\theta}) + \lambda \Omega(\underline{\theta}). \quad (2.8)$$

A dichos métodos se les conoce como *regularización*, los cuales son un intercambio entre disminuir la varianza a costa de incrementar el sesgo del modelo a partir de la función  $\Omega(\underline{\theta})$ . Los métodos más usados son los Métodos de Penalización. Estas tácticas inducen un castigo al tamaño de los pesos  $w_{i,j}^l, b_i^l$  por medio de la norma  $L_p$ <sup>7</sup> en la función de costo  $\Omega$ . Es decir

$$\tilde{J}(\underline{\theta}) = J(\underline{\theta}) + \frac{\lambda}{p} \underbrace{\|\underline{\theta}\|_p^p}_{\Omega(\underline{\theta})}.$$

Las normas más usadas son la norma euclidiana ( $L_2$ ), conocida como *regularización ridge*, y la norma Manhattan ( $L_1$ ), conocida como *regularización lasso*. La primera se caracteriza por acotar el modelo de forma suave al reducir la magnitud de los pesos que aportan poca información, mientras que la segunda sobresale por su capacidad de seleccionar los parámetros más informativos (Friedman y col., 2001).

Incluso, se puede generalizar la penalización  $\Omega(\underline{\theta})$  más allá de la norma  $L_p$ ; por ejemplo, se puede penalizar de forma arbitraria solo los pesos que excedan más de la unidad, o se pueden hacer combinaciones de normas. En el último caso, si dicha combinación es convexa entre la norma  $L_1$  y  $L_2$ , se le conoce como Penalización *Elastic Net* (Friedman y col., 2001).

---

<sup>7</sup>La norma  $L_p$  se define como la función  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\|\underline{x}\|_p = (\sum_i x_i^p)^{1/p}$

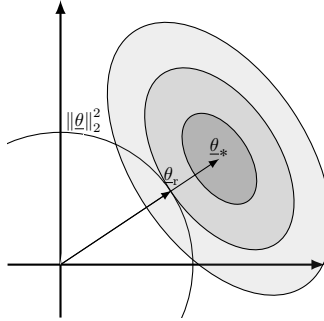


Figura 2.6. Penalización ridge.

## Métodos Generales

Pero como bien se mencionó, los métodos de penalización son solo un subconjunto de las técnicas de regularización. En particular para las redes neuronales, Geoffrey Hinton propone el Método *Drop Out* (Hinton y col., 2012); el método estriba en aleatoriamente “desechar” temporalmente  $r_l$  % de neuronas de la capa  $l$  (excluyendo únicamente el método para la capa de salida) en un periodo de entrenamiento y posiblemente restablecerse para el siguiente. La motivación nace de forma heurística, aunque tiene una justificación bayesiana (Gal y Ghahramani, 2016)<sup>8</sup>.

Por último, vale la pena mencionar la regularización inducida por *rescalar* los lotes de entrenamiento después de la activación 2.6 de cada capa. El método en cuestión es conocido como *batch normalization* (Ioffe y Szegedy, 2015).

La lectora se habrá dado cuenta que los métodos de regularización son toda un área de la estadística; en esta sección se mencionaron algunos de los modelos más usados en la práctica, pero no son los únicos. El objetivo siempre es mejorar la predicción *out of the sample*, por eso la reducción en varianza y aumento del sesgo *in the sample*. Para mayor detalle, se le recomienda consultar «Hands-On Machine Learning with Scikit-Learn and TensorFlow» y «Deep Learning, Goodfellow».

---

<sup>8</sup>Ver «Dropout as a bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning»

### 2.3.5. Aprendizaje y Predicción

Anteriormente se definieron las componentes de una RNA: cómo está construida, sus parámetros, las interacciones entre capas y las medidas de incertidumbre entre lo pronosticado y lo real. Falta formalizar cómo se encuentran los pesos óptimos de la red y también cómo predecir todas las observaciones.

#### Predicción de $\underline{y}$

Al cómputo de  $\Phi(\underline{x})$ , dado  $\underline{\theta}$ , para cada una de las observaciones, se le conoce como el algoritmo *Feedforward*. Como hay  $n$  realizaciones del fenómeno, se tiene que calcular  $\Phi(\underline{x}^{(j)})$  para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ . Hacer este cómputo de forma iterativa puede llegar a ser imposible cuando  $n$  es grande, lo cual es común que pase en las bases de datos actuales. Es por ello que el cálculo de todas las observaciones se hace de forma matricial, puesto que es sencillo y más barato computacionalmente. A continuación se desarrollan las expresiones matriciales para llevar a cabo estos cálculos.

Contrario a los modelos clásicos de estadística, la matriz de observaciones  $\mathbb{X}$  se define al revés: el renglón  $i$ -ésimo corresponde a la variable  $X_i$ , mientras que la columna  $j$ -ésima corresponde a la observación  $\underline{x}^{(j)}$  del vector aleatorio  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ . Por lo que  $\mathbb{X} = [\underline{x}^{(1)} | \underline{x}^{(2)} | \dots | \underline{x}^{(n)}]$  y de igual forma para las observaciones del fenómeno aleatorio  $\underline{Y} = [\underline{y}^{(1)} | \underline{y}^{(2)} | \dots | \underline{y}^{(n)}]$ . También, se generaliza la activación  $\phi_l$  a una función matricial, por lo que  $\phi_l : \mathbb{R}^{n_l \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n_l \times n}$  para poder evaluar cada una de las observaciones transformadas. Por tanto, las activaciones de toda la capa  $l$  de neuronas para cada una de las observaciones es la matriz dada por

$$A_l = \phi_l \left( \underbrace{W_l A_{l-1} + B_l}_{Z_l} \right) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n_l, n). \quad (2.9)$$

De este modo, el algoritmo *Feedforward* se reduce a calcular solamente  $\Phi(\mathbb{X})$ .

#### Aprendizaje de $\underline{\theta}$

El significado de aprender en *Machine Learning* se resume en encontrar el valor óptimo de  $\underline{\theta}_*$  que minimice la función de costo  $J(\underline{\theta})$  en los datos *out of the sample*, a diferencia de la estadística inferencial que busca  $\underline{\theta}_*$  en los datos *in the sample*.

Aunque en los algoritmos de aprendizaje se usen algoritmos de optimización, los primeros métodos difieren de los últimos en los siguientes puntos -estas diferencias son enunciativas mas no limitativas. (Goodfellow y col., 2016).

- Se busca encontrar  $\underline{\theta}_*$  para los datos fuera de la muestra que dentro de la muestra, puesto que sobre-ajustar el modelo en los datos de entrenamiento puede resultar en un pobre desempeño en datos aún no observados.
- La función objetivo no necesariamente es, ni escribirse, como la función de costo. Se pretende optimizar  $J(\underline{\theta})$  *esperando* que también se optimice el objetivo principal.
- En el aprendizaje, el algoritmo de optimización se detiene cuando se alcanza un criterio, por lo generalmente empírico, en los datos *out of the sample*. Por lo que no es necesario encontrar  $\underline{\theta}_*$  *in the sample* para que el aprendizaje haya terminado.

## Partes del Aprendizaje

Se le recuerda a la lectora que los algoritmos de optimización numérica de un a función  $f(\underline{\theta})$  buscan encontrar el máximo o mínimo *global* -según sea el caso- al actualizar secuencialmente los valores de  $\underline{\theta}$  hasta converger en el óptimo de la función. Todo esto a partir de la información de la función  $f$ , su primera derivada (gradiente)  $\nabla_{\underline{\theta}}f$ , y en algunos algoritmos también la información de su segunda derivada (hessiana)  $\nabla_{\underline{\theta}}^2f$ . Por lo mismo, el problema de optimización se divide en:

1. Calcular  $\nabla_{\underline{\theta}}f$  y en algunos casos  $\nabla_{\underline{\theta}}^2f$ .
2. Actualizar  $\underline{\theta}$  usando los cálculos pasados de  $\nabla_{\underline{\theta}}f$ ,  $\nabla_{\underline{\theta}}^2f$ , mediante un algoritmo de optimización.

El primer problema, que es el cálculo de  $\nabla_{\underline{\theta}}f$ , no es una tarea trivial ya que las RNA son modelos no-lineales anidados. Por lo mismo, el cálculo del gradiente se hace mediante un algoritmo de diferenciación retroactiva capa por capa llamado *Backpropagation*, el cual es detallado matemáticamente en los Anexos. Para el cálculo de la hessiana en RNA se recomienda consultar el *paper* «Exact Calculation of the Hessian Matrix for the Multi-layer Perceptron» de Cristopher M. Bishop (Bishop, 1992) para un tratamiento profundo del tema.

El segundo problema puede resolverse mediante alguno de los siguientes algoritmos de optimización:

- **Algoritmos de Primer Orden.** Son algoritmos numéricos sencillos que, por lo general, son una modificación del gradiente descendiente. Por ejemplo, el gradiente descendiente estocástico (SGD)<sup>9</sup>, SGD con *momentum*<sup>10</sup>, SGD con *Nesterov's Trick*<sup>11</sup>, por mencionar algunos.
- **Algoritmos Adaptativos.** La tasa de aprendizaje  $\rho$  -*learning rate*- juega un papel muy importante en el desempeño del algoritmo de optimización, pues esta tasa regula la velocidad en la que  $\nabla_{\theta} f$  alcanza el óptimo: tasas pequeñas de  $\rho$  conllevan aprendizajes lentos que incluso pueden quedar atrapados en óptimos locales; tasas grandes de  $\rho$  pueden implicar que el método jamás converja. En los primeros algoritmos dicha tasa es fija, pero existen algoritmos que modifican la tasa de forma dinámica dependiendo de como va convergiendo el algoritmo. Dentro de estos métodos se encuentra el Gradiente Adaptativo (AdaGrad)<sup>12</sup>, Propagación de la Raíz Cuadrática Media (RMSProp)<sup>13</sup>, Momentos Adaptativos (Adam)<sup>14</sup>, Momentos Adaptativos con Truco de Nesterov (Nadam)<sup>15</sup>, y otros más.
- **Algoritmos de Segundo Orden.** Las primeras dos familias de métodos enlistadas previamente, solo utilizan la información del gradiente para actualizar  $\theta$ , sin embargo no usan la curvatura descrita por la hessiana. Las ventajas de estos métodos, comparados con los anteriores, es que aproximan mejor la función en cualquier vecindad y hacen uso de la curvatura de la función gracias a la hessiana. Las desventajas son que estos métodos son más caros computacionalmente, y que, si la hessiana está mal condicionada<sup>16</sup>, puede que la actualización se lleve a cabo en la dirección incorrecta. Algunos

---

<sup>9</sup>El gradiente descendiente estocástico es esencialmente lo mismo que el gradiente descendiente salvo que en lugar de evaluar el gradiente en todo el conjunto, se evalúa en una muestra aleatoria.

<sup>10</sup>El método del *momentum* está diseñado para acelerar la convergencia del algoritmo mediante un promedio móvil de los gradientes previos calculados.

<sup>11</sup>El Truco de Nesterov es evaluar el gradiente en el *momentum* para intentar corregir la velocidad de la actualización.

<sup>12</sup>Este método, en esencia, *adapta* la tasa de aprendizaje para cada entrada de  $\theta$  al escalar de forma proporcional dicha tasa con los promedios de los gradientes.

<sup>13</sup>Es una modificación del algoritmo Adam que sustituye el promedio de los gradientes por una media móvil exponencial para adecuarse a problemas no convexos.

<sup>14</sup>Es una variación de RMSProp junto con *momentum*.

<sup>15</sup>Como el nombre dice, es el algoritmo Adam más el *Nesterov's Trick*.

<sup>16</sup>Una matriz mal condicionada implica matrices casi singulares, haciendo inestable numéricamente el cálculo de la inversa.

métodos a señalar son el Método de Newton, el cual calcula la inversa de la hessiana en cada iteración; el Gradiente Conjugado, el cual evita el cálculo de esta misma mediante direcciones conjugadas de gradientes con respecto a la hessiana<sup>17</sup>. Una de las mejoras de estos algoritmos numéricos es el algoritmo Broyden–Fletcher–Goldfarb–Shanno (BFGS), el cual trata de tomar las ventajas del Método de Newton y del Gradiente Conjugado, sin menoscabo al costo computacional.

La lectora puede encontrar un muy buen tratamiento de los algoritmos de optimización para *Machine Learning* en el capítulo 8 del libro «Deep Learning» de Ian Goodfellow. Si se busca entender los fundamentos de estos algoritmos, se aconseja consultar el libro «Numerical Optimization» de Jorge Nocedal.

Es fácil observar que existe un gran arsenal de algoritmos de optimización para llevar a cabo las tareas de los algoritmos de aprendizaje. Por esto mismo, la elección de estos algoritmos recae completamente en la forma de la función de costo y de los datos, siendo así que no existe un algoritmo mejor que otro para *todos* los problemas; es decisión del estadístico elegir el método que cubra sus necesidades.

En este momento, la apostadora ya tiene las herramientas necesarias para poder estimar sus propias probabilidades con una metodología fundamentada en la teoría estadística y de aprendizaje de máquina. De esta forma, podrá jugar de forma más competente contra las casas de apuestas, aunque todavía falta señalar a *quién* y *cuánto* apostar cuando se tienen las probabilidades y momios dados, o en su defecto, estimados.

---

<sup>17</sup>Se dice que dos direcciones  $\underline{d}_1, \underline{d}_2$  son conjugadas con respecto a la matriz  $H$  si y solo si  $\underline{d}_1' H \underline{d}_2 = 0$ .

## Capítulo 3

# Racionalidad, Recompensas y Riesgos

¿Estaría el lector dispuesto a pagar \$1 para entrar a la siguiente apuesta?

“Se lanza una moneda justa. Si cae cara (águila), se retornan \$2.”

Seguramente sí, es una apuesta justa. ¿Y si ahora costara \$1,000 pero la ganancia bruta fuera de \$2,000? Quizá el lector estaría dispuesto a entrar a esta apuesta si la pérdida no representa un hito a su bolsillo, o en su defecto rechaza la apuesta debido a que es más adverso a perder que ha ganar \$1,000 con respecto a su riqueza. ¿Si modificáramos la apuesta de tal forma que ahora la comisión de entrar fuera de \$500 con la misma ganancia? Suena mucho más atractivo, además, dicha apuesta se vuelve favorable<sup>1</sup>, por lo que el lector probablemente entraría. Por último, ¿estaría dispuesto a entrar a la misma apuesta con una recompensa de \$2 millones pero costando \$500 mil? ¿No? Reduciendo por \$10,000 el costo de la entrada, ¿entraría? ¿Aun no? Entonces, ¿cuánto debería de costar este juego para que le *pareciera* atractivo al lector entrar? Vemos que la última apuesta es totalmente favorable, ¡pues se espera ganar  $(2 - 1/2)1/2 - 1/2 = 1/4$  de millón! Podemos observar que términos puramente monetarios, apuestas favorables no implican necesariamente utilidades favorables para la lectora. Por lo que apostar \$1, \$1000 o un \$1,000,000, aunque se espere ganar 1/4 de estas cantidades, no equivale de forma proporcional a la *utilidad* de la apostadora.

Si aun no se observa que el *valor moral* del dinero no es lo mismo que su *valor nominal*, se invita al lector estimar cuánto estaría dispuesto a pagar de

---

<sup>1</sup>Una apuesta favorable es aquella donde su esperanza es positiva.



comisión para entrar a la siguiente apuesta:

“ Se lanza una moneda justa hasta que caiga sol. El retorno de la apuesta es de  $2^n$ , donde  $n$  es el número de veces que se lanzó la moneda antes del fallo. ”

¿Apostaría \$1? ¿Quizá \$15 aún le seguiría *pareciendo* justo? ¿Un costo de \$100? Lo más intuitivo es que este último precio para el apostador ya no le pareciera atractivo, pero la esperanza del juego es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^n = \infty.$$

Es decir, ¡para cualquier costo  $c$ , un individuo “racional” *siempre* debería tomar la apuesta! Suena completamente irrazonable<sup>2</sup>, nadie en sus cabales entraría a dicha apuesta con una comisión de \$100,000. Esto sucede debido a que estamos pensando que el valor del dinero es lo mismo que la utilidad del dinero, lo cual se observó que no siempre es cierto; de hecho, no es lo mismo ni para cada nivel de riqueza, ni tampoco para cada prospecto.

### 3.1. Teoría de la Utilidad

Para evitar estas contradicciones y paradojas subsecuentes por el valor *moral* que se le da al dinero, Morgenstein y & Von Neumann en su libro *Theory of Games and Economic Behavior* (Von Neumann y Morgenstern, 2007) escrito en 1953, desarrollaron una base axiomática para describir por completo y sin ambigüedades el cómo *debería* de comportarse un individuo racional en la toma de decisiones económicas.

Regresando al partido del Mundial de Rusia 2018 jugado el 17 de Junio en el estadio Luzhniki, para el autor había dos eventos relevantes para México:

$$\mathcal{E}_1 = \{\text{Gana o Empata, Pierde}\}.$$

Por decir, para el autor las probabilidades<sup>3</sup> asociadas *a priori* del partido fueron:

$$\underline{p}_1 = (0.35, 0.65)'.$$

---

<sup>2</sup>La famosa Paradoja de St. Petersburgo, la cual fue planteada por Daniel Bernoulli en una carta a su primo Nicolás.

<sup>3</sup>En este trabajo se suponen que las probabilidades son objetivas y no subjetivas, a contrario de Leonard Savage.

Y, supongamos que, el espacio de su respectiva recompensa monetaria de cada evento para el autor estaba dado por

$$\mathcal{X} = \{1, 0\} \subset \mathbb{R}.$$

Por otro lado, supongamos que tenemos la apuesta que dice que el Javier Hernández es campeón de goleo del siguiente Mundial Qatar 2022, cuyos posibles resultados son  $\mathcal{E}_2 = \{\text{Campeón}, \text{No Campeón}\}$  y su probabilidades respectivas para el autor son de  $\underline{p}_2 = (0.3, 0.7)'$ .

La primera apuesta tiene una probabilidad del 35 % de ganar \$1, mientras que la segunda es 5 % menos probable ganar la misma cantidad de dinero; como siempre es mejor algo de dinero que nada, se podría decir que el autor *prefiere* apostar (elegir) la primera lotería  $L_1$  que la segunda  $L_2$ . Se puede ver porque el autor escogió  $L_1$  como una lotería con una *utilidad* mayor que la otra, pero si hubiera más loterías, ¿cómo se definen estas preferencias?

### 3.1.1. Preferencias

**Definición 3.1.1** (Preferencia entre dos loterías bajo  $(\geq)$ ). Sean  $L_1, L_2$  dos loterías. Cuando  $L_1$  es más preferida que  $L_2$  se denota  $L_1 > L_2$ . Si ambas loterías son igual de preferidas, es decir, le es indiferente al individuo elegir  $L_1$  o  $L_2$ , se escribe  $L_1 \sim L_2$ .

A continuación enunciaremos los Axiomas de Utilidad Racional propuestos por Morgenstein y Von Neumann en el siglo XX. Los primeros dos caracterizan por completo una relación de preferencia  $(\geq)$  y los últimos dos las preferencias racionales.

### Axiomas de Utilidad Racional

Si existiera una tercera apuesta: el Cruz Azul queda campeón de la Liga MX del 2022, y esta fuera menos preferida que la apuesta a Javier Hernández, ¿sería esta también menos preferida que la apuesta al Tri? Sería lógico pensar que sí, que las relaciones de preferencias de un individuo se comportan igual a las relaciones entre números.

**Axioma 3.1.1** (Completeness). Sean  $L_1, L_2$  dos loterías, entonces solo se puede cumplir que

$$L_1 > L_2, \quad L_1 \sim L_2, \quad L_2 > L_1.$$

**Axioma 3.1.2** (Transitivity). Sean  $L_1, L_2, L_3$  loterías. Si  $L_1 > L_2$  y  $L_2 > L_3$ , entonces  $L_1 > L_3$ .

¿Qué sucede si combinamos una tercera apuesta  $L_3$  en una preferencia ya dada entre  $L_1$  y  $L_2$ ? Por ejemplo, si el autor prefiere apostar a México que al Cruz Azul *cualquier cantidad* de su riqueza, entonces el apostar un pedazo de su riqueza  $\lambda \in (0, 1]$  a que el Chicharito queda como campeón y el resto a su país, será más preferido que arriesgar  $\lambda$  al Cruz Azul y el mismo resto también a la apuesta de su país. Esto es el postulado del Axioma de Independencia.

**Axioma 3.1.3** (Independencia). *Sean  $L_1, L_2$  loterías tal que  $L_1 > L_2$ , y sea  $\lambda \in (0, 1]$ . Entonces para cualquier otra alternativa  $L_3$ , se tiene que*

$$\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_3 > \lambda L_2 + (1 - \lambda)L_3.$$

Si  $L_1 > L_2 > L_3$ , ¿será *razonable* pensar que una combinación entre  $L_1$  y  $L_3$  es equivalente a apostar por completo a  $L_2$ ? Para el autor sería ecuánime apostar con probabilidad  $\alpha$  a México y  $1 - \alpha$  al Cruz Azul, que con probabilidad 1 apostar al actual jugador del Galaxy United, Javier Hernández, que quede como el jugador con más goles en el siguiente mundial. A esta premisa se le conoce como el Axioma de Continuidad o Propiedad Arquimediana.

**Axioma 3.1.4** (Continuidad). *Sean  $L_1, L_2, L_3$  loterías tales que  $L_1 > L_2 > L_3$ , entonces existe una probabilidad  $\alpha \in (0, 1)$  tal que*

$$L_2 \sim \alpha L_3 + (1 - \alpha)L_1.$$

Se ha caracterizado por completo una relación de preferencia racional, sin embargo, se ha hablado con vaguedad matemática sobre las loterías y apuestas. A continuación presentaremos su definición formal y ciertas propiedades de estas.

### 3.1.2. Apuestas y Loterías

¿Qué es matemáticamente una lotería? Hemos enunciado a una lotería como un conjunto de posibles resultados  $\mathcal{X}$ , definidos a partir de la realización de ciertos eventos  $\mathcal{E}$  posibles en un espacio de eventos relevantes  $\mathcal{E}$ , cuyas probabilidades que sucedan dichos eventos están condensadas en su densidad  $\frac{d}{dx}F(x)$ . Dichas relaciones se manifiestan en una variable aleatoria  $X$  que se miden en su función de distribución  $F$  y cuyos eventos relevantes son una partición del espacio muestral  $\Omega$ .

**Definición 3.1.2** (Lotería). *Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad, y sea  $X$  una variable aleatoria en dicho espacio tal que  $X \sim F$ . A la distribución de probabilidad  $F$ , la probabilidad de la imagen de la variable aleatoria  $X(\omega) \in \mathcal{X}$  donde necesariamente  $X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ , se le conoce como una lotería.*

Nuestro interés es establecer relaciones de preferencia en un conjunto de loterías, definiendo

$$\mathcal{L} = \{F | F \text{ es una distribución de probabilidad sobre } \mathcal{X}\}$$

como el espacio de loterías relevantes, solo basta estudiar la relación de preferencia racional ( $\succeq$ ) en el espacio de loterías  $\mathcal{L}$  para determinar la decisión  $d \in D$  que debería elegir un individuo racional.

Cabe mencionar que en el primer capítulo se discutió que una apuesta es la *decisión* de tener una postura ante un fenómeno con incertidumbre, por lo que podría también definirse una apuesta como la elección de una lotería. Fijas las probabilidades, estudiar  $\mathcal{L}$  equivale a estudiar  $D$ , ya que elegir  $L \in \mathcal{L}$  es lo mismo que seleccionar  $d \in D$ .

### Loterías Compuestas

En el ejemplo de la lotería del partido del Tri y la del Chicharito, supongamos que con probabilidad  $\alpha$  escogemos la lotería  $L_1$  y con probabilidad  $1 - \alpha$  la lotería  $L_2$ . ¡Esta composición de loterías resulta en otra lotería! Es fácil ver que como  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$  para  $\alpha \in [0, 1]$ , la lotería  $L$  definida como la combinación convexa de estas últimas es también convexa.

$$L := \alpha L_1 + (1 - \alpha) L_2 \in \mathcal{L}.$$

Por tanto, el espacio de loterías  $\mathcal{L}$  es un conjunto convexo. Así que la nueva lotería  $L$  se podría ver como la equivalencia de las dos loterías, cuya probabilidad de ganar \$1 está dada por  $\alpha p_1 + (1 - \alpha)p_2$ .

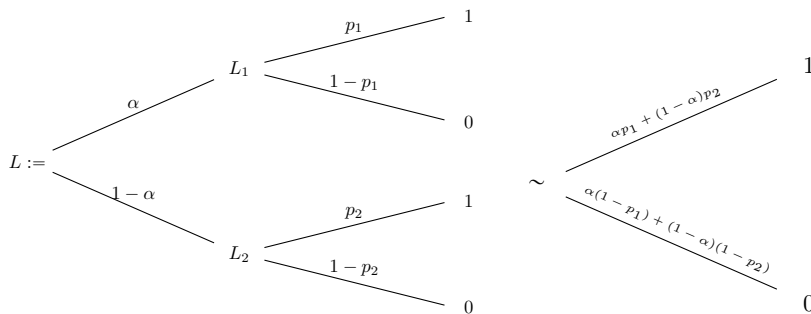


Figura 3.1. Lotería compuesta  $L$ .

### 3.1.3. Utilidad

Cualitativamente, el autor describió que prefiere la apuesta de México campeón del mundo que a la de su compatriota campeón de goleo. Pero, ¿cómo se podría cuantificar?

#### Utilidad Bernoulli y Von Neuman-Morgenstein

Supongamos que existe una función  $u : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  donde a cada posible valor de  $x = X(\omega)$ , asociado a  $\omega \in \Omega$ , se le asigna un valor moral  $u(x)$  que representa el valor nominal de  $x$ . A dicha función se le conoce como la **función de utilidad Bernoulli**. En esencia,  $u(X)$  es una variable aleatoria que deforma la imagen  $\mathcal{X}$  inducida por la función  $u$ , a un mismo espacio dentro de los reales, y, en estricto rigor, también es medible en la misma terna probabilística, pero con una distribución distinta a la de  $X$ .

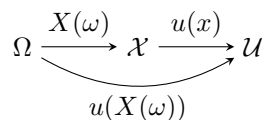


Figura 3.2. Mapeo del espacio muestral a utilidades.

Por otro lado supongamos que hay una funcional  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  que a cada lotería  $L \in \mathcal{L}$  le asigna un valor que cuantifica de forma consistente la relación de preferencia ( $\geq$ ) a partir de los valores inducidos por  $U$  en  $\mathcal{L}$ . A dicha funcional se le conoce como la **funcional de utilidad Von Neumann & Morgenstein** (vNM). Por lo que para dos variables aleatorias  $X \sim F_X$  y  $Y \sim F_Y$ , cuyos soportes  $\mathcal{X}_X, \mathcal{X}_Y$  son subconjuntos de  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}$ , debe suceder que

$$U(F_X) \geq U(F_Y) \iff F_X \geq F_Y.$$

Como esta funcional cuantifica todo el espacio inducido por  $X$ , el cual está completamente caracterizado por su función de distribución  $F(x) := \mathbb{P}[X(\omega) \in (-\infty, x]] = \mathbb{P}[X \leq x]$ ,  $U$  debe ser de la forma

$$U(F) = \int_{\mathcal{X}} u dF = \mathbb{E}_F[u(X)].$$

Pero la integral de Riemann-Stieltjes es bilineal<sup>4</sup>, por lo que  $U$  necesariamente debe ser lineal en las distribuciones. Es decir, para una

---

<sup>4</sup>Ver Elementos del Análisis Matemático de Robert Bartle, pg. 245.

combinación convexa de loterías  $F, G \in \mathcal{L}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
 U(\lambda F + (1 - \lambda)G) &= \int_{\mathcal{X}} u d(\lambda F + (1 - \lambda)G) \\
 &= \lambda \int_{\mathcal{X}} dF + (1 - \lambda) \int_{\mathcal{X}} dG \\
 &= \lambda U(F) + (1 - \lambda)U(G).
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Es importante hacer una clara distinción entre la función de utilidad  $u$  y la funcional de utilidad  $U$ : la primera, como se mencionó anteriormente, es un mapeo de los posibles valores nominales del dinero que toma  $X$  para cuantificar el valor nominal del dinero a uno moral (Bernoulli, 1954); la segunda, es una cuantificación a partir de los valores de  $u$  de toda la medida del espacio  $\mathcal{X}$  que representa la relación de preferencia ( $\geq$ ) (Von Neumann y Morgenstern, 2007).

### 3.1.4. Teorema de Utilidad Esperada

La Paradoja de St. Petersburg enunciada al principio del capítulo, hace pensar que el valor moral del dinero no es idéntico a su valor monetario. Incluso en la sección pasada, se observó cómo una funcional vNM podría representar las preferencias de un individuo ( $\geq$ ) en  $\mathcal{L}$ . ¿Siempre se podrá encontrar dicha función? En caso de ser necesario que exista esa  $U$ , ¿será suficiente para saber toda la información de las preferencias de cualquier individuo? John Von Neumann y Óscar Morgenstern demostraron que así es.

**Teorema 3.1.1** (Teorema de Utilidad Esperada).

*Una relación de preferencia ( $\geq$ ) satisface los axiomas de Independencia y Continuidad en  $\mathcal{L}$  si y solo si puede ser representada por una funcional  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es decir, si  $L_1, L_2$  son loterías en  $\mathcal{L}$  entonces*

$$L_1 \geq L_2 \iff U(L_1) \geq U(L_2).$$

El anterior resultado es la piedra angular de la teoría de utilidad clásica, es por ello que se muestra con detalle la veracidad de la afirmación en el Anexo. El teorema explica como un individuo racional *debe* escoger entre varias apuestas: basta resolver un problema de optimización.

¿Pero dicha funcional de utilidad es única? No realmente. Bajo transformaciones afines, es fácil ver que la funcional de utilidad es equivalente a otra.

**Proposición 3.1.1.**

*Sea  $U$  una funcional de utilidad bajo ( $\geq$ ) en  $\mathcal{L}$ , entonces  $W(L) = \alpha + \beta U(L)$  es una funcional de utilidad bajo ( $\geq$ ) en  $\mathcal{L}$ .*

Este último resultado dice que cualquier escalamiento y desplazamiento positivo de la utilidad original del dinero, preserva las relaciones de preferencia racionales.

## 3.2. Racionalidad en Decisiones

Sea  $v$  la riqueza inicial conocida de un individuo. Sea  $X$  una recompensa monetaria aleatoria. Si un individuo acepta la recompensa, su riqueza final está dada por  $v + X$ .

Sea  $u$  la función de utilidad moral que asignada a los valores monetarios que toma  $X$ . Suponemos que cualquier individuo racional *siempre* prefiere más riqueza, por lo que podemos intuir que  $u' > 0$ .

**Definición 3.2.1** (Prima al riesgo,  $P$ ). *Se dice que  $P$  es una prima al riesgo si al incorporarse esta prima a su riqueza inicial el individuo es indiferente entre recibir la recompensa aleatoria  $X$  o la recompensa segura  $\mathbb{E}[X] - P$ .*

$$\text{i.e. } v + X \sim v + (\mathbb{E}[X] - P). \quad (3.2)$$

Nótese que por relación anterior y por el Teorema de Utilidad Esperada,  $\mathbb{E}[u(v + X)]$  debe ser igual a  $\mathbb{E}[u(v + \mathbb{E}[X] - P)]$ . Pero la funcional del lado izquierdo está evaluada en una variable aleatoria, mientras que del lado derecho la funcional está evaluada en una variable fija. Así que analizar  $\mathbb{E}[u(v + X)]$  es lo mismo a inspeccionar  $u(v + \mathbb{E}[X] - P)$ , el equivalente seguro de la lotería.

### 3.2.1. Aversión al Riesgo

Se puede estudiar el *tipo* de aversión al riesgo de un individuo a partir de la prima al riesgo  $P$ , pues como  $P$  es el costo de entrar a una apuesta con una recompensa aleatoria  $X$ , se tendrá que el sujeto es adverso, neutro o amante al riesgo si  $P > 0$ ,  $P = 0$ ,  $P < 0$ , respectivamente. La interpretación es que si  $P > 0$  entonces un apostador está dispuesto a intercambiar la recompensa aleatoria  $X$  por su valor esperado  $\mathbb{E}[X]$ , a cambio de pagar una prima  $P$ . Por el contrario, si  $P < 0$ , entonces el individuo debe ser compensado con una prima  $P$  por eliminar el riesgo. Por último, cuando no hay prima al riesgo, le es indiferente tomar la lotería o recibir su valor esperado.

Se acaba de estudiar el *tipo* de aversión de un individuo racional, lo natural ahora sería estudiar cuál es su *grado* de aversión al riesgo. Anteriormente, se

estableció la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} U(v + X) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[u(v + X)] = \mathbb{E}[u(v + \mathbb{E}[X] - P)] \\ &= U(v + \mathbb{E}[X] - P) = u(v + \mathbb{E}[X] - P). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Supongamos que  $u \in \mathcal{C}^2$ , entonces tomando una aproximación en Series de Taylor de grado dos de  $u(v + X)$  en la vecindad de  $v + \mathbb{E}[X]$  se tiene que

$$u(v + X) \approx u + u' \cdot (X - \mathbb{E}[X]) + \frac{1}{2}u'' \cdot (X - \mathbb{E}[X])^2,$$

donde  $u^{(n)} \equiv \frac{\partial^n}{\partial v} u(v + \mathbb{E}[X])$ . Tomando la esperanza con respecto a la medida de  $X$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(v + X)] &\approx u + u' \cdot (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]) + \frac{1}{2}u'' \cdot (\mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2) \\ &\approx u + \frac{1}{2}u'' \cdot \text{Var}(X). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Desarrollando el lado equivalente seguro en Series de Taylor de grado uno alrededor de  $v + \mathbb{E}[X]$ , tenemos que

$$u(v + \mathbb{E}[X] - P) \approx u - u' \cdot P. \quad (3.5)$$

Sustituyendo 3.4 y 3.5 en 3.3

$$u + \frac{1}{2}u'' \cdot \text{Var}(X) \approx u - u' \cdot P,$$

y definiendo  $r := -u''/u'$ , finalmente

$$P \approx \frac{r}{2} \text{Var}(X). \quad (3.6)$$

A  $r$  se le conoce como el *Coeficiente de Aversión Absoluto al Riesgo de Arrow-Pratt* y es una medida local del grado de oposición al riesgo que tiene un individuo racional. Como  $u' > 0$ , se puede resumir las relaciones de adversidad al riesgo presentado por un individuo en las siguientes equivalencias.

$$\begin{bmatrix} \text{Adverso} \\ \text{Neutral} \\ \text{Amante} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} r > 0 \\ r = 0 \\ r < 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} u'' < 0 \\ u'' = 0 \\ u'' > 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} \text{u es cóncava} \\ \text{u es lineal} \\ \text{u es convexa} \end{bmatrix}.$$



### 3.2.2. Tipos de Aversión al Riesgo

Anteriormente se estudió que  $u$  define el coeficiente de Arrow-Pratt  $r$ , pero, ¿qué características muestra  $r$  sobre  $u$ ?

Por definición  $r = -u''/u'$ , donde  $r = r(v+X)$  está en función de la riqueza inicial y de la recompensa aleatoria  $X$ . Si se resuelve la ecuación diferencial  $r = -u''/u'$  se obtiene que

$$r = \frac{u''}{u'} = -\frac{\partial}{\partial v} \log(u').$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \int r dv &= -\log(u') + c_1 \\ \iff u' &= e^{c_1} e^{-\int r dv} \\ \iff u &= e^{c_1} \int e^{-\int r dv} dv + c_2 \end{aligned}$$

Como  $U$  es única salvo transformaciones afines por la proposición 3.1.1, entonces sin pérdida de generalidad se puede fijar  $c_1 = c_2 = 0$ , llegando a que

$$u = \int e^{-\int r dv} dv. \quad (3.7)$$

¡Este resultado dice que el coeficiente de Arrow-Pratt caracteriza por completo la función de utilidad! A partir de este resultado se estudian los *tipos de aversión al riesgo*.

#### Aversión Absoluta al Riesgo Constante [CARA]

El mismo nombre estipula que  $r$  es *constante*. Es decir, el grado de aversión al riesgo no está en función de la riqueza inicial. Como  $r$  es fija, tenemos que el espacio de funcionales de utilidad son de la siguiente forma

$$u = -e^{r \cdot (v+X)}.$$

Es poco intuitivo que un individuo racional sea indiferente al riesgo para distintos niveles de riqueza, como expone D. Bernoulli, D. Kahneman, A. Tversky, entre otros. Por tanto, no será de nuestro interés estudiar este tipo de aversión al riesgo para el presente texto.

## Aversión Absoluta al Riesgo Creciente [IARA]

El nombre sugiere que a mayor riqueza, más aversión al riesgo un individuo tiene. Es decir, la prima al riesgo  $P$  para un apuesta de \$1 debe ser mayor para una riqueza de un millón que de mil. Este tipo de aversión al riesgo tampoco es de nuestro interés.

## Aversión Absoluta al Riesgo Creciente [DARA]

Al contrario de una preferencia IARA, la aversión al riesgo DARA dice que a mayor nivel de riqueza, menor es la prima al riesgo. ¡Esto es lo que se desea estudiar!

## Adversidad Logarítmica

Daniel Bernoulli en *Exposition of a New Theory of Mesurment of Risk*, considera que el individuo es adverso al riesgo por naturaleza. Como  $u'(x) > 0$ , entonces por la Desigualdad de Jensen  $\mathbb{E}[u(X)] < u(\mathbb{E}[X])$ . D. Bernoulli reflexiona si un individuo *siente* igual perder que ganar la misma cantidad de dinero para un nivel de riqueza fijo, y concluye -lógicamente- que no. De hecho Kahnemann y Tversky muestran que el sentimiento es aproximadamente 2 a 1 (Kahneman, 2011) debido, quizá, a que las pérdidas nos privan de un *status quo* conocido mientras que las ganancias llevan a la apostadora a un terreno todavía desconocido.

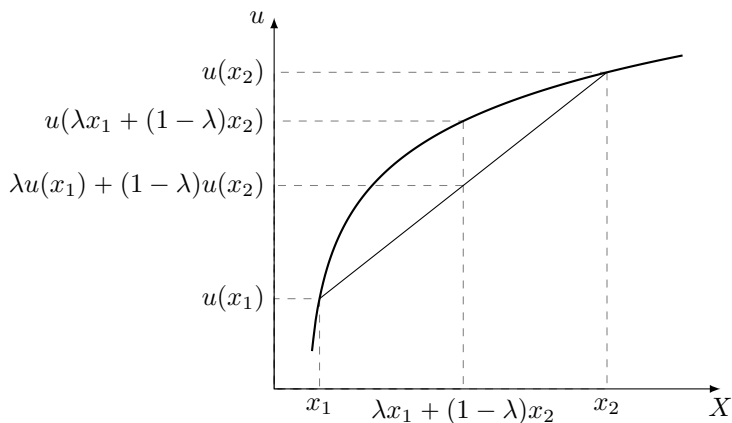


Figura 3.3. Gráfica de una adversidad logarítmica.

Ahora se le pregunta a la lectora: ¿le sería equivalente perder \$10 teniendo una riqueza de \$100 que teniendo una de \$15 ? Por otro lado, ¿le produciría

la misma alegría ganar \$10 teniendo en el bolsillo \$15 que un total de \$100? D. Bernoulli argumenta que este sentimiento observado es inversamente proporcional a la riqueza. Así que

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x} \\ \therefore u(x) &= \log(x) + c \end{aligned}$$

Pero en la riqueza inicial  $u(v) = 0$ , lo que implica que  $c = -\log(v)$ . De esta forma, el valor moral de cada unidad monetaria está dado por

$$u(x) = \log\left(\frac{x}{v}\right), \quad v > 0. \quad (3.8)$$

Es importante notar que esta utilidad crece a tasas monótonamente decrecientes y decrece a tasas monótonamente crecientes, por lo cual, matemáticamente, duelen más las pérdidas que las ganancias. Por ende, el coeficiente de Arrow-Pratt es  $r(x) = 1/x$ . Lo que implica que la prima al riesgo es inversamente proporcional a la riqueza  $v$  dada la recompensa aleatoria  $X$ .

### Adversidad Cuadrática

Por otro lado, si acotan las utilidades en funciones de utilidad cuadráticas, es decir

$$u(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \frac{1}{2} \beta_2 x^2,$$

se puede estudiar su *tipo* y *grado* de aversión al riesgo al estudiar los parámetros  $\beta_i$ . Pero si tomamos la esperanza con respecto a la medida de  $X$

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{E}[u(X)]}_{U(F_X)} &= \beta_0 + \beta_1 \mathbb{E}[X] + \frac{1}{2} \beta_2 \mathbb{E}[X^2] \\ &= \beta_0 + \beta_1 \mathbb{E}[X] + \frac{1}{2} \beta_2 (\text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

se puede estudiar por completo la funcional de utilidad analizando únicamente el primer y segundo momento central de la recompensa aleatoria  $X$  (Chavas, 2004). Es decir, con saber en promedio cuánto se va a ganar en la apuesta y qué tan variable es, el agente puede tomar una decisión *completamente* informada debido a que como  $u \in \mathcal{P}_2$  entonces la aproximación en Series de Taylor de grado dos es exacta y la funcional de utilidad vNM queda determinada únicamente por sus primeros dos momentos centrales.

Así, el grado de oposición al riesgo para funciones de utilidad cuadráticas es

$$r(x) = \frac{-\beta_2}{\beta_1 + \beta_2 x} = \frac{-1}{\beta_1/\beta_2 + x}.$$

Por lo que el coeficiente de Arrow Pratt tanto para utilidades cuadráticas y logarítmicas es afín. Siendo de esta forma que las preferencias para ambos perfiles son similares.

### 3.3. Teoría Media-Varianza

En la sección anterior se aproximó el problema de utilidad  $\mathbb{E}[u(X)]$  desde una perspectiva de sus primeros dos momentos centrales gracias al resultado 3.9. Al igual que Morgenstein y Von Neumann, Harry Markowitz estudia las preferencias de un portafolio de loterías en individuo desde la media y varianza de la recompensa aleatoria  $X$  (Markowitz, 1968).

**Definición 3.3.1** (Función de Utilidad Media-Varianza,  $w$ ). *Una Función de Utilidad Media-Varianza  $w$  es una función de utilidad  $w : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , anexada a una Funcional de Utilidad  $W : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ , que depende **únicamente** de los primeros dos momentos centrales de la variable aleatoria  $X$ . Es decir  $W(F_X) = w(\mu_X, \sigma_X^2)$ .*

De esta forma, si se tienen dos loterías  $L_1, L_2$  sobre  $\mathcal{X}$  entonces debería de suceder que  $L_1 > L_2 \iff W(\mu_1, \sigma_1) > W(\mu_2, \sigma_2)$ . Además, se requiere que la función  $w$  sea congruente con el principio “siempre es mejor mayor riqueza”. Entonces,  $w$  debe ser monótonamente creciente en  $\mu$ , pero como también se desea que  $w$  modele un individuo racional con aversión al riesgo entonces  $w$  debe ser monótonamente decreciente en  $\sigma$ ; para un mismo nivel de retorno esperado, se prefiere la distribución que tenga menor *varianza*. De lo anteriormente mencionado se puede deducir que la media y varianza de una lotería son *complementos*. ¡Lo cuál hace sentido en una apuesta! Es decir, si la volatilidad sube, entonces se pide que el retorno esperado también suba para estar en la misma curva de indiferencia, ya que la varianza es un “mal” y la paga esperada es un “bien”.

#### 3.3.1. Teoría de Portafolios

Una vez establecido el perfil de riesgo de un individuo y conocida la media y la varianza de las recompensas aleatorias  $R_i$ , lo natural es preguntarse *cómo se debe* valorar un conjunto de estas. La respuesta clásica a esta pregunta es mediante el modelo desarrollado por Markowitz y Sharpe en 1990, el famoso

*Capital Asset Pricing Model* (CAPM), acreedor del premio Nobel de Economía en ese año.

**Definición 3.3.2** (Portafolio). Sean  $R_1, R_2, \dots, R_r$  recompensas de apuestas. Sin pérdida de generalidad supongamos que la riqueza inicial de un individuo es de 1. El Universo de Portafolios es el conjunto  $\Psi = \{(\mu, \sigma) \mid \sum_{k=1}^r \ell_k = 1\}$ , donde  $\mu = \sum_{k=1}^r \ell_k \mu_k$  es el retorno del portafolio y  $\sigma^2 = \underline{\ell}' \Sigma \underline{\ell}$  la varianza del portafolio, siendo  $\Sigma$  la matriz de varianzas y covarianzas de las apuestas. Por lo que un portafolio  $\psi$  es la tupla  $(\mu, \sigma) \in \Psi$ .

**Definición 3.3.3** (Estrategias de Portafolios). Sean  $R_1, R_2, \dots, R_r$  recompensas de apuestas. Se le llama estrategia al vector  $\underline{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_r)'$  tal que  $\sum_{k=1}^r \ell_k = 1$ .

### 3.3.2. Diversificación

La genialidad de Markowitz recae en la siguiente idea: para una estrategia  $\underline{\ell}$  de un portafolio con solo dos retornos de apuestas  $R_i, R_j$ , la varianza de dicho portafolio está dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{\underline{\ell}}^2 &= \text{Var}(\ell R_i + (1 - \ell) R_j) \\ &= \ell^2 \sigma_i^2 + (1 - \ell)^2 \sigma_j^2 + 2\ell(1 - \ell) \text{Cov}(R_i, R_j) \\ &= \ell^2 \sigma_i^2 + (1 - \ell)^2 \sigma_j^2 + 2\ell(1 - \ell) \sigma_i \sigma_j \rho_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

En la relación 3.10 es de notar que al dejar una estrategia  $\underline{\ell}$  fija, y conocidas las varianzas de las loterías, la volatilidad  $\sigma_{\underline{\ell}}$  depende de que tan correlacionadas estén dichas apuestas. En el caso extremo donde  $\rho_{i,j} = 1$ , se obtiene la máxima varianza posible, pero en su defecto, ¡se tiene la estrategia con mínima varianza! De hecho, si se desarrolla 3.10 cuando  $\rho_{i,j} = -1$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \sigma_{\underline{\ell}}^2 &= \ell^2 \sigma_i^2 + (1 - \ell)^2 \sigma_j^2 - 2\ell(1 - \ell) \sigma_i \sigma_j \\ \iff \sigma_{\underline{\ell}}^2 &= (\ell \sigma_i - (1 - \ell) \sigma_j)^2 \\ \iff \sigma_{\underline{\ell}} &= |\ell \sigma_i - (1 - \ell) \sigma_j|. \end{aligned}$$

Por lo que podemos escoger  $\ell$  de tal forma que

$$\begin{aligned} \ell_* \sigma_i - (1 - \ell_*) \sigma_j &= 0. \\ \therefore \ell_* &= \frac{\sigma_j}{\sigma_i + \sigma_j}. \end{aligned}$$

Así, este portafolio tiene un retorno mayor a una alternativa segura  $R_f$  (suponiendo que  $R_f \leq \mu_i, \mu_j$ ) con una variabilidad nula, en promedio. Esta es la gran genialidad de Markowitz. Con esto, la apostadora puede explotar loterías correlacionadas negativamente, como en el caso de un posible arbitraje.

## Frontera Eficiente

Para un portafolio con dos retornos de loterías, la estrategia óptima  $\ell_*$  es la que tiene la mínima varianza posible para el retorno esperado  $\mu_\ell$  fijo de la estrategia. ¿Siempre se podrá alcanzar dicha estrategia óptima?

### Teorema 3.3.1.

*En un mercado que no acepta short selling, i.e.  $\ell_k \geq 0$ , si hay  $r$  loterías, el Conjunto Óptimo de Varianza Mínima  $\Psi = \{(\mu, \sigma) | \sum_{k=1}^r \ell_k^* = 1\}$  es cerrado y acotado.*

*Demostración.* Por construcción nótese que  $\Psi$  es acotado, ya que los primeros dos momentos centrales son finitos y  $\sum_{k=1}^r \ell_k^* = 1$ .

Sea  $\psi_n = (\mu_n, \sigma_n)$  una sucesión de portafolios de varianza mínima en  $\Psi$  convergente a  $\psi = (\mu, \sigma)$ . Para cada portafolio  $\psi_n$  se tiene su estrategia correspondiente  $\underline{\ell}_n$ . Por construcción del vector  $\underline{\ell}_n \in [0, 1]^r$ , por tanto el conjunto  $\ell = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underline{\ell}_n$  es un compacto en  $\mathbb{R}^r$  y por el Teorema de Heine-Borel <sup>5</sup> es cerrado y acotado. Al ser infinito y acotado entonces el Teorema de Bolzano-Weierstrass <sup>6</sup> garantiza que existe una subsucesión  $\{\underline{\ell}_{n_s}\}_{s=1}^{\infty} \subseteq \ell$  tal que  $\underline{\ell}_{n_s} \rightarrow \underline{\ell}$  cuando  $s \rightarrow \infty$ . Sea esa estrategia  $\underline{\ell}$  la que define el portafolio  $\psi$  con retorno esperado fijo  $\mu$  y su varianza mínima posible  $\sigma$ .

Concluimos que cualquier límite de portafolios en el Conjunto Óptimo de Varianza Mínima está en este mismo conjunto, por tanto es cerrado y acotado.  $\square$

Lo que busca el individuo *racional* es la *mejor* estrategia, con respecto a su apetito de riesgo, para invertir en  $\psi$  su riqueza. Dicha estrategia debe de tener la menor varianza posible dado un nivel de retorno esperado  $\mu$ . Pero esta varianza y media siempre se alcanza debido el teorema pasado, por tanto, esa estrategia  $\underline{\ell}_*$  es

$$\arg \min \{\underline{\ell}' \Sigma \underline{\ell}\} \quad \text{s.a.} \quad \begin{aligned} \underline{\ell}' \underline{\mu} &= \mu, \\ \sum_k \ell_k &= 1. \end{aligned} \quad (3.11)$$

## Sharpe Ratio

Ya se estudió el mejor portafolio para un nivel fijo de retorno esperado dentro del Conjunto Óptimo de Varianza Mínima, pero ¿cuál sería el mejor portafolio entre todos estos portafolios óptimos? Anteriormente, se observó que  $(\mu, \sigma)$  son complementos en la función de utilidad media-varianza  $w$ , lo

<sup>5</sup>Ver Elementos del Análisis Matemático de Robert Bartle pg 95

<sup>6</sup>Ver Elementos del Análisis Matemático de Robert Bartle pg 131

razonable sería tomar el punto  $(\mu_*, \sigma_*)$  donde la pendiente entre la media-varianza del portafolio y la recompensa segura  $R_f$  sea máxima.

**Definición 3.3.4** (Sharpe Ratio  $S(\underline{x})$ ).

La pendiente  $S(\underline{x})$  entre un portafolio con estrategia  $\underline{x}$  y la apuesta segura  $R_f$  está dado por

$$S(\underline{x}) = \frac{\overbrace{\underline{x}'\underline{\mu}}^{\mu} - \overbrace{R_f}^{\mu_f}}{\underbrace{\sqrt{\underline{x}'\Sigma\underline{x}}}_{\sigma} - \underbrace{0}_{\sigma_f}}. \quad (3.12)$$

A esta pendiente se le conoce como el Sharpe Ratio.

Es decir, la estrategia  $\underline{\ell}_*$  tal que la tasa  $(\mu - R_f)/\sigma$  sea máxima es la mejor dentro de la Frontera Eficiente. En conclusión, el *portafolio Sharpe-óptimo* de  $r$  recompensas está dado por la estrategia  $\underline{\ell}_*$  que resuelve el siguiente problema de optimización.

$$\arg \max_{\underline{\ell} > 0} \left\{ \frac{\underline{\ell}'\underline{\mu} - R_f}{\sqrt{\underline{\ell}'\Sigma\underline{\ell}}} \right\} \quad \text{s.a.} \quad \sum_{k=1}^r \ell_k = 1. \quad (3.13)$$

Resolver el problema de optimización para la función  $S(\underline{x})$  en su forma original puede no ser una tarea fácil, ya que la función puede no ser cóncava.

Para volver el problema de optimización más sencillo, se lleva a un problema de optimización convexa. Para llevar a cabo dicha tarea, se toma la sugerencia de Cornuejols & Tütüncü: realizar un cambio de variable  $\underline{y} = \kappa \underline{x}$ ; suponiendo que existe una solución factible tal que  $\underline{x}'\underline{\mu} > R_f$  -ya que si no, la recompensa segura dominaría cualquier estrategia y por tanto no hay nada que optimizarse escoge una  $\kappa > 0$  tal que  $(\underline{\mu} - R_f \mathbf{1})'\underline{y} = 1$ . Notando que  $S(\underline{y}) = S(\underline{x})$ , el problema 3.13 en dimensión  $r$  se puede formular como el siguiente problema de optimización *convexo* en dimensión  $r + 1$  (Cornuejols y Tütüncü, 2006)<sup>7</sup>:

$$\arg \min_{(\underline{y}, \kappa) > 0} \{ \underline{y}'\Sigma\underline{y} \} \quad \text{s.a.} \quad \frac{(\underline{\mu} - R_f \mathbf{1})'\underline{y}}{\sum_{k=1}^r y_k} = 1. \quad (3.14)$$

En esta forma, un algoritmo de optimización numérica, como programación cuadrática sucesiva (PCS), puede encontrar sencillamente el óptimo local.

---

<sup>7</sup>La demostración de como el problema 3.13 y 3.14 son equivalentes, se puede consultar en la proposición 8.1 de la página 158 de Cornuejols y Tütüncü, 2006

## Adendum: Arbitraje

En la sección 1.5.2 se mencionó que en un mercado de apuestas deportivas donde la comisión  $tt$  es negativa y bajo la estrategia  $\ell_i^{(A)} = \left(\sigma_i^{(d)}\right)^{-1} / (1 + tt)$ ,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$ , la recompensa total  $R(\underline{\ell}_A) > 1$  seguramente. En esta sección se muestra como el Criterio de Sharpe encuentra dichas inconsistencias del mercado bajo la estrategia óptima  $\underline{\ell}_A$ .

Primero, se recuerda que la ganancias netas  $\underline{\varrho}$  de un evento deportivo son de la forma  $\underline{\varrho} \stackrel{\text{def}}{=} D_\sigma \underline{m} - \mathbf{1}$  donde  $\underline{m} \sim \text{multinomial}(1; \underline{p})$  por la relación 1.1 previamente estudiada.

Segundo, se hace notar que al tener una comisión negativa  $tt$ , la esperanza de la ganancia neta de apostar para cualquier evento  $\varrho_i$  es positiva, lo que resulta en un partido completamente favorable, ya que

$$\mathbb{E}[\underline{\ell}'_A \underline{\varrho}] = \underline{\ell}'_A (D_\sigma \underline{p} - \mathbf{1}) = \frac{1}{1 + tt} \sum_{i=1}^m p_i - \frac{1}{1 + tt} \sum_{i=1}^m 1/\sigma_i^{(d)} = \frac{-tt}{1 + tt} > 0.$$

Tercero, el retorno total  $R$  bajo la estrategia  $\underline{\ell}_A$  es  $(1 + tt)^{-1}$  de forma *segura*. Esto debido al punto dos y porque la varianza es nula:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R(\underline{\ell}_A)) &= \text{Var}(1 + \underline{\ell}'_A \underline{\varrho}) \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\ell}'_A \text{Var}(D_\sigma \underline{m} - \mathbf{1}) \underline{\ell}_A \\ &= \underline{\ell}'_A (D_\sigma (\text{diag}(\underline{p}) - \underline{p}\underline{p}') D_\sigma) \underline{\ell}_A = \mathbf{1}' (\text{diag}(\underline{p}) - \underline{p}\underline{p}') \mathbf{1} \\ &= \sum_{i=1}^m p_i - \left( \sum_{i=1}^m p_i \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el Sharpe Ratio en un escenario con arbitraje, la estrategia óptima es  $\underline{\ell}_A$ , ya que esta tasa es infinita debido a que por el segundo punto el numerador es positivo<sup>8</sup> y por el tercer punto el denominador es cero. Reiterando: maximizar el Sharpe Ratio bajo comisiones negativas es equivalente a encontrar arbitraje.

## Conclusiones Media Varianza

Gusta observar que *suponiendo* utilidades cuadráticas, la lotería preferida puede ser encontrada únicamente conociendo la media y varianza de las mismas. Dentro de las ya mencionadas ventajas del Sharpe Ratio, destaca la

---

<sup>8</sup>Suponiendo que el *risk free asset* es cero, que en apuestas de 90 minutos es razonable pensar que así es.



posibilidad de explotar arbitraje bajo partidos con comisión negativa. Dinero gratis. Pero es importante mencionar que al tener apuestas binarias, la probabilidad de ruina es positiva; como las estrategias óptimas presuponen que  $\sum_i \ell_i = 1$ , basta un mal día para perder todo... ¿cómo se podría evitar la bancarrota?

### 3.4. Criterio de Inversión de Kelly

Anteriormente se mostró como maximizar la riqueza  $v$  de un periodo a otro para un conjunto de retornos de apuestas  $\{R_j\}_{j=1}^n$  independientes con el modelo CAPM. En el caso de una *apuesta binaria* con momios fraccionales unitarios, la probabilidad que suceda el evento deseado está dada por  $p_j$ , y la probabilidad del evento contrario es  $q_j := 1 - p_j$ . Suponiendo que la riqueza inicial conocida  $v$  del individuo está dada por  $W_0$ , la riqueza al tiempo  $n$  está dada por el siguiente proceso estocástico

$$W_n = W_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \ell_j R_j, \quad \ell_j \in [0, W_{j-1}].$$

Se pretende encontrar la estrategia  $\underline{\ell}$  que maximice  $\mathbb{E}[W_n]$ , pero

$$\mathbb{E}[W_n] = \mathbb{E} \left[ W_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \ell_j R_j \right] = W_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \ell_j \mathbb{E}[R_j] = W_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \ell_j (p_j - q_j).$$

Nótese que en el caso que  $p_j > 1/2$  entonces  $p_j - q_j > 0$ , por lo que  $\mathbb{E}[W_n]$  es una función linealmente creciente en  $\ell_j$ . De esta forma la apuestas  $\ell_j = R_{j-1}$  maximizan  $\mathbb{E}[W_n]$ ; para el caso contrario es fácil ver que  $\ell_j = 0$  maximizan la riqueza en cuestión. En el caso que  $p_j = 1/2$ , se sigue que  $p_j - q_j = 0$ , por lo que  $\ell_j$  no es trascendente para maximizar el valor esperado.

Pero si se toma una subsucesión de  $\{R_j\}_{j=1}^n$  tal que  $p_j > 1/2$ , se observa que la probabilidad de ruina  $1 - \prod_{j=1}^n p_j < 1 - p_{\min}^n \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Es decir, ¡eventualmente se pierde todo al intentar maximizar la ganancia!

¿Cómo se puede minimizar la probabilidad de ruina sin tener que reducir dicha ganancia? El caso más conservador para minimizar la ruina del jugador sería no apostando, pero eso mismo hace que no se gane. Quizá, redefiniendo el proceso de la riqueza al tiempo  $n$ .

Y es que J.L Kelly en 1956 lo logra resolver bajo la influencia de Claude Shannon. La idea principal es tomar una fracción de la riqueza  $\ell \in [0, 1)$ , en contraste con el CAPM de Markowitz. Como dato histórico para el lector, este

mismo modelo es el que usó Eduard Thorp al inventar el conteo de cartas en *blackjack* y posteriormente lo puso a prueba -muy satisfactoriamente- en el mayor mercado de apuestas: Wall Street. (Poundstone, 2010)(Thorp, 1966).

### 3.4.1. Tasa de Retorno Exponencial

Supongamos que no existen apuestas mínimas, que el dinero es infinitamente divisible y que las apuestas son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (vaid's). Se le recuerda a la lectora que la ganancia neta aleatoria está dada por 1.1. Es decir,  $\varrho(\omega) = \sigma_d \mathcal{E}(\omega) - 1$ ,  $\mathcal{E} \sim \text{bernoulli}(p)$ . También recordar que la ganancia total por haber apostado  $\ell$  porcentaje del capital inicial está dada por  $R(\omega; \ell) = 1 + \ell \varrho(\omega)$ . De dicho modo, la riqueza final de un individuo al tiempo  $n$  que apuesta de forma *fija* la fracción  $\ell$  del monto inicial para la sucesión de apuestas independientes e idénticamente distribuidas (vaid's)  $\{R_j\}_{j=1}^n$ , está dada por la siguiente expresión:

$$W_n = W_0 \prod_{j=1}^n R_j(\ell) \iff \log \left( \frac{W_n}{W_0} \right) = \sum_{j=1}^n \log(R_j(\ell)). \quad (3.15)$$

Es decir, el log-porcentaje de la riqueza final relativa al monto inicial  $W_0$  al tiempo  $n$  es una caminata aleatoria con *drift*  $\mathbb{E}[\log R_j(\ell)]$ . Por otro lado, si  $S_n$  denota el número de victorias al tiempo  $n$ ,  $S_n \sim \text{binomial}(n, p)$ , y  $n - S_n$  denota el número de derrotas, entonces

$$\begin{aligned} W_n &= \underbrace{(1 + \sigma_f \ell)^{S_n}}_{\text{Ganancias}} \underbrace{(1 - \ell)^{n - S_n}}_{\text{Pérdidas}} W_0 \\ \iff \underbrace{\log \left( \frac{W_n}{W_0} \right)}_{G_n(\ell)} &= S_n \log(1 + \sigma_f \ell) + (n - S_n) \log(1 - \ell). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Kelly usa las ideas que C. E. Shannon desarrolló 8 años antes sobre la Teoría de la Información para encontrar que, por la Ley de los Grandes Números de Borel,<sup>9</sup>

$$\frac{1}{n} G_n(\ell) \rightarrow G(\ell) := p \log(1 + \sigma_f \ell) + (1 - p) \log(1 - \ell), \quad (3.17)$$

con probabilidad 1 cuando  $n \rightarrow \infty$  ya que  $G_n$  es la suma de vaid's  $\log(R_j(\ell))$ , ver 3.15.

---

<sup>9</sup>Ver «Ley Fuerte de los Grandes Números de Borel-Cantelli», 2017.

A la expresión  $G$ , Kelly la llamo la *tasa de crecimiento exponencial del capital*, ya que como  $\frac{1}{n}G_n(\ell) = \frac{1}{n}\log(W_n/W_0)$ , entonces arreglando los términos y tomando el límite se obtiene que  $W_n/W_0 \rightarrow e^{G(\ell)}$  con probabilidad 1 (al ser la exponencial una función continua).

Por otro lado, se observa que  $G$  está en función de la fracción apostada  $\ell$ , por lo que

$$\frac{\partial}{\partial \ell} G(\ell) = p \frac{\sigma_f}{1 + \sigma_f \ell} - q \frac{1}{1 - \ell}.$$

Entonces

$$G'(\ell_*) = 0 \iff \ell_* = \frac{\overbrace{\sigma_f p - q}^{\text{borde apuesta}}}{\underbrace{\sigma_f}_{\text{momio}}}. \quad (3.18)$$

A  $\ell_*$  se le conoce como el **Criterio de Kelly**. Además, se puede observar que para el caso de momios decimales

$$\ell_* = \frac{\sigma_f p - (1 - p)}{\sigma_f} = \frac{\sigma_d p - 1}{\sigma_d - 1}. \quad (3.19)$$

Por lo que se apuesta sí y solo sí  $\sigma_d p > 1$ . Aparte,  $G(\ell_*) = G_{\text{máx}}$  está dado por

$$\begin{aligned} G_{\text{máx}} &= p \log(1 + (\sigma_f p - q)) + q \log\left(1 - \frac{\sigma_f p - q}{\sigma_f}\right) \\ &= p \log(p + \sigma_f p) + q \log\left(\frac{\sigma_f(1 - p) - q}{\sigma_f}\right) \\ &= p \log((1 + \sigma_f)p) + q \log\left(\frac{1 + \sigma_f}{\sigma_f} q\right) \\ &= \underbrace{p \log(p) + q \log(q)}_{-\text{entropía}} + \log\left(\sigma_f^{p-1} + \sigma_f^p\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Shannon demuestra en su paper que 3.20 es la capacidad máxima de un canal discreto para transmitir señales correctas y Kelly complementa esta idea con el sesgo del momio  $\sigma_f$ . Ya que se observa que si el momio decimal  $\sigma_d$  es igual a la probabilidad real  $p$ , se tendría por 3.19 que  $\ell_* = 0$  y por tanto  $G_{\text{máx}} = 0$ , ¡no hay transmisión en el canal! Por lo que cualquier sesgo *observado* del momio, es un beneficio para el apostador. De hecho si  $1/\sigma_d = \tilde{p} \neq p$ , se tiene que

$$\ell_* = \frac{\sigma_d p - 1}{\sigma_d - 1} = \frac{p - \tilde{p}}{1 - \tilde{p}}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} G_{\max} &= p \log \left( 1 + (\sigma_d - 1) \frac{p - \tilde{p}}{1 - \tilde{p}} \right) + (1 - p) \log \left( 1 - \frac{p - \tilde{p}}{1 - \tilde{p}} \right) \\ &= p \log \left( \frac{p}{\tilde{p}} \right) + (1 - p) \log \left( \frac{1 - p}{1 - \tilde{p}} \right) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} D_{\text{KL}}(p || \tilde{p}). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Es decir, el log-retorno del crecimiento es igual a la divergencia de información de Kullback Leibler, la cual fue analizada en el capítulo anterior. Esto dice que entre mayor sesgo entre los momios y la probabilidad real que observe el apostador, mayor ventaja.

El lector habrá notado que, intrínsecamente, Kelly está contemplando una apostadora con un perfil de riesgo DARA, debido a que se está maximizando una función de utilidad logarítmica:  $\mathbb{E}[\log(R(\ell))] = \mathbb{E}[\log(W_n/W_0)]$ . Aunque no es un caso general de apetito de riesgo, como en el descrito por Markowitz en la sección pasada para el universo de funciones cuadráticas, un valor moral al dinero bien puede ser descrito por el logaritmo, como expuso anteriormente Daniel Bernoulli. Además, esta función encaja bien con la idea de ser más adversos a pérdidas que a ganancias, como expone la teoría prospectiva de Kahneman.

### 3.4.2. Propiedades del Criterio de Kelly

En la parte anterior vimos que la tasa de retorno es máxima cuando se apuesta  $\ell_*$ , y, por construcción, la ruina del jugador se vuelve imposible<sup>10</sup>. ¿Qué sucederá si no se sigue dicha estrategia óptima? Por decir, si la apostadora *quisiera* apostar más, ¿mejoraría su utilidad? ¿O hasta qué punto puede apostar con un retorno positivo?

**Teorema 3.4.1** (Tipos de Estrategias).

$G(\ell)$  tiene un único máximo en  $\ell_* = (\sigma_f p - q)/\sigma_f$ . Aparte,  $\exists! \ell_c > \ell_* > 0$  tal que

$$G(\ell) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \ell < \ell_c, \\ = 0 & \text{si } \ell = \ell_c, \\ < 0 & \text{si } \ell > \ell_c. \end{cases}$$

---

<sup>10</sup>Bajo los supuestos anteriormente enunciados al principio de la presente sección.

*Demostración.*

Obtuvimos anteriormente que

$$\begin{aligned} G(\ell) &= p \log(1 + \sigma_f \ell) + q \log(1 - \ell). \\ \therefore \frac{dG}{d\ell}(\ell) &= \frac{\sigma_f p}{1 + \sigma_f \ell} - \frac{q}{1 - \ell}. \\ \therefore \frac{d^2 G}{d\ell^2}(\ell) &= \frac{-\sigma_f^2 p}{(1 + \sigma_f \ell)^2} - \frac{q}{(1 - \ell)^2}. \end{aligned}$$

Como  $G'' < 0 \quad \forall \ell \in \text{Dom}(G)$ , entonces  $G$  es cóncava y por ende el óptimo es único. Además es notorio que

$$\lim_{\ell \rightarrow 1^-} G(\ell) = -\infty, \quad \text{o bien} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} G(1 - 1/n) = -\infty.$$

Por lo que tomando  $m$  suficientemente grande, tendremos que para  $M > 0$  se tendrá

$$G(\underbrace{1 - 1/m}_{\ell_m}) < -M < 0.$$

Al ser  $G$  continua en  $\ell$  y tener que  $G(\ell_*) > 0$ ,  $G(\ell_m) < 0$ , entonces por el Teorema de Valor Intermedio de Bolzano,  $\exists \ell_c \in (\ell_*, 1)$  tal que  $G(\ell_c) = 0$ . Además  $\ell_c$  es única ya que  $G$  es estrictamente decreciente después de  $\ell_*$ .  $\square$

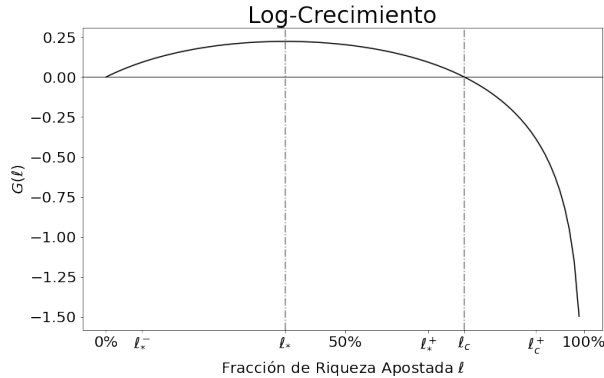


Figura 3.4. Ejemplo del log-crecimiento para  $p = 1/2$  y  $\sigma_d = 5$ . Se señala el valor  $\ell_*$  que maximiza la función, así como el valor  $\ell_c$  donde el crecimiento es nulo. Por último, se anexan valores de la riqueza  $\ell_*^-$ ,  $\ell_*^+$  donde el crecimiento es igual para ambos y el valor  $\ell_c^+$  donde el crecimiento es negativo.

La importancia de este teorema recae en que es mejor *sub-apostar* a *sobre-apostar*, puesto que si se apuesta más de lo debido, se cae en una tasa de retorno negativa, por lo que la riqueza disminuye con probabilidad 1. En la otra mano, si se apuesta menos de lo óptimo, se sigue teniendo una tasa de retorno positiva -ya que la apuesta es favorable- aunque menor comparado con el óptimo.

¿Que sucederá en el largo plazo cuando la tasa de crecimiento  $G$  es positiva o, en su defecto, negativa? ¿Las ganancias oscilan o convergen si la tasa de crecimiento es nula? El siguiente resultado comenta que para tasas positivas, el crecimiento de la riqueza es infinito, mientras que en su defecto se tiende a la ruina, casi seguramente (Thorp, 1969).

**Teorema 3.4.2** (Crecimiento de Capital por Tipo de Estrategia (E. Thorp, 1969)).

Sea  $G(\ell)$  el crecimiento de capital definido anteriormente.

1. Si  $G(\ell) > 0$  entonces  $\lim W_n = \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , con probabilidad 1.
2. Si  $G(\ell) < 0$  entonces  $\lim W_n = 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , con probabilidad 1.
3. Si  $G(\ell) = 0$  entonces  $\overline{\lim} W_n = \infty$  y  $\underline{\lim} W_n = 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , con probabilidad 1.

*Demostración.*

Probaremos solamente (1.), debido que (2.) es análogo al primer caso. Para (3.), ver (Thorp, 1969).

Por la Ley de los Grandes Número de Borel tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \frac{W_n}{W_0} \right) = G(\ell), \quad \text{c.s.}$$

Necesariamente para  $\omega \in \Omega$ , donde  $\Omega$  es el espacio muestral de *todas las secuencias* de ensayos Bernoulli, dada  $\epsilon = G(\ell)/2 > 0$ , existe un natural  $N(\epsilon, \omega)$  tal que para  $n \geq N(\epsilon, \omega)$  entonces  $|G(\ell) - \frac{1}{n} \log(W_n/W_0)| < \epsilon$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \log \left( \frac{W_n}{W_0} \right) &\geq \frac{1}{2} G(\ell). \\ \therefore W_n &\geq W_0 \exp \left\{ \frac{n}{2} G(\ell) \right\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

Como  $G(\ell) > 0$  por hipótesis, entonces  $W_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , casi seguramente.  $\square$

Se acaba de estudiar el crecimiento de riqueza para tasas positivas, nulas y negativas; se analizó que sucede con las apuestas con una tasa positiva: crecen, no obstante, no a la misma velocidad que en la estrategia óptima  $\ell_*$  de Kelly. ¿Qué tanto podrá diferir, al final, la riqueza entre un apostador del tipo Kelly y cualquier otro?

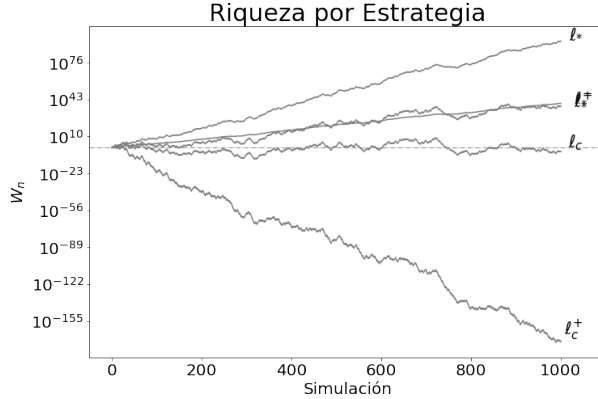


Figura 3.5. Riqueza Acumulada después de 1000 simulaciones bernoulli(1/2) para las estrategias de apuestas mencionadas en la figura 3.4.

**Teorema 3.4.3** (La Mejor Estrategia de Apuestas (Breiman, 1961)).

*Para cada periodo  $n$ , dos portafolios tienen la misma familia de apuestas con retorno  $\sigma_f$  sobre lo apostado. Un portafolio sigue el Criterio de Kelly  $\ell_*$  mientras que el otro portafolio usa cualquier otro criterio, entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_n(\ell_*)}{W_n(\ell)} = \infty, \quad c.s.$$

*Demostración.*

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $G(\ell_1) > G(\ell_2)$ . Luego

$$\frac{1}{n} \log \left( \frac{W_n(\ell_1)}{W_n(\ell_2)} \right) = \frac{1}{n} \left( S_n \log \left( \frac{1 + \sigma_f \ell_1}{1 + \sigma_f \ell_2} \right) + (1 - S_n) \log \left( \frac{1 - \ell_1}{1 - \ell_2} \right) \right).$$

Como  $\log(W_n(\ell))$  es un proceso estocástico que depende de  $\log(R_j)$ , entonces por la Ley de los Grandes Números de Borel, y, arreglando términos, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left( \frac{W_n(\ell_1)}{W_n(\ell_2)} \right) &= p \log \left( \frac{1 + \sigma_f \ell_1}{1 + \sigma_f \ell_2} \right) + (1 - p) \log \left( \frac{1 - \ell_1}{1 - \ell_2} \right), \quad c.s. \\ &= G(\ell_1) - G(\ell_2) > 0. \end{aligned}$$

Procediendo de igual manera a la prueba de la parte 1 del teorema pasado; para  $n$  suficientemente grande, definida por  $\omega$ , se sigue que

$$\frac{W_n(\ell_1)}{W_n(\ell_2)} \geq \exp \left\{ \frac{n}{2} (G(\ell_1) - G(\ell_2)) \right\}. \quad (3.23)$$

Por lo que  $\lim W_n(\ell_1)/W_n(\ell_2) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  con probabilidad 1. Definiendo  $\ell_1 := \ell_*$ , se concluye la prueba.  $\square$

Este resultado comenta que el apostador de tipo Kelly, superará *siempre* cualquier otra estrategia de apuestas *en el largo plazo*.

### 3.4.3. Apuestas Multivariadas

Se estudió cuál debería de ser la estrategia óptima de una apuesta binaria, como apuestas sobre el lanzamiento de una moneda. Si el jugador va al hipódromo, donde compiten  $m$  caballos, ¿se deberá seguir la misma estrategia?

El Criterio de Kelly está definido *a priori* a la apuesta, es decir, se elige antes de ver cómo va el proceso. Bajo la restricción de solo poder apostar a un evento, es fácil ver que el criterio sigue siendo el mismo ya que se apuesta al evento  $e_k = \arg \max_i \{G(p_i; \ell_i^*)\}$ .

Pero, si no hubiera restricción al número de apuestas a distintos eventos, ¿sólo se debería apostar a un evento para *maximizar* la *tasa de retorno*?

Hay que recordar que la fracción de la riqueza actual apostada al resultado  $i$ -ésimo del evento con  $m$  posibles resultados se denota como  $\ell_i$ . La probabilidad *real* asociada a dicho resultado es  $p_i$ . La ganancia total de apostar al evento  $\omega_i$ <sup>11</sup> está dada por los momios decimales  $\sigma_i^{(d)}$ . Por lo que el retorno total  $R(\underline{\ell})$  depende esta vez no solo de cuál caballo ganó, si no también de cuáles caballos y cuánto porcentaje de la riqueza se apostó a cada uno de ellos. Recordando que el vector de retornos netos es  $\underline{\varrho} = (\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m)'$  el arreglo donde su  $i$ -ésima componente es la variable aleatoria binaria  $\varrho_i$  que toma el valor de  $\sigma_i^{(f)}$  con probabilidad  $p_i$  y el valor  $-1$  con probabilidad  $1 - p_i$ . Además, notar que solo puede ganar un caballo a la vez, ya que los eventos son excluyentes, como se argumentó en el capítulo 1.

Así, el retorno total de la estrategia  $\underline{\ell}$  está dado por  $R(\underline{\ell}) = 1 + \underline{\ell}' \underline{\varrho}$ . Si  $\Lambda$  es el conjunto de los caballos a los que se decide apostar, entonces el retorno

---

<sup>11</sup>En este caso suponemos que el conjunto de eventos relevantes  $\mathcal{E}$  es el conjunto de cada átomo muestral de la carrera. Es decir  $e_i = \omega_i$ ,  $\forall i$ .



total determinado dado  $\omega_i$ , es

$$R(\omega_i; \underline{\ell}) = 1 + \underbrace{\phi_i^{(d)} \ell_i}_{\text{Ganancias totales por } i} - \overbrace{\sum_{s \in \Lambda} \ell_s}^{\text{Capital invertido}}.$$

De esta forma, la riqueza al tiempo  $n$  estaría dada por

$$W_n(\underline{\ell}) = \prod_{j=1}^n R_j(\underline{\ell}) = \prod_{i=1}^m \left( 1 + \phi_i^{(d)} \ell_i - \sum_{s \in \Lambda} \ell_s \right)^{S_i} W_0,$$

donde  $S_i$  denota el número de veces que salió el resultado  $i$ -ésimo y donde  $\sum_i^m S_i = n$ . Tomando logaritmos y luego el límite de  $n$ , tenemos que

$$G(\underline{\ell}) = \underbrace{\sum_{i=1}^m p_i \log \left( 1 + \phi_i^{(d)} \ell_i - \sum_{s \in \Lambda} \ell_s \right)}_{\mathbb{E}[\log(R(\ell))]}, \quad \text{con prob. 1.}$$

O bien, si definimos a  $\underline{p} \in [0, 1]^m$  como el vector de probabilidades de cada uno de los eventos;  $W = [w_1 | w_2 | \dots | w_m]$  con  $\underline{w}_j = \phi_j^{(d)} \hat{\mathbf{e}}_j$  como la matriz de ganancias, donde particularmente  $W = D_\phi$ ; y notando que  $\sum_{s \in \Lambda} \ell_s = \sum_{i=1}^m \ell_s$  debido a que si  $h \notin \Lambda$  entonces  $\ell_h = 0$ ; la log-tasa de crecimiento se puede escribir matricialmente como

$$G(\underline{\ell}) = \underline{p}' \log \left( \mathbf{1} + W' \underline{\ell} - \sum_{i=1}^m \ell_i \mathbf{1} \right). \quad (3.24)$$

Si suponemos que sólo se apuesta lo que se tiene y que no hay *short selling*, i.e.  $\ell_i \geq 0$ , se puede ver que estas restricciones forman un conjunto convexo, y como la función  $G(\underline{\ell})$  es estrictamente cóncava, entonces el máximo es único (Busseti y col., 2016). Por tanto, el Criterio de Kelly Multivariado  $\underline{\ell}_*$  se encuentra al resolver el problema

$$\max_{\underline{\ell} \geq 0} \left\{ \underline{p}' \log \left( \mathbf{1} + W' \underline{\ell} - \sum_{s=1}^m \ell_s \mathbf{1} \right) \right\} \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^m \ell_i \leq 1.$$

La solución explícita  $\underline{\ell}_*$  está dada por Smoczynski en su artículo (Smoczynski y Tomkins, 2010) encontrada mediante un símil a las Condiciones Necesarias de Primer Orden de Karush-Kuhn-Tucker. Pero cualquier algoritmo de optimización convexa, como Programación Cuadrática Sucesiva, puede resolver sencillamente el problema.

### 3.4.4. Apuestas Multivariadas & Simultaneas

Se acaba de analizar el caso para encontrar la estrategia óptima de una apuesta con múltiples resultados. Pero, si tenemos un conjunto de  $r$  apuestas donde cada una tiene  $m_i$  posibles eventos, ¿cuál debería de ser la estrategia óptima a seguir? Es decir, si la apostadora invierte *simultaneamente* en  $r$  hipódromos, ¿cómo debería de diversificar su riqueza?

El caso de apostar la fracción  $\ell_i$  al evento  $e_i$  según el criterio original puede llevar al caso extremo que  $\sum_k^r \sum_i^{m_k} \ell_{k,i} > 1$  y esto no es posible. La idea de reescalar  $\hat{\ell}_{k,i} = \ell_{k,i} / \sum_k^r \sum_i^{m_k} \ell_{k,i}$  tampoco es lo ideal, pues estaríamos arriesgando todo en ese momento y la probabilidad de ruina se hace positiva.

Sea  $\Omega_k = \{\omega_{k,i} | i = 1, 2, \dots, m_k\}$  el espacio muestral del  $k$ -ésimo hipódromo con  $m_k$  caballos, donde cada átomo muestral es un evento relevante para el apostador, siendo que  $\Omega_k = \mathcal{E}_k$ . Se define el espacio muestral -y por ende el espacio de eventos relevantes- de las apuestas simultaneas de los  $r$  hipódromos como

$$\Omega := \bigtimes_{k=1}^r \bigcup_{i=1}^{m_k} \{\omega_i | \omega_i \in \Omega_k\}.$$

Al tener  $r$  hipódromos *independientes* entre ellos con  $m_i$  posibles resultados *excluyentes*, se sigue que hay  $M = \sum_i^r m_i$  posibles apuestas y  $N = \prod_i^r m_i$  posibles combinaciones de resultados. Solo para dimensionar, en una jornada de grupos de la *Champions League* hay  $3^{16} \approx 43 \times 10^6$  combinaciones: predecir quinielas no es una tarea simple.

Se define el vector de apuestas  $\underline{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_r)' \in \mathbb{R}^M$  como la concatenación de los vectores de apuestas de cada uno de los hipódromos; de manera análoga para el vector de momios decimales y también para el vector de retornos netos. De esta forma, el retorno total de la apuesta simultanea es

$$R(\underline{\omega}; \underline{\ell}) = 1 + \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^{m_k} \varrho_{k,i}(\omega) \ell_{k,i} = 1 + \underline{\ell}' \underline{\varrho}.$$

En la matriz de ganancias  $W = [\underline{w}_1 | \underline{w}_2 | \dots | \underline{w}_N] \in \mathbb{R}^{M \times N}$ , cada una de sus columnas representa la posibilidad  $j$ -ésima de ganancias

$$\underline{w}_j = D_\phi(\hat{\mathbf{e}}_{j_1}, \hat{\mathbf{e}}_{j_2}, \dots, \hat{\mathbf{e}}_{j_r})', \quad j_k \in \underline{\omega}_j, \forall k = 1, 2, \dots, r.$$

Como los resultados de cada hipódromo son independientes, la  $i$ -ésima entrada del vector de probabilidades  $\underline{p} \in \mathbb{R}^N$  está dada por

$$\underline{p}_i = \mathbb{P}[\underline{\varrho}(\omega_i)] = \mathbb{P}\left[\bigcap_k^r \underline{\varrho}_k(\omega_i)\right] = \prod_k^r \mathbb{P}[\underline{\varrho}_k(\omega_i)]. \quad (3.25)$$

Por lo que la función objetivo a maximizar  $G(\underline{\ell})$  sigue estando dada por 3.24. Así que para obtener la estrategia óptima  $\underline{\ell}_*$  bajo el Criterio de Kelly, basta encontrar el vector que resuelva

$$\max_{\underline{\ell} \geq 0} \left\{ \underline{p}' \log \left( \mathbf{1} + W' \underline{\ell} - \sum_{i=1}^M \ell_i \mathbf{1} \right) \right\} \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^M \ell_i \leq 1. \quad (3.26)$$

### 3.4.5. Apuestas Multiperiódicas

Se estudió cómo optimizar la log-tasa de retorno con  $N$  posibles resultados para un conjunto de  $M$  apuestas dentro de un solo periodo. Como lo que nos interesa maximizar es  $G_n$  para el tiempo  $n$ , en realidad se debe maximizar  $G_n$  desde el tiempo 1 hasta el tiempo  $n$ , es decir, maximizar  $\mathbb{E}[\log(W_n/W_0)|W_0, \dots, W_{n-1}]$ .

Hackansson muestra que la función de utilidad logarítmica induce *miopía*, o sea que para maximizar  $\mathbb{E}[G_n|W_0, \dots, W_{n-1}]$  para el tiempo  $n$ , solo nos debemos de preocupar de ese momento, sin importar el futuro ni el pasado (Hakansson y Ziemba, 1995).

Definiendo  $\Delta G_t = G_t - G_{t-1}$ , se observa que

$$\mathbb{E}[G_n|W_0, \dots, W_{n-1}] = \sum_{t=1}^n \mathbb{E}[\Delta G_t|W_0, \dots, W_{t-1}],$$

puesto que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta G_t|W_0, \dots, W_{t-1}] &= \mathbb{E}[\log(W_t)|W_0, \dots, W_{t-1}] \\ &\quad - \mathbb{E}[\log(W_{t-1})|W_0, \dots, W_{t-2}] \\ &= pt \log(1 + \sigma \ell) + (1-p)t \log(1 - \ell) \\ &\quad - p(t-1) \log(1 + \sigma \ell) - (1-p)(t-1) \log(1 - \ell) \\ &= p \log(1 + \sigma \ell) + (1-p) \log(1 - \ell) \\ &= \mathbb{E}[R(\ell)]. \end{aligned}$$

Lo que significa que para maximizar toda la riqueza al tiempo  $t$  dada la riqueza hasta el tiempo  $t-1$ , es equivalente a maximizar solo un periodo.

En este momento, cualquier jugador profesional con perfil de riesgos cuadrático o logarítmico sabe *cómo escoger* las apuestas maximicen su utilidad esperada de un conjunto de apuestas múltiples y simultaneas de forma intertemporal gracias al desarrollo de toda la Teoría de la Utilidad que

se presentó en este capítulo. A continuación se resume la teoría estudiada en los primeros tres capítulos para generar una “receta” que encuentre la apuesta óptima de cualquier jugadora con cierto apetito de riesgo, dada la información disponible.

# Conclusiones Teoría: La Apuesta Óptima

El problema de investigación de la presente tesis es *encontrar las apuestas óptimas de apostador racional, con determinado apetito de riesgo, que maximizan su utilidad esperada, dada la información disponible.*

Esta interrogante, como se vió en el capítulo 1, equivale a resolver un problema de decisión caracterizado por la tupla  $(D, E, C, (\geq))$ , ya que se busca la apuesta óptima  $d_* \in D$  con respecto a las preferencias  $(\geq)$  de la jugadora, cuyas preferencias sobre las apuestas están representadas por la funcional de utilidad esperada  $U$  que generan las consecuencias  $c_{i,j} \in C_i$  al haber ocurrido, con cierta probabilidad, el evento  $e \in E_i$  por elegir  $d_i \in D$ .

## Resumen de la Parte I

El capítulo 1 establece un marco teórico para resolver un problema de decisión y lo caracteriza con la tupla  $(D, E, C, (\geq))$ . También, este capítulo describe los conjuntos  $C_i$  de premios<sup>12</sup> y consecuencias<sup>13</sup> de la apuesta  $d_i$  al ocurrir el evento  $e_{i,j}$  mediante los valores del retorno aleatorio  $R(\underline{\ell})$ . Dando por atendido el estudio de los elementos de los conjuntos  $C$  y  $E$ .

En el capítulo 2 se analizó cómo estimar las probabilidades de cada uno de los eventos relevantes a partir de técnicas de aprendizaje profundo. Dando por atendida la obtención de las probabilidades de los eventos en  $E$  y la estimación de la lotería (distribución de probabilidad) del retorno  $R(\underline{\ell})$  para cualquier selección de  $\underline{\ell}$ .

En el capítulo 3 se estudió que, una vez dadas la probabilidades, tomar

---

<sup>12</sup>Momios.

<sup>13</sup>Perder la fracción apostada de la riqueza  $\ell_i$ .

una decisión  $d \in D$  equivale a escoger una lotería  $L \in \mathcal{L}$ <sup>14</sup>; se analizaron los distintos tipos de adversidades al riesgo y se observó que dichas adversidades están representadas unívocamente<sup>15</sup> por una funcional de utilidad, gracias a la proposición 3.1.1; se vió que las utilidades pueden tomar<sup>16</sup> forma logarítmica o cuadrática dependiendo del apetito de riesgo de la jugadora; y más importante: se demostró que cualquier preferencia *racional* puede ser representada y medida por una funcional de utilidad  $U$  (vNM), gracias al Teorema de Utilidad Esperada. Dando por atendido el estudio de las preferencias ( $\geq$ ) y el conjunto de decisiones  $D$  (el conjunto de loterías  $\mathcal{L}$ ).

## Algoritmo de Apuestas Óptimas

Por la teoría previamente desarrollada en los capítulos anteriores, el problema de decisión del apostador sujeto a las restricciones impuestas por el juego<sup>17</sup> ya puede ser resuelto. A continuación, se presenta una “receta de cocina” para encontrar, paso a paso, la apuesta óptima del jugador.

1. **Definición de conjuntos.** Definir los conjuntos  $D$  (o bien  $\mathcal{L}$ ),  $E$ ,  $C$  y el perfil de riesgos del apostador.
  - a) *Perfil de riesgos.* Establecer el apetito de riesgo del apostador con respecto a su riqueza a partir de una función de utilidad  $u(x)$ . En este trabajo solamente se estudian utilidades logarítmicas o cuadráticas, pero no es una limitante para el algoritmo.
  - b) *Eventos relevantes.* Definir los eventos relevantes a apostar, ya sean eventos de fenómenos binarios, múltiples o simultáneos. Contar el número  $M$  de eventos a apostar y el número  $N$  de posibles combinaciones de dichos eventos.
  - c) *Beneficios y perjuicios.* Obtener los beneficios (momios) del mercado al apostar \$1 al evento  $e$  y que suceda. Fijar la consecuencia de apostar \$1 a dicho evento y que no suceda como la pérdida total de \$1. Es decir  $\rho = \sigma_d \ell - 1$ ,  $\ell \sim \text{bernoulli}(p)$ .

---

<sup>14</sup>Se recuerda al lector que en dicho capítulo se argumentó que el vector de estrategias  $\underline{\ell}$  se puede ver, o bien como la decisión  $d_{\underline{\ell}}$  de apostar  $\ell_i$  al evento  $e_i$  para toda  $i$ ; también, la lotería puede verse como  $F_{R(\underline{\ell})}(x) \equiv L_{R(\underline{\ell})}$  (distribución de probabilidad) del retorno  $R(\underline{\ell})$  en los posibles eventos, inducida por fijar  $\underline{\ell}$ .

<sup>15</sup>Salvo combinaciones lineales.

<sup>16</sup>De forma enunciativa mas no limitativa.

<sup>17</sup>En el presente trabajo no se permite al jugador apostar más del 100 % de la riqueza que tiene disponible y que no existe *short selling* en el mercado. Es decir,  $0 \leq \ell_i \leq 1, \forall i$  y  $\sum_i \ell_i \leq 1$ .

- d) *Decisiones y restricciones.* Definir las restricciones del vector de estrategias  $\underline{\ell}$  de acuerdo al juego, y, con base en ellas, delimitar el conjunto de decisiones (loterías).

En el caso de la presente tesis se tiene que el conjunto de restricciones de las apuestas es

$$\mathbb{L} = \left\{ \underline{\ell} \mid \underline{\ell} \in [0, 1]^M, \sum_{i=1}^M \ell_i \leq 1 \right\}.$$

Por ende,

$$D = \{d_{\underline{\ell}} \mid \underline{\ell} \in \mathbb{L}\}, \text{ o bien } \mathcal{L} = \{F_{R(\underline{\ell})} \mid \underline{\ell} \in \mathbb{L}, F_{R(\underline{\ell})} \text{ sea dist. de } R(\underline{\ell})\}.$$

2. **Estimación de probabilidades.** Estimar las probabilidades de *todos* los eventos relevantes de la siguiente manera:

- a) *Información histórica.* Recolectar información histórica tanto de los eventos como también de las covariables que posiblemente estén correlacionadas con dichos eventos.
- b) *Técnicas estadísticas.* Usar técnicas estadísticas para *predecir* la probabilidad de los eventos condicionada a la información disponible. En el presente trabajo se utilizan redes neuronales, sin embargo puede usarse cualquier otro método de estimación estadístico.

3. **Encontrar la estrategia óptima  $\underline{\ell}_*$ .** Con base en la función de utilidad del jugador, encontrar el vector  $\underline{\ell} \in \mathbb{L}$  tal que

$$d_* = \arg \max_{d_{\underline{\ell}} \in D} \{E[u(R(\underline{\ell}))]\}, \text{ o bien } L^* = \arg \max_{L_{R(\underline{\ell})} \in \mathcal{L}} \{U(L_{R(\underline{\ell})})\}.$$

Se recomienda el uso de optimizadores numéricos para encontrar explícitamente el vector  $\underline{\ell}_* \in \mathbb{L}$ . En el presente trabajo, como el conjunto de restricciones es un conjunto convexo y la función también es convexa, se usa el método de Programación Cuadrática Sucesiva. No obstante, el analista debe usar el método de optimización numérica que se adecúe a sus necesidades particulares.

4. **Apostar.** Apostar la fracción  $\ell_i^*$  del capital al evento correspondiente para toda  $i = 1, 2, \dots, M$ . Asegurarse que, efectivamente, en todo momento  $\underline{\ell}_* \in \mathbb{L}$ .

5. **Validación del modelo.** Definir un conjunto de métricas del desempeño de los portafolios de apuestas para monitorear las ganancias y pérdidas de la riqueza en cada momento. En caso de encontrar un pobre desempeño de los portafolios, ajustar la estimación de las probabilidades o definir nuevas restricciones en las apuestas.

Es momento de poner en práctica el modelo desarrollado. Para ejemplificarlo, se usan los partidos de la *English Premier League*, jornada a jornada, de la segunda parte de la temporada 2020/2021, con los momios ofrecidos por seis casas de apuestas.



# Parte II

# Práctica

## Capítulo 4

# Los Datos

El objetivo de la presente tesis es generar un método para que la jugadora apueste de manera óptima en juegos con incertidumbre, dado su perfil de riesgos y la información disponible. En este texto, el método será ejemplificado en la Premier League Inglesa.

La definición de optimalidad, como se vio en el capítulo pasado, reside en el valor moral que el jugador le da al dinero, buscando maximizar la utilidad de la apuesta y no tanto su retorno monetario.

Para poder aplicar el método desarrollado, hay que obtener tanto la probabilidad real de los eventos como las recompensas de cada uno de estos (los momios ofrecidos por las casas de apuestas). Una vez obtenido lo anterior, escoger la lotería óptima  $L^*$  para la jugadora será tarea simple gracias a los modelos desarrollados anteriormente.

El problema de obtener los momios ofrecidos por las casas de apuestas es sencillo de resolver, basta con obtener la información de sus respectivas páginas web. Solucionar el problema de obtener las probabilidades reales de los eventos, imposible. Sin embargo, esta última incógnita se puede sustituir por un ejercicio más simple: estimar las probabilidades reales. Para llevar a cabo esto, se necesitan covariables que aporten información del fenómeno, esto, para poder estimar las probabilidades de los eventos con las técnicas de aprendizaje profundo vistas anteriormente.

## 4.1. *English Premier League*

La Premier League Inglesa (EPL) es la liga de fútbol más importante del Reino Unido, y muy probablemente del mundo. La historia de esta liga data desde 1992, cuando los 22 equipos de la primera división de Inglaterra renunciaron a esta y se juntaron para formar la EPL, inaugurándola el sábado 15 de agosto de ese mismo año<sup>1</sup>. De esos 22 vestuarios, 6 de ellos siempre han estado presente en la liga: Arsenal, Chelsea, Liverpool, Manchester City y el Manchester United. A estos seis, se les conoce como el *big six*.

Actualmente, la EPL consta de 20 equipos distintos por temporada. En la liga todos se enfrentan, tanto como de locales como de visitantes. Por lo que un equipo juega contra los otros 19 equipos dos veces, haciendo que la competencia conste de 38 jornadas. Es de mencionar que, en cada jornada se juegan 10 partidos.

El objetivo principal consiste en ganar la liga. Cada partido ganado, empatado o perdido suma al equipo un puntaje de 3, 1 y 0 puntos, respectivamente; el equipo que tenga más puntos al final de la temporada, gana<sup>2</sup>. Los primeros cuatro lugares tienen pase directo a la UEFA Champions League, el torneo de fútbol más importante en Europa, por lo que son muy competidos estos cuatro puestos. Por otro lado, los últimos tres lugares descienden de la EPL a la segunda división de Inglaterra y son sustituidos por los primeros tres equipos de esta última, por tanto, todo equipo busca no estar en esos lugares.

Desde entonces, esta liga ha sido el ejemplo para las demás del mundo. Incluso, ha sido el pilar para el desarrollo de la liga de fútbol americano de Estados Unidos («English Premier League Origins», 2021). Como aficionado, esta liga ofrece la mayor competitividad<sup>3</sup> de las cinco ligas principales de Europa. Por esto, el análisis de la EPL es de particular interés para el autor: alta incertidumbre y gran cantidad de información.

---

<sup>1</sup>Es por ello que las temporadas de la EPL inician en agosto.

<sup>2</sup>En caso de empate, el siguiente criterio de desempate es la diferencia de goles anotados contra los recibidos, pero si también este criterio estuviera empatado, por último se toma en cuenta el equipo que más goles haya anotado.

<sup>3</sup>Y por lo tanto, la de menor sesgo por temas de fraudes.

## 4.2. Obtención de Datos

Un buen modelo requiere bastantes y confiables datos, sin ellos es como conducir un *Ferrari* con aceite como combustible. Por lo mismo, la información buena es escasa y privada. El autor contactó a oddscraft, statsbomb, wyscout y muchos más *vendors* de información deportiva, pero todos los intentos llevaron al mismo resultado: bases de datos con un costo arriba de los \$2,000 dólares para ciertas temporadas de la EPL. No fue opción para el autor. Por esto mismo se atacó el problema con datos un poco más heterodoxos a los usados en los estudios previos de la EPL.

Los datos fueron recolectados de tres principales fuentes enlistadas a continuación.

- **Videojuego FIFA de EA Sports.** Son datos públicos, desde el 2007, para los equipos del videojuego y se encuentran en la página web SoFIFA. Semanalmente, describen la calidad de los equipos a través de estadísticas generales de los equipos. Por ejemplo, el ataque, media y defensa de los mismos.
- **Understats:** Datos de los partidos de las principales ligas del fútbol europeo. Tienen estadísticas más especializadas a las descriptivas, por ejemplo los goles esperados<sup>4</sup>.
- **Football Data U.K.** La página pública de momios de fútbol europeo más grande del internet. Monetiza a partir de la publicidad de las casas de apuestas, y, al tener contacto con ellas, le proporcionan de manera directa los momios ofrecidos para cada partido. Por lo que la información puede considerarse veraz. En el caso de la EPL, son seis casas de apuestas las que le otorgan información: Bet365, Bwin, Interwetten, Pinnacle Sports, Victor Chandler y William Hill.

Una vez encontrada la información requerida, el siguiente paso es recopilarla de la web. Al ser datos no estructurados, el armado de estas tres bases se hizo a partir de técnicas computacionales conocidas como *web scraping*<sup>5</sup> en el lenguaje de programación *python* usando principalmente la librería *BeautifulSoup*. Los códigos usados son `webscrap_sofifa`,

---

<sup>4</sup>La esperanza de un gol es la probabilidad de que un tiro termine en gol, y por ende, los goles esperados son la suma de cada tiro de gol en el juego. Esta probabilidad es estimada por el *vendor* y la técnica usada para dicha estimación es particular del distribuidor de información

<sup>5</sup>El autor se aseguró en no infringir la privacidad de los datos ofrecidos por estas páginas web.

`webscrap_understat` y `webdownload_footballuk` del repositorio de la presente tesis.

## 4.3. Síntesis de la Información Recopilada

A continuación se muestra una breve síntesis de los datos recopilados de las tres fuentes de información mencionadas anteriormente. Se recomienda consultar el Anexo y el folder `eda` del repositorio del presente trabajo para mayor información.

Se obtuvo información desde la temporada 2014/2015 hasta la temporada 2020/2021. De las 7 temporadas recolectadas, se observaron 2,660 partidos.

La frecuencia de los resultados observados de los partidos es del 44 % para victorias locales, 24 % para empates y del 32 % para las victorias visitantes. Es importante mencionar que la distribución de los resultados no es igual temporada a temporada, ver tabla C.1, pues incluso los papeles se voltean en la temporada 2020/2021, en parte, gracias a la ausencia de espectadores por la contingencia sanitaria Covid-19 (Madrigal Pérez, 2021).

### 4.3.1. Mercado de Apuestas

Del mercado de momios considerado, la casa de apuestas Pinnacle Sports, según su científico de datos Joseph Buchdahl, calcula sus momios de acuerdo a las creencias de la masa apostadora, siendo dichos valores un reflejo de las creencias de la población apostadora. Se analizaron sus momios finales<sup>6</sup> y se encontró lo siguiente.

- Sesgo en empates. La población tiende a subestimar la probabilidad que un empate suceda. De esta forma, en ningún momento la probabilidad subjetiva  $\left(\hat{p} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_d^{-1}/(1+tt)\right)$  del empate es mayor a la de los otros dos eventos. Ver figura C.1.
- Mismas creencias la mitad de las veces para la victoria local y el empate, pero diferentes para el caso de la victoria visitantes. Se realizó una prueba de hipótesis no paramétrica para la mediana de las distribuciones de los momios entre temporadas a una significancia del 5 %. Para mayor detalle, ver Anexos.

---

<sup>6</sup>El último momio antes de que iniciase el partido. Para las demás casas de apuestas se considera el momio publicado, aproximadamente, una semana antes de llevarse a cabo el encuentro. Para mayor detalle, consultar los Anexos.

- Mayor variabilidad para los *underdogs*. La creencia de la población varía más en el tiempo cuando hay un claro favorito. Ver gráfica C.2.

Con respecto al mercado, lógicamente, se consideró el momio más alto ofertado. Haciendo un análisis de precios, se observó que:

- La comisión de las distintas casas de apuestas regresa a la media a lo largo del tiempo. Ver gráfica C.3.
- Ineficiencia de mercados. Existió un momento donde en 111 partidos de los 380 disputados en una temporada tenían arbitraje. Aunque progresivamente se ha ido perdiendo dicha ineficiencia, al punto que en las dos últimas temporadas solo han habido 5 partidos con arbitraje. Ver figura C.4.
- Comisión basada en creencias. Se encontró que en las últimas tres temporadas, Pinnacle Sports usa técnicas de economía conductual para calcular su comisión. Es decir, cobra una mayor comisión cuando hay un claro favorito. Ver figura C.5.

### 4.3.2. Estadísticas de los Equipos

Las creencias, a pesar de ser una buena medida de la verosimilitud de las ocurrencias de los posibles resultados, no es la única fuente de información. Por lo que una apostadora profesional también debe analizar las características y desempeño histórico de los equipos a la hora de predecir los eventos de un encuentro.

#### Desempeño

En pocas palabras, el equipo que anote más goles gana. Así de simple. No obstante, el marcador final de un encuentro no necesariamente refleja el desempeño de los equipos en el partido en cuestión. Por ejemplo, el enfrentamiento del Tottenham contra Fullham disputado el 13 de enero de 2021, cuyo resultado final fue un doloroso empate a 1 gol. Sin embargo, fue una de las tres mejores actuaciones de los Spurs en dicha temporada.

Para subsanar la pérdida de información de los marcadores, en la práctica se usan los *expected goals* (xG). La definición de un gol esperado es simplemente la probabilidad de que un tiro termine en gol, por lo que los xG son la suma de dichas probabilidades en todo el partido, obteniendo un símil de cómo debería haber terminado dicho encuentro.

Además, existen los *non penalty expected goals* (npxG), los cuales quitan los *outliers* (penales), mostrando de forma aún más realista el desempeño de los equipos. Pero incluso una métrica aún mejor para el autor: los *non penalty expected goals difference* (npxGD). Son el diferencial entre los npxG del equipo en cuestión y del rival. Cuando el valor es positivo, se esperaba que dicho equipo quedara ganador; en el caso de un valor negativo, se esperaba una derrota. Ver gráfica C.6.

Pero para tener un resumen preciso a lo largo del tiempo de este desempeño, es sensato pensar que los datos más recientes tienen más importancia que los más antiguos. Ejemplo: los npxGD de un partido de hace 4 años para un equipo no son más informativos que los npxGD del partido de hace 1 semana. Ver gráfica C.9. Teniendo esto presente, se usó Máxima Verosimilitud Ponderada para estimar la media y varianza, con un factor de decaimiento exponencial<sup>7</sup>, de los npxGD para un equipo en cada jornada (Dixon y Coles, 1997).

$$\text{i.e. } \bar{X}_\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \quad \text{y} \quad s_\lambda^2 = \left( \frac{1}{1 - \sum_k \lambda_k^2} \right) \sum_{j=1}^n \lambda_j (X_j - \bar{X}_\lambda)^2,$$

donde  $\lambda_j := e^{-\xi t_j} / \sum_k e^{-\xi t_k}$  para todo tiempo  $t_j$  y con  $\xi > 0$ .

Se observó que en los inicios de temporadas son los más variables, por lo que a dichas jornadas se les dará un tratamiento especial. De igual forma, se notó cierta mejora en los npxGD para el Aston Villa antes de descender en la temporada 2015/2016 y después de volver a ascender en la temporada 2019/2020 (al parecer el Covid-19 los ayudó). Consultar gráfica C.10.

## Características

Dicen que es de listos usar lo que los inteligentes construyen. Por eso, un apostador debe también considerar la opinión de los expertos. En nuestro caso, los expertos son los analistas de fútbol del videojuego FIFA de EA Sports. Dichos analistas, semana tras semana, otorgan una calificación para el ataque, la media, la defensa y una general, por equipo.

Por otro lado, se analizó el presupuesto por equipo en el mercado de transferencias año con año, encontrando que los equipos de la ciudad de Manchester son los que mayor presupuesto han tenido históricamente. No se establece que el gasto sea causal de la mejora de un equipo, pero claramente hay una relación, al menos para el Manchester City. Pero dicha relación no lo

---

<sup>7</sup>Se invita enérgicamente al lector a consultar la sección 11.8 de los Anexos, esto con el fin de mostrar el cómo y por qué de estas estadísticas.

explica todo, pues en la temporada 2015/2016 el Leicester City quedó campeón de la liga, y eso que su presupuesto estuvo debajo de la media.

## 4.4. Datos Finales

Los anteriores resúmenes muestran la capacidad de algunas de las variables obtenidas para *aproximar* la probabilidad de los resultados.

La selección de variables para la predicción de lo eventos, es una pieza fundamental para el desempeño. Se tomarán en consideración únicamente las variables que tengan calidad, veracidad, información e intuición; en el Anexo se describe con mucho mayor detalle el racional detrás para escoger, transformar, o desechar, cada una de las variables obtenidas previamente.

En segundo lugar, se consideran las mejores ofertas del mercado y con base en ellas tomar la mejor posición para el apostador. Este análisis, un buen modelo financiero de apuestas debe explotar.

En la siguiente parte se desarrolla el modelo de estimación de probabilidades para cada evento de cada partido de la EPL, desde la temporada 2014/2015 hasta la temporada 2020/2021. Se hace uso de la intuición generada en este capítulo, con la finalidad de considerar las variables más lógicas en el modelo de predicción.



## Capítulo 5

# Modelo de Aprendizaje Profundo de Probabilidades

El presente capítulo tiene como objetivo mostrar la metodología, desarrollo y evaluación de un modelo de aprendizaje profundo para la estimación de las probabilidades de los tres posibles resultados para cada partido de la English Premier League, desde la temporada 2014/2015 hasta la temporada 2020/2021.

La base de prueba, tanto para el modelo de predicción como el modelo financiero, será la segunda parte de la temporada 2020/2021. Es decir, de la jornada 19 a la jornada 38, lo cual resultan en 20 semanas de prueba.

### 5.1. Metodología

A continuación se enumeran los pasos usados para la construcción del modelo de aprendizaje profundo de probabilidades.

1. **Consideraciones generales.** La construcción de la base de datos final se hizo en el paquete estadístico *R*. Los códigos usados para la limpieza, transformación y selección de variables están en el folder **wrangling** del repositorio de la presente tesis.

Los modelos de aprendizaje profundo se realizaron en *python* con la API de *Keras* en *Tensorflow 2* y la librería *SciKit Learn*. Se fija una semilla para hacer reproducibles los resultados. Todos los resultados se encuentran disponibles en el *script* `deeplearning_epl_models` en el repositorio de esta tesis.

2. **Preparación de la base de datos final.** Se consideran únicamente las variables mencionadas en el Anexo. Se elimina la primer jornada de cada temporada debido a que los equipos recién ascendidos carecen de información y es cuando hay mayor varianza en los resultados (Buchdahl, 2016). Se reescalan las variables para que sea más sencillo numéricamente el entrenar las redes neuronales. En el Anexo se describen las transformaciones usadas.
3. **Selección de variables.** De las 30 variables consideradas, se analizan cuales tienen poder predictivo<sup>1</sup> a partir de una red neuronal monocapa -una regresión multinomial- con penalización lasso. La mejor penalización  $\lambda$  se encuentra vía validación cruzada temporal simple (STCV). Posteriormente, se revisa si los valores y magnitudes de los coeficientes “hacen sentido”, y se seleccionan aquellas variables que cumplan con este criterio.
4. **Selección de modelo.** Después de la selección de variables, se consideran diferentes tipos de regularizaciones de redes neuronales. Para cada una de estas regularizaciones, se busca el mejor <sup>2</sup> conjunto de hiperparámetros usando el módulo *Keras Tuner* (O’Malley y col., 2019) para solventar la tarea. Seguidamente, se contrastan los mejores modelos para cada tipo de penalización en el conjunto de prueba, vía STCV, y se selecciona el mejor.
5. **Evaluación del modelo.** Finalmente, se evalúa el desempeño del mejor modelo y se contrasta su precisión con respecto a los momios finales de *Pinnacle Sports*<sup>3</sup> y contra un modelo nulo -escoger siempre la categoría más frecuente. Igualmente, se compara la pérdida de información con los momios mencionados y con las frecuencias históricas de las clases.

---

<sup>1</sup>Nótese que el objetivo es *predecir* y no *inferir*, por lo que no se fija en la significancia estadística *in the sample* si no el poder predictivo del modelo *out of the sample*.

<sup>2</sup>El objetivo es reducir la *pérdida de información*. En otras palabras, disminuir la Divergencia Kullback-Leibler o equivalentemente la Entropía Cruzada.

<sup>3</sup>Se contrasta contra la “sabiduría” de las masas (Surowiecki, 2005).

# STCV	Temporada 14-15 / J2				...	Temporada 20-21 / J2				Temporada 20-21 / J3				...	Temporada 20-21 / J18			
	G1	G2	...	G10		G1	G2	...	G10	G1	G2	...	G10		G1	G2	...	G10
CV 1					...									...				
CV 2					...									...				
...					...									...				
CV 17					...									...				

Figura 5.1. Visualización de la validación cruzada temporal simple (STCV) para el conjunto de entrenamiento y validación. Las celdas grises son el conjunto de entrenamiento mientras que las celdas negras representan el conjunto de validación para la evaluación número CV  $k$ .

## 5.2. Selección de Variables

En los modelos de inferencia estadística clásica es igual o incluso más importante la significancia estadística de los parámetros y su sagacidad que el poder predictivo del mismo. Por el contrario, en *Machine Learning* la importancia es al revés.

Si bien es cierto que el objetivo es predecir mas que inferir, el autor considera que al menos se debe ganar intuición del ajuste del modelo de aprendizaje profundo. Por lo mismo, esta sección está dedicada a comprender el aporte informativo de las variables en cuanto a la predicción de un resultado de un partido de fútbol de la EPL.

Para comprender el aporte predictivo de las 30 variables consideradas se entrenó una red neuronal monocapa con penalizaciones crecientes lasso, buscando la penalización  $\lambda_*$  que maximizara la precisión del modelo<sup>4</sup> en un STCV con 17 particiones<sup>5</sup>, donde cada una de estas particiones contiene 10 observaciones<sup>6</sup>.

Una vez obtenida  $\lambda_*$ , se analizó cualitativamente el valor y magnitud de cada coeficiente con respecto a los eventos a predecir. Posteriormente se acotó el número de variables y se volvió a correr el análisis previo para asegurarse que este subconjunto fuera intuitivo y a la vez predictivo.

A pesar de numerosos análisis y subconjuntos probados, ninguno resultó intuitivo ni predictivo simultáneamente. De hecho, el modelo completo obtuvo una precisión del 51.76% y pérdida de 1.22 en el conjunto de validación, mientras que el modelo acotado solamente 41.76% y 1.34. Por lo mismo, se decidió dejar *todas las variables* para los modelos de aprendizaje profundo.

<sup>4</sup>Aunque el objetivo *final* es disminuir la pérdida de información, se usa como pivote la precisión.

<sup>5</sup>El número de jornadas en el conjunto de validación son 17, las cuales van de la jornada 2 a la jornada 18 de la temporada 2020-2021.

<sup>6</sup>Se recuerda que en cada jornada de la EPL se disputan 10 partidos.

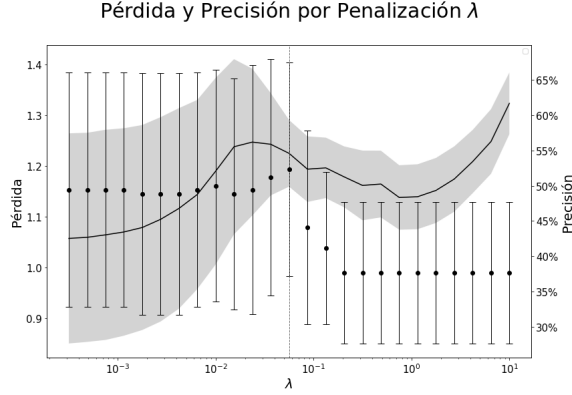


Figura 5.2. Gráfica de la pérdida y precisión para una RNA monocapa conforme aumenta la penalización lasso. Las medidas de localización y dispersión del error se encuentran vía STCV en el conjunto de validación.

### 5.3. Selección de Modelos

Recapitulando: hay 6 temporadas en el conjunto de entrenamiento, por lo que hay  $6 \times 37 \times 10 = 2,220$  datos; si se entrena una red neuronal con una sola capa profunda con la misma cantidad de neuronas que variables habría  $30 \times 30 \times 3 = 2,700$  parámetros a entrenar. ¡Hay más variables que observaciones! Por lo que la optimización tendrá una infinidad de soluciones. Por ende, es menester regularizar los coeficientes de forma que solo exista una solución dada la regularización.

En el presente trabajo se proponen 5 tipos de regularizaciones: *elastic net*, *lasso*, *ridge*, *drop out* y *batch normalization*.

Por otro lado, existen infinidad de combinaciones entre arquitecturas, funciones de activación, número de capas, número de neuronas por capa, tasa de aprendizaje, etc, para construir un solo modelo de aprendizaje profundo dado los datos. Es un problema exhaustivo que posiblemente sea imposible computacionalmente, pero necesario llevarlo a cabo, o al menos parcialmente.

Una manera de poder atacar el problema podría ser mediante técnicas clásicas como *Backward Elimination* o *Forward Selection*, sin embargo estas técnicas son muy costosas computacionalmente. Por lo mismo, las técnicas actualmente usadas para resolver -o al menos aproximar- estos problemas son basadas en búsquedas aleatorias de dichos hiperparámetros; algunas de estas técnicas son *Random Hyperparameter Search*, *Bayesian Hyperparameter*

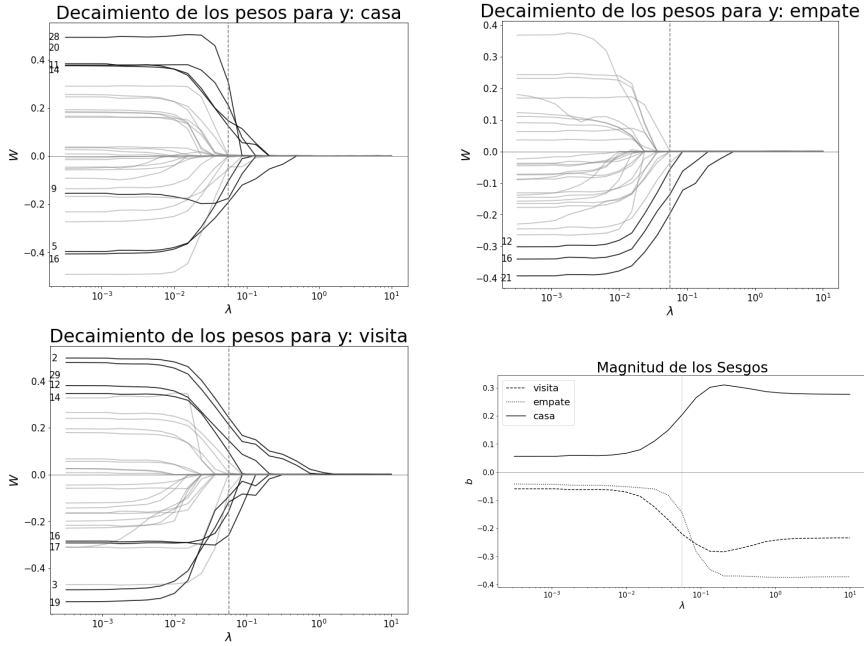


Figura 5.3. Gráficas del decaimiento de los pesos  $W$  y sesgos  $b$  para distintas penalizaciones lasso. Los coeficientes en negritas son aquellos que están a más de una desviación estándar de los valores absolutos de estos mismos; lo números asociados son las variables enumeradas en el Anexo.

*Optimization*, *Hyperband*, entre otras.

Para poder comparar las 5 regularizaciones propuestas, se buscó la mejor combinación de hiperparámetros para cada una de estas y posteriormente evaluarlas en el conjunto de prueba.

### 5.3.1. Optimización Hiperparamétrica

Se fijó el siguiente conjunto de hiperparámetros para todas las regularizaciones: arquitectura tentativa de embudo (de mayor a menor número de neuronas conforme aumentan las capas ocultas), semilla aleatoria, inicializador de kernel (HeNormal para capas ocultas y GlorotNormal para la capa de salida (Géron, 2019)), número de capas ocultas (tres, salvo para *batch normalization* en cuyo caso fue un hiperparámetro) y el algoritmo de

aprendizaje (NADAM)<sup>7</sup>.

Para la selección de los hiperparámetros, se utilizó una búsqueda aleatoria *randomsearch* con el módulo *Keras Tuner* (O'Malley y col., 2019). Para determinar el número de neuronas, en el espacio de la primera capa se buscó un total de neuronas entre el 70 % y el 200 % de la cantidad de variables; para las posteriores capas, se le indica al algoritmo iniciar la búsqueda con el número de neuronas de la capa anterior. La tasa de aprendizaje es buscada en una lista de 3 elementos:  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$ . Por último, para los parámetros del tamaño de penalización y convexidad, estos se muestrean de una distribución uniforme. Para un detalle profundo de las búsquedas, se recomienda a la lectora indagar en el script `deeplearning-epl_models`.

El resumen de las mejores arquitecturas para el conjunto de validación, se presenta en el cuadro a continuación.

Métrica \ Modelo	Elastic Net	Lasso	Ridge	Drop Out	Batch Norm
Entropía Cruzada	1.02	1.03	1.01	0.99	1.02
Núm. Capas	3	3	3	3	9
Núm. Neuronas	37, 25, 21	25, 21, 25	37, 33, 33	25, 41, 37	****
Tasa Aprendizaje	0.01	0.01	0.01	0.001	0.01
Penalización*	9, 8, 1, 3	1, 5, 0.6, 5	6, 8, 2, 0.1	-	-
Convexidad**	12, 3, 33, 23	-	-	-	-
Tasa Dropout***	-	-	-	1122, 2.5, 0.55	-

Cuadro 5.1. Se muestran los hiperparámetros óptimos para las distintas regularizaciones consideradas. \*Medido en decimales. \*\*Medido en centecimales. \*\*\*Medido en milésimales. \*\*\*\*33,33,37,37,37,37,49,45,97.

### 5.3.2. Mejor Modelo

Posterior al hallazgo del mejor conjunto de hiperparámetros para las cinco regularizaciones propuestas, se entrenan los respectivos mejores modelos en los conjuntos de entrenamiento y validación para que, finalmente, compitan en el conjunto de prueba -en un STCV- y se seleccione el mejor modelo entre todos.

El autor consideró que el modelo *Drop Out* es el que *consistentemente* vence a los demás modelos; aunque no es el mejor modelo tanto para pérdida como precisión, su variación es mucho menor que los demás modelos. Ver tabla 5.2.

<sup>7</sup>*Nesterov Adaptive Moment Estimation* (Kingma y Ba, 2017). Para más información, consultar An overview of gradient descent optimization algorithms de Sebastian Ruder).

Modelo	Pérdida	Precisión
<b>Elastic Net</b>	$1.0288 \pm 0.1241$	$58 \% \pm 16.91 \%$
<b>Lasso</b>	$1.0405 \pm 0.1234$	$55 \% \pm 16.88 \%$
<b>Ridge</b>	$1.0185 \pm 0.1273$	$57 \% \pm 19 \%$
<b>Drop Out</b>	$0.9819 \pm 0.0996$	$55 \% \pm 11.61 \%$
<b>Batch Norm</b>	$0.9386 \pm 0.1569$	$57 \% \pm 17.64 \%$

Cuadro 5.2. Se muestra el promedio de las métricas más/menos una desviación estándar muestral en el conjunto de prueba por medio de un STCV.

## 5.4. Resultados Predictivos

Una vez seleccionado el mejor modelo entre todos con la información disponible, se entrenó únicamente dicho modelo en el conjunto de entrenamiento, ya que el conjunto de validación será usado en los modelos financieros.

Al generar las predicciones finales para el periodo de prueba y compararlas contra los *books* finales de Pinnacle Sports -una aproximación a la sabiduría de las masas- se encontró lo siguiente:

Pinnacle Sports		Pronóstico			
Drop Out		Casa	Empate	Visita	Total
Observado	Casa	60\55	0	16\21	76
	Empate	17\15	0	23\25	40
	Visita	36\36	0	48\48	84
	Total	113\106	0\0	87\94	200

Cuadro 5.3. Matriz de confusión entre los modelos y la realidad. La parte inferior de la tabla representa las predicciones de los modelos, mientras que la última columna representa lo observado. Los elementos en la parte izquierda de las diagonales pertenecen al modelo Drop Out, mientras que del lado derecho a los momios de Pinnacle Sports.

En el conjunto de prueba, el modelo creado tiene una precisión del 54 %, mientras que la masa sabia obtiene una precisión del 51.5 %. ¡Un total de 385 puntos base menos que nuestras predicciones! Los modelos nulos de “apostar siempre a la casa, empate o visita”, tienen una precisión del 38 %, 20 % y 42 %, respectivamente.

Sin embargo, la pérdida del modelo es de 1.0318, a diferencia de los momios finales de Pinnacle Sports, con solo 0.9966 de pérdida. Notar que, aunque nuestro modelo tiene una mejor predicción de los resultados, la casa de apuestas Pinnacle Sports tiende a estimar mejor las probabilidades.

Como punto de referencia para ambos modelos, la entropía intrínseca del conjunto de prueba es de 1.0539; la entropía cruzada entre la base de evaluación y las frecuencias históricas hasta antes de la jornada 19 de la

temporada 20/21 es de 1.0631, ver cuadro C.1. Por lo que nuestro modelo efectivamente aprende de los datos, aunque no al mismo nivel que la población apostadora.

Hay varios puntos a tener en cuenta. *Primo*, es bastante complicado para el modelo como para la población predecir empates, aunque en términos frecuentistas tampoco son tan poco probables puesto que 1 de cada 5 partidos termina en empate.

*Secondo*, consistentemente vencer a la casa de apuestas, aun teniendo su información de forma *a priori*, es casi imposible con los datos usados. La masa apostadora es sabia (Surowiecki, 2005).

*Terzo*, el Covid-19 distorcionó la ventaja de la casa que se ha observado históricamente, por lo que es aún más complicado predecir con exactitud el resultado (Madriral Pérez, 2021).

*Quattro*, la entropía del conjunto de prueba, 1.0539, es bastante alta, ya que la entropía máxima para un fenómeno con 3 posibilidades, por la resultado 2.2, es de  $-\sum_{j=1}^3 1/3 \log(1/3) = 1.0986$ .

*Quinto*, son demasiados los factores que no se pudieron tomar en cuenta, por lo que los modelos estarán sesgados a la información disponible (WYSIATI). Por ejemplo, no se analizan a detalle a los jugadores, la temperatura, la hora, la cantidad de aficionados presentes en el partido, número de lesionados en el equipo, entre muchos otros factores desconocidos por el autor, e incluso por expertos.

Sin mayor preámbulo, con las probabilidades estimadas por el modelo Drop Out y dada la información disponible, se construyen a continuación los modelos óptimos financieros.



## Capítulo 6

# Modelo Financiero para Apuestas de la EPL

Se recuerda que el fin último de toda apuesta es ganar. Siempre. No obstante, para ganar hay que arriesgar. ¿Qué? La riqueza. ¿De qué forma? De acuerdo, racionalmente, con los premios y consecuencias ofrecidos. ¿Dónde? En los eventos favorables que *estime* el individuo con la información obtenida. ¿Cuánto? Depende del perfil de riesgo del apostador -la utilidad que le da al dinero dada su riqueza- y la ventaja encontrada en las apuestas.

En este último capítulo se ponen a prueba todos los análisis, consideraciones, estimaciones, modelos y supuestos para obtener las apuestas óptimas de un jugador con utilidad cuadrática o logarítmica para la segunda parte de la temporada 20/21 de la *English Premier League*.

### 6.1. Precedentes

Se le recuerda al lector que los modelos a continuación usan como insumo las probabilidades estimadas anteriormente mediante el modelo de aprendizaje profundo. También se vuelve a mencionar que, al ser el mercado de apuestas un mercado no eficiente, se toman los mejores momios ofrecidos para cada resultado de distintas casas de apuestas para reducir el *tracktake* cobrado y en el mejor de los casos explotar arbitraje. Se vuelve a recapitular que se apuesta sobre la base de prueba, es decir de la jornada 19 a la 38 de la temporada 20/21 de la *English Premier League*.

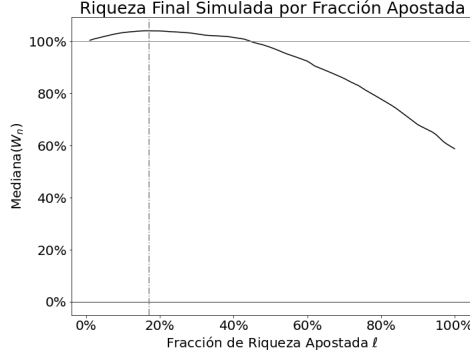


Figura 6.1. Gráfica de la curva de la mediana de la riqueza final obtenida por simulaciones Dirichlet(1) en el conjunto de validación. La fracción óptima en este conjunto es del 17 % de la riqueza.

Como se estudió que es mejor subapostar que sobreapostar en una apuesta favorable para evitar un log-crecimiento negativo, gracias al teorema 3.4.2 (Crecimiento de Capital por Tipo de Estrategia), también se consideraran fracciones fijas de las estrategias sugeridas por los modelos financieros<sup>1</sup>.

Además, aunque se supuso que el dinero es infinitamente divisible y que no existe un monto mínimo para entrar, se apostará únicamente a las posiciones que estipulen al menos el 0.01 % de la riqueza, esto para subsanar posibles errores numéricos por los algoritmos de optimización.

En último término, se recuerda que los modelos usados *suponen* que se conocen las probabilidades de los resultados; como se mencionó al principio del párrafo, las probabilidades son *estimadas* a partir de la información disponible, por lo que la optimalidad de los portafolios recae completamente en la verosimilitud de las probabilidades aproximadas por el modelo estadístico.

## 6.2. Optimización de Estrategias

Se contemplan 2 tipos de estrategias:

1. **Completas.** No existe restricción alguna en el número de apuestas por partido. Por ejemplo, se puede apostar  $\pi_1$  al empate y  $\pi_2$  a la victoria local.

---

<sup>1</sup>Thomas Kirschenmann comentó al autor que en la práctica se usa aproximadamente 1/4 de la estrategia completa de Kelly. Depende del apetito de riesgo de la apostadora.

2. **Restringidas.** Se restringen el número de apuestas por partido a un solo evento.

Se reitera que en ningún momento se puede apostar más del 100 % de la riqueza, que las ganancias o pérdidas se reinvierten jornada a jornada, que no existe *short selling* y que el *risk free asset*  $R_f$  es igual a 0<sup>2</sup>.

### 6.2.1. Estrategias Completas

Recordemos: hay 20 jornadas de prueba, en cada jornada hay 10 partidos, existen 3 resultados posibles por partido y los resultados de un partido son independientes del resultados de los demás partidos. Por lo dicho, existen  $M = \sum_i^r m_i \stackrel{\text{def}}{=} 3 \times 10 = 30$  posibles apuestas,  $N = \prod_i^r m_i \stackrel{\text{def}}{=} 3^{10} = 59,049$  combinaciones de resultados por jornada.

A continuación se muestran algunas métricas por modelo, sin embargo, si el lector desea conocer con detalle las estadísticas de cada modelo para cada jornada, puede encontrarlas en el código `Financial_Models.ipynb` en el repositorio del presente trabajo.

### Utilidad Logarítmica - Criterio de Kelly

Al suponer un individuo con adversidad al riesgo logarítmica, dada la información, el Criterio de Kelly es aquél que debe optimizarse.

Como se estudió, el problema de optimización 3.24 es un problema convexo y puede resolverse con Programación Cuadrática Sucesiva (PCS). Para este modelo se utilizó el algoritmo numérico PCS mediante la función `minimize(method="SLSQP")` del paquete *scipy* del lenguaje *python*. Se optimizaron los portafolios tanto para el método completo como el método fraccional, tardándose en promedio 20.9 segundos. Es importante mencionar que el algoritmo no converge únicamente en la jornada 23 debido a que el gradiente se desborda, teniendo así el 95 % de las optimizaciones como exitosas.

Se observa que el modelo completo tiene, lógicamente, mayor varianza que el modelo fraccionado, por lo que las ganancias son mayores pero también las pérdidas. Otro dato interesante, es que en son pocas las ocasiones donde el Criterio de Kelly apuesta el 100 % de la riqueza; en promedio el modelo apuesta el 97.8 % e incluso hay jornadas donde apuesta menos del 90 % de la riqueza. Por último, los *p-values* bajo las hipótesis nulas que el promedio de las apuestas

---

<sup>2</sup>No existe instrumento financiero *seguro*, conocido por el autor, en los que se puedan ejercer posiciones por solo 90 minutos y genere un interés.

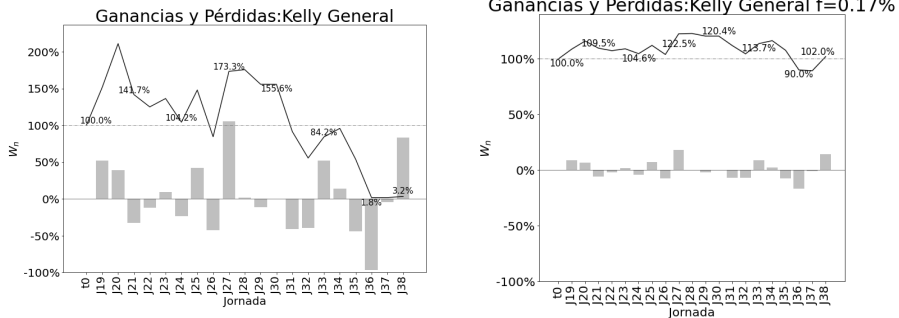


Figura 6.2. Gráficas de la riqueza  $W_n$  para el Criterio de Kelly contemplando tanto el 100 % de la estrategia como una fracción fija  $f$  % de la misma.

no es positivo y lo mismo para el promedio de la riqueza jornada a jornada, son de 0.42 y 0.41, respectivamente. Es decir, no hay mucha evidencia para pensar lo contrario. Dichos valores son los mismos para el modelo completo como el fraccionado, debido a que son proporcionales.

## Utilidad Cuadrática - Sharpe Ratio (Markowitz)

Como se estudió, la maximización del Sharpe Ratio es aquella estrategia que maximiza el retorno esperado y simultáneamente minimiza la volatilidad de un individuo con utilidad cuadrática.

Se recuerda que el problema de optimización original 3.13 no es convexo, por lo que se traslada a uno convexo mediante el problema 3.14 vía PCS.

Para las 20 jornadas en que el modelo se pone a prueba, el algoritmo tarda, en promedio, 5.3 segundos. Es de notar que existen 3 jornadas con arbitraje en el conjunto de prueba, las cuales dicho método explota satisfactoriamente. Por último, cabe destacar que todas las optimizaciones fueron exitosas.

Un dato sustancial a mencionar, es que efectivamente, maximizar el Sharpe Ratio equivale a encontrar arbitraje. Se encontraron 3 partidos en 3 distintas jornadas con arbitraje; por ejemplo, el partido Everton v.s. Aston Villa cuenta con una comisión  $tt = -0.0085$ . En la tabla a continuación se presenta un resumen de la estrategia Markowitz frente al partido con arbitraje en dicha jornada. En esta jornada, el modelo Markowitz gana *seguramente*  $(1 + tt)^{-1} = 0.8573\%$ . Si existiera un partido así cada semana del año, el valor futuro a un año de esta inversión *segura* sería del 155.88 % con respecto a la riqueza inicial. Poco a poco en poquito, se convierte en mucho.

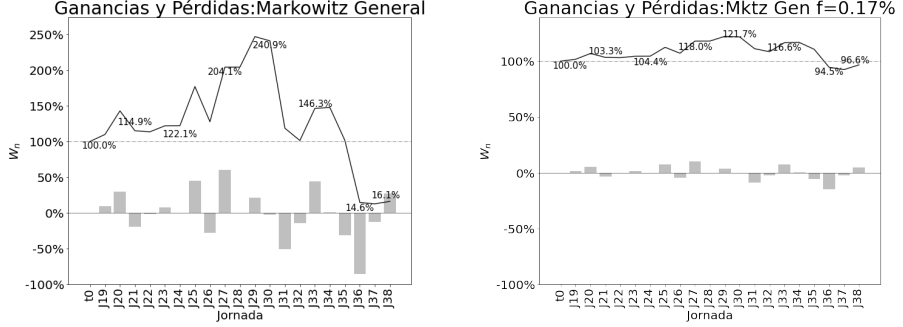


Figura 6.3. Gráficas de la riqueza  $W_n$  para el Sharpe Ratio contemplando tanto el 100 % de la estrategia como una fracción fija  $f$  % de la misma.

Resultado	$\hat{p}$	$\sigma_d$	$\sigma_d^{-1}$	$\sigma_d^{-1}/(1+tt)$	$\ell_*^{(M)}$	$\ell_*^{(K)}$
Casa	42.34 %	2.07	48.31 %	48.73 %	48.71 %	0.52 %
Empate	32.08 %	3.7	27.03 %	27.26 %	27.25 %	7.35 %
Visita	25.58 %	4.2	23.81 %	24.01 %	24.01 %	4.04 %
Total	100.0 %	-	99.1 %	100.0 %	100.0 %	11.91 %

Cuadro 6.1. Estrategias Markowitz  $\ell_*^{(M)}$  y Kelly  $\ell_*^{(K)}$  para el partido Everton v.s. Aston Villa.

## 6.2.2. Estrategias Restringidas

Anteriormente el espacio muestral  $\Omega$  consistía de todas las combinaciones posibles de cada partido en la jornada en cuestión. Ahora, dicho espacio está compuesto por únicamente un evento por partido. Dicho elemento, racionalmente hablando, consiste en el evento cuyo valor esperado sea el mayor, por lo que

$$\Omega := \bigtimes_{i=1}^r \left\{ \omega_k \mid k = \arg \max_j \{ \mathbb{E}[\varrho_{i,j}] \}, \quad j = 1, 2, \dots, m_i \right\}.$$

De esta forma, el número de posibilidades se reduce a  $N = 2^{10}$  y el total de apuestas a  $M = 1 \times 10$ . Sin embargo, esta restricción induce desventajas teóricas en los modelos. Para Kelly, el log-crecimiento será menor. Para Markowitz, no se pueden explotar los partidos con arbitraje. En ambos modelos en el caso de apostar el 100 % de la riqueza, automáticamente se hace positiva la probabilidad de ruina del jugador si no se acierta a los 10 partidos; usar las estrategias de forma fraccionada será la única forma de evitar la bancarrota.

Para ambos modelos la optimización tarda 1 segundo en promedio para todas las jornadas. El 100 % de las optimizaciones numéricas fueron exitosas. En la figura 6.4 se muestran los resultados de las estrategias restringidas.

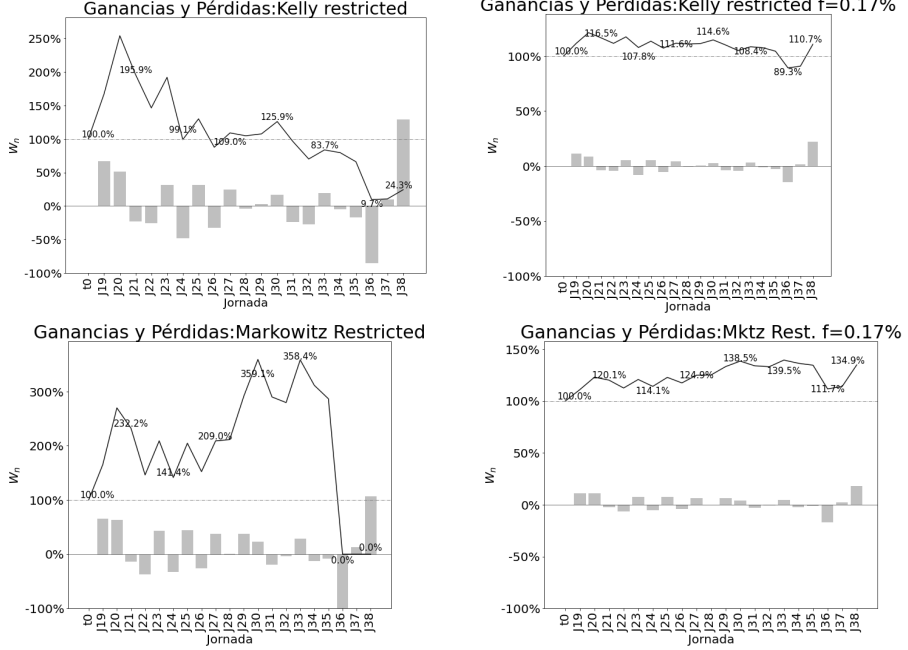


Figura 6.4. Gráficas de la riqueza  $W_n$  bajo estrategias restringidas para ambos modelos.

Un punto importante a resaltar es que a pesar que el Modelo de Markowitz -maximizando el Sharpe Ratio- llega a ganancias espectaculares de 3.58 veces el capital inicial, una sola jornada bastó para perder toda su riqueza y que el jugador quedara en ruina. No porque el sol salga 100 días, significa que *deba* salir el día 101. Otra cuestión es que al restringir los modelos a un único resultado, la mayor parte del desempeño del modelo queda en función de la verosimilitud de las predicciones. Esto se nota tanto en la estructura de las ganancias en las mismas jornadas, pero en distinta magnitud. La ventaja de Kelly sobre Markowitz es que en los modelos sin fraccionar, la probabilidad de ruina de la primer estrategia es nula.

### 6.3. Comparativa de Modelos

Tanto el Criterio de Kelly como el de Markowitz por lo general tienen el mismo portafolio de apuestas, pero difieren en el *stake* ejercido. En la misma mano se observó que, en mercados con arbitraje presente, Kelly no explota estas inconsistencias totalmente. Esto se debe a que el log-crecimiento no es

máximo, a pesar de ser seguro. En la tabla 6.1 se logra observar las diferencias en las estrategias en dicho tipo de mercado.

Local Visita	arsenal brighton	aston villa chelsea	fulham newcastle	leeds west brom	leicester tottenham	liverpool crystal	man city everton	sheffield burnley	westham southampton	wolves man united
$e_i$	<b>E</b>	<b>L</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>L</b>	<b>V</b>	<b>V</b>	<b>V</b>
$e_d$	4.46	7	3.41	7	3.5	18.32	1.47	2.45	5.03	2.75
$\hat{p}$	26.25 %	31.66 %	41.48 %	26.85 %	31.58 %	10.17 %	75.39 %	48.46 %	25.11 %	41.88 %
$E[e]$	17.07 %	121.65 %	41.45 %	87.95 %	10.53 %	86.24 %	10.82 %	18.73 %	26.31 %	15.17 %
<b>Estrategias</b>										
<b>Kelly</b>	3.23 %	17.89 %	12.77 %	12.05 %	2.65 %	3.93 %	14.33 %	8.56 %	4.47 %	5.61 %
<b>Markowitz</b>	4.44 %	11.50 %	14.72 %	9.16 %	3.99 %	2.82 %	27.05 %	12.52 %	5.54 %	8.26 %

Cuadro 6.2. Estrategias de Kelly o de Markowitz para la última jornada de la base de prueba con restricciones. Los eventos restringidos  $e_i \in \mathbf{L}, \mathbf{E}, \mathbf{V}$  denotan las apuestas a la victoria local, el empate o la victoria visitante, respectivamente.

Se cierra la comparativa con las siguientes cuestiones en mente. Primero, a diferencia de los portafolios Markowitz, los modelos basados en Kelly evitan la ruina del jugador la mayor parte de las veces. Por ejemplo, el Criterio Restringido de Kelly jamás apuesta el 100 % del total disponible, de hecho arriesga únicamente el 82.7 %, en promedio. Para el caso de apuestas sin restricciones, el criterio basado en el log-crecimiento sin restricciones apuesta en promedio el 100 % de la riqueza en 1 de cada 10 jornadas.

Segundo, en contraste al Sharpe Ratio, el log-crecimiento no es invariante ante proporciones. De esta forma, fraccionar la estrategia de Kelly ex-post  $f\ell_*^{(K)}$  a la optimización conlleva a que  $G\left(f\ell_*^{(K)}\right) < G\left(\ell_*^{(K)}\right)$ . Incluso hay ocasiones donde la estrategia fraccional basada en Markowitz  $f\ell_*^{(M)}$  alcanza mayor log crecimiento que la estrategia  $f\ell_*^{(K)}$ , esto en gran medida porque  $\|\ell_*^{(K)}\| < \|\ell_*^{(M)}\|$ . Último, Kelly tiende a diversificar menos, lo que conlleva a una volatilidad del portafolio mayor y por ende a ganancias o pérdidas más abruptas que los portafolios basados en utilidades cuadráticas.

Modelo	Estrategia Restricción Fracción	Markowitz	Kelly	Kelly	Markowitz	Kelly	Markowitz	Kelly	Markowitz
		Con 17 %	Con 17 %	Sin 17 %	Sin 17 %	Con 100 %	Sin 100 %	Sin 100 %	Con 100 %
Métricas	Riqueza Final	135 %	111 %	102 %	97 %	24 %	16 %	3 %	0 %
	Núm. Apuestas	196	195	319	323	195	323	319	176
	Promedio Apuestas	9.80	9.75	15.95	16.15	9.75	16.15	15.95	9.78
	Promedio Apostado	17 %	14 %	17 %	17 %	83 %	100 %	98 %	100 %
	Hits	33 %	33 %	30 %	30 %	33 %	30 %	30 %	32 %
	Promedio Sharpe	0.62	0.58	0.64	1.41	0.58	1.41	0.64	0.62
	Promedio $G(\ell)$	0.06	0.06	0.07	0.04	0.21	0.16	0.23	$-\infty$
	Promedio Varianza	0.01	0.02	0.02	0.00	0.56	0.13	0.54	0.38
	pval apuestas	0.21	0.35	0.42	0.50	0.35	0.50	0.42	0.35
	pval riqueza	0.16	0.33	0.41	0.50	0.33	0.50	0.41	0.31

Cuadro 6.3. Estadísticas resumen del desempeño de cada uno de los modelos financieros en todo el periodo de prueba.

Dada la información, los jugadores con utilidades cuadráticas prefieren un portafolio de apuestas con mayor diversificación que aquellos con utilidades

logarítmicas. En términos monetarios, la ventajas del primer perfil de apostador es que si las probabilidades estimadas no son las correctas, las pérdidas serán menores que el otro perfil. Pero si no se controla la estrategia basada en Markowitz mediante estrategias fraccionales, se llega a la ruina con probabilidad 1. Justamente, se observó esto para el modelo restringido sin fraccionar basado en el Sharpe Ratio en el presente ejemplo.

Por el contrario, conociendo las probabilidades, no existe portafolio alguno que supere en riquezas a Kelly en el largo plazo gracias al *Teorema de la Mejor Estrategia de Apuestas*, en términos monetarios.

Para el autor, el Portafolio Markowitz Fraccionado con Apuestas Restringidas es el más atractivo de todos. Todo indica que este modelo tiene la capacidad de pagar la deuda del autor.



# Parte III

## Resultados y Reflexiones

# Capítulo 7

## Conclusiones

Se le pregunta al lector: ¿genuinamente, invertiría su capital en el presente modelo? Recuerde que, todo el tiempo en que el algoritmo estuvo a prueba, la riqueza es mayor a la inicial, de hecho el rendimiento total es del 35.8 % sobre el monto inicial. Comparándolo contra el S&P 500 en el mismo periodo de tiempo (del 19 de enero al 24 de mayo del 2021), el cual obtuvo un histórico rendimiento del 10.5 %, este índice apenas obtiene 1/3 de las ganancias con las que el presente modelo finalizó. Entonces, ¿qué opina el lector?

El objetivo del presente trabajo se cumple: dada la información, se construyeron las estrategias para diferentes perfiles de riesgos de apostadores racionales que maximizaron sus utilidades esperadas. Incluso se obtuvieron otros logros. Por ejemplo, se encontró y contrastó tanto la utilidad como la ganancia de los modelos con y sin restricciones. Por otro lado, se logra explotar partidos con arbitraje. Ganancias seguras.

Aunado al objetivo principal y los secundarios, en el presente trabajo se demostró y logró lo siguiente.

1. Se reiteró que el mercado de apuestas, como demostró previamente R. Jakobsson en *Testing Market Efficiency in a Fixed Odds Betting Market*, no es eficiente. No obstante, su ineficiencia ha ido decrementando.
2. Se aplica y generaliza el Criterio de Kelly para apuestas múltiples y simultaneas. En la literatura consultada, solo se fija la parte múltiple o la simultanea, pero jamás se realiza para ambas situaciones. Aunque en algunos *papers* se menciona, no existe publicación encontrada por el autor que contemple ambos escenarios al mismo tiempo.

3. Se crearon *bots* con la facultad de descargar información gratuita de los partidos, de los equipos y del mercado de la EPL por medio de webscrap.
4. Se desarrollan técnicas estadísticas que otorgan distinta importancia a los datos dependiendo del tiempo en el que fueron observados para estimar la media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  de distribuciones normales por medio de Máxima Verosimilitud Ponderada.
5. Se optimiza el Sharpe Ratio mediante un algoritmo propio. A pesar que existen paquetes que ya tienen implementado dicha optimización como el paquete *pyportfolioopt*, este no converge cuando el *risk free asset* es 0.

Se le agradece al lector por acompañar al autor en esta odisea para encontrar, dada la información, estrategias óptimas de apuestas para distintos perfiles de apostadores. Siendo así que, si le preguntan al autor si apostaría sus ahorros con base en el presente modelo, el autor, razonablemente -mas no necesariamente racionalmente- respondería que no, no del todo...

## 7.1. ¿Existe la Suerte?

Supongamos que el autor le pide al lector jugar dominó contra él y después ajedrez (nota: para ambos juegos, el escritor es pésimo). Probablemente en 2 o 3 rondas de ajedrez, el lector se habrá percatado que el autor no es pésimo, sino terrible jugando. Sin embargo, es posible que tengan que transcurrir decenas de juegos para verificar que, en efecto, Román Alberto Vélez Jiménez es muy malo jugando dominó. ¿Por qué? En el ajedrez, solo hay 2 agentes y por ende la entropía es baja, se requiere mucha habilidad. En el dominó, hay más factores que solo las estrategias; en este juego el azar es factor: depende la mano, la pareja con la que se juega, etc.

Trasladando este razonamiento al presente trabajo, en juegos de fútbol donde al menos el 95 % de la entropía máxima para 3 posibilidades se tiene presente<sup>1</sup>, la suerte juega un papel importante.

### 7.1.1. Monos v.s. Matemáticos

Para aproximar que tanto del rendimiento del mejor modelo se debe a habilidad y que tanto a suerte, se puso a competir dicho algoritmo contra 500 monos (simulaciones Dirichlet con parámetros unitarios) en el mismo periodo

---

<sup>1</sup>Al final del Capítulo 5, se mostró la entropía total de los históricos de la EPL para el conjunto de prueba.

de prueba, sin restricciones y con estrategias acotadas a la misma fracción de nuestro modelo. Una prueba al estilo Burton Malkiel (Malkiel, 1999).

Se encuentra que, en promedio, el modelo vence a 78 de cada 100 monos. Es un buen parámetro para pensar que existe algo más que pura suerte en los rendimientos de nuestro modelo. Aún así, el autor prefiere ser cauteloso y no gritar *eureka*, no aún.

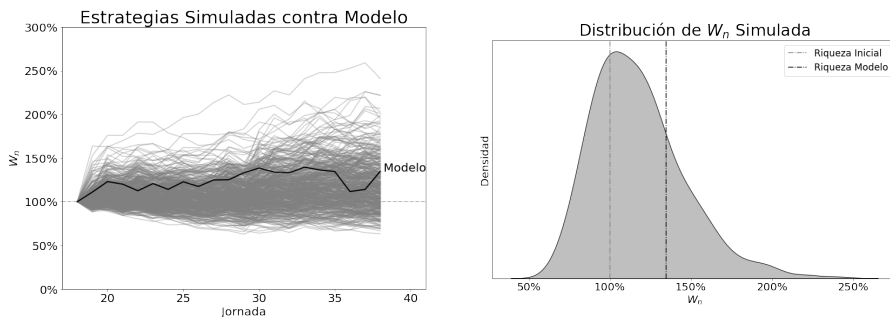


Figura 7.1. Distribución intertemporal y final de 500 estrategias simuladas. Se comparan las riquezas finales de dichas estrategias contra la del mejor modelo.

### 7.1.2. Validación de Supuestos

Es un hecho que el modelo pasa la prueba de ganarle al menos a 3/4 de simulaciones aleatorias. Sin embargo, quizá algún lector curioso se percató que en el cuadro comparativo 5.2 de los modelos, el mejor de estos no tiene el log-crecimiento promedio más alto, ni tampoco pasa lo contrario para el peor de ellos.

Uno esperaría que si los supuestos se cumplieran, a mayor log-crecimiento mayor retorno final, puesto que teóricamente así debería suceder.

Tomando el promedio del log crecimiento y la riqueza final de cada una de las simulaciones realizadas previamente, no se encontró evidencia para pensar que existe correlación alguna entre ambas variables<sup>2</sup>. El supuesto base del modelo, el cual dice que se *tienen* las probabilidades reales, no se cumple. Por tanto las estrategias presentes, dada la información, son óptimas teóricamente pero no las mejores en la práctica.

<sup>2</sup>Se ajustó una regresión lineal simple entre el promedio del log-crecimiento y la riqueza final de cada una de las simulaciones. El ajuste no encuentra evidencia para rechazar la hipótesis que no hay relación alguna entre ambas variables, con un p-value de 0.595.

## 7.2. Teoría y Práctica

Surgen un par de cuestiones. La primera, ¿por qué el modelo de aprendizaje profundo no pudo resolver con exactitud el problema de predicción? Antes que nada, se le recuerda al autor que a pesar de tener varias fuentes de información, aún quedan variables sin ser consideradas. Hubáček (Hubáček y col., 2019) comenta que, según Zimmerman (Zimmermann y col., 2013), existe un techo predictivo del 75 % en cualquier deporte y que la selección de características es más importante que la del propio modelo predictivo.

La segunda es ¿por qué nuestro mejor modelo no es el mejor? Importante recalcar que el modelo en ningún momento es subóptimo dada la información disponible y restricciones presentes. Pero, el supuesto de *conocer* las probabilidades de los eventos que suceden únicamente una vez en toda la existencia del universo, quizá, solo Dios lo sabe. Por eso el modelo no se desempeña de acuerdo a la teoría. El gato de Schrödinger no lo permite, ni lo permitirá.

### 7.2.1. Cartas a Santa Claus

Todo modelo es bello, óptimo y útil en teoría. Por pura definición. Sin embargo, la realidad no respeta todos los supuestos de la teoría. Tanto así que el modelo desarrollado por el presente autor en el que tardó aproximadamente 8 meses en construir, en tan solo 5 segundos, 100 cambios vencieron las ganancias de dicho algoritmo.

Una cosa es lo que un modelo teórico pide para funcionar o bien la carta que se pide a Santa Claus, y otra cosa es lo que en realidad hay o bien el presupuesto disponible por papá Noel.

### 7.2.2. Regalos, Carbones y Reflexiones

Si bien George Box dice que “todos los modelos en esencia son erróneos, pero hay algunos útiles”, se invita al lector a ser crítico ante los supuestos requeridos para que los modelos usados no pierdan validez (Taleb, 2007). En este texto, los supuestos tanto para el Criterio de Kelly como el de Markowitz *parecen* realistas, pero bien se demostró que la verosimilitud de estas hipótesis con la información utilizada no es alta.

El tema central de la presente tesis puede ser un tema vanal para el humano, pues se podría pensar que de apuestas no dependen los ahorros de poblaciones. Pero se invita al lector a llevar estas reflexiones más allá de las líneas de apuestas, por ejemplo, en inversiones. Este mundo es

primo-hermano de las apuestas puesto que se invierte la riqueza con base en modelos sujetos a la información disponible, ciertas restricciones y el apetito de riesgo del fondo. Solo que aquí la riqueza en cuestión no es únicamente la del apostador o *fund manager*, sino de todo un grupo de personas. Confiar ciegamente en un modelo, aunque óptimo dada la información, trae consigo grandes tribulaciones.

Tan solo recordemos el modelo para valorar opciones Black-Scholes-Merton y como Long Term Capital Management, *hedge fund* dirigido por el mismo Myron Scholes y Robert Merton, perdieron \$4.6 miles de millones de dolares en tan solo 4 años. En teoría, ¡es un gran modelo!, pero es muy sensible a los supuestos con los cuales está construido; en otras palabras, si la carta a Santa Claus es extensa, muy exigente y poco flexible, probablemente lo único que se obtendrá será carbón como regalo.

En la práctica, el autor cree que es mejor tomar varias pequeñas “verdades” -léase, modelos- con cierta verosimilitud, que una sola verdad como absoluta -léase, confiar totalmente en un modelo. La dicotomía entre el zorro y el erizo de Isaiah Berlin (Silver, 2012). Pero estas cuestiones son tema y preocupación de otra tesis.

### 7.2.3. Epitafio

Es hora de cerrar la presente tesis, por lo que el siguiente párrafo va a título personal. ¿Recuerda que comenté en la introducción que con este modelo pagaría mi universidad? Bueno, ya no lo usaré para este fin; ya no porque gracias al desarrollo de este mismo conseguí un trabajo que me permitió liquidar mi deuda con el ITAM. ¿Suerte o habilidad?

No obstante lo usaré, en parte, para algo más que optimizar mi utilidad con la información que tenga disponible, lo ocuparé para divertirme. Y esto último, aún, no se puede optimizar.

## Capítulo 8

# Futuras Investigaciones

Si bien el objetivo principal fue cubierto, afortunadamente quedan muchas líneas de investigación abiertas.

### 8.1. Modelos Estadísticos

Se enfatizó que en el presente texto se usaron técnicas de aprendizaje profundo para la estimación de probabilidades y la información disponible, sin embargo, se puede indagar en los siguientes campos.

1. **Diferentes modelos de aprendizaje estadístico.** Ya sean Redes Neuronales Recurrentes (LSTM), Convolucionales, o intentar con modelos distintos, como Máquinas de Soporte Vectorial, Clasificadores Bayesianos, Bosques Aleatorios, entre más.
2. **Ensamblaje de Modelos.** Si bien se puede escoger un mejor modelo dentro de un arsenal de estos, la literatura a mostrado como el ensamblaje de la predicción de varios modelos en uno solo, puede mejorar sustancialmente el poder predictivo.
3. **Expansión de Información.** En el caso práctico de la presente tesis se decidió apostar para partidos de la Liga Inglesa, usando únicamente información de dicha liga. Sin embargo, podrían utilizarse diferentes ligas de fútbol para aumentar la cantidad de datos con los que los modelos se entrenan.
4. **Transferencia de Aprendizaje** Una técnica que está revolucionando la rama de Aprendizaje Profundo, es *transfer learning*. Lo que se busca

es usar redes neuronales previamente entrenadas para tareas *similares* a la actual y re-entrenar únicamente las últimas capas de dicha red con los datos obtenidos.

5. **Información más granular.** El paper “*Exploiting sports-betting market using machine learning*” (Hubáček y col., 2019) genera predicciones a partir de la información a nivel jugador, y no por equipo, mediante Redes Neuronales Convolucionales. El poder predictivo obtenido por ellos es mayor al del autor, por lo que sería conveniente probar este tipo de información.
6. **Estadística Bayesiana.** La visión estadística del autor, al principio de escribir la presente tesis, era totalmente frecuentista. Sin embargo, en eventos que son únicos en la existencia se puede pensar que la probabilidad estimada es subjetiva. Se invita a los lectores a comparar los resultados bajo esta perspectiva estadística.

## 8.2. Portafolios

Dada las predicciones con la información disponible, se maximizaron las utilidades de distintos perfiles de riesgos. Sin embargo, sería interesante enfocarse únicamente en ganancias más que en utilidades.

1. **Regularización en portafolios.** Si bien en todos los modelos existe la restricción de no poder apostar más de la riqueza disponible, lo cual conlleva a una regularización lasso -ya que no hay *short selling*-, sería interesante ver cómo se desempeñan los portafolios con regularizaciones  $L_2$ . Aunque se tenga un portafolio sesgado, habría más diversificación.
2. **Métodos Fraccionales para Kelly.** En la práctica es muy común que, después de encontrar la estrategia óptima bajo el Criterio de Kelly, se use apueste solo una proporción  $f$  de la misma. Sin embargo no es la estrategia óptima para *ese* nivel de riqueza acotado  $f$ . Por lo que sería interesante contrastar los portafolios proporcionales a Kelly y el portafolio encontrado por el siguiente problema de optimización.

$$\max_{\underline{\ell} \geq 0} \left\{ \underline{p}' \log \left( \mathbf{1} + W' \underline{\ell} - \sum_{i=1}^M \ell_i \mathbf{1} \right) \right\} \quad \text{s.a.} \quad \sum_{i=1}^M \ell_i \leq f.$$

3. **Combinación de Estrategias** Combinar el Criterio de Kelly y el basado en el Sharpe Ratio y explotar sus propiedades. Por ejemplo, encontrar partidos con arbitraje y luego invertir con Kelly los restantes.



## 8.3. General

Más allá de los modelos de aprendizaje de máquina y portafolios financieros, hay áreas y técnicas que permiten atacar el objetivo de la tesis desde otras perspectivas.

1. **Economía Conductual.** Todo el trabajo está sustentado bajo los Axiomas de Preferencia de Von Neumann y Morgenstein, en pocas palabras en decisiones *racionales*. Pero bien se comentó a lo largo de todo el texto que dichos axiomas no necesariamente se cumplen en la realidad, como bien argumenta Kahneman, Thaler, Tversky, Taleb y muchos otros economistas conductuales. Sería interesante ver como divergen las preferencias teóricas y las empíricas. Por ejemplo, contrastar portafolios contruidos con el Criterio de Kelly y los que realmente se usaron, *con la misma información disponible*.

**Aprendizaje por Refuerzo.** Un área de reciente interés para el campo de Aprendizaje de Máquina es el Aprendizaje por Refuerzo. A *grosso modo*, se busca encontrar políticas *óptimas* bajo el refuerzo de penalizaciones o recompensas a un modelo. Un ejemplo de dichas inteligencias es *AlphaZero*, que actualmente ha vencido a los vigentes campeones del mundo en Ajedrez, Go y Shogi. Sería interesante ver las estrategias desarrolladas por este tipo de herramientas.

Cualquier uso, extensión, inquietud, comentario de esta tesis, el autor queda ansioso por escuchar. Sin lugar a dudas *apuesta* a que mejorarán la presente investigación.

## Parte IV

# Anexos

# Apéndice A

## Teorema de Utilidad Esperada

A continuación se mostrará el resultado angular de la teoría de la decisión clásica de forma general pero numerable (Hens y Riege, 2016), (Chavas, 2004), (Levin, 2006), (Anónimo, 2001), (Lecuanda, 2021).

**Teorema A.0.1** (Teorema de Utilidad Esperada).

*Una relación de preferencia ( $\geq$ ) satisface los axiomas de Independencia y Continuidad en  $\mathcal{L}$  si y solo si puede ser representada por una funcional  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es decir, si  $L_1, L_2$  son loterías entonces*

$$L_1 \geq L_2 \iff U(L_1) \geq U(L_2).$$

*Demostración.*

Asumiremos, por simplicidad, que  $\mathcal{X}$  es finito. Es decir  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . El resultado más general se puede encontrar en (Kreps y col., 1990). De igual forma, Savage muestra este resultado desde la perspectiva de probabilidades subjetivas, una versión muy comprensible puede ser hallada en (Mendoza y Regueiro, 2011). La parte necesaria de la demostración, se probará de forma constructiva. La suficiencia, de forma directa.

( $\Rightarrow$ ) En primer lugar, tomemos la mejor lotería  $L^*$  y la peor  $L_*$  en  $\mathcal{L}$ .

$$L^* > L_*. \tag{A.1}$$

Si no existieran, cualquier constante representaría la relación de preferencia

racional y el problema de utilidad es trivial.

Por segundo, vemos que si  $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$  tales que  $L_1 \succ L_2$ , con  $\lambda \in (0, 1)$ , por el Axioma de Independencia se tendría que

$$L_1 \succ \lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2 \succ L_2. \quad (\text{A.2})$$

Después, vemos que para  $\alpha, \beta \in (0, 1)$

$$\beta L^* + (1 - \beta)L_* \succ \alpha L^* + (1 - \alpha)L_* \iff \beta > \alpha.^1 \quad (\text{A.3})$$

Esto en última parte, de nuevo, por el Axioma de Independencia. Pues si definimos  $\gamma := (\beta - \alpha)/(1 - \alpha) \in (0, 1)$ , con un poco de álgebra tenemos

$$\beta L^* + (1 - \beta)L_* \sim \gamma L^* + (1 - \gamma) \underbrace{[\alpha L^* + (1 - \alpha)L_*]}_L.$$

Como  $L^* \succ L$ , entonces por (1)

$$L^* \succ \gamma L^* + (1 - \gamma)L \succ L.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \beta L^* + (1 - \beta)L_* &\sim \gamma L^* + (1 - \gamma)L \\ &> L \\ &\sim \alpha L^* + (1 - \alpha)L_*. \end{aligned}$$

Pero esto, en primera parte, a que si suponemos  $\alpha > \beta$  (si fueran iguales, serían la misma lotería), entonces definiendo  $\hat{\gamma} := (\alpha - \beta)/(1 - \beta) > 0$  y procediendo de igual forma, se llegaría a que  $\alpha L^* + (1 - \alpha)L_* \succ \beta L^* + (1 - \beta)L_*(\Rightarrow\Leftarrow)$ , lo cual es una contradicción.

En cuarto lugar, el escalar  $\lambda_L \in [0, 1]$ , que hace equivalente la lotería  $L$  a la lotería compuesta  $\lambda_L L^* + (1 - \lambda_L)L_*$  que existe bajo el Axioma de Continuidad, es único. Si no lo fuera, entonces existiría otro escalar  $\lambda'_L \in [0, 1]$  tal que representara esta misma lotería bajo una combinación convexa de la mejor y peor lotería en  $\mathcal{L}$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\lambda'_L > \lambda_L$ , entonces por (2), (3) y el Axioma de Independencia, se tendría que  $L^* \succ L^*$ , lo cual es un absurdo. Por tanto, ese escalar existe y es único.

---

<sup>1</sup>Esta es otra forma, equivalente, a enunciar el Axioma de Continuidad. Esta derivación se le conoce como la Propiedad Arquimediana.

Finalmente, si definimos  $U(L) = \lambda_L$ ,  $\forall L \in \mathcal{L}$ , el escalar único  $\lambda_L$  que hace la combinación convexa de la mejor y peor lotería equivalente a  $L$ , representa a  $(\geq)$ . Es decir

$$L' \geq L \iff U(L') \geq U(L).$$

Pues, primero y últimamente, por (4) y (3), y porque  $\exists! \lambda_L, \lambda_{L'}$  tales que

$$L' \geq L \iff \lambda_{L'} L^* + (1 - \lambda_{L'}) L_* \geq \lambda_L L^* + (1 - \lambda_L) L_* \iff \lambda_{L'} \geq \lambda_L.$$

Hemos probado hasta ahora que  $U$  representa por completo la relación de preferencia  $(\geq)$ . Nos falta ver que  $U$  tiene forma de utilidad esperada vNM y que es un mapeo de  $\mathcal{L}$  a  $\mathbb{R}$ .

Aquí se muestra que  $U$  es lineal. Sean  $L, L' \in \mathcal{L}$  y sea  $\alpha \in [0, 1]$ . Como  $U(L) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_L$  por (4), tenemos que

$$\begin{aligned} L &\sim U(L)L^* + (1 - U(L))L_* \\ L' &\sim U(L')L^* + (1 - U(L'))L_*. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando el Axioma de Independencia dos veces y reordenando términos

$$\begin{aligned} \alpha L + (1 - \alpha)L' &\sim \alpha(U(L)L^* + (1 - U(L))L_*) \\ &\quad + (1 - \alpha)(U(L')L^* + (1 - U(L'))L_*) \\ &\sim \underbrace{[\alpha U(L) + (1 - \alpha)U(L')]}_{\lambda} L^* \\ &\quad + \underbrace{[1 - (\alpha U(L) + (1 - \alpha)U(L'))]}_{1 - \lambda} L_*. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Usando la definición de  $U$ , se llega a que

$$U(\alpha L + (1 - \alpha)L') \stackrel{\text{def}}{=} \lambda = \alpha U(L) + (1 - \alpha)U(L').$$

Por tanto, concluimos que la funcional definida anteriormente, es lineal en las distribuciones.

Probemos por último que  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ . Como  $\mathcal{X}$  es finito, podemos definir  $u(X(\omega_i)) = u(x_i) = u_i \in \mathbb{R}$ . Sabemos además que  $U$  es de la forma de utilidad esperada y el soporte es finito, por lo que para  $L \in \mathcal{L}$  tenemos

$$U(L) = \int_{\mathcal{X}} u dL = \sum_{i=1}^m u_i \pi_i,$$

donde  $\pi_i = L(x_{i+1}) - L(x_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$ .

Por otro lado, sea  $\delta_i$  la lotería degenerada donde

$$\delta_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_i, \\ 0 & \text{si } x \neq x_i. \end{cases}$$

Por lo que  $U(\delta_i) = \int_{\mathcal{X}} d\delta_i = u(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} u_i$ . De esta forma, cualquier lotería  $L$  se puede descomponer como la combinación convexa de estas loterías degeneradas.

$$\text{i.e. } \int_{\mathcal{X}} dL = \sum_{i=1}^m \pi_i \int_{\mathcal{X}} d\delta_i$$

Como el espacio muestral es finito entonces  $L = \sum_i \pi_i \delta_i$ , y finalmente, por la linealidad de  $U$ , tendríamos que para cualquier lotería en el espacio de loterías

$$U(L) = U\left(\sum_{i=1}^m \pi_i \delta_i\right) = \sum_{i=1}^m \pi_i U(\delta_i) = \sum_{i=1}^m \pi_i u_i \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.5})$$

( $\Leftarrow$ ) Primero mostramos que para una relación de preferencia ( $\geq$ ) y una funcional  $U$  de utilidad que es una representación de los gustos del individuo, satisface el Axioma de Independencia. Supongamos que  $U(L_1) > U(L_2) > U(L_3)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned} U(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_3) &= \int_{\mathcal{X}} u d(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_3) \\ &= \lambda U(L_1) + (1 - \lambda)U(L_3) \\ &> \lambda U(L_2) + (1 - \lambda)U(L_3) \\ &= U(\lambda L_2 + (1 - \lambda)L_3). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Como  $U$  representa a ( $>$ ), entonces  $L_1 > L_2 > L_3$ , y por la ecuación anterior, necesariamente  $\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_3 > \lambda L_2 + (1 - \lambda)L_3$ . De esta forma ( $\geq$ ) satisface dicho axioma.

Por último vemos que para dicha ( $\geq$ ) resumida en  $U$  que satisface el Axioma de Completés y Transitividad también satisface el Axioma de Continuidad. Si  $U(L_1) > U(L_2) > U(L_3)$ , y como  $U : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces por densidad de los reales, existen escalares positivos  $\alpha_1, \alpha_3$  tales que

$$U(L_2) = \alpha_1 U(L_1) = \alpha_3 U(L_3).$$

Es claro ver que  $\alpha_1 < 1 < \alpha_3$ , por lo que si definimos  $\alpha$  de la siguiente forma

$$\alpha := \frac{\alpha_1\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_3} \in (0, 1), \quad (\text{A.7})$$

por la linealidad de  $U$  y reacomodando términos al final, se tiene

$$\begin{aligned} U(\alpha L_1 + (1 - \alpha)L_3) &= \alpha U(L_1) + (1 - \alpha)U(L_3) \\ &= \alpha \left( \frac{1}{\alpha_1} U(L_2) \right) + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{\alpha_3} U(L_2) \right) \\ &= \left( \frac{\alpha}{\alpha_1} + \frac{1 - \alpha}{\alpha_3} \right) U(L_2) \\ &= U(L_2). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Como  $U(\alpha L_1 + (1 - \alpha)L_3) = U(L_2)$  para  $\alpha \in (0, 1)$  y  $U$  representa las preferencias de  $(\geq)$ , necesariamente  $L_2 \sim \alpha L_1 + (1 - \alpha)L_3$ .  $\square$

## Apéndice B

# Algoritmos Feedforward y Backpropagation

En el Capítulo 2, se definieron las componentes de una RNA y cómo *debe* predecir y aprender dichos modelos. A continuación se desarrollan los componentes matemáticos de los algoritmos *Feedforward* y *Backpropagation*.

### Algoritmo Feedforward

Al cómputo de  $\Phi(\underline{x})$ , dado  $\underline{\theta}$ , para cada una de las observaciones, se le conoce como el algoritmo *Feedforward*. Como hay  $n$  realizaciones del fenómeno, se tienen que calcular  $\Phi(\underline{x}^{(j)})$  para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ . Hacer este cómputo de forma iterativa puede llegar a ser imposible cuando  $n$  es grande, lo cual es común que pase en las bases de datos actuales. Es por ello que el cálculo de todas las observaciones se hace de forma matricial, puesto que es sencillo y barato computacionalmente. A continuación se desarrollan las expresiones matriciales para llevar a cabo estos cálculos.

Contrario a los modelos clásicos de estadística, la matriz de observaciones  $\mathbb{X}$  se define al revés: el renglón  $i$ -ésimo corresponde a la variable  $X_i$ , mientras que la columna  $j$ -ésima corresponde a la observación  $\underline{x}^{(j)}$  del vector aleatorio  $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_p)'$ . Por lo que  $\mathbb{X} = [\underline{x}^{(1)} | \underline{x}^{(2)} | \dots | \underline{x}^{(n)}]$  y de igual forma para las observaciones del fenómeno aleatorio  $\underline{\mathbb{Y}} = [\underline{y}^{(1)} | \underline{y}^{(2)} | \dots | \underline{y}^{(n)}]$ . También, se generaliza la activación  $\phi_l$  a una función matricial, por lo que  $\phi_l : \mathbb{R}^{n_l \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n_l \times n}$  para poder evaluar cada una de las observaciones transformadas  $\underline{z}_l^{(j)}$ . Por tanto las activaciones de toda la capa  $l$  de neuronas para cada una de las



observaciones es la matriz dada por

$$A_l = \phi_l \left( \underbrace{W_l A_{l-1} + B_l}_{Z_l} \right) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n_l, n). \quad (\text{B.1})$$

De este modo, el algoritmo *Feedforward* se reduce a calcular solamente  $\Phi(\mathbb{X})$ .

## Algoritmo Backpropagation

En general, las cosas son fáciles cuando ya están dadas y únicamente hay que calcular, lo complejo es descubrir y aprender de los errores.

El significado de aprender en RNA es encontrar los valores *óptimos* de los pesos que minimizen el costo  $J(\theta)$ . Para descubrir dichos valores, basta con  $\partial J / \partial w_{i,j}^l$  para poder actualizar sus valores por algún algoritmo de optimización, por ejemplo el gradiente descendiente, para aprender ex post. Dicho esto, el objetivo ahora es encontrar todos los gradientes de los pesos de la RNA.

La derivada numérica de una función es sencilla de calcular gracias a las expansiones en series de Taylor. De esta forma se tendría

$$\frac{\partial J}{\partial w_{i,j}^l} \approx \frac{J(w_{i,j}^l + \epsilon) - J(w_{i,j}^l - \epsilon)}{2\epsilon}, \quad \epsilon \ll 1.$$

Teóricamente, con esta fórmula basta para calcular los gradientes de la RNA, sin embargo ¿será computacionalmente viable? Por supuesto que no. Es por ello que las RNA tuvieron un largo invierno hasta que Rumelhart, Hinton y Williams en 1986 propusieron calcular  $\nabla_{\underline{\theta}} J$  con el algoritmo que desarrollaron llamado *Backpropagation*. Este cómputo no solo es computacionalmente posible, también es eficiente<sup>1</sup>.

Primero se deben hacer dos supuestos de la función de costo  $J$ :

1. La función de costo se debe descomponer como un promedio ponderado de las pérdidas  $C_j = C(\underline{\theta}; \underline{y}^{(j)}, \hat{\underline{y}}^{(j)})$  que están en función de  $\underline{x}^{(j)}$ .

$$\text{i.e.} \quad J(\underline{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n C_j(\underline{\theta}).$$

---

<sup>1</sup>El costo computacional de este algoritmo es en esencia igual de caro que el algoritmo *Feedforward*.

2. El costo  $J$  depende de los todos los inputs y outputs de la RNA, es decir, depende de  $\underline{x}^{(j)}$  y  $\underline{y}^{(j)}$ .

Por otro lado, se recuerda el producto de Hadamart: Sea  $v, w \in \mathbb{R}^p$ , entonces el producto de Hadamart  $\odot : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  está definido como

$$(v \odot w)_i = v_i w_i.$$

Para presentar el algoritmo, primero se formulan las ecuaciones para la función de pérdida  $C$  en la observación  $(\underline{y}, \underline{x})$  y luego se generaliza para la función de costo  $J$  en todas las observaciones.

Es importante recordar que en las funciones de activación vectoriales  $\phi_l$  cada una de sus componentes es funcionalmente igual a las demás. Por lo que la jacobiana  $(\mathbf{J}_{\underline{z}}(\phi_l))(\underline{z}_l)$  será igual a la diagonal  $\text{diag}\{\phi'_l(z_1^l), \phi'_l(z_2^l), \dots, \phi'_l(z_{n_l}^l)\}$ . Esta diagonal puede ser estrangulada<sup>2</sup> en forma de un vector el cual denotaremos como  $\mathbf{d}\phi_l(\underline{z}_l)$ . De igual forma, se introduce la variable  $\delta_i^l$  como el error de la neurona- $i$  en la capa  $l$  (para la observación  $(\underline{y}, \underline{x})$ ).

$$\begin{aligned} \text{i.e.} \quad \delta_i^l &:= \frac{\partial C}{\partial z_i^l}, \\ \underline{\delta}_l &:= \nabla_{\underline{z}_l} C. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Primero se observa que el error de la última capa de la RNA está conformado por<sup>3</sup>:

$$\delta_i^L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C}{\partial z_i^L} \stackrel{\text{R.C.}}{=} \sum_k^{n_{L+1}} \frac{\partial C}{\partial a_k^L} \frac{\partial a_k^L}{\partial z_i^L} = \frac{\partial C}{\partial a_i^L} \frac{\partial a_i^L}{\partial z_i^L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C}{\partial a_i^L} \frac{\partial \phi_L}{\partial z_i^L}(z_i^L).$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \delta_i^L &= \frac{\partial C}{\partial a_i^L} \frac{\partial \phi_L}{\partial z}(z_i^L), \\ \therefore \underline{\delta}_L &= \nabla_{\underline{a}_L} C \odot \mathbf{d}\phi_L(\underline{z}_L). \end{aligned} \tag{B.3}$$

En segundo lugar se muestra que el error de una neurona- $i$  en la capa  $l < L$  está dado por:

$$\delta_i^l \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial C}{\partial z_i^l} \stackrel{\text{R.C.}}{=} \sum_k^{n_{l+1}} \frac{\partial C}{\partial z_k^{l+1}} \frac{\partial z_k^{l+1}}{\partial z_i^l}.$$

<sup>2</sup>Estrangular una matriz diagonal a un vector es equivalente a que cada elemento de la diagonal se vuelva una componente del vector.

<sup>3</sup>R.C. denota “Regla de la Cadena” del cálculo real multivariado.

Pero por definición  $\partial C / \partial z_k^{l+1} = \delta_k^{l+1}$ . También como  $z_k^{l+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_r^{n_l} w_{k,r}^{l+1} a_r^l + b_k$  entonces  $\partial z_k^{l+1} / \partial z_i^l = w_{k,i}^{l+1} \phi'_l(z_i^l)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \delta_i^l &= \sum_k^{n_{l+1}} (w_{k,i}^{l+1} \delta_k^{l+1}) (\phi'_l(z_i^l)), \\ \therefore \underline{\delta}_l &= W'_{l+1} \underline{\delta}_{l+1} \odot \mathbf{d}\phi_l(\underline{z}_l). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En tercer lugar, usando las expresiones pasadas, obtendremos  $\nabla_{\underline{b}_l} C$ , observando que

$$\frac{\partial C}{\partial b_i^l} \stackrel{\text{R.C.}}{=} \sum_k^{n_l} \frac{\partial C}{\partial z_k^l} \frac{\partial z_k^l}{\partial b_i^l} = \frac{\partial C}{\partial z_i^l} \frac{\partial z_i^l}{\partial b_i^l} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_i^l \cdot 1.$$

Asi que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial b_i^l} &= \delta_i^l, \\ \therefore \nabla_{\underline{b}_l} C &= \underline{\delta}_l. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Por cuarto, y último lugar, se desarrolla la expresión para  $\nabla_{\underline{w}_i^l} C$  con la ayuda de las primeras dos ecuaciones. Entonces

$$\frac{\partial C}{\partial w_{i,j}^l} \stackrel{\text{R.C.}}{=} \sum_k^{n_l} \frac{\partial C}{\partial z_k^l} \frac{\partial z_k^l}{\partial w_{i,j}^l} = \frac{\partial C}{\partial z_i^l} \frac{\partial z_i^l}{\partial w_{i,j}^l} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_i^l a_j^{l-1}.$$

Concluyendo que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial w_{i,j}^l} &= \delta_i^l a_j^{l-1}, \\ \therefore \nabla_{\underline{w}_i^l} C &= \delta_i^l \underline{a}_{l-1}, \\ \therefore \frac{\partial C}{\partial W_l} &= [\nabla_{\underline{w}_1^l} C | \nabla_{\underline{w}_2^l} C | \cdots | \nabla_{\underline{w}_{n_l}^l} C]' = \underline{\delta}_l \underline{a}'_{l-1}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

El nombre del algoritmo hace referencia a cómo se calculan los gradientes para todos los pesos de la RNA: hacia atrás. Puesto que teniendo  $\underline{\delta}_l$ , los gradientes para los pesos de la capa  $l$  se calculan de forma directa con las últimas dos ecuaciones; computar los subsecuentes errores  $\underline{\delta}_k$ ,  $\forall k < l$  será tarea sencilla teniendo  $\underline{\delta}_l$ .

Se acaba de desarrollar el algoritmo *Backpropagation* para el caso de una observación, falta generalizarlo para todas las observaciones  $(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$ . La generalización del error  $\underline{\delta}$  es la matriz de los errores  $\Delta := \partial J / \partial Z_l$ . Se extiende

la activación  $\phi_l$  a una función matricial, por ende su derivada evaluada en todas las observaciones,  $\mathbf{D}\phi_l(\underline{Z}_l)$ , está dada por la matriz  $\left[ \mathbf{d}\phi_l\left(\underline{z}_l^{(1)}\right) \mid \mathbf{d}\phi_l\left(\underline{z}_l^{(2)}\right) \mid \cdots \mid \mathbf{d}\phi_l\left(\underline{z}_l^{(n)}\right) \right]$ .

A continuación se reescriben las ecuaciones pasadas para el cálculo de la función de pérdida con todas las observaciones.

$$\begin{aligned} \Delta_L &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial J}{\partial \underline{Z}_L} \\ &= \left[ \underline{\delta}_L\left(\underline{z}_L^{(1)}\right) \mid \underline{\delta}_L\left(\underline{z}_L^{(2)}\right) \mid \cdots \mid \underline{\delta}_L\left(\underline{z}_L^{(n)}\right) \right], \\ &= \left[ \nabla_{\underline{z}_L} C\left(\underline{z}_L^{(1)}\right) \mid \nabla_{\underline{z}_L} C\left(\underline{z}_L^{(2)}\right) \mid \cdots \mid \nabla_{\underline{z}_L} C\left(\underline{z}_L^{(n)}\right) \right] \odot \mathbf{D}\phi_L(\underline{Z}_L). \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\Delta_l = W'_{l+1} \Delta_{l+1} \odot \mathbf{D}\phi_l(\underline{Z}_l). \tag{B.8}$$

$$\nabla_{\underline{b}_l} J = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \underbrace{(\Delta_l)_j}_{\text{columna-}j}. \tag{B.9}$$

$$\frac{\partial C}{\partial W_l} = \frac{1}{n} \Delta_l A'_{l-1}. \tag{B.10}$$

Estas cuatro ecuaciones son el algoritmo *Backpropagation*. Para ejecutarlo, basta con empezar en  $l = L$  e ir calculando los valores de  $\nabla_{\underline{b}_l} J$  y  $\partial C / \partial W_l$  hacia atrás con las fórmulas escritas en el párrafo anterior (Nielsen, 2015).

## Apéndice C

# Análisis Exploratorio de Datos

### C.1. Información General

En cada temporada de la EPL participan 20 equipos. De esta forma, un equipo enfrenta a 19 equipos tanto como local como visitante. Per se, hay 38 jornadas en una temporada, y, en cada jornada, hay 10 partidos. De esta forma, una temporada consiste en 380 partidos. En el presente trabajo, se recuperó información de les tres bases de datos enlistadas anteriormente desde la temporada 2014/2015 hasta la temporada 2020/2021. Por ende se tienen 2660 registros completos de partidos.

En cuestión de equipos, han habido 31 en la base recolectada. De estos, 10 equipos han estado presente en todas las temporadas: El *Big Six*, Cristal Palace, Everton, Southampton y el West Ham. Por otro lado, han estado 34 árbitros presentes en la EPL, de los cuales 20 han arbitrado la temporada 2020/2021, y, de estos, hay 3 que son los árbitros más recurrentes, con un porcentaje de aparición del 8%: Michael Oliver, Martin Atkinson y Anthony Taylor. Cada árbitro influye de manera indirecta en los resultados de los juegos, puesto que ellos marcan la pauta de la rudeza o tecnicismo del juego a partir de las faltas y tarjetas que ellos sancionan.

Es factible pensar que, en general, los equipos que juegan en su casa obtienen más victorias que los que juegan como visitantes. De hecho, las proporciones de victorias y empates históricamente se ven de la siguiente manera:

Temporada	Casa	Empate	Visita
2014	45 %	25 %	30 %
2015	41 %	28 %	31 %
2016	49 %	22 %	29 %
2017	46 %	26 %	28 %
2018	46 %	19 %	34 %
2019	45 %	24 %	31 %
2020	38 %	22 %	40 %
<b>General</b>	<b>44 %</b>	<b>24 %</b>	<b>32 %</b>

Cuadro C.1. Frecuencias históricas del porcentaje de resultados por temporada.

Los equipos locales tienen una clara ventaja pero esta no es tan abrupta. De hecho, en la presente temporada, ¡los papeles cambiaron! Por esto mismo, las *proporciones a priori* son informativas pero su poder predictivo es bajo. Por lo mismo, se necesitan más variables para mejorar estas predicciones.

De las tres tablas obtenidas, se presenta un análisis descriptivo de las variables más importantes para el autor. Es de mencionar que la importancia de las variables está sesgada a la subjetividad del escritor y de comentarios de ciertos apostadores y fanáticos del fútbol.

## C.2. Momios de las Casas de Apuesta

La casa de apuestas Pinnacle Sports, según Joseph Buchdal en su libro *Squares & Sharps, Suckers & Sharks*, calcula sus momios de acuerdo a las creencias de la población apostadora: los momios reflejan el inverso de la proporción de las apuestas que respaldan a cada uno de los eventos. En su libro *Soccermathics*, David Sumpter comenta que la forma más consistente de ganarle a la casa de apuestas es cuando los momios son recién publicados, ya que aún no entra la información de la masa sabia (Sumpter, 2016). En el presente texto, supondremos que los momios finales de esta casa de apuesta, quitando la comisión que cobran, son una estimación bayesiana del inverso de las probabilidades reales de los eventos, la cual servirá de referencia para el modelo de aprendizaje profundo. Para las demás casas de apuestas, se tiene el entendido que los momios publicados son una combinación entre un modelo interno y las proporciones de apuestas.

Analizando los momios finales de Pinnacle Sports, se tiene que en promedio por temporada la probabilidad máxima para la victoria local o visitante es de 0.9 y 0.8, correspondientemente.

Por otro lado, la distribución de los momios para la victoria local y el

empate se ha mantenido estadísticamente igual entre temporadas <sup>1</sup>, pero si hay una diferencia significativa <sup>2</sup> entre temporadas para los momios de la victoria visitante. Importante mencionar que la distribución para los distintos tipos de momios es muy distinta.



Figura C.1. Gráfica de caja y violín de todos los momios desde la temporada 2013/2014 hasta la temporada 2020/2021.

De igual forma, se halló que a mayor valor del momio inicial (un claro *underdog*), mayor variabilidad habrá con respecto al momio final. Descriptivamente, esto se puede observar en el aumento de la varianza por el decil de los momios, graficada en la figura C.2. Es importante recordar que al ser distribuciones exponenciales en los valores de los momios, los intervalos de los últimos deciles serán bastante más grandes que los otros, lo que endógenamente induce aún más variabilidad.

### C.3. Mercado de Comisiones

Por lo que respecta a las comisiones que cobran los casinos, se ha notado que a medida que va pasando el tiempo los precios del mercado van convergiendo.

<sup>1</sup>Se realizó una prueba de hipótesis múltiple no paramétrica, Kurskall-Wallis, bajo la hipótesis nula que las poblaciones de cada temporada tienen la misma mediana. Para el caso de los momios locales, el p-value es de 0.037, para los empates el p-value es de 0.017. Por lo que para una significancia del 5 %, no existe evidencia para rechazar esta hipótesis nula.

<sup>2</sup>Una prueba Kurskall-Wallis arroja un p-value de 0.17.

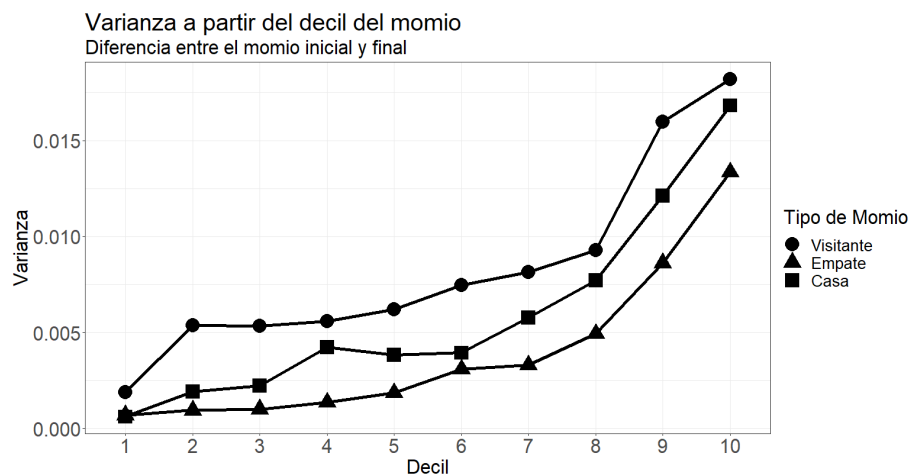


Figura C.2. Momios desde la temporada 2013/2014 hasta la temporada 2020/2021 de Pinnacle Sports.

Esto puede ser en buena medida a que el mercado de apuestas ha empezado a dejar de ser un mercado de limones<sup>3</sup> gracias a la digitalización de este mercado, y por ende se ha tendido al equilibrio en precios. Es de notar que Pinnacle Sports históricamente ha sido la casa de apuestas con la comisión más atractiva -baja- del mercado. Un marginal 2.5 % de comisión cobrada en promedio.

<sup>3</sup>Por mercado de limones, George Akerlof se refiere a un mercado no eficiente con respecto a la información.



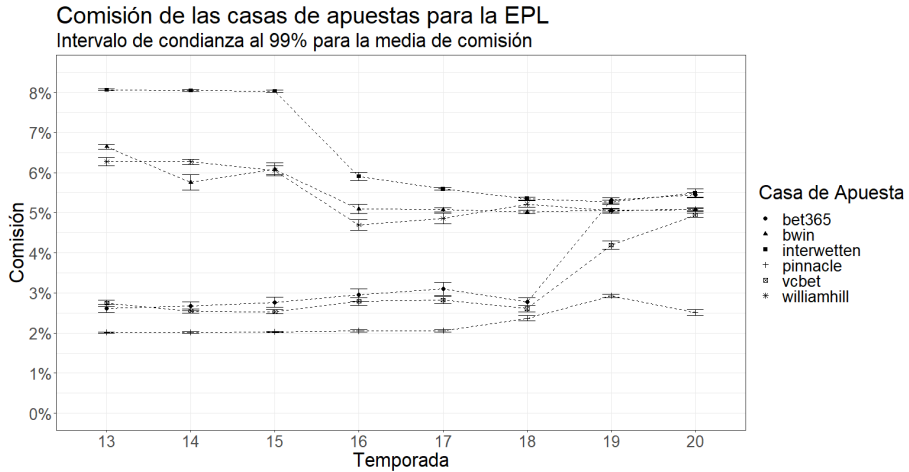


Figura C.3. Serie de tiempo de la comisión promedio cobrada por las seis casas de apuestas en la base de datos de Football Data UK.

Como se mencionó al final del primer capítulo, es absurdo solo considerar una casa de apuestas para entrar a un apuesta. Por lo que el momio considerado en este trabajo es el momio máximo del mercado. Como el mercado de apuestas no es eficiente siempre habrán discrepancias de precios, lo cual la apostadora debe aprovechar para mejorar su utilidad esperada. ¿Sucederá el caso extremo que, al considerar los mejores momios, la comisión sea negativa? Es decir, ¿habrá verdaderamente arbitraje? La noticia buena: sí; la noticia mala: cada vez menos. ¿Por qué? El mercado cada vez es más eficiente.

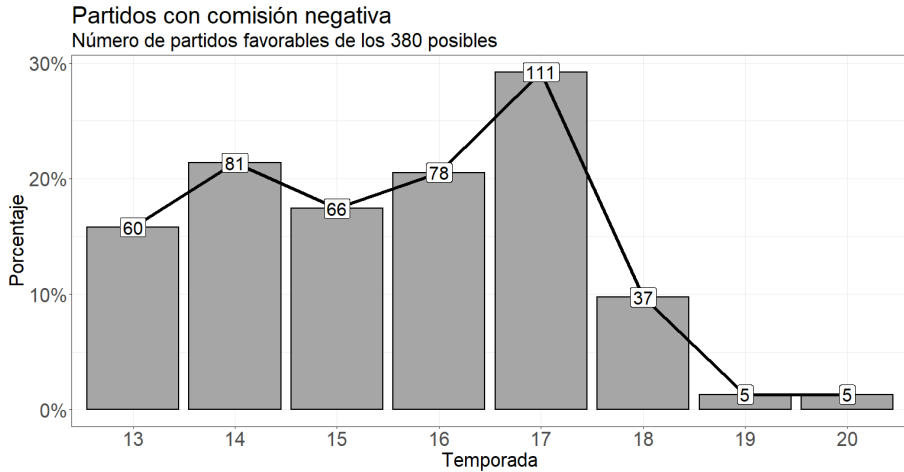


Figura C.4. Número y proporción de partidos con comisión negativa por temporada, lo cual implica una esperanza positiva.

Hace un momento se observó que la comisión no es fija ni para cada casa de apuesta ni para cada temporada, es variable. Pero, el tamaño de la comisión cobrada *dependerá* de otra variable? O al menos, ¿estará correlacionada con alguna? Por ejemplo, se puede pensar que el apostador está sesgado por sus creencias (WYSIATI) y sobrestima la probabilidades que un evento muy poco probable suceda -*possibility effect*- o en contraparte apoya demás a el equipo favorito -*certainty effect*- (Kahneman, 2003) (Buchdahl, 2016). Haciendo que las casas de apuestas aprovechen estas falacias cognitivas en la comisión.

Se observa que recientemente Pinnacle Sports usa la economía conductual como uno de sus componentes para calcular la comisión a cobrar a partir de la temporada 2018/2019, ver figura C.5. El problema de esto para el apostador es en apuestas *casi seguras*. Pues la comisión cobrada es más alta y esto implica que la ganancia esperada sea aun más baja. Siendo que los partidos con bajo riesgo, en realidad no sean de tan bajo riesgo.

## C.4. Goles Esperados

Como bien se comentó anteriormente, un gol esperado es la probabilidad que un tiro termine en gol. Esta probabilidad es una estimación, y en el caso de Understats se calcula a partir de una red neuronal convolucional. La suma de todos los goles esperados de un equipo en un partido se conoce como xG. La idea es que, al ser el fútbol un juego donde el factor suerte juega un papel

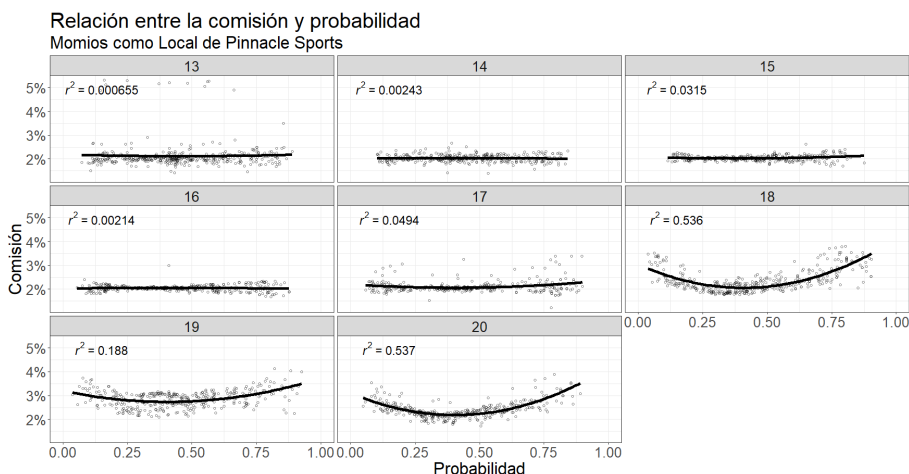


Figura C.5. Regresión cuadrática entre la comisión de Pinnacle Sports y la probabilidad subjetiva corregida de los momios finales de esta misma casa de apuesta.

muy importante debido al alto nivel de habilidades que tienen los jugadores *-luck paradox*, los xG pretenden capturar de forma más completa el resumen del partido. Por ejemplo, el partido del Tottenham contra el Fulham cuyo resultado final fue un doloroso empate a 1 gol. Sin embargo, fue una de las tres mejores actuaciones de este primer equipo en la última temporada de la EPL<sup>4</sup>, llegando a un alto xG de 3.14; tuvieron mala suerte.

Otra estadística que puede resumir aún más la actuación del partido son la diferencia de goles esperados de ambos equipos. Aunque se pierde algo de información, pues no es lo mismo un partido donde ambos xG son de 0.5 o de 5.

En la figura C.6 se ve cómo el Manchester City ha mantenido un excelso desempeño en las últimas temporadas: su distribución de goles esperados no solo tiene su moda en la parte positiva de los xG, sino que es la más positiva de todos los equipos del Big Six -de hecho es la más positiva de toda la EPL de esa temporada. Pero, no tuvo tanta suerte como el Liverpool en la temporada 2019/2020 vez, quedando como subcampeón. Pero para la siguiente temporada, la suerte le correspondió a su, otra vez, gran desempeño, dejándolo como merecido campeón. Por lo visto, para el apostador los xGD (*expected goal difference*) de un equipo puede ser una

<sup>4</sup>Ver las estadísticas del partido en understats.

Diferencia de goles esperados del Big Six  
xG sin penales

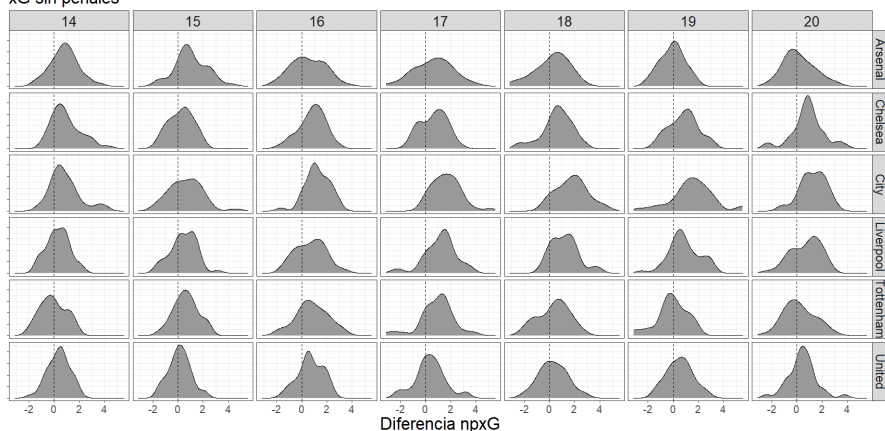


Figura C.6. Densidad estimada de la diferencia de los xG del *Big Six*. No se toman en cuenta los penales para el cálculo final de los xG. Datos de la temporada 2014/2015 a la 2020/2021.

métrica buena métrica de sus desempeños, y, per se, una variable posiblemente útil para predecir el resultado de un nuevo partido.

## C.5. Calificación de los Equipos por EA Sports

El equipo desarrollador del videojuego FIFA tiene analistas que otorgan calificaciones a los equipos semanalmente para poder representar lo más posible la realidad de los equipos a lo hora de jugar con los mismos.

Estas valuaciones, a pesar de ser inciertas puesto que no se conoce la metodología de cómo se estima su valor, son una aproximación al desempeño real de los equipos. Tristemente, es importante resaltar que las variaciones de estas calificaciones en las temporadas es muy baja, por lo que puede que no ilustren totalmente a los equipos en todas las fechas.

Calificación de EA Sports de los equipos de la EPL  
Intervalo de confianza al 99% para la media de calificaciones

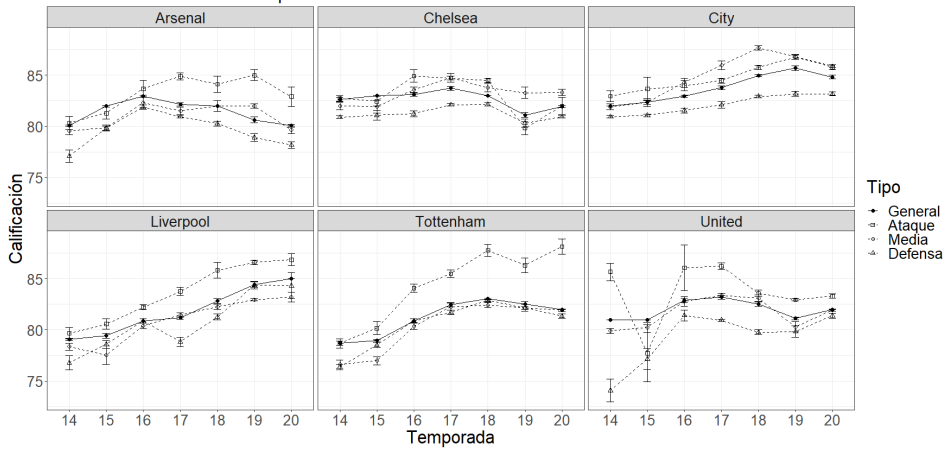


Figura C.7. Calificaciones de EA Sports para el *Big Six*. La línea sólida representa la calificación general del equipo.

Por ejemplo, el Manchester City y el Liverpool son dos equipos que en su calificación general ha ido en aumento; el Manchester United es un equipo con un ataque muy variable; el Chelsea a pesar de ser un equipo que se ha mantenido constante, en la última temporada su calificación general ha sido muy variante; Tottenham, a pesar de tener un ataque brutal, el bajo nivel de su media y defensa ha hecho que su calificación general sea baja, y también que su desempeño real no sea bueno últimamente; el caso Arsenal es un claro ejemplo de un equipo que no ha podido tener una planilla estable y por ende, su desempeño no ha sido el deseable.

Esto refleja en buena medida los resultados finales de las temporadas, aunque no a la perfección. Por ejemplo, el caso Manchester City en la temporada 2019/2021: es el que mejor calificación general tiene pero quedo como subcampeón; como el caso Liverpool de la última temporada: una gran valuación por parte de EA Sports, pero quedó a de 17 puntos del campeón, quedando en tercer lugar, y a solo 2 puntos del cuarto lugar, el Chelsea. Es por esto mismo que el apostador debería fijarse en estos valores para estimar las probabilidades de un encuentro de la EPL, sin embargo, con cautela.

## C.6. Presupuesto de Mercado

Otra variable sugestiva es la cantidad de presupuesto disponible a gastar en la compra de nuevos jugadores por temporada. Pues, entre mayor sea la cartera del equipo, mayores son las posibilidades de adquirir grandes estrellas internacionales.

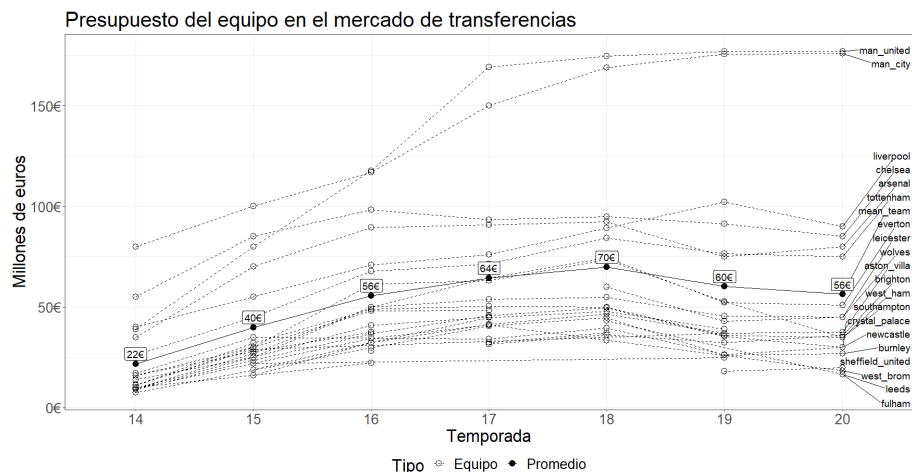


Figura C.8. Presupuesto de los equipos de la EPL, y, la media de presupuesto por temporada.

Los equipos de Manchester son los que históricamente han tenido una mayor cartera para gastar. En el caso del City, esto ha dado muy buenos frutos. Pero no necesariamente para el United. Por lo que, es una variable con cierto poder predictivo pero su veracidad no es del todo fiable. Además, es exorbitante la diferencia entre el promedio de los presupuestos y los equipos de la ciudad de Manchester. En el fútbol el dinero no necesariamente implica títulos, basta recordar el increíble caso Leicester City en la temporada 2015/2016<sup>5</sup>.

## C.7. Ponderación Temporal de los npGD

En el caso de los npGD para los equipos, se tiene la estadística del partido actual. Lo que se requiere es tener un resumen de esta variable a lo

<sup>5</sup>En esta temporada, el equipo del Leicester City, valuado en tan solo 91 millones de euros (comparado contra un promedio de 214 millones de euros), quedó campeón de la EPL. El valor de este equipo era el segundo más bajo de esa temporada. Para ver la tabla completa de las valuaciones de los equipos consultar transfermarkt.

largo del tiempo. Una posibilidad es estimar el promedio de estas variables, pero, ¿a caso un partido de hace 10 años refleja lo mismo que un partido de hace 2 días? Claramente no. Como se vió en la figura C.6, los equipos cambian entre e intra temporadas. Otra posibilidad es ajustar una serie de tiempo ARIMA para cada equipo, pero, ¿las observaciones de los partidos son equiespaciadas? ¿Todos los equipos tienen al menos 60 observaciones disponibles? ¿Existen cambios de estructura de temporada en temporada para los equipos<sup>6</sup>? Las respuestas a estas tres preguntas son: no, ya que hay semanas donde se juegan dos jornadas, semanas donde no se juega absolutamente nada, fechas festivas y vacaciones, estas fechas no son necesariamente estacionales; no, pues hay equipos que solo aparecen una temporada, teniendo 38 observaciones; sí, es evidente que cada temporada al renovar la planilla del equipo, el proceso generador de goles es muy probable que cambie. Por las complicaciones enlistadas anteriormente, de forma heurística el autor propuso resumir los npxGD a través de una ponderación de las verosimilitudes individuales de los datos (WLE).

Supongamos que los datos  $\{X_j\}_j^n$  son valid's, entonces la función de verosimilitud ponderada para los pesos  $\lambda_j$  fijos, tales que  $\sum_k \lambda_k = 1$ , está dada por

$$L(\underline{\theta}, \underline{x}) = \prod_{j=1}^n (f(x_j; \underline{\theta}))^{\lambda_j}. \quad (\text{C.1})$$

Si  $X_j \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , entonces la verosimilitud es

$$L(\mu, \sigma^2; \underline{x}) = \prod_{j=1}^n \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-\left(\frac{x_j - \mu}{\sigma}\right)^2} \right)^{\lambda_j}.$$

Y por tanto, su log-verosimilitud tiene la siguiente forma:

$$l(\mu, \sigma^2; \underline{x}) = -2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \log(\pi) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \lambda_j \log(\sigma^2) - \frac{\sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j - \mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Para encontrar un estimador para la media y la varianza, se procede vía máxima verosimilitud. Como  $\sum_j \lambda_j = 1$  por hipótesis, entonces el gradiente de la log verosimilitud está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mu} &= - \frac{\sum_j \lambda_j (x_j - \mu)}{\sigma^2} \\ \frac{\partial l}{\partial \sigma^2} &= \frac{\sum_j \lambda_j (x_j - \mu)^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^2}. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Para estimar una serie de tiempo ARIMA, unos de los supuestos que pide este modelo son: no hay cambio de niveles, los parámetros son constantes en el tiempo y el ruido blanco es homoscedástico.

Igualando a cero y observando que los puntos críticos corresponden a un máximo, se obtiene que los estimadores máximos verosímiles están dados por

$$\underbrace{\hat{\mu}_{\text{MV}}}_{\bar{X}_\lambda} = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, \quad \underbrace{\hat{\sigma}_{\text{MV}}^2}_{\bar{s}_\lambda^2} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (X_i - \bar{X}_\lambda)^2. \quad (\text{C.2})$$

Es fácil ver que el estimador de la media es insesgado. Aunque para el caso de la varianza se tiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_i - \bar{X}_\lambda)^2] &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[X_i^2] - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbb{E}[X_i X_j] + \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}[X_i^2] - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j \mathbb{E}[X_i X_j] + \sum_{j,k}^n \lambda_j \lambda_k \mathbb{E}[X_j X_k]. \end{aligned}$$

Pero recordando que  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$  y que  $\{X_j\}_j^n$  son variid's, luego  $\mathbb{E}[X_i X_j] = \delta_{i,j} \text{Var}(X) + \mathbb{E}[X]^2$ , donde  $\delta_{i,j}$  es la delta de Kronecker<sup>7</sup>. Entonces la ecuación pasada se simplifica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X_i - \bar{X}_\lambda)^2] &= \mathbb{E}[X^2] - 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j (\delta_{i,j} \sigma^2 + \mu^2) + \sum_{j,k}^n \lambda_j \lambda_k (\delta_{j,k} \sigma^2 + \mu^2) \\ &= (\sigma^2 + \mu^2) - 2(\lambda_i \sigma^2 + \mu^2) + \left( \sigma^2 \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 + \mu^2 \right) \\ &= \sigma^2 \left( 1 - 2\lambda_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{s}_\lambda^2] &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i (X_i - \bar{X}_\lambda)^2\right] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}[(X_i - \bar{X}_\lambda)^2] \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \left( \sigma^2 \left( 1 - 2\lambda_i + \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \right) \right) = \sigma^2 \left( 1 - \sum_{j=1}^n \lambda_j^2 \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, las estadísticas insesgadas están definidas como

$$\bar{X}_\lambda = \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j, \quad \bar{s}_\lambda^2 = \left( \frac{1}{1 - \sum_k \lambda_k^2} \right) \sum_{j=1}^n \lambda_j (X_j - \bar{X}_\lambda)^2. \quad (\text{C.3})$$

---

<sup>7</sup>La delta de Kronecker está definida como  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{i,j} = 0$  cuando  $i \neq j$ .



En otra mano, para encontrar el valor de  $\lambda_j$ , se propuso primero obtener un peso no unitario  $w_j$  para que al rescalarse se volviera un peso unitario. Es decir  $\lambda_j := w_j / \sum_k w_k$ .

Para determinar los pesos  $w_j$ , suponemos que la rapidez con la que decae la importancia de las observaciones es proporcional al tamaño del peso. Es decir  $\frac{dw}{dt} = -\xi w$ , donde  $\xi > 0$ . De esta forma

$$w(t) = e^{-\xi t}. \quad (\text{C.4})$$

En la misma mano, los pesos de las observaciones más cercanas al tiempo inicial  $t_0$  deben ser más grandes que las más lejanas, por eso  $w(t; t_0) = e^{-\xi(t-t_0)}$ , donde  $t_0$  es el tiempo de inicio. Entonces, el peso normalizado  $\lambda_j$  está dado por

$$\lambda_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_j}{\sum_k w_k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^{-\xi(t_j-t_0)}}{\sum_k e^{-\xi(t_k-t_0)}} = \frac{e^{-\xi t_j}}{\sum_k e^{-\xi t_k}}. \quad (\text{C.5})$$

¡Los pesos normalizados no dependen del tiempo inicial  $t_0$ ! Esta pérdida de memoria es importante debido a que el peso  $\lambda_j$  con  $n$  observaciones será proporcional a la misma observación pero con  $m$  observaciones.

Para el caso de los npGD de la EPL, se observa en la gráfica C.9 cómo la proporción  $\xi$  influye en la pérdida de la memoria de los datos. Es de notar que  $\lim_{\xi \rightarrow 0} \bar{X}_{\lambda(\xi)} = \bar{X}$  y  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{X}_{\lambda(\xi)} = X_n$ , donde  $\bar{X}$  es la media muestral y  $X_n$  es la última observación.

La importancia de tener una  $\xi$  sensata reside en representar lo mejor posible la situación actual del equipo sin desechar por completo los datos anteriores. El ejemplo es el Aston Villa: descendido en el 2016 y ascendido a la EPL en el 2019. En este caso el estimador de los npGD varía en el ascenso del 2019 con respecto al último dato observado antes de su descenso en el 2016.

El valor seleccionado para  $\xi$  fue de 0.1 y los tiempos  $\{t_j\}_j^n$  están medidos en semanas<sup>8</sup>. A pesar de ser arbitrario el valor, por la gráfica C.9 se eligió dicho valor. Es interesante ver como el Manchester City tiene una alta variación de sus npGD al principio de cada temporada. Curiosamente, a pesar de ser el equipo que más variabilidad muestra, la temporada 2016/2017 fue de los equipos más consistentes. ¿Habría influido la llegada del director técnico Pep Guardiola al equipo? También, es un hecho que el Covid-19 afectó el comportamiento de los partidos, especialmente para el Aston Villa y

---

<sup>8</sup>La elección de la escala del tiempo en semanas fue tomada de Dixon-Coles (Dixon y Coles, 1997).

Media ponderada para los npxGD de la EPL  
Variando el valor de  $\xi$

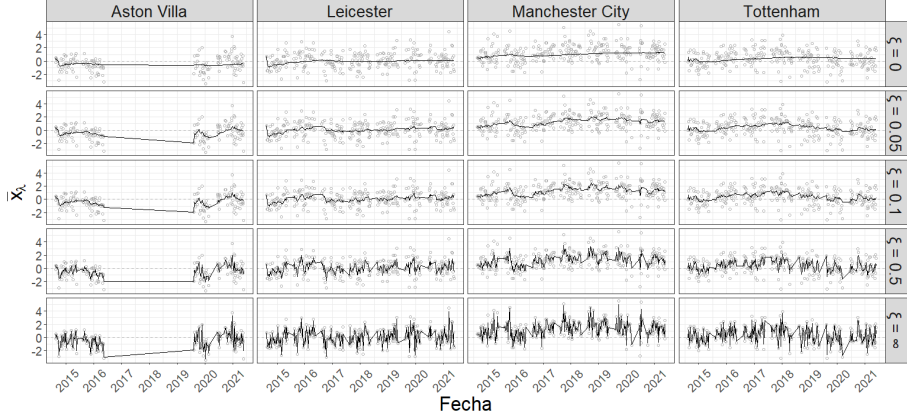


Figura C.9. Media ponderada de los npxGD para distintos valores del factor de decaimiento.

el City. Esto podría ser debido a varios factores: más de tres meses sin jugar, jugadores estrella infectados por la pandemia, condición física muy variante entre jugadores, baja estrategia en las jugadas a causa de entrenamientos nulos en la pandemia, entre otros.

Con esta transformación, el apostador puede tener un resumen suficiente y minimal<sup>9</sup> del comportamiento de goles anotados y recibidos para los equipos al tiempo  $t_n$ <sup>10</sup>.

<sup>9</sup>Un estimador máximo verosímil, por teorema, es suficiente y minimal.

<sup>10</sup>Al tiempo  $t_n$ , los estadísticos son evaluados hasta el tiempo  $t_{n-1}$ , puesto que aún no se observan los npxGD al momento  $n$ .

# Serie de tiempo de la media ponderada del npxD Más/menos una desviación estándar ponderada

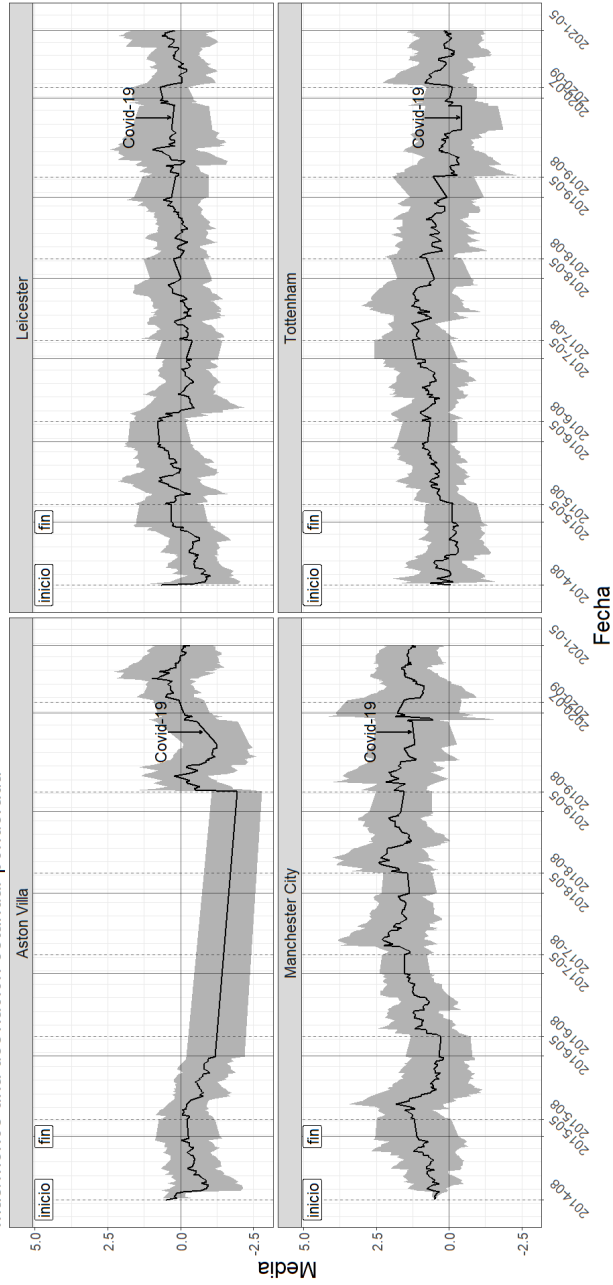


Figura C.10. Media y varianza ponderada, con factor de decaimiento  $\xi = 0.1$ . Las líneas punteadas representan el inicio y final de las temporadas de la EPL.

## Apéndice D

# Descripción de las variables de las bases de datos

Las tres bases de datos que se usaron para la estimación de probailidades como para la obtención de los momios de ciertas casas de apuestas, se enlistarán y describirán a continuación. Las variables utilizadas para la predicción del resultado por partido están marcadas con una daga †; la variable objetivo está marcada por un asterisco \*.

### D.1. Football Data U.K. Variables Obtenidas

Cada registro representa un partido jugado. Estas son algunas variables que contiene la base de datos para la *English Premier League* desde la temporada 2013/2014 hasta la temporada 2020/2021. Se dejaron fuera otro subconjunto de variables, debido a que antes del 2019, los archivos reportados no contenían este conjunto de variables.

- date: Fecha en día/mes/año en que se llevó a cabo el partido.
- hometeam: Equipo que juega como local.
- awayteam: Equipo que juega como visitante.
- fthg: Goles anotados al final del juego del equipo local.
- ftag: Goles anotados al final del juego del equipo visitante.
- ftr: Resultado final. Los posibles valores son:  $H$ ,  $D$ ,  $A$ . Los cuales representan que ganó el local,

empató o que gana el equipo visitante, respectivamente.

- referee: Nombre del arbitro principal que dirigió el encuentro.
- h, d, a. Los momios de la casas de apuestas para los resultados posibles del partido. Se recolecta la información los martes y viernes. Las casas de apuestas son:
  - b365: Bet365.
  - bw: Bwin.
  - iw: Interwetten.
  - ps: Pinnacle Sports.
  - vc: Victor Chandler.
  - wh: William Hill.
- †psch, pscd, psca: Los momios  *finales* de Pinnacle Sports, es decir, un instante antes que el partido comience, para el resultado que gana el equipo local, empate o que gana el equipo visitante.

### Variables Generadas

- †matchweek: La jornada en la que se juegan los respectivos encuentros.
- \*result: La variable  *ftr* renomabrada.
- season: Temporada en la que están jugando. Si la temporada es 2013/2014, se captura 13.
- maxo\_: Los momios  *máximos* para los tres posibles resultados (h, d, a) de las seis casas de apuestas mencionadas al principio.  *Nota:* no

se consideran los momios finales de Pinnacle Sports.  *Nota 2:* Estos son los momios utilizados para apostar.

- market\_tracktake: La comisión del mercado. Es decir, la la suma del inverso de los momios máximos encontrados para cada resultado.
- diff\_: La diferencia relativa entre los momios -quitando la comisión respectiva- de los recolectados y los finales de Pinnacle Sports.

## D.2. Understats

La tabla descargada está desglosada por equipo. Cada registro representa un partido que ha jugado un equipo, no el partido per se. Por lo que si hay 380 partidos en la Premier League en una temporada, en esta tabla habrán 760 registros para una temporada.  *Nota:* se eliminan las observaciones para los equipos la primera jornada de cada temporada, porque la varianza entre el último juego de la temporada pasada y del primero de la temporada actual tiende a ser muy grande debido a todos los cambios realizados en el mercado de jugadores.

### Variables Obtenidas

- h\_a: Caracter que representa si el equipo juega como local o visitante, cuyos valores son  *a*,  *h*, respectivamente.
- xG: Número de goles esperados en el partido por el equipo.

- xGA: Número de goles esperados en el partido por el equipo contrario.
- npxG: Número de goles esperados en el partido por el equipo sin tomar en cuenta los penales.
- npxGA: Número de goles esperados en el partido por el equipo contrario sin tomar en cuenta los penales.
- npxGD: Diferencia entre los npxG y npxGA.
- deep<sup>1</sup>: Número de pases completos por el equipo en el último cuarto de la cancha -del lado del equipo contrario-.
- deep\_allowd<sup>1</sup>: Número de pases completos por el equipo contrario en el último cuarto de la cancha -del lado del equipo-.
- scored: Número de goles en el partido anotados por el equipo.
- missed: Número de goles encajados por el equipo contrario en el partido.
- xpts: Número de puntos esperados. Es la esperanza del resultado para el equipo.
- result: Resultado del partido para el equipo. Los posibles valores son *w*, *d*, *l* que representan que el equipo ganó, empató o perdió el partido, respectivamente.
- date: Fecha en año-mes-día en que se llevó a cabo el partido.
- wins, draws, loses: Variables dummies que representan si ganó, empató o perdió el partido el equipo, respectivamente.
- pts: Puntos obtenidos por el resultado del encuentro para el equipo. Ganar, empatar o perder otorga 3, 1 y 0 puntos, correspondientemente.
- ppda.att<sup>1</sup>: Total de pases realizados por el equipo al atacar entre el número de acciones defensivas del equipo contrario (intercepciones + entradas + faltas). Métrica sugerida por Colin Trainor.
- ppda.def<sup>1</sup>: Total de pases realizados por el equipo al defender entre el número de acciones defensivas del equipo contrario.
- ppda\_allowed.att<sup>1</sup>: Total de pases realizados por el equipo contrario al atacar entre el número de acciones defensivas del equipo (intercepciones + entradas + faltas). Métrica sugerida por Colin Trainor.
- ppda\_allowed.def<sup>1</sup>: Total de pases realizados por el equipo contrario al defender entre el número de acciones defensivas del equipo.
- team\_id: Id con el que Understats identifica el equipo.
- team\_name: Nombre con el que Understats identifica el equipo.

---

<sup>1</sup>Estas estadísticas presentan grandes inconsistencias con respecto a la página oficial de Understats. De igual forma, al ser obtenidas mediante un paquete de R y Python, la metodología con las que fueron obtenidas dichas variables es desconocida.

- `league_name`: Nombre con el que Understats identifica la liga.
- `year`: Número de la temporada del partido. Si la temporada es 2013/2014, se captura 2013.
- `matchweek`: Jornada de la temporada del actual partido. Hay 38 jornadas en total.

### Variables Generadas

- `†position_table`: La posición en tablas para la jornada actual previo a los juegos.
- `†total_points`: El total de puntos del equipo para la jornada actual previo a los juegos.
- `†promoted_team`: Variable dummy que indica si el equipo ascendió a la EPL en la presente temporada.
- `†big_six`: Variable dummy que indica si el equipo es un *Big Six*. Es decir si es el equipo es el Arsenal, Chelsea, Liverpool, Manchester City, Manchester United o Tottenham.
- `season`: Son los últimos dos dígitos de la variable *year*.
- `†npGD_ma`: Es el promedio ponderado, con  $\xi = 0.1$ , de los *npGD* desde el primer registro del equipo hasta la presente jornada previo a los juegos.
- `†npGD_var`: Es la varianza ponderada, con  $\xi = 0.1$ , de los *npGD* desde el primer registro del

equipo hasta la presente jornada previo a los juegos.

## D.3. SoFIFA

El webscrap realizado por el autor baja *exactamente* las tablas para cada semana de cada temporada de la página SoFIFA para la EPL. Los datos están retrasados por una jornada, para reflejar el estatus del equipo en la correspondiente semana *previo* a los partidos a disputar.

Cada registro representa un equipo en dicha semana. Existe el caso donde en una semana se reportó más de una vez las estadísticas de los equipos, por lo que solo se consideró el último registro reportado en la página para cada semana. Se usaron los datos de la semana anterior en los casos donde no existe registro para la semana en cuestión.

### Variables Obtenidas

- `name_team`: Nombre del con el que SoFIFA identifica al equipo.
- `id`: Id del con el que SoFIFA identifica al equipo.
- `†ova`: Calificación del 1 al 100 del desempeño general del equipo hasta dicha semana.
- `†att`: Calificación del 1 al 100 del ataque del equipo hasta dicha semana.
- `†mid`: Calificación del 1 al 100 de la media del equipo hasta dicha semana.

- `†def`: Calificación del 1 al 100 de la defensa del equipo hasta dicha semana.
  - `†transfer_budget`: Presupuesto para el mercado de transferencias, en millones de euros, del equipo para dicha temporada.
  - `speed`<sup>2</sup>: Tipo de velocidad con la que juega el equipo.
  - `dribbling`: Tipo del número de filigranas con la que juega el equipo<sup>2</sup>.
  - `passing`: Tipo de pases con la que juega el equipo. Pueden ser pases muy arriesgados, normales o seguros<sup>2</sup>.
  - `positioning`<sup>2</sup>: Formación con la que juega el equipo.
  - `crossing`<sup>2</sup>: Tipo de cambios de banda en los pases con la que juega el equipo.
  - `agression`<sup>2</sup>: Agresividad con la que defiende el equipo.
  - `pressure`<sup>2</sup>: Presión con la que defiende el equipo.
  - `team_width`: Amplitud de la formación con la que juega el equipo.
  - `defender.line`<sup>2</sup>: Tipo de marca con la que defiende el equipo.
  - `dp`: Número del prestigio doméstico del equipo. Se califica del 1 al 20.
  - `†ip`: Número del prestigio internacional del equipo. Se califica del 1 al 20.
  - `players`: Número de jugadores registrados por parte del equipo para jugar en la presente temporada de la EPL.
  - `†saa`: Promedio de la edad del cuadro inicial<sup>3</sup> de esa temporada a esa fecha.
  - `taa`: Promedio de la edad del equipo de esa temporada a esa fecha.
  - `date`: Fecha en año-mes-día en la que SoFIFA publicó los datos de EA Sports de los equipos.
  - `fifa`: Nombre y número del videojuego del FIFA de EA Sports.
  - `year.week`: Fecha en año-semana en la que SoFIFA publicó los datos de EA Sports de los equipos. La fecha está en formato ISO 8601.
- Variables Generadas**
- No se transformaron ni generaron nuevas variables.

---

<sup>2</sup>A pesar de ser variables con excelente información, para las temporadas 2019 en adelante, SoFIFA dejó de actualizar dichos valores y se volvieron constantes para todos los equipos. Por lo que estos datos dejan de ser, en su totalidad, informativos.

<sup>3</sup>El cuadro inicial de un equipo son los 11 jugadores que son titulares.



## D.4. Variables Finales

Se enumeran las variables usadas en los modelos de aprendizaje de máquina como también se menciona la transformación aplicada a cada variable previo al entrenamiento de las redes neuronales. Para mayor claridad, se elimina el sufijo “home” y “away” de las variables, salvo la primera de cada tipo como un delimitador.

1. matchweek <sup>4</sup>	11. npxDGD_var_	21. ova_away <sup>6</sup>
2. position_table_home <sup>5</sup>	12. big_six_	22. att_ <sup>6</sup>
3. total_pts_ <sup>6</sup>	13. promoted_team_	23. mid_ <sup>6</sup>
4. npxDGD_ma_	14. ova_home <sup>6</sup>	24. def_ <sup>6</sup>
5. npxDGD_var_	15. att_ <sup>6</sup>	25. transfer_budget_ <sup>7</sup>
6. big_six_	16. mid_ <sup>6</sup>	26. ip_ <sup>6</sup>
7. promoted_team_	17. def_ <sup>6</sup>	27. saa_ <sup>4</sup>
8. position_table_away <sup>5</sup>	18. transfer_budget_ <sup>7</sup>	28. proba_h
9. total_pts_ <sup>6</sup>	19. ip_ <sup>6</sup>	29. proba_d
10. npxDGD_ma_	20. saa_ <sup>4</sup>	30. proba_a

Nota: las transformaciones de estandarización o normalización tienen como ventana de tiempo una jornada. Por ejemplo, en el caso de los *total\_pts*, el promedio y desviación estándar es con respecto a todos los puntos de los equipos en *esa* jornada.

---

<sup>4</sup>Normalizada. Es decir  $s = (x - x_{(1)}) / (x_{(n)} - x_{(1)})$

<sup>5</sup>Normalizada Inversamente. En otras palabras  $s = (x_{(n)} - x) / (x_{(n)} - x_{(1)})$

<sup>6</sup>Estandarizada. O bien  $t = (x - \bar{x}) / \hat{s}$ .

<sup>7</sup>Normalizada, topado el valor máximo de una observación en 100.

# Bibliografía

- Albrecht, A. & Phillips, D. (2014). Origin of probabilities and their application to the multiverse. *Physical Review D*, 90(12), 123514.
- Anónimo. (2001). Expected Utility Theory. *Notes*, 1.
- Berkeley, I. S. (1997). A revisionist history of connectionism. *Unpublished manuscript*.
- Bernoulli, D. (1954). Exposition of a new theory on the measurement. *Econometrica*, 22(1), 23-36.
- Bishop, C. (1992). Exact calculation of the Hessian matrix for the multilayer perceptron.
- Buchdahl, J. (2016). *Squares & Sharps, Suckers & Sharks: The Science, Psychology & Philosophy of Gambling* (Vol. 16). Oldcastle Books.
- Busseti, E., Ryu, E. K. & Boyd, S. (2016). Risk-constrained Kelly gambling. *The Journal of Investing*, 25(3), 118-134.
- Chavas, J.-P. (2004). *Risk analysis in theory and practice*. Elsevier.
- Cornuejols, G. & Tütüncü, R. (2006). *Optimization methods in finance* (Vol. 5). Cambridge University Press.
- Dixon, M. J. & Coles, S. G. (1997). Modelling association football scores and inefficiencies in the football betting market. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 46(2), 265-280.

- English Premier League Origins. (2021). <https://www.premierleague.com/history/origins>
- Friedman, J., Hastie, T., Tibshirani, R. y col. (2001). *The elements of statistical learning* (Vol. 1). Springer series in statistics New York.
- Gal, Y. & Ghahramani, Z. (2016). Dropout as a bayesian approximation: Representing model uncertainty in deep learning. *international conference on machine learning*, 1050-1059.
- Géron, A. (2019). *Hands-on machine learning with Scikit-Learn, Keras, and TensorFlow: Concepts, tools, and techniques to build intelligent systems*. O'Reilly Media.
- Goodfellow, I., Bengio, Y. & Courville, A. (2016). *Deep Learning* [<http://www.deeplearningbook.org>]. MIT Press.
- Hakansson, N. H. & Ziemba, W. T. (1995). Capital growth theory. *Handbooks in operations research and management science*, 9, 65-86.
- Hens, T. & Riege, M. O. (2016). *Financial economics: A concise introduction to classical and behavioral finance*. Springer.
- Hinton, G. E., Srivastava, N., Krizhevsky, A., Sutskever, I. & Salakhutdinov, R. R. (2012). Improving neural networks by preventing co-adaptation of feature detectors. *arXiv preprint arXiv:1207.0580*.
- Hubáček, O., Šourek, G. & Železn, F. (2019). Exploiting sports-betting market using machine learning. *International Journal of Forecasting*, 35(2), 783-796.
- Ioffe, S. & Szegedy, C. (2015). Batch normalization: Accelerating deep network training by reducing internal covariate shift. *International conference on machine learning*, 448-456.
- Jakobsson, R., Karlsson, N. y col. (2007). *Testing Market Efficiency in a Fixed Odds Betting Market* (inf. téc.).
- Kahneman, D. (2003). A perspective on judgment and choice: mapping bounded rationality. *American psychologist*, 58(9), 697.

- Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Macmillan.
- Kingma, D. P. & Ba, J. (2017). Adam: A Method for Stochastic Optimization.
- Kreps, D. M. y col. (1990). *A course in microeconomic theory*. Princeton university press.
- Laplace, P.-S. (2012). *A philosophical essay on probabilities*. Courier Corporation.
- Lecuanda, M. (2021). Notas. Economía de la Incertidumbre. *Notas, ITAM*, 1.
- Levin, J. (2006). Choice under uncertainty. *Lecture Notes*, 2.
- Ley Fuerte de los Grandes Números de Borel-Cantelli. (2017). <https://math.la.asu.edu/~naweiss/niu96/borelln.htm#:~:text=Roughly%5C%20speaking%5C%2C%5C%20Borel's%5C%20law%5C%20of,particular%5C%20trial%5C%3B%5C%20the%5C%20larger%5C%20the>
- Madrigal Pérez, B. (2021). El impacto de la falta de afición en los estadios de fútbol sobre el desempeño de los árbitros y jugadores. *Tesis ITAM*, 1.
- Malkiel, B. G. (1999). *A random walk down Wall Street: including a life-cycle guide to personal investing*. WW Norton & Company.
- Markowitz, H. M. (1968). *Portfolio selection*. Yale university press.
- Mendoza, M. & Regueiro, P. (2011). Estadística Bayesiana. *Instituto Tecnológico Autónomo de México*.
- Nielsen, M. A. (2015). *Neural networks and deep learning* (Vol. 25). Determination press San Francisco, CA.
- O'Malley, T., Bursztein, E., Long, J., Chollet, F., Jin, H., Invernizzi, L. y col. (2019). KerasTuner.
- Poincaré, H. & Maitland, F. (2003). *Science and method*. Courier Corporation.
- Poundstone, W. (2010). *Fortune's formula: The untold story of the scientific betting system that beat the casinos and Wall Street*. Hill; Wang.

- Sassoli de Bianchi, M. (2013). Quantum dice. *Annals of Physics*, 336, 56-75.  
<https://doi.org/10.1016/j.aop.2013.05.018>
- Shark, O. (2018). *Germany vs Mexico 2018 World Cup*.  
<https://www.odsshark.com/soccer/world-cup/germany-mexico-odds-june-17-2018-932268>
- Silver, N. (2012). *The signal and the noise: why so many predictions fail—but some don't*. Penguin.
- Smoczynski, P. & Tomkins, D. (2010). An explicit solution to the problem of optimizing the allocations of a bettor's wealth when wagering on horse races. *Mathematical Scientist*, 35(1), 10-17.
- Stanovich, K. E. & West, R. F. (2000). Individual differences in reasoning: Implications for the rationality debate? *Behavioral and brain sciences*, 23(5), 645-665.
- Steele, K. & Stefánsson, H. O. (2020). Decision Theory. En E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2020). Metaphysics Research Lab, Stanford University.
- Sumpter, D. (2016). *Soccermatics: mathematical adventures in the beautiful game*. Bloomsbury Publishing.
- Surowiecki, J. (2005). *The wisdom of crowds*. Anchor.
- Taleb, N. N. (2007). *The black swan: The impact of the highly improbable* (Vol. 2). Random house.
- Thorp, E. O. (1966). *Beat the Dealer: a winning strategy for the game of twenty one* (Vol. 310). Vintage.
- Thorp, E. O. (1969). Optimal gambling systems for favorable games. *Revue de l'Institut International de Statistique*, 273-293.
- Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (2007). *Theory of games and economic behavior (commemorative edition)*. Princeton university press.

Zimmermann, A., Moorthy, S. & Shi, Z. (2013). Predicting college basketball match outcomes using machine learning techniques: some results and lessons learned. *arXiv preprint arXiv:1310.3607*.