ROBSON ARAÚJO LIMA

COMPARAÇÃO DA PRECISÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS DE PASSO SIMPLES E PASSO MÚLTIPLO

BARRA DO BUGRES

2016

ROBSON ARAÚJO LIMA

COMPARAÇÃO DA PRECISÃO DOS MÉTODOS NUMÉRICOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAS ORDINÁRIAS DE PASSO SIMPLES E PASSO MÚLTIPLO

Projeto de conclusão de curso apresentado ao curso de Ciência da Computação da Universidade do Estado de Mato Grosso – UNEMAT, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel, sob orientação do Professor MSc. Luciano Zamperetti Wolski.

BARRA DO BUGRES

2016

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

ED	Equação Diferencial
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
PVI	Problema de Valor Inicial
RK	Runge-Kutta

SUMÁRIO

1 PROJETO DE PESQUISA

1.1 Tema

Ao deparar-se com esse tema, observei o quão importante é o estudo de resoluções de equações diferencias por meio de métodos numéricos. As vezes, a complexidade dessas equações é tamanha que o cálculo numérico ajuda a solucioná-la de uma forma elegante e com resultados próximos aos valores obtidos por meio da solução analítica. Por essa razão exponho de forma clara neste trabalho, métodos muito utilizados para esses tipos de equações.

Por tais razões apresentadas acima escolhi este tema.

1.2 Delimitação

Nesta pesquisa irei trabalhar a solução numérica de equações diferencias ordinárias. Será usado os métodos citado abaixo:

i. Métodos de passo simples

ii. Métodos de passo múltiplo

Em suma, trataremos da análise de complexidade destes algoritmos e faremos a comparação dos resultados com o resultado analítico, avaliando assim, o grau de exatidão de cada método.

1.3 Problema

Como o aumento do poder de processamento dos computadores pessoais, grandes quantidade de cálculo podem ser feitas em questões de segundos. Não é por isso que a qualidade do algoritmo deve ser deixada de lado. Sendo assim, quais métodos numéricos para a resolução de Equações Diferencias Ordinárias (EDO) são mais eficientes? Em quais casos essa eficiência vale a pena? Para ter uma precisão considerável, qual deve ser o tamanho dos valores de entrada desses algoritmos?

1.4 Hipótese

Dentro do contexto de análise de complexidade de algoritmos, busco analisar a quantidade de instruções necessárias para a resolução de um determinado problema. A solução de uma EDO pode não ser tão obvia quanto parece, necessitando de análises numéricas para resolver tais problemas, pois pelo modo analítico – ou seja, manual – o problema pode se tornar mais complexo.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo Geral

Abordar conceitos numéricos para a solução de EDOs, investigando aspectos computacionais e matemáticos dos métodos de passo simples e passo múltiplo.

1.5.2 Objetivos Específicos

i. Elaborar comparações de precisão entre os métodos, usando diferentes valores de entrada;

ii. Realizar análises da complexidade de cada método tanto como sua eficiência;

iii. Comparar graficamente os resultado obtidos;

iv. Averiguar a diferença ou erro que cada método possui em relação ao valor analítico (consideramos valor analítica o valor exato da função) da equação;

1.6 Justificativa

EDOs são ferramentas importantíssimas para a modelagem matemática de problemas do mundo real. Elas podem descrever fenômenos físicos, biológicos, químicos, epidemiológicos etc., quando estes fenômenos são descritos em termos de taxa de variação (CAMPOS, 2001, p. 293). Exemplos práticos que usam EDOs são, taxa de crescimento de uma população de bactérias, taxa de crescimento de uma população de uma cidade ou a propagação de uma doença em um grupo populacional.

Nem sempre é possível resolver uma EDO por meio analítico, ou seja, encontrar a solução para a equação incógnita por meio de funções elementares da matemática. Mesmo equações diferencias com aspecto simples como:

$$y' = x^2 + y^2$$

ou

$$y'' = 6y^2 + x$$

não podem ser resolvidas em termos de funções elementares (BARROSO et al., 1987, p. 275). Um outro exemplo é a equação

$$y' = 1 - 2xy$$

cuja solução

$$y(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$$

não pode ser expressa em termos de funções elementares. Sperandio, Mendes e Silva destaca,

> [...] que em muitos casos os coeficientes ou as funções existentes na equação diferencial são dados somente na forma de um conjunto tabelado de dados experimentais, o que torna impossível o uso de um procedimento analítico para determinar a solução da equação (2003, p. 231).

Para as soluções numéricas não existem limitações, pois são usados valores da variável independente e, pelo menos, um resultado já conhecido da função. Como esses métodos requerem cálculos em vários pontos, a resolução manual não é nem um pouco atrativa, levando ao cansaço e muito suscetível ao erro. Bem, na era digital em que vivemos existe computadores com um alto poder de processamento. Um processador de um computador popular pode chegar a casa de bilhões de cálculos por segundo.

Como visto acima, essas equações descrevem com ajuda da computação uma gama muito grande de problemas do mundo real; visando a importância desse tipo de equação, em meados do século XVIII, ela se transformou em uma disciplina independente. Ainda segundo Sperandio, Mendes e Silva (2003, p. 231) "no final desse mesmo século, a teoria das equações diferencias se transformou num dos estudos mais importantes, em que se destacam as contribuições de Euler, Lagrange e Laplace".

Vale ressaltar que existem EDOs e Equações Diferencias Parciais (EDP) que usam mais de uma variável independente. Para a resolução desta ultima equação são utilizados métodos que não fazem parte do escopo deste trabalho.

Porém, é importante lembrar que esses métodos como outros do cálculo numérico acumulam erros a cada iteração. Uma boa implementação dos métodos é a chave para bons resultados e eficiência. Cada linguagem de programação possui sua particularidade e elas devem ser respeitadas nas implementações de cada método.

Por tais razões apresentadas acimas, entre outras, o uso do cálculo numérico para determinar a solução de equações diferenciais é de suma importância.

1.7 Fundamentação Teórica

Foi visto na seção 1.6 que a modelagem matemática utiliza as equações diferencias como ferramenta para a resolução dos mais variados problemas da física, biologia, epidemiologia e etc. Frequentemente é necessário descrever fenômenos ou sistemas do mundo real em termos matemáticos, levando-se em consideração determinadas metas e variáveis, isso é chamado de *modelo matemático* (ZILL, 2003). Por exemplo, podemos estudar o comportamento de um ecossistema por meio da taxa de variação do crescimento de sua população.

No campo da física encontramos frequentemente equações diferencias que descrevem o comportamento de corpos, e.g., Movimento Uniforme (M.U.), Movimento Uniformemente Variado (M.U.V.), o movimento de um pendulo simples e etc. A busca por esses modelos é chamado de *processo de modelagem* e exigi um conhecimento profundo sobre o assunto assim como conhecimentos de modelagem matemática.

1.7.1 Definição

Antes de começar, é importante entender algumas definições e terminologias básicas sobre o assunto que será tratado.

É perceptível pelo nome que *Equações diferencias* envolve diferenciação, ou seja, é um tipo de equação que envolve derivadas. Essas derivadas podem conter uma ou mais variáveis independentes na mesma equação - isso se tornará mais claro em breve. Diferentemente da álgebra onde é buscado variáveis incógnitas, que são números, as incógnitas das equações diferencias são funções (DIACU, 2004). Por exemplo,

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

a função $x(t)$ é desconhecida, assim como sua primeira derivada. O desafio é encontrar todas as possíveis funções $x(t)$ e $x'(t)$ que satisfaça a igualdade. Em outras palavras podemos dizer, qual a função $x(t)$ que elevado ao quadrado mais t também elevado ao quadrado é igual a derivada da própria função $x(t)$? Esse é um dos principais objetivos na área de equações diferencias.

Podemos ter também *sistemas de equações diferencias*, que constituem um campo bem amplo no estudo de modelagem.

Conforme definido por Edwards e Penny (1995, p. 2) “As leis do universo estão em grande parte escrita em linguagem matemática. [...] os fenômenos naturais mais interessantes envolvem mudança, e são melhor descrito por equações que relacionam quantidades variáveis.”

Equações diferencias podem ser classificadas por *tipo*, *ordem* e *linearidade*. Não será tratado a linearidade das equações, para um aprofundamento consulte a bela obra de (ZILL; CULLEN, 2001). Primeiramente, será classificada a equação segundo seu tipo:

Equação Diferencial Ordinária é um tipo de equação que possui uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas *uma variável independente*. Por exemplo,

$$y' - 5y = 1$$

$$u' - v' = x$$

$$y'' - 2y' + 6y = 0$$

São equação diferencias ordinárias. Observe que em todas as equações apresentadas acima o x é a única variável independente das equações. O y, u e v são variáveis dependentes de x. Para deixar de forma explicita a variável independente nas equações apresentadas acima podemos usar a *notação de Leibniz*,

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 1$$

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

Usaremos a sigla EDO para tratar deste tipo de equação neste trabalho.

Equação Diferencial Parcial é um tipo de equação que possui uma ou mais variáveis dependentes de *duas ou mais variáveis independentes*. Por exemplo,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 3xy\frac{\partial u}{\partial y}^3$$

Observe que nas equações acima as variáveis independentes são x, y, e t. Repare também que na mesma equação existe quantas variáveis independentes quisermos. Não trataremos deste tipo de equação no trabalho presente, nosso principal interesse são EDOs. Usualmente a sigla EDP é usada para se referir a este tipo de equação.

Agora classificaremos as equações segundo sua ordem:

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da maior derivada na equação. Por exemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, pois o primeiro termo da equação tem a segunda derivada. A equação

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

é uma EDP de quarta ordem.

1.7.2 Problema de valor inicial

O principal objetivo desse trabalho será encontrar a solução numérica para um Problema de Valor Inicial (PVI). Um problema de equação diferencial ordinária de primeira ordem submetido a uma condição inicial, i.e., a um valor inicial. Um problema desse tipo tem a forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0, \end{cases}$$

O termo $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ é a equação diferencial ordinária de primeira ordem e $y(x_0)=y_0$ é a condição inicial a qual o problema é submetido. Este tipo de problema ocorre quando procuramos uma solução particular em determinados pontos (x_i,y_i), e.g., digamos $y'=-5x^2$ seja a função $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$, e a nossa condição inicial é $y(1)=2$, ou seja, quando $x_0=1$ temos $y_0=2$ então,

$$\begin{cases} y'=-5x^2 \\ y(1)=2, \end{cases}$$

é como procurar uma curva que representa uma solução no plano xy e que passe pelos pontos de coordenadas $(1,2)$.

Na maioria das situações da vida real, a equação diferencial que modela o problema é muito complicada para ser resolvida com exatidão. Então utiliza-se de métodos que aproxima a solução do problema original, além do mais, dão resultado mais precisos e uma informação mais realista sobre o erro (BURDEN; FAIRES, 2003).

É muito comum na modelagem de problemas do mundo real encontrar problemas que envolveam sistemas de equações diferenciais ordinárias. Pode-se resolver uma equação diferencial de ordem $n>1$ usando um sistema de p equações diferencias ordinárias com p incógnitas:

$$\begin{aligned}
y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_p), \\
y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_p), \\
&\vdots \\
y_p' &= f_p(x, y_1, \ldots, y_p),
\end{aligned}$$

Onde f_i e $y_i(x_0) = \alpha$ são as funções dadas do problema e as condições iniciais respectivamente. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_1 + y_2 + 3x, \\
y_2' &= 2y_1 - y_2 - x,
\end{aligned}$$

e as condições iniciais $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = -1$.

Os métodos numéricos que aproximam a solução aproximada y_i da solução exata $y(x_i)$ - denotaremos sempre a solução exata como $y(x_i)$ e a solução aproximada obtida pelos métodos como y_i - são calculados em pontos discretos, com subintervalos de mesmo tamanho. Desta forma, a solução numérica de um PVI será uma tabela com os pares (x_i, y_i) tomando $y_i \approx y(x_i)$.

O termo *condição inicial* vem dos sistemas físicos em que a variável independente é o tempo, geralmente representa pela letra t (ZILL, 2003).

1.7.3 Solução numérica de EDO

Os *procedimentos numéricos* ou *métodos números* oferecem uma aproximação muito boa da solução exata da equação diferencial. Como foi explanado na Seção 1.6 a importância do cálculo numérico para obter uma aproximação da solução exata, devido algumas EDs não serem passiveis de serem resolvidas analiticamente.

Será abordado brevemente o conceito fundamental dos métodos que resolvem um problema de valor inicial. Primeiramente, deve ser lembrado que em todo procedimento numérico há acumulação de erros a cada iteração. Deve-se ter o máximo de cuidado com tais erros, pois eles podem aumentar consideravelmente e assim levar a resultados inúteis. Podemos destacar os principais erros que acontecem durante as etapas de resolução de um PVI:

i. erro de arredondamento

ii. erro de truncamento local

iii. erro de truncamento global

iv. erro absoluto e relativo[1]

Erro de arredondamento é um tipo de erro que acontece em computadores digitais por armazenarem números da base decimal em um número limitado de *bits*, e também pela capacidade de realizar apenas as quatro operações básicas, soma $(+)$, subtração $(-)$, multiplicação $(\times)$ e divisão$(\div)$.

Erro de truncamento local é um erro inerente ao método numérico. Surge cada vez que se substitui um procedimento matemático infinito por um processo finito ou discreto (SPERANDIO; MENDES; SILVA, 2003). Em outras palavras, é o erro que cada passo carrega a cada iteração.

Erro local de truncamento global já o erro global é o acumulo dos erros dos passos anteriores, também chamado de erro *total* em y_n.

Erro absoluto e relativo frequentemente no calculo numérico é possível estimar o erro ou até delimita-lo, i.e., estabelecer uma cota superior para o erro. É sempre desejável estabelecer uma cota para o erro, pois assim, temos controle da precisão de cada passo. O erro absoluto é definido com segue:

$$|valor\ aproximado - valor\ exato|$$

e o erro porcentual relativo é dado como:

$$|\frac{erro\ absoluto}{valor\ exato} \times 100|$$

No âmbito da resolução de EDs, temos os métodos de passo simples onde cada valor sucessivo y_{k+1} é computado com base somente na informação sobre o valor imediatamente precedente y_n. Já os métodos de múltiplo passo usa os valores de vários passos computados previamente para obter o valor de y_{n+1}.

1.7.3.1 Método de Euler

O *método de Euler* ou *método das retas tangentes* é uma das técnicas de passo simples mais antigas e simples para aproximar uma solução de uma EDO. Desenvolvida por Leonhard Euler (1707-1783) por volta de 1768, é a espinha dorsal para os processos mais sofisticados de solução de EDOs. Por sua simplicidade, é muito utilizada para o ensino, mas não é recomendável para aplicações práticas, uma vez que, para conseguir boas estimativas é necessário muitos cálculos. Computacionalmente é pouco eficiente.

Há diversas maneiras de representação do método de Euler. Uma abordagem simples e algébrica é apresentado abaixo:

[1] Esses não são erros acumulados durante as etapas, mas sim, a diferença entra a solução exata e a aproximada

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Lembre-se que a derivada de uma função é simplesmente uma outra função que descreve a taxa na qual uma variável dependente muda em relação a taxa na qual a variável independente muda (THOMPSON; GARDNER, 1998, tradução nossa). Ou seja, a primeira derivada de uma função é seu coeficiente angular, usando a forma ponto-inclinação podemos então representar o lado esquerdo da função como:

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = f(x,y)$$

Fazendo algumas operações algébricas, temos:

$$y_1 - y_0 = f(x,y)(x_1 - x_0)$$
$$y_1 = y_0 + f(x,y)(x_1 - x_0)$$

chamando $(x_1 - x_0)$ de h e generalizando a equação para qualquer ponto, temos:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \qquad \text{para cada k = 0, 1,..., N - 1}$$

onde h é chamado de *passo* ou *incremento*, frequentemente é definido como

$$h = (b - x_0)/N$$

onde b é o número que defini até onde será feita a aproximação. Quanto menor for h melhor a aproximação da solução. E x_k é definido como $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

A equação 1.7.3.1 é a forma clássica do Método de Euler, a parti desse método foram criados inúmeras formas mais precisas de aproximação, que veremos logo adiante.

1.7.3.2 Métodos de Runge-Kutta

Há várias razões que o método de Euler não é recomendado para o uso prático, entre elas estão as apresentadas por Press et al. (1992, tradução nossa),

i. O método não é muito exato quando comparado aos outros

ii. Não é estável

Um dos principais objetivos do cálculo numérico é oferecer aproximações suficientemente precisas com um mínimo de esforço computacional (BURDEN; FAIRES, 2003). Apresentaremos aqui brevemente alguns dos métodos mais usados na prática por sua alta precisão é custo computacional baixo. Os métodos de Runge-Kutta podem ser utilizados para gerar toda uma solução, mas esses métodos são mais lentos e mais complicados do que os métodos de predição-correção que serão apresentados mais adiante (BRONSON, 1977).

Cada um dos métodos de Runge-Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas. Desenvolvido por Carl David Runge (1856-1927) e Wilhelm Martin Kutta (1867-1944), ambos matemáticos alemães (VALLE, 2012).

Usaremos as siglas RK para denotar Runge-Kutta. Há métodos de RK de várias ordens. Será apresentado os métodos de forma crescente de ordem, ou seja, do método de ordem mais baixa até o método de ordem quatro. Métodos RK são de passos simples.

Runge-Kutta primeira ordem é um procedimento igual ao de Euler. Veja abaixo a equação familiar:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \qquad \text{para cada k = 0, 1,. . . , N - 1}$$

onde podemos escrever de uma forma genérica para seguir o padrão mais conhecido dos métodos de RK:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_1 \end{aligned}$$

Runge-Kutta segunda ordem nessa categoria de métodos, temos não apenas o método clássico de RK segunda ordem, mas métodos melhorados que possuem ordem dois. O primeiro método é chamado de *método do ponto médio*:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{k_1}{2}) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2 \end{aligned}$$

Um dos mais importantes é o *método Modificado de Euler*

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k)) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned}$$

O outro método importante é o *método de Heun*; Karl Heun (1859-1929) foi um matemático alemão que desenvolveu a equação de diferenças mostrada a seguir:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}hk_1) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \end{aligned}$$

Runge-Kutta terceira ordem

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= f(x_k + h, y_k - k_1 + 2k_2) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{aligned}$$

Runge-Kutta quarta ordem, esse é um dos métodos mais usados na prática por sua precisão:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 &= f(x_k + h, y_k + k_3) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{aligned}$$

Dormand-Prince no inicio da década de 1980 J. R. Dormand e P. J. Prince propuseram um método similar ao de Runge-Kutta, porém de ordem 5 (CAMPOS, 2001):

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(x_k + \frac{1}{5}h, y_k + \frac{1}{5}k1)$$

$$k_3 = hf(x_k + \frac{3}{10}h, y_k + \frac{3}{40}k1 + \frac{9}{40}k2)$$

$$k_4 = hf(x_k + \frac{4}{5}h, y_k + \frac{44}{45}k1 + \frac{-56}{15}k2 + \frac{32}{9}k3)$$

$$k_5 = hf(x_k + \frac{8}{9}h, y_k + \frac{19372}{6561.0}k1 + \frac{-25360}{2187.0}k2 + \frac{64448}{6561.0}k3 + \frac{-212}{729.0}k4)$$

$$k_6 = hf(x_k + 1h, y_k + \frac{9017}{3168}k1 + \frac{-355}{33}k2 + \frac{46732}{5247}k3 + \frac{49}{176}k4 + \frac{-5103}{18656}k5)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{35}{384}k1 + \frac{500}{1113}k3 + \frac{125}{192}k4 + \frac{-2187}{6784.0}k5 + \frac{11}{84}k6$$

Método de Runge-Kutta-Fehlberg um processo proposto por Erwin Fehlberg - também matemático alemão, no final da década de 1960, utiliza dois métodos de ordens diferentes, um de ordem 4 e outro de ordem 5. O método de Runge-Kutta-Fehlberg é considerado um método de ordem 4.

$$k_1 = hf(x_k, y_k)$$

$$k_2 = hf(x_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}k_1)$$

$$k_3 = hf(x_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2)$$

$$k_4 = hf(x_k + \frac{12}{13}h, y_k + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3)$$

$$k_5 = hf(x_k + h, y_k + \frac{439}{216}k_1 - \frac{8}{k_2} + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5$$

Os métodos apresentados acima são alguns dos mais conhecidos da classe dos métodos de Runge-Kutta, existe inúmeros outros métodos.

1.7.3.3 Métodos de Múltiplo passos

Os métodos de múltiplo passos usa os valores de vários passos computados previamente para obter o valor de y_{n+1}. Denotaremos nesta Seção as equações da seguinte forma:

equação de predição: y^P

equação de correção: y^C

equação modificadora: y^M

Método de Adams-Bashforth-Moulton, um dos métodos mais populares de passo múltiplo, preditor-corretor é o de Adams-Bashforth-Moulton de quarta ordem:

$$y_{k+1}^P = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3})$$

$$y_{k+1}^C = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1}^P + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2})$$
$$\text{para k = 3, 4,\ldots, N-1}$$

onde a equação y_{k+1}^P prediz um valor a ser computado e corrigido por y_{k+1}^C. Neste procedimento, é necessário ter computado previamente os valores y_0, y_1, y_2, y_3 por um método de passo simples de quarta ordem, e.g., Runge-Kutta-Fehlberg ou Dormand-Prince.

Método de Milne é também um método de quarta ordem:

$$y_{k+1}^P = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2})$$

$$y_{k+1}^C = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k+1}^P + 4f_k + f_{k-1})$$
$$\text{para k = 3, 4,\ldots, N-1}$$

Também neste procedimento é necessário ter computado previamente os valores y_0, y_1, y_2, y_3. Geralmente utiliza-se o método de RK de ordem 4 para computar os valores iniciais y_0, y_1, y_2, y_3.

Método de Milne modificado através de uma análise de erro nos métodos de predição-correção, pode-se modificar, i.e., melhorar o valor predito.

$$y_{k+1}^{P} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2})$$

$$y_{k+1}^{M} = y_{k+1}^{P} + \frac{28}{29}(y_k - y_k^{P})$$

$$y_{k+1}^{C} = y_{k-1} + \frac{h}{3}(f_{k+1}^{M} + 4f_k + f_{k-1})$$

para k = 4, 5,. . . , N-1

Método de Hamming trata-se de outro método de quarta ordem; utiliza a mesma equação de predição que o método de Milne:

$$y_{k+1}^{P} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2})$$

$$y_{k+1}^{C} = \frac{1}{8}(9y_k - y_{k-2}) + \frac{3h}{8}(f_{k+1}^{P} + 2f_k - f_{k-1})$$

para k = 3, 4,. . . , N-1

Método de Hamming modificado

$$y_{k+1}^{P} = y_{k-3} + \frac{4h}{3}(2f_k - f_{k-1} + 2f_{k-2})$$

$$y_{k+1}^{M} = y_{k+1}^{P} + \frac{112}{121}(y_k - y_k^{P})$$

$$y_{k+1}^{C} = y_{k-1} + \frac{1}{8}(9y_k - y_{k-2}) + \frac{3h}{8}(f_{k+1}^{M} + 2f_k - f_{k-1})$$

para k = 4, 5,. . . , N-1

Nenhum dos métodos modificados acima poder ser utilizado sem que se conheçam previamente os valores de y_0, y_1, y_2, y_3 e y_4. O valor y_4 se calcula pelo correspondente método de predição-correção não-modificado (BRONSON, 1977).

1.7.4 Análise da complexidade

Neste trabalho será realizado a análise de complexidade dos métodos de passo simples e múltiplo. Todos esses métodos possuem uma ordem de complexidade baixa, i.e., são algoritmos simples que envolvem apenas as quatro operações fundamentais.

Análise da complexidade ou *complexidade computacional* indica quanto esforço é necessário para se aplicar um algoritmo, ou quão custoso ele é (DROZDEK, 2002). A expressão "quantidade de trabalho requerido" também é chamada *complexidade do algoritmo* (TOSCANI; VELOSO, 2002).

Não se pode analisar um algoritmo testando-o em uma máquina real, e.g., em um PC ou em um MAC, pois as especificações de hardware pode variar, como o processador e a quantidade de memória disponível para rodar o programa. Então não é recomendado usar unidades de tempo como nanosegundos ou segundos para comparar um algoritmo - quando esse tipo de medida é usada chamamos de *medida empírica*. Para solucionar esse problema são usados unidades de tempo lógicas para fazer essa análise.

Existe várias formas de medida de análise de um algoritmo, entre elas temos:

Complexidade de tempo uma das medidas de complexidade mais usadas e importante (TOSCANI; VELOSO, 2002) e que receberá maior atenção neste trabalho. Neste tipo de medida é feita uma análise matemática das dificuldades intrínsecas da resolução do problema computacionalmente. De uma forma informal, é estudado funções que nos permite saber a quantidade de instruções necessárias para uma determinada entrada de n elementos.

Complexidade de espaço é a memória usada por um programa. Esta pesquisa não será direcionada a esse tipo de medida.

Para tratarmos quais algoritmos são melhores com uma certa entrada de n elementos será usado a *notação assintótica*. O *comportamento assintótico* descreve a taxa de crescimento de uma função $f(n)$ quando $n \to \infty$ onde n é o número de elementos de entrada. Essa análise é mais procurado quado a entrada é um volume grande de dados. Existem três tipos de notação assintótica:

O-Grande impõe um limite assintótico superior.

Ω *(ômega)* impõe um limite assintótico inferior.

Θ *(theta)* impõe um limite assintótico superior e inferior.

Tais notações são convenientes para descrever a função do tempo de execução no pior caso $T(n)$, que em geral é definida somente sobre tamanhos de entrada inteiros (CORMEN et al., 2002). A mais utilizada é a notação O-Grande, e é a que será utilizada no presente trabalho.

1.8 Metodologia

No desenvolvimento deste trabalho será utilizado a *priori*, a pesquisa exploratória referente a todos os métodos mais utilizados para a resolução de EDOs e sua aplicação em alguma linguagem de programação. Do ponto de vista de Prestes:

> A pesquisa exploratória configura-se como a que acontece na fase preliminar, antes do planejamento formal do trabalho. Ela tem como objetivo proporcionar maiores informações sobre o assunto que vai ser investigado, facilitar a delimitação do tema a ser pesquisado, orientar a fixação dos objetivos e a formulação das hipóteses ou descobrir uma nova possibilidade de enfoque para o assunto (2003, p. 26).

Para o levantamento de dados e para fins de pesquisa e testes, será utilizado a pesquisa bibliográfica, utilizando-se principalmente de livros e artigos sobre o assunto. De acordo com Metring a pesquisa bibliográfica:

> [...] tem a finalidade de conhecer as diferentes formas de contribuição científica já realizadas sobre determinado assunto, visando encontrar dados atuais e relevantes sobre o tema investigado. Utiliza-se exclusivamente de material já elaborado e disponível, em particular livros e artigos científicos, e é a base para qualquer tipo de pesquisa, e também é mais ampla que a pesquisa documental. Como a maioria dos dados já está tratado e analisado, costuma-se nomear este tipo de pesquisa de secundária (2009, p. 63).

1.9 Cronograma

Tabela 1 – Cronograma das atividades previstas

Etapa	1º semestre - 2016				2º semestre - 2016				
	mar.	abr.	maio	ago.	out.	nov.	dez.	jan.	fev.
Pesquisa do tema	x	x	x						
Reunião com o orientador		x	x			x	x	x	
Desenvolvimento do projeto de pesquisa	x	x	x	x					
Desenvolvimento do TCC					x	x	x	x	x
Revisão do TCC							x	x	
Defesa do TCC									x
Entrega do TCC									x

Fonte: Produzido pelo autor

1.10 Orçamento

Tabela 2 – Orçamento previsto

Material	Quantidade	Preço
Impressões	200	R$ 30,00
Cd+Capa	1	R$ 5,00
Livro(s)	1	R$ 62,05
Total		R$ 97,05

Fonte: Produzido pelo autor

REFERÊNCIAS

BARROSO, L. C. et al. *Cálculo numérico: (com aplicações)*. 2. ed. São Paulo: HARBRA, 1987. ISBN 9788529400895. Citado na página 10.

BRONSON, R. *Moderna introdução às equações diferenciais*. São Paulo: McGraw-Hill, 1977. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 22.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Análise Numérica*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. ISBN 852210297. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 17.

CAMPOS, F. F. F. *Algoritmos numéricos*. Rio de Janeiro: LTC, 2001. ISBN 9788521615378. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 19.

CORMEN, T. H. et al. *Algoritmos: teoria e prática*. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2002. ISBN 8535209263. Citado na página 23.

DIACU, F. *Introdução a equações diferencias: teoria e aplicação*. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado na página 12.

DROZDEK, A. *Estrutura de dados e algoritmos em C++*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002. ISBN 8522102953. Citado na página 23.

EDWARDS, C. H.; PENNY, D. E. *Equações diferenciais elementares: com problemas de contorno*. 3. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995. Citado na página 12.

METRING, R. A. *Pesquisas científicas: planejamento para iniciantes*. Curitiba: Juruá, 2009. ISBN 9788536221212. Citado na página 24.

PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 1992. Citado na página 17.

PRESTES, M. L. de M. *A pesquisa e a construção do conhecimento científico: do planejamento aos textos, da escola à academia*. 2. ed. São Paulo: Rêspel, 2003. ISBN 8587069098. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.

SPERANDIO, D.; MENDES, J.; SILVA, L. *Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos*. São Paulo: Prentice Hall, 2003. ISBN 9788587918745. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 16.

THOMPSON, S. P.; GARDNER, M. *Calculus made easy*. New York: St. Martin's Press, 1998. ISBN 0312185480. Citado na página 17.

TOSCANI, L. V.; VELOSO, P. A. S. *Complexidade de algoritmos*. Porto Alegre: Editora Sagra Luzzatto, 2002. (Séries Livros Didáticos, 13). Citado na página 23.

VALLE, K. N. F. *Metodos Numericos de Euler e Runge-Kutta*. Tese (Monografia) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012. Citado na página 18.

ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem*. São Paulo: Thomson, 2003. ISBN 8522103143. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 15.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações diferencias*. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 2001. ISBN 8534612919. Citado na página 12.