Philosophische Modale Prädikatenlogik

Eine sehr kurze Einführung

Conrad Friedrich

Universität zu Köln

January 15, 2017

Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

"Baby Logic" Version

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

1. P
2. Q
3. Also: R

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

1. P
2. Q
3. Also: R

- Mehr Struktur, als wir mit der Aussagenlogik abbilden können

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$.

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$.
2. Ms.

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$.
2. Ms.
3. Also: Ss.

Formalisierung III

- Es gibt genau einen Gott.

Formalisierung III

- Es gibt genau einen Gott.
- gdw. Es gibt ein Ding, das Gott ist, und alle anderen Dinge sind, falls sie Gott sind, identisch mit diesem Ding.

Formalisierung III

- Es gibt genau einen Gott.
- gdw. Es gibt ein Ding, das Gott ist, und alle anderen Dinge sind, falls sie Gott sind, identisch mit diesem Ding.
- gdw. $\exists x(Gx \land \forall y(Gx \to x = y))$.

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$
- Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$
- Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
- Quantorsymbole
  - $\forall, \exists$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$
- Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
- Quantorsymbole
  - $\forall, \exists$
- (Funktionssymbole, Hilfszeichen...)

Grammatik

1. Wenn $t_1, \ldots, t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, \ldots, t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.

Grammatik

1. Wenn $t_1, \ldots, t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, \ldots, t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
   - Fx, Rab

Grammatik

1. Wenn $t_1, \dots, t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, \dots, t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
   - Fx, Rab
2. Wenn A und B Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, $A \to B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$ Formeln.

Grammatik

1. Wenn $t_1, ..., t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, ..., t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
   - Fx, Rab
2. Wenn A und B Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$ Formeln.
3. Wenn A eine Formel ist und x eine Variable, dann sind $\forall xA$ und $\exists xA$ Formeln.

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$
- Qaa

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$
- Qaa
- $Qab \leftrightarrow Qba$

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$
- Qaa
- $Qab \leftrightarrow Qba$
- $(Qab \wedge Qbc) \rightarrow Qac$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \rightarrow Qax)$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$
- $\forall x \exists y Qxy$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x (Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$
- $\forall x \exists y Qxy$

- Variablen, die in einer Formel im Skopus eines Quantors stehen, sind *gebunden*, sonst *frei*.

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$
- $\forall x \exists y Qxy$

- Variablen, die in einer Formel im Skopus eines Quantors stehen, sind *gebunden*, sonst *frei*.
- Formeln, in denen keine freien Variablen vorkommen, heißen *Sätze*.

Semantik

- Wann würden wir *Qab* intuitiv als wahr bezeichnen?

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.
- Px?

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.
- Px?
- Die Variable x hat die Eigenschaft P?

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.
- Px?
- Die Variable x hat die Eigenschaft P?
- Nonsense. Wir können nur *Sätzen* Wahrheitswerte zuordnen (zumindest ohne Weiteres.)

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x Px$ als wahr bezeichnen?

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x P x$ als wahr bezeichnen?
- Wenn *irgendein* Ding P erfüllt.

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x Px$ als wahr bezeichnen?
- Wenn *irgendein* Ding P erfüllt.
- $\forall x Fx$?

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x Px$ als wahr bezeichnen?
- Wenn *irgendein* Ding P erfüllt.
- $\forall x Fx$?
- Wenn *alle* Dinge F erfüllen.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.
  - Wenn P ein n-stelliges Prädikatensymbol ist, dann ist $v(P) \subseteq D^n$.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.
  - Wenn P ein n-stelliges Prädikatensymbol ist, dann ist $v(P) \subseteq D^n$.
- (Tafel)

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - *Fa* ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - Fa ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \land B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - Fa ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n) \rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - *Fa* ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
- $v(\exists xA) = 1$ gdw. **mindestens ein** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - Fa ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
- $v(\exists xA) = 1$ gdw. **mindestens ein** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
  - Eine Formel A gilt in I gdw. $v(I) = 1$.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - *Fa* ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
- $v(\exists xA) = 1$ gdw. **mindestens ein** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
  - Eine Formel A gilt in I gdw. $v(I) = 1$.
  - (Formal unterbestimmt. Was heißt 'erfüllen'?)

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle\partial_a, \partial_a\rangle\ \langle\partial_c, \partial_b\rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle\partial_a, \partial_a\rangle\ \langle\partial_c, \partial_b\rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.
- $\exists x(Qxx \wedge Px)$.

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \, \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.
- $\exists x(Qxx \wedge Px)$.
- $\forall x(Px \rightarrow \exists y Qxy)$.

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle\partial_a, \partial_a\rangle \, \langle\partial_c, \partial_b\rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.
- $\exists x(Qxx \wedge Px)$.
- $\forall x(Px \rightarrow \exists y Qxy)$.
- $\forall x(Px \vee Qxy)$.

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

c ist eine neue Konstante.

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

c ist eine neue Konstante.

$$\frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A}$$

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)} \qquad \frac{\exists x A}{A_x(c)} \qquad \frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A} \qquad \frac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

c ist eine neue Konstante.

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)} \qquad \frac{\exists x A}{A_x(c)} \qquad \frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A} \qquad \frac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

c ist eine neue Konstante.

- $Pc \vdash \exists x Px$?

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)} \qquad \frac{\exists x A}{A_x(c)} \qquad \frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A} \qquad \frac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

c ist eine neue Konstante.

- $Pc \vdash \exists x Px$?
- $\forall x \neg Px \vdash \neg\exists x Px$?

Tableaux-Regeln

Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von x in A durch c ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)} \qquad \frac{\exists x A}{A_x(c)} \qquad \frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A} \qquad \frac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

c ist eine neue Konstante.

- $Pc \vdash \exists x Px$?
- $\forall x \neg Px \vdash \neg\exists x Px$?
- $\exists x \neg Px \vdash \neg\forall x Px$?

Modale Prädikatenlogik

Constant Domain

Vokabular und Grammatik

Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

Vokabular und Grammatik

Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

Vokabular und Grammatik

Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.

Vokabular und Grammatik

Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.
- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Diamond A$ eine Formel.

Vokabular und Grammatik

Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.
- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Diamond A$ eine Formel.
  - $\forall x \Box (Px \land Qx) \to \Box \forall x Px$

Vokabular und Grammatik

Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.
- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Diamond A$ eine Formel.
  - $\forall x \Box (Px \wedge Qx) \rightarrow \Box \forall x Px$
  - $\Box \Diamond \exists x Px \rightarrow \Box \exists x \Diamond (Px \vee Qx)$

Vokabular und Grammatik

Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.
- Wenn A eine Formel ist, dann ist auch $\Diamond A$ eine Formel.
  - $\forall x \Box (Px \wedge Qx) \rightarrow \Box \forall x Px$
  - $\Box \Diamond \exists x Px \rightarrow \Box \exists x \Diamond (Px \vee Qx)$
- Restliche Grammatik wie in der klassischen Prädikatenlogik.

Semantik: Intuitiv

Wir wollen die Logik so erweitern, dass:

Semantik: Intuitiv

Wir wollen die Logik so erweitern, dass:

- Ein Gegenstand in einer Situation eine Eigenschaft haben kann, aber an einer anderen Welt nicht.

Semantik: Intuitiv

Wir wollen die Logik so erweitern, dass:

- Ein Gegenstand in einer Situation eine Eigenschaft haben kann, aber an einer anderen Welt nicht.
- $v(Pa) = 1$ an w_0, aber $v(Pb) = 0$ an w_1.

Semantik: Interpretationen

Die Interpretation I wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v\rangle$ besteht, wobei

Semantik: Interpretationen

Die Interpretation I wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v\rangle$ besteht, wobei

- D wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,

Semantik: Interpretationen

Die Interpretation I wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v\rangle$ besteht, wobei

- D wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- W wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,

Semantik: Interpretationen

Die Interpretation I wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v \rangle$ besteht, wobei

- D wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- W wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- R wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf W ist (d.h. $R \subseteq W \times W$),

Semantik: Interpretationen

Die Interpretation I wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v \rangle$ besteht, wobei

- D wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- W wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- R wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf W ist (d.h. $R \subseteq W \times W$),
- v eine Funktion ist, so dass

Semantik: Interpretationen

Die Interpretation I wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v \rangle$ besteht, wobei

- D wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- W wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- R wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf W ist (d.h. $R \subseteq W \times W$),
- v eine Funktion ist, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.

Semantik: Interpretationen

Die Interpretation I wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v\rangle$ besteht, wobei

- D wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- W wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- R wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf W ist (d.h. $R \subseteq W \times W$),
- v eine Funktion ist, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.
  - Wenn P ein n-stelliges Prädikatensymbol ist und $w \in W$, dann ist $v_w(P) \subseteq D^n$.

Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.

Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.
- Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:

Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.
- Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - $v_w(\neg A) = 1$ gdw. $v_w(A) = 0$.

Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.
- Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - $v_w(\neg A) = 1$ gdw. $v_w(A) = 0$.
  - $v_w(A \wedge B) = 1$ gdw. $v_w(A) = 1$ und $v_w(B) = 1$, sonst 0.

Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.
- Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - $v_w(\neg A) = 1$ gdw. $v_w(A) = 0$.
  - $v_w(A \wedge B) = 1$ gdw. $v_w(A) = 1$ und $v_w(B) = 1$, sonst 0.
  - usw.

Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.
- Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - $v_w(\neg A) = 1$ gdw. $v_w(A) = 0$.
  - $v_w(A \wedge B) = 1$ gdw. $v_w(A) = 1$ und $v_w(B) = 1$, sonst 0.
  - usw.
- $v_w(\Box A) = 1$ gdw. **für alle** $w' \in W$ mit wRw' gilt: $v_{w'}(A) = 1$.

Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.
- Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - $v_w(\neg A) = 1$ gdw. $v_w(A) = 0$.
  - $v_w(A \wedge B) = 1$ gdw. $v_w(A) = 1$ und $v_w(B) = 1$, sonst 0.
  - usw.
- $v_w(\Box A) = 1$ gdw. **für alle** $w' \in W$ mit wRw' gilt: $v_{w'}(A) = 1$.
- $v_w(\Diamond A) = 1$ gdw. **für mindestens ein** $w' \in W$ mit wRw' gilt: $v_{w'}(A) = 1$.

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$ usw., $v_0(P) =$

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$ usw., $v_0(P) =$

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$ usw., $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- $\Box Pa$ an w_1

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$ usw., $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- $\Box Pa$ an w_1
- $\exists x \Box Px$, w_0

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$ usw., $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- $\Box Pa$ an w_1
- $\exists x \Box Px$, w_0
- $\Box \exists x Px$, w_0

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$ usw., $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- $\Box Pa$ an w_1
- $\exists x \Box Px$, w_0
- $\Box \exists x Px$, w_0
- $\forall x \Diamond Px$, w_0

Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation I gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle, \langle w_1, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$ usw., $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- $\Box Pa$ an w_1
- $\exists x \Box Px$, w_0
- $\Box \exists x Px$, w_0
- $\forall x \Diamond Px$, w_0
- $\Diamond \forall x Px$, w_0

Tableaux-Regeln

Alle Regeln der klassischen Prädikatenlogik, relativ zu einer Welt, und die Regeln der modalen Aussagenlogik.

Tableaux-Regeln

Alle Regeln der klassischen Prädikatenlogik, relativ zu einer Welt, und die Regeln der modalen Aussagenlogik.

$$\frac{\forall x A, i}{A_x(a), i} \qquad \frac{\exists x A, i}{A_x(c), i} \qquad \frac{\neg\exists x A, i}{\forall x \neg A, i} \qquad \frac{\neg\forall x A, i}{\exists x \neg A, i}$$

(a kam schon vor.)

(c ist eine neue Konstante.)

Tableaux-Regeln

Alle Regeln der klassischen Prädikatenlogik, relativ zu einer Welt, und die Regeln der modalen Aussagenlogik.

$$\frac{\forall x A, i}{A_x(a), i} \qquad \frac{\exists x A, i}{A_x(c), i} \qquad \frac{\neg\exists x A, i}{\forall x \neg A, i} \qquad \frac{\neg\forall x A, i}{\exists x \neg A, i}$$

(a kam schon vor.)

(c ist eine neue Konstante.)

$$\frac{\begin{array}{c}\Box A, i \\ irj\end{array}}{A, j} \qquad \frac{\Diamond A, i}{\begin{array}{c} irj \\ A, j \end{array}}$$

(j ist neu.)

Tableaux: Beispiele

K ist eine Logik ohne Beschränkung der Relation R der Interpretationen.

1. $\vdash_K \forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$?

Tableaux: Beispiele

K ist eine Logik ohne Beschränkung der Relation R der Interpretationen.

1. $\vdash_K \forall x \Box Px \to \Box \forall x Px$?
2. $\vdash_K \Box \forall x Px \to \forall x \Box Px$?

Tableaux: Beispiele

K ist eine Logik ohne Beschränkung der Relation R der Interpretationen.

1. $\vdash_K \forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$?
2. $\vdash_K \Box \forall x Px \rightarrow \forall x \Box Px$?
3. $\vdash_K \exists x \Box Px \rightarrow \Box \exists x Px$?

Tableaux: Beispiele

K ist eine Logik ohne Beschränkung der Relation R der Interpretationen.

1. $\vdash_K \forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$?
2. $\vdash_K \Box \forall x Px \rightarrow \forall x \Box Px$?
3. $\vdash_K \exists x \Box Px \rightarrow \Box \exists x Px$?
4. $\vdash_K \Box \exists x Px \rightarrow \exists x \Box Px$?

Philosophische Probleme und Fragen

Barcan-Formel

- Constant Domain Prädikatenlogik kommt mit einem heftigen Commitment:

  Barcan Formula (BF): $\forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$

Barcan-Formel

- Constant Domain Prädikatenlogik kommt mit einem heftigen Commitment:

  $$\text{Barcan Formula (BF): } \forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$$

- BF ist Theorem von K (und jeder stärkeren Logik).

Barcan-Formel

- Constant Domain Prädikatenlogik kommt mit einem heftigen Commitment:

  Barcan Formula (BF): $\forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$
- BF ist Theorem von K (und jeder stärkeren Logik).
- Wie lässt sich das interpretieren? Nehme an, das Antezedens von BF gilt an w_0: Alle Dinge an w_0 haben die Eigenschaft P notwendigerweise. Dann gilt nach BF auch das Konsequenz: An allen Welten gilt $\forall x Px$.