# Philosophische Modale Prädikatenlogik

## Eine sehr kurze Einführung

Conrad Friedrich

Universität zu Köln

January 20, 2017

# Prädikatenlogik

"Baby Logic" Version

Notation stark an Priest (2008) angelehnt.

# Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $P$
2. $Q$
3. Also: $R$

- Mehr Struktur, als wir mit der Aussagenlogik abbilden können

# Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$
2. $Ms$
3. Also: $Ss$

# Formalisierung

- Es gibt genau einen Gott.
- gdw. Es gibt ein Ding, das Gott ist, und alle anderen Dinge sind, falls sie Gott sind, identisch mit diesem Ding.
- gdw. $\exists x(Gx \wedge \forall y(Gy \rightarrow x = y))$.

# Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$
- Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
- Quantorsymbole
  - $\forall, \exists$
- (Funktionssymbole, Hilfszeichen...)

# Grammatik

1. Wenn $t_1, \ldots, t_n$ Variablen oder Konstanten sind und $P$ ein $n$-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, \ldots, t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
   - $Fx$, $Rab$
2. Wenn $A$ und $B$ Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, $A \to B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$ Formeln.
3. Wenn A eine Formel ist und $x$ eine Variable, dann sind $\forall x A$ und $\exists x A$ Formeln.

# Grammatik: Beispiele

Seien $a, b, c$ Konstanten und $P, Q$ Prädikatensymbole. Wie werden diese Formeln gelesen?

- $Pa$, $Qab$
- $\neg Pa$
- $Qaa$
- $Qab \leftrightarrow Qba$
- $(Qab \wedge Qbc) \rightarrow Qac$

# Grammatik: Beispiele

Seien $x, y, z$ Variablen, $a, b, c$ Konstanten und $P, Q$ Prädikatensymbole. Wie werden diese Formeln gelesen?

- $Px$, $Qxy$
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$
- $\forall x \exists y Qxy$

- Variablen, die in einer Formel im Skopus eines zugehörigen Quantors stehen, sind *gebunden*, sonst *frei*.
- Formeln, in denen keine freien Variablen vorkommen, heißen *Sätze*.

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$ ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von $x$ in $A$ durch $c$ ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)} \qquad \frac{\exists x A}{A_x(c)} \qquad \frac{\neg \exists x A}{\forall x \neg A} \qquad \frac{\neg \forall x A}{\exists x \neg A}$$

$a$ ist eine Konstante, die schon vorkam.

$c$ ist eine neue Konstante.

- $Pc \vdash \exists x P x$?
- $\forall x \neg P x \vdash \neg \exists x P x$?
- $\exists x \neg P x \vdash \neg \forall x P x$?

# Semantik

- Wann würden wir $Qab$ intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die $a, b$ stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit $Q$ bezeichnet wird.
- $Px$?
- Die Variable $x$ hat die Eigenschaft $P$?
- Nonsense. Wir können nur *Sätzen* Wahrheitswerte zuordnen (zumindest ohne Weiteres.)

# Semantik

- Wann würden wir intuitiv $\exists x Px$ als wahr bezeichnen?
- Wenn *irgendein* Ding $P$ erfüllt.
- $\forall x Fx$?
- Wenn *alle* Dinge $F$ erfüllen.

# Semantik: Interpretation

Eine Interpretation $I$ besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- $D$ ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über den quantifiziert wird.
- $v$ ist eine Funktion, so dass
  - Wenn $c$ eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.
  - Wenn $P$ ein $n$-stelliges Prädikatensymbol ist, dann ist $v(P) \subseteq D^n$.
- (Tafel)

# Semantik: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - $Fa$ ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von $a$) in $v(F)$ (der Extension von $F$) enthalten ist
- Restliche Konnektive genau wie in der Aussagenlogik.
  - $v(\neg A) = 1$ gdw $v(A) = 0$, sonst 0.
  - $v(A \wedge B) = 1$ gdw $v(A) = 1$ und $v(B) = 1$, sonst 0.
  - usw.

- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches $A$ erfüllt, sonst 0.
- $v(\exists xA) = 1$ gdw. **mindestens ein** Objekt des Gegenstandsbereiches $A$ erfüllt, sonst 0.
  - Eine Formel $A$ gilt in $I$ gdw. $v(A) = 1$.
  - (Formal unterbestimmt. Was heißt 'erfüllen'?)

# Semantik: Interpretation Beispiel

Konstanten: $a, b, c$. Prädikatensymbole: $P, Q$.
Sei $I$ gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle\partial_a, \partial_a\rangle \langle\partial_c, \partial_b\rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in $I$?

- $Pa \vee Qac$.
- $\exists x(Qxx \wedge Px)$.
- $\forall x(Px \rightarrow \exists y Qxy)$.
- $\forall x(Px \vee Qxy)$.

# Modale Prädikatenlogik

## Constant Domain

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden $\Box$ und $\Diamond$ hinzugefügt.

## Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- Wenn $A$ eine Formel ist, dann ist auch $\Box A$ eine Formel.
- Wenn $A$ eine Formel ist, dann ist auch $\Diamond A$ eine Formel.
  - $\forall x \Box (Px \land Qx) \to \Box \forall x Px$
  - $\Box \Diamond \exists x Px \to \Box \exists x \Diamond (Px \lor Qx)$
- Restliche Grammatik wie in der klassischen Prädikatenlogik.

# Tableaux: Regeln

Alle Regeln der klassischen Prädikatenlogik, relativ zu einer Welt, und die Regeln der modalen Aussagenlogik.

$$\frac{\forall x A, i}{A_x(a), i}$$

($a$ kam schon vor oder ist neu.)

$$\frac{\exists x A, i}{A_x(c), i}$$

($c$ ist eine neue Konstante.)

$$\frac{\neg\exists x A, i}{\forall x \neg A, i}$$

$$\frac{\neg\forall x A, i}{\exists x \neg A, i}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\Box A, i \\ irj\end{array}}{A, j}$$

$$\frac{\Diamond A, i}{\begin{array}{c}irj \\ A, j\end{array}}$$

($j$ ist neu.)

# Tableaux: Beispiele

$K$ ist eine Constant Domain Logik ohne Beschränkung der Relation $R$ der Interpretationen.

1. $\vdash_K \forall x \Box Px \rightarrow \Box \forall x Px$?
2. $\vdash_K \Box \forall x Px \rightarrow \forall x \Box Px$?
3. $\vdash_K \exists x \Diamond Px \rightarrow \Diamond \exists x Px$?
4. $\vdash_K \Diamond \exists x Px \rightarrow \exists x \Diamond Px$?

# Semantik: Intuitiv

Wir wollen die Logik so erweitern, dass:

- Ein Gegenstand an einer SituationWelt eine Eigenschaft haben kann, aber an einer anderen Welt nicht.
- $v(Pa) = 1$ an $w_0$, aber $v(Pa) = 0$ an $w_1$.

# Semantik: Interpretation

Die Interpretation $I$ wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel $\langle D, W, R, v \rangle$ besteht, wobei

- $D$ wie in der klassischen Prädikatenlogik ein nicht-leerer Gegenstandsbereich ist,
- $W$ wie in der modalen Aussagenlogik eine nicht-leere Menge möglicher Welten ist,
- $R$ wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf $W$ ist (d.h. $R \subseteq W \times W$),
- $v$ eine Funktion ist, so dass
  - Wenn $c$ eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.
  - Wenn $P$ ein $n$-stelliges Prädikatensymbol ist und $w \in W$, dann ist $v_w(P) \subseteq D^n$.

# Semantik

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- $v_{\mathbf{w}}(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v_{\mathbf{w}}(P)$, sonst 0.
- Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - $v_w(\neg A) = 1$ gdw. $v_w(A) = 0$.
  - $v_w(A \wedge B) = 1$ gdw. $v_w(A) = 1$ und $v_w(B) = 1$, sonst 0.
  - usw.
- $v_w(\Box A) = 1$ gdw. **für alle** $w' \in W$ mit $wRw'$ gilt: $v_{w'}(A) = 1$.
- $v_w(\Diamond A) = 1$ gdw. **für mindestens ein** $w' \in W$ mit $wRw'$ gilt: $v_{w'}(A) = 1$.

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation $I$ gegeben durch:

- $D = \{\partial_a, \partial_b\}$
- $W = \{w_0, w_1\}$
- $R = \{\langle w_0, w_0\rangle, \langle w_0, w_1\rangle\}$
- $v(a) = \partial_a$, $v(b) = \partial_b$,
- $v_0(P) = \{\partial_a\}$, $v_1(P) = \{\partial_b\}$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- $\Box Pa$ an $w_0, w_1$
- $\exists x \Box Px$, $w_0$
- $\Box \exists x Px$, $w_0$
- $\forall x \Diamond Px$, $w_0$
- $\Diamond \forall x Px$, $w_0$

# Philosophische Probleme: Barcan Formula

# Barcan Formula

- Constant Domain Prädikatenlogik kommt mit einem heftigen Commitment:

  Barcan Formula (BF): $\forall x \Box A \rightarrow \Box \forall x A$

- BF ist Theorem von K (und jeder stärkeren Logik).
- Wie lässt sich das interpretieren? Nehme an, das Antezedens von BF gilt an $w_0$: Alle Dinge an $w_0$ haben die Eigenschaft $P$ an allen (zugänglichen) Welten. Dann gilt nach BF auch das Konsequenz: An allen Welten gilt $\forall x Px$. D.h. an jeder Welt gilt $Px$ für alle *dort* existierenden Dinge.
- Ist das plausibel? Was ist, wenn an einer Welt $w_1$ andere Dinge existieren als an Welt $w_0$? Dann dürfte $\forall x \Box Px$ an $w_0$ nichts über diese Dinge implizieren.

# Barcan Formula

- Äquivalent zur Barcan Formula:

$$\text{BF*: } \Diamond\exists x A \rightarrow \exists x \Diamond A$$

- BF* auch Theorem von K.
- Intuitiv interpretieren: Wenn es an dieser Welt möglich ist, dass es etwas gibt, das die Eigenschaft $P$ hat, dann gibt es etwas an dieser Welt, von dem es möglich ist, dass es die Eigenschaft $P$ hat.
- D.h. Wenn an irgendeiner (zugänglichen) Welt irgendetwas eine völlig obskure Eigenschaft, dann gibt es an dieser Welt etwas, das möglicherweise diese Eigenschaft hat.

# Barcan Formula: Beispiel

- Beispiel: Wenn es an irgendeiner Welt ein Perpetuum Mobile gibt, dann gibt es an dieser Welt ein Gerät, das möglicherweise ein Perpetuum Mobile ist. D.h. dieses Gerät aus unserer Welt wäre an einer anderen Welt ein Perpetuum Mobile. Aber würden wir wir dann noch von demselben Gerät sprechen?
- Man würde vielleicht gerne so etwas sagen wie: Für alle Dinge auf *dieser* Welt ist es unmöglich, ein Perpetuum Mobile zu sein. Formalisiert: $\forall x \Box \neg Px$.
- An anderen Welten soll es ruhig Dinge geben können, die ein Perpetuum Mobile sind.

# Barcan Formula

- Aber dann beißt uns die Barcan Formula:

$$\text{BF: } \forall x \Box A \to \Box \forall x A.$$

- D.h. sobald wir behaupten dass alle Dinge in dieser Welt notwendigerweise kein Perpetuum Mobile sind, folgt, dass es an *keiner* möglichen Welt ein Perpetuum Mobile gibt. Aber das wollten wir ja gerade nicht ausschließen!
- Es scheint: Unser intuitives Verständnis von Notwendigkeit wird hier nicht adäquat mit dem formalen Modell eingefangen.

# Barcan Formula: Responses

Welche Möglichkeiten gibt es, Constant Domain Modal Predicate Logic gegen den BF-Einwand zu verteidigen?

1. Implizit habe ich von allen möglichen Welten gesprochen, aber eigentlich geht es ja nur um die zugänglichen (R-Relation).
   - So gesehen kann $\forall x \Box \neg Px$ an @ gelten, und es trotzdem Welten mit $\exists x Px$ geben. Die sind aber von @ aus unerreichbar, und daher für modale Aussagen in der aktualen Welt vollkommen irrelevant! Das Problem tritt außerdem immer noch für allen erreichbaren Welten auf.

# Barcan Formula: Responses

Um Constant Domain zu verteidigen könnte man auch sagen:

2. Unser intuitives Verständnis der Quantoren ist falsch. Bisher $\exists x A$ als "es existiert ein x, sodass A" gelesen. Stattdessen: Quantoren quantifizieren nicht über alle existenten Dinge, sondern über alle möglichen Dinge ($\implies$ possibilistische Quantifizierung). BF klingt dann intuitiv plausibel, weil die Quantoren so gelesen werden, dass sie alle irgendwo möglichen Dinge miteinschließen.
   - Allerdings braucht man sehr gute unabhängige Gründe, um so ein kontraintuitives Resultat für eine philosophische Theorie plausibel zu machen. Das heißt aber nicht, dass es die nicht geben kann! (Vergleiche: Es gibt kein Bier mehr!)

# Eine mögliche Lösung: Variable Domain

To the Rescue: Gegenstandsbereich der Quantifizierung variiert je Welt.

- Was heißt das?
- Semantik: Interpretation $I$ wie vorher 4-Tupel $\langle D, W, R, v \rangle$, allerdings wird $v$ verändert, so dass:
  - Wenn $w \in W$, dann $v(w) \subseteq D$.
    - D.h. der Gegenstandsbereich kann von Welt zu Welt variieren.
  - Wenn $a$ Konstante, dann $v(a) \in D$.
    - Das bleibt gleich: Eine Konstante bezeichnet immer dasselbe Objekt.
  - Wenn $P$ n-stelliges Prädikatsymbol, dann $v_w(P) \in D^n$.
    - Und nicht $v_w(P) \in v(w)^n$. Dadurch erlauben wir, dass Dinge auch Prädikate an einer Welt erfüllen können, ohne dass sie dort existieren!

# Variable Domain

Wahrheit in einer Interpretation genau wie vorher, nur:

- $v_w(\forall x A) = 1$ gdw. jedes $\partial \in \mathbf{v}(\mathbf{w})$ Formel $A$ erfüllt.
- $v_w(\exists x A) = 1$ gdw. mindestens ein $\partial \in \mathbf{v}(\mathbf{w})$ Formel $A$ erfüllt.
- D.h. an unterschiedlichen Welten können Quantoren über unterschiedliche Teilmengen von $D$ quantifizieren ( $\Longrightarrow$ aktualistische Quantifizierung).
- Jede Contant Domain Interpretation ist eine spezielle Variable Domain Interpretation mit $v(w_0) = v(w_1) = \ldots$.

# Variable Domain

Welche Auswirkungen hat das?

- ‘Problem’ der klassischen Prädikatenlogik (und der Constant Domain): $v(Pa \rightarrow \exists x Px) = 1$ Tautologie.
- Pegasus ist ein fliegendes Pferd. Also gibt es fliegende Pferde.
- In der Variable Domain kein Problem:
  - $v_w(Pa) = 1$ gdw. $v(a) \in v_w(P)$.
  - Aber $v_w(\exists x Px) = 1$ gdw. mindestens ein Ding $\partial$ **zwei** Bedingungen erfüllt:
    - $\partial \in v_w(P)$ und
    - $\partial \in v(w)$. (Zur Erinnerung: $v(w) \subseteq D$)
- $Pa$ kann also gelten an $w$, während $\exists x Px$ an $w$ nicht gilt!

# Variable Domain: Barcan Formula

Wie löst das unser Problem mit der Barcan Formula?

- BF*: $\Diamond\exists x A \rightarrow \exists x \Diamond A$

- BF* gilt in Variable Domain nicht mehr! Intuitive Lesart: Wenn es an einer Welt der Fall ist, dass es etwas gibt, das $Px$ erfüllt, dann gibt es etwas an dieser Welt, das an einer anderen Welt $Px$ erfüllt.
- Gegenbeispiel. Interpretation $I$ mit
  - $D = \{\partial_a, \partial_b\}$, $W = \{w_0, w_1\}$, $R = \{\langle w_0, w_1\rangle\}$, $v$ eine Fkt. sodass
    - $v_0(P) = \{\}$, $v_1(P) = \{\partial_b\}$,
    - $v(w_0) = \{\partial_a\}$, $v(w_1) = \{\partial_b\}$.

# Ein Argument gegen Existenz eines Objekts an mehreren Welten

Also alles gut? Enter Problem der *transworld identity*.

- Wie kann überhaupt ein und dasselbe Objekt in verschiedenen Welten existieren? Es hat ja dann in einer Welt Eigenschaften, die es in einer anderen Welt nicht hat, also simultan eine Eigenschaft $P$ und nicht die Eigenschaft $P$! Das kann für *alle* Eigenschaften gelten, die es hat! Kann es dann *dasselbe* Objekt sein?

# Lewisian Counterparts

- Extreme Version: David Lewis' Counterparts-Theorie. Ein Ding existiert in nur einer Welt, und steht mit maximal ähnlichen Dingen an anderen Welten in einer Counterpart-Relation. Modalität wird dann zusätzlich über die Counterpart-Relation erzeugt. Die muss jedoch nicht symmetrisch oder transitiv sein!
- Resultierende Logik um einiges schwächer, z.B. gilt selbst in S5 dann nicht mehr $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ u.a.

# Alles halb so wild..

Ein Ding hat eine Eigenschaft immer relativ zu einer Welt, so dass..

- Donald Trump in dieser Welt Republikaner ist,
- ... aber an einer anderen Welt stattdessen Demokrat.
- Dann hat er in dieser Welt die Eigenschaft, potentiell ein Demokrat zu sein.
- Kein Widerspruch!
- Stattdessen vielleicht epistemisches Problem? Wie können wir wissen, welches Objekt in einer anderen Welt dasselbe ist wie in dieser, wenn die Eigenschaften alle anders sind?

# Weitere Probleme

Vergleiche:

- Notwendigerweise ist das Verhältnis von Umfang und Durchmesser eines Kreises irrational.
- Notwendigerweise ist die Anzahl der Planeten gerade.
- Sind diese Sätze wahr/falsch?
- Rigid/Non-Rigid Designators

# References


- Fitting, Melvin und Mendelsohn, Richard L. First Order Modal Logic. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- Garson, James. Modal Logic, Spring 2016 Edition. The Stanford Encyclopedia of Philosophy.
- Leary, Christopher C. und Kristiansen, Lars. A Friendly Introduction to Mathematical Logic. 2nd Edition. Milne Library, 2015.
- Priest, Graham. Introduction to Non-Classical Logic - From If to Is. 2nd ed. Cambridge University Press, 2008.