Modale Prädikatenlogik

Eine sehr kurze Einführung

Conrad Friedrich

Universität zu Köln

January 14, 2017

Prädikatenlogik

Prädikatenlogik

“Baby Logic” Version

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

1. P
2. Q
3. Also: R

Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

1. P
2. Q
3. Also: R

- Mehr Struktur, als wir mit der Aussagenlogik abbilden können

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $\forall x(Mx \to Sx)$.

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$.
2. Ms.

Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1. $\forall x(Mx \to Sx)$.
2. Ms.
3. Also: Ss.

Formalisierung III

- Es gibt genau einen Gott.

Formalisierung III

- Es gibt genau einen Gott.
- gdw. Es gibt ein Ding, das Gott ist, und alle anderen Dinge sind, falls sie Gott sind, identisch mit diesem Ding.

Formalisierung III

- Es gibt genau einen Gott.
- gdw. Es gibt ein Ding, das Gott ist, und alle anderen Dinge sind, falls sie Gott sind, identisch mit diesem Ding.
- gdw. $\exists x(Gx \wedge \forall y(Gx \rightarrow x = y))$.

Vokabular

- Variablen
    - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$

Vokabular

- Variablen
    - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
    - $P\mathbf{c}$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \to S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \to \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$
- Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$

Vokabular

- Variablen
  - $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \to S\mathbf{x})$
- Konstanten
  - $P\mathbf{c}$
- Prädikatensymbole (n-stellig)
  - $\forall x(\mathbf{M}x \to \mathbf{S}x)$, $\mathbf{G}xy$
- Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - $\neg, \to, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
- Quantoren
  - $\forall, \exists$

Grammatik

1. Wenn $t_1, ..., t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, ..., t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.

Grammatik

1. Wenn $t_1, ..., t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, ..., t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
    - Fx, Rab

Grammatik

1. Wenn $t_1, ..., t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, ..., t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
    - Fx, Rab
2. Wenn A und B Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, $A \to B$, $A \land B$, $A \lor B$, $A \leftrightarrow B$ Formeln.

Grammatik

1. Wenn $t_1, ..., t_n$ Variablen oder Konstanten sind und P ein n-stelliges Prädikat ist, dann ist $Pt_1, ..., t_n$ eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
    - Fx, Rab
2. Wenn A und B Formeln sind, dann sind auch $\neg A$, $A \rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \leftrightarrow B$ Formeln.
3. Wenn A eine Formel ist und x eine Variable, dann sind $\forall xA$ und $\exists xA$ Formeln.

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$
- Qaa

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$
- Qaa
- $Qab \leftrightarrow Qba$

Grammatik II: Beispiele

Seien a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Pa, Qab
- $\neg Pa$
- Qaa
- $Qab \leftrightarrow Qba$
- $(Qab \wedge Qbc) \rightarrow Qac$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists xPx$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x (Px \rightarrow Qax)$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x (Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$
- $\forall x \exists y Qxy$

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \rightarrow Qax)$
- $\exists y Qxy$
- $\forall x \exists y Qxy$

- Variablen, die in einer Formel im Skopus eines Quantors stehen, sind *gebunden*, sonst *frei*.

Grammatik III: Beispiele

Seien x, y, z Variablen, a, b, c Konstanten und P, Q Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- Px, Qxy
- $\exists x Px$
- $\forall x(Px \to Qax)$
- $\exists y Qxy$
- $\forall x \exists y Qxy$

- Variablen, die in einer Formel im Skopus eines Quantors stehen, sind *gebunden*, sonst *frei*.
- Formeln, in denen keine freien Variablen vorkommen, heißen *Sätze*.

Semantik

- Wann würden wir *Qab* intuitiv als wahr bezeichnen?

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.
- Px?

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.
- Px?
- Die Variable x hat die Eigenschaft P?

Semantik

- Wann würden wir Qab intuitiv als wahr bezeichnen?
- Wenn die Dinge, für die a, b stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit Q bezeichnet wird.
- Px?
- Die Variable x hat die Eigenschaft P?
- Nonsense. Wir können nur *Sätzen* Wahrheitswerte zuordnen (zumindest ohne Weiteres.)

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x P x$ als wahr bezeichnen?

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x Px$ als wahr bezeichnen?
- Wenn *irgendein* Ding P erfüllt.

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x Px$ als wahr bezeichnen?
- Wenn *irgendein* Ding P erfüllt.
- $\forall x Fx$?

Semantik II

- Wann würden wir intuitiv $\exists x Px$ als wahr bezeichnen?
- Wenn *irgendein* Ding P erfüllt.
- $\forall x Fx$?
- Wenn *alle* Dinge F erfüllen.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v \rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.
  - Wenn P ein n-stelliges Prädikatensymbol ist, dann ist $v(P) \subseteq D^n$.

Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation I besteht aus einem Tupel $\langle D, v\rangle$.

- D ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- v ist eine Funktion, so dass
  - Wenn c eine Konstante ist, dann ist $v(c) \in D$.
  - Wenn P ein n-stelliges Prädikatensymbol ist, dann ist $v(P) \subseteq D^n$.
- (Tafel)

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n) \rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - Fa ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - Fa ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
    - *Fa* ist wahr gdw.
      $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
  - *Fa* ist wahr gdw.
    $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
- $v(\exists xA) = 1$ gdw. **mindestens** ein Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.

Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- $v(Pc_1, ...c_n) = 1$ gdw. $\langle v(c_1), ..., v(c_n)\rangle \in v(P)$, sonst 0.
    - *Fa* ist wahr gdw. $v(a)$ (das Objekt von a) in $v(F)$ (der Extension von F) enthalten ist
- $v(\neg A)$, $v(A \wedge B)$ usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- $v(\forall xA) = 1$ gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
- $v(\exists xA) = 1$ gdw. **mindestens** ein Objekt des Gegenstandsbereiches A erfüllt, sonst 0.
    -

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \, \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.
- $\exists x (Qxx \wedge Px)$.

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle\, \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.
- $\exists x(Qxx \wedge Px)$.
- $\forall x(Px \rightarrow \exists y Qxy)$.

Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten: a, b, c. Prädikatensymbole: P, Q.
Sei I gegeben durch: $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$,
$v(a) = \partial_a$ usw.,
$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$, $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$.
Welche der folgenden Formeln gilt in I?

- $Pa \vee Qac$.
- $\exists x(Qxx \wedge Px)$.
- $\forall x(Px \rightarrow \exists y Qxy)$.
- $\forall x(Px \vee Qxy)$.

Tableaux-Regeln

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

Tableaux-Regeln

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)} \qquad \frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

c ist eine neue Konstante.

Tableaux-Regeln

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

c ist eine neue Konstante.

$$\frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A}$$

Tableaux-Regeln

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

c ist eine neue Konstante.

$$\frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A}$$

$$\frac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$$

Tableaux-Regeln

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

c ist eine neue Konstante.

$$\frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A}$$

$$\frac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$$

- $Pc \vdash \exists x Px$?

Tableaux-Regeln

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)} \qquad \frac{\exists x A}{A_x(c)} \qquad \frac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A} \qquad \frac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$$

a ist eine Konstante, die schon vorkam.

c ist eine neue Konstante.

- $Pc \vdash \exists x Px$?
- $\forall x \neg Px \vdash \neg\exists x Px$?

Tableaux-Regeln

$\dfrac{\forall x A}{A_x(a)}$	$\dfrac{\exists x A}{A_x(c)}$	$\dfrac{\neg\exists x A}{\forall x \neg A}$	$\dfrac{\neg\forall x A}{\exists x \neg A}$
a ist eine Konstante, die schon vorkam.	c ist eine neue Konstante.		

- $Pc \vdash \exists x Px$?

- $\forall x \neg Px \vdash \neg\exists x Px$?
- $\exists x \neg Px \vdash \neg\forall x Px$?