

# Philosophische Modale Prädikatenlogik

Eine sehr kurze Einführung

Conrad Friedrich

Universität zu Köln

January 15, 2017

# Prädikatenlogik

# Prädikatenlogik

“Baby Logic” Version

# Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann

# Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

# Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

1.  $P$
2.  $Q$
3. Also:  $R$

# Formalisierung

1. Alle Menschen sind sterblich
2. Sokrates ist ein Mann
3. Also: Sokrates ist sterblich

1.  $P$
2.  $Q$
3. Also:  $R$

- Mehr Struktur, als wir mit der Aussagenlogik abbilden können

# Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.



# Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1.  $\forall x(Mx \rightarrow Sx).$

# Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1.  $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$ .
2.  $Ms$ .

# Stattdessen: Formalisierung II

1. Alle Menschen sind sterblich.
2. Sokrates ist ein Mensch.
3. Also: Sokrates ist sterblich.

1.  $\forall x(Mx \rightarrow Sx)$ .
2.  $Ms$ .
3. Also:  $Ss$ .

# Formalisierung III

- ▶ Es gibt genau einen Gott.

# Formalisierung III

- ▶ Es gibt genau einen Gott.
- ▶ gdw. Es gibt ein Ding, das Gott ist, und alle anderen Dinge sind, falls sie Gott sind, identisch mit diesem Ding.

# Formalisierung III

- ▶ Es gibt genau einen Gott.
- ▶ gdw. Es gibt ein Ding, das Gott ist, und alle anderen Dinge sind, falls sie Gott sind, identisch mit diesem Ding.
- ▶ gdw.  $\exists x(Gx \wedge \forall y(Gy \rightarrow x = y))$ .

# Vokabular

- ▶ Variablen

- ▶  $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$

# Vokabular

- ▶ Variablen
  - ▶  $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- ▶ Konstanten
  - ▶  $P\mathbf{c}$



# Vokabular

- ▶ Variablen
  - ▶  $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- ▶ Konstanten
  - ▶  $P\mathbf{c}$
- ▶ Prädikatensymbole (n-stellig)
  - ▶  $\forall x(\mathbf{M}_x \rightarrow \mathbf{S}_x), \mathbf{G}_{xy}$

# Vokabular

- ▶ Variablen
  - ▶  $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- ▶ Konstanten
  - ▶  $P\mathbf{c}$
- ▶ Prädikatensymbole (n-stellig)
  - ▶  $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x), \mathbf{G}_{xy}$
- ▶ Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - ▶  $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$

# Vokabular

- ▶ Variablen
  - ▶  $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- ▶ Konstanten
  - ▶  $P\mathbf{c}$
- ▶ Prädikatensymbole (n-stellig)
  - ▶  $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x), \mathbf{G}_{xy}$
- ▶ Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - ▶  $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
- ▶ Quantorsymbole
  - ▶  $\forall, \exists$

# Vokabular

- ▶ Variablen
  - ▶  $\forall \mathbf{x}(M\mathbf{x} \rightarrow S\mathbf{x})$
- ▶ Konstanten
  - ▶  $P\mathbf{c}$
- ▶ Prädikatensymbole (n-stellig)
  - ▶  $\forall x(\mathbf{M}x \rightarrow \mathbf{S}x), \mathbf{G}_{xy}$
- ▶ Konnektive wie in der Aussagenlogik
  - ▶  $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee, \leftrightarrow$
- ▶ Quantorsymbole
  - ▶  $\forall, \exists$
- ▶ (Funktionssymbole, Hilfszeichen...)

# Grammatik

1. Wenn  $t_1, \dots, t_n$  Variablen oder Konstanten sind und  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikat ist, dann ist  $Pt_1, \dots, t_n$  eine (atomare, wohlgeformte) Formel.

# Grammatik

1. Wenn  $t_1, \dots, t_n$  Variablen oder Konstanten sind und  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikat ist, dann ist  $Pt_1, \dots, t_n$  eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
  - ▶  $Fx, Rab$

# Grammatik

1. Wenn  $t_1, \dots, t_n$  Variablen oder Konstanten sind und  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikat ist, dann ist  $Pt_1, \dots, t_n$  eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
  - ▶  $Fx, Rab$
2. Wenn  $A$  und  $B$  Formeln sind, dann sind auch  $\neg A$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \leftrightarrow B$  Formeln.

# Grammatik

1. Wenn  $t_1, \dots, t_n$  Variablen oder Konstanten sind und  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikat ist, dann ist  $Pt_1, \dots, t_n$  eine (atomare, wohlgeformte) Formel.
  - ▶  $Fx, Rab$
2. Wenn  $A$  und  $B$  Formeln sind, dann sind auch  $\neg A$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \leftrightarrow B$  Formeln.
3. Wenn  $A$  eine Formel ist und  $x$  eine Variable, dann sind  $\forall xA$  und  $\exists xA$  Formeln.



# Grammatik II: Beispiele

Seien  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatsymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

# Grammatik II: Beispiele

Seien  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Pa, Qab$

# Grammatik II: Beispiele

Seien  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Pa, Qab$
- ▶  $\neg Pa$

# Grammatik II: Beispiele

Seien  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Pa, Qab$
- ▶  $\neg Pa$
- ▶  $Qaa$

# Grammatik II: Beispiele

Seien  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Pa, Qab$
- ▶  $\neg Pa$
- ▶  $Qaa$
- ▶  $Qab \leftrightarrow Qba$

# Grammatik II: Beispiele

Seien  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Pa, Qab$
- ▶  $\neg Pa$
- ▶  $Qaa$
- ▶  $Qab \leftrightarrow Qba$
- ▶  $(Qab \wedge Qbc) \rightarrow Qac$

# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Px, Q_{xy}$



# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Px, Qxy$
- ▶  $\exists x Px$

# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Px, Qxy$
- ▶  $\exists x Px$
- ▶  $\forall x (Px \rightarrow Qax)$

# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Px, Qxy$
- ▶  $\exists x Px$
- ▶  $\forall x (Px \rightarrow Qax)$
- ▶  $\exists y Qxy$

# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Px, Qxy$
- ▶  $\exists x Px$
- ▶  $\forall x (Px \rightarrow Qax)$
- ▶  $\exists y Qxy$
- ▶  $\forall x \exists y Qxy$

# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Px, Qxy$
  - ▶  $\exists x Px$
  - ▶  $\forall x (Px \rightarrow Qax)$
  - ▶  $\exists y Qxy$
  - ▶  $\forall x \exists y Qxy$
- 
- ▶ Variablen, die in einer Formel im Skopus eines Quantors stehen, sind *gebunden*, sonst *frei*.

# Grammatik III: Beispiele

Seien  $x, y, z$  Variablen,  $a, b, c$  Konstanten und  $P, Q$  Prädikatensymbole. Was wird intuitiv mit diesen Formeln ausgedrückt?

- ▶  $Px, Qxy$
- ▶  $\exists x Px$
- ▶  $\forall x (Px \rightarrow Qax)$
- ▶  $\exists y Qxy$
- ▶  $\forall x \exists y Qxy$
- ▶ Variablen, die in einer Formel im Skopus eines Quantors stehen, sind *gebunden*, sonst *frei*.
- ▶ Formeln, in denen keine freien Variablen vorkommen, heißen *Sätze*.

# Semantik

- ▶ Wann würden wir  $Qab$  intuitiv als wahr bezeichnen?

# Semantik

- ▶ Wann würden wir  $Qab$  intuitiv als wahr bezeichnen?
- ▶ Wenn die Dinge, für die  $a, b$  stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit  $Q$  bezeichnet wird.



# Semantik

- ▶ Wann würden wir  $Qab$  intuitiv als wahr bezeichnen?
- ▶ Wenn die Dinge, für die  $a, b$  stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit  $Q$  bezeichnet wird.
- ▶  $P_x$ ?

# Semantik

- ▶ Wann würden wir  $Qab$  intuitiv als wahr bezeichnen?
- ▶ Wenn die Dinge, für die  $a, b$  stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit  $Q$  bezeichnet wird.
- ▶  $Px$ ?
- ▶ Die Variable  $x$  hat die Eigenschaft  $P$ ?

# Semantik

- ▶ Wann würden wir  $Qab$  intuitiv als wahr bezeichnen?
- ▶ Wenn die Dinge, für die  $a, b$  stehen, tatsächlich die Eigenschaft haben, die mit  $Q$  bezeichnet wird.
- ▶  $Px$ ?
- ▶ Die Variable  $x$  hat die Eigenschaft  $P$ ?
- ▶ Nonsense. Wir können nur *Sätzen* Wahrheitswerte zuordnen (zumindest ohne Weiteres.)

# Semantik II

- ▶ Wann würden wir intuitiv  $\exists x P x$  als wahr bezeichnen?

# Semantik II

- ▶ Wann würden wir intuitiv  $\exists x P x$  als wahr bezeichnen?
- ▶ Wenn *irgendein* Ding  $P$  erfüllt.

# Semantik II

- ▶ Wann würden wir intuitiv  $\exists x P x$  als wahr bezeichnen?
- ▶ Wenn *irgendein* Ding  $P$  erfüllt.
- ▶  $\forall x F x$ ?

# Semantik II

- ▶ Wann würden wir intuitiv  $\exists x P x$  als wahr bezeichnen?
- ▶ Wenn *irgendein* Ding  $P$  erfüllt.
- ▶  $\forall x F x$ ?
- ▶ Wenn *alle* Dinge  $F$  erfüllen.

# Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation  $I$  besteht aus einem Tupel  $\langle D, v \rangle$ .

- ▶  $D$  ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.



# Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation  $I$  besteht aus einem Tupel  $\langle D, v \rangle$ .

- ▶  $D$  ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- ▶  $v$  ist eine Funktion, so dass

# Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation  $I$  besteht aus einem Tupel  $\langle D, v \rangle$ .

- ▶  $D$  ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- ▶  $v$  ist eine Funktion, so dass
  - ▶ Wenn  $c$  eine Konstante ist, dann ist  $v(c) \in D$ .

# Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation  $I$  besteht aus einem Tupel  $\langle D, v \rangle$ .

- ▶  $D$  ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- ▶  $v$  ist eine Funktion, so dass
  - ▶ Wenn  $c$  eine Konstante ist, dann ist  $v(c) \in D$ .
  - ▶ Wenn  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikatensymbol ist, dann ist  $v(P) \subseteq D^n$ .

# Semantik III - Interpretation

Eine Interpretation  $I$  besteht aus einem Tupel  $\langle D, v \rangle$ .

- ▶  $D$  ist der (nicht-leere) Gegenstandsbereich, über die quantifiziert wird.
- ▶  $v$  ist eine Funktion, so dass
  - ▶ Wenn  $c$  eine Konstante ist, dann ist  $v(c) \in D$ .
  - ▶ Wenn  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikatensymbol ist, dann ist  $v(P) \subseteq D^n$ .
- ▶ (Tafel)

## Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- ▶  $v(P_{c_1, \dots, c_n}) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v(P)$ , sonst 0.

# Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- ▶  $v(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v(P)$ , sonst 0.
  - ▶  $Fa$  ist wahr gdw.  
 $v(a)$  (das Objekt von  $a$ ) in  $v(F)$  (der Extension von  $F$ )  
enthalten ist

# Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- ▶  $v(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v(P)$ , sonst 0.
  - ▶  $Fa$  ist wahr gdw.  
 $v(a)$  (das Objekt von  $a$ ) in  $v(F)$  (der Extension von  $F$ )  
enthalten ist
- ▶  $v(\neg A)$ ,  $v(A \wedge B)$  usw. genau wie in der Aussagenlogik.

# Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- ▶  $v(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v(P)$ , sonst 0.
  - ▶  $Fa$  ist wahr gdw.  
 $v(a)$  (das Objekt von  $a$ ) in  $v(F)$  (der Extension von  $F$ )  
enthalten ist
- ▶  $v(\neg A)$ ,  $v(A \wedge B)$  usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- ▶  $v(\forall x A) = 1$  gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches  $A$  erfüllt, sonst 0.



# Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- ▶  $v(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v(P)$ , sonst 0.
  - ▶  $Fa$  ist wahr gdw.  
 $v(a)$  (das Objekt von  $a$ ) in  $v(F)$  (der Extension von  $F$ )  
enthalten ist
- ▶  $v(\neg A)$ ,  $v(A \wedge B)$  usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- ▶  $v(\forall xA) = 1$  gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches  $A$  erfüllt, sonst 0.
- ▶  $v(\exists xA) = 1$  gdw. **mindestens ein** Objekt des Gegenstandsbereiches  $A$  erfüllt, sonst 0.

# Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- ▶  $v(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v(P)$ , sonst 0.
  - ▶  $Fa$  ist wahr gdw.  
 $v(a)$  (das Objekt von  $a$ ) in  $v(F)$  (der Extension von  $F$ )  
enthalten ist
- ▶  $v(\neg A)$ ,  $v(A \wedge B)$  usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- ▶  $v(\forall x A) = 1$  gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches  $A$  erfüllt, sonst 0.
- ▶  $v(\exists x A) = 1$  gdw. **mindestens ein** Objekt des Gegenstandsbereiches  $A$  erfüllt, sonst 0.
  - ▶ Eine Formel  $A$  gilt in  $I$  gdw.  $v(I) = 1$ .

# Semantik IV: Wahrheit in einer Interpretation

- ▶  $v(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v(P)$ , sonst 0.
  - ▶  $Fa$  ist wahr gdw.  
 $v(a)$  (das Objekt von  $a$ ) in  $v(F)$  (der Extension von  $F$ )  
enthalten ist
- ▶  $v(\neg A)$ ,  $v(A \wedge B)$  usw. genau wie in der Aussagenlogik.
- ▶  $v(\forall xA) = 1$  gdw. **jedes** Objekt des Gegenstandsbereiches  $A$  erfüllt, sonst 0.
- ▶  $v(\exists xA) = 1$  gdw. **mindestens ein** Objekt des Gegenstandsbereiches  $A$  erfüllt, sonst 0.
  - ▶ Eine Formel  $A$  gilt in  $I$  gdw.  $v(I) = 1$ .
  - ▶ (Formal unterbestimmt. Was heißt 'erfüllen'?)

# Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten:  $a, b, c$ . Prädikatensymbole:  $P, Q$ .

Sei  $I$  gegeben durch:  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$ ,

$v(a) = \partial_a$  usw.,

$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$ ,  $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$ .

Welche der folgenden Formeln gilt in  $I$ ?

# Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten:  $a, b, c$ . Prädikatensymbole:  $P, Q$ .

Sei  $I$  gegeben durch:  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$ ,

$v(a) = \partial_a$  usw.,

$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$ ,  $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$ .

Welche der folgenden Formeln gilt in  $I$ ?

- $Pa \vee Qac$ .

# Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten:  $a, b, c$ . Prädikatensymbole:  $P, Q$ .

Sei  $I$  gegeben durch:  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$ ,

$v(a) = \partial_a$  usw.,

$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$ ,  $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$ .

Welche der folgenden Formeln gilt in  $I$ ?

- ▶  $Pa \vee Qac$ .
- ▶  $\exists x(Qxx \wedge Px)$ .

# Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten:  $a, b, c$ . Prädikatensymbole:  $P, Q$ .

Sei  $I$  gegeben durch:  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$ ,

$v(a) = \partial_a$  usw.,

$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$ ,  $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$ .

Welche der folgenden Formeln gilt in  $I$ ?

- ▶  $Pa \vee Qac$ .
- ▶  $\exists x(Qxx \wedge Px)$ .
- ▶  $\forall x(Px \rightarrow \exists yQxy)$ .

# Semantik VI: Interpretation Beispiel

Konstanten:  $a, b, c$ . Prädikatensymbole:  $P, Q$ .

Sei  $I$  gegeben durch:  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$ ,

$v(a) = \partial_a$  usw.,

$v(P) = \{\partial_a, \partial_b\}$ ,  $v(Q) = \{\langle \partial_a, \partial_a \rangle \langle \partial_c, \partial_b \rangle\}$ .

Welche der folgenden Formeln gilt in  $I$ ?

- ▶  $Pa \vee Qac$ .
- ▶  $\exists x(Qxx \wedge Px)$ .
- ▶  $\forall x(Px \rightarrow \exists yQxy)$ .
- ▶  $\forall x(Px \vee Qxy)$ .



# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

$a$  ist eine  
Konstante, die  
schon vorkam.

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

$a$  ist eine  
Konstante, die  
schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

$c$  ist eine neue  
Konstante.

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

$a$  ist eine  
Konstante, die  
schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

$c$  ist eine neue  
Konstante.

$$\frac{\neg \exists x A}{\forall x \neg A}$$

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

$a$  ist eine  
Konstante, die  
schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

$c$  ist eine neue  
Konstante.

$$\frac{\neg \exists x A}{\forall x \neg A}$$

$$\frac{\neg \forall x A}{\exists x \neg A}$$

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

$a$  ist eine  
Konstante, die  
schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

$c$  ist eine neue  
Konstante.

$$\frac{\neg \exists x A}{\forall x \neg A}$$

$$\frac{\neg \forall x A}{\exists x \neg A}$$

►  $Pc \vdash \exists x Px?$

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

$a$  ist eine  
Konstante, die  
schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

$c$  ist eine neue  
Konstante.

$$\frac{\neg \exists x A}{\forall x \neg A}$$

$$\frac{\neg \forall x A}{\exists x \neg A}$$

►  $Pc \vdash \exists x Px?$

►  $\forall x \neg Px \vdash \neg \exists x Px?$

# Tableaux-Regeln

## Notation

$A_x(c)$  ist die Formel, die wir erhalten, wenn wir alle freien Vorkommnisse von  $x$  in  $A$  durch  $c$  ersetzen.

$$\frac{\forall x A}{A_x(a)}$$

$a$  ist eine  
Konstante, die  
schon vorkam.

$$\frac{\exists x A}{A_x(c)}$$

$c$  ist eine neue  
Konstante.

$$\frac{\neg \exists x A}{\forall x \neg A}$$

$$\frac{\neg \forall x A}{\exists x \neg A}$$

►  $Pc \vdash \exists x Px?$

►  $\forall x \neg Px \vdash \neg \exists x Px?$

►  $\exists x \neg Px \vdash \neg \forall x Px?$



# Modale Prädikatenlogik

Constant Domain

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden  $\square$  und  $\diamond$  hinzugefügt.

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden  $\Box$  und  $\Diamond$  hinzugefügt.

## Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden  $\Box$  und  $\Diamond$  hinzugefügt.

## Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Box A$  eine Formel.

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden  $\Box$  und  $\Diamond$  hinzugefügt.

## Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Box A$  eine Formel.
- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Diamond A$  eine Formel.

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden  $\Box$  und  $\Diamond$  hinzugefügt.

## Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Box A$  eine Formel.
- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Diamond A$  eine Formel.
  - ▶  $\forall x \Box (Px \wedge Qx) \rightarrow \Box \forall x Px$

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden  $\Box$  und  $\Diamond$  hinzugefügt.

## Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Box A$  eine Formel.
- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Diamond A$  eine Formel.
  - ▶  $\forall x \Box (Px \wedge Qx) \rightarrow \Box \forall x Px$
  - ▶  $\Box \Diamond \exists x Px \rightarrow \Box \exists x \Diamond (Px \vee Qx)$

# Vokabular und Grammatik

## Vokabular

Zum Vokabular werden  $\Box$  und  $\Diamond$  hinzugefügt.

## Grammatik

Wir erweitern die Grammatik der Prädikatenlogik, so dass:

- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Box A$  eine Formel.
- ▶ Wenn  $A$  eine Formel ist, dann ist auch  $\Diamond A$  eine Formel.
  - ▶  $\forall x \Box (Px \wedge Qx) \rightarrow \Box \forall x Px$
  - ▶  $\Box \Diamond \exists x Px \rightarrow \Box \exists x \Diamond (Px \vee Qx)$
- ▶ Restliche Grammatik wie in der klassischen Prädikatenlogik.



# Semantik: Intuitiv

Wir wollen die Logik so erweitern, dass:

# Semantik: Intuitiv

Wir wollen die Logik so erweitern, dass:

- ▶ Ein Gegenstand in einer Situation eine Eigenschaft haben kann, aber an einer anderen Welt nicht.

# Semantik: Intuitiv

Wir wollen die Logik so erweitern, dass:

- ▶ Ein Gegenstand in einer Situation eine Eigenschaft haben kann, aber an einer anderen Welt nicht.
- ▶  $v(Pa) = 1$  an  $w_0$ , aber  $v(Pb) = 0$  an  $w_1$ .

# Semantik: Interpretationen

Die Interpretation  $I$  wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel  $\langle D, W, R, v \rangle$  besteht, wobei

# Semantik: Interpretationen

Die Interpretation  $I$  wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel  $\langle D, W, R, v \rangle$  besteht, wobei

- ▶  $D$  wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,

# Semantik: Interpretationen

Die Interpretation  $I$  wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel  $\langle D, W, R, v \rangle$  besteht, wobei

- ▶  $D$  wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- ▶  $W$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,

# Semantik: Interpretationen

Die Interpretation  $I$  wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel  $\langle D, W, R, v \rangle$  besteht, wobei

- ▶  $D$  wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- ▶  $W$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- ▶  $R$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf  $W$  ist (d.h.  $R \subseteq W \times W$ ),

# Semantik: Interpretationen

Die Interpretation  $I$  wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel  $\langle D, W, R, v \rangle$  besteht, wobei

- ▶  $D$  wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- ▶  $W$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- ▶  $R$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf  $W$  ist (d.h.  $R \subseteq W \times W$ ),
- ▶  $v$  eine Funktion ist, so dass



# Semantik: Interpretationen

Die Interpretation  $I$  wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel  $\langle D, W, R, v \rangle$  besteht, wobei

- ▶  $D$  wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- ▶  $W$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- ▶  $R$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf  $W$  ist (d.h.  $R \subseteq W \times W$ ),
- ▶  $v$  eine Funktion ist, so dass
  - ▶ Wenn  $c$  eine Konstante ist, dann ist  $v(c) \in D$ .

# Semantik: Interpretationen

Die Interpretation  $I$  wird erweitert, so dass sie aus einem 4-tupel  $\langle D, W, R, v \rangle$  besteht, wobei

- ▶  $D$  wie in der klassischen Prädikatenlogik der nicht-leere Gegenstandsbereich ist,
- ▶  $W$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Menge möglicher Welten ist,
- ▶  $R$  wie in der modalen Aussagenlogik eine Relation auf  $W$  ist (d.h.  $R \subseteq W \times W$ ),
- ▶  $v$  eine Funktion ist, so dass
  - ▶ Wenn  $c$  eine Konstante ist, dann ist  $v(c) \in D$ .
  - ▶ Wenn  $P$  ein  $n$ -stelliges Prädikatensymbol ist und  $w \in W$ , dann ist  $v_w(P) \subseteq D^n$ .

# Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- ▶  $v_w(P_{c_1, \dots, c_n}) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v_w(P)$ , sonst 0.

# Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- ▶  $v_w(P_{c_1, \dots, c_n}) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v_w(P)$ , sonst 0.
- ▶ Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:

# Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- ▶  $v_w(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v_w(P)$ , sonst 0.
- ▶ Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - ▶  $v_w(\neg A) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 0$ .

# Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- ▶  $v_w(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v_w(P)$ , sonst 0.
- ▶ Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - ▶  $v_w(\neg A) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 0$ .
  - ▶  $v_w(A \wedge B) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 1$  und  $v_w(B) = 1$ , sonst 0.

# Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- ▶  $v_w(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v_w(P)$ , sonst 0.
- ▶ Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - ▶  $v_w(\neg A) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 0$ .
  - ▶  $v_w(A \wedge B) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 1$  und  $v_w(B) = 1$ , sonst 0.
  - ▶ usw.

# Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- ▶  $v_w(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v_w(P)$ , sonst 0.
- ▶ Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - ▶  $v_w(\neg A) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 0$ .
  - ▶  $v_w(A \wedge B) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 1$  und  $v_w(B) = 1$ , sonst 0.
  - ▶ usw.
- ▶  $v_w(\Box A) = 1$  gdw. **für alle**  $w' \in W$  mit  $wRw'$  gilt:  
 $v_{w'}(A) = 1$ .



# Semantik II

Eine Formel ist nun wahr oder falsch in einer Interpretation *an einer Welt*. Also

- ▶  $v_w(Pc_1, \dots c_n) = 1$  gdw.  $\langle v(c_1), \dots, v(c_n) \rangle \in v_w(P)$ , sonst 0.
- ▶ Ganz analog mit nicht atomaren Formeln:
  - ▶  $v_w(\neg A) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 0$ .
  - ▶  $v_w(A \wedge B) = 1$  gdw.  $v_w(A) = 1$  und  $v_w(B) = 1$ , sonst 0.
  - ▶ usw.
- ▶  $v_w(\Box A) = 1$  gdw. **für alle**  $w' \in W$  mit  $wRw'$  gilt:  $v_{w'}(A) = 1$ .
- ▶  $v_w(\Diamond A) = 1$  gdw. **für mindestens ein**  $w' \in W$  mit  $wRw'$  gilt:  $v_{w'}(A) = 1$ .

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation / gegeben durch:

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$
- ▶  $v(a) = \partial_a$  usw.,  $v_0(P) =$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$
- ▶  $v(a) = \partial_a$  usw.,  $v_0(P) =$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$
- ▶  $v(a) = \partial_a$  usw.,  $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- ▶  $\Box Pa$  an  $w_1$



# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$
- ▶  $v(a) = \partial_a$  usw.,  $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- ▶  $\Box Pa$  an  $w_1$
- ▶  $\exists x \Box Px$ ,  $w_0$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$
- ▶  $v(a) = \partial_a$  usw.,  $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- ▶  $\Box Pa$  an  $w_1$
- ▶  $\exists x \Box Px$ ,  $w_0$
- ▶  $\Box \exists x Px$ ,  $w_0$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$
- ▶  $v(a) = \partial_a$  usw.,  $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- ▶  $\Box Pa$  an  $w_1$
- ▶  $\forall x \Diamond Px$ ,  $w_0$
- ▶  $\exists x \Box Px$ ,  $w_0$
- ▶  $\Box \exists x Px$ ,  $w_0$

# Semantik: Beispiel

Sei eine Interpretation  $I$  gegeben durch:

- ▶  $D = \{\partial_a, \partial_b, \partial_c\}$
- ▶  $W = \{w_0, w_1\}$
- ▶  $R = \{\langle w_0, w_0 \rangle, \langle w_0, w_1 \rangle, \langle w_1, w_1 \rangle\}$
- ▶  $v(a) = \partial_a$  usw.,  $v_0(P) =$

Welche Formeln gelten an der jeweiligen Welt?

- |                            |                                |
|----------------------------|--------------------------------|
| ▶ $\Box Pa$ an $w_1$       | ▶ $\forall x \Diamond Px, w_0$ |
| ▶ $\exists x \Box Px, w_0$ | ▶ $\Diamond \forall x Px, w_0$ |
| ▶ $\Box \exists x Px, w_0$ |                                |