№1

$|\vec{a}| = 2 \quad |\vec{b}| = 5 \quad (\widehat{a,b}) = \frac{2\pi}{3}$

$\vec{p} = \alpha\vec{a} + 17\vec{b} \quad q = 3\vec{a} - \vec{b} \quad \langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = 0$

$\alpha - ?$

$\langle \bar{p}, \bar{q} \rangle = \langle \alpha\bar{a} + 17\bar{b}, 3\bar{a} - \bar{b} \rangle = \langle \alpha\bar{a}, 3\bar{a} - \bar{b} \rangle + \langle 17\bar{b}, 3\bar{a} - \bar{b} \rangle =$

$= \langle \alpha\bar{a}, 3\bar{a} \rangle + \langle \alpha\bar{a}, -\bar{b} \rangle + \langle 17\bar{b}, 3\bar{a} \rangle + \langle 17\bar{b}, -\bar{b} \rangle =$

$= 3\alpha|\vec{a}|^2 - \alpha\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle + 3 \cdot 17\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle - 17|\vec{b}|^2 = 0$

т. к. $(\widehat{a,b}) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \alpha \cdot 4 - \alpha \cdot (-5) + 3 \cdot 17 \cdot (-5) - 17 \cdot 25 = 0$

$17\alpha = 17 \cdot 25 + 17 \cdot 15 \Rightarrow \alpha = 40$

№2

$$G = \left\{ x : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, x_i > 0, i = \overline{1,n} \right\}$$

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \cdot y_1 \\ x_2 \cdot y_2 \\ \dots \\ x_n \cdot y_n \end{pmatrix} \text{ и } \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ x_2^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix} \qquad G - \text{ЛП?}$$

Доказательство:

1) $\forall x, y \in G: x + y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \dots \\ x_n y_n \end{pmatrix} \in G$

2) $\forall x \in G, \forall \alpha \in R: \alpha x = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix} \in G$

3) $\exists e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in G, \forall x \in G: x + e = \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 \\ \dots \\ x_n \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x$

4) $\forall x \in G \ \exists -x = -1 \cdot x = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} \\ \dots \\ \frac{1}{x_n} \end{pmatrix} : x + (-x) = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_1} \\ \dots \\ \frac{x_n}{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = e$

5) $\forall x, y, z \in G: (x + y) + z = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \dots \\ x_n y_n \end{pmatrix} + z = \begin{pmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ \dots \\ x_n y_n z_n \end{pmatrix} = x + \begin{pmatrix} y_1 z_1 \\ \dots \\ y_n z_n \end{pmatrix} = x + (y + z)$

6) $\forall x, y \in G: x + y = \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ \dots \\ x_n y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 x_1 \\ \dots \\ y_n x_n \end{pmatrix} = y + x$

7) $\forall x \in G \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: (\alpha + \beta) x = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha+\beta} \\ \dots \\ x_n^{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^\beta \\ \dots \\ x_n^\beta \end{pmatrix} = \alpha x + \beta x$

8) $\forall x, y \in G \ \forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha(x + y) = \begin{pmatrix} (x_1 y_1)^\alpha \\ \dots \\ (x_n y_n)^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^\alpha y_1^\alpha \\ \dots \\ x_n^\alpha y_n^\alpha \end{pmatrix} = \alpha x + \alpha y$

9) $\forall x \in G \ \forall \alpha, \beta \in R: (\alpha \cdot \beta) x = \begin{pmatrix} x_1^{\alpha\beta} \\ \dots \\ x_n^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1^\beta)^\alpha \\ \dots \\ (x_n^\beta)^\alpha \end{pmatrix} = \alpha(\beta x)$

т.к все 9 условий выполняются $\Rightarrow G$ - ЛП ▨

№3

Доказать: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$H = (\alpha x - \beta y; \gamma y - \alpha z, \beta z - \gamma x)$ - ЛЗ

Док-во:

Пусть $\exists a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, что:

$a_1(\alpha x - \beta y) + a_2(\gamma y - \alpha z) + a_3(\beta z - \gamma x) = 0 \Rightarrow$

$(a_1\alpha - a_3\gamma)x + (a_2\gamma - a_1\beta)y + (a_3\beta - a_2\alpha)z = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a_1\alpha - a_3\gamma = 0 \\ a_2\gamma - a_1\beta = 0 \\ a_3\beta - a_2\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a_3\gamma}{\alpha} \\ a_2 = \frac{a_1\beta}{\gamma} \\ a_3 = \frac{a_2\alpha}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_3\cancel{\gamma}}{\alpha} \cdot \frac{\beta}{\cancel{\gamma}} = \frac{a_3\beta}{\alpha} \\ a_1 = \frac{a_3\gamma}{\alpha} \\ a_3 = \frac{a_2\alpha}{\gamma} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a_3\gamma}{\alpha} \\ a_2 = \frac{a_3\beta}{\alpha} \\ a_3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x\Big(\overset{\nearrow 0}{\frac{a_3\gamma}{\cancel{\alpha}} \cdot \cancel{\alpha} - a_3\gamma}\Big) + y\Big(\overset{\nearrow 0}{\frac{a_3\beta\gamma}{\alpha} - \frac{a_3\gamma\beta}{\alpha}}\Big) + z\Big(\overset{\nearrow 0}{a_3\beta - \frac{a_3\beta}{\cancel{\alpha}} \cdot \cancel{\alpha}}\Big) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0$ при $\forall a_3 \neq 0 \Rightarrow H$ - ЛЗ ▨

№4

$$e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \quad y_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1) Проверка на базис:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (e_1, e_2, e_3)$ - базис $\mathbb{R}^3$

2) $x = (e_1, e_2, e_3) \cdot x_e \Rightarrow \begin{cases} -2x_{e_1} + 2x_{e_2} - 2x_{e_3} = -4 \\ 3x_{e_1} - 3x_{e_2} = 3 \\ 4x_{e_2} - 3x_{e_3} = -7 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{e_1} - x_{e_2} + x_{e_3} = 2 \\ x_{e_1} - x_{e_2} = 1 \\ x_{e_2} = \frac{3x_{e_3} - 7}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{e_3} = 1 \\ x_{e_2} = \frac{3 - 7}{4} = -1 \\ x_{e_1} = 1 - 1 = 0 \end{cases} \quad x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $y = (e_1, e_2, e_3) \cdot y_e \Rightarrow 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

№5

$V = \{ p(x) \in P_4 : p(1) + p(-1) = 0 \}$

Пусть $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, тогда

$p(1) + p(-1) = a + \cancel{b} + c + \cancel{d} + e + a - \cancel{b} + c - \cancel{d} + e = 2a + 2c + 2e = 0 \Rightarrow$

$a + c + e = 0 \Rightarrow e = -a - c \Rightarrow$

$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - a - c = a(x^4 - 1) + bx^3 + c(x^2 - 1) + dx \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Базис: $\{ (x^4 - 1); x^3; (x^2 - 1); x \} \Rightarrow \dim V = 4$