

Домашнее задание №9

Задание:

$$L = 2x_1 + 3x_2 - x_4 \rightarrow \max$$

$$2x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 16$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 18$$

$$-x_1 + 3x_2 + 4x_4 + x_6 = 24$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

Базисные переменные: x_3, x_5, x_6

Решение:

$$L^* = -2x_1 - 3x_2 + x_4 \rightarrow \min$$

Начальная таблица:

| Базис | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | Свободные члены | Симплекс отношения θ_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------------------------------|
| x_5 | 2 | -1 | 0 | -2 | 1 | 0 | 16 | - |
| x_3 | 3 | 2 | 1 | -3 | 0 | 0 | 18 | 9 |
| x_6 | -1 | 3 | 0 | 4 | 0 | 1 | 24 | 8* |
| | -2 | -3* | 0 | 1 | 0 | 0 | | |

Выберем столбец с наименьшей оценкой: столбец x_2

Далее выбираем наименьшее положительное отношение столбца свободных членов к столбцу x_2 : строка x_6

Первая итерация

Производим все необходимые вычисления и получаем следующую таблицу:

| Базис | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | Свободные члены | Симплекс отношения θ_i |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------------------------------|
| x_5 | 5/3 | 0 | 0 | -2/3 | 1 | 1/3 | 24 | 72/5 |
| x_3 | 11/3 | 0 | 1 | -17/3 | 0 | -2/3 | 2 | 6/11* |
| x_2 | -1/3 | 1 | 0 | 4/3 | 0 | 1/3 | 8 | - |
| | -3* | 0 | 0 | 5 | 0 | 1 | | |

Последняя строка содержит отрицательные элементы \Rightarrow нужна еще одна итерация

Выберем столбец с наименьшей оценкой: столбец x_1

Далее выбираем наименьшее положительное отношение столбца свободных членов к столбцу x_1 : строка x_3

Вторая итерация

Производим все необходимые вычисления и получаем следующую таблицу:

| Базис | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | Свободные члены | Симплекс отношения θ_i |
|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-----------------|-------------------------------|
| x_5 | 0 | 0 | -5/11 | 21/11 | 1 | 7/11 | 254/11 | |
| x_1 | 1 | 0 | 3/11 | -17/11 | 0 | -2/11 | 6/11 | |
| x_2 | 0 | 1 | 1/11 | 9/11 | 0 | 3/11 | 90/11 | |
| | 0 | 0 | 9/11 | 4/11 | 0 | 5/11 | | |

Последняя строка не содержит отрицательных значений \Rightarrow минимальное значение найдено

Полученный опорный план: (6/11, 90/11, 0, 0, 254/11, 0) \Rightarrow значение переменных: $x_1 = 6/11$, $x_2 = 90/11$, $x_4 = 0$

Минимальное значение функции $L^* = 282/11 \approx 25.6363636$

Проверка

```
In [ ]: import warnings

warnings.filterwarnings("ignore")
```

Воспользуемся библиотекой `scipy` для проверки нашего ответа:

```
In [ ]: from scipy.optimize import linprog
import numpy as np
```

```
In [ ]: c = np.array([-2, -3, 1])
A = np.array([[2, -1, -2],
              [3, 2, -3],
              [-1, 3, 4]])
b = np.array([16,
              18,
              24])
```

```
In [ ]: result = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, method='revised simplex')

print("Результат оптимизации:")
print("Значение целевой функции:", -result.fun)
print("Значения переменных:", result.x)
```

```
Результат оптимизации:
Значение целевой функции: 25.636363636363637
Значения переменных: [0.54545455  8.18181818  0.]
```

Как видно из полученных значений, результаты, посчитанные самостоятельно, и результаты которые были получены с помощью библиотеки совпадают, следовательно решение можно считать верным.

Самостоятельная реализация симплекс-метода

```
In [ ]: def simplex_method(c, A, b):
    m, _ = A.shape
    c = np.concatenate([c, np.zeros(m+1)])
    A = np.hstack([A, np.eye(m), b])

    def index_of_min_positive(arr):
        positive_values = arr[arr > 0]
        if len(positive_values) == 0:
            return None
        min_positive_index = np.argmin(positive_values)
        return np.where(arr == positive_values[min_positive_index])[0][0]

    table_solution = np.vstack([A, c])

    while np.any(table_solution[-1, :-1] < 0):

        pivot_col = np.argmin(table_solution[-1, :-1])

        ratios = table_solution[:-1, -1] / table_solution[:-1, pivot_col]
        pivot_row = index_of_min_positive(ratios)

        table_solution[pivot_row, :] /= table_solution[pivot_row, pivot_col]
        for i in range(m+1):
            if i != pivot_row:
                table_solution[i, :] -= table_solution[i, pivot_col] * table_solution[pivot_row, :]

    solution = dict()
    solution['func_value'] = table_solution[-1, -1]
    solution['final_table'] = table_solution

    return solution
```

```
In [ ]: result = simplex_method(c, A, b)
```

```
In [ ]: result
```

```
Out[ ]: {'func_value': 25.636363636363637,
'final_table': array([[ 0.          ,  0.          ,  1.90909091,  1.          , -0.45454545,
  0.63636364, 23.09090909],
 [ 1.          ,  0.          , -1.54545455,  0.          ,  0.27272727,
 -0.18181818,  0.54545455],
 [ 0.          ,  1.          ,  0.81818182,  0.          ,  0.09090909,
  0.27272727,  8.18181818],
 [ 0.          ,  0.          ,  0.36363636,  0.          ,  0.81818182,
  0.45454545, 25.63636364]])}
```

Полученное значение оказалось такое же как и в результате использования библиотеки, следовательно реализацию можно считать верной.