№1

Задание: Доказать, что $R^2 = Corr^2(y_i, \hat{y}_i)$

Док-во:

$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$; $TSS = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$; $ESS = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$

$Corr^2(y, \hat{y}) = \left(\frac{cov(y,\hat{y})}{\sqrt{var(y) \cdot var(\hat{y})}}\right)^2 = \frac{cov^2(y,\hat{y})}{var(y)\, var(\hat{y})} \ominus$

$cov(y,\hat{y}) = cov(\hat{y}+\varepsilon; \hat{y}) = cov(\hat{y};\hat{y}) + \cancel{cov(\varepsilon;\hat{y})} \xrightarrow{} 0 = Var(\hat{y})$

$\ominus \frac{Var^2(\hat{y})}{var(\hat{y})\,Var(y)} = \frac{var(\hat{y})}{var(y)}$; $Var(\hat{y}) = \frac{1}{n}\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$, $Var(y) = \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow Corr^2(y,\hat{y}) = \frac{ESS}{TSS} = R^2$

ч. т. д.

№2

Задание: ① Выразить $\hat{\beta}$ через β в матричной форме

② Д-ть св-во несмещенности $\hat{\beta}$ в матр. форме

Решение:

① $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T y = (X^T X)^{-1} X^T (\beta X + \varepsilon) = (X^T X)^{-1} X^T \beta X + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon =$

$= \beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Если рассмотреть } \beta X \text{ как вектор } \tilde{y}\ (1\times n) \Rightarrow \\ \Rightarrow (X^T X)^{-1} X^T \tilde{y} = (X^T X)^{-1} X^T \tilde{y}_1 + (X^T X)^{-1} X^T \tilde{y}_2 + \ldots \ominus \\ \ominus X^{-1} \cdot \tilde{y}_1 + X^{-1} \tilde{y}_2 + \ldots = X^{-1} \tilde{y} = X^{-1} \beta X = \beta \quad \text{(число)} \end{array}}$$

② $E(\hat{\beta}|X) = E(\beta + (X^T X)^{-1} X^T \varepsilon | X) = \underbrace{E(\beta|X)}_{\beta} + \underbrace{E((X^T X)^{-1} X^T \varepsilon | X)}_{0} \ominus$

$\ominus \beta \Rightarrow E(\hat{\beta}|X) = \beta \Rightarrow \hat{\beta}$ – несмещенная

ч. т. д.

№3

Д-ть: $\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}^{=TSS} = RSS + ESS + 2\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i(\hat{y}_i-\bar{y})$

Д-во:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2) =$$

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{\varepsilon}_i \Rightarrow = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i^2 + 2\hat{y}_i\hat{\varepsilon}_i + \hat{\varepsilon}_i^2 - 2(\hat{y}_i + \hat{\varepsilon}_i)\bar{y} + \bar{y}^2\right) =$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i^2 - 2\hat{y}_i\bar{y} + \bar{y}^2)}_{(y_i-\bar{y})^2 = RSS} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}_{(y_i-\hat{y})^2 = ESS} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}(2\hat{y}_i\hat{\varepsilon}_i - 2\bar{y}\hat{\varepsilon}_i)}_{2\hat{\varepsilon}_i(\hat{y}_i-\bar{y})} =$$

$$= RSS + ESS + 2\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i(\hat{y}_i-\bar{y})$$

ч.т.д

№4

Д-ть: $Var(\hat{\beta}|X) = \sigma^2(X^T X)^{-1}$

Д-во:

① $Var(y|X) = Var(\overbrace{X\beta}^{const} + \varepsilon|X) = Var(\varepsilon|X) = \sigma^2 \cdot I$

т.к. $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1}X^T y \Rightarrow$

$$\Rightarrow Var(\hat{\beta}|X) = Var(\overbrace{(X^T X)^{-1}X^T}^{const} y|X) =$$

$$= (X^T X)^{-1}X^T \cdot Var(y|X) \cdot ((X^T X)^{-1}X^T)^T =$$

$$= (X^T X)^{-1}X^T \cdot Var(y|X) \cdot X \cdot (X^T X)^{-1} =$$

т.к. $y = X\beta + \varepsilon \Rightarrow Var(y|X) = Var(\overbrace{X\beta}^{const} + \varepsilon|X) =$

$$= Var(\varepsilon|X) = \sigma^2 I \Rightarrow$$

$$= (X^T X)^{-1}X^T\sigma^2 I X \cdot (X^T X)^{-1} =$$

$$= \sigma^2(X^T X)^{-1}X^T X(X^T X)^{-1} = \sigma^2(X^T X)^{-1}$$

ч.т.д