ШАД МТС Домашнее задание по Теории вероятности и Математической статистики №2

Титеев Рамиль

5 декабря 2023 г.

Решение задачи №2

Задание: Авария происходит в точке X, которая равномерно распределена на дороге длиной L. Во время аварии машина скорой помощи находится в точке Y, которая также равномерно распределена на дороге. Считая, что X и Y независимы, найти математическое ожидание расстояния между машиной скорой помощи и точкой аварии.

Решение: $X, Y \in R[0, L]$. Пусть $Z = |X - Y|, Z \in R[0, L]$. Т.к. X и Y независимы $\Rightarrow f_z = f_x \cdot f_y \Rightarrow$

$$E[|X-Y|] = M[|Z|] = \int_0^L zf(z)dz = \int_0^L \int_0^L |x-y|f(x)f(y)dxdy$$

Т.к. $X \in R[0, L] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{L-0} = \frac{1}{L}$. Аналогично $f(y) = \frac{1}{L} \Rightarrow$

$$E[|X-Y|] = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L |x-y|dxdy; \int_0^L \int_0^L |x-y|dxdy = \frac{L^3}{3} \Rightarrow$$

$$E[|X-Y|] = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{L^3}{3} = \frac{L}{3}$$

Решение задачи №3

Задание: Совместный закон случайных величин X и Y задан таблицей:

$X \backslash Y$	0	1	3
0	0.15	0.05	0.3
-1	0	0.15	0.1
-2	0.15	0	0.1

Найти:
a) Законы распределения случайных величин X и Y
b) EX, EY, DX, DY, $cov(X,Y)$, $corr(X,Y)$, а также математическое ожидание и дисперсию случайной величины $V = 6X - 4Y + 3$

Решение:
a) Закон распределения случайной величины X:

X	0	-1	-2
p	0.5	0.25	0.25

Закон распределения случайной величины Y:

Y	0	1	3
p	0.3	0.2	0.5

b)
$$EX = 0 * 0.5 - 1 * 0.25 - 2 * 0.25 = -0.75$$
$$EY = 0 * 0.3 + 1 * 0.2 + 3 * 0.5 = 1.7$$
$$DX = (0 + 0.75)^2 * 0.5 + (-1 + 0.75)^2 * 0.25 + (-2 + 0.75)^2 * 0.25 = 0.6875$$
$$DY = (0 - 1.7)^2 * 0.3 + (1 - 1.7) * 0.2 + (3 - 1.7) * 0.5 = 1.377$$
$$cov(X,Y) = -1 * 1 * 0.15 - 1 * 3 * 0.1 - 2 * 3 * 0.1 - (-0.75) * 1.7 = 0.225$$
$$corr(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{0.225}{\sqrt{0.6875}\sqrt{1.377}} \approx 0.231$$
$$E[6X - 4Y + 3] = 6E[X] - 4E[Y] + M[3] = 6 * (-0.75) - 4 * 1.7 + 3 = -8.3$$
$$D[6X - 4Y + 3] = 36D[X] + 16D[Y] - 2 * 6 * 4cov(X,Y) =$$
$$= 36 * 0.6875 + 16 * 1.377 - 48 * 0.225 = 35.982$$

Решение задачи №4

Задание: Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - результаты n независимых повторных наблюдений над дискретной случайной величиной ξ, принимающей значения из множества $Y = \{0, 1\}$ с вероятностями:

$$P\{\xi = 1\} = \frac{1+\theta}{2}, \quad P\{\xi = 0\} = \frac{1-\theta}{2}, \quad -1 < \theta < 1$$

Найти оценку максимального правдоподобия неизвестного параметра θ.

Решение: Пусть m элементов из выборки оказались $\xi = 0$, тогда $\xi = 1$ оказалось $n - m$. Составим функцию правдоподобия:

$$L(x, \theta) = \left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{n-m} \cdot \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{m} = \left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{2}{1+\theta}\right)^{m} \cdot \left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{m} =$$

$$= \left(\frac{1+\theta}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)^{m} \to \max_{\theta}$$

$$\widetilde{L}(x, \theta) = n \ln\left(\frac{1+\theta}{2}\right) + m \ln\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \theta} = -\frac{n - n\theta - 2m}{1 - \theta^2} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{2m - n}{n}$$

Решение задачи №5

Задание: Пусть $x_1, \dots, x_n$ - результаты n независимых повторных наблюдений над случайной величиной ξ, плотность распределения которой имеет вид:

$$f(x,\theta) = pf_1(x,\theta) + (1-p)f_2(x,\theta)$$

где

$$f_1(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x \le \theta \\ 0, & x\text{-другое} \end{cases} \qquad f_2(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta}, & \theta < x < 1 \\ 0, & x\text{-другое} \end{cases}$$

$$p, \theta - \text{неизвестные параметры}, \quad 0 \le p \le 1$$

Найти оценки неизвестных параметров p, θ методом моментов.

Решение:

$$\mu_1 = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^\theta px\frac{1}{\theta}dx + \int_\theta^1 (1-p)x\frac{1}{1-\theta}dx =$$

$$= \frac{p\theta}{2} + \frac{1+\theta(1-p)}{2} = \frac{1+\theta-p}{2}$$

$$\mu_2 = M[\xi^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^\theta px^2\frac{1}{\theta}dx + \int_\theta^1 (1-p)x^2\frac{1}{1-\theta}dx =$$

$$= \frac{p\theta^2}{3} + \frac{1+\theta+\theta^2-p-p\theta-p\theta^2}{3} = \frac{1+\theta+\theta^2-p-p\theta}{3}$$

$$\begin{cases} \frac{1+\theta-p}{2} = \mu_1 \\ \frac{1+\theta+\theta^2-p-p\theta}{3} = \mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\theta-p = 2\mu_1 \\ 1+\theta+\theta^2-p-p\theta = 3\mu_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p = -2\mu_1 + 1 + \theta \\ 1+\theta+\theta^2+2\mu_1-1-\theta+2\mu_1\theta-\theta-\theta^2 = 3\mu_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p = -2\mu_1 + 1 + \theta \\ 2\mu_1 + 2\mu_1\theta - \theta = 3\mu_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = -2\mu_1 + 1 + \frac{3\mu_2-2\mu_1}{2\mu_1-1} \\ \theta = \frac{3\mu_2-2\mu_1}{2\mu_1-1} \end{cases}$$