ШАД МТС Домашнее задание №2

Титеев Рамиль

23 ноября 2023 г.

Решение задачи №1

Задание: Найти обратную матрицы методом присоединённой матрицы:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:
Дана матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Присоединяем к матрице A единичную матрицу:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Выполняем элементарные преобразования строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & 11 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{11}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{11}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{90} & \frac{13}{90} & \frac{5}{18} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{11}{19} \\ 0 & 0 & -\frac{19}{90} & \frac{13}{90} & \frac{5}{18} & \frac{1}{5} \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{19} & -\frac{1}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{19} & \frac{10}{19} & \frac{11}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{19} & -\frac{25}{19} & -\frac{18}{19} \end{array}\right)$$

Обратная матрица A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$$

Решение задачи №2

Задание: Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:
Пусть:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда
$AXB = B \Rightarrow AXBB^{-1} = BB^{-1} \Rightarrow AX = E$

$$detB = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 27 \neq 0 \Rightarrow \exists B^{-1}$$

$$detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -7 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$AX = E \Rightarrow X = A^{-1}E = A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^*; A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow X = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение задачи №3

Задание: Найти ранг матрицы при различных значениях параметра:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & -3\lambda & -7\lambda & -3\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & -\frac{9\lambda}{4} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим два случая:

$$1)\lambda \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} & -\frac{9\lambda}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 3$$

$$2)\lambda = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rangA = 2$$

Решение задачи №4

Задание: Исследовать систему и найти решение в зависимости от значения параметра:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 4 \\ x_1 - 6x_2 - \lambda x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & -6 & -\lambda & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & -10 & -\lambda-2 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & -\lambda-2 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Рассмотрим два случая:

$$1)\lambda \neq 8 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -10 & -\lambda-2 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & \frac{-\lambda-2}{10} & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rangA = 3 \Rightarrow$$

$3 - 3 = 0 \Rightarrow 1$ решение $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3 \\ x_2 = -1 - x_3\frac{\lambda-2}{10} \\ x_3(-1 + \frac{\lambda-2}{10}) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x_3 = 0$ или $\frac{\lambda-2}{10} = 1$, но т.к. $\lambda \neq 8 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$2)\lambda = 8 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & -10 & 10 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rangA = 2 \Rightarrow$$

$3 - 3 = 0 \Rightarrow$ не единственное решение $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3 \\ x_2 = -1 - x_3 \end{cases} \Rightarrow X_0 = \begin{pmatrix} 2x_3 + 3 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Решение задачи №5

Задание: Найти собственные значения и вектора для данной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -7-\lambda & 8 \\ -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7-\lambda \end{vmatrix} +$$

$$+4\begin{vmatrix} 4 & -7-\lambda \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 7 - \lambda^3 - 7\lambda - 12\lambda - 60 + 24\lambda + 56 =$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 3 = (\lambda+1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 3) = (\lambda+1)^2(\lambda-3) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_{1,2} = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

$1) \lambda_{1,2} = -1$

$$A - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 = x_2 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{2} \\ x_2 \\ \frac{x_2}{2} \end{pmatrix}$$

Пусть $x_2 = 2 \Rightarrow S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2) \lambda_3 = 3$

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 4 & -10 & 8 \\ 6 & -7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_3 = 2x_1 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{x_3}{2} \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Пусть $x_2 = 2 \Rightarrow S_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Решение задачи №6

Задание: Произвести сингулярное разложение матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Решение:

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ -2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{28}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{28}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix}$$

$$|AA^T - \lambda E| = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6-\lambda & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6-\lambda & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda) \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 & 4 \\ -2 & 6-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} -$$

$$-4 \begin{vmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 4 & 6-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -4 & 6-\lambda & 4 \\ 4 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -4 & 6-\lambda & -2 \\ 4 & -2 & 6-\lambda \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$(6-\lambda)[(6-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 20) + 2(28 - 2\lambda) + 4(-32 + 4\lambda)] +$$
$$+4[-4(\lambda^2 - 12\lambda + 52) + (32 - 4\lambda) + 4(4 + 2\lambda)] +$$
$$+4[-4(28 - 2\lambda) - (6-\lambda)(32 - 4\lambda) + 48] - 2[-4(-32 + 4\lambda) - (6-\lambda)(-28 + 2\lambda) - 24] =$$

$$= \lambda(\lambda - 16)(\lambda - 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = 16; \lambda_{3,4} = 4$$

$1)\lambda_1 = 0:$

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{16}{5} \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

Пусть $x_4 = 1$, тогда:

$$S_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$2)\lambda_2 = 16$

$$\begin{pmatrix} -10 & -4 & 4 & -2 \\ -4 & -10 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -10 & -4 \\ -2 & 4 & -4 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{48}{7} & -\frac{48}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{48}{7} & -\frac{48}{7} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

Пусть $x_4 = 1$, тогда:

$$S_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$3)\lambda_{3,4} = 4$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ -4 & 2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; S_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{S}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$|A^T A - \lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{28}{3} - \lambda & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ -\frac{16}{3} & \frac{28}{3} - \lambda & \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{16}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{28}{3} - \lambda) \begin{vmatrix} \frac{28}{3} - \lambda & \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{16}{3} - \lambda \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{16}{3} \begin{vmatrix} -\frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{16}{3} - \lambda \end{vmatrix} - \frac{8}{3} \begin{vmatrix} -\frac{16}{3} & \frac{28}{3} - \lambda \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} \end{vmatrix} =$$

$$(\frac{28}{3} - \lambda)((\frac{28}{3} - \lambda)(\frac{16}{3} - \lambda) - \frac{64}{9}) + \frac{16}{3}(-\frac{16}{3}(\frac{16}{3} - \lambda) + \frac{64}{9}) -$$

$$-\frac{8}{3}(-\frac{16}{3}(\frac{16}{3}-\lambda)+\frac{64}{9})=$$

$$-\lambda^3+24\lambda^2-144\lambda+256=0\Rightarrow(\lambda-16)(\lambda-4)^2=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=16\\ \lambda_{2,3}=4\end{cases}$$

$1)\lambda_1=16:$

$$\begin{pmatrix}-\frac{20}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3}\\ -\frac{16}{3} & -\frac{20}{3} & \frac{8}{3}\\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & -\frac{32}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_3\\ x_2=2x_3\end{cases}\Rightarrow$$

$$S_1=\begin{pmatrix}-2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\hat{S}_1=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$2)\lambda_2=4:$

$$\begin{pmatrix}\frac{16}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{8}{3}\\ -\frac{16}{3} & \frac{16}{3} & \frac{8}{3}\\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{4}{3}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\Rightarrow x_1=x_2+\frac{1}{2}x_3\Rightarrow$$

$$S_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\hat{S}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{pmatrix};S_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\hat{S}_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\\ \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix};$$

$$A=U\Sigma V^*$$

$$U=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sqrt{16} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{4} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{4}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$V^*=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$