ШАД МТС Домашнее задание по Теории вероятности и Математической статистики №1

Титеев Рамиль

28 ноября 2023 г.

Решение задачи №1

Задание: Компания по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: класс А (мало рискует), класс В (рискует средне), класс С (рискует сильно). Компания предполагает, что из всех водителей, застрахованных у неё, 30% принадлежат классу А, 50% – классу В, 20% – классу С. Вероятность того, что в течение года водитель класса А попадёт хотя бы в одну автокатастрофу, равна $0,01$; для водителя класса В эта вероятность равна $0,03$, а для водителя класса С – $0,1$. Мистер Джонс страхует свою машину у этой компании и в течение года попадает в автокатастрофу. Какова вероятность того, что он относится к классу А?

Решение:

Вероятность того, что случаный водитель относится к классу A: $p_A = 0.3$, к классу B: $p_B = 0.5$, к классу C: $p_C = 0.2$ Чтобы посчитать вероятность попадания мистера Джонса в класс А, при условии, что он попал в аварию равна:

$$P(A|H) = \frac{P(H|A)P(A)}{P(H|A)P(A) + P(H|B)P(B) + P(H|C)P(C)} \Rightarrow$$

$$P(A|H) = \frac{0.3 * 0.01}{0.3 * 0.01 + 0.5 * 0.03 + 0.2 * 0.1} = \frac{0.003}{0.038} = \frac{3}{38} \approx 0.079$$

Решение задачи №2

Задание: Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1. Если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае - в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдет в точку m.

Решение:

Пусть было совершенно k шагов в одну сторону, тогда в обратную сторону было совершенно $n - k$ шагов. Тогда $m = k - (n - k) = 2k - n \Rightarrow k = \frac{m+n}{2}$

Таким образом, вероятность того, что частица окажется в точке m после n шагов, равна биномальному распределению:

$$P(X_n = m) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} = C_n^{\frac{m+n}{2}} p^{\frac{m+n}{2}} (1 - p)^{\frac{n-m}{2}}$$

Однако возможен случай, когда $\frac{m+n}{2}$ не равно целому числу. В таком случае $P(X_n = m) = 0$, т.к. k не будет целым числом, а это противоречит условию.

Решение задачи №3

Задание: Плотность распределения $p(x)$ некоторой случайной величины имеет вид $p(x) = \frac{c}{e^x+e^{-x}}$, где c - константа. Найти значение этой константы с и вероятность того, что случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(-\pi, \pi)$

Решение:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{c}{e^t + e^{-t}}dt \Rightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{e^t + e^{-t}}dt = \frac{\pi c}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{\pi}$$

$$F(\pi) = \int\limits_{-\infty}^{\pi} \frac{c}{e^t + e^{-t}}dt = c\,\mathrm{arctg}(e^{\pi}) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}(e^{\pi})$$

$$F(-\pi) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi} \frac{c}{e^t + e^{-t}}dt = c\,\mathrm{arctg}(e^{-\pi}) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}(e^{-\pi})$$

$$P(X \in (-\pi, \pi)) = P(-\pi < X < \pi) = F(\pi) - F(-\pi) = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}(e^{\pi}) - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{arctg}(e^{-\pi}) =$$

$$= \frac{2}{\pi}(\mathrm{arctg}(e^{\pi}) - \mathrm{arctg}(e^{-\pi})) \approx 0.945$$

Решение задачи №4

Задание: Задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величины X:

$$f(x) = A\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 4, else\, 0$$

Найти функцию распределения $F(x)$ и $P(2 < X < 3)$

Решение:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int\limits_1^x A\sqrt{t}dt, x \in [1,4] \\ 0, x \notin [1,4] \end{cases} = \begin{cases} \frac{2x\sqrt{x}A}{3} - \frac{2A}{3}, x \in [1,4] \\ 0, x \notin [1,4] \end{cases}$$

т.к. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1 \Rightarrow \int\limits_1^4 A\sqrt{t}dt = \frac{14A}{3} = 1 \Rightarrow A = \frac{3}{14} \Rightarrow$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 1 \\ \frac{1}{7}(x\sqrt{x} - 1), x \in [1,4] \\ 1, x > 4 \end{cases}$$

$$P(2 < X < 3) = F(3) - F(2) = \frac{1}{7}(3\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{7}(2\sqrt{2} - 1) = 0.338$$

Решение задачи №5

Задание: При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятность того, что в течение суток произойдет хотя бы один сбой.

Решение:

Пусть С.В. X - количество сбоев за сутки, тогда т.к мы имеем дело с событиями (сбоями), которые происходят с фиксированной средней интенсивностью за определенный период времени $\Rightarrow X$ принадлежит распределению Пуассона.

Вероятность того, что произойдет хотя бы один сбой, можно найти как дополнение к вероятности того, что не произойдет ни одного сбоя за сутки:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Т.к. среднее число сбоев за сутки равно $1.5 \Rightarrow \lambda = 1.5 \Rightarrow$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{\exp{-1.5} * 1.5^0}{0!} \approx 1 - 0.223 = 0.777$$