

# Option sur moyenne (Projet 2)

Constantini - Dupré

Juin 2016

Les options sur moyenne sont des options asiatiques dont le payoff est la variable aléatoire  $h = (\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K)^+$ .

## 1 Introduction

Considérons un marché financier dans lequel il y a un actif sans risque de prix  $S_t^0 = e^{rt}$  et un actif risqué de prix  $S_t$ , pour  $t \in [0, T]$ . Le processus stochastique  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_{t \in [0, T]})$ . Supposons que  $(\mathcal{F}_{t \in [0, T]})$  est la filtration naturelle d'un mouvement brownien standard  $(B_{t \in [0, T]})$  et que l'évolution du processus  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  est régie par le modèle de Black-Scholes:  $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$ , avec  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ .

On note  $\mathbb{P}^*$  la probabilité de densité  $e^{-\theta B_T - \frac{\theta^2 T}{2}}$  par rapport à  $\mathbb{P}$ , avec  $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ . Sous  $\mathbb{P}^*$ , le processus  $(W_t)_{t \in [0, T]}$ , défini par  $W_t = \frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t$  est un mouvement brownien standard.

La variable aléatoire  $h$  est positive  $\mathcal{F}_T$ -mesurable et de carré intégrable (cf. question 1 TD6). Par la théorème 4.3.2 du livre *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*,  $h$  est simulable et la valeur de l'option à l'instant  $t$  est

$$V_t = \mathbb{E}^*(e^{-r(T-t)} h | \mathcal{F}_t)$$

$$\text{Ainsi } V_0 = \mathbb{E}^*(e^{-rT} h) = \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right].$$

## 2 Approximation par une variable aléatoire lognormale

Approchons le prix de l'option par la formule de type Black-Scholes. Posons  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  le prix actualisé. Sous  $\mathbb{P}^*$ ,  $(\tilde{S}_t)$  est une martingale et

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t)$$

Calculons l'espérance de la variable aléatoire  $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$  sous  $\mathbb{P}^*$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \left[ \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right] &= \mathbb{E}^* \left[ \frac{1}{T} \int_0^T e^{rt} S_0 \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2) dt \right] \\
&= \mathbb{E}^* \left[ \frac{S_0}{T} \int_0^T e^{rt} M_t dt \right] \\
&= \frac{S_0}{T} \mathbb{E}^* \left[ \int_0^T e^{rt} M_t dt \right] \\
&= \frac{S_0}{T} \int_0^T e^{rt} \mathbb{E}^* [M_t] dt \quad (\text{Fubini, tout est positif}) \\
&= \frac{(e^{rT} - 1)}{rT} S_0 \quad (M_t = \exp(\sigma W_t - \sigma^2 t/2) \text{ martingale})
\end{aligned} \tag{1}$$

Calculons maintenant la variance de la variable aléatoire  $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$  sous  $\mathbb{P}^*$ :

$$\begin{aligned}
\text{Var} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right] &= \mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right)^2 \right] - \left( \mathbb{E}^* \left[ \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right] \right)^2 \\
&= \mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right)^2 \right] - \left( \frac{(e^{rT} - 1)}{rT} S_0 \right)^2 \\
\mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right)^2 \right] &= \mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du \right) \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_v dv \right) \right] \\
&= \mathbb{E}^* \left[ \left( \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T S_u S_v dudv \right) \right] \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}^* [S_u S_v] dudv \quad (\text{Fubini}) \\
&= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T \mathbb{E}^* \left[ \frac{S_u}{S_v} S_v^2 \right] dudv \\
&= \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^u \mathbb{E}^* \left[ \frac{S_u}{S_v} \right] \mathbb{E}^* [S_v^2] dv du \quad (\text{Indépendance}) \\
&= \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^u \mathbb{E}^* \left[ e^{r(u-v)} e^{\sigma(W_u - W_v) - \frac{\sigma^2}{2}(u-v)} \right] \mathbb{E}^* \left[ S_0^2 e^{2rv} e^{2\sigma W_v - \frac{2\sigma^2}{2}v} \right] dv du \\
&= \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^u e^{r(u-v)} \mathbb{E}^* \left[ e^{\sigma(W_u - W_v) - \frac{\sigma^2}{2}(u-v)} \right] S_0^2 e^{2rv} e^{\sigma^2 v} \mathbb{E}^* \left[ e^{2\sigma W_v - \frac{(2\sigma)^2}{2}v} \right] dv du \\
&= \frac{2S_0^2}{T^2} \int_0^T \int_0^u e^{r(u-v)} e^{2rv} e^{\sigma^2 v} dv du = \frac{2S_0^2}{T^2} \int_0^T \int_0^u e^{ru} e^{(r+\sigma^2)v} dv du \\
&= \frac{2S_0^2}{T^2} \int_0^T e^{ru} \frac{e^{(r+\sigma^2)u} - 1}{r + \sigma^2} du = \frac{2S_0^2}{T^2(r + \sigma^2)} \int_0^T e^{(2r+\sigma^2)u} - e^{ru} du \\
&= \frac{2S_0^2}{T^2(r + \sigma^2)} \left[ \frac{e^{(2r+\sigma^2)T} - 1}{2r + \sigma^2} - \frac{e^{rT} - 1}{r} \right]
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\text{Var} \left[ \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt \right] = \frac{2S_0^2}{T^2(r + \sigma^2)} \left[ \frac{e^{(2r+\sigma^2)T} - 1}{2r + \sigma^2} - \frac{e^{rT} - 1}{r} \right] - \left( \frac{(e^{rT} - 1)}{rT} S_0 \right)^2 \quad (3)$$

On met le 2, par symétrie avec l'indicatrice. Ainsi, nous approchons le prix de l'option par  $\mathbb{E}^* [e^{-rT}(X - K)^+]$  avec  $X$  une v.a. lognormale d'espérance  $\mu_{\lognormal} = \frac{(e^{rT}-1)}{rT} S_0$  et de variance  $\sigma_{\lognormal} = \frac{2S_0^2}{T^2(r+\sigma^2)} \left( \frac{e^{(2r+\sigma^2)T}-1}{2r+\sigma^2} - \frac{e^{rT}-1}{r} \right) - \left( \frac{(e^{rT}-1)}{rT} S_0 \right)^2$ .

On souhaite que la loi log-normale ait une espérance et une variance fixés et on cherche les paramètres adéquats de la loi normale correspondante,  $(\mu, \sigma)$ . Nous en déduisons  $\mu$  et  $\sigma$  par les formules suivantes.

$$\begin{aligned} \mu &= \ln \left( \frac{\mu_{\lognormal}^2}{\sqrt{\sigma_{\lognormal}^2 + \mu_{\lognormal}^2}} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\mu_{\lognormal}^4}{\sigma_{\lognormal}^2 + \mu_{\lognormal}^2} \right) \\ \sigma &= \ln \left( 1 + \left( \frac{\sigma_{\lognormal}}{\mu_{\lognormal}} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (4)$$

### 3 Option asiatique géométrique

#### 3.1 Présentation des méthodes de contrôle

Pour pricer l'option sur moyenne arithmétique, on met en oeuvre une technique de variable de contrôle. On a vu que le prix de l'option sur moyenne s'écrivait :

$$V_0 = \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right]$$

La technique de Kemma et Vorst consiste à trouver une variable  $Y$  telle que  $\mathbb{E}^*(Y)$  peut être facilement calculé et que  $\text{Var}(X-Y)$  est petit devant  $\text{Var}(X)$ . Ainsi, on peut évaluer facilement  $\mathbb{E}[X - Y]$  par la méthode de Monte-Carlo - la convergence est rapide - et

$$E[X] = E[Y] + E[X - Y]$$

Il convient donc de trouver une variable aléatoire  $Y$  vérifiant cette condition. Introduisons l'option sur moyenne géométrique de pay-off.

#### 3.2 Pricing de l'option géométrique

$$\left( \frac{1}{T} \exp \left( \int_0^T \log(S_u) du \right) - K \right)_+$$

Alors, l'option est pricée à

$$\hat{V}_0 = \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \exp \left( \frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du - K \right)_+ \right]$$

Par l'inégalité de Jensen, appliquée à la fonction exponentielle, et en vertu de la croissance de l'espérance, on obtient l'inégalité suivante:

$$\hat{V}_0 \leq V_0$$

$$\text{Or, } S_t = \tilde{S}_0 \exp(\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})t).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \hat{V}_0 &= \mathbb{E}^* \left[ \left( S_0 \exp \left( \frac{1}{T} \int_0^T \left( \sigma W_u - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) u \right) du \right) - K \right)_+ \right] \\ &= \mathbb{E}^* \left[ \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} \right) \exp \left( \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_u du \right) - K \right)_+ \right] \end{aligned} \quad (5)$$

On veut donc calculer la loi de

$$\frac{1}{T} \int_0^T \log(W_t) dt$$

On écrit la somme de Riemann correspondante :

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} W_{\frac{iT}{N}} = W_{\frac{(N-1)T}{N}} - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} i(W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}}) \quad (\text{Transformation d'Abel}) \quad (6)$$

Or,

$$W_{\frac{(N-1)T}{N}} = \sum_{i=0}^{N-1} (W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}}) \quad (7)$$

Alors, en combinant (1) et (2),

$$\frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_{\frac{iT}{N}} = \frac{\sigma}{N} \sum_{i=0}^{N-1} i(W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}}) \quad (8)$$

On obtient

$$\frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_{\frac{iT}{N}} = \sigma \sum_{i=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{i}{N} \right) (W_{\frac{iT}{N}} - W_{\frac{(i-1)T}{N}})$$

On calcule la fonction caractéristique de cette variable aléatoire.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E} \left[ \exp \left( iu \sum_{j=0}^{N-1} \left( 1 - \frac{j}{N} \right) (W_{\frac{jT}{N}} - W_{\frac{(j-1)T}{N}}) \right) \right] \\
&= \prod_{j=0}^{N-1} \mathbf{E} \left[ \exp \left( iu \left( 1 - \frac{j}{N} \right) (W_{\frac{jT}{N}} - W_{\frac{(j-1)T}{N}}) \right) \right] \quad (\text{les accroissements sont indépendants}) \\
&= \prod_{j=0}^{N-1} \exp \left( - \left( 1 - \frac{j}{N} \right)^2 \frac{T u^2}{2N} \right) \quad (\text{les accroissements suivent des lois normales}) \\
&= \exp \left( - \sum_{j=0}^{N-1} (N-j)^2 \frac{T u^2}{2N^3} \right) \quad (\text{fonction caractéristique d'une loi gaussienne}) \\
&= \exp \left( - \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \frac{T u^2}{2N^3} \right) \\
&= \exp \left( - \frac{N(N+1)(2N+1) T u^2}{12N^3} \right) \\
&\rightarrow_{[N \rightarrow +\infty]} \exp \left( - \frac{T u^2}{6} \right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Car la convergence presque-sûre de la somme de Riemann vers l'intégrale implique la convergence en loi,

$$\frac{1}{T} \int_0^T W_t dt \sim \mathcal{N} \left( 0, \frac{T}{3} \right)$$

Donc,

$$\hat{V}_0 = \exp(-rT) \mathbb{E} \left[ \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \sigma \sqrt{\frac{T}{3}} g \right) - K \right)_+ \right] \text{ avec } g \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

On réorganise la formule :

$$\hat{V}_0 = \exp \left( -\frac{rT}{2} \right) \mathbb{E} \left[ \left( S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2 T}{4} + \sigma \sqrt{\frac{T}{3}} g \right) - K \exp \left( \frac{-rT}{2} \right) \right)_+ \right]$$

Or,  $\exp \left( \frac{-rT}{2} \right) = \exp \left( \frac{-rT}{3} \right) \exp \left( \frac{-rT}{6} \right)$  et  $\exp \left( -\frac{\sigma^2 T}{4} \right) = \exp \left( -\frac{\sigma^2 T}{12} \right) \exp \left( -\frac{\sigma^2 T}{6} \right)$

Donc,

$$\hat{V}_0 = \exp \left( -\frac{rT}{2} \right) \mathbb{E}^* \left[ \left( S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2 T}{12} \right) \exp \left( -\frac{\sigma^2 T}{6} + \sigma \sqrt{\frac{T}{3}} g \right) - K \exp \left( \frac{-rT}{6} \right) \exp \left( \frac{-rT}{3} \right) \right)_+ \right]$$

On pose  $T' = \frac{T}{3}$ ,  $S'_0 = S_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2 T}{12} \right)$  et  $K' = K \exp \left( \frac{-rT}{6} \right)$  Alors,

$$\hat{V}_0 = \exp \left( -\frac{rT}{2} \right) \mathbb{E} \left[ \left( S'_0 \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} T' + \sigma \sqrt{T'} g \right) - K' \exp(-rT') \right)_+ \right]$$

On retrouve la formule pour un call Black-Scholes :

$$\hat{V}_0 = \exp \left( -\frac{rT}{2} \right) \left( S'_0 \mathcal{N}(d'_1) - K' \exp \left( \frac{-rT}{3} \right) \mathcal{N}(d'_2) \right)$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\hat{V}_0 &= S_0 \exp\left(-\left(r + \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}\right) \mathcal{N}(d'_1) - K \exp(-rT) \mathcal{N}(d'_2) \\
d'_1 &= \frac{\log\left(\frac{S'_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{3}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}} = \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{6} + \left(r + \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{3}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}} \\
&= \frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}
\end{aligned} \tag{10}$$

$$d'_2 = d'_1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{3}} \tag{11}$$

Donc,

$$\hat{V}_0 = S_0 \exp\left(-\left(r + \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}\right) \mathcal{N}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{6}\right)\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}\right) - K \exp(-rT) \mathcal{N}\left(\frac{\log\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{3}}}\right)$$

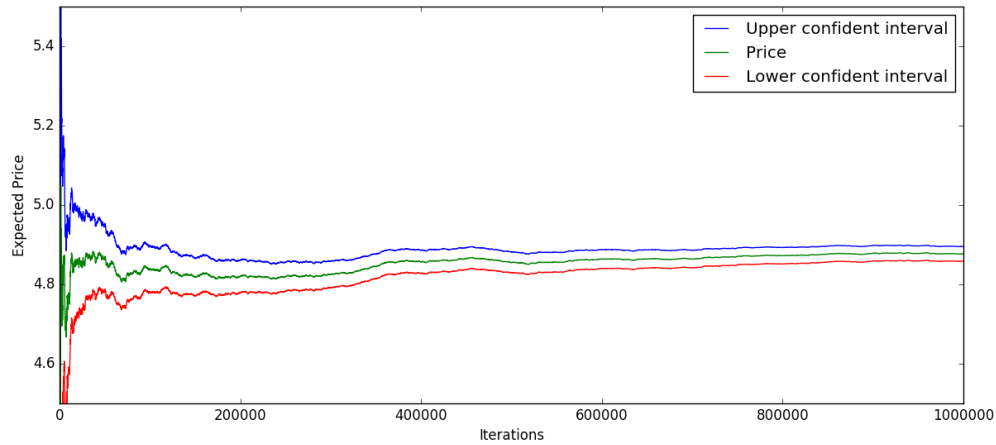
Ainsi, nous obtenons la formule exacte pour une option sur moyenne géométrique.

## 4 Résultats

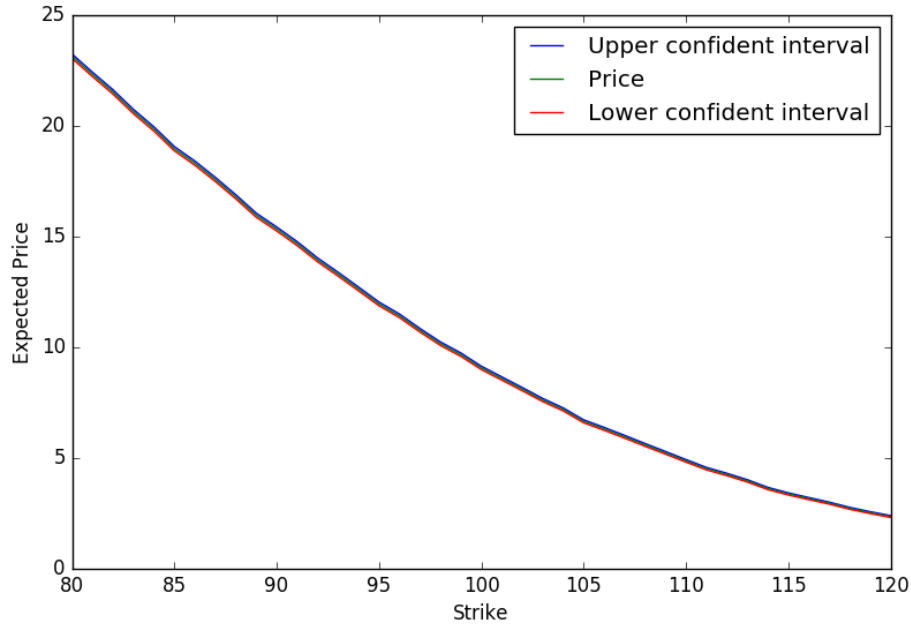
### 4.1 Première approche: Loi lognormale

En utilisant l'approche proposée en première partie, on obtient la valeur de l'option par la méthode de Monte Carlo. On trace l'évolution du prix de l'option en fonction du nombre d'itérations. Selon le TCL, l'écart décroît en  $\sqrt{n}$ . On affiche aussi l'intervalle de confiance de la méthode au niveau 95%. Les calculs et graphes présentés ci-dessous utilisent les valeurs suivantes :

- $S_0 = 100$
- $K = 110$
- $\sigma = 0.3$
- $r = 0.1$
- $T = 1\text{an}$



On trace le prix attendu en fonction du strike de l'option, autre variable que le vendeur doit fixer.



Si l'on se réfère à la formule explicitant le prix d'un call Black-Scholes (ou celui d'une option géométrique), on retrouve le même comportement asymptotique pour le prix : décroissance linéaire en  $K$  lorsque  $K$  est petit devant  $S_0$  (et la fonction de masse de la gaussienne est proche de 1), puis décroissance exponentielle lorsque  $K$  prend de l'ampleur. En effet, le reste de la fonction de masse décroît comme une gaussienne en l'infini.

## 4.2 Discrétisation de l'option sur moyenne arithmétique et géométrique

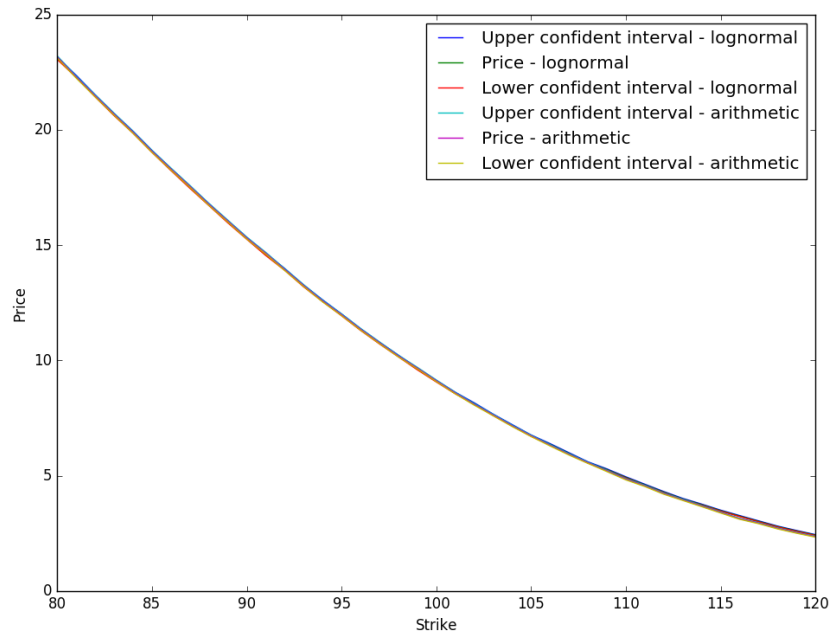
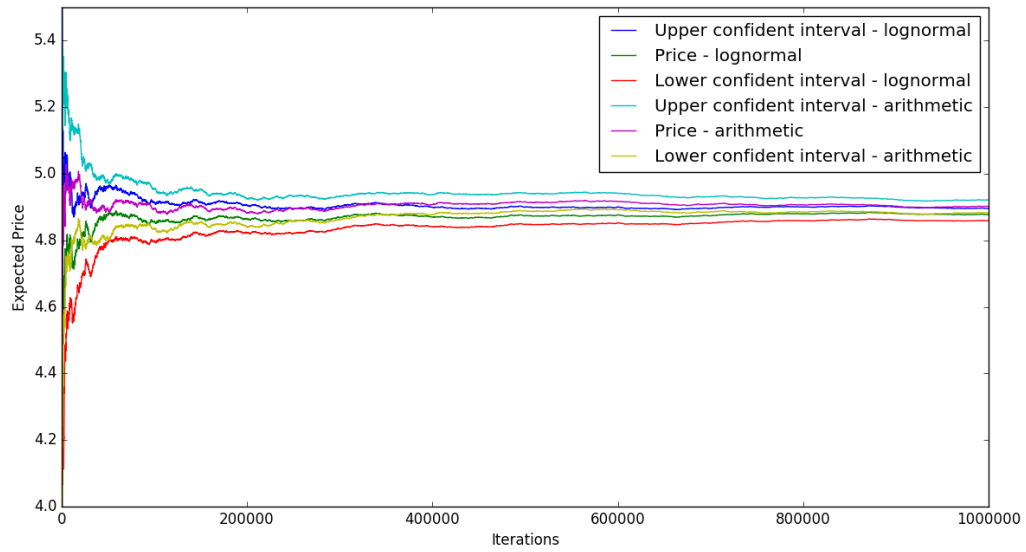
Pour approcher la valeur de l'option sur moyenne, nous approximations l'intégrale par une somme de Riemann. On appelle  $N$  le nombre de points utilisés pour calculer l'intégrale,  $t_i = \frac{iT}{N}$  pour  $0 \leq i \leq N$ . Le pas vaut donc  $\Delta_t = \frac{T}{N}$ . On appelle  $M$  le nombre total d'itérations réalisées pour la méthode de Monte-Carlo.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \int_0^T S_u du - K \right)_+ \right] &\approx \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( \frac{1}{T} \frac{T}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_{t_i} - K \right)_+ \right] \\
 &\approx \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_0 \exp(\sigma W_{t_i} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_i) - K \right)_+ \right] \\
 &\approx \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} S_0 \exp(\sigma W_{t_i}^{(j)} + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_i) - K \right)_+
 \end{aligned} \tag{12}$$

On génère alors les accroissements qui suivent une loi gaussienne de variance  $\frac{T}{N}$ , puis, en sommant, on obtient les valeurs du brownien en les points d'intérêt.

Comparons avec l'approximation par une loi lognormale de l'option arithmétique.





De ces deux graphiques, nous déduisons que l'approximation par une loi lognormale est valable. La différence entre ces deux approches est d'environ 2 centimes après 1 000 000 itérations. Le but de ce projet est de trouver une méthode qui permettra de calculer le prix d'une option sur moyenne arithmétique avec un faible temps de calcul et une grande précision. Ce n'est pas le cas avec l'approche par une loi lognormale ou celle du calcul direct.

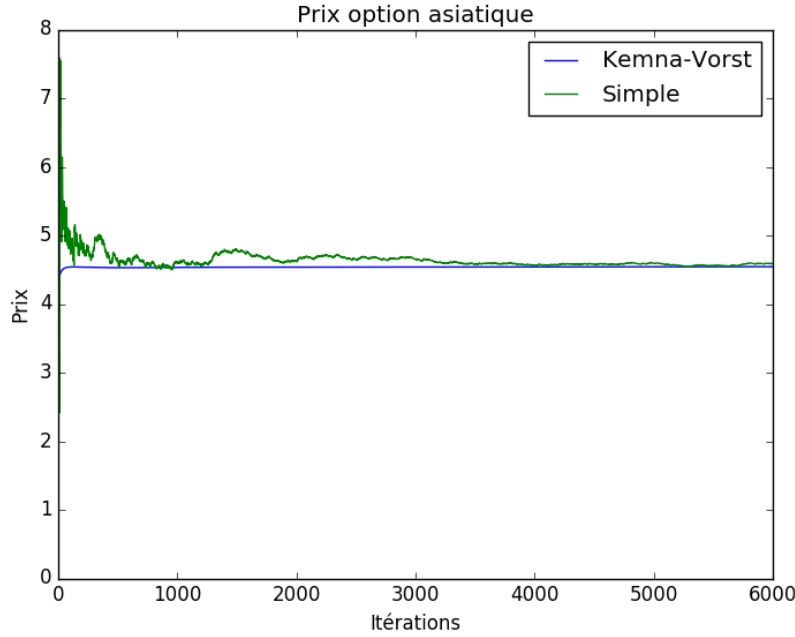
Discrétisons la valeur de l'option sur moyenne géométrique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( \exp \left( \frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_u) du \right) - K \right)_+ \right] &\approx \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_u du \right) - K \right)_+ \right] \\
&\approx \mathbb{E}^* \left[ e^{-rT} \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \left( \frac{\sigma}{N} \sum_{i=0}^{N-1} W_{t_i} \right) \right) - K \right)_+ \right] \\
&\approx \frac{e^{-rT}}{M} \sum_{j=1}^M \left( S_0 \exp \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \left( \frac{\sigma}{N} \sum_{i=0}^{N-1} W_{t_i}^{(j)} \right) \right) - K \right)_+
\end{aligned} \tag{13}$$

Il est important de préciser que pour calculer les deux termes précédents, on utilise les mêmes accroissements browniens. Ainsi, la variance de la différence du prix des options arithmétiques et géométriques n'est pas la somme des variances. Il apparaît un terme de covariance négatif (car les deux options sont assez "proches") qui viendra réduire la variance de la différence et permettra ainsi à la méthode de Monte-Carlo de converger plus rapidement.

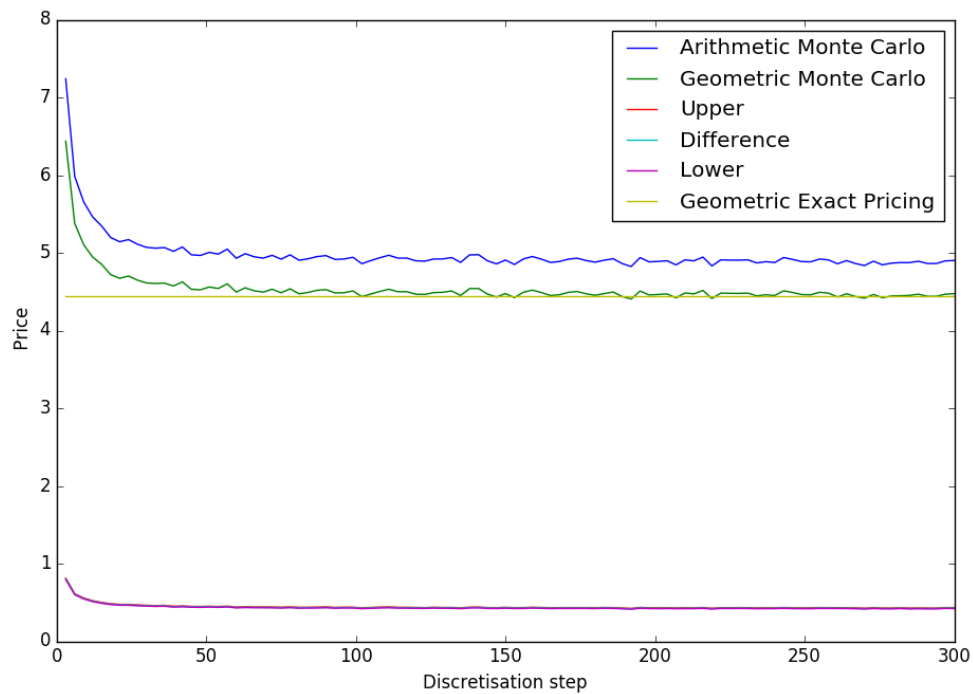
### 4.3 Variable de contrôle (Kemna et Vorst)

Estimons la différence entre l'option asiatique arithmétique et l'option asiatique géométrique par la méthode de Monte Carlo et en utilisant la discrétisation précédente.

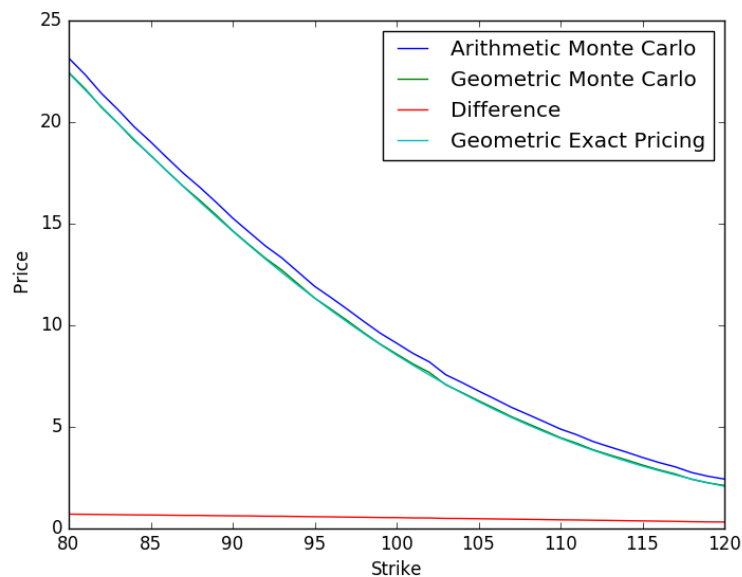


On observe qu'en effet, la convergence est presque instantanée avec la méthode de contrôle, et, de surcroît, bien plus rapide que l'estimation originale.

Nous nous intéressons ensuite à l'influence du paramètre  $N$  sur la différence entre options asiatiques arithmétiques et géométriques. Nous prenons les mêmes paramètres que précédemment avec un strike à 110 et 100 000 itérations pour la méthode de Monte Carlo.



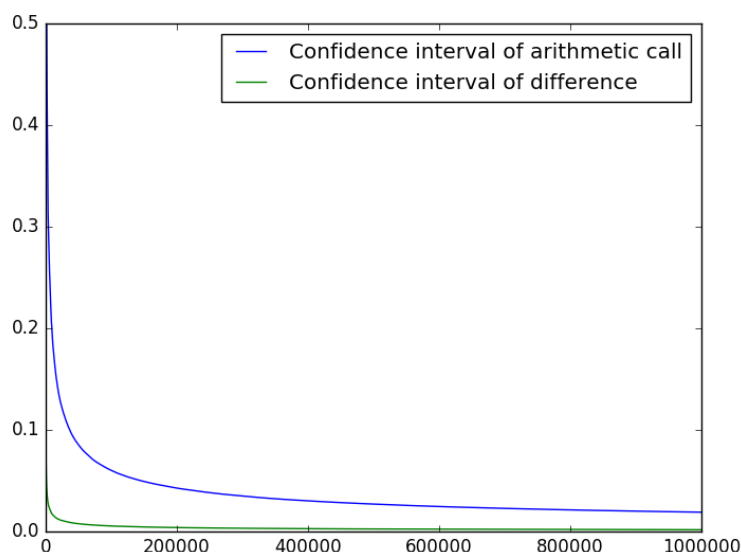
Ainsi, nous choisissons un pas de discrétisation de 100 puisque le résultat n'évolue que très peu. Traçons le prix en fonction du strike:



A 100000 itérations, on atteint le "vrai prix" pour 70 pas de discrétisation seulement. On devine qu'un grand nombre d'itérations dans la méthode de Monte-Carlo diminue le nombre de pas nécessaires. Il convient

alors d'ajuster la valeur de ces deux paramètres afin de diminuer le temps de calcul tout en conservant la valeur exacte du prix.

Maintenant, examinons la convergence de la méthode de Monte Carlo de la variable  $X_{arithmétique} - Y_{géométrique}$ . Pour que la méthode ait un intérêt, il faut que cette valeur converge plus rapidement que la méthode de Monte Carlo appliquée à l'option arithmétique. Fixons arbitrairement un objectif : on souhaite obtenir un intervalle de confiance qui garantisse le prix de l'option au centime près.



- **Monte Carlo sur l'option sur moyenne arithmétique** En 1 000 000 itérations, l'intervalle de confiance vaut 1.89 centimes, calculé en 16.8 secondes.
- **Monte Carlo sur la différence entre arithmétique et géométrique, puis calcul direct de l'option géométrique** En 30 000 itérations, l'intervalle de confiance vaut 1.00 centimes, calculé en 0.339 secondes.

Ainsi, nous concluons donc l'intérêt de cette méthode qui permet d'améliorer la précision du pricing de l'option et le temps de calcul. Il suffira de calculer le prix exacte de l'option asiatique géométrique et d'ajouter la différence, calculée par Monte Carlo, entre l'option asiatique géométrique et arithmétique.

## 5 Conclusion

Ainsi, le but de ce projet est d'approcher la valeur d'une option asiatique par la méthode de Monte Carlo et par variable de contrôle, en l'occurrence par la méthode de Kemna-Vorst.

La méthode de Monte Carlo est un bon candidat mais la variance - et donc le temps de calcul - est bien trop élevée pour être utilisée de façon satisfaisante. La méthode de Kemna-Vorst, en mettant en avant le calcul explicite de l'option sur moyenne géométrique, permet de calculer le prix de l'option sur moyenne arithmétique plus précisément et avec un meilleur temps de calcul.

## References

- [1] D. Lamberton et B. Lapeyre. “Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance”. In: *3rd. Ellipses* (2012).
- [2] <http://financelab.nctu.edu.tw/Students/chiu/geometric.pdf>. “Pricing Formula for Geometric Asian Options”. In: ().
- [3] J-M. FRELET I. BARRY. “Pricing d’options asiatiques par les méthodes de Monte Carlo”. In: (2010).