Șiruri și serii de numere reale

$\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}$ $\quad \mathbb{Z}=\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ $\quad \mathbb{Q}=\{\frac{p}{q} \mid p,q\in\mathbb{Z}, q$

$MIN(A)=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall a\in A, x\le a\}$
↳ mulț. minoranților

$MAJ(A)=\{x\in\mathbb{R} \mid \forall a\in A, x\ge a\}$
↳ mulț. majoranților

$\inf A$ = cel mai mare minorant

$\sup A$ = cel mai mic majorant

$m=\min(A)$ dacă $\begin{cases} m\in A \\ m\in Min\,A \end{cases} \Leftrightarrow m\in A\cap Min(A)$

$M=\max(A)$ dacă $\begin{cases} M\in A \\ M\in Maj\,A \end{cases} \Leftrightarrow M\in A\cap Maj(A)$

A nemărg. inferior $\Rightarrow \inf A=-\infty$
A nemărg. superior $\Rightarrow \sup A=+\infty$

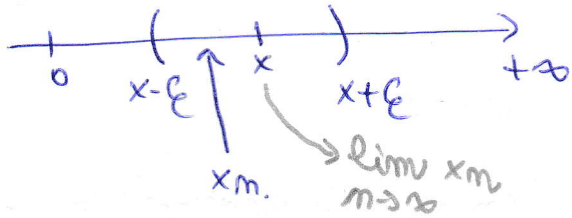
Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$
↳ mulțimea extinsă a nr. reale

$|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$

Șiruri de numere reale

- șirul (x_n) convergent dacă:

$\exists x\in\mathbb{R}, \forall \varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall n\ge n_0: |x_n-x|<\varepsilon$
↑
limita șirului (este unic)



Teorema Weierstrass

- (x_n) descrescător, mărg. inferior $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=\inf(x_n)$
- (x_n) crescător, mărg. superior $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n=\sup(x_n)$

$\Big\}$ (x_n) convergent

- (x_n) monoton, mărginit $\Rightarrow (x_n)$ convergent

Criteriul cleștelui

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \le y_n \le z_n$, $\forall\, n \ge n_0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$.

Criteriul Stolz - Cesaro

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir oarecare de nr. reale.

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - șir monoton și divergent

Dacă $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$.

(x_n) - șir cu termeni pozitivi (STP)

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l$

Criteriul rapoartelor pt. șiruri

(x_n) STP

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = l$

$l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

Binomul lui Newton

$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^n b^n$

$T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Șir fundamental

(x_n) - șir fundamental $\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $\forall\, n \ge n_0$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$: $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$

- (x_n)-convergent $\Leftrightarrow$ (x_n)-fundamental

- pt șirurile recurente, se trece direct la limită în rel. de recurență

1) Dacă $\exists$ soluții și șir convergent, limita e una din soluții

2) $\nexists$ soluții $\Rightarrow$ șir divergent

Serii de numere reale

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = a^0 + a^1 + a^2 + \dots = \frac{1}{1-a}, \quad a \in (-1,1)$$

* Seria geometrică $\quad S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Seria armonică $\quad \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}, \; s \in \mathbb{R}$

$\zeta(s)$ convergentă dacă $s > 1$

Cazuri particulare

$\zeta(0) = \sum 1 = \infty$

$\zeta(1) = \sum \frac{1}{n} = \infty$

$\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$\zeta(-1) = \sum n = \infty$

$\zeta(-2) = \sum n^2 = \infty$

CRITERII DE CONVERGENȚĂ

→ criteriul necesar

dacă $\lim_{n \to \infty} x_n \neq 0$, at $\sum x_n$ divergentă

Obs
nu este suficient pt a concluziona că este convergent

→ criteriul comparației

$\sum_{n>0} x_n$ și $\sum_{n>0} y_n$ – 2 STP

* Dacă $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ a.î. $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq n_0$, at:

- $\sum y_n$ convergentă $\Rightarrow \sum x_n$ convergentă
- $\sum x_n$ divergentă $\Rightarrow \sum y_n$ divergentă

* Dacă $\exists \lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = \ell \in [0, \infty]$, at

- $\ell < \infty$ și y_n conv $\Rightarrow \sum x_n$ conv
- $\ell > 0$ și $\sum y_n$ divergent $\Rightarrow \sum x_n$ divergent

→ Criteriul lui Kummer

- Crit raportului lui d'Alembert

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

- $D>1 \Rightarrow \sum x_n$ C
- $D<1 \Rightarrow \sum x_n$ D
- $D=1 \Rightarrow$ pasul următor

- Crit lui Raabe-Duhamel

$$R = \lim_{n\to\infty} n(D-1)$$

- $R>1 \Rightarrow \sum x_n$ C
- $R<1 \Rightarrow \sum x_n$ D
- $R=1 \Rightarrow$ pasul următor

- Crit. lui Bertrand

$$B = \lim_{n\to\infty} \ln n\,(R-1)$$

- $B>1 \Rightarrow \sum x_n$ C
- $B<1 \Rightarrow \sum x_n$ D.

→ Criteriul radicalului

(x_n) – STP. $\quad \exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = c \in \overline{\mathbb{R}}$

- $c<1 \Rightarrow \sum x_n$ C
- $c>1 \Rightarrow \sum x_n$ D

→ Criteriul lui Leibniz

$$\left.\begin{array}{l} (a_n)\text{-STP descrescătoare} \\ \lim a_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum (-1)^n \cdot a_n \text{ convergentă.}$$

→ Seria Taylor

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

not. $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $\quad \Rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

raza de convergență $\lim_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$

→ Criteriul condensării a lui Cauchy

(x_n) - șir descrescător (STP)

$\sum x_n$ și $\sum 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură

$\sum x_n$ - absolut convergentă

dacă $\sum |x_n|$ - convergent

→ criteriul raportului

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n+1}} = l$

- $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$
- $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$

"~" - aceeași natură

Funcții reale

Teorema lui Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l}\bullet\ f \text{ continuă pe } [a,b] \\ \bullet\ f \text{ derivabilă pe } (a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$ a.î. $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Monotonia unui șir

$a_{n+1} - a_n = r$

- $r > 0 \Rightarrow (a_n)$ cresc.
- $r < 0 \Rightarrow (a_n)$ descresc.

Teorema lui Weierstrass

Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă pe $[a,b]$, at. f mărginită și își atinge marginile $[a,b]$ (vezi pag 1)

→ dacă nu se poate aplica, facem imaginea funcției

Fie $f : A \to \mathbb{R}$ și $f(A) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in A$ a.î. $f(x) = y \} =$ img.

At. valorile extreme ale lui f sunt $\inf f(A)$ și $\sup f(A)$

Deci f își atinge extremele pe A dacă $\exists\, x_1$ și $x_2 \in A$ a.î.

$f(x_1) = \inf f(A)$ ($= \min f(A)$)

$f(x_2) = \sup f(A)$ ($= \max f(A)$)

Formula lui Leibniz

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}$$

$u = u(x)$
$v = v(x)$
$u^{(k)}$ = derivata de ordin k a fc-u.

ex: $f(x) = (x^2 - x) \cdot e^x$

luăm $u(x) = x^2 - x$ (pt că der. o să ajungă 0)

$v(x) = e^x$ (are aceeași der. pt orice ordin)

Polinomul lui Taylor

$$(T_n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \cdot f^{(k)}(x_0)$$

Ca derivata de ordin n, se dem prin inducție. Dacă se utilizează Leibniz se verif când val lui n (0 și 1), pe rând.

Caract. mulțimii de convergență a unei serii de puteri

$I \subset \mathbb{R}$ = mulț de convergență a unei serii puteri centrată în x_0

$\exists!\ r \in [0, \infty]$ a.î. seria e C, $\forall x \in \mathbb{R}\ (x_0 - r, x_0 + r)$

seria e D, $\forall x \in (-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty)$

* natura seriei în $x = x_0 - r$ și $x = x_0 + r$ nu este precizată

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx} = \begin{cases} 0, & f \text{ impară } (f(-x) = -f(x)) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & f \text{ pară } (f(-x) = f(x)) \end{cases}$$

Calculul razei de convergență

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ - serie de puteri cu raza de conv. $r \in [0, \infty)$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ → răd ec.

$\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a}+t$, $a>0$

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c}+tx$, $c>0$

Substituții trigonometrice

- $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})$ $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $x = a\sin t$, $a \cdot \cos t$
  ↳ fct. raț.
- $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})$ $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ $x = a\,\mathrm{ctg}\, t$, $a\,\mathrm{tg}\, t$
- $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})$ $\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $x = \frac{a}{\sin t}$, $\frac{a}{\cos t}$

Calcule cu infinit

- $\log_x \infty = \begin{cases} \infty, & x>1 \\ -\infty, & x\in(0,1) \end{cases}$
- $\mathrm{arctg}\, \infty = \frac{\pi}{2}$

  $\mathrm{arctg} -\infty = -\frac{\pi}{2}$
- $\mathrm{arcctg}\, \infty = 0$

  $\mathrm{arcctg} -\infty = \pi$

Calcule cu log

- $\ln 0 = -\infty$

  $\ln 1 = 0$

  $\ln \infty = \infty$

  $\ln e = 1$
- $\log_a x = b \Rightarrow x = a^b$
- $\ln x = y \Rightarrow x = e^y$

Criteriul lg rad.

(x_n) STP

Dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \ell$.

Convergența integralelor improprii

1) $a, b, p \in \mathbb{R}$. $f: [a,b) \to [0,\infty)$ – fct. poz. și integrabilă pe $[a,b]$

Dacă $\exists \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} (b-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, a.î.:

dacă $p<1$ și $\lambda<\infty \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C.

dacă $p\geq 1$ și $\lambda>0 \Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D.

$[a,b)$

2) $a, p \in \mathbb{R}$.

$f: [a,\infty) \to [0,\infty)$ fct. poz. și local integr. pe $[a,\infty)$

Dacă $\exists \lim_{x \to \infty} x^p \cdot f(x) = \lambda$ atunci:

- dacă $p>1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ C.
- dacă $p \le 1$ și $\lambda > 1 \Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx$ D

$[a, \infty)$

3) $a, b, p \in \mathbb{R}$

$f : (a,b] \to [0, \infty)$ - fct. poz. și integrabilă pe $(a,b]$

Dacă $\exists \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} (x-a)^p f(x) = \lambda$, atunci:

- dacă $p < 1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_{a+0}^b f(x)dx$ C
- dacă $p \ge 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_{a+0}^b f(x)dx$ D

$(a,b]$

4) $b, p \in \mathbb{R}$

$f : (-\infty, b] \to [0, \infty)$ - fct. poz. și local integr. pe $(-\infty, b]$

Dacă $\exists \lim_{x \to -\infty} (-x)^p \cdot f(x) = \lambda$, atunci:

- $p > 1$ și $\lambda < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^b f(x)dx$ C.
- $p \le 1$ și $\lambda > 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^b f(x)dx$ D.

$(-\infty$

* local integrabilă pe $[a,b)$ = integrabilă pe orice compact $[u,v]$ din $[a,b]$

* dacă e nevoie să împărțim integrala pe bucăți și una e divergen[tă] integrala inițială e divergentă.

Funcția Gamma

$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \cdot e^{-x} dx, \alpha \in \mathbb{R}$

Criteriul comparației

$-\infty < a < b \leq \infty$

$f, g : [a, b) \to [0, \infty)$ fct. poz. și local integr. pe $[a, b)$

- dacă $\exists\, c \in [a, b)$ a.î. $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [c, b$, at:
  - $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ C $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C
  - $\int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D $\Rightarrow \int_a^{b-0} g(x)\,dx$ D
- dacă $\exists \lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in [0, \infty]$ at:
  - $l < \infty$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ C $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ C
  - $l > 0$ și $\int_a^{b-0} g(x)\,dx$ D $\Rightarrow \int_a^{b-0} f(x)\,dx$ D

Vectori

Fie $x = (x_1, x_2, ---, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, y_2, --, y_m) \in \mathbb{R}^m$

Avem:
- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, --, x_m + y_m)$
- $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, --, \alpha x_m)$
- $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_m \cdot y_m$, $x \cdot y = y \cdot x$
- $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$, $x \cdot x = \|x\|^2$.

Mulțimi

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ - mult. nevidă

- $\operatorname{int} A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \exists r > 0 \text{ a.î. } B(x, r) \subseteq A\}$
  ↳ interiorul lui A
- $\operatorname{fr} A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset \text{ și } B(x, r) \cap (\mathbb{R}^m \setminus A) \neq \emptyset\}$
  ↳ frontiera lui A

- A = <u>mulțime deschisă</u> dacă $\forall x \in A, \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$
- A = <u>mulțime închisă</u> dacă $\mathbb{R}^m \setminus A$ este deschisă
  - $B(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| < r\}$ – bila deschisă de centru x^0 și rază r
  - $\overline{B}(x^0, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x - x^0\| \leq r\}$ – bila închisă de centru x^0 și rază r

* $\text{ext } A = \text{int}(\mathbb{R}^m \setminus A)$ * $\text{fr } A = \mathbb{R}^m \setminus (\text{int } A \cup \text{ext } A)$

- A deschisă $\Leftrightarrow A \cap \text{fr } A = \emptyset$
- A închisă $\Leftrightarrow \text{fr } A \subseteq A$

<u>afirmații</u>

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^m$ – nevidă

- $\text{int } A \subseteq A$

  Fie $x \in \text{int } A \Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(x, r) \subseteq A$
  Dar $x \in B(x, r)$
  $\Big\} \Rightarrow x \in A$, deci $\text{int } A \subseteq$

- $\text{int } A \cap \text{fr } A = \emptyset$
- $A \subseteq \text{int } A \cup \text{fr } A$ ($\subseteq$ dacă e închisă)
- $\text{int } A \cup \text{fr } A \cup \text{int}(\mathbb{R}^m \setminus A) = \mathbb{R}^m$

<u>Def</u> $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$ – mulțimi nevide

$d(A, B) = \inf \{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}$

↳ distanța dintre mulț. A și B

Distanța minimă de la un pct. P la un cerc situat în origine, de raza $R = |OP - R|$

* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - \ell| = 0$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^m$, $\ell \in \mathbb{R}$

* f continuă în pctele $(a, a) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y) \to (a,a)} f(x, y) = f(a, a)$

Teorema lui Weierstrass

- mulțime compactă = mărginită și închisă

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ — mulțime compactă
$f: A \to \mathbb{R}$ — fct. continuă
$\Rightarrow$ f - mărginită
f - își atinge extremele pe A

Inegalitatea mediilor

$n \in \mathbb{N}^*$; $x_1, \dots, x_n \in [0, \infty) \Rightarrow G \le A \Rightarrow \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \le \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$

Inegalitatea Cauchy-Schwarz

$n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \le (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$

Derivate parțiale

ex: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 y^3 + y \sin x - 2z$

Derivatele: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$

* Calculul der. parțiale în raport cu o variabilă se poate efectua cu regulile de derivare obișnuite ; se păstrează celelalte variabile ale fcției ca parametri constanți

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xy^3 + y\cos x$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3x^2y^2 + \sin x$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2$

Gradientul

$\nabla f(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\right) \in \mathbb{R}^n$

ex: $\nabla f(x,y,z) = (2xy^3 + y\cos x, 3x^2y^2 + \sin x, -2)$

Diferențiala

$df(x^0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$df(x^0)(u) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) \cdot u_i \quad , u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$

$df(x,y,z): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$df(x,y,z)(u_1,u_2,u_3) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\, u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot u_3$$

$$= (2x^3y + y\cos x)\, u_1 + (3x^2y^2 + \sin x)\, u_2 - 2u_3$$

Derivata după direcție

$A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$ - fct.

$x^0 \in A$, $v \in \mathbb{R}^m$

Dacă $\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t}$, s.m. der. lui f în x^0 după direcția vect. v.

not. $= f'_v(x^0)$

* Dacă lim e finită $\Rightarrow f$ - derivabilă în x^0 după direcția vectorului v.

* O fct $g: A \to \mathbb{R}$ s.m. de clasă C^1 în pct. $x^0 \in A$ dacă:

- $\exists\, e > 0$ a.î. f der parțial în orice pct. al mulț. $B(x^0, e) \cap A$
- Fct. $\frac{\partial f}{\partial x_i}: B(x^0, e) \cap A \to \mathbb{R}$ sunt cont. în x^0, $\forall\, i = \overline{1,m}$

$- \nabla (g \circ f)(x^0) = \nabla g(f(x^0)) \cdot J(f)(x^0)$

$$J(f)(x^0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x^0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(x^0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_m}(x^0) \end{pmatrix}$$

$\hookrightarrow$ matricea Jacobi

- $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(g \circ f)(x^0) = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{\partial g}{\partial u_k}(f(x^0)) \cdot \dfrac{\partial f_k}{\partial x_i}(x^0)$, $i = \overline{1,m}$

$f = (x_1, \dots, x_m)$ $g = g(u_1, \dots, u_p)$

* O fct. f s.n. de clasă C^2 în pct. x^0 dacă $\exists\, r > 0$ a.î. f este de două ori derivabilă parțial în orice punct al mulțimii $B(x^0, r) \cap A$, iar funcțiile $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : B(x^0, r) \cap A \to \mathbb{R}$ sunt continue în x^0, $\forall\, i, j = \overline{1,m}$

Criteriul lui Schwarz

Dacă $f : A \to \mathbb{R}$ – fct. de clasă C^2 în $x^0 \in A$,

at. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x^0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$, $\forall\, i, j = \overline{1,m}$, $i \neq j$

Teorema lui Fermat

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^m$ și $f : A \to \mathbb{R}$ fct.

$$\left.\begin{array}{l} x^0 \in \operatorname{int} A \\ f \text{ deriv parțială în } x^0 \\ x^0 \text{ pct. extrem} \end{array}\right\} \Rightarrow \nabla f(x^0) = 0_m$$

Puncte extrem local

1. Derivata parțială, în funcție de variabile
   Egalăm derivatele
   Găsim punctele (x, y) sau (x, y, z) = pot fi mai multe variante $\Rightarrow$
   $\Rightarrow$ punctele critice

2. Matricea hessiană
   - prima linie: luăm der. parțială a lui x și o mai derivăm iar în raport cu x, y sau x, y, z
   - a doua linie: facem același lucru pt. derivata parțială a lui y
   - ar trb. să fie simetrică față de diag. prin

3. Facem matricea pt fiecare pct. critic

- luăm un pct. critic: dacă în matrice avem x, y sau z, le înlocuim cu val. din pct. critic

- calc. determinanții:

  • dacă $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$: $D_1=|a|$ $D_2=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$

  • dacă $M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$: $D_1=|a|$ $D_2=\begin{vmatrix}a & b\\ d & e\end{vmatrix}$ $D_3=\begin{vmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{vmatrix}$

- îi comparăm pe fiecare cu 0:

  • dacă toți $D>0 \Rightarrow$ pct. critic = pct minim local

  • dacă $D_1<0, D_2>0$ | $D_1<0, D_2>0, D_3<0 \Rightarrow$ pct critic = pct de maxim local

  • dacă $\exists$ alt caz, se trece la pasul urm.

4. Dacă det. nu au dat bine, calc. diferențiala a 2-a

- $d^2 f$ (pct. critic) $(\underset{\text{pt. x}}{u_1}, \underset{\text{pt. y}}{u_2}, \underset{\text{pt. z}}{u_3}) = a\cdot u_1 + e\cdot u_2 + i\, u_3 + b\cdot d\cdot u_1\cdot u_2 + c\cdot g\cdot u_1\cdot u_3 + f\cdot h\cdot u_2\cdot u_3$

$$\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$$

- calculăm cât se poate
- dăm valori pt. u_1, u_2, u_3 și vedem dacă e > sau < decât 0
- mai dăm valori iar (de principiu valori de 1 și 0 să se ducă); dacă $d_1<0$ și $d_2>0$ (sau invers) $\Rightarrow$

  $\Rightarrow d^2 f$ (pct.) indef. $\Rightarrow$ pct critic = punct de șa

Dacă nu e așa, luăm pct. critic și vedem ce-i cu el

Serii Taylor uzuale

- $$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x\in(-1,1)$$

- $$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \quad x\in\mathbb{R}$$

- $$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- $$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x\in\mathbb{R}$$

- $$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad x\in[-1,1]$$

- $$tg^{-1}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\dots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x\in[-1,1]$$

Serii de puteri

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot x^n$$

- Derivare termen cu termen
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1}$$
- integrare termen cu termen
$$\int_0^t S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot t^{n+1}$$

Natură serii uzuale

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ D.
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, $p>1$ C.
- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ D
- $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$, $|a|<1$ C

Integrala Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} f\left(a+(b-a)\cdot\frac{k}{n}\right)$$

* orice fct. continuă = integrabilă Riemann
  - monotonia

    $$f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$
  - liniaritatea

    $$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$
  - aditivitatea

    $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

* Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - fct. cont. pe $[a,b]$
  - $f(x) \ge 0,\ \forall x \in D \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$
  - $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$
  - $\inf f([a,b]) \le \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \le \sup f([a,b])$

Medii

- $m_a = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$
- $m_g = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$
- $m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}}$

$$\boxed{m_a \ge m_g \ge m_h}$$

Formule de calcul prescurtat

- $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$
- $(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^3 \pm b^3 = (a\pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Combinări

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- n elem.
- luăm câte k

Trigonometrie

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\sin a, \cos a \in [-1, 1]$

$tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = ctg\,\alpha$

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$arctg(-x) = -arctg\,x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

$arcctg(-x) = \pi - arcctg\,x$

Limite

* care dau 1

$$\frac{\sin u(x)}{u(x)} \qquad \frac{tg(u(x))}{u(x)} \qquad \frac{\arcsin(u(x))}{u(x)} \qquad \frac{arctg\,u(x)}{u(x)}$$

$$\frac{\ln(1+u(x))}{u(x)} \qquad \frac{e^{u(x)}-1}{u(x)}$$

* $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^{u(x)}-1}{u(x)} = \ln a$

* $\lim\limits_{x\to a} [1+u(x)]^{\frac{1}{u(x)}} = e$

* $\lim\limits_{x\to a} \frac{[1+u(x)]^{p}-1}{u(x)} = p$

* $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$

Descompunerea în fracții simple

1) $\frac{\alpha x+\beta}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$

2) $\frac{\alpha x+\beta}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$

DERIVATE

1. $e' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
4. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
5. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
6. $(e^x)' = e^x$
7. $(a^x)' = a^x \ln a$
8. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
9. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
10. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x^2+1}$
11. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{x^2+1}$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
14. $(\sin x)' = \cos x$
15. $(\cos x)' = -\sin x$
16. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
17. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
18. $(\sqrt{x^2-a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$
19. $(\sqrt{x^2+a^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$
20. $(\sqrt{a^2-x^2})' = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Nr.crt.	www.profesorjitaruionel.blog FORMULE Integrale nedefinite	Domeniu
1	$\int 1\,dx = x + C$	$x \in R$
2	$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$x \in (0,\infty), \alpha \in R\setminus\{-1\}$
3	$\int x^{n}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$x \in R, \quad n \in N$
4	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in R^{*}$
5	$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$	$x \in R, \quad a \in R_{+}^{*}\setminus\{1\}$
6	$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$	$x \in R$
7	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$x \in R$
8	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$x \in R$
9	$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x + C$	$x \in R\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\epsilon Z\right\}$
10	$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctg\,x + C$	$x \in R\setminus\{k\pi \mid k\epsilon Z\}$
11	$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$x \in R\setminus\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k\epsilon Z\right\}$
12	$\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$x \in R\setminus\{k\pi \mid k\epsilon Z\}$
13	$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$	$x \in R, \quad a \neq 0$
14	$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$	$x \in R\setminus\{-a,a\}, \quad a \neq 0$
15	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$x \in (-a,a), a > 0$
16	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$	$x \in R, \quad a \neq 0$
17	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C$	$x \in (-\infty,-a) \cup (a,\infty),$ $a > 0$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2}$$