Parțial 2 | 19.01.2024

Algebră liniară

$(k, +, \cdot)$ corp comutativ

exemple:

→ $\mathbb{R}$ → $\mathbb{Q}$

→ $\mathbb{C}$ → $\mathbb{Z}_p$, $p \in \mathbb{N}$ prim

1) SPAȚII VECTORIALE ȘI APLICAȚII LINIARE

→ un spațiu vectorial peste k sau k-spațiu vectorial este format din:

1) $(V, +)$ grup abelian
2) operație externă $\cdot : k \times V \to V$

și satisface următoarele axiome:

(SV1) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

(SV2) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y$, $\forall x, y \in V$, $\alpha, \beta \in k$

(SV3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(SV4) $1 \cdot x = x$

Acest ~~sp~~ k-spațiu vectorial se notează: ${}_kV$

V → vectori

k → scalari

→ Adunarea în V = adunarea vectorilor

→ înmulțirea cu scalari

→ spații vectoriale = spații liniare

Exemple:

1) $V=\{0\}$ sp. vectorial, $0+0=0\in V$, $\alpha\cdot 0=0\in V, \forall \alpha\in k$
notație sp. vec: 0.

2) k^n este un k-spațiu vectorial în rap. cu adunarea vectorilor:
$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$
și cu înmulțirea cu scalari:
$$\alpha(x_1,\dots,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$$

3) $M_{m\times n}(k)$ este un k-sp vec.

~~4)~~ $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{ij}]$, $\alpha\in k$,
atunci $A+B=[a_{ij}]$, $\alpha A=[\alpha a_{ij}]$

4) k corp
L subcorp $\Big| \Rightarrow L$ k-sp. vectorial
adunarea vectorilor este în L
înmulțirea cu scalari:
$$k\times L\to L,\ (\alpha,x)\mapsto \alpha x,\ \forall x\in L, \alpha\in k$$

5) Mult. tuturor pol.:
$$k[X]=\{a_0+a_1X+\dots+a_nX^n \mid n\in\mathbb{N},\ a_{\overline{0,n}}\in k\}$$

6) Mult. vectorilor liberi din plan ||spațiu este un $\mathbb{R}$-sp. vec.

Reguli de calcul: Fie V un k-sp. vec, $x,y\in V$, $\alpha,\beta\in k$, atunci:

(a) $\alpha\cdot 0=0=0\cdot x$

(b) $\alpha(-x)=(-\alpha)x=-\alpha x$

(c) $\alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y$ și $(\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x$

(d) $\alpha x=0$ dacă $\alpha=0$ sau $x=0$

~~Subs~~ 2) SUBSPAȚII VECTORIALE

Fie ${}_kV$. Un subspațiu vectorial al lui V este

U, $U \subseteq V$, $x, y \in U$, $\alpha \in k \Rightarrow x+y, \alpha x \in U$,

iar U și op. restricționate $\Rightarrow {}_kU$.

$\rightarrow$ $\forall\, {}_kV$ are 2 subspații vectoriale triviale:

$$0 \leq {}_kV, \quad V \leq {}_kV$$

Prop.

Fie ${}_kV$, $U \subseteq V$. Urm. a. sunt echiv.:

(i) $U \leq {}_kV$

(ii) (a) $0 \in U$

(b) $x, y \in U \Rightarrow x + y \in U$

(c) $x \in U$, $\alpha \in k \Rightarrow \alpha x \in U$

(iii) (a) $0 \in U$

(b) $x, y \in U$, $\alpha, \beta \in k \Rightarrow \alpha x + \beta y \in U$

Prop

${}_kV$, $U_i \leq {}_kV$ subspații, $i \in I$, atunci

$$\bigcap_{i \in I} U_i \leq {}_kV$$

D. $\bigcup_{i \in I} U_i$ nu este cu necesitate un subspațiu.

Def Fie ${}_kV$ și $X \subseteq V$ submulțime.

Subspațiul generat de X:

$$\langle X \rangle = \langle X \rangle_k = \bigcap_{X \subseteq U \leq_k V} U$$

dacă $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ mulțime finită, scriem.

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_k$$

Lemă ${}_kV$ și $X \subseteq V$. Avem:

(a) $\langle X \rangle_k \leq {}_kV$

(b) $X \subseteq \langle X \rangle_k$ și $X = \langle X \rangle_k$ dacă $X \leq_k V$

(c) $\langle X \rangle_k$ cel mai mic subspațiu a lui V care conține X

$$U = \langle X \rangle_k \text{ dacă } \begin{cases} U \leq_k V \\ X \subseteq U \\ \text{dacă } W \leq_k V \text{ a.î. } X \subseteq W \text{ atunci } U \leq_k W \end{cases}$$

(d) $X \subseteq Y \subseteq G$ atunci $\langle X \rangle_k \leq \langle Y \rangle_k \leq V$.

Prop ${}_kV$ și $X \subseteq V$. Avem:

$$\langle X \rangle_k = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in X \text{ și } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k\}$$

Particular:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$\langle X \rangle_k = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle_k = \{\alpha x_1 + \alpha x_2 + \dots + \alpha x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in X, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in k\}$$

! **Definiție**

Fie ${}_kV$ și $X \subseteq V$.

Se numește combinație liniară a vectorilor X o expresie de forma:

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ cu $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ și $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in k$.

Corolar Fie ${}_kV$.

(1) Pt $x \in V$, $\langle x \rangle_k = \{\alpha x \mid \alpha \in k\}$

(2) Pt $x, y \in V$, $\langle x, y \rangle_k = \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \in k\}$

Suma directă și suma subspațiilor vectoriale

Definiție

→ Fie ${}_kV$ și $S, T \leq {}_kV$.

Suma celor 2 subspații este:

$$S + T = \{x + y \mid x \in S, y \in T\}$$

→ ${}_kV$ și $S, T \leq {}_kV$. Atunci:

$$\langle S \cup T \rangle_k = S + T$$

În particular: suma a două subspații este un subspațiu

Corolar

${}_kV$ notăm $Sub_k(V) = \{S \mid S \leq {}_kV\}$ mulțimea tuturor subspațiilor lui.

Elementele unei sume $S+T$:

-> vectori care se pot scrie ca o sumă între un ~~vector~~ 1 vector din S și un vector din T.

Propoziție

${}_kV$ și $S, T \leq_k V$ 2 subspații. U.a.s.e:

(i) $S \cap T = 0$

(ii) scrierea $\forall$ vector din $S+T$ ca o sumă dintre un vector din S și unul din T este unică

exemplu:

$v \in S+T$, $v = x+y = s+t$, $x, s \in S$, $y, t \in T$

$\Rightarrow x = s$ și $y = t$.

În acest caz, $S+T$ se numește sumă directă și se notează

$$S \oplus T = S+T$$

$$V = S \oplus T \iff \begin{cases} V = S+T \\ S \cap T = 0 \end{cases}$$

APLICAȚII LINIARE

Fie V și W 2 k-sp. vectoriale.

o aplicație liniară = homomorfism de sp. vectoriale între V și W

o funcție

$$f: V \to W, \ f(x+y) = f(x) + f(y), \ \cancel{\alpha f(x)}$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad \forall x, y \in V, \ \alpha \in k$$

Se numește izomorfism o aplicație liniară care este bijectivă

$\hookrightarrow$ V și W sunt izomorfe, $V \cong W$

→ Fie ${}_kV$, ${}_kW$. Notăm:

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) = \{ f: V \to W \mid f \text{ apl. liniară} \}$$

$$\mathrm{End}_k(V) = \mathrm{Hom}_k(V, V)$$

O apl. liniară $f: V \to V$ mai este numită și endomorfism a lui V.

→ O aplicație liniară $f: V \to W$ este un morfism de grupuri, așadar:

(a) $f(0) = 0$

(b) $f(-x) = -f(x)$

Prop ${}_kV$, ${}_kW$. O aplicație $f: V \to W$ este liniară dacă

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),\ x \in V,\ y \in W,\ \alpha, \beta \in k.$$

Obs Prin inducție, o apl. liniară păstrează combinațiile liniare

$f: V \to W$ liniară, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in k$, $x_1, \dots, x_n \in V$.

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$$

Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară.

Nucleul: $\ker f = \{ x \in V \mid f(x) = 0 \}$.

imaginea: $\mathrm{Im}\, f = \{ f(x) \mid x \in V \}$

Dacă $f: V \to W$ aplicație liniară atunci:

(a) $\ker f \le_k V$

(b) $\mathrm{Im}\, f \le_k V$

(c) f este injectivă dacă $\ker f = 0$

(d) f este surjectivă dacă $\mathrm{Im}\, f = W$.

2) BAZA UNUI SPAȚIU VECTORIAL

$_kV$. sp. vectorial.

→ o listă de vectori este un element

$$v = (v_1, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

o listă de vectori $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ este liniar independentă dacă

pt $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in k$, $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

o listă care nu este liniar independentă ⇒ listă de vect. liniar dependentă (nu toți scalarii sunt $= 0$)

Observație

(1) Def. liniar independenței:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \cdot (v_1, v_2, \dots, v_n)^t = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = 0$$

(de asta luăm $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V^{n \times 1}$ și nu $\in V^n$)

(2) listă vidă $(n = 0)$ este liniar independentă

(3) $(v_1)^t$ este liniar independentă $\Rightarrow v_1 \neq 0$

(4) $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}$, $v_i = 0 \Rightarrow v$ liniar dependentă,

$$0 v_1 + \dots + 1 v_i + \dots + 0 v_n = 0$$

(5) $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}$, $v_i = v_j$, $i \neq j \Rightarrow v$ liniar dependentă,

$$0 v_1 + \dots + 1 v_i + \dots + (-1) v_j + \dots + 0 v_n = 0$$

(6) uneori spunem că vectorii $v_1, v_2, \dots, v_n$ sunt liniar independenți/dependenți, în loc să spunem că lista de vectori are acea proprietate.

Exemple: (1) $(v_1, v_2, v_3)^t$, $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,2,3)$, $v_3 = v_1 + v_2 = (2,2,4)$.

este liniar dependentă, deoarece

~~(2) $(e_1, e_2, e_3)^t$~~ $\quad 1v_1 + 1v_2 + (-1)v_3 = v_1 + v_2 - v_3 = 0 = (0,0,0)$

(2) $(e_1, e_2, e_3)^t$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ este liniar independentă în $\mathbb{R}^3$

Prop. Fie $w = (v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_m})^t \in V^{m \times 1}$ o sublistă a listei

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}.$$

1) v este liniar independentă $\Rightarrow$ w liniar independentă

2) w este liniar dependentă $\Rightarrow$ v liniar dependentă

Pt. o listă de vectori $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}$,

$\langle b \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle \to$ subspațiul generat de lista respectivă

Corolar $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}$ a.î. $\exists i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

v_i este combinație liniară a vectorilor din $v^{\setminus i}$

$$\Rightarrow \quad \langle v \rangle = \langle v^{\setminus i} \rangle$$

$v^{\setminus i}$ = sublista obținută din v prin eliminarea lui v_i.

O submulțime finită $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ se numește liberă dacă $(v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}$ este liniar independentă.

O submulțime oarecare $B \subseteq V$ este liberă dacă toate submulțimile finite sunt libere

BAZE ŞI COORDONATE

Def O bază (ordonată) a ${}_kV$ este o listă de vectori
$$b=(b_1,b_2,\dots,b_n)^t\in V^{n\times 1} \text{ a.î.}$$
1) b liniar independentă
2) $\langle b\rangle = V$

baze care nu sunt ordonate:
submulţimi $\{b_1,b_2,\dots,b_n\}\subseteq V$ a.î.
$(b_1,b_2,\dots,b_n)^t$ bază ordonată

Exemplu:
$e=(e_1,e_2,\dots,e_n)^t\in V^{n\times 1}$, $e_1=(1,0,\dots,0)\in k^n$,
$e_2=(0,1,\dots,0)\in k^n,\dots, e_n=(0,0,\dots,1)\in k^n$ este bază pt k^n.
→ se numeşte bază canonică a lui k^n.

Propoziţie
Fie ${}_kV$ şi $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)^t\in V^{n\times 1}$. U.a.s.e:
(i) b este o bază a lui V
(ii) $\forall$ vector $x\in V$, $\exists!\ \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in k^n$ a.î.
$$x=\alpha\cdot b=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\dots+\alpha_n b_n$$

Definiţie
Fie ${}_kV$ şi $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)^t\in V^{n\times 1}$
Coordonatele unui $x\in V$ în raport cu b sunt scalari unic det.
$(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$,
$$x=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\dots+\alpha_n b_n$$

DIMENSIUNEA UNUI SPAȚIU VECTORIAL

Lemă (Lema lui Steinitz)

Se consideră două liste de vectori

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)^t \in V^{n \times 1}$$

$$W = (w_1, w_2, \dots, w_m)^t \in V^{m \times 1}$$

$${}_kV, \; n, m \in \mathbb{N}$$

Dacă V liniar independentă, $\langle W \rangle = V$ $\Rightarrow$ $n \leq m$,

$$\langle v_1, \dots, v_n, w_{n+1}, \dots, w_m \rangle = V$$

Corolar $\forall$ 2 baze ale unui k-sp. vectorial (finit generat) au același nr. de elemente

Definiție

dimensiunea unui ${}_kV$ (finit generat) este numărul elementelor unei baze a lui V.

$$\dim_k V = \dim V$$

Exemple

(1) $\dim 0 = 0$

(2) $\dim_k k^n = n$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

Propoziție

Fie ${}_kV$, $\dim V = n$, $b = (b_1, b_2, \dots b_n) \in V^{n\times 1}$ listă de vectori.

U. a. s. e:

(1) b este liniar independentă

(2) $\langle b \rangle = V$

(3) b este o bază.

Formule legate de dimensiune

${}_kV$, $S, T \leq {}_kV$ 2 subspații

$$\dim S + \dim T = \dim(S+T) - \dim(S\cap T)$$

Corolar

Dacă ${}_kV$ finit dim., $S \leq {}_kV \Rightarrow \dim S \leq \dim V$.

$\dim S = \dim V$ dacă $S = V$

Prop Fie $f: V \to W$ o aplicație liniară între ${}_kV$ și ${}_kW$

$$\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$$

Corolar

Fie ${}_kV$ și ${}_kW$, $\dim V = \dim W$, $f: V \to W$ o aplicație liniară

U. a. s. e:

(1) f injectivă

(2) f surjectivă

(3) f bijectivă

?. Lema substituției

Fie $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$ bază $/_K$ V și $v \in V$ cu coordonatele $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ în rap. cu baza b ($v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$)

Fie $b' = (b_1, \dots, v, \dots, b_n)$ $\to$ rezultă din b prin substituția lui b_i cu v

Atunci:

(a) b' bază dacă $\alpha_i \neq 0$

(b) b' bază și

$x \in V$ are coord $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ în rap cu V și $(x_1', x_2', \dots, x_n')$ în rap cu V' atunci:

$$\begin{cases} x_i' = \alpha_i^{-1} x_i \\ x_j' = \alpha_i^{-1}(\alpha_i x_j - \alpha_j x_i), \ j \neq i \end{cases}$$

Rangul unei liste $v = (v_1, \dots, v_n)^t = \dim \langle v \rangle$

$\text{rank } v = \dim \langle v \rangle$