

Chapitre 1

Dynamic systems and state models

In this first chapter we give first of all the definition of the dynamic systems group which is studied in the book, as well as the terminology and the used notations, and we illustrate it with some examples from engineering sciences. We explain then what recover the notions of modelling and analysis of dynamic systems. The chapter ends by a brief description of the nine other chapters content.

1.1. Definitions and examples

In this book, we will study dynamic systems described by sets of first-order differential equations of the shape

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \\ &\vdots \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m),\end{aligned}\tag{1.1}$$

where f_i are applications from \mathbb{R}^{n+m} to \mathbb{R} , while the x_i and u_i are scalar functions of time t , which is an independant variable. The quantity \dot{x}_i represents the derivative of the variable x_i relative to time t . The variables x_1, x_2, \dots, x_n are called *state variables* and contain all the necessary information on the state of the system in the present to be able to measure its evolution in the future, by means of equations (1.1), knowing the future values of the variables u_1, u_2, \dots, u_m . These are called *entries* of the system, and represent the outside's influence on the studied

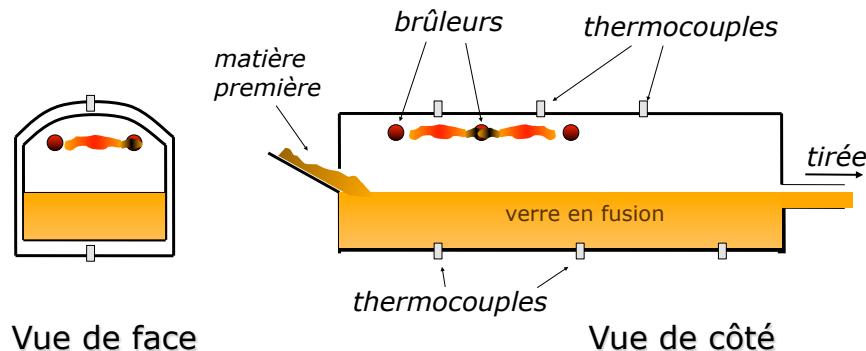


FIGURE 1.1 – A glass furnace

system. We often write, in a condensed way,

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.2)$$

where f is an application from \mathbb{R}^{n+m} to \mathbb{R}^n while x and u are vectorial functions of time.

Such a system of equations is called *state model*. The goal of this book is to treat the *modelling*, i.e. obtaining such equations for diverse applications of engineering sciences, and the *analysis*, i.e. the determination of main properties of these systems, deducted from the equations. Let us begin with some examples to illustrate our subject.

Example 1.1. A glass furnace

The first example is an industrial process, illustrated in figure 1.1. It is about a furnace whose walls are built in refractory material and in which we melt a mixture of sand, lime and other additives to obtain glass. This fusion is obtained thanks to an energy input inside the furnace, for instance coming from a gas burner placed above the bath of glass. The molten glass is extracted from the furnace in a continuous way to feed machines downstream. By making the assumption that the temperature of the glass is homogeneous in the furnace and that this one is perfectly isolated, we can write the following equations, corresponding to the mass balance and to the energy balance of the process. We thus write that the mass or energy change in the considered system, by unit of time, equals the sum of what goes into the system, in terms of mass and heat, decreased by what gets out of it, always during the same unit of time :

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= P_{in} - P_{out}, \\ \frac{d}{dt}(CTM) &= Q_{in} + C_{in}T_{in}P_{in} - CT P_{out}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

with the following meaning of variables and parameters of the model :

- M : mass of the glass in fusion in the furnace (kg),
- T : temperature of the glass in fusion in the furnace (K),
- T_{in} : temperature of the raw material put in the furnace (K),
- C : specific heat of the glass ($J/K \times kg$),
- C_{in} : specific heat of the raw material ($J/K \times kg$),
- Q_{in} : heat quantity supplied by unit of time (J/s),
- P_{in} : mass put in the furnace by unit of time (kg/s),
- P_{out} : mass extracted by unit of time (kg/s).

We indicated units for each of the sizes defined above. The dimensional coherence of the equations is the first check to be made in an exercise of transforming a mathematical model into equations.

In order to put the system of equations (1.3) under the shape of a state model (1.1), we define the state variables :

- $x_1 \triangleq M$: mass of the glass in fusion (kg),
- $x_2 \triangleq CT$: heat quantity by unit of mass of glass in fusion (J/kg),

and the input variables :

- $u_1 \triangleq P_{in}$: mass put in the furnace by unit of time (kg/s),
- $u_2 \triangleq P_{out}$: mass extracted by unit of time (kg/s),
- $u_3 \triangleq Q_{in}$: head supplied by unit of time (J/s).

We obtain the following state model :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_1 - u_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{u_1(\alpha - x_2) + u_3}{x_1},\end{aligned}\tag{1.4}$$

where the constant parameter $\alpha = C_{in}T_{in}$ is the heat quantity of the material put in the furnace by unit of mass.

Note that other choices for the state variables and input variables are possible (see exercise 1.2). \square

Example 1.2. A chemical reactor

In a chemical reactor (Figure 1.2), a reaction transforming a reactive A into a product B takes place in liquid phase with a certain temperature T . The reactor is fed with reactive A via a valve which introduces the reactive with concentration A_{in} with a variable volume flow q_{in} which is a monotonous increasing function of the

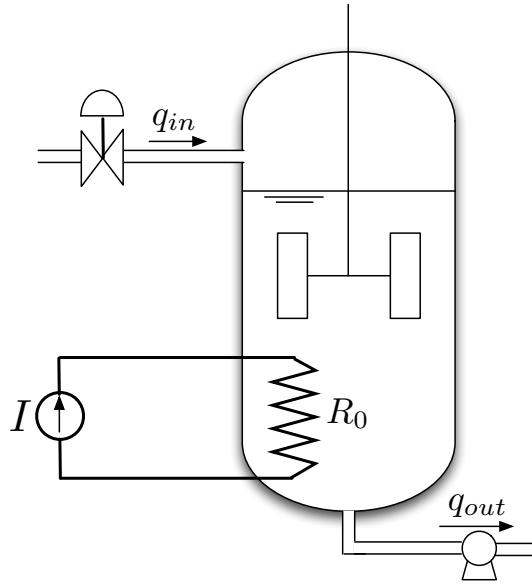


FIGURE 1.2 – Chemical reactor

valve opening $w : q_{in} = \phi(w)$. The content of the reactor is extracted by a pump with a flow q_{out} . We assume that the reaction is endothermic and then requires a heat input W supplied by a heating resistance R_0 fed by a variable current source I as illustrated in the figure. Moreover, we assume that the reactor is perfectly mixed. The reaction (i.e. the transformation of the reactive A in produced B) takes place with a reaction speed which follows a kinetic of the first order, i.e. proportional to the quantity of reactive A in the reactor. The coefficient of proportionality is a function of the temperature and verify the law of Arrhenius, $k(T) = k_0 \exp(-\frac{E}{RT})$.

We describe the evolution of this system by writing the equations of volumetric, mass and heat balances :

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= q_{in} - q_{out}, \\ \frac{d}{dt}(AV) &= q_{in}A_{in} - q_{out}A - k(T)AV, \\ \frac{d}{dt}(BV) &= -q_{out}B + k(T)AV, \\ \frac{d}{dt}(CTV) &= CT_{in}q_{in} - CTq_{out} - hk(T)AV + R_0I^2,\end{aligned}$$

with :

V : liquid volume in the reactor,
 A : concentration of reactive A in the reactor,
 B : concentration of reactive B in the reactor,
 k_0 : reaction speed's constant,
 E : activation energy,
 R : Boltzmann constant,
 C : specific heat,
 h : reaction enthalpy.

The other notations are defined above. We can define the state variables

$x_1 = A$: reactive concentration in the reactor,
 $x_2 = B$: product concentration in the reactor,
 $x_3 = V$: volume of the reactionnal environment,
 $x_4 = T$: temperature of the reactionnal environment,

and the input variables

$u_1 = w$: valve opening,
 $u_2 = q_{out}$: withdrawal rate,
 $u_3 = I$: electrical current supplied in the heating resistance,

we obtain the following state model :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \phi(u_1) \frac{A_{in} - x_1}{x_3} - k(x_4)x_1, \\
 \dot{x}_2 &= -\phi(u_1) \frac{x_2}{x_3} + k(x_4)x_1, \\
 \dot{x}_3 &= \phi(u_1) - u_2, \\
 \dot{x}_4 &= \frac{1}{x_3} [\phi(u_1)(T_{in} - x_4) + \frac{R_0}{C}u_3^2] - \frac{h}{C}k(x_4)x_1.
 \end{aligned}$$

Continuous and isotherms reactors constitute an interesting particular case. It is about reactors for which the volume V and the temperature T are maintained constant by adequate regulation devices. The state model is then reduced to the first two equations of the model above :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \frac{\phi(u_1)}{V}(A_{in} - x_1) - k(T)x_1, \\
 \dot{x}_2 &= -\frac{\phi(u_1)}{V}x_2 + k(T)x_1.
 \end{aligned} \tag{1.5} \quad \square$$

Example 1.3. Ladybirds and aphids

Aphids are permanent pests for the rosebushes cultures. The biological fight against these devastating species is an alternative to the treatments by pesticides, which are less and less effective in front of the resistances developed by aphids. The *Harmonia axyridis* ladybirds (Fig. 1.3) are used in this biological fight because



FIGURE 1.3 – *Harmonia axyridis*

they feed on aphids with great voracity. They are active by spring, that is by the appearance of the aphids colonies in rose gardens. To increase the predatory efficiency of ladybirds, the French institute of agronomic research (INRA) developed a ladybirds variety « home-bodies » who do not fly (and therefore are not likely to leave the cultures).

We wish to establish a model describing the evolution of the number of aphids $x_1(t)$ and of ladybirds $x_2(t)$ under the following assumptions :

1. if there are no ladybirds, the population of aphids has enough food (rosebushes leaves) to have an exponential growth with a specific constant rate of growth ;
2. ladybirds eat more aphids if their population is bigger ;
3. the predation by ladybirds is the only source of aphids natural mortality ;
4. ladybirds have a constant specific rate of natural mortality ;
5. the gardener, who is not very smart, spreads a pesticide which kills indifferently aphids and ladybirds with a variable manuring rate $u(t)$.

The following state model expresses the balance of the number of aphids and ladybirds :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= ax_1 - bx_1x_2 - cux_1, \\ \dot{x}_2 &= dx_1x_2 - ex_2 - fux_2.\end{aligned}\tag{1.6}$$

where a, b, c, d, e, f are positive constants. We can verify that every term of this model formalizes one of the assumptions above. This check is left as exercise.

This type of model was originally introduced by the Italian mathematician V. Volterra who tried to understand the fluctuations in the efficiency of the fishing in Adriatic sea at the beginning of the twentieth century. Obviously, it is a rather big simplification of the reality. The model doesn't take into account numerous factors that can influence the evolution of the populations (weather conditions, other available resources, other predators, migration of the populations etc.). As our example shows it, an important application of this type of model is the fight against pests in the agriculture. It often happens that the harmful population is controlled by predator introductions. The model is then an interesting tool for the design of intervention programs on the ground. \square

Example 1.4. A DC motor

We now examine the electromechanical device shown in figure 1.4. This is a DC

FIGURE 1.4 – DC motor

motor which can be controlled by both the stator voltage e and the rotor current I . The stator circuit equation is given by

$$e = Ri + L \frac{di}{dt}$$

where R and L are the resistance and inductance of the circuit, e is the control voltage and i is the current. The couple exerted on the rotor is given by $C = \Phi I$ where I is the rotor current and Φ is the magnetic flow proportional to the excitation current $\Phi = Ki$. We therefore obtain

$$C = KiI.$$

It remains to model the mechanical part of the system. Noting θ the angular position of the rotor, J its moment of inertia and F the viscous friction coefficient, the application of Newton's law leads to :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + F \frac{d\theta}{dt} = C.$$

We can define the state variables $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, $x_3 = i$, the inputs $u_1 = e$, $u_2 = I$, and we obtain the following state model :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{F}{J}x_2 + \frac{K}{J}x_3 u_2, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u_1. \end{aligned} \tag{1.7} \quad \square$$

The four examples we just discussed are intended to show that equation (1.2) actually helps to build models of dynamic systems in various application areas of engineering as we treated successively examples about thermodynamics, chemical engineering, ecology and electronics. They will also help to understand better the terminology that is introduced in the next section.

1.2. Terminology and notations

As the previous examples illustrated it, we study *dynamic systems* whose behavior is described by a *state model* composed by a set of differential equations written under condensed shape :

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (1.8)$$

We consider this state model from an initial time t_0 . The state $x \in \mathbb{R}^n$ and the entry $u \in \mathbb{R}^m$ are vectorial functions of time that we can sometimes note $x(t)$ and $u(t)$. However, the argument t is often omitted without confusion.

For a given system, the entry $u(t)$ is a priori any function of the time. However, we always assume that it is a *piecewise continuous* and *bounded* function : $u(t) \in \mathcal{U}$ where \mathcal{U} is a set of piecewise continuous and bounded of \mathbb{R} to \mathbb{R}^m functions.

For a given value of the initial state $x(t_0) = x_0$ and an input $u(t)$ given, the solution $x(t) \ t \geq t_0$ of the differential system (1.8) is called *path* of the system. Sometimes, when it will be necessary for the presentation clarity, the path will be denoted $x(t, x_0, u)$. We always assume that such a path exists at any time $t \geq t_0$, is unique and is a continuous function of time. Graphically, a path may be displayed by a continuous curve in \mathbb{R}^{n+1} . The path projection in the *state space* \mathbb{R}^n (also called *phase space*) is called an *orbit* of the system.

When the input $u(t)$ can be freely chosen in \mathcal{U} , we say that the system $\dot{x} = f(x, u)$ is a *forced* system, or a *controlled* system. The term *forced* is used to mean that starting from an initial state x_0 , the shape of the path is somehow forced by the choices we made of an input $u(t)$. Similarly, in an automatic context, the term *controlled* means that the system state can be manipulated in the state space by suitable manipulation of the input $u(t)$.

In the next chapters however, we will be interested in the solution of the equation $\dot{x} = f(x, u)$ when the input is actually a constant fixed a priori : $u(t) = \bar{u} \ \forall t \geq t_0$. In that case, we write the state model as $\dot{x} = f(x, \bar{u})$. We sometimes also write

$$\dot{x} = f_{\bar{u}}(x)$$

to express more clearly that f is only a function of x , parameterized by the constant \bar{u} . In such a case, there is only one possible path moving freely at the start of an

initial state x_0 . By fixing in advance the input at a constant value, we have no longer the ability to control the paths of the system and say that the system is a *free system* (we also say an *autonomous system*, or *stationary system*). The path is sometimes called free response of the system.

When we are interested in the solution of the equation $\dot{x} = f(x, u)$ for *one* input $u(t)$ that is not constant over time but specific (for example a sine wave), we may as well forget that we selected an input in \mathcal{U} and simply write :

$$\dot{x} = f(x, t)$$

A dynamic system represented this way is called a *non-autonomous* or *unstationary* system.

We will sometimes consider various special cases of the general state model (1.8). We distinguish in particular ;

Affine systems relative to the input

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) \triangleq f(x) + G(x)u$$

where f and the g_i are applications from \mathbb{R}^n to \mathbb{R}^n . The state model (1.4) of a glass furnace is of this form with the following definitions :

$$f(x) = 0, \quad G(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ (\alpha - x_2)/x_1 & 0 & 1/x_1 \end{pmatrix}.$$

Affine systems relative to the state

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^m x_i a_i(u) + b(u) \triangleq A(u)x + b(u)$$

where b and the a_i are applications from \mathbb{R}^m to \mathbb{R}^n . The state model of an isothermal continuous chemical reactor (1.5) is of this form with the following definitions :

$$A(u) = \begin{pmatrix} -(\frac{\phi(u_1)}{V} + k(T)) & 0 \\ k(T) & -\frac{\phi(u_1)}{V} \end{pmatrix},$$

$$b(u) = \begin{pmatrix} \frac{\phi(u_1)A_{in}}{V} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The bilinear systems

These systems are affine relative both to the state and the input

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \left(A_0 + \sum_{i=1}^m u_i A_i \right) x + B_0 u, \\ &= A_0 x + (B_0 + \sum_{i=1}^n x_i B_i) u,\end{aligned}$$

where the A_i ($i = 0, \dots, m$) are matrices of dimension $(n \times n)$ and the B_i ($i = 0, \dots, n$) are matrices of dimension $(n \times m)$. The state model of a DC motor (1.7) is of this form with the following definitions :

$$\begin{aligned}A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \quad A_1 = 0 \\ A_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{K}{J} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Linear systems

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

where A is a matrix of dimension $(n \times n)$ and B is a matrix of dimension $(n \times m)$. If we consider the state model of the DC motor assuming that the rotor current source is constant ($I = \text{constant}$), we obtain an example of a linear system with

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{KI}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3. Modeling and analysis

A dynamic system, as we conceive it in this book, is thus a part of the *concrete* reality that seems relevant in an engineering problem and that we choose to iso-

late in thought to describe its behavior in mathematical terms using a model. In particular, we are interested in characterize quantitatively the evolution over time of the *state* of the system. For this, we use **deterministic, lumped parameters state models** which consist of ordinary differential equations.

However, other modeling approaches of dynamic systems are possible. For the various examples described in the section 1.1 we could have build **deterministic, distributed parameters state models** composed of partial differential equations. This is how, in the example of the glass furnace, we made the hypothesis that the temperature was uniform across the glass bath. This is a simplistic view, but very useful to build simple and effective models for instance in view of the control and optimization of the dynamic behavior of the furnace. However, if this hypothesis is not accepted and we want to study the spatial variations of temperature, we can develop a state model consisting of partial differential equations describing the evolution over time of the temperature and velocity of the fluid fields in the molten glass bath. Neither model is better than the other. They simply are different models obtained for different objectives, usually corresponding to different spatial and temporal scales.

The interaction between the system and the « outside world » is represented by the inputs of the model $u_i(t)$ which are, as we mentioned above, functions of time, real and deterministic. In reality, a given system is often subject to random influences that can be represented by introducing stochastic inputs, i.e. random functions $u_i(t)$ (also called stochastic processes). We then obtain stochastic state models whose state variables are themselves random functions and whose study uses different mathematical techniques than those used in this book.

The state model of a dynamic system is thus a simplified mathematical representation of the behavior of the system. Yet, when it will not affect the clarity of the argumentation, we will often consider these two notions as equivalent in order to simplify the presentation. We will then speak of the dynamic system $\dot{x} = f(x, u)$, implying that we actually speak of a deterministic state model of the system.

The *modeling* of a dynamic system, as we conceive it in this book, is thus the exercise that aims to, given a discursive and qualitative description of the system, establish a mathematical description of it as a state model. Without being unnecessarily complicated, the resulting model should be an effective tool for solving the engineering problem posed for the system considered. The assumptions adopted for modeling should be clearly identified and highlighted.

In the first part of the book, we will show how the modeling approach can be systematized for different relevant classes of systems in engineering. We will successively discuss mechanical systems, electrical and electromechanical systems, **compartment systems** and **reaction systems** in Chapters 2-5. In each case, we will describe the basic physical principles and how they are used to obtain the state models. In Chapter 6, we will see how to define and use *state transformations* to obtain equivalent models of a given system.

However, we do not intend to describe and justify in detail all the physical principles of the different disciplines which constitute the art of engineering. In more complex modeling cases than those covered in this book, the reader should refer to the literature of the disciplines. However, we hope that the unifying character of the state model concept in engineering sciences will be clearly perceived.

After obtaining the model, we can analyze its properties and derive a certain number of lessons, or on the appropriateness of the model itself, or on the properties of the dynamic system which is the subject of modeling. It is to this analysis that the second part of the book is dedicated.

In Chapters 7, 8 and 9, we analyze the behavior of dynamic systems which inputs are *constant* : $\dot{x} = f(x, \bar{u})$. In Chapter 7, we first examine the conditions of existence of equilibrium states and invariant subsets of the state space. Chapter 8 is devoted to the study of *plan systems*, i.e. systems whose state vector is of dimension 2. We examine in particular the behavior of the system near the equilibrium states, as well as periodic trajectories and bifurcations. The purpose of Chapter 9 is to analyze the stability of equilibrium states by the Lyapunov's method and characterize the basins of attraction.

Finally, in Chapter 10, we look at the issue of controllability of dynamical systems that can be formulated as follows : for a forced dynamic system $\dot{x} = f(x, u)$, under what conditions and how we can determine the input functions $u_i(t)$ to conduct the system of a given initial x_0 state to a given final state x_f in a prescribed time. The answer to this question obviously has important implications in many engineering problems such as [the steering of electro-mechanical devices](#) or the conduct of industrial processes.

1.4. Exercices

Exercise 1.1. A glass furnace

For the glass melting furnace that has been described in this chapter :

1. Establish a state model whose state variables are the mass M and the stored heat $C_T M$.
2. Establish a state model whose state variables are the temperature T and the stored heat $C_T M$.
3. Indicate how to change the state model to take into account the heat loss to the outside through the walls of the furnace.
4. The state model was built under the implicit assumption of near-instantaneous fusion of the raw material. Imagine how to easily modify the model to explicitly include the fusion (indication : cut the oven into two compartments of variable mass, one containing the not yet molted material and the other one containing the melt).

Exercise 1.2. Beetles and aphids

1. Justify each term of the model (1.6) explaining how it formalizes one of the modeling assumptions.
2. Is the model (1.6) affine in the input, affine in the state, bilinear, linear ?
3. The model (1.6) was established with two populations : the aphids (x_1) and the beetles (x_2). The adult beetle can ingest up to 100 aphids per day, but the larvae is even more voracious, it can ingest up to 150 per day. By formulating additional relevant modeling assumptions, establish a more accurate state model distinguishing adult beetles and larvae (i.e. a model with three state variables : aphids (x_1), larvae (x_2) and adult beetles (x_3)).

Chapitre 2

Articulated mechanical systems

The subject of this chapter is setting in equations state models of mechanical systems formed of a set of rigid bodies connected by joints. The systematic modeling method that we will study is applicable to many practical examples of mechanical systems such as vehicles (cars, trains, planes, ...) or robots. This method results from a systematic application of Newton's law.

In order to simplify the notations and calculations, we will limit ourselves to the establishment of the motion equations in a two-dimensional space (i.e. in a plane). The extension to the case of a movement in a three-dimensional space is conceptually simple but more difficult to visualize.

We first consider the case of a single rigid body without friction. Then, we discuss the modeling of an articulated system consisting of several rigid bodies. The modeling method is described in detail using an example of a [robot manipulator](#) with two degrees of freedom. Finally, we discuss how to extend the model to take into account friction, the elasticity of the joints and the non-holonomic constraints.

2.1. Dynamics of a rigid body in the plane

We consider a rigid body moving in a plane in which an orthonormal inertial basis $0, X_B, Y_b$ is fixed arbitrarily (Fig.2.1). A vector \vec{W} is attached to the body. The position of the body is completely specified by the 3 coordinates x, y, θ :

- x, y are the Cartesian coordinates of the center of mass G in the fixed basis $0, X_b, Y_b$;
- θ is the orientation of the vector \vec{W} with respect to the fixed basis $0, X_b, Y_b$.

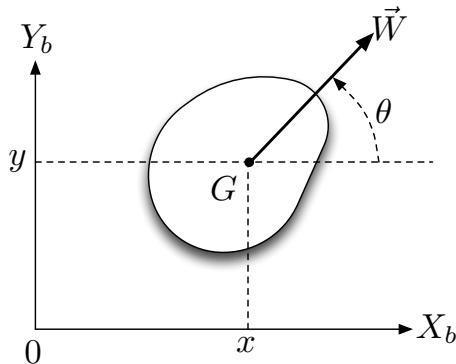


FIGURE 2.1 – Coordinates of a rigid body in plane

We define the three-dimensional vector describing the position of the body :

$$q \triangleq \begin{pmatrix} x \\ y \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

A direct application of Newton's laws, coordinate by coordinate, then leads to the following general equations of motion :

— Equations of translation of the center of mass :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x, \\ m\ddot{y} &= F_y. \end{aligned}$$

— Equation of rotation around the center of mass :

$$I\ddot{\theta} = T.$$

where m is the mass of the body, I is its moment of inertia with respect to the center mass, F_x and F_y denotes the projections of the resultant of the forces applied to the body on the axes $0X_b$ and $0Y_b$ respectively and T is the resultant of the torques applied for the rotation of the body around the center of mass.

These general equations of motion form the basis of the establishment of the system state model as we will illustrate it in an example.

Example 2.1. Modeling of the dynamics of a rocket.

We consider a rocket moving in a plane perpendicular to the ground. This rocket is propelled by two jet engines arranged symmetrically with respect to the body of the rocket as shown in Figure 2.2. The equations of motion are established under the **modeling assumption** that the rocket is a rigid body of constant mass.

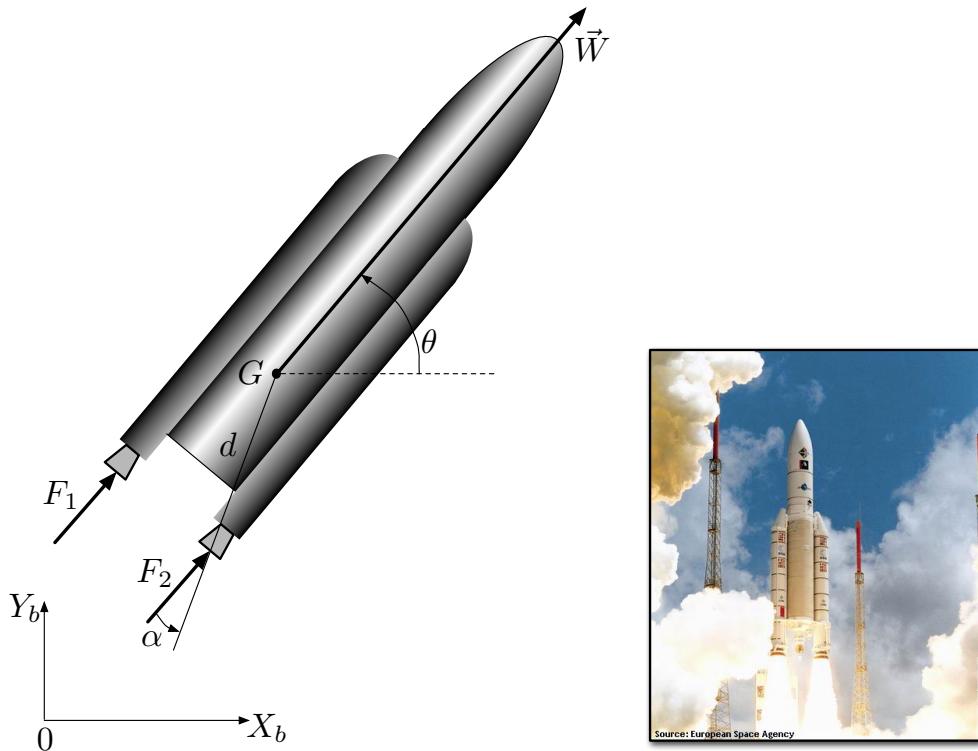


FIGURE 2.2 – Modeling of the dynamics of a rocket -
Photo of the Ariane rocket during takeoff
(© ESA)

— Equations of translation :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x = (F_1 + F_2) \cos \theta, \\ m\ddot{y} &= F_y = (F_1 + F_2) \sin \theta - mg_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

— Equation of rotation :

$$I\ddot{\theta} = T = (F_2 - F_1)d \sin \alpha. \quad (2.3)$$

In these equations, (x, y) is the position of the center of mass G , θ the angle of the vector \vec{W} with respect to the horizontal, F_1, F_2 **the thrusts of the reactors**, m the mass of the rocket, I its moment of inertia, d, α geometrical parameters (Fig.2.2) and g_0 the gravitational constant.

The equations (2.2)-(2.3) can be put in the standard form of a state model $\dot{x} = f(x, u)$ of dimension 6 with two inputs if we introduce the following notations :

State variables :

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = \theta, \quad x_4 = \dot{x}, \quad x_5 = \dot{y}, \quad x_6 = \dot{\theta}.$$

Input variables :

$$u_1 = F_1, \quad u_2 = F_2.$$

The state model is written as follows :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_6, \\ \dot{x}_4 &= \frac{\cos x_3}{m}(u_1 + u_2), \\ \dot{x}_5 &= -g_0 + \frac{\sin x_3}{m}(u_1 + u_2), \\ \dot{x}_6 &= \frac{d \sin \alpha}{I}(u_2 - u_1). \quad \square\end{aligned}$$

A special situation appears when the considered body is subject to a set of forces whose resultant is zero but which are not all applied at the same point. The equations of motion can be written as :

$$\begin{aligned}m\ddot{x} &= 0 \\ m\ddot{y} &= 0 \\ I\ddot{\theta} &= T\end{aligned}$$

In such a case, it is common, in some applications, to not specify the forces that are behind the torque T , but to directly consider this one as the cause of the movement. We say, for simplicity, that the body is subjected to a *torque*. Thus, for example, we will talk about the torque provided by an engine to rotate a [robot manipulator](#) segment.

The state model obtained in the example of the rocket is non-linear with respect to the state variables and affine in the input variables. This will be the case for most applications of interest for which the translational and rotational equations describing the dynamics of a rigid body can be written in the general matrix form :

$$J\ddot{q} + b(q) = B(q)u.$$

In this equation J is the inertia matrix (diagonal and constant), $b(q)$ represents the effect of gravity and $B(q)$ is a matrix (called kinematic) non-linearly depending on the state variables. We deduce that the state model is written in the following general form :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= v, \\ \dot{v} &= J^{-1}[-b(q) + B(q)u],\end{aligned}$$

where $v \triangleq \dot{q}$ is called *vector of generalized velocities*.

2.2. Dynamics of articulated mechanical systems

We now consider the case of an articulated mechanical system with N body. The general procedure for setting in equations the state model can be summarized as follows :

1. Fix an inertial reference frame in the system configuration space and N moving frames attached to the centers of mass of the N bodies of the system.
2. Write the **path and bonding constraints** equations faced by the movement of the system. Deduce the number of degrees of freedom.
3. Write the equations of motion (translation and rotation) for each of the coordinates by including the bonding forces related to the constraints (method of Lagrange coefficients).
4. Remove the coefficients of Lagrange and redundant coordinates.

We will now detail the procedure, explaining the new concepts (degrees of freedom, Lagrange coefficients, redundant coordinates) that have been mentioned, and illustrate it with a typical example : the development of the dynamic model of a **robot manipulator** with two degrees of freedom.

First step : Defining coordinate

An inertial reference frame is set in the configuration space Ω of the system. N moving frames are attached to the centers of mass of the N bodies of the system. The position of the system is at any time characterized by the coordinate vector

$$\xi = (x_1 \ y_1 \ \theta_1 \dots x_N \ y_N \ \theta_N)^T$$

of dimension $3N$.

Step Two : Expression of geometric constraints

The movement of an articulated mechanical system may be subject to two types of constraints (called geometric) : **path constraints** on the one hand and bonding constraints between the bodies on the other hand. These constraints are expressed as a set of algebraic relations between the coordinates which we will note

$$\Psi(\xi) = 0,$$

where Ψ is an application $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ of class C^1 and p denotes the number of constraints. According to the implicit function theorem, in a neighborhood of any point ξ of the configuration space, there is a partition $\xi = (q, \bar{q})$ of the coordinates vector such that :

- the dimension (noted σ) of \bar{q} is equal to the rank of the Jacobian matrix of the application Ψ :

$$\sigma \triangleq \dim \bar{q} = \text{rank} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi};$$

- we can express the coordinates \bar{q} depending on coordinates q :

$$\bar{q} = \phi(q). \quad (2.4)$$

This means that we can use the expression (2.4) to remove the *redundant coordinates* \bar{q} of the system description. The size of the vector q of the coordinates that are preserved is the *number of degrees of freedom* of the system, denoted δ :

$$\delta \triangleq 3N - \sigma.$$

Step Three : Equations of motion

Then we write the equations of motion (translation and rotation) for each of the coordinates by including the bonding forces related to the constraints. The partition (q, \bar{q}) of the coordinates induces a similar partition of the set of equations of motion as follows :

$$J\ddot{q} + b(q, \bar{q}) = B(q, \bar{q})u + w, \quad (2.5)$$

$$\bar{J}\ddot{\bar{q}} + \bar{b}(q, \bar{q}) = \bar{B}(q, \bar{q})u + \bar{w}. \quad (2.6)$$

In these equations, vectors w and \bar{w} represent the bonding forces that ensure that the constraints are satisfied at any time during the movement of the system. It is shown in the mechanical basic works that these binding forces are expressed as follows :

$$\begin{aligned} w &= -A(q)\lambda, \\ \bar{w} &= \lambda. \end{aligned}$$

where λ is the vector of *Lagrange coefficients* (of dimension σ) and $A(q)$ is the matrix of dimension $\delta \times \sigma$ defined as follows :

$$A(q) \triangleq \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \right)^T.$$

Step Four : Eliminate redundant coordinates

In the equation (2.6), λ is expressed as :

$$\lambda = \bar{J}\ddot{\bar{q}} + \bar{b}(q, \bar{q}) - \bar{B}(q, \bar{q})u.$$

En substituant cette expression dans (2.5) et en utilisant (2.4), on obtient :

$$\begin{aligned} J\ddot{q} + A(q)\bar{J}\ddot{\bar{q}} + b(q, \phi(q)) + A(q)\bar{b}(q, \phi(q)) \\ = (B(q, \phi(q)) + A(q)\bar{B}(q, \phi(q)))u. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Il ne reste plus alors qu'à éliminer $\ddot{\bar{q}}$. Pour cela on différencie deux fois l'expression (2.4) :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{q}} &= A^T(q)\dot{q} \\ \ddot{\bar{q}} &= A^T(q)\ddot{q} + \dot{A}^T(q)\dot{q}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

En substituant cette dernière expression (2.9) dans (2.7) et en introduisant les notations suivantes :

$$\begin{aligned} M(q) &\triangleq J + A(q)\bar{J}A^T(q), \\ f(q, \dot{q}) &\triangleq A(q)\bar{J}\dot{A}^T(q)\dot{q}, \\ g(q) &\triangleq b(q, \phi(q)) + A(q)\bar{b}(q, \phi(q)), \\ G(q) &\triangleq B(q, \phi(q)) + A(q)\bar{B}(q, \phi(q)), \end{aligned}$$

on obtient finalement le modèle dynamique général d'un système mécanique articulé sous la forme suivante :

$$M(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) = G(q)u. \quad (2.10)$$

Dans cette équation :

- q est le vecteur (de dimension δ) des coordonnées nécessaires à la description du système,
- $M(q)$ est la matrice d'inertie (de dimensions $\delta \times \delta$) symétrique et définie positive,
- $f(q, \dot{q})$ est le vecteur (de dimension δ) qui représente les forces et les couples résultant des liaisons relatives aux contraintes ; il peut aussi s'écrire sous la forme

$$f(q, \dot{q}) = C(q, \dot{q})\dot{q}$$

où $C(q, \dot{q})$ est la matrice de dimensions $\delta \times \delta$ définie comme suit :

$$C(q, \dot{q}) \triangleq A(q)\bar{J}\dot{A}^T(q),$$

- $g(q)$ est un vecteur (de dimension δ) représentant les forces et les couples résultant de la gravité,
- u est le vecteur (de dimension m) des forces et couples appliqués au système,
- $G(q)$ est une matrice cinématique de dimensions $\delta \times m$.

Une fois le modèle dynamique général (2.10) établi, il ne reste qu'à en déduire le modèle d'état du système :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= v, \\ \dot{v} &= M^{-1}(q)[-f(q, v) - g(q) + G(q)u].\end{aligned}$$

Dans ces équations d'état, q est le vecteur des coordonnées de position et $v = \dot{q}$ est le vecteur des coordonnées de vitesse.

Example 2.2. Modèle dynamique d'un robot manipulateur.

Un robot manipulateur est formé d'un ensemble de segments rigides articulés. Les articulations sont de type rotoïde ou de type prismatique. Une articulation rotoïde permet un mouvement relatif de rotation entre deux segments. Une articulation prismatique permet un mouvement relatif de translation entre deux segments.

Les robots sont actionnés par des moteurs encastrés produisant des forces de translation pour les articulations prismatiques et des couples de rotation pour les articulations rotoïdes.

Nous considérons le robot manipulateur représenté à la figure 2.3 et formé d'un segment rigide se déplaçant horizontalement (corps 1) auquel est articulé un deuxième segment rigide pouvant effectuer un mouvement de rotation (corps 2). Le mouvement du système est provoqué par la force F appliquée horizontalement au premier segment et le couple de rotation T appliqué au deuxième segment. Le repère inertiel et les différentes coordonnées sont indiquées sur la figure.

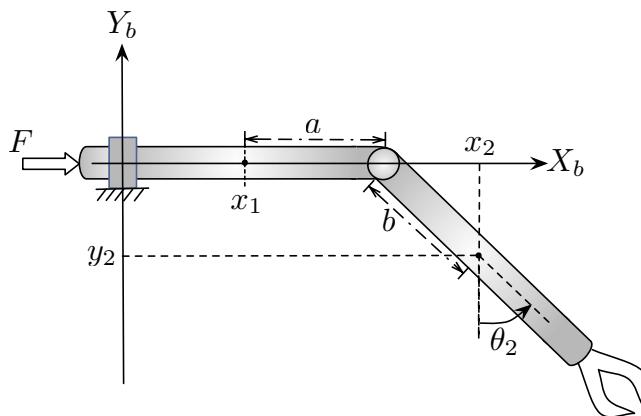


FIGURE 2.3 – Modélisation d'un robot manipulateur

Ce système est soumis aux contraintes suivantes :

Contraintes de parcours :

$$\begin{aligned} y_1 &= 0, \\ \theta_1 &= 0. \end{aligned}$$

Contraintes de liaison :

$$\begin{aligned} x_2 - b \sin \theta_2 - x_1 - a &= 0, \\ y_2 + b \cos \theta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Les contraintes de parcours expriment le fait que le corps 1 ne peut se déplacer qu'horizontalement. Les contraintes de liaison expriment la relation existant entre les coordonnées cartésiennes des centres de masse des deux corps en raison de leur articulation. La matrice jacobienne des contraintes s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -b \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -b \sin \theta_2 \end{pmatrix}.$$

On observe que cette matrice est de plein rang $\sigma = 4$ et donc que le système possède $\delta = 2$ degrés de liberté (comme on pouvait s'y attendre). On observe aussi que l'on peut définir la partition (q, \bar{q}) des coordonnées comme suit :

$$q = \begin{pmatrix} x_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{q} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Il est aisément de vérifier que dans tout l'espace de configuration, les coordonnées \bar{q} peuvent s'exprimer comme une fonction explicite $\bar{q} = \phi(q)$ des coordonnées q :

$$y_1 = 0, \tag{2.11}$$

$$\theta_1 = 0, \tag{2.12}$$

$$x_2 = x_1 + b \sin \theta_2 + a, \tag{2.13}$$

$$y_2 = -b \cos \theta_2. \tag{2.14}$$

On pourra donc éliminer les coordonnées $\bar{q} = (y_1, \theta_1, x_2, y_2)^T$ de la description du système et ne conserver que les coordonnées $q = (x_1, \theta_2)^T$. La matrice $A(q)$ s'écrit :

$$A(q) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial q} \right)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b \cos \theta_2 & b \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement s'écrivent :

$$m_1\ddot{x}_1 = F - \lambda_3, \quad (2.15)$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 = -\lambda_3 b \cos \theta_2 - \lambda_4 b \sin \theta_2 + T, \quad (2.16)$$

$$m_1\ddot{y}_1 = -m_1 g_0 + \lambda_1, \quad (2.17)$$

$$I_1\ddot{\theta}_1 = \lambda_2, \quad (2.18)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = \lambda_3, \quad (2.19)$$

$$m_2\ddot{y}_2 = -m_2 g_0 + \lambda_4. \quad (2.20)$$

En combinant les contraintes (2.11), (2.12) avec les équations du mouvement (2.17), (2.18) on déduit les valeurs suivantes de λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = m_1 g_0, \quad \lambda_2 = 0.$$

Ces valeurs expriment les forces de liaison appliquées aux deux corps pour satisfaire les contraintes de parcours le long du mouvement du système.

D'autre part, en éliminant λ_3 et λ_4 entre les équations du mouvement (2.15), (2.16), (2.19), (2.20), on obtient :

$$\begin{pmatrix} m_1\ddot{x}_1 \\ I_2\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b \cos \theta_2 & b \sin \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2\ddot{x}_2 \\ m_2\ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ T - b m_2 g_0 \sin \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

En dérivant deux fois les contraintes (2.13), (2.14), on obtient :

$$\begin{pmatrix} m_2\ddot{x}_2 \\ m_2\ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b \cos \theta_2 \\ 0 & b \sin \theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2\ddot{x}_1 \\ m_2\ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} + m_2 b \dot{\theta}_2^2 \begin{pmatrix} -\sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

En substituant (2.22) dans (2.21), on obtient finalement le modèle du système sous la forme désirée :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = G(q)u, \quad (2.23)$$

avec

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 b \cos \theta_2 \\ m_2 b \cos \theta_2 & I_2 + m_2 b^2 \end{pmatrix},$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -m_2 b \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$g(q) = \begin{pmatrix} 0 \\ b m_2 g_0 \sin \theta_2 \end{pmatrix},$$

$$G(q)u = \begin{pmatrix} F \\ T \end{pmatrix}.$$

□

2.3. Propriétés de la matrice d'inertie

1. La matrice d'inertie $M(q)$ est symétrique et définie positive. En effet, elle est la somme d'une matrice diagonale J dont les éléments sont positifs et d'une matrice symétrique et semi-définie positive $A(q)\bar{J}A^T(q)$.
2. La dérivée temporelle de la matrice d'inertie $\dot{M}(q)$ vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned}\dot{M}(q) &= A(q)\bar{J}A^T(q) + \dot{A}(q)\bar{J}A^T(q), \\ &= C(q, \dot{q}) + C^T(q, \dot{q}).\end{aligned}$$

Cette relation implique que la matrice

$$\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q}) \quad (2.24)$$

est antisymétrique.

3. La matrice d'inertie $M(q)$ vérifie la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial q}(\dot{q}^T M(q) \dot{q}) = \dot{q}^T C(q, \dot{q}). \quad (2.25)$$

La vérification de cette expression est laissée à titre d'exercice.

2.4. Articulations élastiques

Nous avons considéré jusqu'à présent des systèmes mécaniques articulés formés uniquement de corps rigides sans possibilité de flexibilité ou de souplesse dans les liaisons et les articulations. Une telle hypothèse n'est pas réaliste dans de nombreuses applications. Une manière simple d'introduire de la souplesse dans les articulations d'un système mécanique articulé est de placer un petit ressort (fictif) de masse nulle dans les liaisons entre corps comme indiqué sur la figure 2.4. Ce ressort exerce une force de rappel sur chacun des deux corps auxquels il est attaché. Cette force s'applique au point de fixation du ressort et est une fonction monotone croissante de l'élongation du ressort. Elle s'ajoute aux autres forces appliquées au système dans l'écriture des équations du mouvement. Lorsque de l'élasticité est ainsi introduite dans une articulation entre deux corps du système, il va de soi que la ou les contraintes de liaison correspondantes disparaissent et que le nombre de degrés de liberté est augmenté corrélativement. Nous illustrons la méthode sur un exemple simple d'un système à deux corps.

Example 2.3. Système à deux corps avec une articulation élastique.

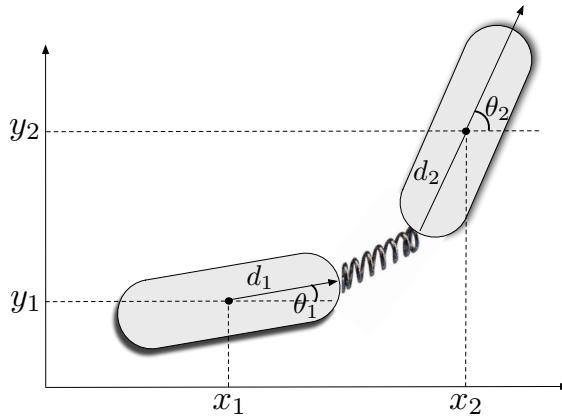


FIGURE 2.4 – Modélisation d'une articulation élastique

Nous considérons le système à deux corps représenté sur la figure 2.4. Les équations du mouvement des deux corps s'écrivent comme suit :

$$m_1 \ddot{x}_1 = F_1, \quad (2.26)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = F_2, \quad (2.27)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = F_2 d_1 \cos \theta_1 - F_1 d_1 \sin \theta_1, \quad (2.28)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -F_1, \quad (2.29)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -F_2, \quad (2.30)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 = F_1 d_2 \sin \theta_2 - F_2 d_2 \cos \theta_2, \quad (2.31)$$

où F_1 et F_2 désignent les amplitudes des composantes des forces de rappel appliquées aux deux corps en raison de la présence du ressort.

Les coordonnées cartésiennes des points de fixation du ressort sur les deux corps s'expriment comme suit :

$$\tilde{x}_1 = x_1 + d_1 \cos \theta_1,$$

$$\tilde{x}_2 = x_2 - d_2 \cos \theta_2,$$

$$\tilde{y}_1 = y_1 + d_1 \sin \theta_1,$$

$$\tilde{y}_2 = y_2 - d_2 \sin \theta_2.$$

L'élargissement du ressort est définie comme le vecteur de composantes ϵ_1 et ϵ_2 :

$$\epsilon_1 = \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \quad \epsilon_2 = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1$$

Les forces de rappel F_1 et F_2 sont modélisées comme des fonctions monotones croissantes des composantes de l'élargissement (voir Figure 2.5) :

$$F_1 = r(\epsilon_1) \quad F_2 = r(\epsilon_2)$$

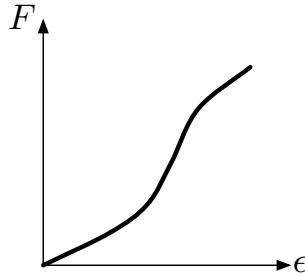


FIGURE 2.5 – Articulations élastiques : force de rappel en fonction de l'élongation

Souvent, pour des raisons de simplicité, on adopte un modèle linéaire c-à-d :

$$\begin{aligned} F_1 &= k_0(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1) = k_0((x_2 - x_1) - (d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos \theta_2)), \\ F_2 &= k_0(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1) = k_0((y_2 - y_1) - (d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin \theta_2)), \end{aligned}$$

où la constante k_0 est appelée *constante de rappel* du ressort. Dans ce cas, les équations du mouvement (2.26)-(2.31) se réécrivent comme suit :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= k_0((x_2 - x_1) - (d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos \theta_2)), \\ m_1 \ddot{y}_1 &= k_0((y_2 - y_1) - (d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin \theta_2)), \\ I_1 \ddot{\theta}_1 &= k_0 d_1 ((x_1 - x_2 + d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos \theta_2) \sin \theta_1 \\ &\quad + (y_2 - y_1 - d_1 \sin \theta_1 - d_2 \sin \theta_2) \cos \theta_1), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_0((x_2 - x_1) - (d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos \theta_2)), \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -k_0((y_2 - y_1) - (d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin \theta_2)), \\ I_2 \ddot{\theta}_2 &= k_0 d_2 ((x_2 - x_1 - d_1 \cos \theta_1 - d_2 \cos \theta_2) \sin \theta_2 \\ &\quad + (y_1 - y_2 + d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin \theta_2) \cos \theta_2). \quad \square \end{aligned}$$

Cet exemple montre que dans le cas d'un système mécanique articulé, le modèle dynamique général (2.10) est modifié comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) + k(q) = G(q)u \quad (2.32)$$

où apparaît le terme additionnel $k(q)$ qui représente l'effet des forces de rappel du à la présence d'articulations élastiques dans le système.

2.5. Frottement

La présence de forces de frottement est un autre phénomène physique que nous avons négligé jusqu'ici et qui a souvent un effet important sur le mouvement

des systèmes mécaniques. En particulier, dans le cas d'articulations élastiques modélisées comme dans la section précédente, la présence d'un amortissement par le frottement est indispensable si l'on veut éviter de développer des modèles qui soient le siège d'oscillations persistantes peu conformes à la réalité expérimentale.

Il y a plusieurs manières d'introduire le frottement dans la description d'un système mécanique articulé. Nous retiendrons ici la plus simple qui consiste à supposer que le mouvement de chacune des coordonnées q_i du vecteur des coordonnées généralisées $q = (q_1, q_2, \dots, q_\delta)$ est affecté par une force de frottement séparée ne dépendant que de la vitesse (\dot{q}_i) de cette même coordonnée et notée $h_i(\dot{q}_i)$. Le vecteur de ces forces de frottement est lui-même noté

$$h(\dot{q}) = \begin{pmatrix} h_1(\dot{q}_1) \\ h_2(\dot{q}_2) \\ \vdots \\ h_\delta(\dot{q}_\delta) \end{pmatrix}$$

de sorte que le modèle dynamique général (2.32) est augmenté comme suit :

$$M(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) + k(q) + h(\dot{q}) = G(q)u.$$

La forme la plus courante des fonctions $h_i(\dot{q}_i)$ est la suivante :

$$h_i(\dot{q}_i) = \alpha_i \text{sign}(\dot{q}_i) + \beta_i(\dot{q}_i).$$

Dans cette équation le premier terme $\alpha_i \text{sign}(\dot{q}_i)$ représente le frottement sec tandis que le deuxième terme $\beta_i(\dot{q}_i)$ représente le frottement visqueux. Le coefficient α_i est constant. La fonction β_i est monotone croissante avec $\beta(0) = 0$. On remarquera que la fonction h est discontinue à l'origine, ce qui peut entraîner des difficultés pour la simulation et l'analyse du système. Dans les applications qui seront considérées dans ce livre, sauf indication contraire, nous supposerons que le frottement sec est négligé ($\alpha_i = 0$).

2.6. Energie et équation d'Euler-Lagrange

L'énergie cinétique E_C d'un système mécanique articulé est définie comme suit :

$$E_C(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}.$$

L'énergie potentielle E_P est une primitive de la somme des forces dérivant d'un potentiel, c'est à dire les forces de gravité et les forces de rappel des ressorts :

$$\frac{\partial E_P(q)}{\partial q} = g^T(q) + k^T(q).$$

L'énergie totale E_T est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle :

$$E_T = E_C + E_P.$$

L'évolution de l'énergie totale au cours du mouvement du système est examinée en calculant sa dérivée temporelle :

$$\begin{aligned}\dot{E}_T &= \frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} \ddot{q} + \frac{\partial E_C}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial E_P}{\partial q} \dot{q} \\ &= \dot{q}^T [M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \dot{M}(q) \dot{q} + g(q) + k(q)].\end{aligned}\quad (2.33)$$

En substituant l'expression de $M(q)\ddot{q}$ extraite de l'équation générale du mouvement (2.23), on obtient :

$$\dot{E}_T = \frac{1}{2} \dot{q}^T [\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})] \dot{q} + \dot{q}^T [G(q)u - h(\dot{q})].$$

Le premier terme du membre de droite de cette équation est nul car la matrice $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ est antisymétrique (voir plus haut). Il reste donc :

$$\dot{E}_T = \dot{q}^T [G(q)u - h(\dot{q})].$$

Lorsque le système n'est soumis à aucune autre force que celles qui dérivent d'un potentiel, l'énergie totale est constante tout au long du mouvement :

$$G(q)u - h(\dot{q}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{E}_T = 0.$$

Dans ce cas, on dit que le système est *conservatif*.

En utilisant les propriétés (2.24) et (2.25), on vérifie aussi que l'énergie cinétique satisfait la relation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial E_C}{\partial q} \right)^T = M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q}.$$

Il s'en suit qu'une expression alternative de l'équation générale du mouvement (2.23) est donnée par l'expression :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right)^T - \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} \right)^T = G(q)u - h(\dot{q})$$

avec :

$$L(q, \dot{q}) \triangleq E_C(q, \dot{q}) - E_P(q, \dot{q}).$$

Cette équation porte généralement le nom d'*équation d'Euler-Lagrange* et la quantité $L(q, \dot{q})$ est appelée *Lagrangien* du système.

2.7. Systèmes non-holonomes

Les systèmes non-holonomes sont des systèmes mécaniques articulés dont les contraintes de parcours peuvent dépendre non seulement des positions q mais aussi des vitesses \dot{q} . Lorsque ces contraintes ne peuvent être intégrées pour produire des contraintes de parcours qui dépendent exclusivement des coordonnées de configuration, elles sont appelées *non-holonomes*. Cette situation se présente dans de nombreuses applications pratiques, notamment dans le domaine de l'automobile, dans le domaine aéronautique et en robotique. Nous considérons le cas particulier d'un système ayant δ degrés de liberté qui est soumis à m contraintes non-holonomes indépendantes ($m < \delta$) qui sont linéaires par rapport aux vitesses :

$$N^T(q)\dot{q} = 0$$

avec la matrice $N^T(q)$ de dimensions $(m \times \delta)$ et de plein rang. Définissons la matrice $S(q)$, de dimensions $\delta \times (\delta - m)$ et de plein rang, telle que :

$$N^T(q)S(q) = 0.$$

Les contraintes sont équivalentes au fait que le vecteur des vitesses \dot{q} appartient à l'espace engendré par les colonnes de la matrice $S(q)$ ou, autrement dit, qu'il existe un vecteur η de dimension $(\delta - m)$ tel que :

$$\dot{q} = S(q)\eta. \quad (2.34)$$

Les équations du mouvement s'écrivent sous la forme standard :

$$M(q)\ddot{q} + f(q, \dot{q}) + g(q) + N(q)\lambda = G(q)u,$$

en y ajoutant le terme $N(q)\lambda$ qui représente les forces de liaison qui garantissent que les contraintes sont satisfaites le long du mouvement (voir section 1.2.3). On élimine les multiplicateurs de Lagrange λ en prémultipliant cette équation par $S^T(q)$:

$$S^T(q)M(q)\ddot{q} + S^T(q)[C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q)] = S^T(q)G(q)u.$$

Finalement, en utilisant la relation (2.34), on obtient l'expression :

$$J(q)\ddot{\eta} + F(q, \eta) = S^T(q)G(q)u \quad (2.35)$$

avec

$$\begin{aligned} J(q) &= S^T(q)M(q)S(q) \\ F(q, \eta) &= S^T(q)M(q)\{[\partial_q S(q)]S(q)\eta\}\eta + S^T(q)f(q, S(q)\eta). \end{aligned}$$

Le modèle dynamique général d'un système non-holonome est ainsi constitué des équations (2.34) et (2.35) que l'on peut écrire sous la forme d'un modèle d'état :

$$\begin{aligned}\dot{q} &= S(q)\eta \\ \dot{\eta} &= J^{-1}(q)[-F(q, \eta) + S^T(q)G(q)u].\end{aligned}$$

On observe que le vecteur d'état :

$$\begin{pmatrix} q \\ \eta \end{pmatrix}$$

est de dimension $(2\delta - m)$ avec les coordonnées η homogènes à des vitesses.

2.8. Exercices

Exercise 2.1. *Technician robots*

Figure 2.6 represents three configurations of planar robots. For each of these configurations :

1. Establish the dynamic model of the system and the corresponding state model. Make explicit the matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ and $G(q)$, and the vector $g(q)$.
2. Check that the model is conservative and that it satisfies Euler-Lagrange equation.
3. Indicate how the equations of the model are modified if the segments are subjected to a viscous friction proportional to the square of the speed. \square

Exercise 2.2. *Modelling of the dynamics of a rocket*

Let's consider a rocket propelled by an **adjustable** jet engine as indicated on figure 2.7 and moving in a vertical plane. The engine orientation is controlled by a **hydraulic actuator** providing a torque T . The engine itself provides a propelling force F .

1. Establish the equations of the state model of the system, assuming that the two parts of the rocket (main body and engine) are rigid bodies of constant mass. \square

Exercise 2.3. *Dynamic modelling of the lunar excursion module*

During the Apollo 11 mission, astronauts Armstrong and Aldrin landed on the moon using the LEM (Lunar Excursion Module; Fig. 2.8). We consider the following model assumptions :

- a) the LEM is a rigid body
- b) the movement is vertical

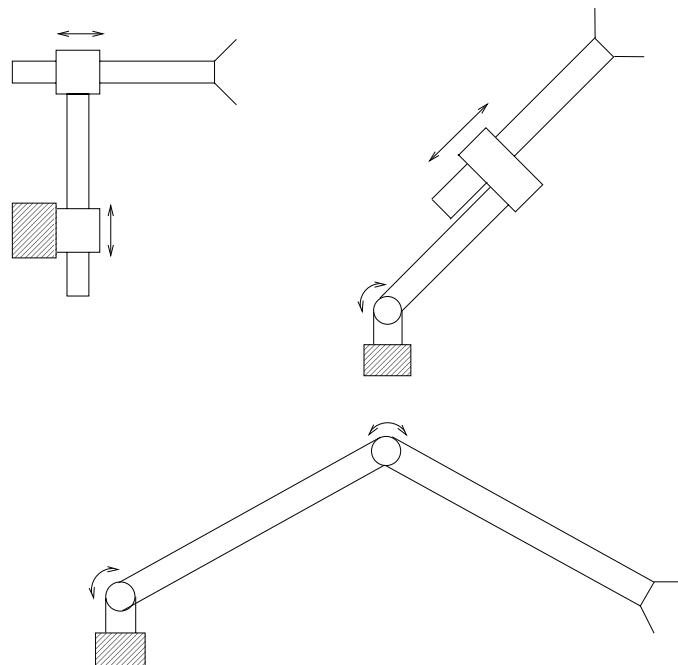


FIGURE 2.6 – Configurations of technician planar robots

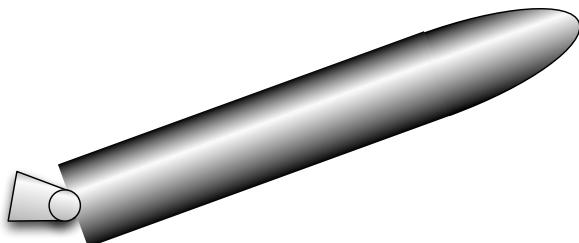


FIGURE 2.7 – Rocket with adjustable motor

- c) the forces acting on the system are the thrust F and the lunar attraction
 - d) the mass of fuel onboard is an important (non negligible) part of the total mass of the LEM
 - e) the mass of fuel consumed per unit of time is proportional to F .
1. Establish a state model of the system that satisfies these modelling assumptions.
 2. What are the main limits of validity of this model ? □

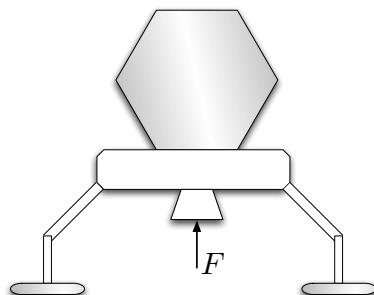


FIGURE 2.8 – Lunar Excursion Module

Exercise 2.4. A pendular train

A pendular train is a train that can move at very high speed in bends without the need of inclining the rails. For this each car is equipped with an active device

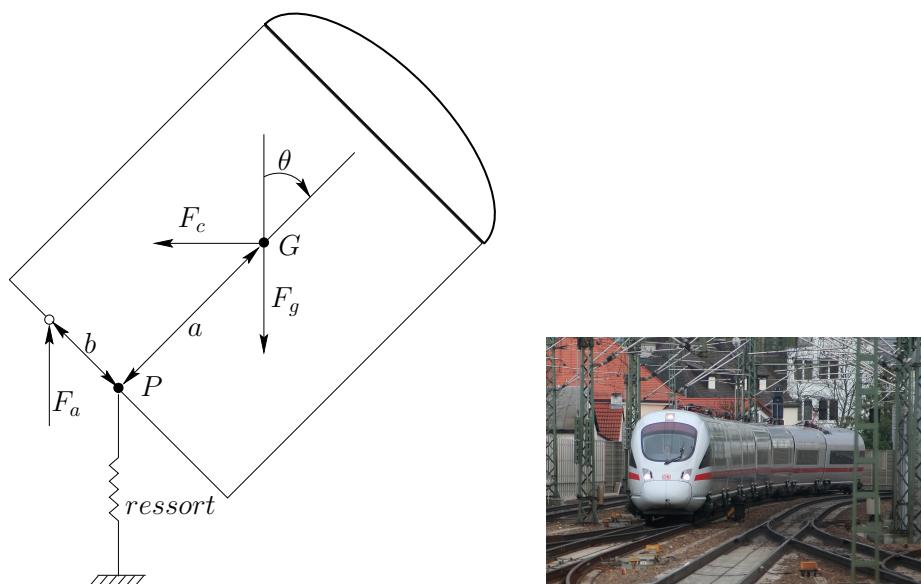


FIGURE 2.9 – A pendular train

that applies a force vertical to the car **body** to compensate the effect of the « centrifugal » force. This is illustrated on figure 2.9 where a section of the **body** of a car is schematically represented with the gravity force F_g (applied to the center of mass G) the "centrifugal" force F_c and the applied force F_a . It is assumed that the action line of force F_a is vertical irrespective of the angular position θ of the

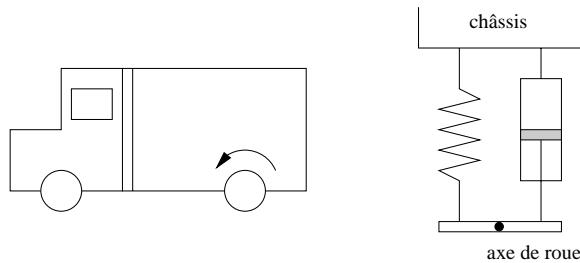


FIGURE 2.10 – Modelling of the dynamics of a truck

body. On the other hand the car's suspension is represented by a vertical spring that exerts a force proportional to its elongation. The application point P of the spring is *forced to move vertically*. *Established the state model of the system.* \square

Exercise 2.5. Modelling of the dynamics of a truck

We consider a truck traveling in a straight line (Fig. 2.10), under the following modelling assumptions :

- The truck is an articulated system composed of rigid bodies (**body** and wheels)
 - The truck is equipped with a rear propulsion (the torque developed by the motor is transmitted to the rear wheels).
 - The rear wheels roll without slipping.
 - The wheels are connected to the frame by a suspension system composed of a linear spring and a viscous friction shock absorber of negligible mass. This suspension system allows only vertical displacements.
- Establish a state model of the system that satisfies the modelling assumptions (be limited to two bodies : the frame and a driving wheel)
 - What are the main limits of validity of this model ? \square

Exercise 2.6. A boat

A boat equipped with an **adjustable** motor of type « speedboat » moves on a river as shown in figure 2.11 (top view). The river is of constant width ($= 2L$). The engine thrust is shown by the vector of length F ($=$ size of the propulsion force) and of orientation β . The boat is also subject to the force of the current which is a parabolic function of axis y : the current is zero at both edges and maximal at the middle of the river. When the engine is stopped, the boat is driven at the speed of the current by the friction force of water on the hull .

- Establish a state model of the system. For simplicity, we can assume that :

- a) the boat is a rigid body of constant mass ;
 - b) the stretch of water is almost horizontal and gravity does not influence the movement of the boat ;
 - c) the force exerted by the current is locally applied at the center of mass of the boat (we neglect the fact that the current force can be exerted in variable ways in diverse points of the hull)
2. What should be the thrust capacity of the engine to have the guarantee that the boat will be able to go against the current ?

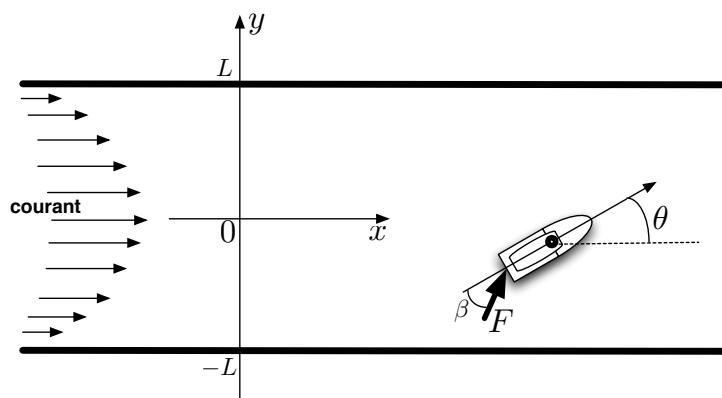


FIGURE 2.11 – A boat

Chapitre 3

Systèmes électriques et électromécaniques

This chapter deals with the modelling of systems whose dynamics are essentially characterised by the presence of electrical currents, i.e. by the movement of electrical charges in conductive materials (metal wires for example). We will first study the [putting in equation](#) of the state model of electrical networks. We will then study electromechanical systems (especially electrical machines) that combine in a unified description the state equations of electrical networks with those of mechanical systems such as we have presented them in the previous chapter.

3.1. Electrical systems

An electrical system is defined as a black box equipped with terminals which are electrical contact points, each of them subject to a voltage V_i and letting a current i in (see fig. 3.1).

The system behavior is given by the set of all possible trajectories $(I_1(t), V_1(t), I_2(t), V_2(t), \dots, I_k(t), V_k(t))_{t \in \mathbb{R}}$ for the system. This set of trajectories has symmetries. Indeed, electricity laws teach us that potentials are only defined up to a constant. In other words, if

$(I_1(t), V_1(t), I_2(t), V_2(t), \dots, I_k(t), V_k(t))_{t \in \mathbb{R}}$ is a possible trajectory, then

$(I_1(t), V_1(t) + V, I_2(t), V_2(t) + V, \dots, I_k(t), V_k(t) + V)_{t \in \mathbb{R}}$ is also a possible trajectory. Furthermore, in almost all the circuits produced today, there is no accumulation of electrical charge : the system remains electrically neutral, which implies that $I_1(t) + I_2(t) + \dots + I_k(t) = 0$ at all time t .

Note that the power transmitted to the circuit by the environment at time t is given by $\sum_i V_i(t)I_i(t)$. This formula has an unequivocal physical sense thanks to

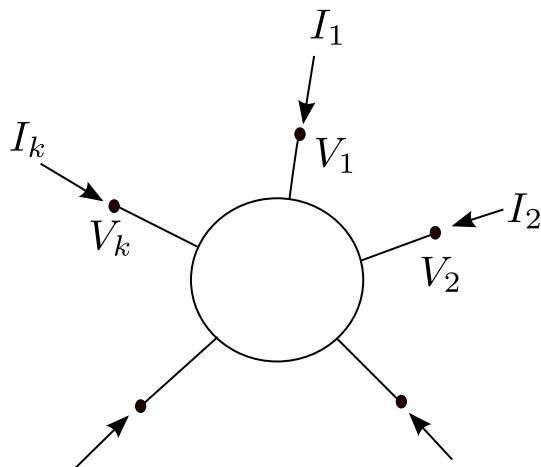


FIGURE 3.1 – Electrical system

the two relations above : translating all voltages by a constant does not change the received power.

The simplest electrical circuits only have two terminals, and that is why they are called dipoles. In that case, two variables are enough to characterise the trajectories : the potential difference, or voltage, $v(t) = V_1 - V_2$ and the current $i(t) = I_1(t) = -I_2(t)$ (see fig. 3.2). The direction of the current and voltage are chosen conventionally. The voltage represents thus the energy required to move a unit of electric charge through the dipole. We can also have tripoles (three terminals systems, such as transistors) or quadrupoles (transformers by example).

In this course, we will only consider circuits whose behaviour (the set of all possible trajectories) can be described by a state model as defined in Chapter 1, where each external variable (voltage or current) is taken either as an input u_i , or as an output y_i . State variables can be voltages, currents, flows or charges, as we will see. This type of state model limited to differential equations is restrictive, in the sense that it forbids us to model contentedly delay elements, whose behavior satisfies a delay equation of the type $y(t) = u(t - 1)$ (thus not differential).

3.2. Elementary dipoles

We consider two types of elementary dipoles : impedances and sources.

Impedances

1. *Resistors.* Resistors are elements that convert electrical energy into heat. They are represented by the symbol of figure 3.3 and are characterised by an algebraic relationship between the voltage $v(t)$ and the current

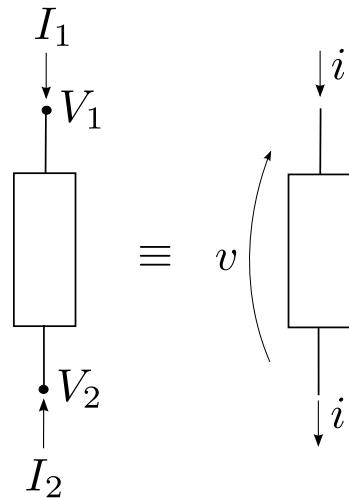


FIGURE 3.2 – Electrical dipole

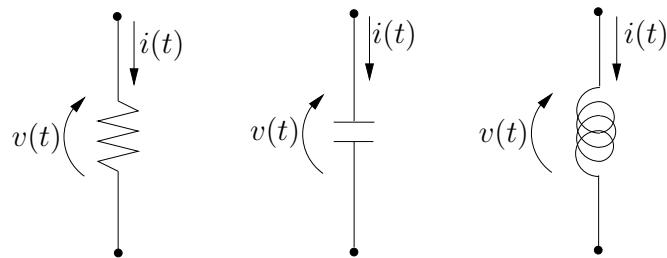


FIGURE 3.3 – Impedances : resistor, capacitor, inductor

$i(t)$:

$$r(v(t), i(t)) = 0.$$

In the case of a linear resistor, this relationship is particularized as follows (Ohm's law) :

$$v(t) = Ri(t).$$

2. *Capacitors.* Capacitors are elements which accumulate electric charges. They are represented by the symbol of figure 3.3 and are characterised by the following relationship between the charge $Q(t)$ and the current $i(t)$:

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}.$$

The charge $Q(t)$ is a function of the tension : $Q(v(t))$. This relationship can also be written as follow :

$$i(t) = c(v(t)) \frac{dv(t)}{dt} \quad \text{or} \quad c(v) \triangleq \frac{\partial q}{\partial v}.$$

In the case of a linear capacitor, this relationship can be particularized as follow :

$$Q(t) = Cv(t) \quad \text{or} \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

3. *Inductors.* Inductors are elements which store the energy of a magnetic field. They are represented by the symbol of figure 3.3 and are characterised, according to Faraday's law, by the following relationship between the magnetic field $\phi(t)$ and the tension $v(t)$:

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt}. \quad (3.1)$$

We say that the voltage $v(t)$ is *induced* by the flow $\phi(t)$, and that is where the name of inductor comes from. In a general way, this variation in flow can be generated by a magnetic material moving in the vicinity of the inductor, or by a varying electrical current flowing in a conductor located near the inductor. In this section, we will only consider the particular case of *self-inductances*, where the flow is produced only by the current flowing through the dipole itself. In that case, the flow is a function of the current : $\phi(i(t))$ and the relationship (3.1) can be written as :

$$v(t) = l(i(t)) \frac{di(t)}{dt} \quad \text{or} \quad l(i) \triangleq \frac{\partial \phi}{\partial i}.$$

In the case of a linear (self-)inductance, this relationship can be particularized as :

$$\phi(t) = Li(t) \quad \text{or} \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

Sources

1. *Tension sources*, represented by the symbol of figure 3.4, are dipoles defined by the tension $v(t)$ independently of the current they produce.
2. *Current sources*, represented by the symbol of figure 3.4, are dipoles defined by the current $i(t)$ that they produce regardless of their terminal voltage.

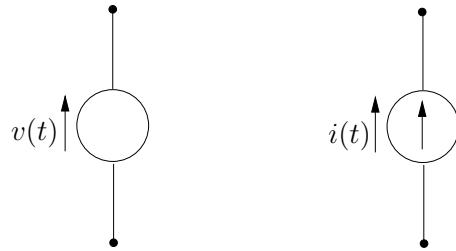


FIGURE 3.4 – Tension and current sources

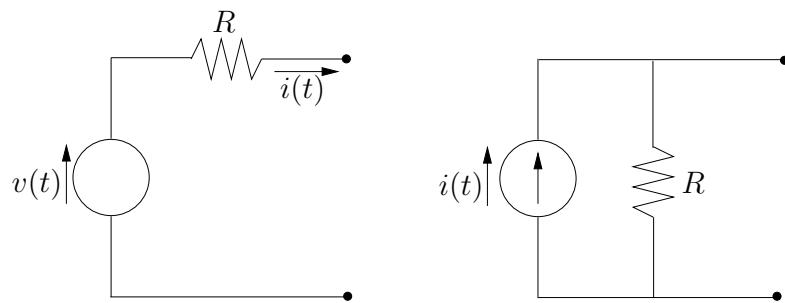


FIGURE 3.5 – Sources with internal resistance

It is important to understand that impedances and sources are ideal conceptual models that have no physical existence. The various elements of which the actual electrical circuits are constituted as for example coils, capacitors or batteries are modeled in practice by suitable assemblies of inductors and sources. For example, a source of tension or of current is always modeled with its unavoidable internal resistance, as indicated on figure 3.5.

3.3. Equivalency between open and closed systems

We have seen an electrical system as “open”, i.e. equipped with inputs and outputs, which are currents or tensions. Adding sources, however, allows us to consider an equivalent closed system. For example, a dipole whose tension $v(t)$ is the input, may be closed by a variable tension source that precisely delivers the tension $v(t)$ (see figure ??). However, for the sake of the analysis, it is comfortable to return to a closed graph.

If the dipole is adapted to supply energy to the outside ($v(t)i(t) > 0$), then it can also close the circuit by the load supposed to absorb the energy, often modeled like a (great) load resistance. For example, an engine is rather of an inductive nature.

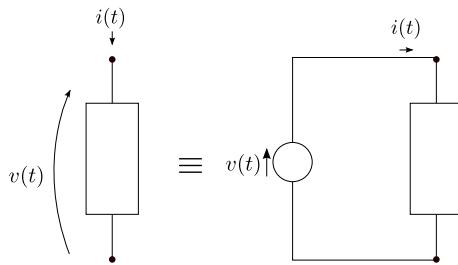


FIGURE 3.6 – Equivalence between an open circuit and closed circuit : the case where a dipole where the input is tension and the output power.

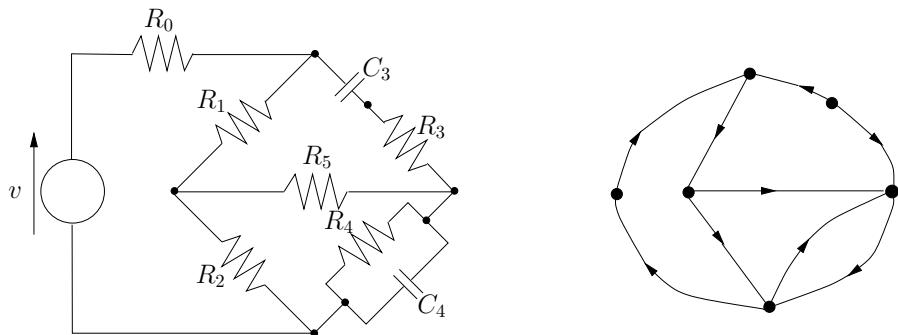


FIGURE 3.7 – Impedance bridge

3.4. Electrical networks and the setting in equation of the state model

Complex electrical systems are generally created by the interconnection of a defined number of elementary systems. In this chapter we will consider networks designed by elementary dipoles (impedances and sources). It is clear that such a network has a graph representation the branches of which are defined by the dipoles. An example of such a network and its graph is given in figure 3.7, representing an impedance bridge. The arrows on the graph indicate the conventional flow chosen by the current in each of the branches.

We are considering closed associated electrical networks (with sources of tension and/or power, even with load resistors) with N nodes and M branches. A graph is considered associated when there is link between any two nodes.

Let's define two concepts that will be used subsequently : meshes and sections of an electrical network.

A *mesh* is a cycle, i.e. a closed path without repeating nodes.

A *section* is an ensemble of branches the extraction of which will split an associated network in at least two associated separate sub-networks.

The organization of a electrical network state model is based on Kirchhoff's laws, as follows :

- Kirchhoff's law on currents : the algebraic sum of the currents in the branches incident to node a is equal to zero.
- Kirchhoff's law on tensions : the algebraic sum of tensions in a mesh is equal to zero.

If the graph is closed, the sum of Kirchhoff's equations on current of all the N nodes gives the trivial equality $0 = 0$, since each current occurs twice with an opposite sign. There are $N - 1$ Kirchhoff's independent equations on the currents. For any section, we also find out that the sum of currents on the brances of the section is equal to zero ; this result is acquired by summing Kirchhoff's current equations on all nodes on one side of the section.

In order to find the number of Kirchhoff's independent equations on meshes in a closed network, let's consider the tree at the origin of the graph, i.e. an associated sub-graph, without any mesh or signal breakdown on any of the nodes. Such a tree has $N - 1$ edges. Every network branch added to this tree creates one and only one independent mesh. Thus, we can create $M - N + 1$ mesh equations which will be independent.

Variables of a network state are the currents in some inductors and tensions at the terminals of certain capacitors. In order to establish a state model for a network, we proceed as follows :

1. Write $N - 1$ Kirchhoff's equations for all currents
2. Write $M - N + 1$ Kirchhoff's linearly independent equations for all tensions.
3. Write definition impedance laws corresponding to the tensions or currents prevailing in Kirchhoff's equations.
4. Eliminate redundant tensions and currents.

It is interesting to note that if a circuit is comprised of several successive branches creating a dipole composed of several elementary dipoles placed in series, Kirchhoff's current laws on intermediary nodes will be negligible. Similarly, Kirchhoff's mesh equations will only take the total dipole tension into consideration, and not isolated elementary tensions. As far as writing Kirchhoff's equations, one can consider this composed dipole as a single branch and two nodes.

If the network is comprised of a mesh of capacitors, it is clear that the tension at the terminals of one of those capacitors can be written as the (signed) sum of the others, thus creating a linear relation in state variables. On the contrary, when a network does not contain a mesh of capacitors, all tensions at the capacitors' terminals are independent state variables. Similarly, any inductors section imposes a linear relationship between currents crossing the section, since their (signed) sum is equal to zero. One of these currents is not considered an independent state variable. On the contrary, when a network is not comprised of inductors section, all currents in inductors are independent state variables.

Example 3.1. Rectifier Circuit with Low Pass Filter

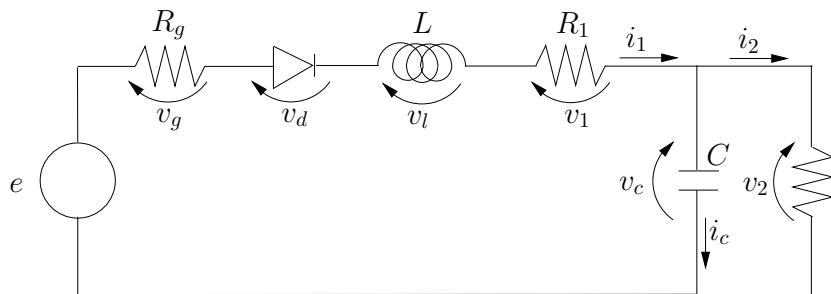


FIGURE 3.8 – Rectifier Circuit

Figure 3.8 represent a diode rectifier circuit with a filter composed of a capacitor and an inductor. The diode is a non-linear resistor where the current-tension characteristic is expressed as follows :

$$i = i_0 [e^{\frac{v}{\alpha}} - 1]$$

where α is a constant proportional to temperature and inversely proportional to the electron charge, whereas i_0 defines the leakage current of the diode. It is clear that the circuit does not contain any capacitors mesh or inductors section. So this state model will have two state variables : tension v_c at the capacitor terminals et current i_1 in the inductor.

The circuit is comprised of $N = 6$ nodes and $M = 7$ branches. However, for convenience, we can group dipoles in series in one branch which leaves us with $N = 2$ nodes and $M = 3$ branches. In order to establish the state model of the system, we would then write $N^{\vee}1 = 1$ Kirchhoff equation for the currents :

$$i_c - i_1 + i_2 = 0,$$

And $M - N + 1$ where 1 is self-inductance. In matrix notation that gives $1 = 2$

Kirchhoff equations for the tensions :

$$\begin{aligned} v_c - v_2 &= 0, \\ v_g + v_d + v_\ell + v_1 + v_c - e &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

These equations are completed by equations of the definition of the different elements of the circuit :

$$\begin{aligned} v_g &= R_g i_1, \\ v_d &= \alpha \ln \frac{i_0 + i_1}{i_0}, \\ v_\ell &= L \frac{di_1}{dt}, \\ i_c &= C \frac{dv_c}{dt}, \\ v_1 &= R_1 i_1, \\ v_2 &= R_2 i_2. \end{aligned}$$

By eliminating the 7 variables $i_2, i_c, v_g, v_d, v_\ell, v_1, v_2$ between the 9 equations, we easily get the following equations :

$$\begin{aligned} R_g i_1 + \alpha \ln \frac{i_0 + i_1}{i_0} + L \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + v_c - e &= 0, \\ C \frac{dv_c}{dt} - i_1 + \frac{v_c}{R_2} &= 0. \end{aligned}$$

By defining the state and input variables as follows :

$$x_1 = i_1, \quad x_2 = v_c, \quad u = e, \quad (3.3)$$

We finally get the following state equations :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{R_1 + R_g}{L} x_1 - \frac{\alpha}{L} \ln \left(\frac{i_0 + x_1}{i_0} \right) - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{C} x_1 - \frac{1}{R_2 C} x_2 \end{aligned}$$

■

When the network contains capacitor meshes or inductor cuts, one searches for a forest (sub-graph without mesh) of maximum size and an inductor non-cut of maximum size. The number of selected capacitors and inductors represent the number of independent state variables.

One can easily demonstrate that is like finding a tree that contains the greatest possible number of capacitors, so that the “co-tree” (i.e. the complementary sub-network of the tree) contains the greatest number of inductors. The number of independent state variables, thus, is the sum of the number of capacitors and number of inductors of the co-tree.

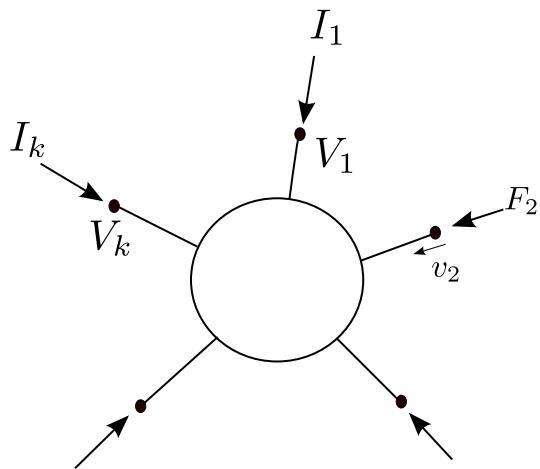


FIGURE 3.9 – Electromechanical system

3.5. Electromechanical systems

Could a mechanical system be defined similarly with an electric system, whose terminals are subjected, not with currents and voltages, but with forces F_i and speeds $v_i = \dot{q}_i$ (not to be confused with the symbol of tension). Translation all speed $v_i(t)$ vers $v_i(t) + v$ do not modify the behavior of the system, by Galilean relativity. The sum of the forces $\sum_i F_i(t)$ in general worthless constantly in the mechanical systems of the engineer. The mechanical energy transmitted to the system under the conditions univocally define as $\sum_i F_i(t)v_i(t)$. Certain forces or speeds are selected like entries, and others like outputs. An example of a mechanical dipole is a combination of two forces $F_1(t) + F_2(t) = 0$ applying to different points which can be summarized at a couple T and an angular velocity ω ! (see Chapter 2)

An electromechanical system is of course defined as a black box whose certain variables are of electric nature and others of mechanical nature (see fig. 3.9).

For example an electromechanical quadrupole whose variables are $v(t)$, $i(t)$, $T(t)$, $w(t)$ can model a generator if $T\omega < 0$, $vi > 0$ electrical energy converted into mechanical energy) or an engine si $T\omega > 0$, $vi < 0$ (mechanical energy converted into electrical energy).

Concretely, an electromechanical system often arises as an articulated mechanical system (with p degrees of freedom) which can be built partially in a magnetic material and whose certain bodies carry one or more inductive electrical circuits (coils, winding, ...). The equations constitutive of an electromechanical system consequently comprise a mechanical part and an electric part. The two sections that follow explain, with some electromagnetism refreshers, how the electromagne-

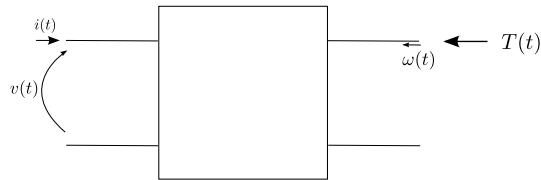


FIGURE 3.10 – Electromechanical quadrupole

tic variables (loads, flow, currents, tensions) and mechanics (generalized positions, speeds, forces) can interact.

3.6. Influence of a mechanical movement on the electric quantities

The Faraday's law $E_i = \frac{d\phi_i}{dt}$ describes the electromotive force (tension) undergone by an inductance crossed by one magnetic flow ϕ_i . Up to now it was supposed that this flow was created only by the current I_i going through it (self-inductance). For a linear relation $\phi_i = L_i I_i$, one obtains the law constitutive $V_i = L_i \dot{I}_i$.

Actually each current I_j generates a magnetic field and thus a flow in the inductance i . This flow depends on I_j , but also on the relative position of the conductors which carry these currents, possibly varying with time because of the mechanical movement of the parts which support the conductors. Generally only the currents which cross an inductance generate a non-negligible magnetic field. If ϕ_i depends linearly of each I_j , one can write

$$\phi_i = \sum_j L_{ij} I_j, \quad (3.4)$$

Where L_{ii} is self-inductance. In matrix notation that gives

$$\Phi = L(q) I, \quad (3.5)$$

where $L(q)$ is a symmetrical matrix of inductance depending on the generalized positions of the mechanical part q . By combining this with the equation of Faraday for each inductance, one arrives at the equations of state

$$E = \sum_k \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k I + L \dot{I}, \quad (3.6)$$

which mix positions, speeds, currents and tensions.

The electric component of the electromechanical systems discussed in this chapter are often simply reduced to a set of inductances, each one in series with

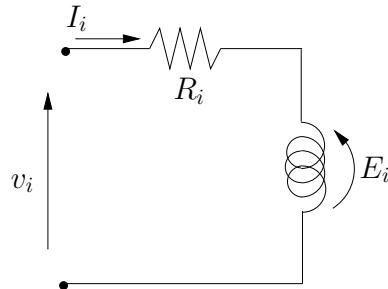


FIGURE 3.11 – Basic circuit

a resistance representing inevitable internal resistance or one resistance of load, which represents the useful consumption of electrical energy possibly generated by the system (see G. 3.11). In this case, voltage at the terminals of the circuits are written in a matrix way

$$V = RI + E \quad (3.7)$$

where R is the diagonal matrix $\text{diag}\{R_i, i = 1, m\}$ and the vectors V, I and E are defined as follows :

$$\begin{aligned} V^T &= (v_1, v_2, \dots, v_m), \\ I^T &= (I_1, I_2, \dots, I_m), \\ E^T &= (E_1, E_2, \dots, E_m). \end{aligned}$$

3.7. Creation of a mechanical movement by electro-magnetic fields

A magnetic field exerts a force known as Force of Lorentz on each carrier of moving load. By integrating this force on all the charge carriers set in movement by an electric current in a conductor one obtains a macroscopic force, known as Laplace force.

In general, one can show that the Laplace force on the coordinate q_k is

$$F_k = \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_k} I_i = \frac{1}{2} I^T \frac{\partial L}{\partial q_k} I, \quad (3.8)$$

the last equality concerning linear inductances. In the latter case case, one can directly assume the expression F_k supposing that the force originates from

a potential energy contained in inductances which generate the magnetic fields, expressed by $\frac{1}{2}I^T L(q_k)I$.

Example 3.2. An electromechanical system of positioning.

The flow diagram of an electromagnet used for a positioning of precision is indicated in figure 3.12. The electromagnet A is equipped with an inductor coil in

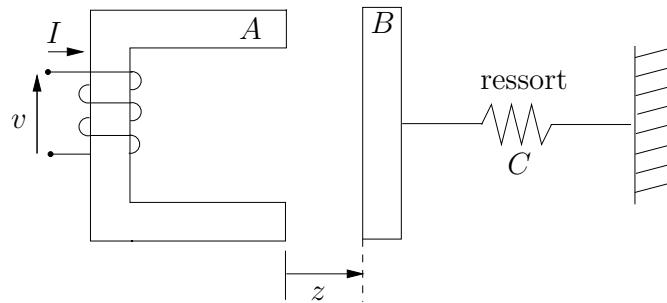


FIGURE 3.12 – An electromechanical system of positioning

which circulates an inductor current I . The metal piece B is mobile and subject to a linear traction force by the spring C

The magnetic flow varies proportionally with the current I and inversely proportionally to the distance z in the gap between A and B .

$$\phi(I, z) = \frac{\alpha I}{1 + \beta z}.$$

This is an instance of the magnetic law of Ohm (or law d'Hopkinson) which expresses the magnetic flow (equivalent of the current flow of electric charges) like the ratio between the magnetomotive flow (proportional of the current) and the reluctance (resistance of material to the magnetic flow) which is proportional to the length of the circuit.

The tension inducted in the circuit is thus written :

$$\begin{aligned} e &= \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= \frac{\alpha}{1 + \beta z} \frac{dI}{dt} - \frac{\alpha\beta I}{(1 + \beta z)^2} \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

The electromagnetic force of origin being exerted on the moving part is written :

$$F_{em} = \frac{1}{2} I \frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\alpha\beta}{2} \left(\frac{I}{1 + \beta z} \right)^2.$$

In agreement with the physical intuition, one observes that this force tends to bring closer the part B to the electromagnet whatever the direction of the current I . One can then write the dynamic equations of the system.

— *Mechanic equation*

$$m\ddot{z} = k(z_o - z) + F_{em} \quad (3.9)$$

$$= k(z_o - z) - \frac{\alpha\beta}{2} \left(\frac{I}{1 + \beta z} \right)^2 \quad (3.10)$$

where m indicates the mass of the constant part B , k the contant of the rearward movement of the s_0 spring and the position of the spring at rest

— *Electric equation*

$$V = RI + e \quad (3.11)$$

$$= RI + \frac{\alpha}{1 + \beta z} \dot{I} - \frac{\alpha\beta I}{(1 + \beta z)^2} \dot{z} \quad (3.12)$$

where R indicated the resistance of the electric circuit.

By introducing the following definitions of the state variables

$$x_1 = z, \quad x_2 = \dot{z}, \quad x_3 = I$$

and of the variable of entry :

$$u = V,$$

Finally :

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad (3.13)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k}{m}(z_o - x_1) - \frac{\alpha\beta}{2m} \left(\frac{x_3}{1 + \beta x_1} \right)^2, \quad (3.14)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{\beta x_2 x_3}{1 + \beta x_1} - \frac{R}{\alpha}(1 + \beta x_1)x_3 + \frac{1 + \beta x_1}{\alpha}u. \quad (3.15)$$

■

3.8. Rotating electric machines

The rotating electric machines constitute a particular category of electromechanical systems formed by two bodies. The first one, called *rotor*, is in rotation around an axe whose position is fixed to the second one, called *stator*. These two

pieces are provided with different **field windings** whose utility is to realise electro-mechanical conversions of which the machines are the centre.

When the stator itself is fixed to the inertial landmark, an electrical machine has only one mechanical degree of freedom : the rotor's rotation angle, written θ . The mechanical part of the system shrinks therefore to a scalar equation of the form :

$$J\ddot{\theta} + h(\dot{\theta}) = T_{em} + T_a \quad (3.16)$$

where $h(\dot{\theta})$ represents the friction torque, T_{em} the electromagnetical torque and T_a all the other external torques applied to the rotor.

On the other hand, the electrical part of the dynamic has the general form (3.7) :

$$V = RI + E.$$

In most running machines, when the magnetical saturation effects are negligible (or neglected), it is possible to present the flows ϕ_{ij} by an expression of the form :

$$\phi_{ij} = L_{ij}(\theta)I_i$$

which is linear to the inductor current I_i but that depends on the angular position θ of the rotor, following a law $L_{ij}(\theta)$ usually periodic. The inductance matrix (symmetrical) is defined as :

$$L(\theta) \triangleq [L_{ij}(\theta)]$$

and its derivative to θ is :

$$K(\theta) \triangleq \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}.$$

Then, the use of the theory that was introduced in the last sections leads to general equations of electromechanical coupling, whose form is the following :

$$E = L(\theta) \frac{dI}{dt} + \frac{d\theta}{dt} K(\theta)I, \quad (3.17)$$

$$T_{em} = \frac{1}{2} I^T K(\theta) I. \quad (3.18)$$

By combining the equations (3.16),(3.7),(3.17) and (3.18) we get the general model of the electrical machines :

$$\begin{aligned} L(\theta)\dot{I} &= -\omega K(\theta)I - RI + V, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ J\dot{\omega} &= \frac{1}{2} I^T K(\theta) I - h(\omega) + T_a. \end{aligned}$$

It is this general model that is on the basis of the particular models establishment in the applications. Often, but it not a standard, the voltage vector V or the torque T_a are parameterized by well selected entrance variables that represent the external influence on the machine's behaviour. Here is an example. Other examples are provided in the exercises.

Example 3.3. Elementary machine with two windings

Let's consider an electrical machine whose rotor and stator are concentric cylinders with a winding on the stator and another on the rotor (Fig. 3.13). The statorical and rotorical auto-inductances L_s and L_r are constants. The mutual inductance L_{sr} is a cosinusoidal periodical function of angle θ

$$L_{sr}(\theta) = L_o \cos \theta.$$

Matrices $L(\theta)$ and $K(\theta)$ are written as follows :

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} L_s & L_o \cos \theta \\ L_o \cos \theta & L_r \end{pmatrix} \quad K(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & -L_o \sin \theta \\ -L_o \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Vectors of current and induced tensions are noted :

$$I = \begin{pmatrix} I_s \\ I_r \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} e_s \\ e_r \end{pmatrix}.$$

Electromechanical coupling equations (3.17), (3.18) particularize themselves by :

$$\begin{aligned} e_s &= L_s \dot{I}_s + L_o \cos \theta \dot{I}_r - \dot{\theta} L_o \sin \theta I_r, \\ e_r &= L_r \dot{I}_r + L_o \cos \theta \dot{I}_s - \dot{\theta} L_o \sin \theta I_s, \\ T_{em} &= -L_o \sin \theta I_s I_r. \end{aligned}$$

The rotorical circuit is being supplied by a constant current source I_r . Such a machine can be used either as a generator (that transforms the mechanical power provided by the external torque T_a in electrical power delivered by the statoric electromotive power e_s), or as an engine (that transforms the electrical power delivered to the stator by the source v_s in a mechanical power delivered by the electromagnetical torque T_{em}).

The system has three state variables :

$$\begin{aligned} x_1 &= I_s, \\ x_2 &= \theta, \\ x_3 &= \dot{\theta}, \end{aligned}$$

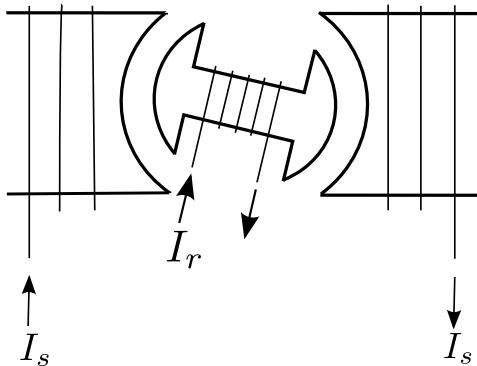


FIGURE 3.13 – Elementary machine with two windings

and two input variables :

$$\begin{aligned} u_1 &= v_s, \\ u_2 &= T_a. \end{aligned}$$

The state-spaced model of the system is noted as follows :

$$\begin{aligned} L_s \dot{x}_1 &= L_o I_r x_3 \sin x_2 - R_s x_1 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ J \dot{x}_3 &= -h(x_3) - L_o I_r x_1 \sin x_2 + u_2. \end{aligned}$$

In the case of generator mode, we can also close the electrical part of the circuit with a resistance of charge R_L , we can then set $u_1 = R_L x$ and we obtain a state-spaced model with only one input $u_2 = T_a$. ■

3.9. Direct current machines

Direct current machines (fig. 3.14) generally include a stator winding and a rotor one.

The stator winding is the inductive circuit whose current is noted by I_s . The rotor winding is the [induced circuit](#) whose current is written by I_r .

So a direct current machine (DC machine) seems similar to the elementary two-winding machine we studied in the previous section. However, there is a fundamental difference : a DC machine is designed with a [commutation](#) system whose effect is to modify the electromechanical coupling. A detailed description of this commutation effect on the coupling equations is beyond the scope of this book. So

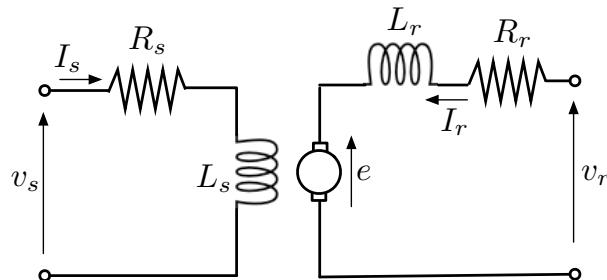


FIGURE 3.14 – Direct current machines

we restrict ourselves to give the results. When the effect of magnetic saturation are negligible and when the commutation doesn't generate significant non-linearities, the equations of electromechanical coupling of a DC machine are written as the following multilinear form :

$$\begin{aligned} e_s &= L_s \frac{dI_s}{dt}, \\ e_r &= L_r \frac{dI_r}{dt} + \frac{d\theta}{dt} K_e I_s, \\ T_{em} &= K_m I_r I_s. \end{aligned}$$

Let's notice the the **resemblance, but not the similarity**, of those equations with the general one (3.17), (3.18) of electrical machines without commutation which have been previously defined. We notice in particular the default of symmetry between the form of e_s and the one of e_r which is precisely due to commutation.

According to the way they are build and implemented, direct current machines can be used as motors or as generators. Here are some usual examples of applications.

General model for DC machine

The system has four state variables :

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta, \\ x_2 &= \dot{\theta}, \\ x_3 &= I_s, \\ x_4 &= I_r. \end{aligned}$$

The system inputs are the voltages at the terminals of the inductor circuit v_s and

of the induced circuit v_r as well as the external torque T_a :

$$u_1 = v_s,$$

$$u_2 = v_r,$$

$$u_3 = T_a.$$

The state-spaced model can be written as follows :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ J\dot{x}_2 &= -h(x_2) + K_m x_3 x_4 + u_3, \\ L_s \dot{x}_3 &= -R_s x_3 + u_1, \\ L_r \dot{x}_4 &= -R_r x_4 - K_e x_2 x_3 + u_2.\end{aligned}$$

DC engine controlled by stator.

It's a DC engine whose rotor current is provided by a constant current source (figure 3.15) :

$$I_r = \text{constant}$$

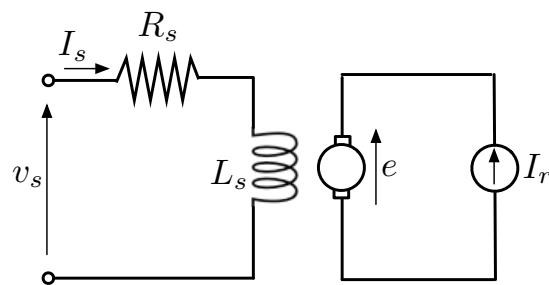


FIGURE 3.15 – DC engine controlled by the stator

The system has three state variables :

$$x_1 = \theta,$$

$$x_2 = \dot{\theta},$$

$$x_3 = I_s.$$

The system inputs are the voltages at the terminals of the stator circuit v_s and the external torque T_a :

$$u_1 = v_s,$$

$$u_2 = T_a.$$

The state-spaced model is written as follows :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ J\dot{x}_2 &= -h(x_2) + K_m I_r x_3 + u_2, \\ L_s \dot{x}_3 &= -R_s x_3 + u_1.\end{aligned}$$

DC engine controlled by the rotor.

It's a DC engine whose stator current is provided by a constant current source (figure 3.16) :

$$I_s = \text{constant}$$

The system has three state variables :

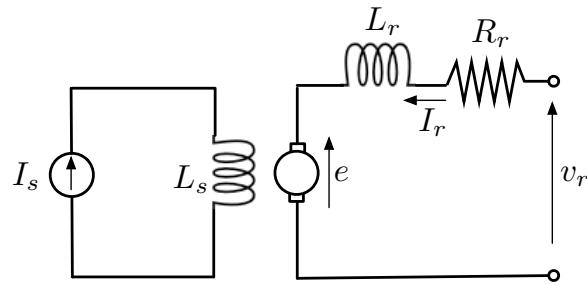


FIGURE 3.16 – DC engine controlled by rotor

$$\begin{aligned}x_1 &= \theta, \\ x_2 &= \dot{\theta}, \\ x_3 &= I_r.\end{aligned}$$

The system inputs are the voltage at the terminals of the rotor circuit v_r and the external torque T_a :

$$\begin{aligned}u_1 &= v_r, \\ u_2 &= T_a.\end{aligned}$$

The state-spaced model is written as follows :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ J\dot{x}_2 &= -h(x_2) + K_m I_s x_3 + u_2, \\ L_r \dot{x}_3 &= -R_r x_3 - K_e I_s x_2 + u_1.\end{aligned}$$

DC generator. The function of a generator is to convert mechanical power in electrical power **delivered** by the rotor circuit on any load impedance of Z_L .

When this impedance is resistive (R_L), the system has three state variables (figure 3.17) :

$$\begin{aligned}x_1 &= I_s, \\x_2 &= I_r, \\x_3 &= \omega.\end{aligned}$$

The system inputs are the voltage at the terminals of the stator circuit v_s and the

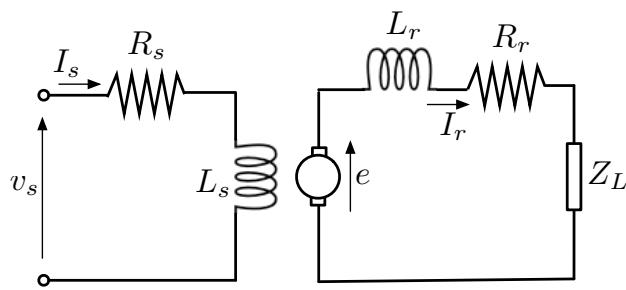


FIGURE 3.17 – DC generator

torque T_a :

$$\begin{aligned}u_1 &= v_s, \\u_2 &= T_a.\end{aligned}$$

The state-spaced model is written as follows :

$$\begin{aligned}L_s \dot{x}_1 &= -R_s x_1 + u_1, \\L_r \dot{x}_2 &= -(R_r + R_L)x_2 - K_e x_3 x_1, \\J \dot{x}_3 &= -h(x_3) + K_m x_1 x_2 + u_2.\end{aligned}$$

3.10. Exercices

Exercise 3.1. Linear circuit

Establish a state-spaced model of the linear circuit shown in figure 3.18 with the applied voltage e and the adjustable resistance r as input variables. \square

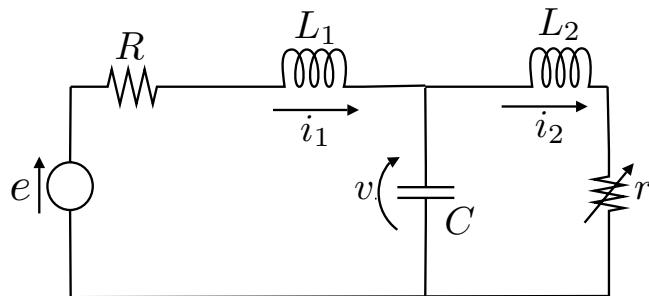


FIGURE 3.18 – Linear circuit

Exercise 3.2. Voltage doubler bridge

The electrical diagram of a voltage doubler bridge is shown in figure 3.19. Establish the state-spaced model of the system assuming that all the dipoles are linear except the diodes. \square

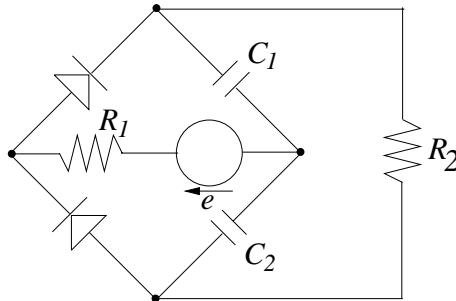


FIGURE 3.19 – Voltage doubler bridge

Exercise 3.3. Transformer The electrical diagram of a transformer is shown in figure 3.20.

1. Has this electrical network some capacity **mesh** and/or inductance **cuts**? Explain your answer.
2. Establish the state-spaced model assuming that the dipoles are linear. \square

Exercise 3.4. A circuit with a tunnel diode

A electrical circuit is described by the following state equations :

$$\begin{aligned} C\dot{x}_1 &= -h(x_1) + x_2, \\ L\dot{x}_2 &= -x_1 - Rx_2 + u. \end{aligned}$$

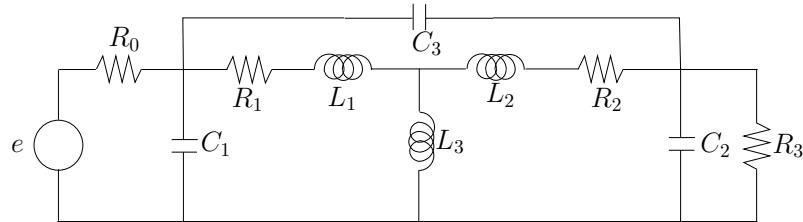


FIGURE 3.20 – Transformer equivalent circuit

x_1 is the voltage to the terminals of a linear capacity, x_2 is the current in a linear inductance, $h(x_1) = x_1^3 - 10x_1^2 + 25x_1$ is the characteristic of a tunnel diode. Establish the circuit diagram. \square

Exercise 3.5. Electromechanical converter

The device illustrated in figure 3.21 transforms an electrical power provided by the voltage source in a mechanical movement of translation. It is made of a cylindrical steel core moving longitudinally inside a solenoid. \square

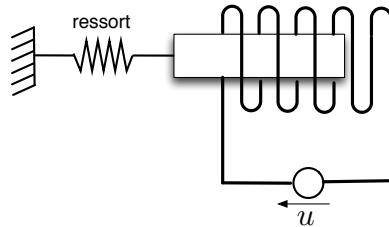


FIGURE 3.21 – electromechanical converter

Suggest a state-spaced model of this system according to the following modeling assumptions :

1. The core movement is forced to be linear by a slide. The friction can be considered as viscous and linear.
2. The core is shorter than the solenoid.
3. The flow in the solenoid is a linear function of the length h of the core part which is inside the solenoid.
4. The flow is a saturated monotonically increasing function of the current.
5. The spring is linear. \square

Exercise 3.6. Clockwork motor A small motor used in watchmaking is presented in figure 3.22. The stator is provided with field winding whose inductance $L(\theta)$ is a sinusoidal function of the rotor angular position θ .

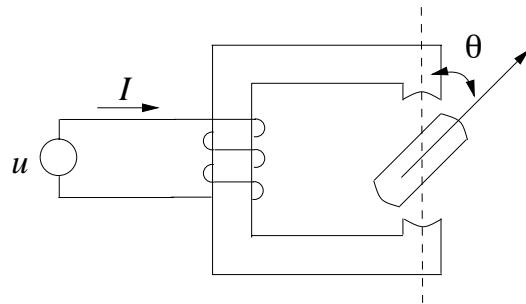


FIGURE 3.22 – Clockwork motor

1. Suggest a model for the function $L(\theta)$ and compute the flow.
2. Establish the state-spaced model of the system assuming a linear viscous friction. The inputs are the voltage u at the terminals of the inductor and the load torque T_a .
3. What has to be the waveform of the input signal u when T_a is constant and so that the rotor rotates at constant speed ? \square

Exercise 3.7. Unipolar off-phase synchronous machine

This is a machine holding two stator windings (labelled a and b) arranged in quadrature and a rotor winding (labelled r). The self and mutual inductances of the stator windings vary depending on the angular position θ of the rotor according to the following laws :

$$\begin{aligned}L_a &= L_o + L_1 \cos 2\theta \\L_b &= L_o - L_1 \cos 2\theta \\L_{ab} &= L_1 \sin 2\theta\end{aligned}$$

The self inductance of the rotor L_r is constant. The mutual inductances between the rotor and the stator windings are expressed in terms of θ :

$$\begin{aligned}L_{ar} &= L_2 \cos \theta \\L_{br} &= L_2 \sin \theta\end{aligned}$$

1. Establish the coupling equations of the electromechanics system (see Section 3.4)
2. The rotor is supplied by a constant current source I_r . Establish the state model of this machine when it works as a motor (you might need to use the example 3.3). \square

Exercise 3.8. Elementary machine with two windings.

Let's consider the elementary machine with two windings working as a generator, such as it is described in the example 3.3. Denote how to revise the state equations under the following hypothesis :

1. The electric charge of the stator circuit is capacitive
2. The rotor winding is closed using a short-circuit. \square

Exercise 3.9. DC motor with self-excitation

A DC motor with self-excitation is designed such as the stator current and the rotor current are supplied by the same power source (see figure 3.23). Establish the state model of this system using the tension source u as the only input variable of this system. \square

Exercise 3.10. DC generator with self-excitation Let's consider a DC generator with self-excitation. The rotor tension induced at constant rate is a *strictly increasing and bounded* function depending on the excitation current $E(I_s)$ such as $E(0) > 0$. The generator provides a capacitive electric charge. The input control variable of the system is the angular velocity of the generator.

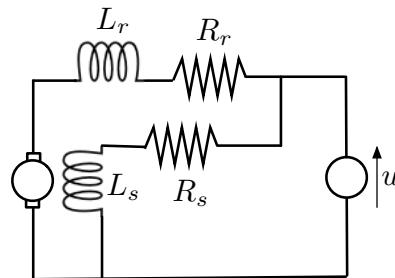


FIGURE 3.23 – DC motor with self-excitation

1. Propose an analytical form for the function $E(I_s)$.
2. Propose a state model for this system.
3. Justify the existence of a non-zero residual voltage $E(0)$. □

Exercise 3.11. DC motor with off-center load

A DC motor with independent excitations and controlled by the rotor current drives an off-center load (the motor shaft do not pass through the center of mass of the load : indeed, there is an unbalanced effect) through a transmission whose flexibility is significant. Propose a state model taking into account this features.

Exercise 3.12. DC-DC converters

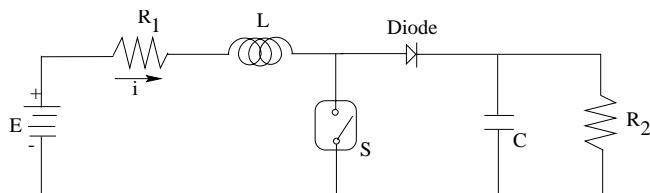


FIGURE 3.24 – DC-DC converter

The circuit depicted at the figure above describes a DC-DC converter. The device labelled "S" pictures an electronic switch of type MOSFET which is open and close periodically.

- Establish a state model of the system under the following modelling hypothesis :
- a) the voltage E of the supply battery is constant
 - b) both resistances R_1, R_2 , the inductance L and the capacitor C are linear
 - c) the input variable is the commutation frequency of the switch. □

Chapitre 4

Compartments systems

The notion of compartments system is used to specify a wide set of systems for which the dynamic can be described by balanced equations. It is used in many engineering fields (such as chemistry engineering, biomedical engineering or ecology), in economy and social sciences as well.

4.1. Definitions and notations

A compartment is a conceptual tank or box for which the content (matter, energy, money, population...) can be quantified. The symbolic notation used is depicted at figure 4.1 where q_{in} and q_{out} are respectively the filling and emptying flows of the compartment expressed in quantity of content by time unit. These flows are always *positive*, by convention.

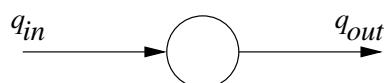


FIGURE 4.1 – Symbolic representation of a compartment.

A compartments system is made of one *network* of compartments interconnected and labelled 1 through n . To be clear, an example of system made of 3 compartments is shown at figure 4.2. The arrows specify the flows of content exchanged by the compartments in the network and with outside of the system.

In general, a compartments system is represented by an *oriented graph* whose nodes correspond to compartments and arcs to flows. The following notations are introduced :

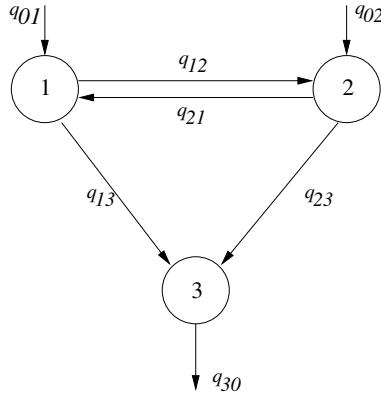


FIGURE 4.2 – An example of a compartments system graph.

x_i is the quantity of content in the compartment of indices i , ($i = 1, \dots, n$).

This quantity is always *positive*. Using a slight abuse of terms, x_i is used to depict the *level* of matter in the compartment i .

q_{ij} specify the flow flowing from compartment i towards the compartment j , ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n$). As mentioned above, it is a variable which is always *positive* by convention.

Definition 4.1. Open or close system

A system is **open** when there exists a possibility to exchange matter with outside of the system. In this case :

q_{io} specify the flow from compartment i towards the outside

q_{oi} specify the flow from the outside towards the compartment i

Otherwise, the system is said to be **close** : $q_{io} = q_{oi} = 0$ for all i . □

Definition 4.2. System connected to entrances and exits

A compartment i is *connected to an exit* if there is a path $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \ell$ from this compartment ending in a compartment ℓ from which there is an outgoing flow $q_{\ell o}$. The system is *completely connected to the exits* (CCO) if each compartment is connected to an exit.

A compartment ℓ is *connected to an entry* if there is a path $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \ell$ ending in this compartment and coming from a compartment i in which there is an entering flow q_{oi} . The system is *completely connected to the entries* (CCI) if each compartment is connected to an entry. □

4.2. State model

The balanced equation of each compartment (also called continuity equation)

$$\dot{x}_i = \sum_{j=0}^n q_{ji}(t) - \sum_{j=0}^n q_{ij}(t) \quad i = 1, \dots, n$$

is the basic statement to establish the state model of a compartments system. This equation tells us that the variation, per unit of time, of the quantity contained in a compartment is the difference between the sum of the entering flows (or debits) and the sum of the outgoing flows (or debits). In practice, of course, the flows which are structurally null are not explicitly in the equation ((4.1)).

Computing the equations of the state model of a compartments system required two fundamental aspects.

First of all, the structure of the graph related to the system determines the number and the structure of the balanced equations ((4.1)); the variables x_i are the state variables whereas the order of the model is the number n of compartments.

To complete the state model, the flows should be specified in terms of the state variables and input variables :

$$q_{ij}(x, u)$$

where x and u are, as usual, the vector of states and entries. This modelling is the point of the next section.

The general form of the state equations of a compartments system is the following :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=0}^n q_{ji}(x, u) - \sum_{j=0}^n q_{ij}(x, u) \quad i = 1, \dots, n$$

In this model, the physical meaning of the state variables x_i is obvious : these are the quantities contained in each compartment. But, the input variables u can be of different natures, depending on the applications, as the next examples will show.

If the flows vector $q(x, u)$ is defined as containing, in an arbitrary order, all the flows $q_{ij}(x, u)$ which are not structurally null, then the state model ((4.1)) can also be written in a more compact matrix form :

$$\dot{x} = Lq(x, u) \tag{4.1}$$

where L is the incident matrix of the oriented graph, whose coefficients all belong to $(-1, 0, 1)$.

Example 4.3. For the system depicted at figure 4.2, the state model is written as :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= q_{01}(x, u) - q_{12}(x, u) - q_{13}(x, u) + q_{21}(x, u) \\ \dot{x}_2 &= q_{02}(x, u) + q_{12}(x, u) - q_{21}(x, u) - q_{23}(x, u) \\ \dot{x}_3 &= q_{13}(x, u) + q_{23}(x, u) - q_{30}(x, u)\end{aligned}$$

If the flows vector is defined as :

$$q(x, u) \triangleq \begin{pmatrix} q_{01}(x, u) \\ q_{02}(x, u) \\ q_{12}(x, u) \\ q_{13}(x, u) \\ q_{21}(x, u) \\ q_{23}(x, u) \\ q_{30}(x, u) \end{pmatrix}$$

the state model is written in a matrix format ((4.1)) with the matrix L :

$$L \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

4.3. Modelling of the flows

Depending on the applications, the functions $q_{ij}(x, u)$ depicting the flows can take different types of forms. However, they must be defined in a way which guarantees the compartment system to be a *positive system*, that is a system for which each state variable remains positive along the trajectories. It is a likelihood guarantee of the model, because the state variables represent measures which do not have a physical meaning if they are negative.

Definition 4.4. Positive vector and positive orthant

A vector $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ is positive (notation $x \geq 0$) if each of its component is a positive real number : $x_i \geq 0$ for all i .

The positive orthant of dimension n (written \mathbb{R}_+^n) is the set of all positive vectors of dimension n . □

Definition 4.5. Positive system

A dynamical system $\dot{x} = f(x, u)$ is a positive system if, for every admissible input $u(t)$, its state is confined in the positive orthant when the initial state is positive :

$$x(t_0) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } u(t) \in \mathcal{U} \implies x(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t \geq t_0. \quad \square$$

The following theorem gives a sufficient condition which can be easily used to check that a system is positive.

Theorem 4.6. A dynamical system $\dot{x} = f(x, u)$ is a positive system if $f(x, u)$ is differentiable and if

$$x \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad x_i = 0 \implies \dot{x}_i \geq 0 \quad \forall i. \quad \square$$

To ensure that a compartments system is a positive system, let's impose the following conditions on the flows functions $q_{ij}(x, u)$:

C1. The functions $q_{ij}(x, u)$ are positive functions of their arguments on their definition domain :

$$q_{ij}(x, u) : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$$

C2. The functions $q_{ij}(x, u)$ are continuous and differentiable functions of their arguments on their definition domain.

C3. As there cannot be an outgoing flow from an empty compartment, the functions $q_{ij}(x, u)$ verify the condition :

$$x_i = 0 \implies q_{ij}(x, u) = 0$$

Theorem 4.7. Under conditions C1, C2, C3, a dynamical compartment system $\dot{x} = Lq(x, u)$ is a positive system. ■

Example 4.8. Hydraulic system

Let's consider an hydraulic system made of a set of tanks located at different elevations and whose the liquid content flows "as waterfalls" from the highest tanks to the lowest tanks, thanks to gravity action. An example is illustrated at figure 4.3.

It is clearly a compartments system whose the associated graph is depicted at figure 4.4 and whose the continuity equations are written as :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= q_{01} - q_{12} - q_{13} \\ \dot{x}_2 &= q_{12} - q_{23} \\ \dot{x}_3 &= q_{13} + q_{23} - q_{30}\end{aligned}$$

In these equations, the state variables x_1, x_2 et x_3 specify, obviously, the volumes of water contained in the tanks; and the flows q_{ij} depict the debits flowing from the upper tanks toward the lower tanks. In order to complete the model, the flows should be expressed in terms of the state variables and the input signals, correctly chosen. The flow provided by the supply pump of the upper tank can obviously be chosen as an input variable. The outgoing flow q_{ij} of each tank is a positive function of the volume x_i of the tank. The form of this function depends on the

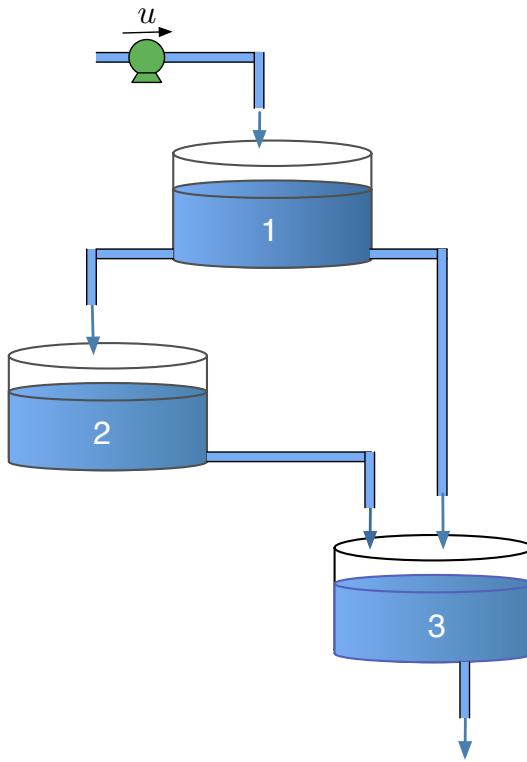


FIGURE 4.3 – Waterfall of tanks.

shape of the tanks and the configuration of the holes through which the water flows. Let's consider the case where the tanks have a constant horizontal section and where the flow goes through a rectangular hole located at the bottom of the tanks. The water elevation in a tank is expressed as :

$$h_i = \frac{x_i}{S_i}$$

where S_i specifies the section of the tank. According to the hydraulic laws, we know that when the elevation of the water h_i is big toward the elevation of the hole, the link between the debit and the elevation of the water is proportional to $\sqrt{h_i}$ (Torricelli's law¹). However, when the elevation of the water is lower than the

1. This law written by Torricelli in 1643 states that the speed v of the outgoing water of a tank of elevation h verifies $v^2 = 2gh$. It can be proven intuitively by analogy with a body in free fall : a elementary volume of water at the surface of the tank has a potential energy ρgh and a kinetic energy $\rho v^2/2$ when it reaches the exit of the tank, where ρ depicts the density. More rigorously, this can be deduced from Bernoulli's theorem without pressure loss or pump $p + \rho g z + \rho v^2/2 = \text{constante}$, where p depicts the pressure and z the elevation.

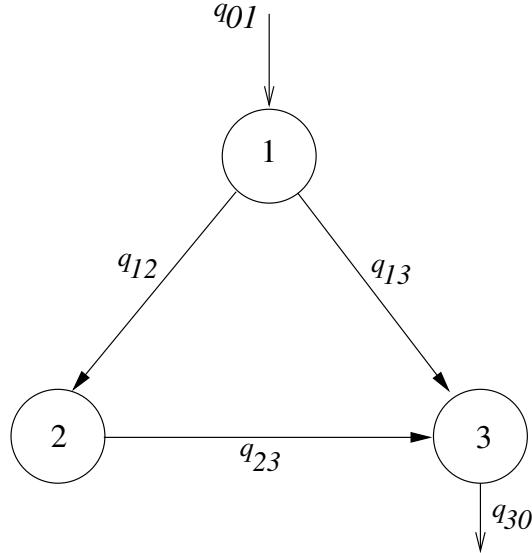


FIGURE 4.4 – Graph of the waterfall of tanks.

elevation of the hole, the flows becomes proportional to $h_i \sqrt{h_i}$ (law of flows for a rectangular tank). A model of the following form can be given :

$$q_{ij} = \frac{\alpha_{ij} h_i \sqrt{h_i}}{\beta_{ij} + h_i}$$

where α_{ij} et β_{ij} are positive constants. Indeed, this model verifies the property telling that, for low water elevations ($h_i \ll \beta_{ij}$), the flow q_{ij} is proportional to $h_i \sqrt{h_i}$ whereas for high water elevations ($h_i \gg \beta_{ij}$), the flow q_{ij} is proportional to $\sqrt{h_i}$. The flows q_{ij} can be expressed in terms of x_i :

$$q_{ij}(x_i) = \frac{k_{ij} x_i \sqrt{x_i}}{S_i \beta_{ij} + x_i} \quad \text{avec } k_{ij} \triangleq \frac{\alpha_{ij}}{\sqrt{S_i}}$$

Finally, the state model can be written as :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{k_{12} x_1 \sqrt{x_1}}{S_1 \beta_{12} + x_1} - \frac{k_{13} x_1 \sqrt{x_1}}{S_1 \beta_{13} + x_1} + u, \\ \dot{x}_2 &= \frac{k_{12} x_1 \sqrt{x_1}}{S_1 \beta_{12} + x_1} - \frac{k_{23} x_2 \sqrt{x_2}}{S_2 \beta_{23} + x_2}, \\ \dot{x}_3 &= \frac{k_{13} x_1 \sqrt{x_1}}{S_1 \beta_{13} + x_1} + \frac{k_{23} x_2 \sqrt{x_2}}{S_2 \beta_{23} + x_2} - \frac{k_{30} x_3 \sqrt{x_3}}{S_3 \beta_{30} + x_3}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Let's notice that the functions $q_{ij}(x_i)$ verify the positivity conditions C1, C2 and C3. \square

4.4. Linear models driven by controlled external supplies

This is the most represented class of compartmental models within the literature. It is characterized by the following flow definitions :

1. Flows between compartments and system output flows are linear in function of the providing compartment level :

$$q_{ij} = k_{ij}x_i \quad k_{ij} > 0 \quad (i = 1, \dots, n; j = 0, \dots, n)$$

2. The system inputs u_ℓ are proportional to the supply flow :

$$q_{0\ell} = k_{0\ell}u_\ell$$

In that case, the required information used to write the state model is entirely unclosed within the system graph. The state model can be represented as a linear system (see chapter 1) :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

with the following structural features :

1. Matrix A is a *Metzler matrix* i.e. such that $a_{ij} \geq 0$ for all $i \neq j$
2. Matrix A is diagonally dominant i.e.

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} a_{ji}$$

3. Matrix B is a full rank *elementary matrix*, i.e. a matrix containing at most one non null element per line and per column.

Example 4.9. The compartmental system linear state model corresponds to the graph shown on 4.2 and can be written as :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_{12} + k_{13}) & k_{21} & 0 \\ k_{12} & -(k_{21} + k_{23}) & 0 \\ k_{13} & k_{23} & -k_{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{01} & 0 \\ 0 & k_{02} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

We observe that A is a diagonally dominant Metzler matrix and that B is a full rank elementary matrix ($\text{rank} = 2$). ■

Example 4.10. Physiological modelling Physiologists are often interested in describing and analyzing biological or chemical substance propagation within mammal body. Those substances can stand for medicinal substances (Pharmacokinetic studies) or toxic substances voluntary or accidentally absorbed. They can also be natural substances such as hormones or proteins. Compartmental models are frequently used to process such studies : the mammal body is therefore represented as a more or less diversified group of interconnected vessels.

Let us consider the example on figure 4.5.

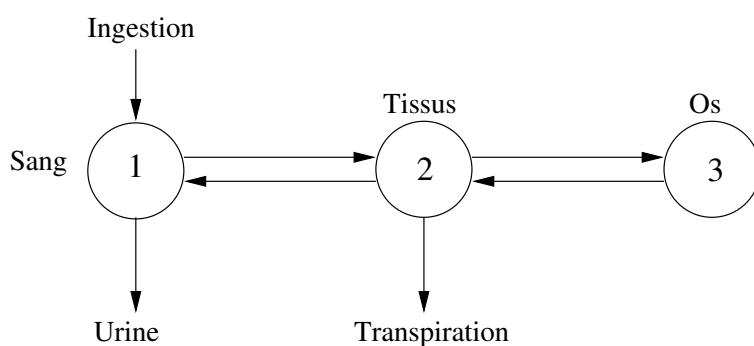


FIGURE 4.5 – Pharmacokinetic compartmental graph model

A toxic substance (lead for example) is absorbed by an animal and permeated in its blood. This substance progressively propagates within the body, from the blood to tissues at first, towards bones afterwards. It is secreted by sweating from one part and by urinating from the other part. The linear compartmental model corresponding to the graph on figure 4.5 is the following model :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_{10} + k_{12}) & k_{21} & 0 \\ k_{12} & -(k_{20} + k_{21} + k_{23}) & k_{32} \\ 0 & k_{23} & -k_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

In this model, the state variables are : x_1 , x_2 et x_3 , which stands for toxial substance quantities within the three compartments (blood, tissues and bones). The input variable u stands for the body ingestion flow. ■

4.5. Non linear model with controlled flows

We will now consider non linear compartmental systems which flows q_{ij} can be non linear functions whose arguments respect the C1 - C3 conditions. We already approached a non linear model in the vessels cascade example. However, flows between compartments were not depending on input variables u_ℓ in that example. We will here consider a case where flows between compartments are explicit functions of input variables u_ℓ allowing to monitor the debit between compartments. The symbolic representation presented on figure 4.6 shows the presence of such a monitoring variable.

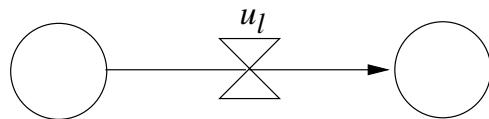


FIGURE 4.6 – Symbolic representation of a monitored flow

Example 4.11. Vessels network Let us consider the hydraulic system represented on figure 4.7. This vessels network corresponds to the vessel cascade example (4.8 with a small modification : the flow between vessel 2 and vessel 3 is now monitored by a pump. As this pump is controllable, we can consider the pumped debit F as an input variable.

The state model (4.2) we obtained for the vessels cascade is therefore simply modified as follows :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -q_{12}(x_1) - q_{13}(x_1) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= q_{12}(x_1) - u_2 \\ \dot{x}_3 &= q_{13}(x_1) - q_{30}(x_3) + u_2\end{aligned}\tag{4.4}$$

where the state variables x_i stand for water volumes contained in vessels, input variable u_1 corresponds to the first vessel supply debit, input variable $u_2 = F$ corresponds to the pumped flow from the second vessel towards the third vessel and functions $q_{ij}(x_i)$ are defined as follows :

$$q_{ij}(x_i) = \frac{k_{ij}x_i\sqrt{x_i}}{S_i\beta_{ij} + x_i}$$

We observe that this state model *cannot* represents a compartmental system respecting C1-C3 conditions. The flow $q_{23} = u_2$ does indeed not respect the C3 condition and the system is not positive : simulations of this model can lead to negative vessels levels (even if the pumped debits remain positive) which is obviously conflicting with physical reality.

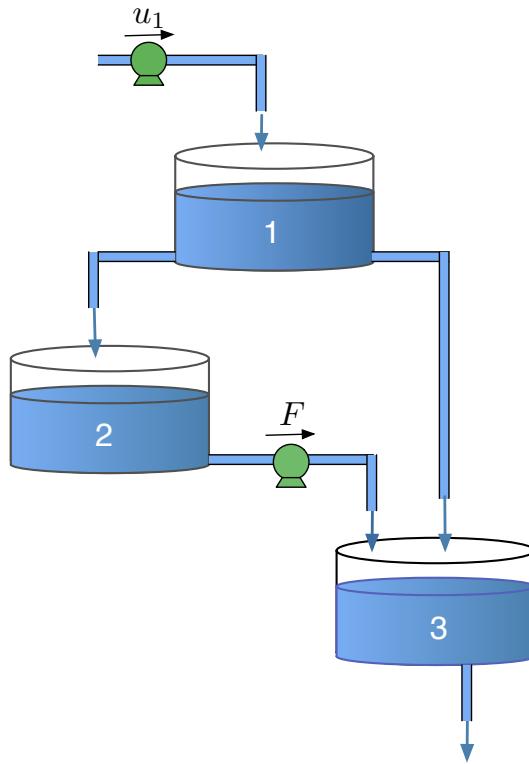


FIGURE 4.7 – Vessels networks

The model as stated indeed allows to pump water in the second vessel even when it is empty !

This problem can be easily avoided if the flow q_{23} (where the pumped debit is F) is modeled such as it respects the physical reality and the C3 condition as :

$$q_{23}(x_2, u_2) = \phi(x_2)u_2$$

where $\phi(x_2)$ is a positive function satisfying $\phi(0) = 0$ and u_2 represents the pump activation.

We therefore obtain a compartment system which graph is presented on figure 4.8 and the state model can be written as :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -q_{12}(x_1) - q_{13}(x_1) + u_1 \\ \dot{x}_2 &= q_{12}(x_1) - \phi(x_2)u_2 \\ \dot{x}_3 &= q_{13}(x_1) - q_{30}(x_3) + \phi(x_2)u_2\end{aligned}$$

■

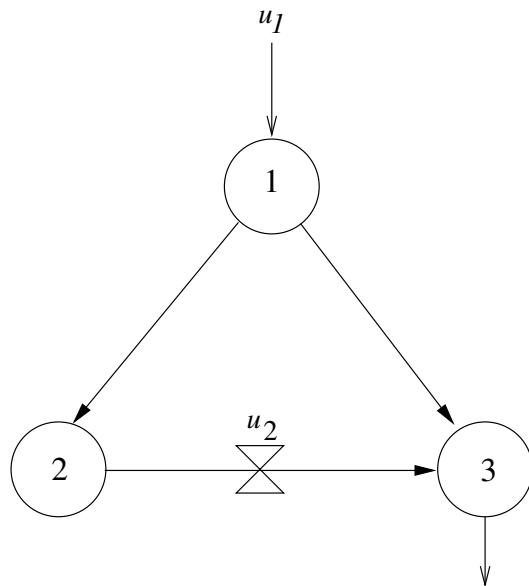


FIGURE 4.8 – Vessels network associated graph

The fundamental structural property of compartments linear systems can be generalized to non linear system with the following theorem.

Theorem 4.12. Given a compartments non linear system which flows q_{ij} satisfy C1-C3 conditions. Therefore, the flows can be written as follows :

$$\begin{aligned} q_{ij}(x, u) &= a_{ij}(x, u)x_i \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n) \\ q_{i0}(x, u) &= a_{i0}(x, u)x_i \quad (i = 1, \dots, n) \\ q_{0i} &= k_{0i}u_i \end{aligned}$$

where functions $a_{ij}(x, u)$ et $a_{i0}(x, u)$, defined on the positive orthant, are continuous.

Therefore, the system state model can be written as :

$$\dot{x} = A(x, u)x + Bu$$

where the matrix $A(x, u)$ is a diagonally dominant Metzler matrix for all (x, u) in the positive orthant and B an elementary matrix. ■

We will end this chapter with another industrial classical compartmental system example.

Example 4.13. Binary distillation process

A binary distillation process is a process used to split a liquid load composed of two liquid chemical components. A *depropanizer* used to split propane from butane is a typical example of binary distillation process within the petrochemical industry.

The split is made by evaporation in an enclosed vessel called *round-bottom flask* (see figure 4.9). The *distillate* containing mainly the lightest component with

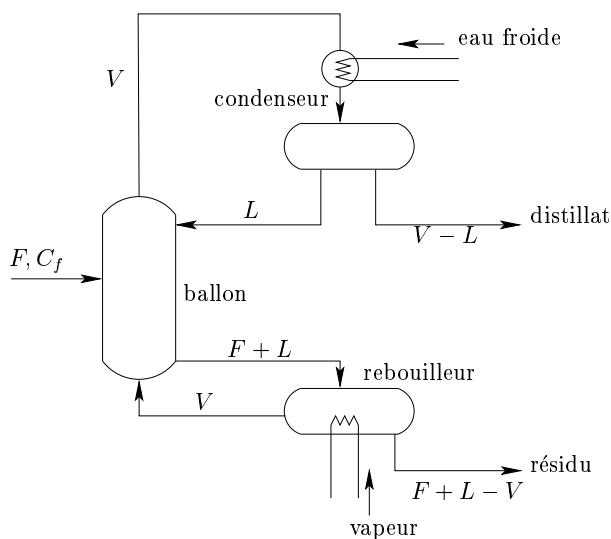


FIGURE 4.9 – Distillation process

a bit of the heaviest one exits from the top of the flask.

The *residue* containing mainly the heaviest component with a bit of the lightest one exits from the bottom of the flask.

The flask is filled by the liquid load with a molar debit F (mol/min). The steam flow spreading out the flask is cooled down and entirely condensed. The outgoing liquid is partially recycled toward the flask with a molar debit L .

The remaining part, called *distillate*, is extracted from the system.

At the bottom of the flask, the outgoing liquid is warmed up a boiler and the produced steam is recycled within the flask. The remaining part, called *residue*, is extracted from the system.

The distillation process dynamic is simplified by the following modeling assumptions and represented below :

1. the load is liquid and has the flask temperature ;
2. the liquid and steam state in the flask and the boiler are homogeneous and at equilibrium ;

3. the flask pressure is constant and there is no steam accumulation ; this assumption allows to omit pressure dependencies in the equations and implies that the steam debit V exiting the flask is equivalent to the input debit ;
4. the liquid extraction debits are adjusted such as the total molar masses of the components in liquid state remain constant : the distillate is therefore extracted with a molar debit $V - L$, the liquid at the bottom of the flask is extracted with a molar debit $F + L$ and the residue is extracted with a molar debit $F + L - V$. Obviously, this implies that the inequality $0 < L < V < F + L$ has to be verified.

Given this definition, the distillation process can be interpreted as a compartments system which dynamic model is based on balance equations of one of the two components in the flask, in the condenser and in the boiler. This compartments system graph is presented on figure 4.10 and the state equations are :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= u_2 k(x_2) - u_1 \frac{x_1}{m_1} - (u_2 - u_1) \frac{x_1}{m_1} \\ \dot{x}_2 &= u_1 \frac{x_1}{m_1} - (u_1 + u_3) \frac{x_2}{m_2} + u_2 (k(x_3) - k(x_2)) + u_3 c_f \\ \dot{x}_3 &= (u_1 + u_3) \left(\frac{x_2}{m_2} - \frac{x_3}{m_3} \right) + u_2 \left(\frac{x_3}{m_3} - k(x_3) \right)\end{aligned}$$

State variables x_i stand for the molar mass of the lightest component in the liquid

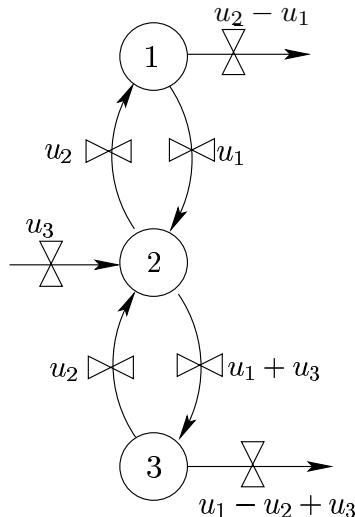


FIGURE 4.10 – Distillation process associated graph

state within the condenser (index 1), the flask (index 2) and the boiler(index 3) ;

Parameters m_i represent those total (and constant) molar masses : the ratio x_i/m_i corresponds to the *molar fraction*; parameter c_f molar fraction of the lightest component within the load ;

Input variables $u_1 = L$, $u_2 = V$ and $u_3 = F$ are, respectively, molar debit of the reflux, the steam production and the supply. Finally, the function $k(x)$ is a liquid-steam equilibrium relationship allowing to link the molar fraction of the lightest component leaving the liquid by vaporization to the molar fraction of the component in liquid state.

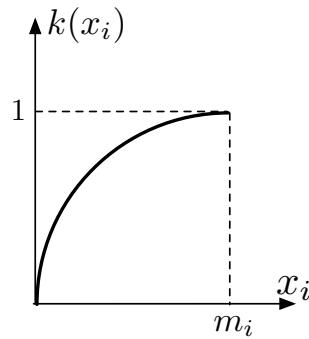


FIGURE 4.11 – Liquid-steam equilibrium relationship

This relationship is classically expressed as follows :

$$k(x_i) \triangleq \frac{\alpha x_i}{m_i + (\alpha - 1)x_i}$$

where the constant parameter $\alpha > 1$ is called separation factor. This function, defined on the interval $[0, m_i]$, checks $k(0) = 0$ and $k(m_i) = 1$ (see figure 4.11). \square

4.6. Exercises

Exercise 4.1. A compartments system

Given the following dynamical system :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 - \log(1 + x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_2^2 \\ \dot{x}_3 &= x_2^2 - 2x_3 + u\end{aligned}$$

Demonstrate that it is a compartments system. Draw the associated graph. Compute the flows q_{ij} , the matrix L and the matrix $A(x, u)$. \square

Exercise 4.2. A hydraulic system

A hydraulic system containing three vessels and two pumps is presented on figure 4.12.

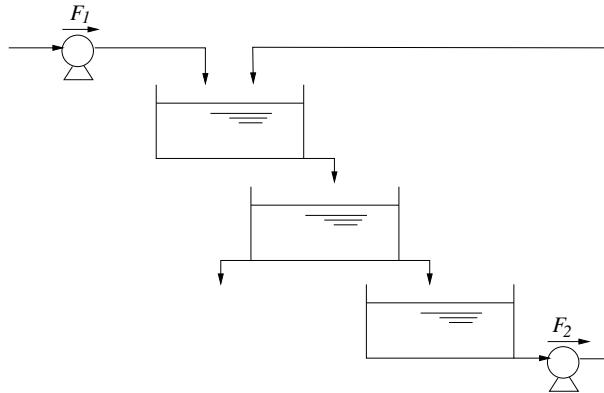


FIGURE 4.12 – Hydraulic system

1. Establish a state model for the system, where the volumetric debits $u_1 = F_1$ and $u_2 = F_2$ are input variables. Show that the obtained system is *not* a positive system.
2. Suggest an alternative definition for the input variable u_2 which ensure a positive system.
3. Draw the obtained compartments graph model. □

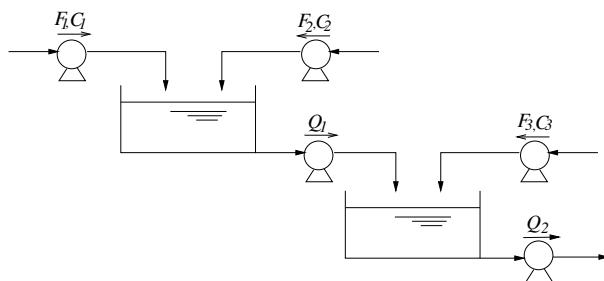


FIGURE 4.13 – Mixing vessels network

Exercise 4.3. A mixing vessels network

The system represented on figure 4.13 is designed for mixing three substances X_1, X_2, X_3 whose supply concentrations are denoted C_1, C_2, C_3 respectively.

The contained volumes in the two vessels are denoted V_1 and V_2 . The pump volumetric debits are denoted as Q_1, Q_2, F_1, F_2, F_3 .

1. Establish a state model of the system with the following input variables : $u_1 = Q_1/V_1, u_2 = Q_2/V_2, u_3 = C_1, u_4 = C_2, u_5 = C_3$. The debits $F_i, i = 1, \dots, 3$, are supposed constants.
2. Justify the input variables u_1 and u_2 form. \square

Exercise 4.4. Compartments linear model

Characterize the graph structure of a compartments linear model whose associated matrix A is :

1. bidiagonal
2. tridiagonal
3. lower triangular \square

Exercise 4.5. Distillation process model

Determine the matrix $A(x, u)$ of the distillation process model. \square

Exercise 4.6. Communicating vessels

A system with two communicating vessels is represented on figure 4.14. The liquid flows freely between the two vessels and towards the outside under the hydrostatic pressure action.

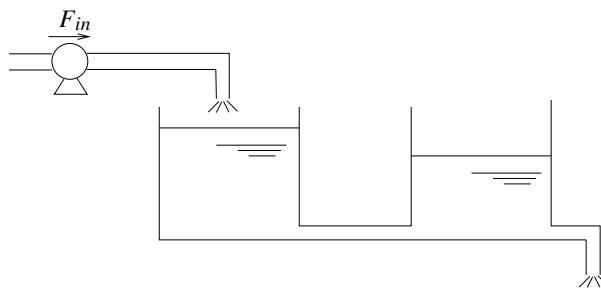


FIGURE 4.14 – Communicating vessels

1. Establish a state model of the system. The provided debit (by the supply pump) is the only input variable.
2. Show that it is a compartments system. Draw the associated graph. Explain the flow between the compartments. \square

Chapitre 5

Reaction systems

The reaction system concept applies for a dynamic systems class used in various engineering domains such as chemistry, biomedical, biotechnologies or ecology. Under a spatial homogeneity assumption, reaction systems dynamic is described by balance differential equations.

These equations are obtained from a combination of a *reaction network* which encodes the reactions that are supposed to occur in the system with two basic physical phenomena : the *reactions kinetic* from one part and the *exchange dynamics* from the other part. Those various elements describing reaction systems will be presented in the following sections, starting by reaction networks.

5.1. Reaction networks

A reaction system is characterized by a given number of *reactions* between chemical or biological components. The number of components is finite and we denote those components using the following symbols :

$$X_1, X_2, X_3, \dots, X_n.$$

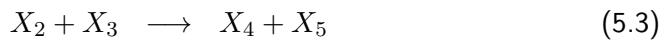
The number of reactions is also a finite number m and those reactions occur inside a geometrically well defined domain. For example, a chemical reactor if it occurs between chemical components or an ecological niche between animal species. The domain boundary is also well defined and split the system from the external world.

The easiest way to introduce the reaction network concept is to start with an example.

Example 5.1. Chemical reaction

The reaction mechanism between nitric oxide and hydrogen is described using the following reaction network which has $m = 4$ reactions employing $n = 6$

chemical components :



The six components are : $X_1 = NO$, $X_2 = N_2O_2$, $X_3 = H_2$, $X_4 = N_2$, $X_5 = H_2O_2$, $X_6 = H_2O$. \square

A reaction network is therefore a set of m reactions in the following form :

$$\sum_{i=1}^n \gamma_{ij} X_i \longrightarrow \sum_{i=1}^n \delta_{ij} X_i \quad j = 1, \dots, m \quad \gamma_{ij} \geq 0 \quad \delta_{ij} \geq 0.$$

The coefficients γ_{ij} and δ_{ij} are positive real numbers called *stoichiometric coefficients*. They represent the nominal quantity for the component X_i which is consumed or produced by the j^{th} reaction. For example, the fourth network reaction above means : one mole of X_3 combined to one mole of X_5 produces two moles of X_6 .

We introduce the following matrix notations :

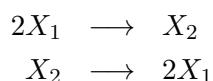
$$\begin{aligned} \Gamma &= [\gamma_{ij}] \quad \text{matrix } n \times m \text{ with elements } \gamma_{ij} \\ \Delta &= [\delta_{ij}] \quad \text{matrix } n \times m \text{ with elements } \delta_{ij} \end{aligned}$$

The *stoichiometric matrix* is defined as :

$$C = \Delta - \Gamma.$$

The matrix rank p is called the *reaction network rank*. It corresponds to the numbers of independent reactions.

As a convention, all reactions are denoted with an arrow from the left to the right. In the example above, the *reversible* reaction $2X_1 \rightleftharpoons X_2$ is encoded as two simple distinct reactions :



Reactants and products

The *reactants* are the components X_i which are written on the left hand side of the arrow with a coefficient $\gamma_{ij} > 0$.

The *products* are the components X_i which are written on the right hand side of the arrow with a coefficient $\delta_{ij} > 0$.

A component X_i can either be a reactant in a reaction and a product in another or the same reaction. This is the case of the component X_5 in the example 5.1.

A *terminal product* is a component produced by at least one reaction but which is a reactant of none reaction.

An *initial reactant* is a component consumed by at least one reaction but which is produced by no reaction.

As an example, in the reaction network (5.1) - (5.4), we identify the following subsets :

Reactants	:	X_1, X_2, X_3, X_5
Products	:	X_1, X_2, X_4, X_5, X_6
Initial reactant	:	X_3
Terminal products	:	X_4, X_6

Catalysts et autocatalysts

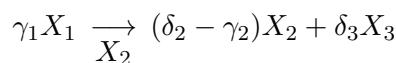
As we just explained, a given component can be on both sides of a reaction. The component X_2 is an example in the following reaction :



If $\gamma_2 = \delta_2$ the component X_2 is a *catalyst*, in other words a component which is neither consumed nor produced but whose presence is required to perform the reaction.

If $\gamma_2 < \delta_2$, the component X_2 is an *autocatalyst*, a component which is a catalyst in its own production.

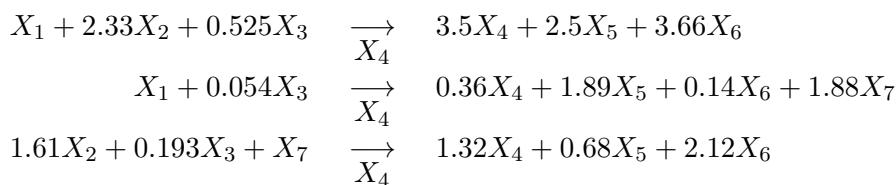
We also use an alternative representation for catalytic and autocatalytic reactions. It consists in not writing the catalyst on the left side of the reaction but indicating it under the arrow without coefficient and balancing it on the right side of the reaction with the coefficient $\delta_2 - \gamma_2$:



Among the most typical autocatalytic reaction examples we can quote polymerization reactions or microbial growth reactions as described in the following example.

Example 5.2. Alcoholic fermentation

The alcoholic fermentation underlying mechanism can be described by the following reaction network :



The seven components are : glucose X_1 , oxygen X_2 , ammoniac X_3 , yeasts X_4 , carbon dioxide X_5 , water X_6 , ethanol X_7 . \square

5.2. Reaction systems state model

The presence of each component inside the system can be quantified. The component X_i concentration denoted $x_i(t)$ corresponds to its amount in the system divided by the mixture volume. The concentrations vector, which is also the model state vector, is denoted :

$$x(t) \triangleq (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T.$$

The reaction rates, also called *reaction kinetics*, describes the speed at which reactants are consumed and products are produced per volume unit in the system, according to the reaction network. A reaction rate r_j is associated to each reaction of the network ($j = 1, \dots, m$).

The reaction rates depend on each component concentrations x_i , but they can eventually also be influenced by other system physico-chemical factors, such as temperature, catalysts or pressure.

We will here consider reactions depending only on state x . The reaction kinetics vector is denoted :

$$r(x) \triangleq (r_1(x), r_2(x), \dots, r_m(x))^T.$$

Each function $r_j : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ has positive values and is defined on the positive orthant. A reaction cannot occurs unless all the reactants are presents in the system. In other words, the reaction rate is therefore null if one of the reactants is missing. Mathematically, this condition can be stated as :

Hypothesis 5.3.

$$1) r_j(x) \geq 0 \quad \forall j \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \tag{5.5}$$

$$2) r_j(x) = 0 \text{ si } x_i = 0 \text{ for a value of } i, \in I^{r_j} \tag{5.6}$$

where I^{r_j} stands for the index of the reactants used in reaction j set (including catalysts). \square

Based on the reaction network description and the reaction rates, we can easily check that the quantitative balance of each component inside the system bounds can be written as :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^m (\delta_{ij} - \gamma_{ij}) r_j(x(t)) + \frac{1}{V} (Q_{0i}(t) - Q_{i0}(t)).$$

In this equation, the notations δ_{ij} , γ_{ij} (stoichiometric coefficients) and $r_j(x(t))$ (reaction rate) were defined earlier. The notation V stands for the volume (assumed constant) of the domain. The notations $Q_{0i}(t)$ and $Q_{io}(t)$ stand for the flows of the component X_i through the domain boundary :

$Q_{io}(t)$ is the flow going from the domain towards the outside,

$Q_{oi}(t)$ is the flow going from the outside towards the domain.

This continuity equation states that the variation, per time unit, of the component concentration X_i comes from two distinct mechanisms :

- $\sum_{j=1}^m (\delta_{ij} - \gamma_{ij}) r_j(x(t))$ express the difference, per volume unit, between the product quantities sum and consumed quantities sum in the reaction where this component X_i is a product or a reactant respectively ;
- $Q_{0i}(t) - Q_{io}(t)$ express the difference between the incoming flow and the outgoing flow from the same component X_i towards the domain boundary.

The system is said to be *closed* when $Q_{io}(t) = Q_{oi}(t) = 0$ for all i and for all t , in other words, when there is no exchange with the outside. In the opposite situation, the system is said *open*.

A reaction system state modeling has three fundamental aspects.

First, the reaction network determines the number of state variables, the structure and the numerical values of the stoichiometric matrix coefficients.

Second, we might ask ourselves how to model reaction rates $r_j(x)$ according to the state variables x_i . The modeling will be presented in the following section.

We will then model the incoming and outgoing flows according to the state and the input variables :

$$Q_{0i}(x, u) \quad Q_{io}(x, u)$$

This modeling will be illustrated using various examples.

Reaction system dynamic is therefore represented by the following state model :

$$\dot{x} = Cr(x) + q_{in}(x, u) - q_{out}(x, u) \quad (5.7)$$

where the definition of vectors $q_{in}(x, u)$ and $q_{out}(x, u)$ is obvious. This state model can then only be defined on the positive orthant. We can easily show that, under the 5.3 assumption, the system (5.7) is a positive system with a compartments system structure.

For a closed system, vectors q_{in} and q_{out} are identically zeros and the state model can be reduced to the equation :

$$\dot{x} = Cr(x).$$

Hypothesis 5.4. The preservation principle The stoichiometric matrix kernel contains a positive vector :

$$\exists \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)^T \quad \omega_i > 0 \quad i = 1, \dots, n \quad \text{tel que } \omega \in \ker C^T.$$

□

Under this assumption, we easily check that the quantity

$$z = \sum_{i=1}^m \omega_i x_i = \omega^T x$$

is a system invariant (5.2) (in other words, $z(t)$ is constant along system solutions).

$$\dot{z} = \sum_{i=1}^n \omega_i \dot{x}_i = [\omega^T C] r(x) = 0$$

and the quantity between brackets is indeed zero thanks to the assumption 5.4.

This assumption is essential because it express the fact that, according to the reality, a closed reaction system is a preservative system ; the total quantity inside the system is a constant : the produced quantities are equal to the consumed quantities (using appropriate normalization coefficients). As Lavoisier said, « rien ne se perd, rien ne se crée ».

5.3. Reaction kinetics modeling

If a reaction respects the *Law mass action*, a classical general expression, respecting the conditions (5.5) - (5.6), can be written :

$$r_j(x) = k_j \prod_{i \in I^{rj}} x_i^{\nu_{ij}}$$

where k_j is the *rate constant* of the j^{th} reaction. The mass action principle consists in expressing each reaction rate as being proportional to the product of the reactants concentrations in the reaction (including catalysts), each concentration being set to the ν_{ij} positive power called *order* of the $j^{reaction}$ s.

The mass action Law corresponds to the particular case where $\nu_{ij} = \gamma_{ij} \quad \forall(i, j)$, where the reaction orders match the reactants stoichiometric coefficients.

However, the mass action principle is often not enough to match the experimentally observed reaction rates. We therefore have to generalize the model :

$$r_j(x) = k_j \prod_{i \in I^{rj}} \rho_{ij}(x_i)$$

where functions $\rho_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ respect the following conditions :

$$\begin{aligned} \rho_{ij}(x_i) &\geq 0 \quad \forall x_i \geq 0 \\ \rho_{ij}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Functions $\rho_{ij}(x_i)$ are often monotonically increasing function, as shown in figure 5.1. One of the most famous example is called the Michaelis-Menten kinetic

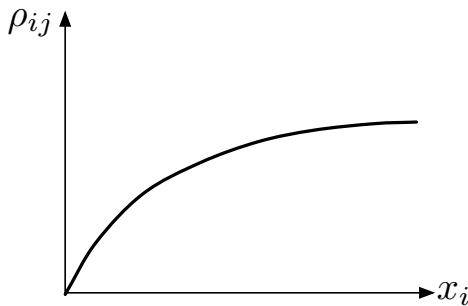


FIGURE 5.1 – Monotonically increasing kinetic function

and is represented by the function :

$$\rho_{ij}(x_i) = \frac{x_i}{K_{ij} + x_i}.$$

Inhibitors and activators

A reaction can be slowed down by a reaction product of any other component being in the reaction network. Such an *inhibitor* effect is modeled by adding an additional multiplicative term in the kinetic model. This term is a decreasing function of the inhibitor component concentration. The two most frequent models are the following :

$$\text{hyperbolic inhibition : } \rho_{ij}(x_i) = \frac{K_{ij}}{K_{ij} + x_i}, \quad (5.8)$$

$$\text{exponential inhibition : } \rho_{ij}(x_i) = e^{-(K_{ij}x_i)}. \quad (5.9)$$

Example 5.5. Let consider the following reaction network :



Suppose that kinetics respect the mass action law and that the first reaction is the most inhibited by the X_4 product of the second reaction, following an exponential law (5.9). Both reaction kinetics will have the following form :

$$\begin{aligned} r_1(x) &= k_1 x_1 x_2 e^{-(Kx_4)}, \\ r_2(x) &= k_2 x_3^2. \end{aligned} \quad (5.11) \quad \square$$

A component in the reaction can also have a speed effect without being required to the reaction (this component is nor a reactant nor a catalyst of the reaction). Such *activator* effect is modeled by adding an additional multiplicative term in the kinetic model. This term is an increasing function of the activator component concentration (which is non zero at start).

5.4. Perfectly mixed reactors

Perfectly mixed chemical or biological reactors form one of the most typical reaction system example. Reactors consists in a vessel containing a liquid reaction medium which is permanently mixed by an appropriate agitation system and has an homogeneous composition. The reactants can be provided to the reactor in liquid or gas state. Reaction products are formed in the reaction system. Some of these products can be easily gasified and freely escape from the reactor under their gas state. The reaction medium is removed from the reactor to collect the products.

5.4.1. Réacteurs continus

Un réacteur parfaitement mélangé fonctionne en *mode continu* lorsque les débits d'alimentation et de soutirage sont ajustés de sorte que le volume V du milieu réactionnel soit constant. On parle alors d'un réacteur continu parfaitement mélangé (acronyme CSTR pour *continuous stirred tank reactor*). Un exemple de réacteur de ce type est représenté à la figure 5.2. Le réservoir est muni d'une ca-

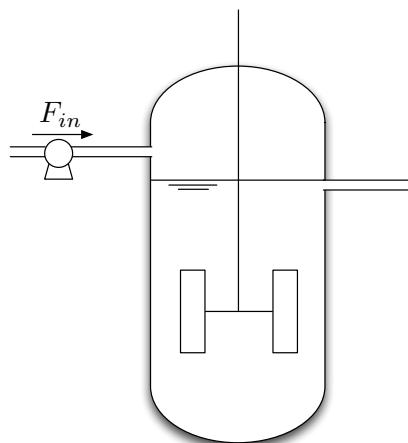


FIGURE 5.2 – Réacteur continu parfaitement mélangé

nalisation d'alimentation et d'un dispositif de trop-plein de manière à maintenir le volume constant.

On suppose que ce réacteur est le lieu d'un ensemble de m réactions impliquant n espèces chimiques X_1, X_2, \dots, X_n . Les concentrations des différentes espèces dans le milieu réactionnel sont notées x_i . Les diverses espèces sont fournies au réacteur en solution ou en suspension dans le flux d'alimentation avec des concentrations notées x_i^{in} . Le débit volumétrique d'alimentation est noté F_{in} . Avec ces notations et définitions, les équations de bilan des différentes espèces dans le ré-

acteur s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{x}V = Cr(x)V - F_{in}x + F_{in}x^{in}$$

où C est la matrice stoichiométrique du réseau réactionnel, $r(x)$ le vecteur des vitesses de réactions, x le vecteur des concentrations x_i et x^{in} le vecteur des concentrations d'alimentation x_i^{in} .

En définissant la variable d'entrée

$$u \triangleq \frac{F_{in}}{V}$$

qui est le débit d'alimentation par unité de volume, appelé aussi *taux de dilution* (l'inverse du taux de dilution est le temps de séjour), on obtient le modèle d'état d'un réacteur continu parfaitement mélangé :

$$\dot{x} = Cr(x) - ux + ux^{in}.$$

On observe que ce modèle possède la structure (5.7) avec les définitions suivantes :

$$q_{out}(x, u) = ux \quad q_{in}(x, u) = ux^{in}.$$

Example 5.6.

Nous considérons un réacteur chimique parfaitement mélangé dans lequel les deux réactions (6.1) se déroulent simultanément dans la phase liquide avec les cinétiques (5.11). Le réacteur est alimenté par les deux réactifs initiaux X_1 et X_2 en solution avec des concentrations d'alimentation x_1^{in} et x_2^{in} .

Le modèle d'état s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 x_1 x_2 e^{-(K x_4)} \\ k_2 x_3^2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} x_1^{in} - x_1 \\ x_2^{in} - x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}$$

où les variables d'état x_1, x_2, x_3 et x_4 représentent les concentrations des différentes espèces dans le milieu réactionnel. \square

5.4.2. Réacteurs à volume variable

Considérons maintenant le réacteur représenté à la figure 5.3. Il est identique au précédent sauf que le trop-plein est remplacé par une canalisation de soutirage dont le débit volumétrique F_{out} est contrôlé par une pompe. Dans le cas particulier où ce débit F_{out} peut être nul par intermittence (pas de soutirage), on dit que le réacteur fonctionne en mode discontinu. L'équation matricielle de bilan massique

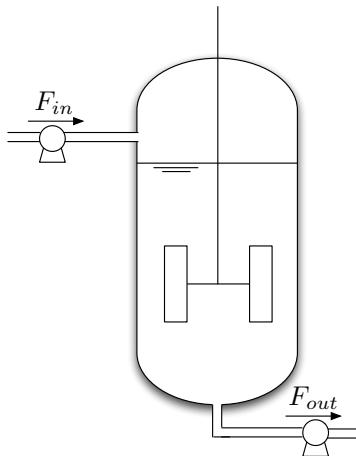


FIGURE 5.3 – Réacteur à volume variable

des différentes espèces s'écrit maintenant comme suit :

$$\frac{d}{dt}(xV) = Cr(x)V - F_{out}x + F_{in}x^{in}.$$

Le volume du milieu réactionnel peut varier si les débits d'alimentation et de soutirage sont différents. Les variations de volume sont décrites par l'équation de bilan volumétrique :

$$\dot{V} = F_{in} - F_{out}.$$

Si les deux débits volumétriques F_{in} et F_{out} sont choisis comme variables d'entrée u_1 et u_2 , on obtient le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cr(x) + \frac{u_1}{x_{n+1}}(x^{in} - x), \\ \dot{x}_{n+1} &= u_1 - u_2,\end{aligned}$$

avec la variable d'état supplémentaire x_{n+1} désignant le volume V .

Il est intéressant de choisir les débits par unité de volume $u_1 = F_{in}/V$ et $u_2 = F_{out}/V$ comme variables d'entrée. Dans ce cas, le modèle d'état s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cr(x) + u_1(x^{in} - x), \\ \dot{x}_{n+1} &= (u_1 - u_2)x_{n+1}.\end{aligned}$$

La première de ces deux équations décrit l'évolution de la composition du réacteur. Elle est indépendante de u_2 et x_{n+1} et elle est identique à celle que nous avions obtenue pour un réacteur à volume constant (5.4.1).

5.4.3. Réacteurs non-isothermes

La vitesse d'une réaction chimique dépend aussi de la température du milieu réactionnel. Jusqu'ici nous n'avons pas pris cette dépendance en compte dans la modélisation : nous avons implicitement supposé la température régulée à une température parfaitement constante. En l'absence d'une telle régulation, c'est la constante de vitesse qui dépend de la température et la forme générale de la vitesse de la j-ième réaction s'écrit

$$r_j(x, T) = k_j(T)\rho_j(x)$$

où T désigne la température (en Kelvin) du milieu réactionnel et la fonction $\rho_j(x)$ satisfait les conditions de l'hypothèse (5.5)-(5.6). La fonction $k_j(T)$ est positive, bornée et $k_j(0) = 0$. Un exemple typique est donné par la *loi d'Arrhenius* représentée à la figure 5.4 :

$$k_j(T) = k_{0j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right)$$

où k_{0j} est une constante, E_j l'énergie d'activation de la réaction et R la constante

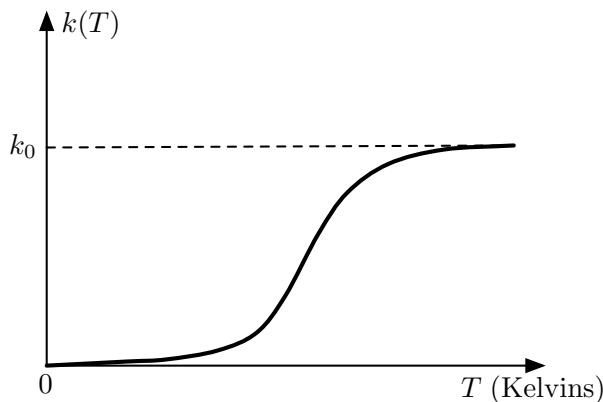


FIGURE 5.4 – Loi d'Arrhenius

de Boltzmann. C'est une fonction monotone croissante et bornée de la température. Dans certaines applications (notamment en biotechnologie) la fonction k_j peut aussi être non monotone.

Le modèle d'état d'un réacteur non isotherme est obtenu en ajoutant une équation de bilan énergétique aux équations de bilan massique et volumique. À titre d'exemple, considérons un réacteur continu muni d'un échangeur de chaleur. L'équation de bilan énergétique s'écrit comme suit :

$$\delta c_p V \dot{T} = \left(\sum_{j=1}^m \Delta H_j r_j(x, T) \right) V + \delta c_p F_{in} (T_{in} - T) + Q$$

où δ représente la densité du milieu réactionnel, c_p la chaleur spécifique, ΔH_j la chaleur de réaction, T_{in} la température du flux d'alimentation et Q le flux de chaleur échangé. Si on suppose que les paramètres δ , c_p et ΔH_j sont constants, on obtient une équation de bilan thermique :

$$\dot{T} = \sum_{j=1}^m h_j r_j(x, T) + d(T_{in} - T) + q$$

où $h_j = \Delta H_j / c_p \delta V$ est la chaleur spécifique de réaction, $d = F_{in}/V$ est le taux de dilution et $q = Q/c_p \delta V$.

Les paramètres h_j peuvent être positifs ou négatifs. Si h_j est négatif, la réaction en endothermique : elle consomme de la chaleur qui est apportée dans le réacteur par l'échangeur de chaleur. Si h_j est positif, la réaction est exothermique : elle génère de la chaleur dans le réacteur qui doit être refroidi par l'échangeur de chaleur.

Le flux spécifique de chaleur échangée q est lui même fonction de la température T . Un modèle simple exprime que q est proportionnel à la différence entre la température du réacteur T et la température d'entrée de l'échangeur T_w :

$$q = e(T_w - T).$$

Dans ce cas, le modèle d'état global du réacteur s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Cr(x) + d(x^{in} - x), \\ \dot{x}_{n+1} &= h^T r(x) + d(T_{in} - x_{n+1}) + e(T_w - x_{n+1}).\end{aligned}$$

avec la variable d'état supplémentaire x_{n+1} désignant la température T . Comme variables d'entrée, on peut choisir par exemple le taux de dilution d et le coefficient de transfert thermique e qui est proportionnel au débit de l'échangeur de chaleur.

5.5. Les systèmes écologiques

Le formalisme réactionnel et le modèle d'état (5.7) conviennent aussi pour la description d'une classe importante de systèmes écologiques (ou écosystèmes) dans lesquels des populations d'organismes vivants (végétaux ou animaux) se partagent un même habitat.

Le modèle mathématique d'un écosystème se présente comme un cas particulier de système réactionnel dans lequel :

- le réseau réactionnel décrit les interactions entre espèces : consommation de ressources inertes, pâturage sur des ressources végétales, préation, etc. Les réactions sont nécessairement autocatalytiques.
- les flux d'entrée représentent la fourniture de ressources au système par des agents extérieurs et l'immigration de certaines espèces.

- les flux de sortie représentent l'émigration des espèces vers l'extérieur, la capture par des agents extérieurs (chasse, pêche, récolte, cueillette, ...) ou simplement la mortalité naturelle des espèces.

Nous commençons par un exemple simple.

Example 5.7. Des algues dans la lagune

Un nutriment organique provenant par exemple d'eaux ménagères résiduaires ou de fertilisants agricoles est déversé dans une lagune. Une population d'algues unicellulaires flottantes (phytoplancton) se développe à la surface de l'eau en se nourrissant de ce nutriment. Cette situation peut être schématisée par la réaction :



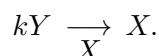
qui exprime que, dans le mécanisme de croissance des algues, le nutriment Y est transformé en matière vivante (ou biomasse) X avec un rendement k^{-1} . Comme tous les êtres vivants, les algues de la lagune peuvent aussi mourir.

La lagune peut dès lors être considérée comme un vaste réacteur qui transforme un réactif Y (le nutriment) en un produit X (la biomasse). Le réacteur est alimenté par un flux entrant de réactif (le nutriment déversé dans la lagune) tandis que la mortalité provoque un flux sortant de produit. Sous une hypothèse d'homogénéité spatiale, la dynamique de ce réacteur est décrite par le modèle d'état

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -kr(x, y) + v, \\ \dot{x} &= r(x, y) - dx. \end{aligned} \quad (5.13)$$

où y représente la concentration en nutriment, x la densité de la population d'algues, v le débit (par unité de volume) d'alimentation de la lagune en nutriment, dx la mortalité supposée proportionnelle à la densité de population (le coefficient d est le taux spécifique de mortalité) et $r(x, y)$ la vitesse de réaction, c'est-à-dire ici la vitesse de croissance des algues. \square

D'un point de vue plus général, la réaction (5.12) peut représenter la croissance d'une population quelconque d'organismes vivants (végétaux ou animaux) X qui, dans un habitat déterminé, consomme une ressource alimentaire Y . Cette ressource alimentaire peut être de la matière inerte (organique ou inorganique) comme dans l'exemple ci-dessus. Elle peut aussi être une autre espèce vivante (végétale ou animale) : on parle alors d'un modèle *proie - prédateur* dans lequel l'espèce ressource Y est la proie et l'espèce consommatrice X est le prédateur. D'évidence, cette réaction de croissance est autocatalytique puisque X représente nécessairement une population d'êtres vivants autoreproducteurs :



Il est dès lors naturel de considérer que la vitesse de croissance est proportionnelle à la densité de la population prédatrice et de représenter la fonction $r(x, y)$ par un modèle de la forme :

$$r(x, y) \triangleq \mu(x, y)x$$

où la fonction $\mu(x, y)$ est appelée *vitesse spécifique de croissance*. Cette fonction doit être définie de sorte que la vitesse de réaction vérifie les conditions (5.5) - (5.6), c'est-à-dire :

- $\mu(x, y)$ est une fonction positive définie sur l'orthant positif :

$$\mu(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2.$$

- $\mu(x, 0) = 0$: il ne peut y avoir de croissance en l'absence de ressource alimentaire.

La vitesse spécifique de croissance peut dépendre de nombreux facteurs environnementaux. Deux effets non linéaires typiques sont l'effet de *satiété* et l'effet de *surpopulation*.

Effet de satiété : Lorsque la ressource alimentaire est rare, on observe généralement que la vitesse spécifique de croissance est une fonction croissante de la quantité de ressource disponible. Il existe cependant une limite physiologique à la vitesse de consommation de la ressource et donc à la vitesse de croissance. Ceci se modélise simplement en adoptant pour $\mu(x, y)$ une fonction croissante saturée par rapport à y , telle que la vitesse de croissance devient indépendante de y au delà d'une concentration critique y_c :

$$\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y} \geq 0, \quad \mu(x, y) = \mu(x, y_c) \quad \forall y \geq y_c.$$

Effet de surpopulation : Même quand la ressource alimentaire est surabondante, la densité de la population est généralement limitée par l'espace disponible. Ceci se modélise en imposant que la vitesse spécifique de croissance $\mu(x, y)$ soit une fonction décroissante de la densité x qui devient nulle quand la population atteint une valeur maximale x_m :

$$\frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x} \leq 0, \quad \mu(x, y) = 0 \quad \forall x \geq x_m.$$

Example 5.8. Le modèle de Contois.

C'est un modèle classique de vitesse spécifique utilisé pour décrire la croissance de populations de micro-organismes :

$$\mu(x, y) = \frac{\mu_0 y}{y + Kx}.$$

On observe que ce modèle est bien une fonction croissante bornée de y (identique, à x fixé, au modèle de Michaelis-Menten) et décroissante (hyperbolique) de x . Cependant, les concentrations limites de satiété y_c et de surpopulation x_m sont rejetées à l'infini. \square

Example 5.9. Le modèle logistique

Il est courant d'adopter pour la vitesse spécifique de croissance une structure multiplicative de la forme :

$$\mu(x, y) = \sigma(y)\phi(x).$$

Cette structure permet de modéliser séparément les effets de satiété et de surpopulation, par exemple de la manière suivante :

$$\sigma(y) = \begin{cases} \alpha y & \forall y \leq y_c \\ \alpha y_c & \forall y \geq y_c \end{cases}$$

$$\phi(x) = \begin{cases} (1 - \frac{x}{x_m}) & \forall x \leq x_m \\ 0 & \forall x \geq x_m \end{cases}$$

On observe que les fonctions σ et ϕ sont linéaires et saturées (voir figure 5.5). Avec ces définitions, le modèle proie-prédateur (5.13) s'écrit, lorsque $y \leq y_c$ et

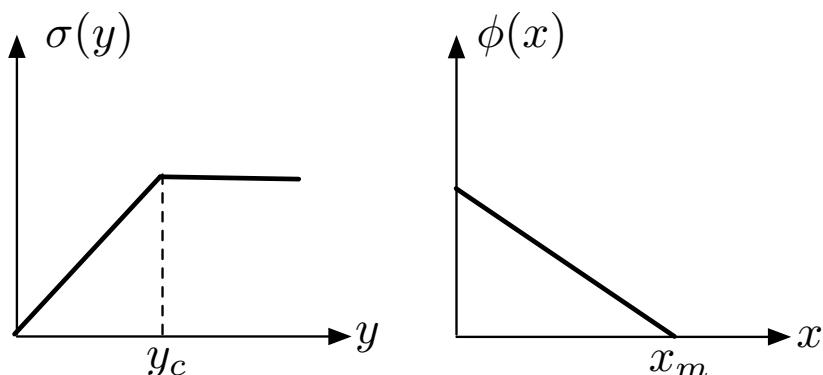


FIGURE 5.5 – Vitesse spécifique de croissance du modèle logistique

$$x \leq x_m,$$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -k\alpha xy(1 - \frac{x}{x_m}) + v, \\ \dot{x} &= \alpha xy(1 - \frac{x}{x_m}) - dx. \end{aligned}$$

Par contre, quand la ressource alimentaire est fournie au système en quantité suffisante pour en maintenir la concentration au dessus de sa valeur critique ($y(t) \geq y_c \forall t$), alors la dynamique de la population prédatrice devient *indépendante de la quantité de ressource alimentaire disponible* et s'écrit simplement :

$$\dot{x} = \sigma_c x \left(1 - \frac{x}{x_m}\right) - dx \quad (5.14)$$

où $\sigma_c = \alpha y_c$. La fonction $\phi(x) = (1 - x/x_m)$ est généralement dénommée *modèle logistique* dans la littérature. Par extension, le modèle (5.14) est appelé modèle logistique de croissance d'une population sur une ressource alimentaire non limitante. \square

Nous avons considéré jusqu'ici un modèle simple ne faisant intervenir que deux espèces X et Y . Cette description s'étend sans difficulté à des écosystèmes plus complexes dans lesquels plusieurs espèces biologiques, végétales ou animales, peuvent coexister et interagir au sein d'un même habitat. Voici un exemple.

Example 5.10. Un écosystème aquatique

Un écosystème aquatique, comme tout système écologique naturel, est généralement caractérisé par la cohabitation de trois types d'espèces biologiques : des espèces végétales, des espèces animales herbivores et des espèces animales carnivores. A titre d'exemple, considérons un étang (voir figure 5.6) dans lequel est

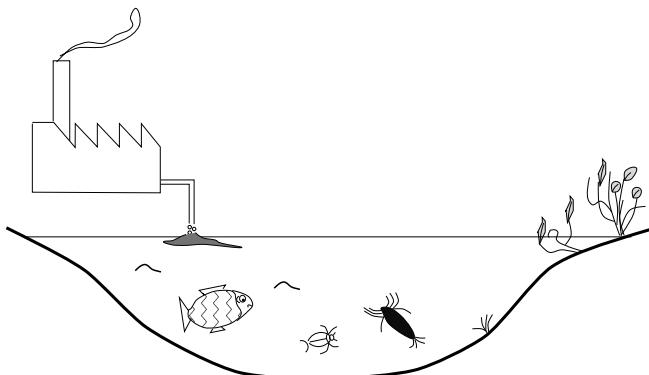
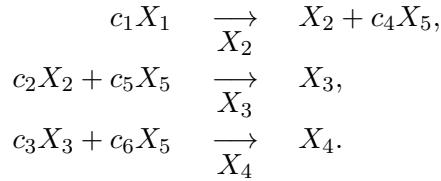


FIGURE 5.6 – Ecosystème aquatique

déversé un nutriment organique X_1 . Une population d'algues (phytoplancton) X_2 se développe par consommation de ce nutriment. Une population de petits crustacés herbivores X_3 pâture sur le phytoplancton qui constitue sa ressource alimentaire principale. Une population de poissons carnivores X_4 assure son développement et sa subsistance par la consommation des crustacés. La respiration animale consomme l'oxygène X_5 en solution dans l'eau produit par la photosynthèse. Cette

description est schématisée par le réseau réactionnel suivant :



Un modèle d'état du système est établi sous les hypothèses de modélisation et avec les notations suivantes.

- Le nutriment organique est déversé avec un débit par unité de volume v .
- les trois espèces biologiques sont sujettes à une mortalité naturelle. Les coefficients de mortalité sont notés d_i , $i = 2, 3, 4$.
- Les poissons sont de plus l'objet d'une pêche dont l'intensité est proportionnelle à la densité de la population. Le coefficient de proportionnalité est noté d_1 .
- La cinétique de croissance des algues est décrite par le modèle logistique, avec une dépendance de Michaelis-Menten par rapport à la concentration en nutriment.
- Les deux cinétiques de croissance des populations animales sont décrites par le modèle de Contois avec une dépendance de Michaelis-Menten par rapport à la concentration en oxygène dissous.

Le modèle d'état de cet écosystème aquatique s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -c_1 & 0 & 0 \\ 1 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & -c_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ c_4 & -c_5 & -c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mu_1 x_1 x_2}{x_1 + K_1} \left(1 - \frac{x_2}{x_{2c}}\right) \\ \frac{\mu_2 x_2 x_3}{x_2 + K_2 x_3} \frac{x_5}{x_5 + K_4} \\ \frac{\mu_3 x_3 x_4}{x_3 + K_3 x_4} \frac{x_5}{x_5 + K_5} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 + d_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les variables d'état x_2, x_3, x_4 désignent les densités des trois populations biologiques tandis que x_1 et x_5 désignent respectivement les concentrations en nutriment et en oxygène dissous. \square

5.6. Exercices

Exercice 5.1. Un procédé chimique

Une installation de génie chimique est représentée à la figure 5.7. Une réaction réversible $A + B \leftrightarrow C$, obéissant à la loi d'action des masses, se déroule dans le réacteur. Le séparateur est supposé opérer une séparation parfaite et instantanée

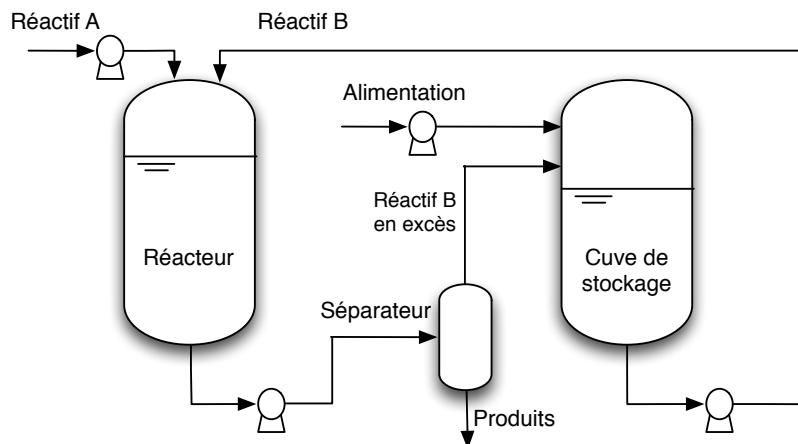


FIGURE 5.7 – Un procédé chimique

des trois espèces chimiques. Le réactif B est recyclé via une cuve de stockage. Le réactif A et le produit C sont soutirés du système. Proposer un modèle d'état du système. \square

Exercice 5.2. Réacteur avec alimentations séparées

Nous avons considéré dans ce chapitre que les différentes espèces qui alimentent un réacteur sont fournies ensemble par une canalisation unique (voir par exemple la figure 5.2). Un tel dispositif peut avoir l'inconvénient de voir les réactions débuter dans la canalisation d'aménée avant d'atteindre le réacteur. Cet inconvénient est évité si les réactifs sont introduits dans le réacteur par des canalisations séparées. Reconsidérons l'exemple 5.6 avec des alimentations séparées pour les deux réactifs X_1 et X_2 (voir figure 5.8) :

1. Etablir un modèle d'état du système si les variables d'entrée sont les deux débits volumique d'alimentation F_{01} et F_{02} .
2. Un cas particulier intéressant est celui où le réacteur est alimenté à débit volumique total constant ($F_{01} + F_{02} = \text{constante}$). Seule la composition de l'alimentation est variable. En pratique cela peut être réalisé en ajustant complémentairement les deux débits F_{01} et F_{02} avec une vanne à quatre voies (voir figure 5.9) de manière que leur somme soit constante. On choisit le débit F_{01} comme unique variable d'entrée et on définit le taux de dilution constant $d = (F_{01}+F_{02})/V$. Etablir le modèle d'état du système et montrer qu'il s'écrit sous la forme (5.7). \square

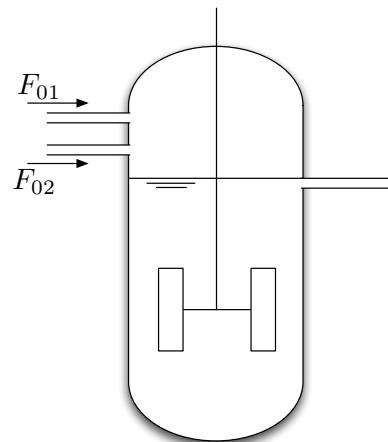


FIGURE 5.8 – Réacteur continu avec alimentations séparées

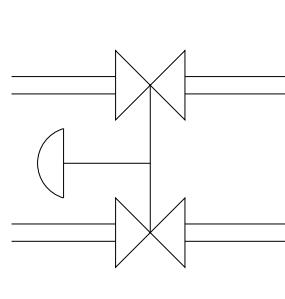


FIGURE 5.9 – Alimentations séparées avec vanne à quatre voies

Exercice 5.3. Réactifs et produits gazeux

Le modèle d'état (5.4.1) d'un réacteur continu parfaitement mélangé peut être étendu au cas de réactifs ou de produits gazeux. Supposons tout d'abord que le réacteur soit alimenté par un réactif X sous forme gazeuse (par exemple de l'oxygène) avec un débit massique Q_{in} (voir figure 5.10). Le réactif barbote

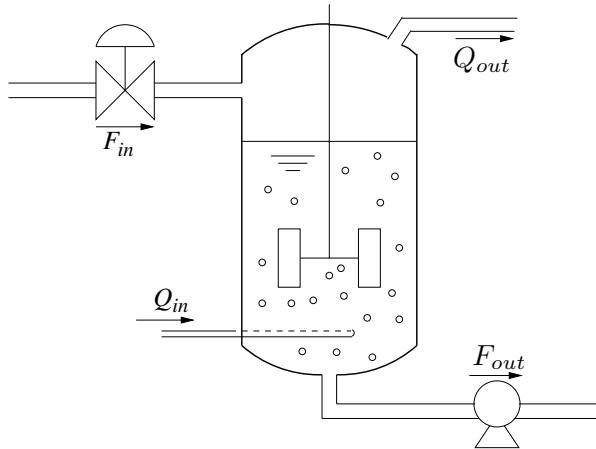


FIGURE 5.10 – Réacteur avec réactifs et produits gazeux

dans le milieu liquide où il est partiellement dissous. L'excès de réactif non-dissous s'échappe librement du réacteur sous forme gazeuse avec un débit massique Q_{out} . La quantité de réactif mise en solution par unité de temps est donc $Q_{in} - Q_{out}$. En se basant sur la loi de Henry et en négligeant la dynamique du transfert gaz-liquide, on peut modéliser cette quantité comme étant proportionnelle au débit gazeux d'alimentation d'une part et au déficit de saturation d'autre part :

$$Q_{in} - Q_{out} = aQ_{in}(x^{sat} - x)$$

où x désigne la concentration de l'espèce X en solution et x^{sat} la concentration de saturation de cette même espèce dans la phase liquide.

Considérons maintenant qu'un produit de réaction X (par exemple du CO_2) formé en solution est gazéifiable. Il s'échappe du milieu réactionnel avec un débit massique Q_{out} . Sous une hypothèse d'équilibre entre les phases liquide et gazeuse, on peut considérer que ce débit est proportionnel à la concentration du produit X en solution dans le milieu réactionnel :

$$Q_{out} = dx$$

1. Comme dans l'exemple 5.6, considérons un réacteur continu dans lequel les deux réactions (6.1)-(??) se déroulent simultanément dans la phase liquide

avec les cinétiques (5.11). Cette fois, nous supposons cependant que le réactif X_2 et le produit X_4 sont sous forme gazeuse. On demande d'établir le modèle d'état du système sous les hypothèses de modélisation suivantes :

- Le réacteur est alimenté par le réactif initial X_1 en solution avec un débit volumétrique F_{in} et une concentration d'alimentation x_1^{in} .
 - Le réactif X_2 est injecté dans le réacteur sous forme gazeuse. La quantité de réactif X_2 mise en solution par unité de temps est notée $aQ_{in}(x_2^{sat} - x_2)$.
 - Les produits X_3 et X_4 sont formés en solution dans le milieu réactionnel. Le produit X_4 est gazéifiable et s'échappe du réacteur avec un débit gazeux dx_4 .
2. Si les variables d'entrée sont le débit volumétrique d'alimentation liquide par unité de volume de milieu réactionnel $u_1 = F_{in}/V$ et le débit massique d'alimentation gazeuse par unité de volume de milieu réactionnel $u_2 = Q_{in}/V$, montrer que le modèle d'état possède la structure (5.7). \square

Exercice 5.4. Une réacteur biochimique

Un réacteur biochimique fonctionnant en mode CSTR met en jeu trois espèces : une population bactérienne X_1 , du glucose X_2 , et du lactose X_3 .

La dynamique du réacteur est décrite par le modèle d'état suivant (x_i désigne la concentration de l'espèce X_i) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 x_2 - u x_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 x_2 + x_1 x_3 - u x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 x_3 + u(c - x_3) \quad c > 0.\end{aligned}$$

1. Quel est le schéma réactionnel ?
2. L'entrée u est positive : $u > 0$. Que représente-t-elle physiquement ?
3. Montrer que le système est positif. \square

Exercice 5.5. Des coccinelles et des pucerons

Montrer que le système (1.6) du chapitre 1 modélisant l'interaction entre les populations de coccinelles et de pucerons est un système réactionnel. \square

Exercice 5.6. Une station d'épuration biologique aérobio

Une station d'épuration biologique aérobio est schématisée à la figure 5.11. Le bassin d'aération est alimenté par des eaux usées (débit F_{in}) contenant un substrat organique polluant (concentration S). Ce substrat organique est dégradé

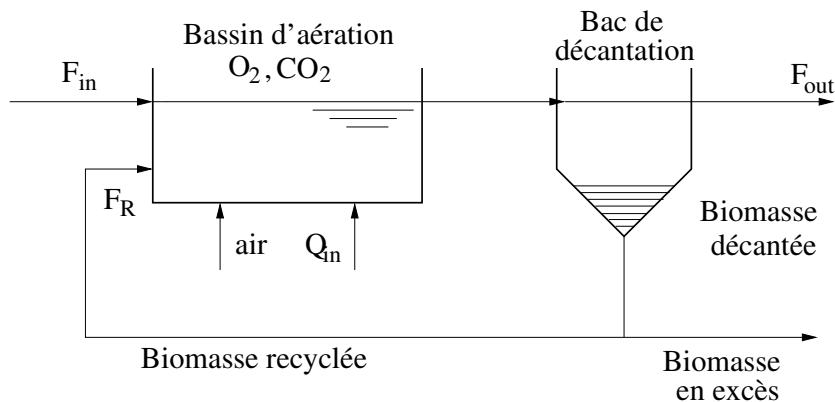


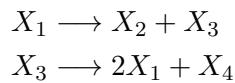
FIGURE 5.11 – Station d'épuration biologique aérobio

par des microorganismes (concentration X) aérobies. Cette dégradation nécessite de l'oxygène dissous dans l'eau (concentration O) et produit du dioxyde de carbone (concentration C) sous forme dissoute mais qui se gazéifie aisément et sort du système sous forme gazeuse. L'oxygène dissout est fourni par un système d'aération (débit d'air Q_{in}). On fait l'hypothèse que les dynamiques de transfert entre phase gazeuse et phase liquide sont négligeables (instantanées).

La sortie du bassin d'aération est connectée à un bac de sédimentation (décantation) où la biomasse (c'est à dire la masse des microorganismes) est séparée du reste. L'eau clarifiée est évacuée du système (débit F_{out}). La biomasse est recyclée vers le bassin d'aération (débit F_R). Cependant, on prévoit la possibilité d'éliminer la biomasse en excès (débit F_S). Les niveaux dans le bassin d'aération et dans le décanteur sont supposés constants. Le bassin d'aération est supposé parfaitement mélangé. Le bassin de décantation (qui ne peut être parfaitement mélangé !) est modélisé par deux réservoirs (compartiments) parfaitement mélangés (un pour l'eau clarifiée, un pour la biomasse décantée). On suppose aussi qu'il n'y a aucune réaction biologique dans le décanteur. On demande d'établir un modèle d'état du système. \square

Exercice 5.7. Un système non conservatif

Soit le réseau réactionnel suivant :



- Etablir le modèle d'état d'un système réactionnel fermé sous les hypothèses de modélisation suivantes : principe d'action des masses pour la première réaction avec une vitesse d'ordre 2 par rapport à tous les réactifs, cinétique

de Michaelis-Menten pour la deuxième réaction avec inhibition hyperbolique par X_2 .

2. Montrer que le système n'est pas conservatif. Donner une justification physique.
3. Montrer qu'il suffit d'ajouter un réactif initial dans la première ou la deuxième réaction pour rendre le système conservatif. \square

Chapitre 6

Transformations d'état

Dans les chapitres qui précèdent, nous avons montré comment la démarche de modélisation peut être systématisée pour différentes classes de systèmes relevant de l'ingénierie. Pour chaque type de système, un modèle d'état général a été établi. Les variables d'état retenues dans ces modèles ont un sens physique précis : positions et vitesses pour les systèmes mécaniques, courants et tensions pour les systèmes électriques, quantités totales pour les systèmes à compartiments, concentrations, volume et température pour les systèmes réactionnels. Il est cependant souvent utile pour analyser le comportement d'un système dynamique de procéder à une *transformation d'état* conduisant à un modèle équivalent du système mais exprimé dans de nouvelles variables d'état.

Outre les transformations d'état, il est aussi intéressant d'utiliser des représentations graphiques qui permettent de visualiser aisément certaines particularités structurelles du système. Parmi les représentations les plus courantes, on mentionnera le *schéma fonctionnel* et le *graphe du système* dont les définitions sont données ci-dessous.

6.1. Schéma fonctionnel

Le schéma fonctionnel d'un système dynamique est un graphe orienté dont chaque noeud est constitué par l'un des deux blocs fonctionnels représentés à la figure 6.1.

- Le bloc fonctionnel Fig. 6.1 (a) représente un intégrateur dont la variable d'entrée est la dérivée de la variable de sortie.
- Le bloc fonctionnel Fig. 6.1 (b) représente une fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ dont la variable de sortie $z(t)$ est une fonction des variables d'entrée :

$$z(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_p(t)).$$

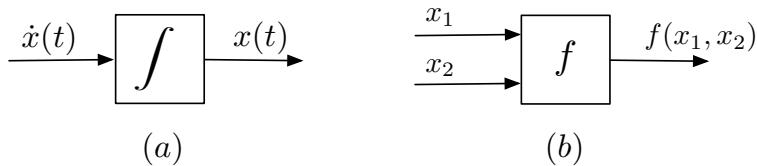


FIGURE 6.1 – Blocs fonctionnels : (a) intégrateur, (b) fonction

Dans certains cas, le dessin de ce bloc est particulierisé de manière à rendre explicite la fonction qu'il représente. Trois exemples sont indiqués à la figure 6.2. Le schéma fonctionnel d'un système dynamique contient nécessairement n intégrateurs dont les sorties sont les n variables d'état du système. Ces intégrateurs sont interconnectés via des blocs fonctionnels représentant les différentes fonctions apparaissant dans les équations d'état. Les arcs du schéma fonctionnel s'interprètent comme des lignes de transmission instantanée des variables qui leur sont attachées.

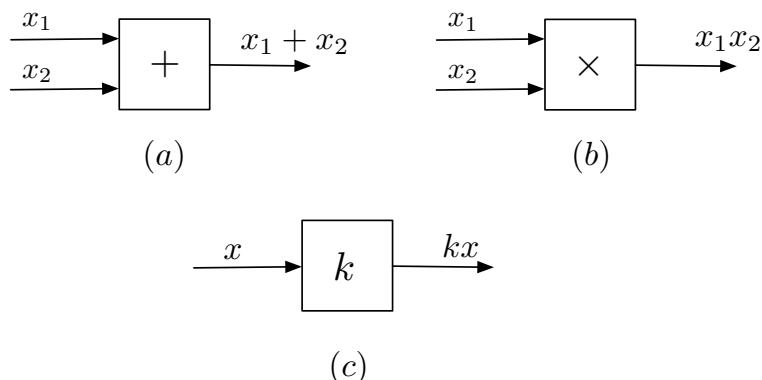


FIGURE 6.2 – Exemples de blocs fonctionnels : (a) sommateur, (b) multiplicateur, (c) produit par une constante

Outre leur intérêt pour l'analyse des systèmes dynamiques, les schémas fonctionnels constituent aussi un outil fondamental de programmation dans les langages standard de simulation dynamique tels que MATLAB/Simulink ou VisSim.

Example 6.1. Des algues dans la lagune (suite)

Au chapitre 5, nous avons établi un modèle simple décrivant la dynamique de croissance d'une population d'algues dans une lagune. En supposant que la cinétique de croissance obéit à une loi bilinéaire $r(x_1, x_2) = x_1x_2$, ce modèle

s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kx_1x_2 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1x_2 - dx_2.\end{aligned}$$

Le schéma fonctionnel correspondant est représenté à la figure 6.3. □

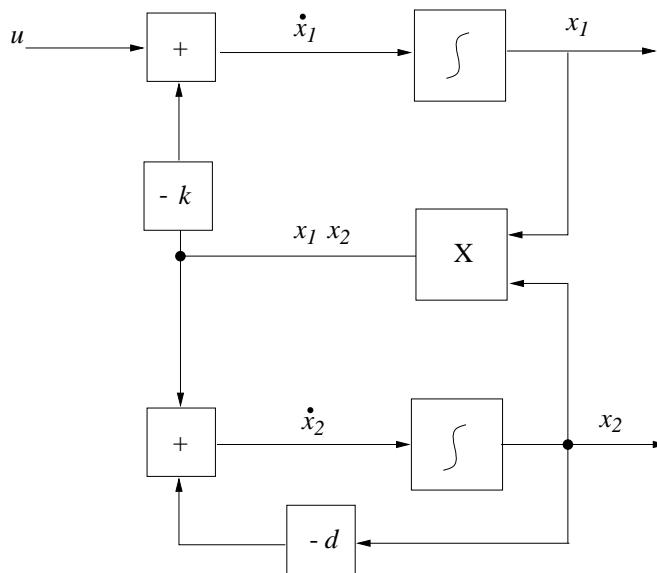


FIGURE 6.3 – Schéma fonctionnel du modèle de croissance d'algues

6.2. Graphe d'un système dynamique

Le graphe d'un système dynamique est, d'une certaine manière, le graphe complémentaire du schéma fonctionnel. En effet, ce sont les variables d'état x_i et les variables d'entrée u_j qui sont attachées aux noeuds du graphe tandis que les arcs (orientés) représentent les relations fonctionnelles entre ces variables.

Les règles de construction du graphe d'un système dynamique sont les suivantes :

1. Le graphe contient $n + m$ noeuds étiquetés respectivement par les n variables d'état x_1, x_2, \dots, x_n et les m variables d'entrée u_1, u_2, \dots, u_m .
2. Il y a un arc orienté de x_i vers x_j (ou de u_k vers x_j) si la variable x_i (ou u_k) apparaît explicitement dans l'équation de la dérivée \dot{x}_j .

Example 6.2. Machine électrique à courant continu

Considérons le modèle général d'une machine DC tel qu'il a été présenté au chapitre 3, section 3.5. C'est un système à quatre variables d'état et 3 variables d'entrée dont le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= J^{-1}(-h(x_2) + K_m x_3 x_4 + u_3), \\ \dot{x}_3 &= L_f^{-1}(-R_f x_3 + u_1), \\ \dot{x}_4 &= L_a^{-1}(-R_a x_4 - K_e x_2 x_3 + u_2).\end{aligned}$$

Le graphe de ce système est représenté à la figure 6.4. □

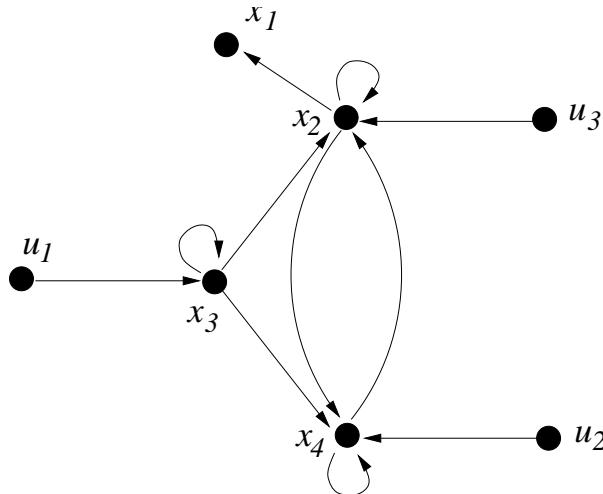


FIGURE 6.4 – Graphe du modèle d'état d'un moteur à courant continu

Le graphe d'un système dynamique est un outil permettant de vérifier aisément si le système considéré possède des particularités structurelles intéressantes. Nous en verrons une illustration à la section 6.7 lorsque nous étudierons les systèmes triangulaires.

6.3. Transformations linéaires d'état

Pour un système dynamique $\dot{x} = f(x, u)$, une transformation linéaire d'état est une application linéaire $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bijective qui transforme l'état du système $x \in \mathbb{R}^n$ en un nouvel état $z \in \mathbb{R}^n$ selon la règle :

$$z = Tx$$

où T est une matrice ($n \times n$) régulière.

Dans les nouvelles coordonnées z , le modèle d'état du système est transformé comme suit :

$$\dot{z} = T\dot{x} = Tf(x, u)$$

En exprimant que $x = T^{-1}z$ on obtient :

$$\dot{z} = g(z, u) \quad \text{avec} \quad g(z, u) \triangleq Tf(T^{-1}z, u).$$

En particulier, un modèle d'état linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est transformé en un autre modèle linéaire :

$$\dot{z} = Fz + Gu \quad \text{avec} \quad F \triangleq TAT^{-1}, \quad G \triangleq TB.$$

Example 6.3. Génératrice DC

Au chapitre 3 (Section 3.6), nous avons établi le modèle d'état d'une génératrice à courant continu. Lorsque la génératrice tourne à vitesse constante ω , le modèle d'état est linéaire et s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ \frac{K_e \omega}{L_r} & -\frac{R_r + R_L}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

où les variables d'état x_1 et x_2 représentent respectivement les courants statorique et rotorique, tandis que l'entrée u est la tension appliquée au circuit statorique.

Nous définissons de nouvelles variables d'état z_1 et z_2 qui peuvent être interprétées comme les flux magnétiques ϕ_s et ϕ_r auxquels sont soumis respectivement les circuits statorique et rotorique :

$$\begin{aligned} z_1 &= \phi_s = L_s x_1, \\ z_2 &= \phi_r = L_r x_2 + K_e x_1. \end{aligned}$$

On observe qu'il s'agit bien d'une transformation d'état linéaire :

$$T = \begin{pmatrix} L_s & 0 \\ K_e & L_r \end{pmatrix}.$$

La matrice T est inversible ($\det T = L_s L_r > 0$) et la transformation inverse s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} & 0 \\ -\frac{K_e}{L_s L_r} & \frac{1}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Dans les nouvelles coordonnées (z_1, z_2) , le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ \frac{K_e\omega}{L_r} + \frac{K_e(R_r + R_L)}{L_r L_s} - \frac{K_e R_s}{L_s^2} & -\frac{R_r + R_L}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{K_e}{L_s} \end{pmatrix} u$$
□

Example 6.4. Modèles linéaires à compartiments

On s'intéresse ici aux modèles linéaires à compartiments tels que décrits à la section 4.4. Rappelons que la forme générale des équations d'état est la suivante :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n k_{ji}x_j - \sum_{\ell=0}^n k_{i\ell}x_i + b_iu_i, \quad i = 1, n$$

ou sous forme matricielle :

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

avec A une matrice de Metzler diagonalement dominante et x_i la quantité totale contenue dans le compartiment i .

On souhaite exprimer le modèle en termes de concentrations. On introduit les notations :

$$\begin{aligned} V_i &: \text{volume du compartiment } i, \\ a_{ij} &\triangleq k_{ij}V_i, \\ z_i &= \frac{x_i}{V_i} : \text{concentration dans le compartiment } i. \end{aligned}$$

A l'aide de ces notations, on peut réécrire le modèle comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{a_{ji}}{V_j}x_j - \sum_{\ell=0}^n \frac{a_{i\ell}}{V_i}x_i + b_iu_i, \\ \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n a_{ji}z_j - \sum_{\ell=0}^n a_{i\ell}z_i + b_iu_i, \end{aligned}$$

et donc :

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ji}}{V_i}z_j - \sum_{\ell=0}^n \frac{a_{i\ell}}{V_i}z_i + \frac{b_i}{V_i}u_i$$

On a opéré ainsi une transformation d'état en passant des quantités totales x_i aux concentrations z_i comme variables d'état. Sous forme matricielle la transformation d'état s'écrit :

$$z = V^{-1}x \text{ avec } V \triangleq \text{diag}\{V_i, i = 1, \dots, n\}$$

Dans les coordonnées de concentration, le modèle devient :

$$\dot{z} = Fz + Gu$$

avec $F \triangleq V^{-1}AV$ et $G \triangleq V^{-1}B$. On peut vérifier que la matrice F^T est aussi une matrice de Metzler diagonalement dominante. \square

Example 6.5. Diagonalisation et constantes temps

On considère un modèle linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ dont la matrice A a toutes ses valeurs propres λ_i réelles, distinctes et non-nulles. Elle est alors diagonalisable, c'est à dire qu'il existe une matrice T telle que

$$D \triangleq TAT^{-1} = \text{diag}(\lambda_i, i = 1, n)$$

Si on définit une transformation d'état :

$$z = Tx$$

le système est transformé en :

$$\dot{z} = Dz + TBu$$

ou, encore composante par composante :

$$\dot{z}_i = \lambda_i z_i + \beta_i u \quad i = 1, n$$

où β_i est la i -ème ligne de la matrice TB . Les grandeurs $\tau_i = |\lambda_i|^{-1}, i = 1, \dots, n$, sont les *constantes de temps du système*.

On a ainsi remplacé le modèle initial dont les variables d'état peuvent être fortement couplées, par une collection de systèmes du premier ordre complètement séparés les uns des autres comme on peut l'observer sur le schéma fonctionnel de la figure 6.5.

Par exemple pour un moteur DC commandé par le stator (voir chapitre 3, section 3.6) avec $h(\omega) = B\omega$:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_s \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ \frac{K_m I_r}{J} & -\frac{B}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} u_1 \\ \frac{1}{J} u_2 \end{pmatrix},$$

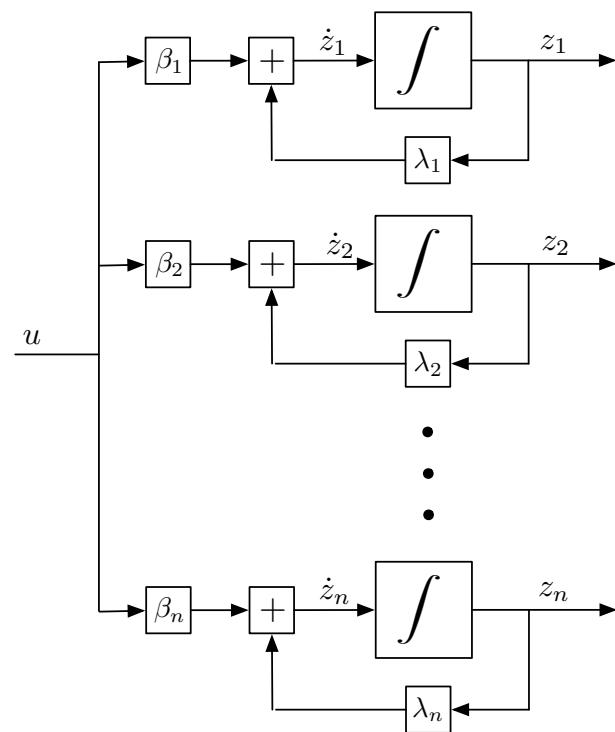


FIGURE 6.5 – Schéma fonctionnel d'un système diagonalisé à une entrée

on vérifie que les constantes de temps sont

$$\begin{aligned}\tau_e &= \frac{L_s}{R_s} \text{ constante de temps électrique,} \\ \tau_m &= \frac{J}{B} \text{ constante de temps mécanique.}\end{aligned}$$
□

Example 6.6. Systèmes réactionnels sous forme compartimentale

Au chapitre 5, nous avons vu que le modèle d'état des systèmes réactionnels s'écrit

$$\dot{x} = Cr(x) + q_{in}(x, u) - q_{out}(x, u).$$

Nous introduisons les notations suivantes pour les vecteurs d'entrée et de sortie :

$$\begin{aligned}q_{in}(x, u) &\triangleq \left(q_{o1}(x, u), q_{o2}(x, u), \dots, q_{on}(x, u) \right)^T, \\ q_{out}(x, u) &\triangleq \left(q_{1o}(x, u), q_{2o}(x, u), \dots, q_{no}(x, u) \right)^T.\end{aligned}$$

Supposons que le système est conservatif et que les flux q_{oi} et q_{io} vérifient les conditions C1, C2 et C3 du chapitre 4. Alors le système réactionnel est équivalent à un système à compartiments avec la transformation linéaire d'état :

$$z = Tx, \quad T \triangleq \text{diag}\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

Pour illustrer cette propriété, considérons à nouveau l'exemple du réacteur chimique parfaitement mélangé de l'exemple 5.6. Dans ce réacteur, les deux réactions



se déroulent simultanément dans la phase liquide avec les cinétiques

$$\begin{aligned}r_1(x) &= k_1 x_1 x_2 e^{-(Kx_4)}, \\ r_2(x) &= k_2 x_3^2.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Le réacteur est alimenté par les deux réactifs initiaux X_1 et X_2 en solution avec des concentrations d'alimentation x_1^{in} et x_2^{in} .

Le modèle d'état s'écrit

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 x_1 x_2 e^{-(Kx_4)} \\ k_2 x_3^2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} x_1^{in} - x_1 \\ x_2^{in} - x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{pmatrix}$$

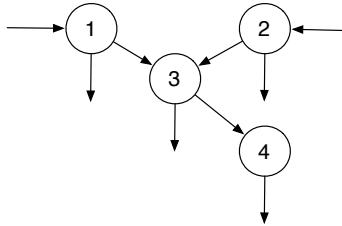


FIGURE 6.6 – Représentation compartimentale d'un système réactionnel

où les variables d'état x_1, x_2, x_3 et x_4 représentent les concentrations des différentes espèces dans le milieu réactionnel.

On vérifie aisément que le système est conservatif avec le vecteur de normalisation $\omega = (1, 1, 1, 2)$. On définit donc la transformation linéaire d'état

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2, \quad z_3 = x_3, \quad z_4 = 2x_4.$$

Dans ces nouvelles coordonnées, on obtient bien un système à compartiments dont le graphe est donné sur la Fig.6.6 et dont voici le modèle d'état :

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 z_2 \varphi - u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 z_1 \varphi - u & 0 & 0 \\ k_1 z_2 \varphi & k_1 z_1 \varphi & -2k_2 z_3 - u & 0 \\ 0 & 0 & 2k_2 z_3 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ux_1^{in} \\ ux_2^{in} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\varphi \triangleq \exp\left(-\frac{K}{2}z_4\right).$$

□

6.4. Transformations non linéaires d'état

Pour un modèle d'état non linéaire $\dot{x} = f(x, u)$, il est souvent plus intéressant de considérer des transformations d'état non linéaires. Cependant, il n'est généralement pas possible de définir des transformations *globales* qui soient valables pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. On s'intéresse dès lors à des transformations *locales* qui ne sont définies que sur des sous-ensembles de \mathbb{R}^n .

Definition 6.7. Transformation non linéaire d'état

Soient U et V deux sous-ensembles ouverts de \mathbb{R}^n . Une transformation non linéaire d'état est une application $T : U \rightarrow V$ qui transforme l'état du système $x \in U$ en un nouvel état $z \in V$:

$$z = T(x)$$

et qui possède les propriétés suivantes :

- a) l'application T est bijective, c'est à dire qu'il existe une fonction inverse $T^{-1} : V \rightarrow U$ telle que $x = T^{-1}(z)$,
- b) $T(x)$ et $T^{-1}(z)$ sont des fonctions de classe C^1 , c'est à dire continues et différentiables.

La transformation d'état est dite *globale* si $U = V = \mathbb{R}^n$. \square

Une transformation T possédant ces propriétés s'appelle un *difféomorphisme*. La bijectivité de la transformation est nécessaire pour pouvoir inverser le changement de variables d'état et revenir dans les variables d'état initiales. La propriété b) (T et T^{-1} sont de classes C^1) est nécessaire pour pouvoir exprimer le modèle d'état dans les nouvelles coordonnées comme suit :

$$\dot{z} = \frac{\partial T}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial T}{\partial x} f(x, u)$$

où, en utilisant $x = T^{-1}(z)$, on obtient

$$\dot{z} = g(z, u)$$

avec :

$$g(z, u) \triangleq \left[\frac{\partial T}{\partial x} f(x, u) \right]_{x=T^{-1}(z)}.$$

De manière similaire, on peut exprimer :

$$f(x, u) \triangleq \left[\frac{\partial T^{-1}}{\partial z} g(z, u) \right]_{z=T(x)}$$

Les propriétés données dans le lemme suivant peuvent être utiles pour démontrer l'existence d'une transformation d'état non linéaire.

Lemma 6.8.

1. Si la matrice jacobienne $[\partial T / \partial x]$ est régulière au point x_0 , alors, en application du théorème de la fonction inverse, il existe un voisinage U de x_0 tel que l'application T restreinte à U est un difféomorphisme sur U .
2. T est un difféomorphisme global si et seulement si :
 - a) $[\partial T / \partial x]$ est régulière pour tout x dans \mathbb{R}^n ;
 - b) $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|T(x)\| = \infty$. \square

6.5. Systèmes mécaniques

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le vecteur d'état d'un système mécanique est constitué de deux parties : les coordonnées de position q et les coordonnées de vitesse $v = \dot{q}$

$$x = \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix}.$$

Dans de nombreuses applications, il est intéressant de considérer différents jeux de coordonnées de position. La transformation d'état procède dès lors en deux étapes. On transforme tout d'abord les coordonnées de position :

$$p = \phi(q)$$

où $\phi : U_1 \rightarrow V_1$ est un difféomorphisme et $\partial\phi/\partial q$ est de plein rang $\forall q \in U_1$.

Le nouveau vecteur d'état est ensuite formé des nouvelles coordonnées de position p et de leurs dérivées $w = \dot{p}$:

$$z = \begin{pmatrix} p \\ w \end{pmatrix}.$$

La transformation d'état est ensuite définie comme suit :

$$z = T(x), \quad \begin{pmatrix} p \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(q) \\ \frac{\partial\phi}{\partial q}v \end{pmatrix}.$$

La transformation d'état inverse est :

$$x = T^{-1}(z), \quad \begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{-1}(p) \\ \left(\frac{\partial\phi}{\partial q}\right)^{-1}_{q=\phi^{-1}p}w \end{pmatrix}.$$

Example 6.9. Coordonnées cartésiennes et polaires

Dans la méthode décrite au chapitre 2 pour l'établissement du modèle d'état des systèmes mécaniques articulés, la position du centre de masse de chaque corps est repérée par ses coordonnées cartésiennes $q = (x, y)$, comme indiqué sur la figure 6.7. Un autre jeu de coordonnées de position fréquemment utilisées sont les coordonnées polaires r et α : r est la distance à l'origine du centre de masse et α l'angle entre l'axe OX_b et le vecteur \vec{OG} .

La transformation qui permet de passer des coordonnées cartésiennes aux co-

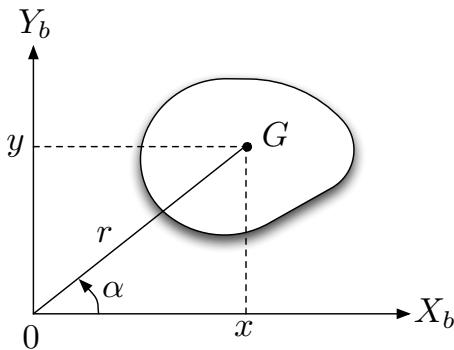


FIGURE 6.7 – Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

ordonnées polaires s'écrit comme suit :

$$q = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix},$$

$$p = \phi(q) : \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \alpha = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} .$$

La transformation inverse $q = \phi^{-1}(p)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha, \\ y &= r \sin \alpha. \end{aligned}$$

On observe que le changement de coordonnées $p = \phi(q)$ n'est pas défini à l'origine, c'est à dire quand $x = 0$ et $y = 0$. On vérifie aussi que

$$\det \left[\frac{\partial \phi^{-1}}{\partial p} \right] = r$$

est nul quand $r = 0$ (c'est à dire aussi à l'origine). Il s'ensuit que la transformation de coordonnées n'est pas globale mais valable seulement sur les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ V_1 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{(r, \alpha) : r = 0\}. \end{aligned}$$

Finalement, la transformation d'état complète entre l'état (q, v) et l'état (p, w)

s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \alpha &= \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \dot{\alpha} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

et la transformation inverse :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha, \\ y &= r \sin \alpha, \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \alpha - r \dot{\alpha} \sin \alpha, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \alpha + r \dot{\alpha} \cos \alpha. \end{aligned}$$

□

Example 6.10. Coordonnées articulaires et coordonnées de tâche en robotique

Pour des robots manipulateurs comportant autant d'actionneurs que de degrés de liberté, avec joints rotoides, les coordonnées articulaires du Chapitre 2 constituent des coordonnées « naturelles » pour la description du système : chaque coordonnée repère la position d'un bras par rapport au précédent. Généralement, avec ces coordonnées, le modèle prend une forme assez simple. Les modèles articulaires conviennent bien pour la conception des systèmes de commande de robots.

Du point de vue de l'utilisateur intéressé par exemple par la planification de trajectoires, ce sont cependant les coordonnées de tâche, c'est à dire les coordonnées de l'effecteur qui sont intéressantes. Considérons par exemple un robot planaire à deux degrés de liberté se déplaçant dans un plan horizontal (voir figure 6.8). Les coordonnées articulaires sont les angles α_1 et α_2 , les coordonnées de tâche sont les coordonnées cartésiennes X et Y . Nous avons donc : $q = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $p = \phi(q) = (X, Y)$. La transformation permettant de passer des coordonnées articulaires aux coordonnées de tâche s'écrit

$$X = l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \quad (6.3)$$

$$Y = l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2). \quad (6.4)$$

On vérifie aisément que cette transformation ne peut pas être injective : à une position (X, Y) de l'effecteur correspondent deux positions distinctes et symétriques du robot. Pour définir correctement une transformation de coordonnées, il faut préciser les domaines U et V de définition de l'application ϕ et de son inverse.

On observe tout d'abord que l'image de l'application ϕ est nécessairement restreinte au disque des positions accessibles par le robot, c'est à dire (si $l_2 > l_1$)

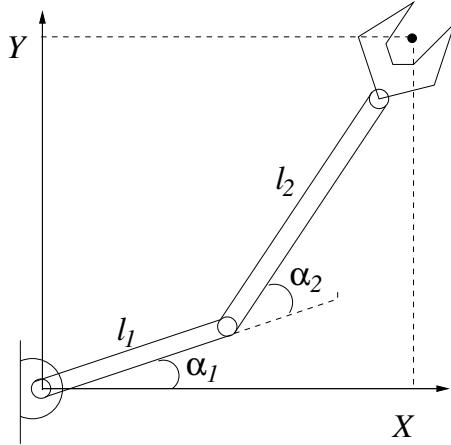


FIGURE 6.8 – Coordonnées articulaires et coordonnées de tâche d'un robot à 2 degrés de liberté.

au disque de rayon $l_1 + l_2$:

$$V_1 \triangleq \{(X, Y) : (l_2 - l_1)^2 < X^2 + Y^2 < (l_1 + l_2)^2\}.$$

D'autre part le domaine de définition de ϕ doit être choisi de manière que l'application soit injective. Un choix possible est le suivant :

$$U_1 \triangleq \{(\alpha_1, \alpha_2) : -\pi < \alpha_1 < \pi \quad 0 < \alpha_2 < \pi\}.$$

Avec ces définitions, on peut vérifier que l'application

$$\phi : U \longrightarrow V$$

définie par les équations (6.3)-(6.4) est un difféomorphisme.

Il reste ensuite à compléter la transformation pour l'étendre aux coordonnées de vitesses. Les vecteurs d'état en coordonnées articulaires et en coordonnées de tâche sont définis comme suit :

$$x^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2), \quad z^T = (X, Y, \dot{X}, \dot{Y}).$$

La transformation d'état $z = T(x)$ s'écrit finalement comme suit :

$$\begin{aligned} X &= l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2), \\ Y &= l_1 \sin \alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \dot{X} &= -l_1 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_1 - l_2 \dot{\alpha}_1 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - l_2 \dot{\alpha}_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2), \\ \dot{Y} &= l_1 \dot{\alpha}_1 \cos \alpha_1 + l_2 \dot{\alpha}_1 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + l_2 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2). \end{aligned}$$

□

6.6. Machines électriques

Au chapitre 3, nous avons obtenu un modèle général des machines électriques tournantes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} L(\theta)\dot{I} &= -\omega K(\theta)I - RI + V, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ J\dot{\omega} &= \frac{1}{2}I^T K(\theta)I - h(\omega) + T_a, \end{aligned}$$

avec

$$K(\theta) \triangleq \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta}.$$

Ces équations conduisent naturellement à établir des modèles d'état dont le vecteur d'état

$$x^T = (I^T, \theta, \omega)$$

est composé des courants I , de la position angulaire θ et de la vitesse angulaire ω . D'autres choix de variables d'état peuvent être utilisés pour faciliter l'étude mathématique des machines électriques. Une transformation courante consiste à remplacer les courants par les flux :

$$\phi = L(\theta)I,$$

c'est à dire à transformer le vecteur d'état $x^T = (I^T, \theta, \omega)$ en le vecteur d'état $z^T = (\phi^T, \theta, \omega)$. Cette transformation est bien un difféomorphisme car la matrice d'inductances $L(\theta)$ est inversible pour tout θ .

Dans les nouvelles variables d'état z , les équations (6.6) se réécrivent :

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= -RL^{-1}(\theta)\phi + V, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ J\dot{\omega} &= \frac{1}{2}\phi^T G(\theta)\phi - h(\omega) + T_a, \end{aligned}$$

avec $G(\theta) \triangleq L^{-1}(\theta)K(\theta)L^{-1}(\theta)$.

6.7. Systèmes triangulaires

Un système à *une seule* entrée (système mono-entrée)

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R} \tag{6.5}$$

est dit *triangulaire* s'il vérifie la définition suivante.

Definition 6.11. Système triangulaire

Un système dynamique mono-entrée est triangulaire si il existe une variable d'état x_i telle que le plus court chemin allant de u à x_i dans le graphe du système est de longueur n . \square

Pour un système triangulaire, il est dès lors toujours possible de renumérotter les variables d'état de telle sorte que le modèle d'état s'écrive comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= g_2(x_1, x_2, x_3), \\ &\vdots \\ \dot{x}_i &= g_i(x_1, x_2, \dots, x_{i+1}), \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= g_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u).\end{aligned}\tag{6.6}$$

On observe que le nombre de variables d'état apparaissant à droite augmente progressivement de 2 à n (d'où le nom de forme triangulaire). En outre, l'entrée u n'apparaît que dans la dernière équation.

Example 6.12. Robot manipulateur à un degré de liberté avec une articulation élastique

Le modèle d'état d'un robot manipulateur à un degré de liberté avec une articulation rotatoire élastique et des couples de frottement négligeables s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ J_1 \dot{x}_2 &= -mgd \sin x_1 - k(x_1 - x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ J_2 \dot{x}_4 &= k(x_1 - x_3) + u.\end{aligned}\tag{6.7}$$

où

- x_1 est la coordonnée angulaire de position du bras,
- x_2 est la vitesse angulaire du bras,
- x_3 est la coordonnée de position angulaire du moteur,
- x_4 est la vitesse angulaire du moteur,
- J_1 et J_2 sont les moments d'inertie du bras et du moteur,
- d est la distance entre l'articulation et le centre de masse,
- k est la constante de rappel élastique,
- u est le couple de commande développé par le moteur.

Le graphe du système est représenté à la figure 6.9 et on peut vérifier que les équations d'état possèdent bien la structure triangulaire voulue. \square

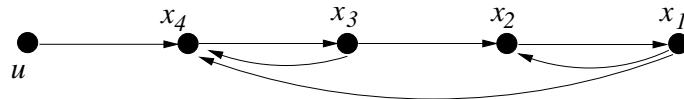


FIGURE 6.9 – Graphe du modèle d'un robot à un bras avec articulation élastique.

6.8. Forme canonique de Brunovski

Definition 6.13.

Un système dynamique mono-entrée (6.5) est sous forme canonique de Brunovski si il existe une transformation d'état $T : U \rightarrow V$ et un intervalle ouvert $W \subset \mathbb{R}$ tels que, dans les nouvelles variables d'état $z = T(x)$, le système prends la forme triangulaire particulière suivante :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \alpha(z_1, z_2, \dots, z_n, u),\end{aligned}$$

où la fonction α est continue et inversible par rapport à u sur W pour tout $z \in V$. \square

On observe que le système est ainsi constitué d'une chaîne d'intégrateurs de la forme

$$\dot{z}_i = z_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1$$

et que toutes les nonlinéarités du système sont concentrées dans la seule fonction nonlinéaire scalaire $\alpha(z_1, z_2, \dots, z_n, u)$. La forme canonique de Brunovski peut aussi être schématisée comme indiqué sur le schéma fonctionnel de la figure 6.10. La forme de Brunovski est intéressante parce qu'elle permet d'effectuer facilement des planifications de trajectoire comme nous le verrons au chapitre 10.

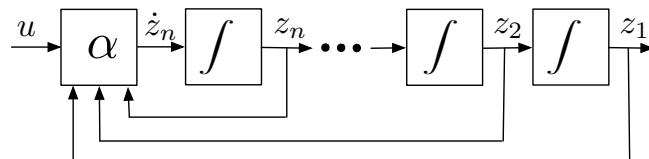
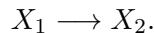


FIGURE 6.10 – Schéma fonctionnel de la forme canonique de Brunovski

Example 6.14. Un réacteur chimique

On considère un réacteur continu parfaitement mélangé et à volume constant dans lequel se déroule une réaction chimique irréversible mettant en oeuvre deux espèces X_1 et X_2 :



Le réacteur est alimenté uniquement avec l'espèce X_1 , à concentration c constante. La variable d'entrée est le débit volumétrique spécifique d'alimentation du réacteur. La cinétique obéit à la loi d'action des masses. Selon les principes de modélisation que nous avons établi au chapitre 5, on obtient le modèle d'état bilinéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kx_1 + u(c - x_1), \\ \dot{x}_2 &= kx_1 - ux_2.\end{aligned}$$

On définit la transformation d'état $z = T(x)$ suivante :

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{x_2}{c - x_1}, \\ z_2 &= \frac{kx_1(c - x_1 - x_2)}{(c - x_1)^2}.\end{aligned}$$

Le domaine U et l'image V de l'application $T : U \longrightarrow V$ sont définis comme suit :

$$\begin{aligned}U &= \{(x_1, x_2) : x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 + x_2 < c\}, \\ V &= \{(z_1, z_2) : 0 < z_1 < 1, z_2 > 0\}.\end{aligned}$$

On peut alors montrer que la transformation d'état $z = T(x)$ ainsi définie est bien un difféomorphisme dont l'inverse est :

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{cz_2}{k(1 - z_1) + z_2}, \\ x_2 &= \frac{ckz_1(1 - z_1)}{k(1 - z_1) + z_2}.\end{aligned}$$

Dans les nouvelles coordonnées, le modèle d'état est sous forme canonique de Brunovski :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\left(z_2 + \frac{(k+1)z_2^2}{k(1-z_1)}\right) + (k(1-z_1) + z_2)u.\end{aligned}$$

La fonction α est inversible par rapport à u sur W . □

Cet exemple montre qu'il n'est pas évident de déterminer a priori si un système dynamique donné peut être mis sous forme de Brunovski ni de déduire la transformation d'état adéquate. Cependant, si le système concerné est déjà donné sous forme triangulaire, une condition suffisante pour le mettre sous forme de Brunovski s'exprime comme suit.

Lemma 6.15.

Un système dynamique triangulaire décrit par le modèle d'état (6.6) peut être mis sous forme canonique de Brunovski au voisinage de (x_0, u_0) si les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_i}{\partial x_{i+1}} &\neq 0 \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \frac{\partial g_n}{\partial u} &\neq 0,\end{aligned}$$

sont satisfaites en (x_0, u_0) . □

Example 6.16. Robot manipulateur à un degré de liberté avec articulation élastique (suite)

On considère à nouveau le modèle (6.7) de l'exemple 6.12. On vérifie aisément que les conditions du Lemme 6.15 sont satisfaites pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ et conduisent naturellement à la transformation d'état :

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\ z_2 &= x_2 \\ z_3 &= -J_1^{-1}[mgd \sin x_1 + k(x_1 - x_3)] \\ z_4 &= -J_2^{-1}[mgdx_2 \cos x_1 + k(x_2 - x_4)].\end{aligned}$$

La transformation inverse s'écrit :

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1 \\ x_2 &= z_2 \\ x_3 &= (mgdk^{-1} \sin z_1 + z_1 + J_1k^{-1}z_3) \\ x_4 &= (mgdk^{-1}z_2 \cos z_1 + z_2 + J_2k^{-1}z_4)\end{aligned}$$

On observe qu'il s'agit d'un difféomorphisme global de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^4 . Avec les nouvelles variables d'état le modèle s'écrit sous forme de Brunovski :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= J_2^{-1}[mgd(z_2^2 \sin z_1 - z_3 \cos z_1) - kz_3] \\ &\quad + kJ_2^{-2}[mgd \sin z_1 + J_1z_3 - u]\end{aligned}$$

On observe aussi que la fonction α est inconditionnellement inversible sur \mathbb{R} par rapport à u . La forme de Brunovski est donc ici globalement valide. □

Pour des systèmes qui ne sont pas donnés sous forme triangulaire mais qui sont affines en l'entrée, le lemme suivant exprime des conditions utiles pour trouver la transformation d'état.

Lemma 6.17. Un système affine en l'entrée

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}$$

peut être mis sous forme canonique de Brunovski dans un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ si il existe une transformation d'état $z = T(x)$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} T_{i+1}(x) &= \frac{\partial T_i}{\partial x} f(x) \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{\partial T_i}{\partial x} g(x) &= 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ \frac{\partial T_n}{\partial x} g(x) &\neq 0, \end{aligned}$$

pout tout $x \in U$. □

Example 6.18. Un réacteur chimique (suite)

Nous montrons comment utiliser le lemme précédent pour retrouver la transformation d'état qui a été postulée sans justification dans l'exemple 6.14. Le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c - x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} u \triangleq f(x) + g(x)u$$

On considère tout d'abord l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} g(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_1}{\partial x_1} (c - x_1) = \frac{\partial T_1}{\partial x_2} x_2$$

dont une solution est :

$$T_1(x) = \frac{x_2}{c - x_1}$$

On calcule ensuite :

$$T_2(x) = \frac{\partial T_1}{\partial x} f(x) \Rightarrow T_2(x) = \frac{kx_1(c - x_1 - x_2)}{(c - x_1)^2}$$

On détermine le domaine U et l'image V de l'application $T : U \rightarrow V$ ainsi définie. On vérifie enfin que la condition $(\partial T_2 / \partial x)g(x) \neq 0$ est satisfaite sur U :

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} g(x) = \frac{c(c - x_1 - x_2)}{(c - x_1)^2} \neq 0$$
□

6.9. Exercices

Exercise 6.1. Un four de verrerie

Au Chapitre 1, Exemple 1.1 et Exercice 1.1, nous avons proposé trois jeux différents de variables d'état pour un modèle de four de verrerie. Déterminer les trois transformations d'état correspondantes et indiquer leurs domaines de définition.

□

Exercise 6.2. Un relais électromagnétique

Soit le relais électromagnétique dont le modèle d'état à été établi au Chapitre 3, Exemple 3.2.

1. On choisit les nouvelles variables d'état suivantes : $y_1 = z$, $y_2 = \dot{z}$, $y_3 = \phi(I, z)$. Montrer qu'il s'agit d'une transformation d'état valide. Etablir le modèle d'état dans ces nouvelles variables.
2. Montrer que le système peut être mis sous forme canonique de Brunovski. Déterminer la transformation d'état et donner une interprétation physique des nouvelles variables d'état.

□

Exercise 6.3. Une cage d'ascenseur

Sur la figure ci-contre, on a représenté une cage d'ascenseur suspendue à un câble élastique de masse négligeable.

Notations :

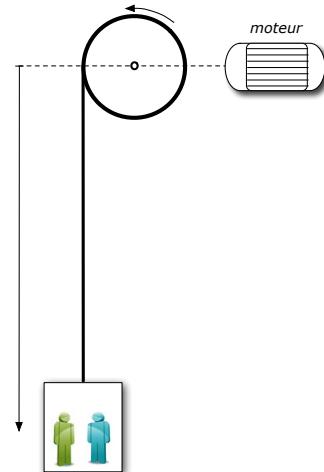
- y = longueur du câble
- ω = vitesse angulaire de la poulie
- R = rayon de la poulie
- m = masse de la cage

La tension dans le câble est modélisée par la loi de Hooke :

$$T = \frac{k(y - z)}{z}$$

où z est une variable d'état auxiliaire dont la dérivée est la vitesse périphérique de la poulie : $\dot{z} = R\omega$.

1. Etablir un modèle d'état avec 4 variables d'état : y, \dot{y}, z, ω . Le frottement est négligé. La variable d'entrée est le couple de rotation u appliqué à la poulie.



2. Montrer que le système peut être mis sous forme de Brunovski. Expliciter la transformation d'état. \square

Exercice 6.4. Des coccinelles et des pucerons

Montrer qu'il existe une transformation d'état telle que le système (1.6) du chapitre 1 modélisant l'interaction entre les populations de coccinelles et de pucerons peut être mis sous la forme d'un système à compartiments. Dessiner le graphe associé. Déterminer les flux q_{ij} , la matrice L et la matrice $A(x, u)$. \square

Exercice 6.5. Un réacteur biochimique

Soit un réacteur continu parfaitement mélangé et à volume constant dans lequel se déroule une réaction chimique autocatalytique irréversible mettant en œuvre deux espèces A et B :

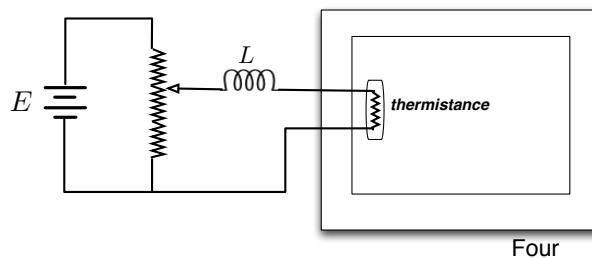


Le réacteur est alimenté uniquement avec l'espèce A , à concentration constante. La variable d'entrée est le débit volumétrique d'alimentation du réacteur. Les cinétiques obéissent à la loi d'action des masses.

1. Etablir les équations d'état du système.
2. Montrer que le système est conservatif.
3. Déterminer une transformation d'état qui mette le système sous forme canonique de Brunowski.
4. Déterminer la transformation d'état qui met le système sous la forme d'un système à compartiments.
5. Mêmes questions si la réaction est réversible. \square

Exercice 6.6. Un four électrique

Un four électrique est chauffé par une thermistance comme indiqué sur la figure ci-dessous.



1. Etablir un modèle d'état du système sous les hypothèses de modélisation suivantes :

- a) La thermistance est une résistance dont la valeur varie avec la température suivant la relation de Reinhart-Hart :

$$\frac{1}{T} = a + b \ln R + c(\ln R)^3$$

où a, b, c sont des constantes caractéristiques positives fournies par le constructeur.

- b) Comme représenté sur la figure, la thermistance est alimentée par une batterie de tension constante E via une inductance (linéaire) constante et une résistance (linéaire) réglable qui est l'entrée du système.
- c) Le four est chauffé par la thermistance. La perte de chaleur à travers les parois du four est proportionnelle à la différence entre la température à l'intérieur du four et la température extérieure qui est supposée constante.

2. Montrer que le système peut être mis sous forme de Brunovski. Expliciter la transformation d'état. \square

Exercice 6.7. Un système à deux compartiments

Soit le système linéaire à deux compartiments dont le graphe est indiqué à la figure 6.11. Déterminer la transformation d'état qui diagonalise le système. Expliquer les constantes de temps. \square

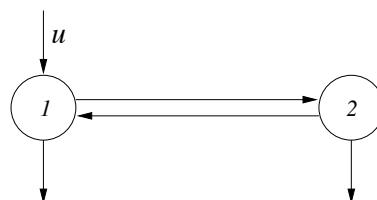


FIGURE 6.11 – Graphe d'un système à deux compartiments

Chapitre 7

Equilibres et invariants

Dans les chapitres 7, 8 et 9, nous allons étudier le comportement des systèmes dynamiques $\dot{x} = f(x, u)$ lorsque les variables d'entrée sont constantes. Dans le présent chapitre nous examinons tout d'abord les conditions d'existence d'états d'équilibre et de sous ensembles invariants dans l'espace d'état.

7.1. Equilibres : définition et exemples

Definition 7.1. *Équilibre*

Le couple (\bar{x}, \bar{u}) est un *équilibre* du système $\dot{x} = f(x, u)$ si

$$f(\bar{x}, \bar{u}) = 0.$$

□

Cette définition implique que si les signaux d'entrée sont constants à partir de l'instant t_0 :

$$u(t) = \bar{u} \quad \forall t \geq t_0$$

et si l'état du système est égal à \bar{x} à l'instant t_0 :

$$x(t_0) = \bar{x}$$

alors l'état du système reste constant et égal à \bar{x} à tous les instants ultérieurs :

$$x(t) = \bar{x} \quad \forall t \geq t_0.$$

Dans certains ouvrages, en particulier ceux relatifs à l'ingénierie des procédés, un équilibre s'appelle aussi un *régime permanent*. De même, l'état \bar{x} d'un équilibre (\bar{x}, \bar{u}) est parfois appelé point d'équilibre ou point *fixe* ou encore point *stationnaire*.

Definition 7.2. Equilibre isolé

Le couple (\bar{x}, \bar{u}) est un équilibre *isolé* si, pour \bar{u} fixé, il existe un voisinage de \bar{x} dans \mathbb{R}^n ne contenant aucun autre vecteur \tilde{x} tel que $f(\tilde{x}, \bar{u}) = 0$. \square

Les exemples qui suivent illustrent la grande diversité des configurations d'équilibre possibles à partir de modèles simples de systèmes caractérisés par des équations de bilan.

Example 7.3. Réservoir à écoulement libre

On considère un réservoir de section constante alimenté par une pompe dont le débit volumétrique u est la variable d'entrée tandis que l'écoulement est libre (Fig. 7.1).

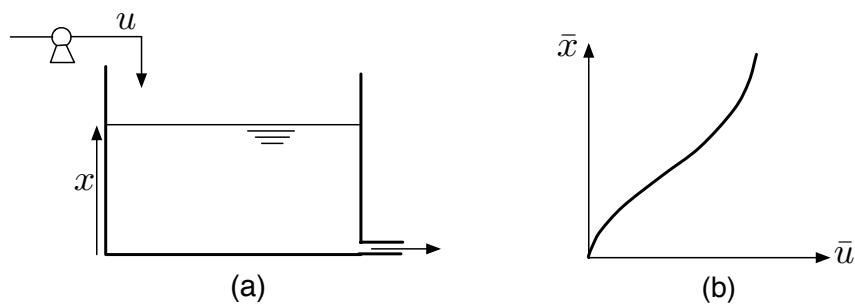


FIGURE 7.1 – (a) Réservoir à écoulement libre (b) Diagramme d'équilibre

Le modèle d'état de ce système a été établi au chapitre 4 :

$$\dot{x} = -\frac{kx\sqrt{x}}{S\beta + x} + u,$$

où x représente le volume du liquide contenu dans le réservoir. Les équilibres du système vérifient la relation $k\bar{x}\sqrt{\bar{x}} = \bar{u}(S\beta + \bar{x})$ dont le graphe dans \mathbb{R}^2 porte le nom de *diagramme d'équilibre* (Fig. 7.1). On observe sur ce graphe qu'il y a un état d'équilibre \bar{x} distinct pour chaque valeur distincte de $\bar{u} \geq 0$ et que tous les équilibres sont isolés. \square

Example 7.4. Réservoir à écoulement forcé

Considérons maintenant le même réservoir que précédemment mais en supposant que l'écoulement est forcé par une pompe dont le débit volumétrique F_0 est constant (Fig. 7.2). Le modèle d'état devient alors :

$$\dot{x} = -F_0 + u.$$

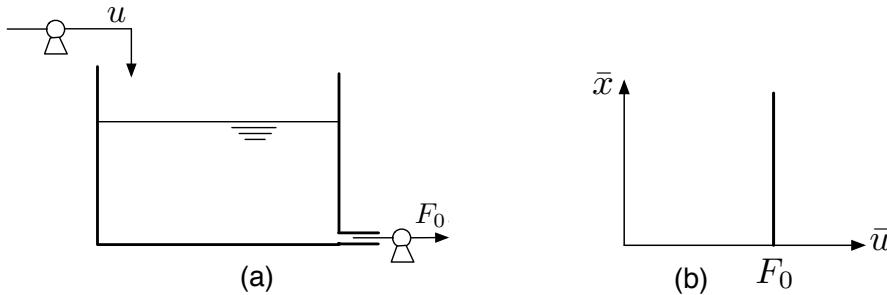


FIGURE 7.2 – (a) Réservoir à écoulement forcé. (b) Diagramme d'équilibres.

Comme dans l'exemple précédent, le système est à l'équilibre lorsque le débit d'entrée compense exactement le débit de sortie :

$$\bar{u} = F_0.$$

Cette fois, il n'y a qu'une seule valeur possible de l'entrée u qui donne lieu à un équilibre. Par contre, l'état d'équilibre \bar{x} peut prendre n'importe quelle valeur positive. Le diagramme d'équilibre est illustré à la figure 7.2. On observe que les équilibres ne sont pas isolés puisque \bar{x} est indéterminé. \square

Example 7.5. Cuve de mélange à volume constant

Considérons une cuve de mélange de volume V constant et parfaitement mélangée (Fig.7.3(a)). Le débit d'alimentation transporte une substance en solution

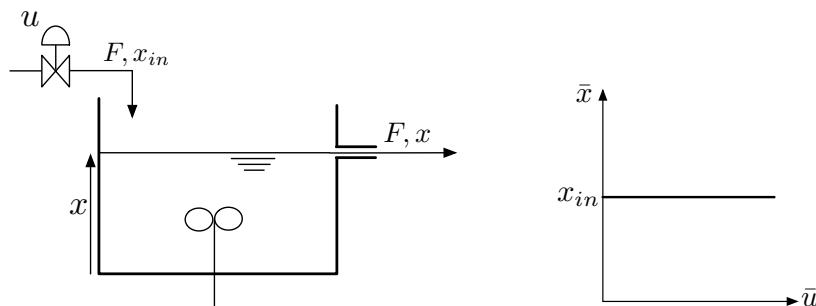


FIGURE 7.3 – (a) Cuve de mélange à volume constant.
(b) Diagramme d'équilibres.

(par exemple un colorant) de concentration x_{in} . Le débit d'alimentation F est contrôlé par une vanne de caractéristique :

$$F = ku + b \quad k > 0, \quad b > 0,$$

où u désigne l'ouverture de la vanne.

L'état du système est la concentration x en colorant dans la cuve et le modèle d'état s'écrit :

$$\dot{x} = (x_{in} - x) \frac{ku + b}{V}.$$

Le système est à l'équilibre lorsque le débit massique de colorant à l'entrée compense exactement le débit massique à la sortie :

$$\frac{k\bar{u} + b}{V} x_{in} = \frac{k\bar{u} + b}{V} \bar{x},$$

ce qui implique $\bar{x} = x_{in}$. Le diagramme d'équilibre illustré à la figure 7.3(b) montre que l'état d'équilibre est fixé et isolé mais que l'entrée constante correspondant à cet état d'équilibre est indéterminée. \square

Example 7.6. Cuve de mélange à écoulement forcé

Jusqu'à présent, nous avons considéré des exemples où le vecteur d'état est de dimension 1. Dans les systèmes de dimension supérieure, les diverses configurations décrites plus haut peuvent coexister, comme nous l'illustrons maintenant en prenant comme exemple une cuve de mélange à écoulement forcé (Fig. 7.4). Le modèle

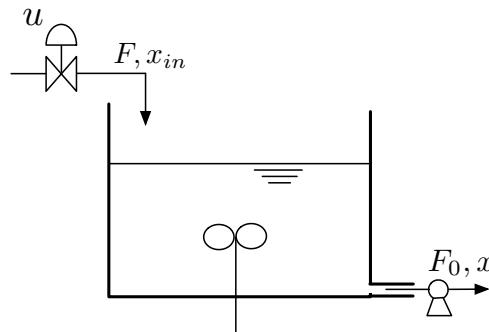


FIGURE 7.4 – Cuve de mélange à écoulement forcé

d'état de ce système, en notant x_1 le volume de la cuve et x_2 la concentration en colorant dans celle-ci, s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -F_0 + ku + b, \\ \dot{x}_2 &= (x_{in} - x_2) \frac{ku + b}{x_1}.\end{aligned}$$

Dans ce cas ci, le diagramme d'équilibre se représente en dimension 3 (Fig. 7.5) et on constate qu'il y a une seule valeur de l'entrée qui donne lieu à un équilibre,

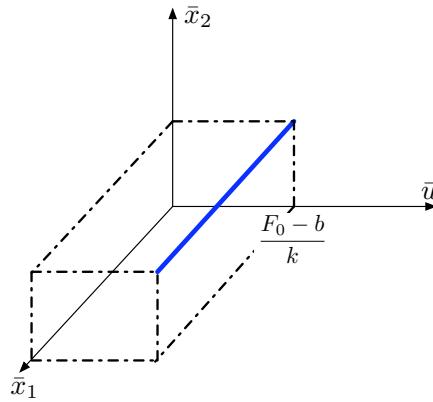


FIGURE 7.5 – Diagramme d'équilibre pour la cuve de mélange à écoulement forcé

$\bar{u} = (F_0 - b)/k$, et que pour cette valeur \bar{u} , le volume d'équilibre \bar{x}_1 est indéterminé alors que la concentration à l'équilibre vaut $\bar{x}_2 = x_{in}$. \square

Les exemples de dimension 1 ou 2 considérés jusqu'à présent ont illustré des situations où

- soit le système possède un équilibre isolé pour chaque valeur de l'entrée \bar{u} ,
- soit le système possède une infinité d'équilibres non isolés correspondant à une valeur précise de \bar{u} .

Pour les systèmes non-linéaires, d'autres configurations sont possibles. En particulier, on peut observer plusieurs équilibres isolés correspondant à une même valeur de \bar{u} comme cela est illustré dans l'exemple suivant.

Example 7.7. Réacteur chimique

Considérons un réacteur chimique continu parfaitement mélangé dans lequel se produit une réaction exothermique irréversible $A \rightarrow B$. Le modèle d'état s'écrit comme suit (voir Chapitres 1 et 5) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_A &= -kx_A e^{-\frac{\alpha}{T}} + D(x_A^{in} - x_A), \\ \dot{x}_B &= kx_A e^{-\frac{\alpha}{T}} - Dx_B, \\ \dot{T} &= h k x_A e^{-\frac{\alpha}{T}} - qT + u,\end{aligned}$$

où x_A et x_A^{in} sont les concentrations en réactif A dans le réacteur et dans l'alimentation, x_B est la concentration en produit B , D est le débit volumétrique supposé constant d'alimentation et de sous-tirage, T est la température et u est l'apport calorifique par unité de temps.

Les équilibres de ce système sont caractérisés par les équations

$$\begin{aligned}\bar{x}_A &= \frac{Dx_A^{in}}{ke^{-\alpha/\bar{T}} + D}, \\ \bar{x}_B &= \frac{k\bar{x}_A e^{-\alpha/\bar{T}}}{D}, \\ \bar{T} &= \frac{1}{q} \left(\frac{Dx_A^{in} h k e^{-\alpha/\bar{T}}}{ke^{-\alpha/\bar{T}} + D} + \bar{u} \right).\end{aligned}$$

La troisième équation permet de déterminer \bar{T} en fonction de \bar{u} . Les deux premières permettent alors de déduire de \bar{T} des valeurs d'équilibre pour \bar{x}_A et \bar{x}_B . Le

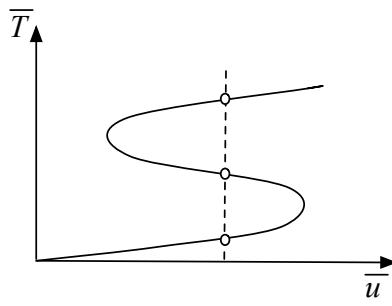


FIGURE 7.6 – Diagramme d'équilibre pour un réacteur chimique simple

diagramme d'équilibre représentant \bar{T} en fonction de \bar{u} est illustré à la figure 7.6. Suivant les valeurs de \bar{u} , on constate donc qu'il existe un, deux ou trois équilibres isolés. \square

7.2. Équilibres des systèmes linéaires

Soit le système linéaire

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

pour lequel l'équation définissant les équilibres devient

$$A\bar{x} + B\bar{u} = 0.$$

Les équilibres d'un système linéaire sont complètement caractérisés par le théorème suivant.

Theorem 7.8.

- Si la matrice A est régulière, alors pour tout \bar{u} , le couple $(-A^{-1}B\bar{u}, \bar{u})$ est un équilibre isolé.
- Si la matrice A est singulière, le système (7.1) a une infinité d'équilibres (non isolés) pour autant que $B\bar{u} \in \text{Im } A$. Ces équilibres sont la variété affine solution du système $A\bar{x} = -B\bar{u}$. Par contre, pour tout \bar{u} tel que $B\bar{u} \notin \text{Im } A$, le système (7.1) ne possède pas d'équilibre. \square

Pour les systèmes dynamiques linéaires, on ne peut donc pas avoir plusieurs équilibres isolés correspondant à la même valeur de l'entrée \bar{u} . Remarquons enfin que le couple $(\bar{x}, \bar{u}) = (0, 0)$ est toujours un équilibre pour un système dynamique linéaire de la forme (7.1).

Example 7.9. Modèles linéaires de machines DC

Plusieurs modèles de machines à courant continu (moteurs et génératrices) ont été présentés à la section 3.6. Sous les hypothèses générales de frottement visqueux linéaire et de non-saturation des flux, certains de ces modèles sont linéaires. Nous examinons ci-dessous leur configuration d'équilibre.

Générateur DC commandée par le stator

On considère le modèle d'état d'une génératrice à courant continu tournant à vitesse ω constante. En notant $x_1 = I_s$, le courant statorique, $x_2 = I_r$, le courant rotorique et $u = v_s$ la tension aux bornes du circuit statorique, le modèle d'état est linéaire et s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_s}{L_s} & 0 \\ K_e\omega & -\frac{R_r + R_L}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_s} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

La matrice A de ce système linéaire est inversible et la génératrice possède donc un état d'équilibre isolé pour chaque valeur de la tension d'entrée \bar{u} :

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{L_s}{R_s}\bar{u} \\ \bar{x}_2 &= \frac{L_r}{R_r + R_L} \frac{L_s}{R_s} K_e \omega \bar{u} \end{aligned}$$

Moteur DC commandé par le rotor

Avec comme variables d'état pour ce système $x_1 = \theta$, la position angulaire du rotor, $x_2 = \dot{\theta} = \omega$, la vitesse de rotation et $x_3 = I_r$, le courant rotorique, on

obtient le modèle suivant :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{B}{J} & \frac{K_m I_s}{J} \\ 0 & -\frac{K_e I_s}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

où u_1 est le couple résistant et u_2 la tension de commande de l'induit. On observe que :

- la matrice d'état A du système est singulière,
- $B\bar{u} = (0 \ \bar{u}_2/J \ \bar{u}_1/L_r)^T \notin \text{Im } A$ sauf si $\bar{u}_1/\bar{u}_2 = -R_r/K_m I_s$ ou si $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 = 0$.

Le premier cas correspond à une tension de commande rotorique qui crée un couple moteur compensant exactement le couple résistant. La vitesse de rotation est alors nulle et la position angulaire du rotor est indéterminée. La valeur d'équilibre du courant rotorique est donnée par $\bar{x}_3 = \bar{I}_r = \bar{u}_2/K_m I_s$. Dans le deuxième cas, les équilibres sont de la forme $\bar{x}_1 = \theta, \bar{x}_2 = 0, \bar{x}_3 = 0$, c.à.d. que le moteur est à l'arrêt avec le rotor dans une position angulaire quelconque.

On peut examiner aussi les équilibres du sous-système dont les états sont la vitesse ω et le courant I_r :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_m I_s}{J} \\ -\frac{K_e I_s}{L_r} & -\frac{R_r}{L_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{J} \\ \frac{1}{L_r} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice d'état de ce système est inversible (toutes les constantes sont positives et le déterminant ne s'annule donc pas) et à chaque valeur du vecteur d'entrée \bar{u} correspondra une valeur d'équilibre du vecteur d'état $(\bar{x}_1 \ \bar{x}_2)^T$. Cette situation d'équilibre, qui n'est en rien contradictoire avec la précédente, correspond au cas d'un moteur DC qui entraîne une charge en tournant à vitesse constante. \square

7.3. Invariants

La notion d'invariant que nous allons définir dans cette section est une généralisation de la notion d'équilibre.

Definition 7.10. *Invariant*

Le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est un invariant du système dynamique $\dot{x} = f(x, u)$ si :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t_0) \in \mathcal{X} \\ u(t) \in U \quad \forall t \geq t_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(t) \text{ existe} \\ x(t) \in \mathcal{X} \end{array} \right\} \forall t \geq t_0 \quad \square$$

Cette définition signifie donc que si l'état du système se trouve dans \mathcal{X} à un instant initial, il y restera à tous les instants ultérieurs tant que le signal d'entrée $u(t)$ sera lui-même maintenu dans U .

Nous avons déjà rencontré plusieurs exemples d'invariants dans les chapitres précédents. L'exemple le plus simple est l'ensemble des équilibres d'un système correspondant à une entrée \bar{u} constante. Dans ce cas, le sous-ensemble $U = \{\bar{u}\}$ est réduit à un singleton tandis que \mathcal{X} contient le ou les états d'équilibres \bar{x} correspondants.

Un autre exemple typique est l'*orthant positif* ($\mathcal{X} = \mathbb{R}_+^n \times (U \subset \mathbb{R}^m)$) qui est, par définition, un invariant pour les systèmes positifs (voir Définition 4.3 et Théorème 4.4.).

Il y a diverses manières de caractériser les invariants d'un système dynamique selon la forme particulière que prend le sous-ensemble \mathcal{X} . Nous allons présenter deux caractérisations remarquables : dans la première \mathcal{X} est un ouvert de \mathbb{R}^n , dans la seconde \mathcal{X} est une hypersurface dans \mathbb{R}^n .

- **\mathcal{X} est un ouvert dans \mathbb{R}^n**

Soit \mathcal{X} un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n dont la frontière $\partial\mathcal{X}$ est suffisamment régulière. Si en tout point y de la frontière $\partial\mathcal{X}$, le vecteur $f(y, v)$ pointe vers l'intérieur de \mathcal{X} pour tout $v \in U$, alors le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U$ est un invariant du système $\dot{x} = f(x, u)$.

Cette caractérisation d'un invariant sera illustrée au chapitre 8 (section 8.4).

- **\mathcal{X} est une hypersurface de niveau dans \mathbb{R}^n**

On appelle *intégrale première* une fonction $z = h(x)$ de classe C^2 telle que :

$$\frac{\partial h}{\partial x} f(x, u) = 0 \quad \forall u \in U. \quad (7.1)$$

On définit le sous-ensemble \mathcal{X} comme suit :

$$\mathcal{X} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = c\}$$

avec c constante réelle quelconque. Cet ensemble \mathcal{X} est une hypersurface dans \mathbb{R}^n . Comme la condition (7.1) implique que la fonction $z = h(x)$ est constante le long des trajectoires, il est évident que le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U$ est un invariant du système $\dot{x} = f(x, u)$. Les *invariants réactionnels* en constituent une illustration typique.

Example 7.11. Les invariants réactionnels

Ainsi que nous l'avons vu au chapitre 5, le modèle d'état d'un réacteur continu parfaitement mélangé s'écrit comme suit :

$$\dot{x} = Cr(x) + u(x^{in} - x) \quad (7.2)$$

où x est la composition du milieu réactionnel, u le débit d'alimentation, x^{in} la composition (supposée constante) de l'alimentation, C est la matrice stoechiométrique et $r(x)$ est le vecteur des cinétiques de réaction.

Le débit u est positif et borné par la capacité maximale de la pompe d'alimentation u_{\max} , de sorte que nous définissons U comme l'intervalle fermé :

$$U = [0, u_{\max}]$$

D'autre part, le sous-ensemble \mathcal{X} est défini comme suit :

$$\mathcal{X} = \{x : x \in \mathbb{R}_+^n, Lx = Lx^{in}\}$$

où L est une matrice $(n - p) \times n$ telle que $LC = 0$. En d'autres termes, les lignes de L forment une base du noyau de la transposée de la matrice stoechiométrique C .

Le sous-ensemble $\mathcal{X} \times U$ ainsi défini constitue un invariant du système (7.2). Pour le vérifier, nous considérons la transformation linéaire partielle d'état :

$$z = Lx$$

dont nous calculons l'évolution le long des trajectoires du système :

$$\dot{z} = LCr(x) + u(Lx^{in} - Lx) = u(Lx^{in} - Lx) \text{ car } LC = 0$$

Selon la définition de \mathcal{X} , on observe immédiatement que, si $Lx(t_0) = Lx^{in}$, alors $\dot{z} = 0$ le long des trajectoires du système et donc $Lx(t) = Lx^{in} \quad \forall t \geq t_0$, et ceci indépendamment du signal d'entrée $u(t)$.

D'autre part, le système (7.2) est un système positif et donc $x(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t \geq t_0$ si $x(t_0) \in \mathbb{R}_+^n$ et si $u(t) \in U \quad \forall t \geq t_0$.

Les invariants définis de cette manière portent le nom d'invariants réactionnels ou encore d'invariants chimiques dans la littérature. \square

7.4. Exercices

Exercice 7.1. Un relais électromagnétique

Déterminer les équilibres du modèle d'état d'un relais électromagnétique donné au chapitre 3, exemple 3.2 (voir aussi l'exercice 6.2). \square

Exercice 7.2. Génératrice à courant continu

On considère le modèle d'une génératrice à courant continu (voir chapitre 3, section 3.6) débitant sur une charge résistive avec un frottement visqueux linéaire.

1. Calculer les équilibres en fonction des entrées \bar{u}_1 et \bar{u}_2

2. Déterminer les points de fonctionnement optimaux qui maximisent le courant débité par la génératrice. \square

Exercice 7.3. Une boucle à asservissement de phase

Une boucle à asservissement de phase (phase-locked loop) utilisée dans les réseaux de communication est décrite par l'équation

$$\ddot{y} + (a + b \cos y)\dot{y} + u \sin y = 0$$

avec $a > b > 0$ et $u(t) > 0 \forall t$.

1. Mettre le système sous forme d'un modèle d'état.
2. Déterminer les équilibres.

Exercice 7.4. Un bateau

Déterminer les équilibres du modèle d'état du bateau de l'exercice 2.7. Quel est le sens physique de ces équilibres ? \square

Exercice 7.5. Un broyeur industriel

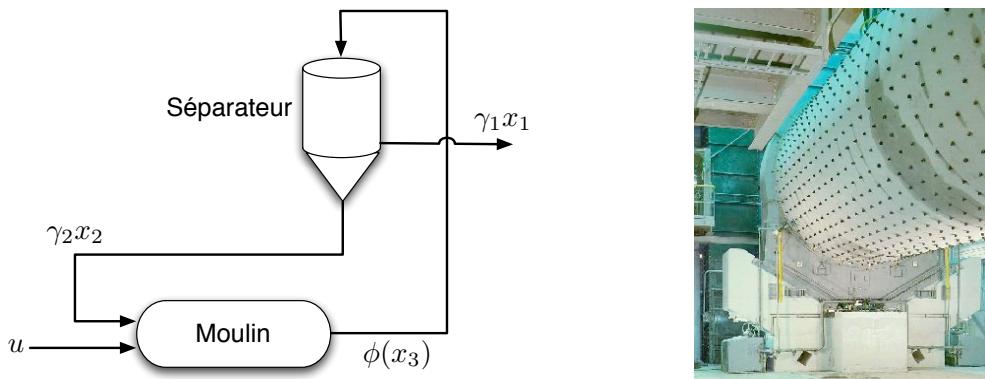


FIGURE 7.7 – Circuit de broyage - Photo d'un broyeur industriel

Le fonctionnement d'un circuit de broyage industriel (fig. 7.7) est décrit par le modèle d'état :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\gamma_1 x_1 + (1 - \alpha)\phi(x_3), \\ \dot{x}_2 &= -\gamma_2 x_2 + \alpha\phi(x_3), \\ \dot{x}_3 &= \gamma_2 x_2 - \phi(x_3) + u.\end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

- x_1 = quantité de produit fini dans le séparateur ;
- x_2 = quantité de matière recyclée dans le séparateur ;
- x_3 = quantité de matière dans le broyeur ;
- u = débit d'alimentation du broyeur.

Le paramètre α est la constante caractéristique du séparateur. ($0 < \alpha < 1$). La fonction de broyage $\phi(x_3)$ est de la forme suivante :

$$\phi(x_3) = k_1 x_3 e^{-k_2 x_3}$$

où k_1 et k_2 sont des constantes positives.

1. Montrer qu'il s'agit d'un système à compartiments et donner le graphe du système.
2. Déterminer les équilibres du système.
3. L'ensemble décrit par les inégalités suivantes caractérise une situation de bourrage de l'installation. Montrer qu'il s'agit d'un invariant du système.

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0, & x_2 &\geq 0, & x_3 &\geq 0, \\ (1 - \alpha)\phi(x_3) &\leq \gamma_1 x_1 < \bar{u}, \\ \alpha\phi(x_3) &\leq \gamma_2 x_2, \\ \frac{\partial\phi(x_3)}{\partial x_3} &< 0. \end{aligned} \quad \square$$

Exercice 7.6. Un réacteur biochimique

On considère le modèle d'état d'un réacteur biochimique de l'exercice 6.2.

1. Déterminer les équilibres du système et esquisser les diagrammes d'équilibre.
2. Déterminer les invariants réactionnels du système.
3. Mêmes questions si la réaction est réversible. \square

Exercice 7.7. Dynamique d'une infection virale

La dynamique d'un infection virale avec actions lytique et non-lytique d'immunisation est décrite par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda - dx_1 - \frac{\beta x_1 x_2}{1 + qx_3}, \\ \dot{x}_2 &= \frac{\beta x_1 x_2}{1 + qx_3} - ax_2 - px_2 x_3, \\ \dot{x}_3 &= cx_2 - bx_3. \end{aligned}$$

Dans ces équations, x_1 , x_2 et x_3 sont respectivement les quantités de cellules saines, infectées et immunes. Les cellules infectées produisent les particules virales. λ est le taux de production des cellules saines et d leur taux de mortalité. Les composants lytiques de l'activité anti-virale tuent les cellules infectées tandis que les composants non-lytique inhibent la réplication des particules virales. Les cellules infectées sont tuées à la vitesse px_3 où p représente l'intensité de l'activité anti-virale lytique. La production des cellules infectées est représentée par le terme

$$\frac{\beta x_1 x_2}{1 + qx_3}$$

où qx_3 représente l'intensité d'inhibition de la réplication par l'activité antivirale non-lytique. Le taux de mortalité des cellules infectées est a et le taux de mortalité des cellules immunes est b . Enfin cx_2 est le taux de production des cellules immunes.

1. Montrer que le modèle d'état est un système réactionnel.
2. Montrer que le modèle d'état est équivalent à un système à compartiments.
3. Déterminer les équilibres du système dans l'orthant positif.

Exercice 7.8. Système mécanique

On considère le modèle d'un système mécanique à un degré de liberté :

$$\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + r \sin \theta = 0$$

1. Ecrire le modèle d'état du système ($x_1 = \theta$).
2. Déterminer les équilibres.
3. Montrer que, sous la condition $c^2 \geq 4r$, existe un invariant borné (dont l'intérieur est non vide) dans l'orthant $\{x_1 \geq 0, x_2 \leq 0\}$. \square

Chapitre 8

Systèmes plans

Dans ce chapitre, nous étudions en détail le comportement des trajectoires des systèmes dynamiques de dimension 2 (appelés aussi systèmes plans) lorsque l'entrée $u(t)$ est constante : $u(t) = \bar{u}$. Ces systèmes sont décrits par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \bar{u}), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \bar{u}).\end{aligned}$$

Une importante motivation de cette restriction aux systèmes plans est d'illustrer facilement les résultats obtenus en représentant les orbites dans le *plan de phase*, c.à.d. le plan des variables d'état x_1 et x_2 . En outre, les systèmes plans permettent d'illustrer la plupart des comportements caractéristiques qui diffèrent les systèmes non linéaires des systèmes linéaires.

Nous étudierons successivement les trajectoires des systèmes linéaires, puis le comportement des trajectoires des systèmes non linéaires au voisinage des points d'équilibre. Ensuite, nous nous intéresserons aux trajectoires périodiques et aux cycles limites, pour conclure par un aperçu de la théorie des bifurcations.

8.1. Systèmes linéaires plans

Considérons les systèmes linéaires plans lorsque l'entrée $u(t)$ est constante : $u(t) = \bar{u}$. Ces systèmes sont représentés par l'équation

$$\dot{x} = Ax + B\bar{u},$$

où A est une matrice 2×2 . Nous supposons qu'il existe au moins un état d'équilibre \bar{x} correspondant à \bar{u} .

Par une transformation d'état appropriée, $z = M^{-1}(x - \bar{x})$, on se ramène au système

$$\dot{z} = A'z$$

où

$$A' = M^{-1}AM.$$

Les valeurs propres de la matrice A' sont celles de la matrice A et elle possède l'une des trois formes suivantes :

a.

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Cette forme correspond au cas où la matrice A a deux valeurs propres réelles distinctes ou une valeur propre réelle double de multiplicité géométrique 2.

b.

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Cette forme correspond au cas où la matrice A a une valeur propre réelle double de multiplicité géométrique égale à un. C'est la "forme de Jordan" associée à A .

c.

$$A' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \beta > 0$$

Cette forme correspond au cas où la matrice A a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha \pm \beta i$.

Dans ces nouvelles coordonnées, les trajectoires se calculent facilement et sont décrites par les équations suivantes :

a.

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{\lambda_1 t}, \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{\lambda_2 t}. \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{\lambda t} + tz_2(0)e^{\lambda t}, \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\alpha t}(z_1(0)\cos \beta t + z_2(0)\sin \beta t), \\ z_2(t) &= e^{\alpha t}(z_2(0)\cos \beta t - z_1(0)\sin \beta t). \end{aligned}$$

Les tableaux 8.1 à 8.3 illustrent les orbites en fonction de l'une de ces trois formes et en fonction du signe des valeurs propres. Ces orbites sont représentées dans le plan (z_1, z_2) et dans le plan (x_1, x_2) , centré au point d'équilibre (\bar{x}_1, \bar{x}_2) . Dans ce deuxième cas, les directions privilégiées dans les figures correspondent aux vecteurs propres de la matrice A .

Remarks 8.1.

1. Dans les deux premiers cas repris dans le tableau 8.1, lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, les trajectoires sont rectilignes et peuvent donc être représentées par un faisceau de droites issu de l'origine.
2. Dans le cas où l'une des deux valeurs propres est nulle, l'équilibre n'est pas isolé. Le vecteur propre correspondant à la valeur propre nulle définit une droite de points d'équilibre et toutes les trajectoires sont rectilignes et convergent vers ou sont issues d'un point de cette droite d'équilibres.

Definition 8.2. *Lorsque l'équilibre est tel que les trajectoires convergent vers cet équilibre, on dira qu'il s'agit d'un équilibre attractif.* ■

Les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \lambda_2 \\ &= x^2 - \text{tr}(A)x + \det A. \end{aligned}$$

Observons que pour déterminer l'allure des trajectoires, il n'est pas nécessaire de calculer explicitement ces valeurs propres. La figure 8.1 caractérise la nature de l'équilibre (et dès lors l'allure des trajectoires) en fonction des deux coefficients du polynôme caractéristique respectivement égaux à l'opposé de la somme et au produit des valeurs propres.

On peut se demander dans quelle mesure la nature des trajectoires décrites ci-dessus est sensible à des perturbations du système. Pour répondre à cette question, considérons un système linéaire nominal $\dot{x} = Ax + Bu$ et une perturbation du système nominal de la forme $\dot{x} = (A + \Delta A)x + Bu$. Si la matrice A possède des valeurs propres *distinctes*, on peut montrer que celles-ci dépendent continûment des coefficients de A , ce qui signifie que pour tout nombre positif ϵ , il existe un nombre positif δ tel que si chacun des coefficients de la perturbation ΔA est plus petit que δ , les valeurs propres de la matrice perturbée $A + \Delta A$ seront à l'intérieur de boules de rayon ϵ centrées en les valeurs propres de A . Donc, toute valeur propre initialement à l'intérieur du demi-plan de gauche ($\text{Re}(\lambda) < 0$) ou du demi-plan de droite ($\text{Re}(\lambda) > 0$) restera dans le même demi-plan pour des perturbations ΔA suffisamment petites et, qualitativement, les trajectoires du système perturbé seront semblables à celles du système nominal : un foyer attractif reste un foyer

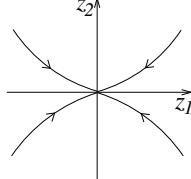
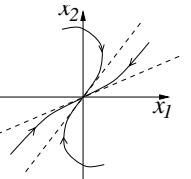
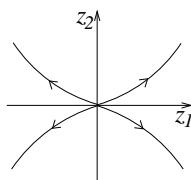
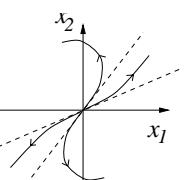
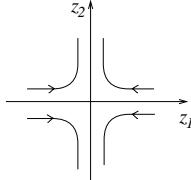
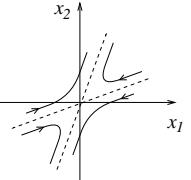
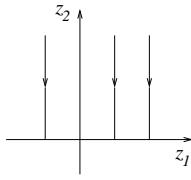
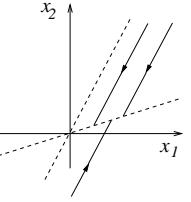
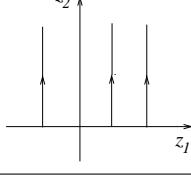
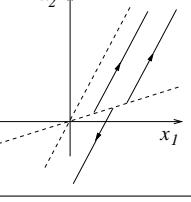
Type de l'équilibre	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)	Conditions sur les valeurs propres
Noeud attractif			$\lambda_2 \leq \lambda_1 < 0$
Noeud répulsif			$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$
Col			$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$
Équilibre non isolé, attractif			$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$
Équilibre non isolé, répulsif			$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$

TABLE 8.1 – Orbites des systèmes linéaires plans :
cas a.

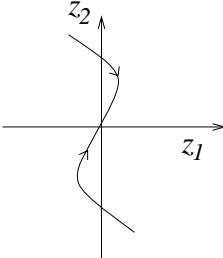
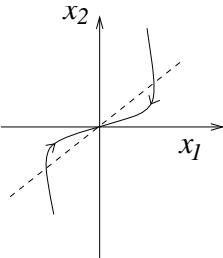
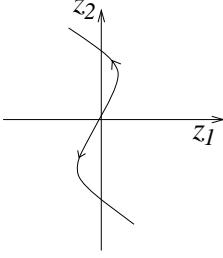
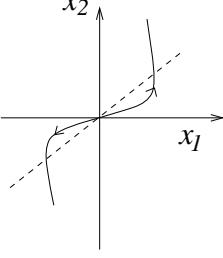
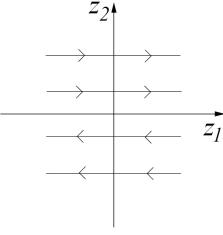
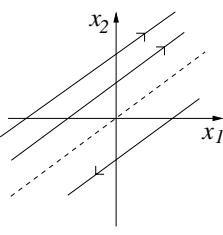
Type de l'équilibre	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)	Conditions sur les valeurs propres
Noeud dégénéré attractif			$\lambda = 0$ (Jordan)
Noeud dégénéré répulsif			$\lambda > 0$ (Jordan)
Équilibre non-isolé			$\lambda = 0$ (Jordan)

TABLE 8.2 – Orbites des systèmes linéaires plans : cas b.

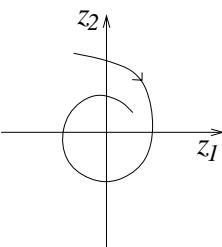
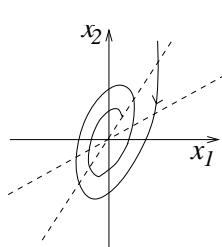
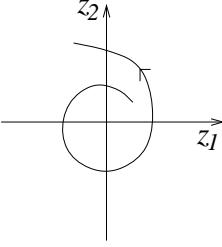
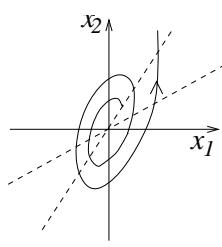
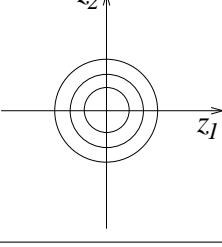
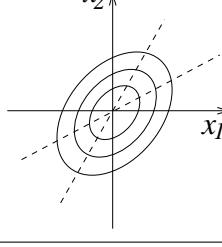
Type de l'équilibre	Allure des trajectoires (z_1, z_2)	Allure des trajectoires (x_1, x_2)	Conditions sur les valeurs propres
Foyer attractif			$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\alpha < 0, \beta \neq 0$
Foyer répulsif			$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ $\alpha > 0, \beta \neq 0$
Centre			$\lambda_{1,2} = \pm \beta i$ $\beta \neq 0$

TABLE 8.3 – Orbites des systèmes linéaires plans :
cas c.

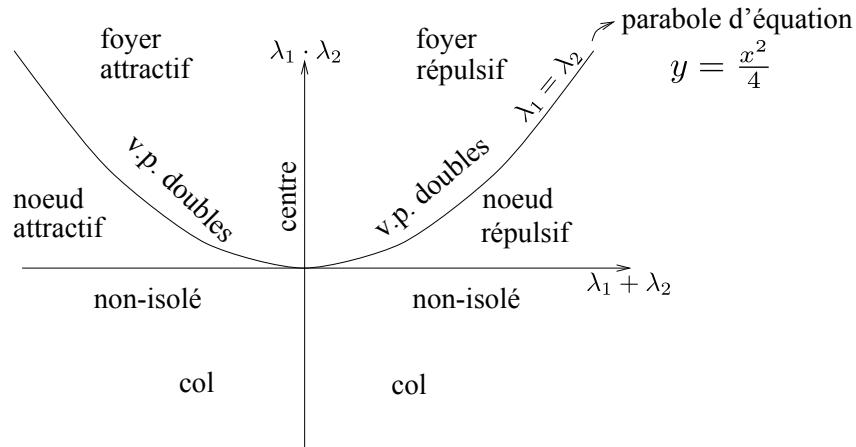


FIGURE 8.1 – térisation des équilibres en fonction de la somme et du produit des valeurs propres

attractif, un noeud répulsif reste un noeud répulsif, un col reste un col,... On dit dans ce cas que de tels systèmes (ou de tels équilibres) sont *structurellement stables*.

Il n'en va pas de même dans le cas d'un équilibre de type *centre*, auquel correspondent des trajectoires périodiques elliptiques et des valeurs propres imaginaires pures. Dans ce cas en effet, la moindre perturbation de la matrice A peut faire en sorte que les valeurs propres quittent l'axe imaginaire et que les trajectoires correspondantes deviennent un foyer attractif ou répulsif. Un système linéaire auquel correspond un équilibre de type *centre* n'est donc **pas** structurellement stable.

Le cas de systèmes linéaires ayant une ou deux valeurs propres nulles conduit également à un changement qualitatif des trajectoires sous l'effet de perturbations arbitrairement petites. Lorsque le système possède une valeur propre double différente de 0, de petites perturbations peuvent conduire à des valeurs propres réelles ou complexes conjuguées, mais la localisation dans l'un ou l'autre des demi-plans ne sera pas modifiée. Un noeud attractif (répulsif) dégénéré peut donc se transformer en noeud attractif (répulsif) ou en foyer attractif (répulsif).

L'analyse précédente montre bien que c'est l'axe imaginaire qui peut poser problème. On introduit dès lors la définition suivante.

Definition 8.3. Si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle non nulle, le système $\dot{x} = Ax$ (ou le point d'équilibre) est dit hyperbolique. \square

Il résulte de ce qui précède qu'un système hyperbolique est structurellement stable et que les trajectoires resteront qualitativement semblables pour de petites perturbations. Dans le cas d'une valeur propre double différente de zéro, de petites perturbations peuvent engendrer soit un foyer, soit un noeud ; mais le caractère

attractif ou répulsif de l'équilibre sera lui de toute façon préservé. Ces considérations vont être de grande importance pour l'analyse des systèmes non linéaires.

8.2. Linéarisation des systèmes non linéaires

Les orbites illustrées dans les tableaux de la section précédente ne sont pas seulement valables au voisinage du point d'équilibre (ramené à l'origine). On a bien caractérisé grâce à ces tableaux l'ensemble des orbites possibles des systèmes linéaires plans, quelle que soit la condition initiale. Cette observation constitue une différence fondamentale entre systèmes linéaires et non linéaires. En effet, on a vu au chapitre précédent que les systèmes non-linéaires peuvent présenter plusieurs équilibres isolés distincts pour une même valeur de l'entrée \bar{u} . Ceci implique que, contrairement au cas des systèmes linéaires, le comportement des orbites au voisinage d'un équilibre gardera le plus souvent un *caractère local* et ne pourra nullement être étendu à l'ensemble du plan de phase. Moyennant cette restriction, un résultat important permet cependant d'étendre aux systèmes non linéaires une partie de l'analyse que nous venons de développer pour les systèmes linéaires.

Soit le système dynamique décrit par

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \bar{u}), \quad (8.1)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \bar{u}). \quad (8.2)$$

ou, sous forme condensée,

$$\dot{x} = f(x, \bar{u}), \quad (8.3)$$

pour lequel on suppose l'existence d'un équilibre (\bar{x}, \bar{u}) tel que $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. On suppose en outre que la fonction $f(x, \bar{u})$ est suffisamment régulière dans le voisinage de cet équilibre pour y admettre un développement de Taylor convergent :

$$\dot{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) + \left(\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \right)_{\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots$$

L'*approximation linéaire* de ce système au voisinage de l'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) , obtenue en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 dans le développement de Taylor de $f(x, \bar{u})$ autour de (\bar{x}, \bar{u}) , est donnée par

$$\dot{\tilde{x}} = \left(\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \right)_{\bar{x}} \tilde{x} \quad (8.4)$$

où $\tilde{x} = x - \bar{x}$. Notons $A = \left(\frac{\partial f(x, \bar{u})}{\partial x} \right)_{\bar{x}}$, la matrice Jacobienne de f à l'équilibre. On peut alors généraliser la définition 8.3 comme suit :

Definition 8.4. *Équilibre hyperbolique*

L'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) du système non linéaire (8.3) est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de A ont une partie réelle non nulle ($\text{Re}(\lambda_i(A)) \neq 0, \forall i$). \square

Il doit être clair que c'est bien *l'équilibre* (\bar{x}, \bar{u}) qui est (ou qui n'est pas) hyperbolique, et non le système non linéaire (8.3). En effet, ce système peut avoir plusieurs équilibres isolés pour une même valeur \bar{u} , certains étant hyperboliques et d'autres non. Dans quelle mesure l'étude de l'approximation linéaire d'un système non-linéaire au voisinage d'un équilibre permet-elle d'en déduire le comportement du système non-linéaire ? Pour préciser ce que l'on entend par comportement, nous voulons pouvoir comparer les trajectoires et introduisons dès lors la définition suivante.

Definition 8.5. Les trajectoires (ou les orbites) de deux systèmes dynamiques sont *topologiquement équivalentes* s'il existe un *homéomorphisme* (une bijection bicontinue) qui permet de passer d'une trajectoire du premier système à une trajectoire du second. \square

Theorem 8.6. Hartman-Grobman, 1959

Si l'équilibre (\bar{x}, \bar{u}) est hyperbolique, alors les trajectoires du système non linéaire (8.3) *dans un voisinage de l'équilibre* (\bar{x}, \bar{u}) sont topologiquement équivalentes à celles de l'approximation linéaire (8.4). Plus précisément, il existe un voisinage X de \bar{x} , un voisinage \tilde{X} de 0 et un homéomorphisme $h : X \rightarrow \tilde{X}$ avec $h(\bar{x}) = 0$ tel que si $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire du système non linéaire (8.3) contenue dans X (pour un certain intervalle de temps), alors $t \mapsto h(x(t))$ est une trajectoire du système linéaire (8.4). \square

Des trajectoires topologiquement équivalentes ont la même allure. On pourra donc parler de noeud ou de foyer attractif ou répulsif, ou encore de col, pour les équilibres de systèmes non linéaires, en étudiant les valeurs propres de la matrice de l'approximation linéaire, mais **pas** de centre.

Remarks 8.7.

1. L'intérêt de ce théorème est évident. Sa limitation principale, à savoir son caractère local, ne l'est pas moins. En particulier, ce théorème ne fournit aucune indication sur la taille du bassin d'attraction d'un équilibre attractif.
2. Dans le cas d'un équilibre non hyperbolique, ce sont les termes d'ordre supérieur, ceux-là même qui ont été négligés, qui détermineront localement l'allure des trajectoires.
3. Les outils développés jusqu'ici dans ce chapitre ne sont pas propres au systèmes plans. Classification des systèmes linéaires, linéarisation, théorème de Hartman-Grobman se généralisent sans problème en toute dimension
4. Dans la linéarisation (8.4), on garde $u = \bar{u}$ constant. On pourrait également linéariser f autour de $u = \bar{u}$ pour obtenir un linéarisé de type $\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$. Tant que $\tilde{u} = u - \bar{u}$ reste suffisamment petit, et pour un intervalle de temps suffisamment petit, les trajectoires des systèmes non linéaire et linéarisé resteront proches, mais il n'existe pas de variante simple du théorème de Hartman-Grobman dans ce cas. ■

8.3. Au delà des systèmes plans

Les considérations précédentes ne sont pas propres aux systèmes plans.

Le théorème d'Hartman-Grobman, par exemple, est vrai en toute dimension $n \geq 2$, et la classification des systèmes linéaires est semblable.

Considérons une matrice réelle A de dimension quelconque. Si toutes ses valeurs propres sont distinctes alors on peut la diagonaliser par blocs réels 1×1 , qui contiennent une valeur propre réelle, ou 2×2 , de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

qui encodent une paire de valeurs propres conjuguées $\alpha \pm \beta i$. Dans ce cas le système linéaire (ou linéarisé) peut se décrire comme produit direct¹ de système uni-dimensionnels ou bi-dimensionnels comme vus dans ce chapitre.

Brièvement, le cas de blocs de Jordan est un peu différent et se comporte comme suit. Un bloc de Jordan réel, par exemple

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

engendrera une dynamique fort semblable au cas bidimensionnel, combinaison linéaires de $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_1(0)e^{\lambda t} + tz_2(0)e^{\lambda t} + t^2z_3(0)e^{\lambda t}, \\ z_2(t) &= z_2(0)e^{\lambda t} + tz_3(0)e^{\lambda t}, \\ z_3(t) &= z_3(0)e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Un bloc de Jordan complexe se combine avec son conjugué pour former un bloc qui ressemble par exemple à ceci :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \tag{8.5}$$

Les solutions ressemblent alors à ceci :

$$\begin{aligned} z_1(t) &= e^{\alpha t}(z_1(0)\cos \beta t + z_2(0)\sin \beta t + t(z_3(0)\cos \beta t + z_4(0)\sin \beta t)), \\ z_2(t) &= e^{\alpha t}(z_2(0)\cos \beta t - z_1(0)\sin \beta t + t(z_4(0)\cos \beta t - z_3(0)\sin \beta t)), \\ z_3(t) &= e^{\alpha t}(z_3(0)\cos \beta t + z_4(0)\sin \beta t), \\ z_4(t) &= e^{\alpha t}(z_4(0)\cos \beta t - z_3(0)\sin \beta t). \end{aligned}$$

1. Une union de systèmes découpés

Illustrons maintenant les sections précédentes par quelques exemples de systèmes non linéaires d'ordre 2.

8.3.1. Les systèmes mécaniques à un degré de liberté

Les équations d'état d'un système mécanique à un degré de liberté s'écrivent (voir chapitre 2) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ m\dot{x}_2 &= -g(x_1) - k(x_1) - h(x_2) + u,\end{aligned}$$

où x_1 est la coordonnée de position du corps en mouvement, x_2 est la vitesse, m désigne la masse ou l'inertie et u représente une force ou un couple extérieur appliqué au système. Les fonctions scalaires $g(x_1)$ et $k(x_1)$ correspondent respectivement à la gravité et à l'élasticité tandis que $h(x_2)$ (tel que $h(0) = 0$) représente le frottement visqueux. Le frottement sec est négligé. Notons aussi (voir chapitre 2, section 2.7) que

$$g(x_1) + k(x_1) = \frac{\partial E_p}{\partial x_1}$$

où E_p désigne l'énergie potentielle du système.

Les équilibres de ce système sont caractérisés par

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 &= 0, \\ g(\bar{x}_1) + k(\bar{x}_1) &= \bar{u}.\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, considérons le cas particulier où $m = 1$. La matrice Jacobienne du système à l'équilibre $(\bar{x}_1, 0, \bar{u})$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2}\right)_{\bar{x}_1} & -h'(0) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est

$$p(x) = x^2 + h'(0)x + \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2}\right)_{\bar{x}_1}.$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2}\right)_{\bar{x}_1}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -h'(0).$$

La dérivée $h'(0)$ du frottement visqueux est par nature non-négative : $\lambda_1 + \lambda_2 = -h'(0) \leq 0$.

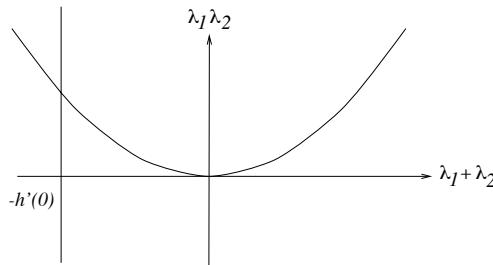


FIGURE 8.2 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un système mécanique à un degré de liberté

Les équilibres du système sont hyperboliques si

$$\begin{aligned} h'(0) > 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} &\neq 0, \\ \text{ou si } h'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} &< 0. \end{aligned}$$

On observe donc que les équilibres ne sont *pas* hyperboliques si l'énergie potentielle $E_p(x_1)$ est une fonction affine de la position x_1 , ou plus généralement si l'équilibre correspond à un point d'inflexion de $E_p(x_1)$. C'est également le cas lorsque $h'(0) = 0$ et $\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} \geq 0$.

Les équilibres hyperboliques d'un système mécanique à un degré de liberté peuvent alors être complètement caractérisés comme indiqué au tableau 8.4 (voir aussi la figure 8.2). On observe en particulier qu'un équilibre hyperbolique ne peut jamais être un noeud ou un foyer répulsif.

8.3.2. Les circuits électriques RLC

Les circuits électriques simples qui ne contiennent qu'une inductance et une capacité sont généralement dénommés *circuits RLC* dans la littérature. Dans les ouvrages de référence en génie électrique ou en théorie des circuits, ils font l'objet d'une étude approfondie car ils constituent la configuration de base de nombreux dispositifs pratiques (filtres, oscillateurs,...).

Le circuit *RLC série* représenté à la figure 8.3 est un exemple typique. En application des principes étudiés au chapitre 3, le comportement dynamique de ce circuit est décrit par un modèle d'état de dimension 2 :

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -r(x_1) - x_2 + u \\ C\dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned}$$

Caractérisation	Nature des équilibres hyperboliques
$0 < [h'(0)]^2 < 4 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1}$	foyer stable
$0 < 4 \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} \leq [h'(0)]^2$	noeud stable
$\left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_1^2} \right)_{\bar{x}_1} < 0$	col

TABLE 8.4 – Equilibres hyperboliques des systèmes mécaniques à un degré de liberté

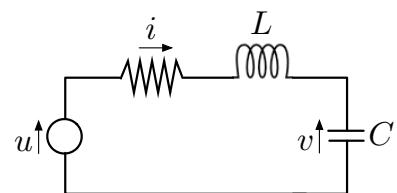


FIGURE 8.3 – Circuit RLC série

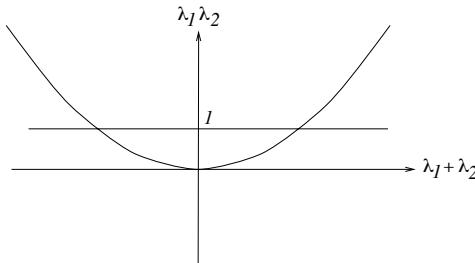


FIGURE 8.4 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un circuit RLC

où $x_1 = i$ est le courant dans l'inductance linéaire L , $x_2 = v$ est la tension aux bornes de la capacité linéaire C et $r(x_1)$ est la caractéristique tension-courant (éventuellement non linéaire) de la résistance.

Les équilibres de ce système sont caractérisés par les équations :

$$\begin{aligned}\bar{x}_2 + r(0) &= \bar{u}, \\ \bar{x}_1 &= 0.\end{aligned}$$

Sans perte de généralité, considérons le cas particulier $L = 1$ et $C = 1$. La matrice Jacobienne du système à l'équilibre $(0, \bar{x}_2, \bar{u})$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -r'(0) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$\begin{aligned}p(x) &= \lambda^2 + r'(0)\lambda + 1 \\ \text{où } r'(0) &\triangleq (\partial r / \partial x_1)_{x_1=0}.\end{aligned}$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_1\lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -r'(0).$$

Les équilibres du système sont donc hyperboliques si $r'(0) \neq 0$, c.à.d. si la dérivée de la caractéristique de la résistance n'est pas nulle à l'origine. On observe que c'est notamment le cas pour une résistance linéaire.

Les équilibres hyperboliques d'un circuit RLC série sont alors complètement caractérisés comme indiqué sur le tableau 8.5 (voir aussi la figure 8.4). On remarque en particulier qu'un équilibre hyperbolique d'un circuit RLC série ne peut jamais être un col.

	Nature des équilibres hyperboliques
$r'(0) \geq 2$	noeud attractif
$0 < r'(0) < 2$	foyer attractif
$-2 < r'(0) < 0$	foyer répulsif
$r'(0) \leq -2$	noeud répulsif

TABLE 8.5 – Equilibres hyperboliques d'un circuit RLC

8.3.3. Les systèmes à deux compartiments

Considérons les systèmes à deux compartiments dont le graphe est représenté à la figure 8.5. Le signal d'entrée u est le débit d'alimentation du premier compar-

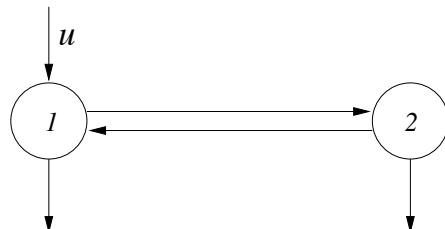


FIGURE 8.5 – Système à deux compartiments

timent. Nous supposons que les flux échangés entre les compartiments satisfont les conditions $C1 - C4$ de modélisation du chapitre 4 (Section 4.3). La dynamique du système est alors décrite par un modèle d'état de dimension 2 de la forme générale suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -q_{12}(x_1, x_2) + q_{21}(x_2, x_1) - q_{10}(x_1) + u \\ \dot{x}_2 &= q_{12}(x_1, x_2) - q_{21}(x_2, x_1) - q_{20}(x_2)\end{aligned}$$

Les fonctions q_{ij} satisfont les conditions suivantes sur l'orthant positif :

$$q_{ij}(0, x_j) = 0 \quad \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_i} \geq 0 \quad \frac{\partial q_{ij}}{\partial x_j} \leq 0 \quad (8.6)$$

Sous ces conditions, le système possède une infinité d'équilibres isolés positifs $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u})$. La matrice Jacobienne autour de l'un de ces équilibres s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -(a+c) & b \\ a & -(b+d) \end{pmatrix}$$

avec les notations simplifiées suivantes (toutes les dérivées partielles sont évaluées à l'état d'équilibre) :

$$\begin{aligned} a &\triangleq \frac{\partial q_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial q_{21}}{\partial x_1} & c &\triangleq \frac{\partial q_{10}}{\partial x_1} \\ b &\triangleq \frac{\partial q_{21}}{\partial x_2} - \frac{\partial q_{12}}{\partial x_2} & d &\triangleq \frac{\partial q_{20}}{\partial x_2} \end{aligned}$$

Sous les conditions (8.6), on observe immédiatement que $a, b, c, d, \geq 0$. Le polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne s'écrit :

$$p(x) = x^2 + (a+b+c+d)x + (ad+bc+cd)$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donc donnés par :

$$\lambda_1 \lambda_2 = ad + bc + cd \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(a+b+c+d)$$

Les équilibres du système sont donc hyperboliques si les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$a + b + c + d > 0 \quad \text{et} \quad ad + bc + cd > 0$$

On démontre aisément que, sous ces conditions, l'inégalité suivante est aussi satisfaite :

$$0 < 4(ad + bc + cd) \leq (a + b + c + d)^2$$

On en déduit que les équilibres hyperboliques d'un système à deux compartiments ne peuvent être que des noeuds attractifs (voir figure 8.6).

8.3.4. Les systèmes réactionnels à deux espèces

Les systèmes réactionnels les plus simples font intervenir deux espèces. C'est le cas par exemple d'une réaction irréversible convertissant un réactif X_1 en un produit X_2 :



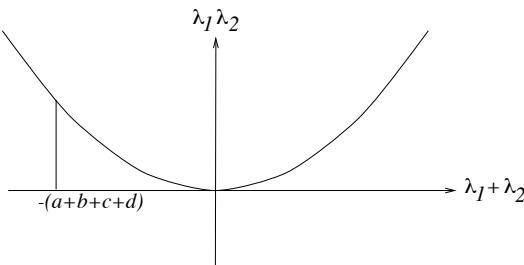


FIGURE 8.6 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un système à deux compartiments

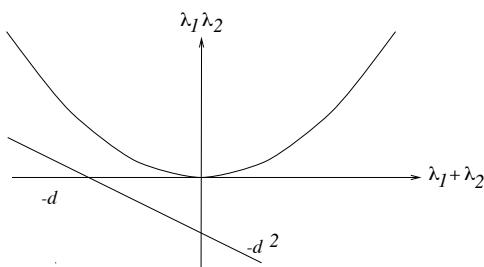


FIGURE 8.7 – Lieu des valeurs propres des équilibres d'un système réactionnel à deux espèces

Supposons que cette réaction se déroule dans un réacteur continu parfaitement mélangé à volume constant. Le réacteur est alimenté avec l'espèce X_1 , à débit volumétrique constant strictement positif. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, le modèle d'état du réacteur peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -r(x_1, x_2) + d(u - x_1) \\ \dot{x}_2 &= r(x_1, x_2) - dx_2\end{aligned}$$

où x_1 et x_2 représentent les concentrations des espèces X_1 et X_2 dans le milieu réactionnel, d est le taux de dilution et u est la concentration du réactif X_1 dans l'alimentation. La cinétique de réaction $r(x_1, x_2)$ est supposée être une fonction des concentrations des deux espèces.

Les équilibres du système sont donc caractérisés par les équations :

$$d\bar{x}_2 = d(\bar{u} - \bar{x}_1) = r(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

Ces équations impliquent à l'équilibre que $\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \bar{u}$, c'est à dire que la somme des concentrations des espèces X_1 et X_2 dans le réacteur est égale à la concentration

	Nature des équilibres hyperboliques
$(a - b) < -d$	col
$(a - b) > -d$	noeud attractif

TABLE 8.6 – Equilibres hyperboliques d'un système réactionnel à deux espèces

du réactif X_1 dans l'alimentation. Cette observation est évidemment en accord avec le principe de conservation de la masse.

La matrice Jacobienne autour de l'équilibre s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} -a - d & -b \\ a & b - d \end{pmatrix}$$

avec les notations simplifiées suivantes :

$$a \triangleq \left(\frac{\partial r(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2} \quad b \triangleq \left(\frac{\partial r(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)_{\bar{x}_1, \bar{x}_2}$$

Le polynôme caractéristique de la matrice Jacobienne s'écrit :

$$p(x) = x^2 + (a - b + 2d)x + (a - b)d + d^2$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donc donnés par :

$$\lambda_1 \lambda_2 = (a - b)d + d^2 \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(a - b + 2d)$$

Etant donné que le taux de dilution d est une quantité strictement positive, on peut vérifier après quelques calculs que les équilibres du système sont hyperboliques si $(a - b) \neq -d$. On observe que

- si $\lambda_1 + \lambda_2 = -[(a - b) + 2d] > 0$, alors nécessairement $\lambda_1 \lambda_2 = d[(a - b) + d] < 0$ et donc l'équilibre est un col.
- Si $\lambda_1 + \lambda_2 = -[(a - b) + 2d] \leq 0$, alors l'équilibre est un col si $-2d \leq (a - b) < -d$, et un noeud attractif si $(a - b) > -d$. Par contre, l'équilibre ne peut pas être un foyer, car il est impossible d'avoir $\lambda_1 \lambda_2 \geq \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2)^2$.

Cette analyse est résumée dans le tableau 8.6 et la figure 8.7.

8.4. Trajectoires périodiques et cycles limites

A partir des tableaux de la section 8.2, on peut tirer les observations suivantes.

1. Pour un système linéaire de dimension deux, les équilibres *attractifs* sont soit un noeud soit un foyer, soit enfin une droite d'équilibres non isolés. Dans chacun de ces cas, le bassin d'attraction est le plan de phase tout entier.
2. Lorsque l'équilibre est répulsif, les trajectoires du système divergent lorsque le temps t tend vers l'infini.
3. Lorsque l'équilibre d'un système linéaire est un centre, toutes les trajectoires du système sont périodiques et le rayon des trajectoires dépend des conditions initiales. Un système linéaire présentant des trajectoires périodiques est structurellement instable, et donc la moindre perturbation du système peut faire disparaître ces trajectoires périodiques.

Aucune de ces observations n'est vérifiée génériquement dans le cas de systèmes non linéaires. En effet, les deux premières concernent un comportement *global* des trajectoires, et nous avons vu que ce n'est que localement, dans le voisinage d'un équilibre hyperbolique, que les trajectoires d'un système non linéaire se comportent comme celles de l'approximation linéaire de ce système. L'objet de cette section est de montrer que pour des systèmes non linéaires, il existe d'autres ensembles attractifs et notamment des trajectoires périodiques. On montrera en outre que ces ensembles attractifs sont structurellement stables. Ceci est une propriété très intéressante des systèmes non linéaires qui est utilisée pour la conception de circuits oscillateurs.

Example 8.8. Circuit RLC à diode tunnel

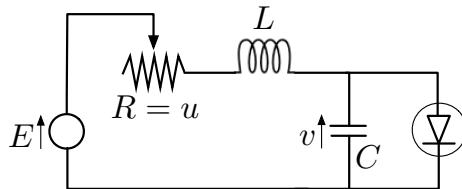


FIGURE 8.8 – Oscillateur à diode tunnel

La figure 8.8 représente un oscillateur à diode tunnel. C'est un circuit électrique RLC comprenant des dipôles linéaires (une source de tension constante E , une résistance linéaire R variable, une inductance linéaire $L = 1H$, une capacité linéaire $C = 1F$) ainsi qu'une résistance non linéaire (diode tunnel) dont la caractéristique courant-tension $i = h(v) = 2v^3 - 6v^2 + 5v$ a l'allure de la courbe représentée à la figure 8.11. L'entrée u de ce système est la résistance variable R . Comme nous l'avons vu au chapitre 3, les variables d'état du système sont le courant $x_1 = i$

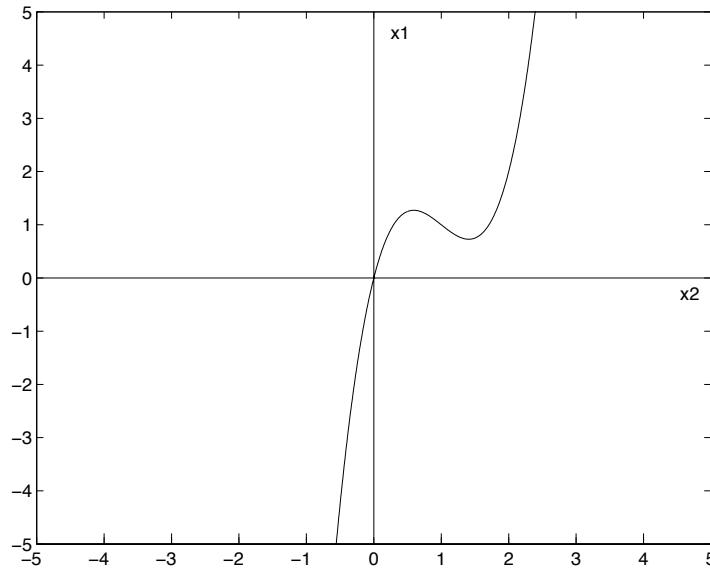


FIGURE 8.9 – Caractéristique courant-tension de la diode tunnel

dans l'inductance et la tension $x_2 = v$ aux bornes de la capacité. On obtient les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -ux_1 - x_2 + E \\ \dot{x}_2 &= x_1 - h(x_2),\end{aligned}$$

et les équilibres possibles sont caractérisés par

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{E - \bar{x}_2}{\bar{u}} \\ \bar{x}_1 &= h(\bar{x}_2).\end{aligned}$$

En représentant dans le plan de phase les graphes des courbes $\bar{x}_1 = (E - \bar{x}_2)/\bar{u}$ et $\bar{x}_1 = h(\bar{x}_2)$, on constate que, pour une diode de caractéristique donnée, deux configurations sont possibles selon les valeurs respectives de \bar{u} et E . Si la pente de la droite ($-1/\bar{u}$) est suffisamment raide, il n'y aura qu'un seul point d'équilibre (figure 8.10.a). Par contre, si cette pente est inférieure à celle de la tangente au point d'inflexion de la courbe, il y aura un, deux ou trois équilibres possibles suivant la valeur de E (figure 8.10.b).

On peut à nouveau étudier l'allure des trajectoires au voisinage des équilibres

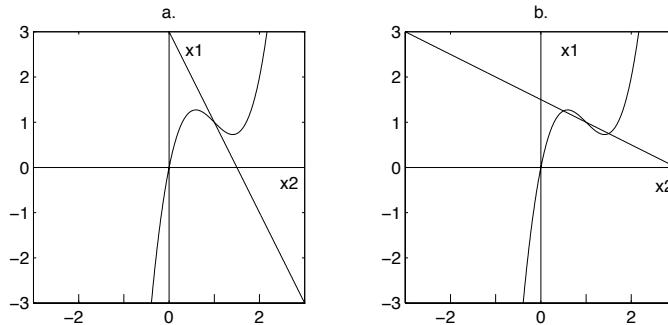


FIGURE 8.10 – Configurations d'équilibres pour le circuit avec diode tunnel

en calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne du système :

$$A = \begin{pmatrix} -\bar{u} & -1 \\ 1 & -h'(\bar{x}_2) \end{pmatrix}.$$

Le produit et la somme des valeurs propres sont donnés par

$$\lambda_1 \lambda_2 = \bar{u} h'(\bar{x}_2) + 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -(\bar{u} + h'(\bar{x}_2)),$$

et on observe que le signe des valeurs propres ne dépend pas de E mais seulement des pentes respectives des deux graphes de l'une ou l'autre des figures 8.10.

Examinons en détail les équilibres :

- a. Pour la figure 8.10.a, il n'y a qu'un seul équilibre. Si celui-ci se trouve à gauche du maximum local de la courbe $h(x_2)$ ou à droite du minimum local de celle-ci, le produit des valeurs propres est positif, la somme est négative et l'équilibre correspondant est donc un noeud ou un foyer attractif.
- b. Toujours pour la première figure, si l'équilibre se trouve entre le maximum et le minimum locaux, on a $-1/\bar{u} < h'(\bar{x}_2) < 0$ et le produit des valeurs propres est donc toujours positif. Quant à la somme, elle sera négative et l'équilibre correspondant dès lors attractif si $|h'(\bar{x}_2)| < \bar{u}$ (ce qui correspond à une valeur de \bar{u} importante, c.à.d. une résistance fortement dissipative qui assure la stabilité du circuit). Par contre, si $|h'(\bar{x}_2)| > \bar{u}$, la somme des valeurs propres est positive et l'équilibre correspondant est répulsif.
- c. Pour la figure 8.10.b, les équilibres à gauche du maximum local de $h(x_2)$ et à droite du minimum local sont tels que le produit des valeurs propres est positif et la somme des valeurs propres est négative. L'équilibre correspondant est donc un noeud ou un foyer attractif.
- d. Quant à l'équilibre éventuel compris entre maximum et minimum, il vérifie $h'(\bar{x}_2) < -1/\bar{u} < 0$. Le produit des valeurs propres est négatif et l'équilibre correspondant est un col.

Comme on peut le constater, l'équilibre est répulsif dans différents cas. On peut alors s'interroger sur ce que deviennent les trajectoires qui s'éloignent de ce point d'équilibre. Considérons les valeurs numériques particulières suivantes :

$$\begin{aligned}\bar{u} &= 0.5, \\ E &= 1.5, \\ h(v) &= 2v^3 - 6v^2 + 5v.\end{aligned}$$

On peut vérifier que pour ces valeurs particulières, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (1, 1, 0.5)$ est le seul équilibre du système, et qu'il s'agit d'un équilibre répulsif (cas b. ci-dessus).

En simulant le système de deux équations différentielles pour différentes conditions initiales, on obtient les orbites illustrées à la figure 8.11. Il apparaît clairement que toutes les orbites calculées (on peut penser que les autres se comporteraient de la même manière) s'enroulent autour d'une orbite périodique. Ce système ne possède donc pas d'équilibre attractif, mais il existe une *orbite fermée* qui est attractive. C'est ce qu'on appelle un *cycle limite*. La figure 8.12 illustre les trajectoires

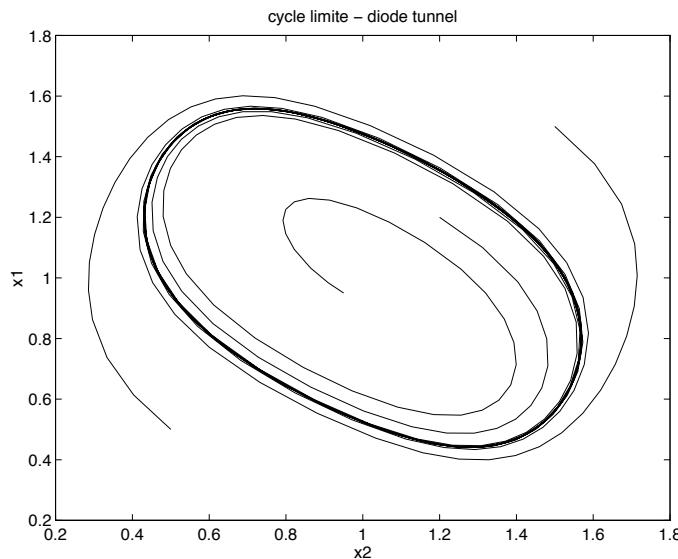


FIGURE 8.11 – Cycle limite pour le circuit à diode tunnel

(état en fonction du temps) et montre bien qu'elles convergent (rapidement) vers des trajectoires périodiques dont la période et l'amplitude ne dépendent pas des conditions initiales.

Asymptotiquement, le système connaîtra donc des oscillations d'amplitude constante, quelle que soit la valeur des conditions initiales, contrairement à ce

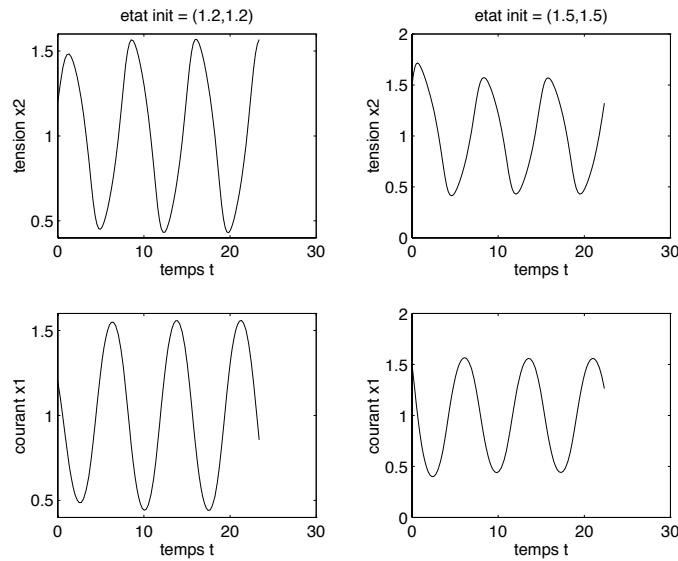


FIGURE 8.12 – Trajectoires du circuit à diode tunnel

qui se passe pour un système linéaire possédant un équilibre de type centre. En fait, c'est exactement ce que l'on cherche à obtenir lorsque l'on construit un oscillateur : des oscillations d'amplitude constante indépendamment des conditions initiales, qu'on ne peut donc obtenir qu'avec un système non linéaire. Enfin, on peut aussi montrer que ce cycle limite est structurellement stable, ce qui est également une propriété intéressante pour la conception d'un oscillateur. \square

Nous formalisons ci-dessous quelques-unes des notions qui viennent d'être décrites dans l'exemple précédent. Considérons un système plan

$$\dot{x} = f(x, \bar{u})$$

avec entrée constante \bar{u} et notons $x(t, x_0, \bar{u})$ la solution au temps t avec $x(0) = x_0$.

Definition 8.9. Point limite

Le point z est un *point limite* de y pour le système dynamique soumis à une entrée constante \bar{u} s'il existe une suite $\{t_n\}$ dans \mathbb{R} telle que $t_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n, y, \bar{u}) = z$. \square

Conformément à cette définition, un équilibre attractif est donc un point limite de tout point dans son bassin d'attraction. Mais la notion de point limite est plus générale comme nous le constaterons ci-dessous.

Definition 8.10. Cycle limite

Un cycle limite est une orbite fermée γ telle qu'un point de γ est un point limite d'un autre point du plan de phase n'appartenant pas à γ . \blacksquare

Cette définition montre que lorsqu'une orbite fermée est un cycle limite, tout point de cette orbite est un point limite, et donc que la trajectoire du système s'approchera de plus en plus de chacun des points de cette orbite fermée, à des instants déterminés.

Nous pouvons énoncer maintenant quelques résultats permettant d'établir l'existence de trajectoires périodiques et de cycles limites. Ces résultats ne sont valables que pour les systèmes plans (alors qu'il existe également des cycles limites pour des systèmes d'ordre supérieur). La raison en est que les démonstrations de ces résultats reposent sur le fait qu'en dimension 2, une orbite fermée dans le plan de phase divise ce plan en une région intérieure à l'orbite et une région extérieure, ce qui n'est bien sûr plus vrai dans un espace de phase de dimension supérieure à 2. Le premier résultat est une condition suffisante de non-existence de trajectoire périodique (et donc de cycle limite).

Theorem 8.11. Bendixson Dulac, 1901 et 1933

Soit D un domaine simplement connexe² dans \mathbb{R}^2 . Si

$$\operatorname{div} f \triangleq \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

est non identiquement nulle dans un sous-domaine de D et ne change pas de signe dans ce sous-domaine, alors D ne contient pas d'orbite fermée. ■

Rappelons que la divergence $\operatorname{div} f$ décrit l'éloignement ($\operatorname{div} f > 0$) ou le rapprochement ($\operatorname{div} f < 0$) issues de $\dot{x} = f(x)$. Ce théorème se prouve simplement par contraposition : supposons qu'il existe une trajectoire fermée γ dans le domaine, dont l'intérieur est $D_\gamma \subseteq D$. Alors l'intégrale de la divergence à l'intérieur de γ , $\int_{D_\gamma} \operatorname{div} f$ est égale par le théorème de Green-Stokes à l'intégrale de flux à travers la frontière γ $\int_\gamma \langle f, n \rangle$, où $\langle ., . \rangle$ est le produit scalaire et n est le vecteur normal unitaire sortant à γ . Cette dernière intégrale est nulle, puisque f est tangent en tout point de la trajectoire γ . Il en résulte que la divergence $\operatorname{div} f$ ne peut être partout négative ou partout positive dans D_γ .

Le deuxième résultat permet, lui, de mettre en évidence l'existence d'un cycle limite.

Theorem 8.12. Poincaré-Bendixson, 1901

Si E est un sous ensemble fermé et borné de \mathbb{R}^2 , invariant pour le système $\dot{x} = f(x, \bar{u})$, et si γ est une orbite qui démarre dans E , alors :

- i) Si E ne contient pas de point d'équilibre, alors γ est une orbite périodique ou converge vers un cycle limite.

2. un domaine simplement connexe dans \mathbb{R}^2 est un domaine dont la frontière peut être obtenue comme déformation continue d'un cercle.

- ii) Si E ne contient pas d'orbite périodique mais contient un point d'équilibre unique, cet équilibre est globalement attractif dans E . \square

Ce théorème peut être utilisé effectivement pour démontrer l'existence d'un cycle limite. Pour ce faire, on cherche d'abord un ensemble fermé borné et invariant. Pour vérifier que l'ensemble est bien invariant, on montre que sur la frontière de cet ensemble, le champ de vecteurs pointe vers l'intérieur. Ensuite, si on a pu exclure la présence d'équilibres dans cet ensemble, celui-ci doit nécessairement contenir un cycle limite, ou ne contenir que des trajectoires périodiques.

Il est important de noter que ces deux théorèmes, contrairement à d'autres résultats de ce chapitre, sont spécifiques aux systèmes plans, et restreignent fortement les dynamiques possibles en deux dimensions : les trajectoires convergent vers un point, un cycle, ou sont non bornées. Les dimensions supérieures recèlent des comportements plus riches qui dépassent le cadre de ce cours : chaos, attracteurs étranges, etc.

Example 8.13. Circuit à diode tunnel (suite)

Nous reprenons le circuit déjà décrit avec les mêmes valeurs numériques que précédemment, qui conduisent à un équilibre unique répulsif $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}) = (1, 1, E - 1)$, avec $E > 1$. Prenons maintenant dans le plan de phase un cercle centré en $(0, 0)$ et de rayon suffisamment grand et montrons que, sur ce cercle, le champ de vecteurs pointe vers l'intérieur. Il s'agit donc de montrer que le produit scalaire du champ de vecteurs et de la normale au cercle est négatif : $PS = x_1 f_1(x_1, x_2, \bar{u}) + x_2 f_2(x_1, x_2, \bar{u}) < 0$. Choisissons comme rayon $r = \sqrt{2} \frac{E}{E-1}$ (voir figure 8.13). Le produit scalaire vaut $PS = -(E-1)x_1^2 + Ex_1 - x_2 h(x_2)$. Remarquons que la quantité $-x_2 h(x_2)$ est toujours strictement négative sauf en $x_2 = 0$. Pour $x_1 \leq 0$, $PS < 0$. De même, pour $x_1 \geq \frac{E}{E-1}$, $Ex_1 \leq (E-1)x_1^2$ et $PS < 0$. Il reste à étudier la portion de cercle où $x_1 < \frac{E}{E-1}$, $x_2 > \frac{E}{E-1}$. Un petit calcul permet de vérifier que $|h(x_2)| > |x_2|$ et que les inégalités suivantes sont donc vérifiées :

$$\begin{aligned} x_2 h(x_2) &> x_2^2 &> \frac{E^2}{(E-1)^2} \\ Ex_1 &< \frac{E^2}{E-1} &< \frac{E^2}{(E-1)^2} \end{aligned}$$

et donc $PS < 0$. Sur ce cercle de rayon r , le champ de vecteurs est donc rentrant. Par ailleurs, comme l'équilibre $(1, 1, E - 1)$ est répulsif, on peut prendre un cercle suffisamment petit autour de cet équilibre tel que le champ de vecteurs évalué sur ce cercle pointe vers l'extérieur. Si l'on considère maintenant le domaine formé de l'anneau (non centré) compris entre le petit cercle et le grand, il s'agit bien d'un ensemble invariant puisque sur la frontière de cet ensemble, le champ de vecteurs pointe vers l'intérieur du domaine. Ce domaine ne comprenant aucun équilibre, il doit donc contenir un cycle limite (ou ne contenir que des trajectoires périodiques). \square

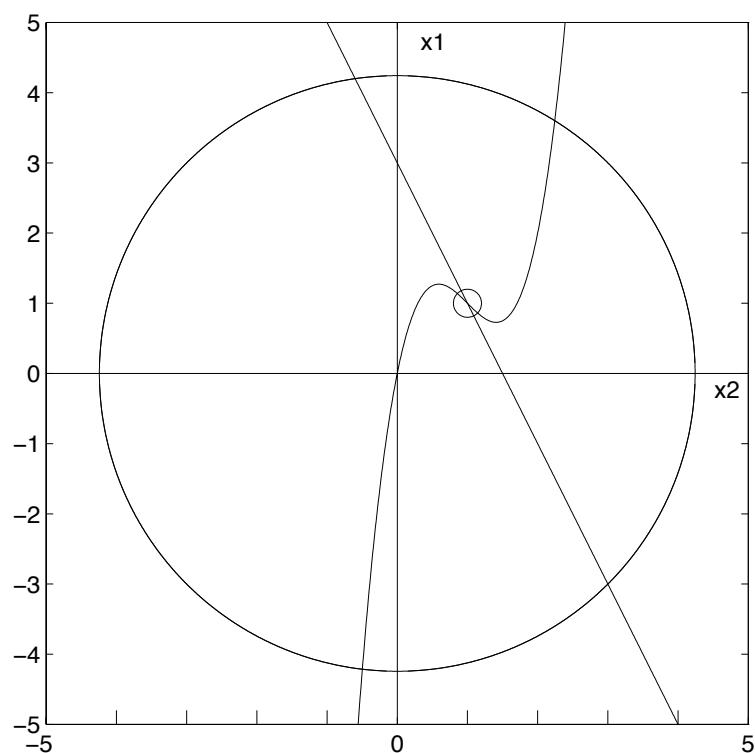


FIGURE 8.13 – Ensemble invariant pour le circuit à diode tunnel

\bar{u}	\bar{x}_2	$h'(\bar{x}_2)$	valeurs propres	type d'équilibre
$\bar{u} > 0.7139$	$\bar{x}_2 < 0.5918$	$h'(\bar{x}_2) > 0$	$\lambda_{1,2} \in C^-$	foyer attractif
$0.1261 < \bar{u} < .7139$	$0.5918 < \bar{x}_2 < 1.4082$	$h'(\bar{x}_2) < 0$	$\lambda_{1,2} \in C^+$	foyer répulsif
$\bar{u} < 0.1261$	$\bar{x}_2 > 1.4082$	$2.5 > h'(\bar{x}_2) > 0$	$\lambda_{1,2} \in C^-$	foyer attractif

8.5. Bifurcations

Nous avons choisi d'étudier dans ce chapitre l'allure des trajectoires de systèmes plans pour une valeur constante de l'entrée, \bar{u} . Cette valeur n'étant pas nécessairement fixée *a priori*, il est intéressant d'analyser dans quelle mesure les trajectoires seront influencées par des changements de \bar{u} . Le théorème 8.6 nous donne déjà une indication. Tant que l'équilibre autour duquel on analyse les trajectoires est hyperbolique, de petites variations de \bar{u} ne déplaceront pas beaucoup les valeurs propres de la matrice d'état de l'approximation linéaire du système, et l'allure des trajectoires restera similaire. Mais en faisant varier l'entrée constante \bar{u} , il peut arriver que les valeurs propres de la matrice d'état atteignent l'axe imaginaire du plan complexe, et dans ce cas il faut s'attendre à une modification fondamentale de l'allure des trajectoires. Plus globalement, les diagrammes d'équilibre étudiés au chapitre précédent montrent également qu'en faisant varier \bar{u} , on peut modifier le nombre de points d'équilibre du système, autant que leur nature. L'étude des modifications de la nature et/ou du nombre des équilibres en fonction de l'évolution de l'entrée du système relève de ce qu'on appelle la théorie des bifurcations, et l'entrée constante \bar{u} est alors appelée *paramètre de bifurcation*. Nous illustrons ci-dessous ce concept en présentant quatre types de bifurcations qui se rencontrent dans les systèmes plans.

8.5.1. Bifurcation de Hopf

Example 8.14. Circuit à diode tunnel (suite)

Reprendons à nouveau l'exemple du circuit à diode tunnel en faisant varier l'entrée \bar{u} (c.à.d. la résistance variable R), avec une source de tension constante $E = 1.5$. La figure 8.14 illustre comment l'équilibre unique se déplace lorsque \bar{u} varie. Le tableau suivant caractérise le type d'équilibre rencontré en fonction de \bar{u} .

Dès lors, si l'on part d'une valeur de la résistance variable \bar{u} suffisamment grande, telle que le point d'équilibre se trouve à gauche du premier sommet de la courbe caractéristique de la diode, et que l'on diminue progressivement cette valeur, on passe successivement par les configurations suivantes : un foyer attractif, un foyer

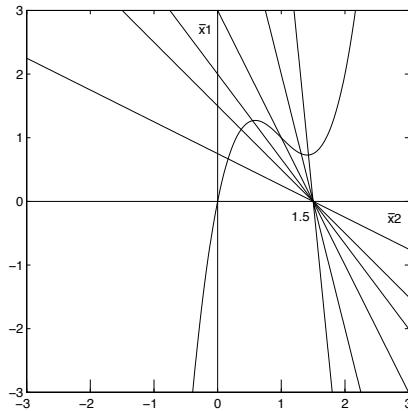


FIGURE 8.14 – Equilibre du circuit à diode tunnel lorsque la résistance R varie.

répulsif (associé à un cycle limite), un foyer attractif. Au moment des deux transitions entre foyer attractif et répulsif, le système passe par une valeur telle que le point d'équilibre n'est pas hyperbolique. \square

La bifurcation que nous venons de mettre en évidence (passage d'un foyer attractif à un foyer répulsif accompagné d'un cycle limite, ou l'inverse) est appelée *bifurcation de Hopf*. Le théorème suivant garantit d'ailleurs l'existence d'un cycle limite. Afin de l'énoncer de façon précise, formalisons ce qui précède. Soit un système plan possédant une famille d'équilibres uniques (\bar{x}, \bar{u}) paramétrée par \bar{u} . On suppose qu'il existe une valeur \bar{u}^* de \bar{u} telle que les valeurs propres de la matrice Jacobienne évaluée en cet équilibre ont une partie réelle nulle et une partie imaginaire non nulle. Ces valeurs propres dépendent continûment de \bar{u} , au moins dans un voisinage de \bar{u}^* , et on les notera donc

$$\lambda_i(\bar{u}) = \alpha(\bar{u}) \pm i\beta(\bar{u}).$$

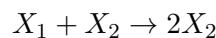
On suppose en outre que $\frac{d\alpha(\bar{u}^*)}{d\bar{u}} > 0$.

Theorem 8.15. Avec les hypothèses qui précèdent, si pour des valeurs de \bar{u} proches de \bar{u}^* , l'équilibre est attractif pour $\bar{u} < \bar{u}^*$ et répulsif pour $\bar{u} > \bar{u}^*$ alors il existe une orbite fermée pour $\bar{u} > \bar{u}^*$ ou pour $\bar{u} < \bar{u}^*$. En particulier, si (\bar{x}^*, \bar{u}^*) est localement attractif, alors il existe un cycle limite attractif autour de (\bar{x}, \bar{u}) pour tout $\mu = \bar{u} - \bar{u}^* > 0$, suffisamment petit. De plus, l'amplitude du cycle limite augmente lorsque μ augmente. \square

Remark 8.16. Tel quel, l'énoncé du théorème reste ambigu quant à la nature (attractive ou répulsive) de l'orbite fermée qui apparaît. On peut lever cette ambiguïté au prix d'un énoncé plus technique faisant apparaître explicitement les termes d'ordre trois du système non linéaire (voir par exemple Guckenheimer et Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, 1983).

8.5.2. Bifurcation transcritique

Considérons la réaction



se produisant dans un réacteur à volume constant, alimenté en réactif X_1 à la concentration x_1^{in} , avec un taux de dilution u .

Le modèle d'état du système (en supposant une cinétique de réaction décrite par la loi d'action des masses) est donné par

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -kx_1x_2 + u(x_1^{in} - x_1) \\ \dot{x}_2 &= kx_1x_2 - ux_2.\end{aligned}$$

Le système possède deux équilibres distincts pour chaque valeur constante de l'entrée $\bar{u} \neq kx_1^{in}$: $(\bar{x}_1 = \frac{\bar{u}}{k}, 0, \bar{u})$ et $(\bar{x}_1 = x_1^{in} - \frac{\bar{u}}{k}, \bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{k}, \bar{u})$, comme illustré à la figure 8.15. On vérifie facilement que le premier équilibre est attractif si $\bar{u} > kx_1^{in}$ et est un

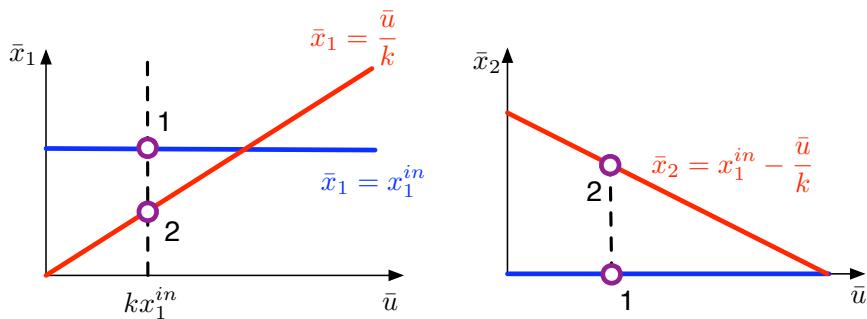


FIGURE 8.15 – Diagramme d'équilibres - Bifurcation transcritique

col sinon. Inversement, le deuxième équilibre est attractif pour les petites valeurs de \bar{u} et devient un col si $\bar{u} > kx_1^{in}$. Il y a donc ici aussi une bifurcation, plus simple toutefois, les caractéristiques des deux équilibres étant échangées lorsque le paramètre de bifurcation \bar{u} franchit la valeur critique kx_1^{in} . Cette bifurcation est appelée *bifurcation transcritique*. On vérifie également qu'à cette valeur critique, l'équilibre (unique) est non hyperbolique.

8.5.3. Bifurcation col-noeud

Le troisième type de bifurcation est illustré par l'exemple du réacteur chimique exothermique décrit à la section 7.1. Rappelons que le diagramme d'équilibre reliant la température d'équilibre du réacteur, \bar{T} , à l'apport calorifique externe, \bar{u} , a l'allure illustrée à la figure 8.16. On constate donc que pour de faibles valeurs de \bar{u} ,

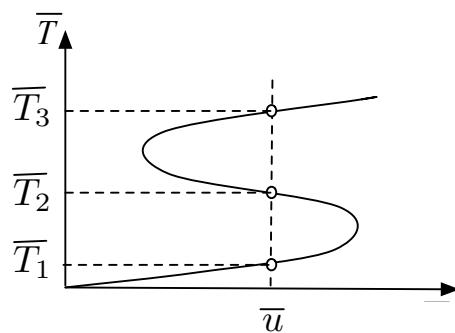


FIGURE 8.16 – Diagramme d'équilibres - Bifurcation col-noeud

le système possède un seul point d'équilibre correspondant à une température d'équilibre basse et à une grande concentration de réactif dans le réacteur (et dès lors une faible concentration du produit de la réaction). On peut vérifier que cet équilibre est attractif. Puis, pour une valeur critique de \bar{u} que l'on repère facilement sur le diagramme d'équilibre, le système passe à trois valeurs d'équilibre pour la température, celle du milieu correspondant à un équilibre attractif et les deux autres à des équilibres répulsifs. Enfin, en augmentant encore \bar{u} , on franchit une nouvelle valeur critique au delà de laquelle le système ne possède plus qu'un seul équilibre, attractif également. Il s'agit ici de *bifurcation col-noeud*. A partir d'une valeur critique de l'entrée (c.à.d. du paramètre de bifurcation) apparaissent deux nouveaux équilibres, l'un d'eux étant un noeud attractif, l'autre étant un col. A la valeur critique, l'équilibre n'est pas hyperbolique.

8.5.4. Bifurcation fourche

Le mécanisme illustré à la figure 8.17 est un « régulateur de Watt ». Ce dispositif peut servir à mesurer une vitesse de rotation à partir d'un pointeur fixé sur l'axe vertical, ou, et c'est pour cela qu'il a été inventé, à réguler cette vitesse si le pointeur est relié à une vanne d'alimentation du moteur faisant tourner le dispositif. On peut vérifier que les équations décrivant le mouvement du système

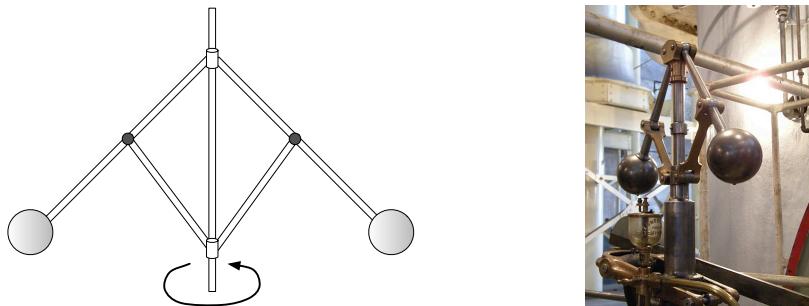


FIGURE 8.17 – Régulateur de Watt

s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u^2 \cos x_1 \sin x_1 - k \sin x_1 - Kx_2\end{aligned}$$

où $x_1 = \theta$ est la position angulaire des pendules symétriques et u est la vitesse de rotation.

Ce dispositif a un équilibre en $(x_1, x_2, u) = (0, 0, \bar{u})$ et, si $\bar{u}^2 > k$, un autre équilibre en $(\bar{x}_1 = \text{arc cos } \frac{k}{\bar{u}^2}, 0, \bar{u})$ avec $\bar{x}_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$. En fait $(-\bar{x}_1, 0, \bar{u})$ est aussi un équilibre qui correspondrait à la permutation des deux pendules, ce qui est (physiquement) impossible mais conceptuellement possible, d'après les équations ci-dessus.

La matrice Jacobienne du système autour de l'équilibre $(0, 0, \bar{u})$ s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \bar{u}^2 - k & -K \end{pmatrix}$$

Cet équilibre est attractif pour $\bar{u}^2 < k$ et répulsif pour $\bar{u}^2 > k$. Pour $\bar{u}^2 = k$, l'équilibre n'est pas hyperbolique.

Autour des deux autres équilibres, la matrice Jacobienne devient :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k^2}{\bar{u}^2} - \bar{u}^2 & -K \end{pmatrix} \text{ avec } \bar{u}^2 > k \Rightarrow \bar{u}^4 > k^2$$

Ces équilibres sont donc attractifs. Le diagramme de bifurcation peut alors s'illustrer comme indiqué à la figure 8.18. Il s'agit d'une bifurcation de type fourche.

8.5.5. Généralisations

Nous avons décrit dans cette section les bifurcations relatives à des systèmes d'ordre deux dépendant d'un paramètre (la valeur de \bar{u}). Ces bifurcations sont

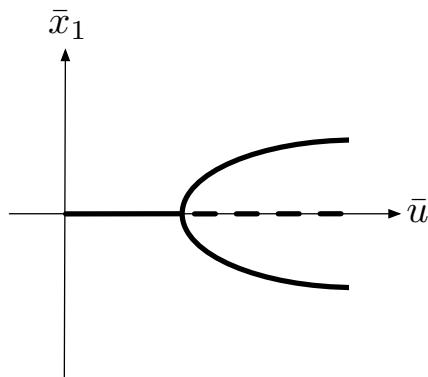


FIGURE 8.18 – Diagramme d'équilibres - bifurcation fourche

caractérisées par la traversée de l'axe imaginaire du plan complexe par une valeur propre réelle de l'approximation linéaire ou par une paire de valeurs propres complexes conjuguées (bifurcation de Hopf). Lorsqu'un système d'ordre plus grand que deux dépend d'un paramètre variable, il est rare que plus d'une valeur propre réelle (ou plus d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées) franchisse l'axe imaginaire pour la même valeur du paramètre de bifurcation. Ce que nous venons de décrire s'observe dès lors aussi, dans des espaces de phase plus compliqués à visualiser, pour des systèmes d'ordre supérieur.

8.6. Exercices

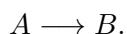
Exercise 8.1. *Un système mécanique*

On considère un robot manipulateur à un segment relié à un chassis fixe par une articulation rototoïde. Le robot se déplace dans un plan vertical. Il est actionné par un moteur produisant un couple appliqué à l'articulation et est soumis à un couple de frottement visqueux. La flexibilité est négligée.

1. Etablir le modèle d'état du système.
2. Déterminer les configurations d'équilibre.
3. Analyser le comportement des trajectoires au voisinage des équilibres en cas de frottement visqueux linéaire quand le couple appliqué est constant.
4. Que peut-on dire des équilibres quand le frottement visqueux est quadratique ?

Exercise 8.2. *Un réacteur chimique*

Soit un réacteur continu parfaitement mélangé et à volume constant dans lequel se déroule une réaction chimique irréversible mettant en œuvre deux espèces A et B :



Le réacteur est alimenté uniquement avec l'espèce A , à débit volumique constant strictement positif. La variable d'entrée est la concentration d'alimentation du réacteur. La cinétique de réaction est une fonction des concentrations des deux espèces : $r(x_A, x_B)$.

1. Etablir le modèle d'état du système.
2. Montrer que, à entrée constante, l'équilibre est unique et stable si la cinétique obéit à la loi d'action des masses avec inhibition hyperbolique par le produit. Est-ce un noeud ou un foyer ?
3. Montrer que le système peut avoir des équilibres instables si la cinétique est une fonction monotone croissante de ses arguments.

Exercise 8.3. *Un système à compartiments*

Quelles sont les conditions sur la structure du graphe d'un système linéaire à deux compartiments pour que le système ait une ou deux valeur propres nulles ? Quel est alors le comportement du système (détalier les différents cas possibles) ?

Exercice 8.4. Génératrice DC avec auto-excitation

On considère une génératrice DC avec auto-excitation. La tension induite est, à vitesse constante, une fonction *monotone croissante bornée* du courant d'excitation $E(I_s)$ telle que $E(0) > 0$. La génératrice débite sur une charge résistive. L'entrée de commande du système est la vitesse de rotation de la génératrice.

1. Déterminer le modèle d'état du système.
2. Montrer qu'on peut choisir le sens de référence des courants pour que le système soit positif.
3. Quelle allure doit avoir la fonction $E(I_s)$ pour qu'il y ait trois équilibres hyperboliques isolés à vitesse de rotation constante. Discuter la stabilité de ces équilibres.
4. Etudier les bifurcations de la configuration d'équilibre en fonction de la vitesse de rotation.

Exercice 8.5. Circuit électrique RLC

On considère le circuit électrique linéaire suivant :

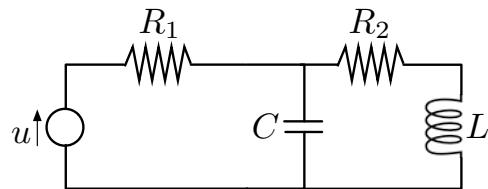


FIGURE 8.19 – Circuit électrique RLC

où $R_2 = 1\Omega$, $C = 1F$ et $L = 1H$.

1. Ecrire un modèle d'état.
2. Déterminer les équilibres.
3. Quelles sont les conditions sur R_1 pour que chaque équilibre soit un noeud, un foyer ou un col ?

On considère le même circuit électrique mais avec $R_1 = 1\Omega$ et R_2 une résistance non linéaire décrite par la relation tension-courant $v_r = i_r^3 - 3i_r^2 + i_r$

1. Calculer les équilibres du système.
2. Caractériser le comportement du système au voisinage de ces équilibres.

Exercice 8.6. Modélisation d'une activité de pêche.

Dans un lac vit une espèce de poissons dont la croissance obéit à une loi logistique. Les poissons sont capturés par des pêcheurs suivant un principe d'action des

masses. Les pêcheurs sont attirés vers le lac avec un taux directement proportionnel à la quantité de poissons dans le lac. Par contre les pêcheurs sont découragés de pêcher avec un taux directement proportionnel au nombre de pêcheurs déjà présents.

1. Etablir un modèle d'état du système.
2. Etudier l'existence et la stabilité des états d'équilibre.

Chapitre 9

Equilibrium's stability

This chapter is about the stability of equilibriums. Precisely, we are interested in the behaviour of the trajectories of the system in the neighbourhood of the equilibriums. Let a dynamic system be described by its state model :

$$\dot{x} = f(x, u). \quad (9.1)$$

We assume that the system owns an equilibrium in (\bar{x}, \bar{u}) . We ask ourselves the two following questions :

- a : If the entry is kept at its equilibrium's value \bar{u} and if the initial state $x(t_0)$ is in the neighbourhood of the equilibrium's value \bar{x} , how will the trajectories of the system behave? Under which conditions will the trajectories converge towards \bar{x} ?
- b : If the entry $u(t)$ is close to \bar{u} (but not necessarily constant), what can we say about the system's trajectories? Under which conditions will the trajectories $x(t)$ stay close to \bar{x} ?

9.1. Definitions

Definition 9.1. Stable equilibrium

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is a *stable equilibrium* of the system (9.1) if

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0), \bar{u}) - \bar{x}\| < \epsilon \ \forall t \geq t_0.$$

If this condition is not satisfied, the equilibrium is *unstable*. □

This definition is to be interpreted as follows. We want to characterize how the trajectory $x(t)$ stays close to the equilibrium point \bar{x} for every $t \geq t_0$ when the entry is constant ($u(t) = \bar{u} \forall t \geq t_0$). For that, we measure the proximity with the norm $\| \cdot \|$ and we impose that the solutions $x(t)$ stay within the region bound by $\|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$, meaning in a "tube" of radius ϵ around the trajectory $x(t) = \bar{x}$. If this goal is achievable for an initial condition $x(t_0)$ close to the equilibrium (meaning that $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$), then we say that the equilibrium is stable. The equilibrium is said unstable otherwise.

The previous definition is the weakest form of stability considered in this chapter. In particular, it does not imply that the trajectories $x(t)$ converge to the equilibrium point.

Definition 9.2. Attractive equilibrium

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is an *attractive equilibrium* of (9.1) if

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x(t_0), \bar{u}) - \bar{x}\| = 0. \quad \square$$

An attractive equilibrium \bar{x} is therefore a point to which the solutions $x(t)$ converge if they start close enough of \bar{x} . It has to be noted that stability and attractiveness are two different notions and that they don't imply each other.

Definition 9.3. Asymptotically stable equilibrium

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is an *asymptotically stable equilibrium* if it is stable and attractive. \square

A set of initial states $x(t_0)$ from which the trajectories converge to an asymptotically stable equilibrium is called *basin of attraction*. The asymptotic stability is the property that is usually sought for in practice. However, we have to notice that this definition above does not indicate the speed at which the trajectory $x(t)$ converge towards the equilibrium. That's why the notion of exponential stability was introduced, which allows to characterize that speed.

Definition 9.4. Exponential stability

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is an *exponentially stable equilibrium* if

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists a > 0, b > 0 \text{ and } \delta > 0 \text{ s.t.}$$

$$\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0), \bar{u}) - \bar{x}\| \leq a \|x(t_0) - \bar{x}\| e^{-bt} \ \forall t \geq t_0. \quad \square$$

It is obvious that the exponential stability implies the asymptotic stability but the opposite is not necessarily true.

9.2. Lyapunov's first method (indirect method)

Lyapunov's first method is based on the examination of the system's linearization $\dot{x} = f(x, \bar{u})$ around the equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) . Precisely, we study the eigenvalues $\lambda_i(A)$ of the Jacobian matrix estimated at the equilibrium :

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}).$$

Under this method, the stability properties of (\bar{x}, \bar{u}) are expressed as follows.

Theorem 9.5. Lyapunov's first method.

1. If all the eigenvalues of the Jacobian matrix have a real part strictly negative ($\forall i, \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0$), the equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is exponentially stable.
2. If the Jacobian matrix owns at least one eigenvalue with a real part strictly positive ($\exists i, \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) > 0$), the equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is unstable. \square

This theorem does not allow to say if the equilibrium is stable or unstable if the Jacobian matrix owns at least one eigenvalue with a real part equal to zero and no eigenvalue with a eigenvalue with a strictly positive real part. In this case, the system's trajectories converge to a sub-set (a variety) whose dimension is the number of eigenvalues of the Jacobian equal to zero and the equilibrium's stability can be examined in this sub-set with the second method.

9.3. Lyapunov's second method (direct method)

As we juste saw, Lyapunov's first method is simple to apply but it only allows to study the equilibrium's stability partially. Furthermore, it does not give any indication on the size of the basins of attraction. The second method is more difficult to implement but, in return, is more general in scope. It is based on the definition of a particular function noted $V(x)$ and called *Lyapunov's function*, which is decreasing along the system's trajectories within the basin of attraction. Before giving the different stability theorems, we start with an example.

Example 9.6. A robot's arm with one degree of freedom.

We consider a robot's arm with one degree of freedom, with linear viscous friction and under a constant moment (see following figure). The state model of the the system is the following (see chapter 2 and 8, section 8.3.1) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= J^{-1}(-mgbs \sin x_1 - kx_2 + \bar{u}).\end{aligned}$$

In these equations, x_1 is the angular position, x_2 the angular speed, J the inertia, m the mass, b the distance between the anchor point and the center of mass, k the friction coefficient and \bar{u} the constant moment applied to the robot's arm.

Let's consider the case where $0 < \bar{u} < mgb$. The system owns two equilibriums verifying the two following relations :

$$\bar{x}_1 = \arcsin\left(\frac{\bar{u}}{mgb}\right), \quad \bar{x}_2 = 0.$$

In accordance with the physical intuition and as we can verify by examining the Jacobian matrix's eigenvalues, there is an asymptotically stable equilibrium in the "lower" position and an unstable equilibrium in the "higher" position (see figure 9.2).

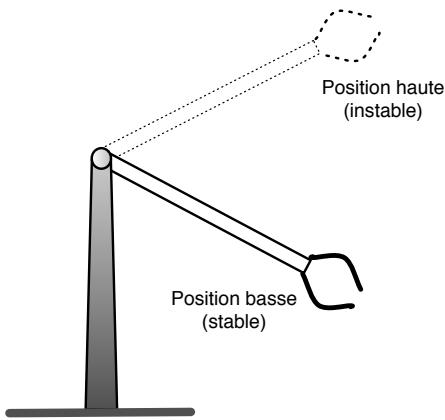


FIGURE 9.1 – The robot's arm in a vertical plane

Let's consider the following function :

$$V(x_1, x_2) = \frac{J}{2}x_2^2 + mgb(1 - \cos x_1) - \bar{u}x_1.$$

This function has the dimension of an energy. Indeed, the first term ($Jx_2^2/2$) is the kinetic energy, the second one ($mgb(1 - \cos x_1)$) is the potential energy and the third one ($\bar{u}x_1$) is the energy spent by the moment \bar{u} pour elevate the arm to the angular position x_1 . The equilibrium in the "lower" position belongs to the domain

$$D = \{(x_1, x_2) : -\pi/2 < x_1 < \pi/2, -a < x_2 < a\}$$

(a is any real positive number). In this domain, the function $V(x_1, x_2)$ is a function that satisfies the following conditions :

- (i) $V(x_1, x_2) : D \rightarrow \mathbb{R}$ is continually differentiable.
- (ii) $V(x_1, x_2) > V(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ for all $(x_1, x_2) \neq (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ in D (meaning V is minimum at equilibrium).

(iii) $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$ outside the equilibrium in D because

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \\ &= [mgb \sin x_1 - \bar{u}] [x_2] + [Jx_2] [J^{-1}(-mgb \sin x_1 - kx_2 + \bar{u})] \\ &= -kx_2^2.\end{aligned}$$

Under these conditions, as we will see with the next theorem, there is a bound neighbourhood of the equilibrium in which $V(x_1, x_2)$ decreases along the system's trajectories as long as the speed $x_2 \neq 0$ and moves towards the minimum of V that corresponds to the equilibrium. We can see that the equilibrium is stable according the definition 9.1. However, we notice that $V(x_1, x_2)$ ceases to decrease if $x_2 = 0$ (speed equal to zero). Could we have a speed identically equal to zero elsewhere than the equilibrium? In fact we can't, because a speed identically equal to zero implies an acceleration identically equal to zero, which implies that the system is at an equilibrium. \square

This example illustrates the key part of Lyapunov's second method which is as follows.

Theorem 9.7. « Lyapunov's »stability.

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) of the system $\dot{x} = f(x, \bar{u})$ is stable if there is a function $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continually differentiable with the following properties :

- (i) D is an open set of \mathbb{R}^n and $\bar{x} \in D$;
- (ii) $V(x) > V(\bar{x}) \forall x \neq \bar{x}$ in D ($V(x)$ is minimum at \bar{x});
- (iii) $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x \neq \bar{x}$ in D . \square

In other words, this theorem means that a sufficient condition to have the stability of the equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is to have a positive-definite function $V(x) - V(\bar{x})$ whose temporal derivative $\dot{V}(x)$ is negative semi-definite in a neighbourhood of \bar{x} . The temporal derivative $\dot{V}(x)$ is calculated as follows :

$$\dot{V}(x) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial V}{\partial x} f(x, \bar{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x, \bar{u}).$$

The conditions (ii) and (iii) of the theorem 9.7 imply that, for a constant c close enough to $V(\bar{x})$, the set :

$$\Omega_c = \{x \in D : V(\bar{x}) \leq V(x) \leq c\}$$

is a compact (meaning a closed and bound set) invariant. To demonstrate it, let's choose a positive constant r such that the closed ball

$$B_r = \{x \in R^n : \|x - \bar{x}\| \leq r\}$$

is continuous in D . Let's define :

$$\alpha = \min_{\|x\|=r} V(x).$$

We only have to choose any constant c in the open interval $(0, \alpha)$ to define a set Ω_c which is included in B_r and therefore compact. Let's now assume that $x(t_0) \in \Omega_c$. Then, by the condition (iii), we have :

$$\dot{V}(x) \leq 0 \Rightarrow V(\bar{x}) \leq V(x(t)) \leq V(x(t_0)) \leq c \quad \forall t,$$

which shows that Ω_c is invariant.

The example 9.6 is an application of this theorem that shows that the robot's arm's equilibrium est stable. En reality, we know intuitively that the equilibrium is *asymptotically* stable (meaning stable and attractive). One way to demonstrate that an equilibrium is asymptotically stable is to have a Lyapunov function whose temporal derivative $\dot{V}(x)$ is strictly negative-defined (and not only negative semi-defined as in the example 9.6). Indeed, in this case, the Lyapunov function strictly decreases along the system's trajectories, until it reaches (asymptotically) the minimum corresponding exactly to the equilibrium.

Theorem 9.8. Asymptotical stability.

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) of the system $\dot{x} = f(x, \bar{u})$ is asymptotically stable if there is a function $V(x) : D \rightarrow R$ continuously differentiable with the following properties :

- (i) D is an open set R^n and $\bar{x} \in D$;
- (ii) $V(x) > V(\bar{x}) \quad \forall x \neq \bar{x}$ in D ($V(x)$ is minimum at \bar{x});
- (iii) $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq \bar{x}$ in D .

□

As we have seen in the robot's arm example, we usually find a Lyapunov function whose derivative is only negative semi-definite, which does not allow to conclude that the system is stable, using the previous theorem. The difficulty comes notably from the fact that, by analyzing the function $\dot{V}(x)$, we don't use the fact that the different state variables x_i are not independent but are linked by the equations of the system's dynamic. LaSalle studied this matter in detail and has come with a invariance principle which allows to analyze the asymptotic stability of the equilibriums in the case of a negative semi-definite function $\dot{V}(x)$.

Theorem 9.9. Lasalle invariance principle.

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) of the system $\dot{x} = f(x, \bar{u})$ is asymptotically stable if there is a function $V(x) : D \rightarrow R$ continuously differentiable with the following properties :

- (i) D is an open set of R^n and $\bar{x} \in D$;
- (ii) $V(x) > V(\bar{x}) \forall x \neq \bar{x}$ in D ($V(x)$ is minimum at \bar{x});
- (iii) $\dot{V}(x) \leq 0 \forall x$ in D ;
- (iv) the set $S \subset D$ such that $\dot{V}(x) = 0$ does not contain any trajectory of the system other than $x(t) = \bar{x}$. □

Example 9.10. Un bras de robot à un degré de liberté (suite).

Let's consider again the robot's arm model (see Example 9.6)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= J^{-1}(-mgb \sin x_1 - kx_2 + \bar{u}),\end{aligned}\tag{9.2}$$

for which the energy function

$$V(x_1, x_2) = \frac{J}{2}x_2^2 + mgb(1 - \cos x_1) - \bar{u}x_1$$

is a Lyapunov function. Among the system's trajectories, the Lyapunov function's derivative is negative semi-definite :

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -kx_2^2 \leq 0.$$

The set $S \subset D$ such that $\dot{V}(x) = 0$ is therefore the following :

$$S = \{(x_1, x_2) \in D : x_2 = 0\}.$$

We can observe that every trajectory within S is such that the speed $x_2(t)$ is identically equal to zero (which we note $x_2(t) \equiv 0$). This immediately implies that $\dot{x}_2(t) \equiv 0$. By equation (9.2), this implies that $mgb \sin x_1(t) - \bar{u} \equiv 0$. And therefore that the only trajectory within S is indeed the equilibrium's trajectory. Thus the equilibrium is asymptotically stable. The reasoning that we just did is formalized as follows :

$$\begin{aligned}\text{trajectory } (x_1(t), x_2(t)) \in S &\Rightarrow x_2(t) \equiv 0 \\ &\Rightarrow \dot{x}_2(t) \equiv 0 \\ &\Rightarrow mgb \sin x_1(t) - \bar{u} \equiv 0 \\ &\Rightarrow x_1(t) = \bar{x}_1, x_2(t) = \bar{x}_2.\end{aligned}$$

□

9.4. Basin of attraction and global convergence

In the demonstration of the theorem 9.7, we have seen that the domain Ω_c is an invariant of the system. If the equilibrium is asymptotically stable, it means that every trajectory that starts at any point of Ω_c converges to the equilibrium. That is the reason why this set is called "basin of attraction". Lyapunov second method allows us to characterize the size of the basin of attraction, information that we could not get with the first method. That's why it can be interesting to look for a Lyapunov function, even if the equilibrium's stability can be easily demonstrated with the linearization.

One particularly interesting case is when the equilibrium point is unique and the basin of attraction contains the whole state space. That case is referred as *global asymptotic stability* whose existence conditions are developed in the following theorem.

Theorem 9.11. Global asymptotic stability.

The equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) of the system $\dot{x} = f(x, \bar{u})$ is globally asymptotically stable if it is asymptotically stable and if :

- (i) $D = \mathbb{R}^n$;
- (ii) $|x| \rightarrow \infty \Rightarrow |V(x)| \rightarrow \infty$.

□

9.5. The energy as a Lyapunov function

The choice of a Lyapunov function that is appropriate for the analysis of the equilibriums stability of a dynamic system is usually quite difficult. As we have shown with the robot with one degree of liberty example, the energy can be a good start for several physical systems. Let's examine that on a few examples.

Mechanical systems

The general equation of the dynamics of a mechanical system is (cfr Chapter 2)

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) + k(q) + h(\dot{q}) = G\bar{u}$$

Here we consider the particular case where the cinematic matrix G is constant. Let's take as function $V(q, \dot{q})$ the following function :

$$V(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + E_p(q) - q^T G\bar{u}$$

The first therm is the kinetic energy, the second one is the potential energy and the third one is the work realized by the forces and moments applied. The derivative

of this function along the trajectories is calculated as follows :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{1}{2}\dot{q}^T[\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})]\dot{q} - \dot{q}^T h(\dot{q}) \\ &= -\dot{q}^T h(\dot{q}),\end{aligned}$$

(because the matrix $\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ is antisymmetric, see chapter 2). This value is well negative semi-definite for reasonable choice of viscous friction models.

Electrical circuits

Let's take for example the non-linear RLC circuit from Chapter 8 (sec. 8.3.1). The state equations are :

$$\begin{aligned}L\dot{x}_1 &= -r(x_1) - x_2 + \bar{u}, \\ C\dot{x}_2 &= x_1.\end{aligned}$$

In these equations, x_1 denotes the current and x_2 the tension. L and C are the inductance et capacitor of the circuit while $r(x_1)$ is a non-linear resistor. We assume that the function $r(x_1)$ is monotonously increasing and passes through the origin $r(0) = 0$.

Let's take for Lyapunov function, the following function which has the dimension of an energy :

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}Lx_1^2 + \frac{1}{2}C(x_2 - \bar{u})^2 \geq 0$$

This function is positive and minimum at the equilibrium $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, \bar{u})$: $V(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$. On the other hand, we have :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}\dot{x}_2 \\ &= -x_1 r(x_1) \leq 0.\end{aligned}$$

The equilibrium is therefore stable and, using the Lasalle invariant principle, we can even conclude the asymptotic stability.

9.6. Linear systems

Let a system $\dot{x} = Ax + B\bar{u}$ and an equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) . We define as Lyapuno function $V(x) = (x - \bar{x})^T P(x - \bar{x})$ where P is a symmetric positive-definite matrix.

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^T P \dot{x} \\ &= (\bar{u}^T B^T + x^T A^T)P(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^T P(Ax + B\bar{u}) \\ &= (x - \bar{x})^T A^T P(x - \bar{x}) + (x - \bar{x})^T P A(x - \bar{x}) \\ &= -(x - \bar{x})^T Q(x - \bar{x}),\end{aligned}$$

$$\text{with } -Q = A^T P + PA. \quad (9.3)$$

This last equation is called « Lyapunov matrix equation ». If it has a solution Q that is positive-definite, then the function V will be a Lyapunov function for the system. The reasoning can also be reversed : we take a matrix Q positive-definite and we use the following theorem to conclude that the function V is indeed a Lyapunov function for the system et that the equilibrium is asymptotically stable.

Theorem 9.12. Let a n -order real matrix A . For every matrix Q positive-definite, (9.3) owns a unique solution P positive-definite if and only if A is a Hurwitz matrix (all its eigenvalues have a strictly negative real part). \square

9.7. « Bound entry - Bound state »stability

It would often be illusory to be able to apply a perfectly constant entry to a real dynamic system. In practice, because of various sources of perturbation and uncertainty, the entry will usually be a signal $u(t)$ slightly varying in the neighbourhood of the wanted equilibrium value. It is therefore relevant to take interest in the evolution of the system's state when $u(t)$ is a bound signal close to \bar{u} . We begin with the case of a linear system

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (9.4)$$

For an given initial condition $x(t_0) = x_0$ and a given entry $u(t)$, the system's trajectory is explicitly given as

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Let's consider the equilibrium $(\bar{x} = 0, \bar{u} = 0)$. This equilibrium is asymptotically stable if and only if the matrix A is a Hurwitz matrix. In that case, $\|e^{At}\|$ is bound for all t and there is positive constants k and λ such that

$$\|e^{A(t-t_0)}\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}.$$

It can be inferred that

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x_0\| + \int_{t_0}^t e^{-\lambda(t-\tau)}\|B\|\|u(\tau)\|d\tau \\ &\leq ke^{-\lambda(t-t_0)}\|x_0\| + \frac{k\|B\|}{\lambda} \sup_{t_0 \leq \tau \leq t} \|u(\tau)\|. \end{aligned} \quad (9.5)$$

We can immediately see that a bound entry $u(t)$, whatever its amplitude, does generate a bound state $x(t)$. We can also see that the effect of the initial condition

x_0 fades away with time and that the « ultimate boundary » of $x(t)$ is simply proportional to the boundary of $u(t)$:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| \leq \frac{k\|B\|}{\lambda} \|u\|_{\mathcal{L}_\infty}.$$

Let's now see how these results extend to non-linear systems. We consider the system

$$\dot{x} = f(x, u) \text{ with the equilibrium } (\bar{x}, \bar{u}) \quad (9.6)$$

and we assume that the function $f(x, u)$ is continuously differentiable in a neighbourhood of the equilibrium.

Theorem 9.13. (local) EBEB stability

If the equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) of the system (9.6) is asymptotically stable,

- (i) there are three positive constants c_1, c_2 et c_3 such that, for all initial state x_0 with $\|x_0 - \bar{x}\| < c_1$ and all entry signal $u(t)$ with $\|u(t) - \bar{u}\| < c_2$, the solution $x(t)$ is bound : $\|x(t) - x_0\| < c_3 \forall t \geq t_0$;
- (ii) there is a positive constant c_0 and a continuous function $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$ passing through the origin (meaning $\alpha(0) = 0$) and increasing¹ such that, for all entry signal $u(t)$ with $\|u(t) - \bar{u}\| < c_0 \forall t \geq t_0$, the « ultimate boundary » of $x(t)$ is an increasing function of the boundary of $u(t)$:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| \leq \alpha(\|u\|_{\mathcal{L}_\infty}). \quad \square$$

In the case where the system (9.6) is globally defined and owns an unique equilibrium, we also have the following global property.

Theorem 9.14. (global) EBEB stability

If the function $f(x, u)$ is globally continuously differentiable and is globally a Lipschitz function in (x, u) , if the equilibrium (\bar{x}, \bar{u}) is globally exponentially stable, then

- (i) for all initial condition x_0 and all entry signal $u(t)$, the solution $x(t)$ is bound ;
- (ii) the « ultimate boundary » of $x(t)$ is an increasing function of the boundary of $u(t)$. \square

We have to notice that this last theorem is quite restrictive. There are in fact numerous dynamic systems for which the function $f(x, u)$ is not globally a Lipschitz function and yet own a global EBEB property. However, the exponential stability condition for the equilibrium is crucial. Indeed, if the equilibrium is globally asymptotically stable but not globally exponentially stable, then the system (9.6) is not necessarily EBEB stable, even if $f(x, u)$ is globally a Lipschitz function.

1. such a function is called a \mathcal{K} class function

9.8. Exercices

Exercice 9.1. Un réacteur chimique

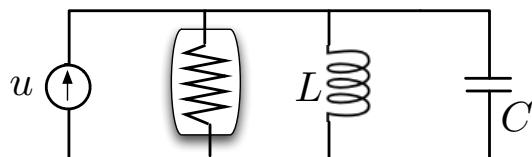
Dans un réacteur continu se déroulent deux réactions chimiques en phase liquide à volume constant faisant intervenir trois espèces chimiques X_1 , X_2 , X_3 . La dynamique du réacteur est décrite par le modèle d'état suivant (x_i désigne la concentration de X_i) :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^2 x_2 - dx_1 + du, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 x_2 - (d + k)x_2, \\ \dot{x}_3 &= 2kx_2 - dx_3.\end{aligned}$$

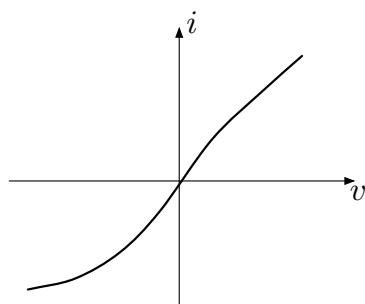
1. De quelles réactions s'agit-il ? (loi d'action des masses).
2. Dans l'orthant positif ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$) déterminer le ou les équilibres pour $\bar{u} > 0$. Indiquer combien il y a d'équilibres pour chaque valeur de \bar{u} et expliciter les conditions d'existence.
3. Analyser la stabilité des équilibres par la première méthode de Lyapunov.

Exercice 9.2. Circuit RLC

Soit le circuit RLC parallèle illustré ci-dessous :



La caractéristique courant-tension $i = g(v)$ de la résistance non-linéaire est une fonction monotone croissante telle que représentée sur la figure suivante :

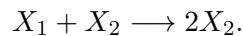


1. Etablir un modèle d'état du système.

2. Calculer les équilibres.
3. En utilisant l'énergie comme fonction de Lyapunov, analyser la stabilité globale des équilibres par la seconde méthode de Lyapunov.

Exercice 9.3. Réacteur chimique

Soit un réacteur chimique de type CSTR où se produit la réaction suivante :



1. Etablir un modèle d'état sous les hypothèses de modélisation suivantes :
 - cinétique décrite par la loi d'action des masses
 - réacteur alimenté en X_1 uniquement ($x_{1,in} = \text{cste}$)
 - le débit volumique d'alimentation est l'entrée.
2. Montrer que ce système possède un équilibre dans l'orthant positif.
3. Montrer que $V = x_1 - \bar{x}_1 \ln x_1 + x_2 - \bar{x}_2 \ln x_2$ est une fonction de Lyapunov dans l'orthant positif.
4. Démontrer que l'équilibre est globalement asymptotiquement stable dans l'orthant positif.

Exercice 9.4. Système mécanique

On considère un système mécanique à un degré de liberté. La variable de position est x_1 . Ce système est soumis à une force dérivant d'un potentiel et à un frottement visqueux linéaire.

L'énergie potentielle est donnée par

$$E_p(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{\sigma}{K + |\sigma|} d\sigma.$$

1. Etablir un modèle d'état du système.
2. Calculer les équilibres.
3. Analyser la stabilité des équilibres par la méthode directe de Lyapunov.

Exercice 9.5. Modélisation d'un neurone

Le modèle de Naka-Rushton décrivant la dynamique d'un neurone dans la mémoire à court terme est donné par les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + \frac{ux_2}{1+x_2}, \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \frac{ux_1}{1+x_1}.\end{aligned}$$

1. Montrer que le système est positif
2. Analyser l'existence et la stabilité des équilibres dans l'orthant positif (première méthode de Lyapunov).
3. Pour u constant, $0 < \bar{u} < 1$, montrer que toutes les trajectoires dans l'orthant positif convergent vers l'origine à l'aide de la fonction de Lyapunov $V = (1/2)(x_1^2 + x_2^2)$.

Exercice 9.6. Soit le système dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1^3(1 + u^2).\end{aligned}$$

Avec une fonction de Lyapunov de la forme

$$V = ax_1^\alpha + bx_2^\beta$$

où a, b, α, β sont des constantes positives à déterminer, montrer que, pour toute entrée constante $u(t) = \bar{u}$, ce système possède un équilibre unique et globalement asymptotiquement stable.

Exercice 9.7. Soit le systèmes dynamique :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\phi(x_1) + \phi(x_2), \\ \dot{x}_2 &= \phi(x_1) - 2\phi(x_2) + u.\end{aligned}$$

La fonction $\phi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes :

- a) $\phi(x)$ est une bijection,
- b) $\phi(x)$ est C^∞ ,
- c) $\phi(x)$ est strictement monotone croissante ($d\phi/dx > 0, \forall x \in \mathbb{R}$),
- d) $\phi(x)$ passe par l'origine ($\phi(0) = 0$).

1. Démontrer qu'il s'agit d'un système à compartiments.

2. Pour une entrée constante strictement positive ($\bar{u} > 0$), expliciter les conditions sous lesquelles le système possède un équilibre unique dans l'orthant positif.

3. Démontrer que cet équilibre, s'il existe, est globalement asymptotiquement stable à l'aide de la fonction de Lyapunov

$$V(x_1, x_2) = \int_{\bar{x}_1}^{x_1} (\phi(s) - \bar{u}) ds + \int_{\bar{x}_2}^{x_2} (\phi(s) - \bar{u}) ds.$$

Chapitre 10

Commandabilité et planification de trajectoires

Dans les trois chapitres précédents, nous avons étudié en détail le comportement des systèmes dynamiques *libres* dont les entrées sont *constantes* : $\dot{x} = f(x, \bar{u})$. Dans ce dernier chapitre, nous allons considérer des systèmes dynamiques *commandés* $\dot{x} = f(x, u)$ et nous intéresser en particulier à l'existence et la détermination de fonctions d'entrées $u(t)$ pouvant varier au cours du temps et permettant de piloter le système dans l'espace d'état et d'en planifier les trajectoires.

10.1. Définitions

Dans la pratique, il arrive souvent que l'on désire conduire un système dynamique d'un état initial x_0 à un état final x_f . C'est ce qu'on appelle un *problème de planification de trajectoire*. Pour résoudre un tel problème, il faut qu'il existe au moins une fonction d'entrée $u(t)$ produisant une trajectoire du système passant par les états x_0 et x_f .

Definition 10.1. Etats atteignables

Pour le système dynamique $\dot{x} = f(x, u)$, l'état final x_f est atteignable à partir de l'état initial x_0 s'il existe un temps fini T et une fonction d'entrée $u(t)$: $[t_0, t_0 + T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que $x(t_0 + T, x_0, u) = x_f$. \square

Cette notion d'atteignabilité conduit au concept de commandabilité d'un système dynamique explicité dans la définition suivante.

Definition 10.2. Commandabilité

Le système $\dot{x} = f(x, u)$ est *localement commandable* en x_f s'il existe un voisinage de x_f tel que x_f soit atteignable à partir de chaque élément du voisinage.

Le système est *globalement commandable* si tout état $x_f \in \mathbb{R}^n$ est atteignable à partir de tout état initial $x_0 \in \mathbb{R}^n$. \square

L'objet de ce chapitre est d'étudier la commandabilité et la planification de trajectoires des systèmes dynamiques $\dot{x} = f(x, u)$. Comme nous le verrons, l'analyse de l'atteignabilité et de la commandabilité est totalement élucidée pour les systèmes linéaires alors qu'il reste de nombreuses questions ouvertes pour les systèmes non linéaires. D'autre part le problème de la planification des trajectoires est entièrement résolu pour les systèmes linéaires, alors qu'on n'en connaît la solution que pour une classe restreinte de systèmes non linéaires que l'on appelle *systèmes (différentiellement) plats* et qui sont, en un certain sens, équivalents à des systèmes linéaires.

10.2. Commandabilité : systèmes linéaires

Pour vérifier si un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est complètement commandable, on peut utiliser l'un des deux critères donnés par le théorème suivant.

Theorem 10.3. Commandabilité des systèmes linéaires

Le système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$ est complètement commandable si et seulement si l'un des deux critères équivalents suivants est satisfait :

1. (Critère de Kalman) La matrice $\mathcal{C} = (B \ AB \ A^2B \dots A^{(n-1)}B)$ est ré-gulière (cette matrice est appelée *matrice de commandabilité*) ;
2. (Critère de Popov-Belevitch-Hautus) Le rang de la matrice $(sI - A \ B)$ est égal à n pour tout $s \in \mathbb{C}$. \square

Si un système linéaire n'est pas complètement commandable, on peut définir une transformation d'état pour mettre la partie non commandable du vecteur d'état en évidence.

Supposons que la matrice de commandabilité soit de rang $d < n$. On définit une matrice $T = (T_a \ T_b)$ telle que T_a contienne d colonnes linéairement indépendantes de \mathcal{C} et T_b complète la matrice par $n - d$ vecteurs indépendants des colonnes de T_a . La matrice inverse T^{-1} peut dès lors s'écrire :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} U_a \\ U_b \end{pmatrix}$$

où les sous matrices U_a et U_b sont choisies telles que :

$$T^{-1}T = \begin{pmatrix} U_a T_a & U_a T_b \\ U_b T_a & U_b T_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{pmatrix}$$

On définit la transformation d'état :

$$z = \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_a x \\ U_b x \end{pmatrix}$$

Dans ces nouvelles variables d'état, on a le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{z}_a &= U_a A T_a z_a + U_a A T_b z_b + U_a B u \\ \dot{z}_b &= U_b A T_b z_b\end{aligned}$$

En effet $U_b T_a = 0$ implique que $U_b B = 0$ et $U_b A T_a = 0$ car les colonnes de B et de $A T_a$ sont des combinaisons linéaires des colonnes de T_a . On observe que la partie z_b du vecteur d'état n'est pas influencée par l'entrée u : elle représente la partie non commandable de l'état du système.

10.3. Commandabilité : systèmes non-linéaires

L'étude de la commandabilité des systèmes non-linéaires est beaucoup plus compliquée que celle des systèmes linéaires. Nous commençons cette étude par l'examen des conclusions que l'on peut tirer de la commandabilité du linéarisé d'un système non-linéaire au voisinage d'un équilibre.

Theorem 10.4. Commandabilité locale (1)

Considérons le linéarisé du système $\dot{x} = f(x, u)$ autour d'un équilibre (\bar{x}, \bar{u}) :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{avec} \quad A = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad \text{et} \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(\bar{x}, \bar{u})}. \quad (10.1)$$

Si le système linéaire (10.1) est commandable, alors, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des états x_f atteignables à partir de \bar{x} avec des entrées $u(t) : u(t) - \bar{u} < \epsilon$, contient un voisinage de \bar{x} . \square

Cette propriété locale de commandabilité des systèmes non-linéaires a une portée limitée. Comme nous allons le voir dans l'exemple suivant, il existe en effet des systèmes non-linéaires complètement commandables, dont le linéarisé n'est pas commandable au voisinage de l'équilibre !

Example 10.5. Une voiture automobile

Considérons une voiture automobile de type « traction avant » dont les roues avant sont à la fois motrices et directrices. Le modèle cinématique s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 u_1 \\ \dot{\xi}_2 &= -\cos \theta_1 \cos \theta_2 u_1 \\ \dot{\theta}_1 &= \sin \theta_2 u_1 \\ \dot{\theta}_2 &= u_2\end{aligned}$$

où (ξ_1, ξ_2) désignent les coordonnées cartésiennes du milieu de l'essieu arrière, θ_1 l'orientation du châssis, θ_2 l'orientation des roues avant, u_1 la vitesse de propulsion et u_2 la vitesse d'orientation des roues avant.

Ce système possède une infinité d'équilibres non isolés de la forme $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, 0, 0)$. Les matrices (A, B) du linéarisé du système autour d'un quelconque de ces équilibres s'écrivent :

$$A = 0 \quad B = \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 & 0 \\ -\cos \bar{\theta}_1 \cos \bar{\theta}_2 & 0 \\ \sin \bar{\theta}_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On observe immédiatement que le système linéarisé n'est pas commandable (rang $\mathcal{C} = 2$) alors que l'intuition physique indique à l'évidence qu'une voiture automobile est un système dynamique commandable qui, dans un environnement sans obstacle, peut être manœuvré pour aller de n'importe quelle position initiale à n'importe quelle position finale. \square

Comme l'indique cet exemple, un système non-linéaire peut posséder des propriétés de commandabilité qui ne sont pas apparentes dans le linéarisé. L'analyse de ces propriétés est facilitée par l'usage de concepts et de notations de géométrie différentielle qui sont brièvement résumés en annexe. Nous en commençons l'étude par la présentation d'une procédure qui permet, lorsqu'un système n'est *pas* commandable, de mettre les variables d'état non-commandables en évidence.

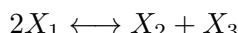
Supposons que, pour un système $\dot{x} = f(x, u)$ donné, il existe une transformation d'état $z = \phi(x)$ telle que, dans les nouvelles variables d'état, le système s'écrit comme suit :

$$z = \begin{pmatrix} z_a \\ z_b \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \dot{z}_a = \tilde{f}_a(z_a, z_b, u) \\ \dot{z}_b = \tilde{f}_b(z_b) \end{cases}$$

Il est clair, dans ce cas, que la partie z_b du vecteur d'état n'est pas influencée par l'entrée u et que le système n'est donc pas commandable. En voici un exemple simple.

Example 10.6. Un réacteur chimique

Considérons un réacteur chimique isotherme et parfaitement mélangé dans lequel se déroule la réaction réversible :



Le réacteur est alimenté par l'espèce X_1 avec un débit volumétrique constant et une concentration variable. Le modèle d'état s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2k_1x_1^2 + 2k_2x_2x_3 - dx_1 + du \\ \dot{x}_2 &= k_1x_1^2 - k_2x_2x_3 - dx_2 \\ \dot{x}_3 &= k_1x_1^2 - k_2x_2x_3 - dx_3 \end{aligned}$$

Soit la transformation d'état linéaire :

$$\begin{array}{ll} z_1 = x_1 & x_1 = z_1 \\ z_2 = x_2 & \longleftrightarrow x_2 = z_2 \\ z_3 = x_2 - x_3 & x_3 = z_2 - z_3 \end{array}$$

Dans les nouvelles variables d'état, le modèle se réécrit ;

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -2k_1 z_1^2 + 2k_2 z_2(z_2 - z_3) - dz_1 + du \\ \dot{z}_2 &= k_1 z_1^2 - k_2 z_2(z_2 - z_3) - dz_2 \\ \dot{z}_3 &= -dz_3 \end{aligned}$$

Le système n'est donc pas commandable car les trajectoires de z_3 (qui est la différence entre les concentrations des espèces X_2 et X_3) ne peuvent être influencées par l'entrée u (qui est la concentration d'alimentation de l'espèce X_1). \square

Une condition suffisante d'existence d'une partie non-commandable de l'état est donnée dans le théorème suivant pour les systèmes affines en l'entrée :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x)u_j \quad (10.2)$$

Theorem 10.7. Si, dans un voisinage U d'un point x_0 , il existe une distribution $\Delta(x)$ régulière de dimension d telle que :

1. $\Delta(x)$ est involutive
2. $\Delta(x)$ contient $\text{span}\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\}$
3. $\Delta(x)$ est invariante par rapport à $f(x)$ et $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$,

alors il existe une transformation d'état $\phi : U \rightarrow V = \phi(U)$ telle que, dans les nouvelles variables d'état $z = \phi(x)$, le système (10.2) se réécrit :

$$\begin{aligned} \dot{z}_a &= \tilde{f}_a(z_a, z_b) + \sum_{j=1}^m \tilde{g}_j(z_a, z_b)u_j \\ \dot{z}_b &= \tilde{f}_b(z_b) \end{aligned}$$

avec $\dim z_b = (n - d)$. \square

Le théorème suivant permet alors de déterminer la plus petite distribution $\Delta^*(x)$ qui vérifie les conditions ci-dessus et donc de déterminer la dimension maximum de la partie non-commandable.

Theorem 10.8. Dans un voisinage U de x_0 , on définit la séquence de distributions :

$$\begin{aligned}\Delta_0(x) &= \text{span}\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\} \\ \Delta_k(x) &= \Delta_{k-1}(x) + [f(x), \Delta_{k-1}(x)] + \sum_{j=1}^m [g_j(x), \Delta_{k-1}(x)].\end{aligned}$$

Alors $\Delta^*(x) = \Delta_{k^*}(x)$ avec k^* le plus petit entier tel que $\Delta_{k^*}(x)$ est régulière sur U et invariante par rapport à $f(x)$ et $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$. Si toutes les distributions $\Delta_k(x), 0 \leq k \leq k^*$ sont régulières sur U , alors $k^* \leq n$. \square

La dimension de Δ^* porte le nom de *rang d'atteignabilité* du système au voisinage de x_0 . L'énoncé du théorème 10.8 contient implicitement une procédure pour la détermination du rang d'atteignabilité qui consiste à générer successivement les distributions $\Delta_k(x)$. La procédure s'arrête dès qu'on en trouve une qui est régulière et invariante par rapport à f et aux g_i . Il n'est pas nécessaire de vérifier que cette distribution est involutive. Il est intéressant aussi de constater que, dans le cas d'un système linéaire $\dot{x} = Ax + Bu$, on a :

$$\Delta_k = \text{span} \{B \ AB \ \dots \ A^{k-1}B\}$$

et donc que le rang d'atteignabilité coïncide avec le rang de la matrice de commandabilité C .

Un système dont le rang d'atteignabilité est maximum (c'est-à-dire égal à n) au voisinage de x_0 possède alors une propriété de commandabilité locale semblable à celle du théorème 10.4, même si x_0 n'est pas un état d'équilibre et même si le linéarisé du système n'est pas commandable.

Theorem 10.9. Commandabilité locale (2)

Pour le système (10.2), il existe un voisinage de x_0 dont tous les états sont atteignables à partir de x_0 si et seulement si le rang d'atteignabilité du système au voisinage de x_0 est égal à n . \square

Enfin on a la propriété de commandabilité complète pour une sous-classe de systèmes.

Theorem 10.10. Commandabilité complète

Si $f(x) \in \text{span}\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)\}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ (ceci est vrai en particulier si $f(x) = 0$) et si le rang d'atteignabilité vaut n au voisinage de tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors le système (10.2) est complètement commandable. \square

Ces deux théorèmes sont illustrés dans l'exemple suivant.

Example 10.11. Une voiture automobile

Considérons à nouveau le modèle de la voiture automobile de l'exemple 10.5 qui s'écrit :

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$$

avec :

$$g_1(x) = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ -\cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule les crochets de Lie :

$$g_3(x) = [g_1(x), g_2(x)] = \begin{pmatrix} -\sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\ \cos \theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g_4(x) = [g_3(x), g_1(x)] = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie que $f(x) = 0$ et que la matrice $[g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)]$ est régulière pour tout x dans \mathbb{R}^4 . Ces deux conditions suffisent pour que les hypothèses des deux théorèmes précédents soient vérifiées. La voiture automobile est donc bien complètement commandable même si son modèle linéarisé ne l'est pas. \square

Les résultats présentés dans cette section peuvent paraître restrictifs car ils ne s'appliquent qu'à des systèmes affines en l'entrée. Leur portée est cependant plus générale car un système quelconque $\dot{x} = f(x, u)$ peut toujours être augmenté par une *extension dynamique* pour le rendre affine en l'entrée. Il suffit en effet de considérer u comme un ensemble additionnel de variables d'état et de définir un nouveau vecteur v de variables d'entrée telles que :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{u} &= v \end{aligned}$$

Avec le vecteur d'état augmenté $\xi^T = (x^T, u^T)$, le système s'écrit :

$$\dot{\xi} = \varphi(\xi) + \sum_{j=1}^m g_j v_j = \varphi(\xi) + Gv \quad (10.3)$$

$$\text{où : } \varphi(\xi) = \begin{pmatrix} f(x, u) \\ 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ I_m \end{pmatrix}$$

La commandabilité du système augmenté (10.3), que l'on peut vérifier avec les théorèmes précédents, est évidemment suffisante pour garantir la commandabilité du système original.

10.4. Planification de trajectoires

Dans les sections précédentes, nous avons étudié les conditions et les critères qui permettent de savoir si un système est commandable. Il est évidemment encore plus intéressant de pouvoir déterminer la fonction d'entrée $u(t)$ qui permet effectivement de conduire le système d'un état initial x_0 à un état final x_f en un temps raisonnable. C'est le problème de la *planification de trajectoire* que nous allons traiter maintenant.

10.4.1. Systèmes mono-entrée sous forme de Brunovski

Nous considérons ici les systèmes affines en l'entrée $\dot{x} = f(x) + g(x)u, u \in \mathbb{R}$ qui peuvent se mettre sous forme de Brunovski et qui sont caractérisés par le théorème suivant.

Theorem 10.12. Un système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ peut être mis sous forme de Brunovski dans un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si :

- 1) La matrice $\mathcal{D} = [g(x) \ ad_f g(x) \ ad_f^2 g(x) \dots ad_f^{n-1} g(x)]$ est régulière $\forall x \in U$;
- 2) La distribution $\Delta(x) = \text{span} \{g(x) \dots ad_f^{n-2} g(x)\}$ est involutive sur U . \square

Si ces conditions sont satisfaites, il existe une transformation d'état $z = \varphi(x)$, $z : U \rightarrow V$ telle que le système se réécrive sous la forme triangulaire (dite de Brunovski) :

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \alpha(z) + \beta(z)u \quad \beta(z) \neq 0 \quad \forall z \in V\end{aligned}\tag{10.4}$$

On déduit immédiatement de ce théorème qu'un *système linéaire* mono-entrée $\dot{x} = Ax + bu$ peut être mis sous forme de Brunovski si et seulement si il est complètement commandable. En effet, dans ce cas, la matrice \mathcal{D} est la matrice de commandabilité du système :

$$\mathcal{D} = \mathcal{C} = [b \ Ab \ A^2b \dots A^{(n-1)}b]$$

et la distribution Δ est nécessairement involutive puisqu'elle ne contient que des vecteurs constants. Il existe alors une transformation *linéaire* d'état :

$$z = Tx$$

telle que le système se réécrit sous forme de Brunovski :

$$\begin{aligned}\dot{z}_i &= z_{i+1} \quad i = 1, \dots, n \\ \dot{z}_n &= -\sum_{i=1}^n \alpha_i z_i + \beta u\end{aligned}$$

La matrice T est définie comme suit :

$$T = \begin{pmatrix} h^T \\ h^T A \\ \vdots \\ h^T A^{n-1} \end{pmatrix}$$

où le vecteur h est la dernière colonne de la transposée de l'inverse de la matrice de commandabilité \mathcal{C}^{-T} .

Une fois que le système, qu'il soit linéaire ou non-linéaire, est sous forme de Brunovski, le problème de planification de trajectoire devient très facile à résoudre. Nous commençons par en montrer la solution pour le cas particulier d'un système quelconque de dimension deux.

Example 10.13. Un système de dimension 2

Soit le système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) + g_1(x_1, x_2)u \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2) + g_2(x_1, x_2)u\end{aligned}$$

Le problème est de trouver une fonction d'entrée $u(t)$ qui conduise ce système d'un état initial $(x_1(0), x_2(0))$ à un état final $(x_1(T), x_2(T))$.

On suppose qu'il existe une transformation d'état :

$$\begin{aligned}z_1 &= \phi_1(x_1, x_2) \\ z_2 &= \phi_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

qui met le système sous forme de Brunovski :

$$\dot{z}_1 = z_2 \tag{10.5}$$

$$\dot{z}_2 = \alpha(z_1, z_2) + \beta(z_1, z_2)u \tag{10.6}$$

Le problème est maintenant de trouver une fonction $u(t)$ qui conduise le système (10.5)-(10.6) de l'état initial $z_1(0) = \phi_1(x_1(0), x_2(0))$, $z_2(0) = \phi_2(x_1(0), x_2(0))$ à l'état final $z_1(T) = \phi_1(x_1(T), x_2(T))$, $z_2(T) = \phi_2(x_1(T), x_2(T))$. Pour la variable d'état $z_1(t)$, on définit une trajectoire polynomiale de la forme :

$$z_1(t) = \lambda_3\left(\frac{t}{T}\right)^3 + \lambda_2\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \lambda_1\left(\frac{t}{T}\right) + \lambda_0$$

où les coefficients λ_i sont pour le moment inconnus. On déduit de la forme de Brunovski que la trajectoire de $z_2(t)$ doit être de la forme :

$$z_2(t) = \dot{z}_1(t) = \frac{3}{T}\lambda_3\left(\frac{t}{T}\right)^2 + \frac{2}{T}\lambda_2\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{T}\lambda_1$$

En explicitant les expressions de $z_1(t)$ et $z_2(t)$ aux instants $t = 0$ et $t = T$, on observe alors que les coefficients λ_i sont solution du système d'équations linéaires :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{T} & \frac{2}{T} & \frac{3}{T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ z_1(T) \\ z_2(T) \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

Les λ_i étant ainsi déterminés, on connaît maintenant une trajectoire $z_1(t), z_2(t)$ qui relie les états initial et final désirés et on peut calculer l'entrée $u(t)$ correspondante :

$$u(t) = \frac{\dot{z}_2(t) - \alpha(z_1(t), z_2(t))}{\beta(z_1(t), z_2(t))}$$

avec

$$\dot{z}_2(t) = \frac{6}{T^2} \lambda_3(\frac{t}{T}) + \frac{2}{T^2} \lambda_2$$

Le problème de la planification de trajectoire est ainsi résolu. \square

Le cas particulier d'un système de dimension 2 que nous venons d'étudier se généralise facilement en dimension n . Rappelons qu'on suppose que le système est sous forme de Brunovski :

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= \alpha(z) + \beta(z)u \quad \beta(z) \neq 0 \end{aligned}$$

Il suffit de définir, pour $z_1(t)$, une trajectoire polynomiale de la forme :

$$z_1(t) = \sum_{i=0}^{2n-1} \lambda_i (\frac{t}{T})^i$$

En calculant les dérivées successives de $z_1(t)$, on obtient les expressions de $z_j(t)$, $j = 2, \dots, n$:

$$z_j(t) = \sum_{i=j-1}^{2n-1} \frac{i!}{(i-j+1)!} \frac{\lambda_i}{T^{j-1}} (\frac{t}{T})^{-j+1}$$

En explicitant ensuite ces expressions aux instants $t = 0$ et $t = T$, on obtient un système d'équations linéaires qui généralise le système (10.7) et permet de calculer les λ_i . Il ne reste plus alors qu'à calculer l'entrée $u(t)$:

$$u(t) = \frac{\dot{z}_n(t) - \alpha(z(t))}{\beta(z(t))}$$

Remark 10.14. Nous avons présenté ci-dessus une solution du problème de planification basée sur l'utilisation de fonctions polynomiales d'ordre $2n - 1$ pour générer les trajectoires du système. Le choix de telles fonctions polynomiales n'a cependant rien d'impératif. D'une manière plus générale, comme on peut le déduire aisément des développements précédents, on peut utiliser des combinaisons linéaires de $2n - 1$ fonctions linéairement indépendantes quelconques.

10.4.2. Systèmes linéaires multi-entrées

Nous considérons maintenant des systèmes linéaires multi-entrées de la forme suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^m$$

On suppose que $\text{rang}(B) = m$ et que le système est commandable. On définit les *indices de commandabilité* $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$:

$$\delta_i = \text{card}[m_j \geq i : j \geq 0]$$

avec

$$\begin{aligned} m_0 &= \text{rang } B \\ m_1 &= \text{rang}[B, AB] - \text{rang } B \\ &\vdots \\ m_{n-1} &= \text{rang}[B, \dots, A^{n-1}B] - \text{rang}[B, \dots, A^{n-2}B] \end{aligned}$$

Par définition, on a :

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_m \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^m \delta_j = n$$

Il existe alors une transformation d'état $z = Tx$ qui permet de mettre le système sous une forme de Brunovski généralisée constituée de m blocs ayant chacun la forme triangulaire suivante :

$$\begin{aligned} \dot{z}_{j1} &= z_{j2} \\ \dot{z}_{j2} &= z_{j3} \\ &\vdots \\ \dot{z}_{j\delta_{j-1}} &= z_{j\delta_j} \\ \dot{z}_{j\delta_j} &= \sum_{\substack{i=1, m \\ i=1, \delta_j}} \alpha_{ji} z_{ji} + \sum_{k=1, m} \beta_{jk} u_k \end{aligned} \tag{10.8}$$

Le vecteur d'état z est formé des n variables z_{ji} , $j = 1 \dots m$, $i = 1 \dots \delta_j$. La matrice $G = [\beta_{jk}]$ est carrée et inversible. Cette forme de Brunovski multi-entrées peut alors être utilisée, comme dans le cas mono-entrée, pour résoudre des problèmes de planification de trajectoire.

10.4.3. Sorties de Brunovski

En introduisant la notation $y_j = z_{j1}$, le modèle d'état (10.8) peut aussi être écrit sous la forme plus compacte

$$\dot{y}_j^{(\delta_j+1)} = \sum_{\substack{j=1, m \\ i=1, \delta_j}} \alpha_{ji} y_j^{(i)} + \sum_{k=1, m} \beta_{jk} u_k \quad j = 1, \dots, m$$

c'est-à-dire sous la forme de m équations différentielles linéaires d'ordre $(\delta_j + 1)$. Les variables y_j sont des combinaisons linéaires de l'état x et sont appelées *sorties de Brunovski*. On remarque que le nombre de sorties de Brunovski est égal au nombre d'entrées du système.

10.4.4. Systèmes non-linéaires multi-entrées

Considérons maintenant un système non-linéaire multi-entrées, affine en l'entrée :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j.$$

Pour ce système, on peut étendre la notion de forme de Brunovski multi-entrées si il existe une transformation d'état non-linéaire $z = T(x)$ qui permette de mettre le système sous la forme bloc-triangulaire

$$\begin{aligned} \dot{z}_{j1} &= z_{j2} \\ \dot{z}_{j2} &= z_{j3} \\ &\vdots && j = 1, \dots, m \\ \dot{z}_{j\delta_j-1} &= z_{j\delta_j} \\ \dot{z}_{j\delta_j} &= \alpha_j(z) + \sum_{k=1, m} \beta_{jk}(z) u_k \end{aligned}$$

où le vecteur d'état z est formé de n variables z_{ji} , $j = 1 \dots m$, $i = 1 \dots \delta_j$ et la matrice carrée $G(z) = [\beta_{jk}(z)]$ est inversible. Dans ce cas, les sorties de Brunovski sont des fonctions non-linéaires de l'état ($y_j = z_{1j} = h_j(x)$) et le modèle peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations différentielles nonlinéaires

$$\dot{y}_j^{(\delta_j+1)} = \alpha_j(z) + \sum_{k=1, m} \beta_{jk}(z) u_k \quad j = 1, \dots, m \quad (10.9)$$

où le vecteur z est maintenant défini comme suit :

$$z = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(\delta_1)}, \dots, y_m, \dot{y}_m, \dots, y_m^{(\delta_m)}).$$

Contrairement au cas linéaire, les systèmes non-linéaires commandables ne peuvent pas toujours être mis sous une telle forme de Brunovski multi-entrées. Il sort du cadre de ce texte de discuter des conditions sous lesquelles la transformation est possible. C'est d'ailleurs une question qui n'est pas complètement clarifiée et qui fait encore l'objet de recherches actives à l'heure actuelle. Nous nous limiterons à présenter les deux exemples ci-dessous. Le premier est un exemple simple où le système est naturellement sous la forme de Brunovski multi-entrées (10.9). Le deuxième exemple est plus complexe. Il montrera un système commandable pour lequel il faut, par une *extension dynamique*, utiliser une forme de Brunovski augmentée dont la dimension est supérieure à la dimension du système lui-même.

Example 10.15. Un robot manipulateur

Considérons à nouveau le modèle du robot manipulateur à deux degrés de liberté que nous avons étudié au chapitre 2 (Exemple 2.2). En examinant le modèle, on observe facilement qu'il est d'emblée donné sous une forme de Brunovski multi-entrées avec les deux coordonnées de position $y_1 = x_1$ et $y_2 = \theta_2$ comme sorties de Brunovski. Pour éviter d'inverser explicitement la matrice d'inertie, on peut écrire le modèle comme suit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 + m_2 & m_2 b \cos y_2 \\ m_2 b \cos y_2 & I_2 + m_2 b^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} m_2 b \dot{y}_2^2 \sin y_2 + u_1 \\ -m_2 b g_o \sin y_2 + u_2 \end{pmatrix}.$$

Les indices de commandabilité sont ici $\delta_1 = \delta_2 = 2$. La matrice $G(z)$ est l'inverse de la matrice d'inertie. \square

Example 10.16. Dynamique d'une fusée

Au chapitre 2 (Exemple 2.1), nous avons établi le modèle de la dynamique d'une fusée comme suit :

— Equations de translation

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= (F_1 + F_2) \cos \theta \\ m\ddot{y} &= (F_1 + F_2) \sin \theta - mg_0 \end{aligned}$$

— Equation de rotation

$$I\ddot{\theta} = (F_2 - F_1)d \sin \alpha$$

Dans ces équations, (x, y) est la position du centre de masse de la fusée, θ l'angle de la fusée par rapport à l'horizontale, F_1 et F_2 les poussées des réacteurs, m la masse de la fusée, I son moment d'inertie, d et α des paramètres géométriques

et g_0 l'accélération de la gravité. Pour simplifier l'écriture sans perte de généralité, nous définissons les entrées

$$u_1 = \frac{F_1 + F_2}{m}, \quad u_2 = \frac{(F_2 - F_1)d \sin \alpha}{I}.$$

Avec ces notations, le modèle d'état s'écrit simplement :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \ddot{y} &= u_1 \sin \theta - g_0 \\ \ddot{\theta} &= u_2\end{aligned}$$

Ce système est complètement commandable en vertu du Théorème 10.10. Intuitivement, on peut penser que les coordonnées x et y sont les sorties de Brunovski. Nous allons voir que cette intuition est justifiée, mais qu'elle implique une définition étendue de la notion de forme de Brunovski.

Calculons les dérivées troisièmes des coordonnées x et y :

$$\begin{aligned}\ddot{\ddot{x}} &= \dot{u}_1 \cos \theta - u_1 \dot{\theta} \sin \theta \\ \ddot{\ddot{y}} &= \dot{u}_1 \sin \theta + u_1 \dot{\theta} \cos \theta\end{aligned}$$

Il est clair que ces expressions ne peuvent pas être utilisées pour bâtir une forme de Brunovski du type (10.9) car elles ne contiennent pas l'entrée u_2 . Par contre si on considère l'entrée u_1 comme une variable d'état supplémentaire et qu'on ajoute deux intégrateurs à l'entrée du système, alors on peut montrer que le système étendu possède une forme de Brunovski multi-entrées avec les coordonnées $y_1 = x$ et $y_2 = y$ comme sorties de Brunovski. Le système étendu s'écrit donc comme suit :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= u_1 \cos \theta \\ \ddot{y} &= u_1 \sin \theta \\ \ddot{\theta} &= u_2 \\ \ddot{\ddot{u}}_1 &= w_1\end{aligned}\tag{10.10}$$

C'est un système qui est maintenant de dimension 8 (alors que le système de départ était de dimension 6) avec deux entrées w_1 et u_2 . Calculons les dérivées 4-ièmes des sorties de Brunovski x et y :

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c} \ddot{\ddot{x}} \\ \ddot{\ddot{y}} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} -2\dot{u}_1 \dot{\theta} \sin \theta - u_1 \dot{\theta}^2 \cos \theta \\ 2\dot{u}_1 \dot{\theta} \cos \theta + u_1 \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{array} \right) \\ &\quad + \left(\begin{array}{cc} \cos \theta & -u_1 \sin \theta \\ \sin \theta & u_1 \cos \theta \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} w_1 \\ u_2 \end{array} \right).\end{aligned}\tag{10.11}$$

Il est maintenant clair que ce système peut être écrit sous une forme de Brunovski multi-entrées de la forme :

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \vdots \\ \ddot{y}_n \end{pmatrix} = \alpha(z) + G(z) \begin{pmatrix} w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

En effet, à partir du modèle d'état (10.10), les différents termes qui apparaissent dans l'équation (10.11) peuvent être exprimés (après un peu de calcul !) en fonction des sorties de Brunovski $y_1 = x$ et $y_2 = y$ et de leurs dérivées, comme suit :

$$u_1 \cos \theta = \ddot{y}_1, \quad u_1 \sin \theta = \ddot{y}_2 + g_o,$$

$$\sin \theta = \frac{\ddot{y}_2 + g_o}{\sqrt{\ddot{y}_1^2 + (\ddot{y}_2 + g_o)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\ddot{y}_1}{\sqrt{\ddot{y}_1^2 + (\ddot{y}_2 + g_o)^2}},$$

$$\dot{\theta} = \frac{\ddot{y}_1 \ddot{y}_2 - (\ddot{y}_2 + g_o) \ddot{y}_1}{\ddot{y}_1^2 + (\ddot{y}_2 + g_o)^2},$$

$$\dot{u}_1 \cos \theta = \ddot{y}_1 + \dot{\theta}(\ddot{y}_2 + g_o), \quad \dot{u}_1 \sin \theta = \ddot{y}_2 - \dot{\theta} \ddot{y}_1.$$

D'autre part, la matrice

$$G(z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -u_1 \sin \theta \\ \sin \theta & u_1 \cos \theta \end{pmatrix}$$

est régulière pour tout θ et pour tout $u_1 \neq 0$ (c-à-d tant que la poussée totale $F_1 + F_2$ des moteurs de la fusée n'est pas nulle). \square

Les systèmes non-linéaires qui peuvent être mis sous une forme de Brunovski multi-entrées, moyennant éventuellement une extension dynamique, sont appelés dans la littérature, *systèmes (différentiellement) plats* parce qu'ils sont, en un certain sens, équivalents à des systèmes linéaires comme le montre la méthode de calcul de la planification des trajectoires. Pour cette raison, les sorties de Brunovski sont parfois aussi appelées *sorties plates*.

10.5. Annexe : formules de géométrie différentielle

1. Champ de vecteur

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

2. Crochet de Lie

$$[f(x), g(x)] = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x)$$

$$[f(x), g(x)] = -[g(x), f(x)]$$

3. Notation itérative

$$ad_f g = [f, g]$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f g] = [f, [f, g]]$$

$$\vdots$$

$$ad_f^k g = [f, ad_f^{k-1} g]$$

4. Distribution = ensemble d'espaces vectoriels

$$\Delta(x) = \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)\}$$

5. Distribution Δ *involutive* si $[f_1, f_2] \in \Delta \quad \forall f_1 \in \Delta, f_2 \in \Delta$ 6. Distribution Δ *invariante par rapport à g* si

$$\forall f \in \Delta \Rightarrow [g, f] \in \Delta$$

10.6. Exercices

Exercice 10.1. Une montgolfière¹

On considère le modèle suivant pour une montgolfière :

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\frac{1}{\tau_1}\theta + u \\ \dot{v} &= -\frac{1}{\tau_2}v + \sigma\theta \\ \dot{h} &= v\end{aligned}$$

1. Problème extrait de "Analyse et commande de systèmes dynamiques" par F. Bonnans et P. Rouchon, Manuel de l' Ecole Polytechnique (France), édition de 2003.

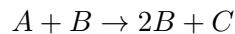
où θ est l'écart de température de l'air par rapport à la température d'équilibre,
 u est la commande (proportionnelle à la quantité d'énergie utilisée pour chauffer
l'air du ballon),
 v est la vitesse verticale (vitesse ascensionnelle),
 h est la hauteur.

1. Commenter les équations.
2. Le système est-il commandable ?

3. Planifier une trajectoire de $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h_1 \end{pmatrix}$ en $T = 1$.

Exercice 10.2. Un réacteur biochimique

Soit un réacteur à volume constant (unitaire) alimenté en réactif A (débit d , concentration x_A^{in}) dans lequel se déroule la réaction



La cinétique de la réaction est donnée par la loi d'action des masses.

1. Donner une représentation d'état du système réactionnel.
2. Trouver, si c'est possible, un difféomorphisme mettant en évidence les modes non commandables du système. Examiner les 2 cas suivants :

La commande est d

La commande est x_A^{in}

Exercice 10.3. Contrôle d'attitude d'un satellite

Le contrôle de l'orientation d'un satellite (appelé contrôle d'attitude) peut avoir divers objectifs : pointer une antenne, un appareil de mesure ou un panneau solaire dans la bonne direction, éviter la déterioration par les rayons solaires d'éléments sensibles, orienter le satellite en vue de manœuvres orbitales etc...

On considère un satellite dans l'espace dont les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_1 x_2 x_3 + b_1 u_1 \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_1 x_3 + b_2 u_2 \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_1 x_2\end{aligned}$$

Etudier la commandabilité locale (Théorème 10.9) de ce système ($a_i \neq 0$ $b_i \neq 0$).

Exercice 10.4. Un plongeur²

On considère le modèle ci-dessous décrivant la dynamique verticale d'un plongeur équipé d'un gilet stabilisateur contenant une quantité réglable d'air, notée q (exprimée en moles) :

$$\begin{aligned} M \frac{d^2h}{dt^2} &= Mg - \rho g \left(V_0 + \frac{qRT}{P_0 + \rho h} \right) \\ \frac{dq}{dt} &= u \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

h : profondeur du plongeur mesurée positivement depuis la surface

M	masse du plongeur	constantes
P_0	pression atmosphérique	
T	température	
R	constante de Boltzmann	
ρ	masse spécifique de l'eau	
V_0	volume du plongeur	

La première équation est un bilan de force selon l'axe vertical. Ce bilan comprend la poussée d'Archimède $\rho g(V_0 + V_g)$ où V_g est le volume du gilet obtenu en fonction de la pression $p = P_0 + \rho h$ par la loi des gaz parfaits $PV = qRT$.

La deuxième équation représente le remplissage du gilet par l'air des bouteilles ($u > 0$) ou la purge du gilet ($u < 0$).

1. Montrer que le système peut être mis sous forme de Brunovski.
2. Montrer que le système est commandable.
3. On désire remonter de façon contrôlée entre deux paliers stabilisés. Le palier de départ ($t = 0$) est à la profondeur \bar{h}_1 . Le palier d'arrivée ($t = t_f$) est à la profondeur \bar{h}_2 . Indiquer comment calculer l'entrée $u(t)$ qui assure la transition entre ces deux équilibres.

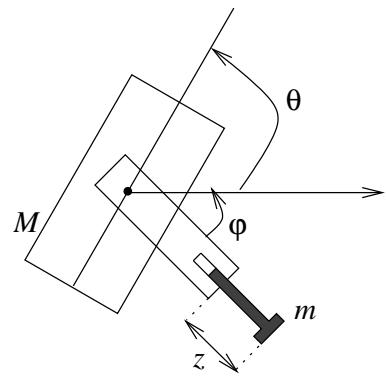
Exercice 10.5. Un robot sauteur

On considère un « robot sauteur » schématisé comme ci-dessous. Ce robot est formé d'un corps de masse M muni d'une jambe de masse m .

La jambe est articulée et on peut en contrôler l'orientation φ et l'extension z . La conservation du moment angulaire autour du centre de masse instantané s'écrit ($d = \text{constante}$) :

$$M\dot{\theta} + m(z + d)^2(\dot{\theta} + \dot{\varphi}) = 0$$

2. Problème extrait de "Analyse et commande de systèmes dynamiques" par F. Bonnans et P. Rouchon, Manuel de l' Ecole Polytechnique (France), édition de 2003.



Les deux entrées de commande du système sont les vitesses d'orientation et d'élongation de la jambe.

$$u_1 = \dot{\varphi} \quad (2) \qquad u_2 = \dot{z} \quad (3)$$

1. Ecrire les 3 équations (1) à (3) sous la forme d'un modèle d'état dont les entrées sont u_1 et u_2 .
2. Examiner si le système décrit par ce modèle est complètement commandable.