Pontificia Universidad Católica de Chile

Instituto de Economía

Tarea 2 - Desafíos de modelar las pensiones en Chile

Gestión y Regulación de Riesgos Financieros

Constanza Muñoz

Profesor: José Miguel Cruz

Fecha: 14 de junio de 2025

Pregunta 1: Estimación de parámetros bajo un Movimiento Browniano Geométrico (MBG)

Se modela la dinámica del valor cuota $F_i(t)$ de cada fondo $i \in \{A, B, C, D, E\}$ como un **Movimiento Browniano Geométrico (MBG)**. Bajo esta hipótesis, la evolución estocástica del valor cuota está dada por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dF_i}{F_i} = \left(\mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2\right) dt + \sigma_i \, dz_i$$

donde:

- μ_i es la tasa de crecimiento esperada del valor cuota del fondo i,
- σ_i es la volatilidad del fondo i,
- dz_i representa un incremento de un Browniano estándar,
- y se indica que $E[dz_i \cdot dz_j] = \rho_{ij} dt$, con ρ_{ij} la correlación entre los shocks de los fondos i y j.

Supuestos

1. Se asume que los retornos son independientes e idénticamente distribuidos (i.i.d.) con media y varianza constantes durante el periodo analizado.
2. Se trabaja con retornos logarítmicos mensuales:
$$\text{RetLog}_{i,t} = \ln\left(\frac{F_{i,t}}{F_{i,t-1}}\right)$$
3. Se considera una base temporal mensual ($dt = 1$).
4. La estimación de parámetros se realiza sobre los datos del último día de cada mes.

Estimación de parámetros

Dado que el MBG implica que los retornos logarítmicos son normales, se tiene:

$$E[\text{RetLog}_i] = \mu_i + \frac{1}{2}\sigma_i^2 \quad \Rightarrow \quad \mu_i = E[\text{RetLog}_i] - \frac{1}{2}\sigma_i^2$$

- $E[\text{RetLog}_i]$ se estima con el promedio muestral de los retornos logarítmicos mensuales del fondo i.
- σ_i se estima como la desviación estándar muestral de dichos retornos.
- La matriz de correlaciones ρ_{ij} se estima empíricamente a partir de los retornos logarítmicos mensuales.

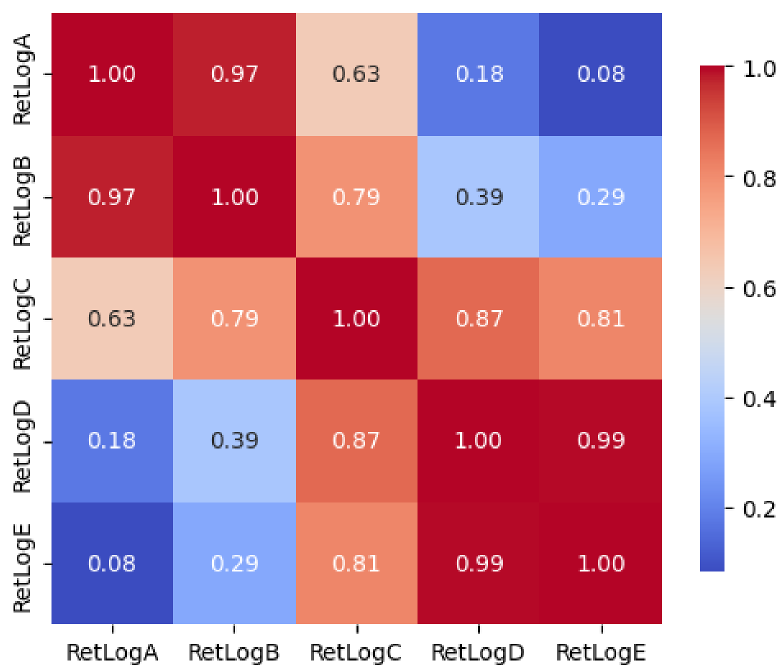
Resultados

Cuadro 1: Estimaciones de μ_i, σ_i y correlaciones entre fondos

Fondo	$E[\text{RetLog}_i]$	σ_i	μ_i
A	0.009312	0.026320	0.008966
B	0.008052	0.020396	0.008659
C	0.007682	0.019169	0.007498
D	0.005564	0.027332	0.006190
E	0.006344	0.032161	0.005827

La matriz de correlaciones estimada es:

Cuadro 2: Matriz de correlaciones ρ_{ij} entre retornos logarítmicos mensuales



Análisis final

El modelo MBG permite capturar de forma simplificada la evolución estocástica de los fondos, y es coherente con el comportamiento de activos financieros en horizontes cortos. Los fondos A y B presentan mayor retorno esperado, lo cual está en línea con su mayor exposición a renta variable. La mayor volatilidad observada en el fondo E refleja su sensibilidad al tipo de cambio o activos más volátiles. La matriz de correlaciones muestra interdependencias relevantes, especialmente entre fondos con composiciones similares.

Pregunta 2: Simulación de trayectorias futuras del valor cuota

Con base en los parámetros estimados previamente (μ_i, σ_i y ρ_{ij}), se simula la trayectoria del valor cuota $F_i(t)$ para cada fondo i durante los próximos 35 años, asumiendo un paso mensual ($dt = \frac{1}{12}$). El proceso sigue un Movimiento Browniano Geométrico:

$$\frac{dF_i}{F_i} = \mu_i \, dt + \sigma_i \, dz_i$$

Simulación correlacionada con Cholesky

Para capturar la correlación entre los fondos, se genera un vector de shocks dz multivariado normal de dimensión 5×1, tal que:

$$dz \sim \mathcal{N}(0, \Sigma) \quad \text{con} \quad \Sigma = LL^\top$$

donde L es la descomposición de Cholesky de la matriz de correlación ρ, y $dz = L \cdot \varepsilon$, con $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, I)$. Cada trayectoria se actualiza iterativamente según:

$$F_{i,t+1} = F_{i,t} \cdot \exp\left(\mu_i \, dt + \sigma_i \cdot dz_{i,t}\right)$$

Se simularon $N = 10{,}000$ trayectorias para cada fondo a lo largo de $T = 35 \times 12 = 420$ períodos mensuales, utilizando como valor inicial $F_{i,0}$ el valor cuota real observado a mayo de 2025.

Resultados y estadísticos

Para cada fondo y cada mes, se calcularon el Valor cuota promedio, la desviación estándar y los percentiles 10, 25, 50 (mediana), 75 y 90. En la siguiente imagen, se presentan los gráficos que muestran la evolución simulada de cada fondo.

Los resultados muestran que los fondos con mayor μ_i (como el fondo A) tienden a generar trayectorias crecientes con mayor dispersión, producto de su mayor exposición al riesgo. La dispersión entre el percentil 10 y 90 ilustra el rango de incertidumbre asociado a la evolución futura del valor cuota. En cambio, fondos más conservadores (como el E) exhiben trayectorias más estables y menos volátiles, pero con menor crecimiento esperado.

Estos patrones reflejan diferencias importantes de riesgo-rendimiento que serán clave al momento de simular la acumulación de capital para cotizantes en distintas etapas de su vida.

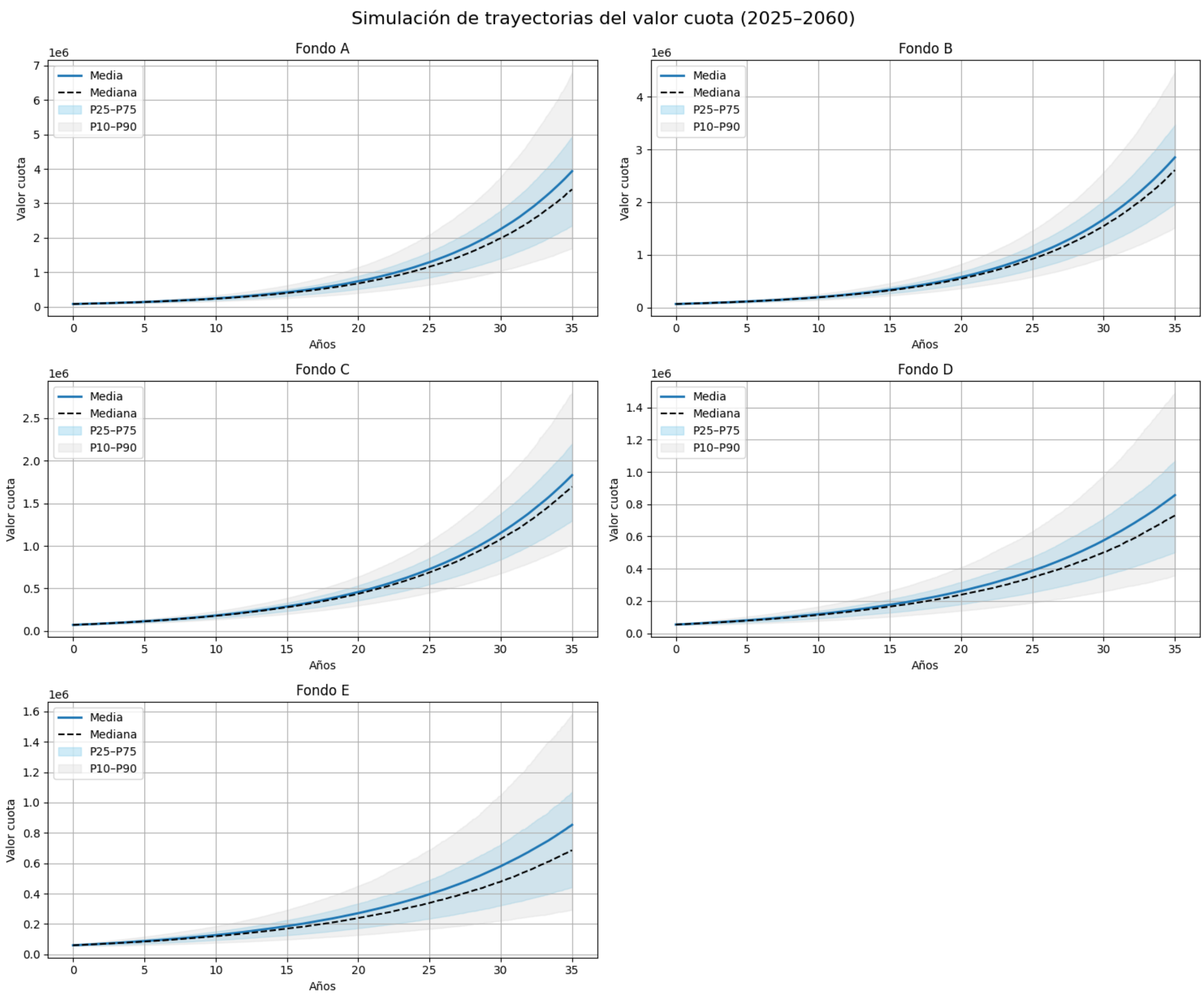


Figura 1: Trayectorias simuladas del valor cuota (media, mediana y percentiles)

Pregunta 3: Simulación del ahorro acumulado para cada individuo

Se consideran dos individuos representativos con características distintas:

- **Persona 1**: Mujer de 35 años, quintil 2, sueldo mensual imponible de $554.179, fondo A, sin monto acumulado previo.
- **Persona 2**: Hombre de 58 años, quintil 4, sueldo mensual imponible de $1.388.719, fondo E, con un monto acumulado previo de $52.178.083.

Ambos cotizan un 10 % de su ingreso imponible mensualmente hasta la edad legal de jubilación (60 años para mujeres, 65 años para hombres), sin lagunas previsionales.

Cálculo de capital acumulado

El capital acumulado se estima simulando la compra mensual de cuotas del fondo correspondiente. En cada mes t, el número de cuotas adquiridas es:

$$\text{cuotas}_t = \frac{\text{aporte}_t}{F_t}$$

donde F_t es el valor cuota simulado del fondo elegido en el mes t. El total de cuotas acumuladas se multiplica por el valor cuota al momento de la jubilación:

$$\text{monto final} = \left(\sum_{t=1}^{T} \text{cuotas}_t \right) \cdot F_T$$

Finalmente, se suma el monto acumulado previo en caso de existir. Se obtienen las distribuciones simuladas del monto final acumulado para cada persona.

Resultados

Los resultados incluyen la media y los percentiles 25 y 75 del monto total acumulado, considerando 10.000 trayectorias de simulación por individuo.

Individuo	Promedio + capital	P25	P75	Capital incial
Persona 1	$92.681.929	$68.933.688	$109.649.018	$0
Persona 2	$67.719.427	$65.681.257	$69.414.978	$52.178.083

Cuadro 3: Estadísticas del monto final acumulado al momento de jubilación

Distribución del monto acumulado

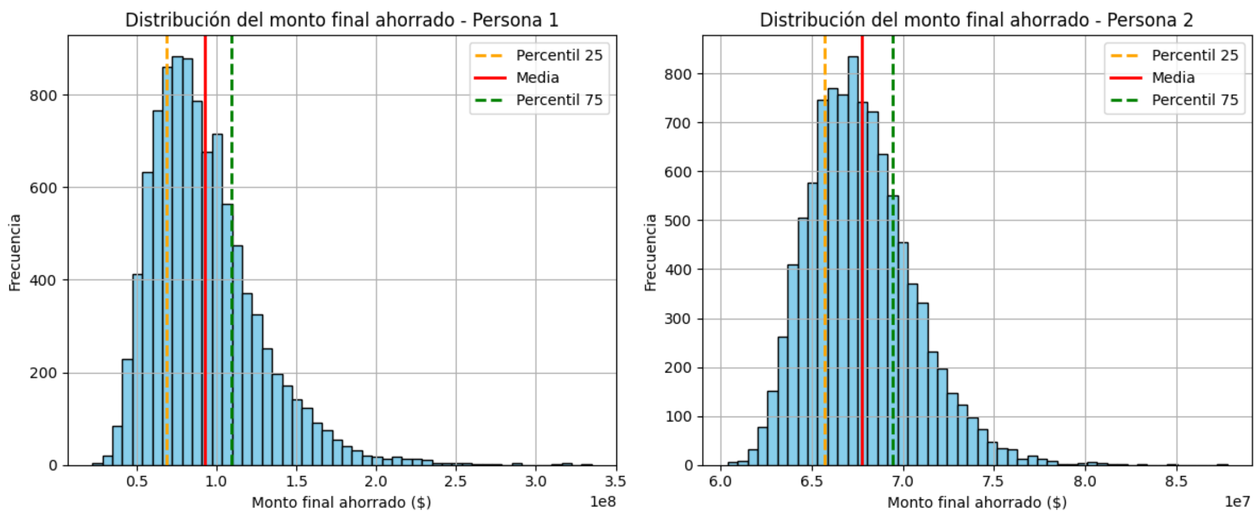


Figura 2: Distribución simulada del monto total acumulado para cada individuo

Análisis

Se observa que la dispersión del monto acumulado para Persona 1 es considerablemente mayor, reflejando tanto la mayor cantidad de años de cotización restantes como la mayor volatilidad asociada al fondo A. En contraste, Persona 2, con menor tiempo de cotización y un fondo más conservador, presenta menor variabilidad pero un monto base considerablemente más alto.

Esto refuerza la importancia de la edad y del fondo elegido, dado que el efecto del interés compuesto es más significativo para cotizantes jóvenes. Además, se constata que incluso con sueldos más bajos, los individuos que comienzan a cotizar más temprano pueden alcanzar montos significativos bajo escenarios favorables de rentabilidad.

Pregunta 4: Cálculo de la pensión vitalicia y subsidio necesario

Se supone que, al momento de la jubilación, el monto total acumulado se entrega a una compañía de seguros que ofrece una pensión vitalicia con una tasa de interés garantizada del 5 % anual. La pensión mensual se determina usando la fórmula de una anualidad, suponiendo una esperanza de vida de 81 años para ambos sexos según datos del Banco Mundial [1].

$$RV = \frac{M \cdot r}{1 - (1 + r)^{-n}}$$

donde:

- RV: pensión mensual de tipo Renta Vitalicia
- M: monto total ahorrado al momento de jubilación, considerando el capital acumulado inicial que tenían los individuos.
- r: tasa de interés mensual equivalente: $r = (1 + 0{,}05)^{1/12} - 1$
- n: número de meses esperados de vida luego de la jubilación.

Cálculo del subsidio estatal

Se considera que el Estado garantiza una pensión mínima equivalente al sueldo mínimo vigente: \$529.000 mensuales (valor a junio 2025) [2] Para cada simulación, si la pensión estimada es menor a ese umbral, se calcula el subsidio necesario para alcanzarlo:

$$\text{subsidio mensual} = \text{máx}(0, \text{sueldo mínimo} - PMT)$$

Luego, el valor presente del subsidio completo se calcula como la suma descontada de estos flujos mensuales a una tasa mensual r:

$$VP_{\text{subsidio}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\text{subsidio mensual}}{(1 + r)^t}$$

[1] Fuente: https://datos.bancomundial.org

[2] Acuerdo salario mínimo, mayo 2025: https://www.mintrab.gob.cl

Resultados

Individuo	Promedio	P25	P75	Prob. (< $529.000)	Subsidio (VP)
Persona 1	$696.818	$518.270	$824.383	27,13 %	$3.319.957
Persona 2	$509.140	$493.817	$521.888	83,21 %	$2.983.489

Cuadro 4: Estadísticas de la pensión mensual y subsidio estatal necesario en valor presente

Análisis

Los resultados muestran diferencias importantes en el nivel de pensión alcanzado por los individuos, a pesar de que ambos cotizan bajo un mismo sistema, misma AFP y enfrentan la misma tasa de interés técnica del 5 % anual para convertir su ahorro en una renta vitalicia.

La persona 1 obtiene una pensión promedio de $696.818, superior al sueldo mínimo, aunque presenta una probabilidad del 27,13 % de no alcanzarlo. Esto refleja una incertidumbre moderada en sus trayectorias, con un subsidio estatal esperado en valor presente de $3.319.957. En contraste, la persona 2, pese a tener un mayor ingreso y capital inicial, no supera el mínimo con su pensión promedio de $509.140, enfrentando una alta probabilidad (83,21 %) de necesitar subsidio. Sin embargo, su menor dispersión implica que el apoyo estatal requerido es más acotado, con un valor presente promedio de $2.983.489.

Los resultados revelan una situación compleja desde el punto de vista de política previsional. Si bien la **persona 1** (mujer de 35 años, quintil 2) acumula un capital suficiente para alcanzar, en promedio, una pensión mayor que la de la **persona 2** (hombre de 58 años, quintil 4), la dispersión de resultados en sus simulaciones es mayor, lo que se traduce en una mayor probabilidad de trayectorias extremas que requieren apoyo estatal. Esto explica que, aun con una mejor pensión esperada, el **valor presente del subsidio** que necesita la persona 1 sea superior al de la otra.

Por otro lado, la **persona 2**, al contar con un capital acumulado previo y estar próximo a la jubilación, enfrenta menor incertidumbre en la evolución de su pensión, pero al invertir en un fondo conservador y tener menos tiempo de cotización restante, su pensión promedio es baja y se mantiene cerca del umbral del sueldo mínimo. Por ello, presenta una **mayor probabilidad de requerir subsidio**, pero con menor magnitud esperada.

Este resultado destaca dos elementos clave:

- La **importancia del horizonte temporal** y del interés compuesto, que permite que los más jóvenes, incluso con bajos sueldos, acumulen montos significativos bajo escenarios favorables.
- La **influencia de la volatilidad y el fondo elegido**, donde opciones más riesgosas como el Fondo A pueden generar mejores rentabilidades, pero también trayectorias más inciertas, con potencial necesidad de protección estatal.