Tarea 5 : Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Constanza Urzúa Cisterna, Rut 18.837.487-5

27 de Octubre del 2015

1 Introducción

Se debe integrar la ecuación de Poisson en 2 dimensiones para el potencial electroestático de una caja rectangular de medidas 10 X 15 cm la cual está conectada a tierra por lo que en su perimetro $V = 0$.

$$\nabla^2 V(x, y) = -\rho(x, y)$$

Dentro de la caja hay una linea en y=-5.5 x=[-3,3],esta linea posee las siguientes condiciones derivativas: (cabe destacar que la posición (x,y)= (0,0) está al centro de la caja).

$$\frac{dV}{dn} = \pm 1$$

En y $\succ$ 5.5 la derivada tiene el valor de +1, y $\prec$ 5.5 la derivada tiene el valor de -1

Además en la caja está contenida la letra C, en un rectangulo centrado con dimensiones 5 X 7 cm, en donde la carga total de la letra está dada por:

$$Q = \int \rho(x, y) dxdy = 1[C]$$

2 Procedimiento

Se comienza por definir la grilla de $10x15cm$ y el numero de pasos (tamaño que tendrá cada división), que en este caso es de $h = 0.2cm$,luego se define la función ρ que tiene como finalidad calcular la densidad de carga, cuyo valor varía según la posición (x,y), al interior de la letra vale $\frac{1}{15}\frac{C}{cm^2}$ y fuera de esta $\rho = 0$.

Se define el método de sobre-relajación; el cual debe ser dividido por tramos, dadas las caracteristicas para la integración, primero se define el tramo para la condición derivativa y luego el resto de la caja, la discretización es la siguiente:

$$\phi_{i,j} = (1 - w)\phi_{i,j} + \frac{w}{4}[\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j+1} + \phi_{i,j-1} + h^2 * \rho_{i,j}]$$

Al integrar cerca de la linea, se debe separar en dos segmentos; sobre la linea y bajo la linea dado que se tienen condiciones derivativas distintas mencionadas anteriormente. Para este caso se utiliza igual el método de sobre-relajación, pero con condiciones de tipo Neumann, en donde la discretización es la siguiente:

$$\phi_{i,j} = (1-w)\phi_{i,j} + \frac{w}{3}[\phi_{i+1,j} + \phi_{i-1,j} + \phi_{i,j-1} + h^2 * \rho_{i,j} h * G]$$

en donde $G = 1$ si se integra sobre la linea y $G = -1$ si se integra debajo de la linea.

Finalmente se obtienen los gráficos del potencial.

3 Resultados

Se pide obtener el potencial para distintas frecuencias, en donde para todas se utiliza una tolerancia de $1e - 5$ y un maximo de 15000 iteraciones.

w	iteraciones
0.5	13189
0.8	6907
1.0	4720
1.2	3218
1.5	1657

Table 1: An example table.

En la tabla 1 se puede apreciar claramente que a medida que se aumenta la frecuencia la cantidad de iteraciones para que converga disminuye como se aprecia claramente en la figura 1, el mejor caso sería w=2 pero por como es el algoritmo a veces diverge.

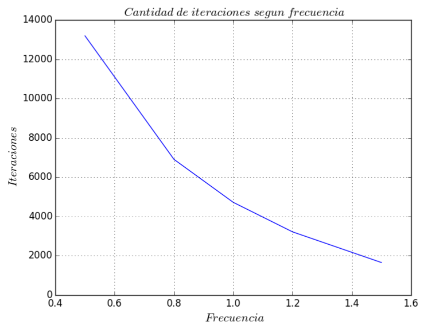
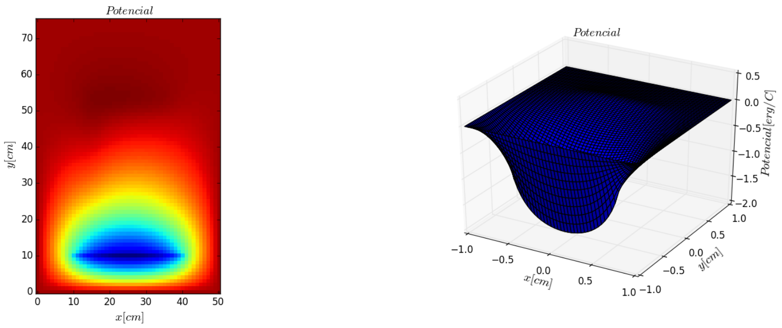


Figure 1: Gráfico de Cantidad de iteraciones según frecuencias

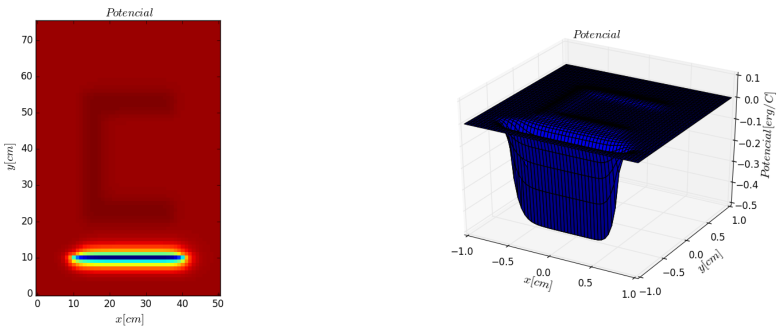
Para no ser tan redundantes en los gráficos obtenidos de los datos de la tabla 1, se adjunta el gráfico de potencial para w=1.0

En la figura 3 se muestran una notoria diferencia si la cantidad de iteraciones es menor a la que convergen. Por Ejemplo se presenta a continuación la solución para w=1 pero con un máximo de 10 iteraciones.



(a) Potencial Profundidad (b) Potencial 3D

Figure 2: Potencial para w=1.0



(a) Potencial profundidad (b) Potencial 3D

Figure 3: Potencial para w=1.0 con 10 iteraciones

4 Conclusiones

El método de sobrerelajación fue implementado correctamente por la soluciones mostrada en los gráfico, eso sí este método cómo se vio en la Tarea 5 varía si existen condiciones de borde, que se le denominan condiciones de Neumann.

Mientras más cercano a 2 es el valor de w, mejor será la convergencia dado que esta se consigue en una menor cantidad de iteraciones, que al mismo tiempo está condicionado según la convergencia permitida, en este caso la tolerancia es de 10^-5.

Esta tarea es un problema interesante dado que la ecuación de Poisson está en multiples disciplinas.