Tarea 6: Reacción y Difusión
Método Numérico para la Ciencia e Ingeniería

Alumna: Constanza Urzúa Cisterna
Profesor: Valentino González
Profesor Aux: Felipe Pesce

3 de Noviembre 2015

1 Introducción

Las ecuaciones de reacción-difusión implican la combinación de dos procesos diferentes.

1. Difusión (Movimiento local)
2. Reacción (Crecimiento,interacciones, cambios de estado)

En el siguiente informe se dará una solución numérica a la ecuación reacción-difusión Fisher-KPP; discretizando la parte de difusión con el método Crank–Nicolson, y utilizando el método Euler explícito para la parte de reacción. La ecuación a resolver en 1 dimensión es la siguiente:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu n - \mu n^2$$

En donde $n = n(t, x)$ describe la densidad de la especie como función del tiempo y la posición.

En la segunda parte se explicita la solución de la ecuación Newell-Whitehead-Segel que también es una ecuación de reacción-difusión, que describe fenómenos de convección y combustión entre otros. la ecuación a resolver es la siguiente:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \mu(n - n^3)$$

2 Procedimiento

2.1 Parte 1

La ecuación a discretizar como se menciona anteriormente es la de Fisher-KPP, en donde la ecuación queda algo como lo siguiente al implementar Euler explícito y el método de Crank Nicolson.

El algoritmo tiene una estructura en la cual se comienzo con una serie de funciones para luego ingresar al "Setup"

$$\frac{n_j^{N+1}-n_j^N}{\epsilon} = \frac{\gamma}{2}(\frac{n_{j+1}^{N+1}-2n_j^{N+1}+n_{j-1}^{N+1}}{h^2}+\frac{n_{j+1}^N-2n_j^N+n_{j-1}^N}{h^2})+\mu(n_j^N-n_j^N X n_j^N)$$

Esta ecuación se puede dividir en dos a la izquierda los términos N+1 y a la derecha los términos n

$$-rn_{j+1}^{N+1}+(1+2r)n_j^{N+1}-rn_{j-1}^{N+1} = rn_{j+1}^N+rn_{j-1}^N(\epsilon\mu(1-n_j^N)1-2r)n_j^n$$

con r= $\frac{\epsilon\gamma}{2h^2}$

la cantidad de pasos en x=500 mientras las cantidad de pasos en t=100, con h = 0.002 las condiciones de borde de este problema son las siguientes:

$n(t,0)=1$
$n(t,1)=0$
$n(0,x)=e^{-x^2/0.1}$
$\gamma=0.001$
$\mu=1.5$

2.2 Parte 2

La ecuación a discretizar como se menciona anteriormente es la de Newell-Whitehead-Segel, en donde la ecuación a discretizar es muy similar a la del método anterior debido a que sólo tiene un cambio en la parte que corresponde a reacción.

Ecuación a discretizar:

$$\frac{n_j^{N+1}-n_j^N}{\epsilon} = \frac{\gamma}{2}(\frac{n_{j+1}^{N+1}-2n_j^{N+1}+n_{j-1}^{N+1}}{h^2}+\frac{n_{j+1}^N-2n_j^N+n_{j-1}^N}{h^2})+\mu(1-n_j^N n_j^N)n_j^N$$

las condiciones iniciales son:

$x_{inicial}=0$
$x_{final}=1$
$t_{inicial}=0$
$t_{final}=5$

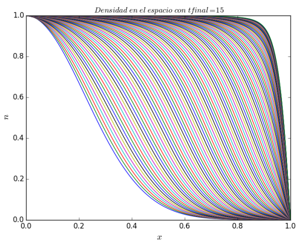
En donde la condiciones de borde son:

$n(t,0)=0$
$n(t,1)=0$
$n(0,x)=$ `np.random.uniform(low=-0.3, high=0.3, size=Nx)`

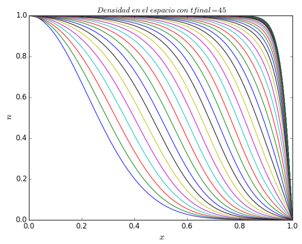
3 Resultados

3.1 Parte 1

Ambos gráficos se pueden interpretar como un aumento de la población a medida que se desplaza en el espacio, lo que sería la parte de un pulso viajero



(a) $n(t,x)t_i = 0t_f = 15$

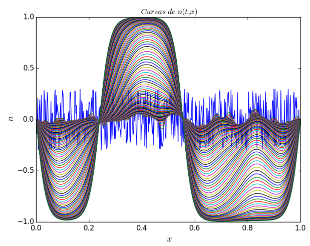


(b) $n(t,x)t_i = 0t_f = 45$

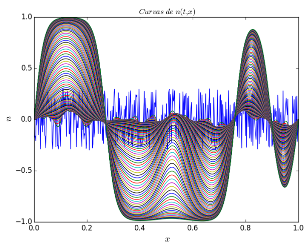
Figure 1: densidad

3.2 Parte 2

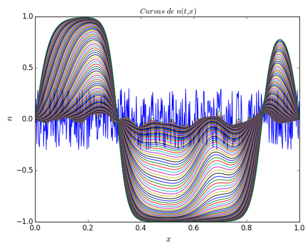
Se puede apreciar en los gráficos que estos presentan un equilibrio en n=1 y en n=-1 .



(a) $n(t,x)t_i = 0t_f = 5Semilla100$



(b) $n(t,x)t_i = 0t_f = 5Semilla121$



(c) $n(t,x)t_i = 0t_f = 5Semilla386$

Figure 2: Legos.

4 Conclusiones

Ambas ecuaciones son resultas con satisfacción, haciendo que el algoritmo implementado funcione correctamente, solo que tiene un tiempo bastante largo para entregar resultados, debido seguramente a lo poco eficiente del algoritmo.

De la primera parte esta solución es correcta sólo si la especie no está amenazada por otra sino las curvas tendrían otra forma, dado que sería otra solución.

De la segunda parte se puede apreciar los puntos de equilibrio dado la amplitud máxima de las curvas $n(t, x)$