Cadeias de Markov

Espaço de estados enumerável não-finito

Classificação de estados

Recorrência nula

Quadro completo

Exemplo 5: Passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$

Compare com o Exercício 05 - Lista 01

Considere um processo que descreve o passeio de um bêbado em $\mathbb{Z}$, através de uma sequência de v.a. aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) $\{X_n\}_n$ que representa se um andante, no instante n, dá um passo para frente $(X_n = +1)$ ou para trás $(X_n = -1)$ com probabilidade p e $1 - p$ respectivamente. Começando na posição S_0, a posição do indivíduo após n passos é dado por $S_n = S_0 + X_1 + \cdots + X_n$. O processo descrito por $\{S_n\}_n$ é chamado de passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$.

Determine a matriz de probabilidades de transição, faça o diagrama de transição e classifique os estados. A cadeia é irredutível?

Resolução na lousa (matriz e diagrama)

Espaço de estados enumerável não-finito

Em espaço de estados não-finito (exemplo do passeio aleatório), classificar um estado em recorrente ou transitório pode ser difícil.

Para espaço de estados enumerável e/ou situações mais complexas precisamos de um critério técnico para classificar.

Naturalmente, esse critério é baseado nos conceitos de recorrência e transiência.

Recorrência e transiência - definição

Para $i \in S$, denote por f_{ii} a probabilidade que, dado que iniciou no estado i, o **processo eventualmente (em algum momento) retornará ao estado** i, isto é

$$f_{ii} \overset{\text{notação}}{=} P\Big(\{X_n = i\} \text{ para algum } n \geq 1 \mid X_0 = i\Big)$$
$$= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = i\} \mid X_0 = i\right)$$

Definição

(a) o estado i é dito ser **recorrente** se $f_{ii} = 1$;

(b) o estado i é dito ser **transiente/transitório** se $f_{ii} < 1$.
Isto é, saindo de i, existe uma probabilidade positiva $(1 - f_{ii})$ do processo nunca mais retornar ao estado i.

$\longrightarrow$ Como calcular f_{ii}?

Recorrência e transiência

- Se o estado i é recorrente, então o processo iniciando em i retornará, em algum momento, ao estado i (com probabilidade 1).
- Considere esse instante de retorno como um novo início (por homogeneidade no tempo), e então o processo novamente retornará ao estado i, e assim sucessivamente.
- Portanto, a cadeia retornará infinitas vezes a um estado recorrente i.

Recorrência e transiência

- Se o estado i é transitório, cada vez que o processo inicia em i, existe uma probabilidade positiva $(= 1 - f_{ii})$ do processo jamais retornar ao estado i.
- Então, estando em i, o tempo que o processo leva para sair de i tem distribuição geométrica com parâmetro $1 - f_{ii}$, cuja média é $(1 - f_{ii})^{-1} < \infty$.
- Portanto, se o processo inicia em um estado transitório i, ele retorna (ou fica) em i, em média, um número finito de vezes.

Recorrência

O estado i, $i \in S$ é recorrente, se e só se, começando em i, o número esperado de visitas (retornos) ao estado i pelo processo for infinito.

Recorrência e transiência - critério usando probabilidades de transição

Proposição

Seja $\{X_n\}$ uma cadeia de Markov com espaço de estados S e matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$, e considere o estado i, $i \in S$.

- O estado i é recorrente se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$.
- O estado i é transitório se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < +\infty$.

Isto é, o estado i é recorrente se e só se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = +\infty$.

Demonstração na lousa

Teorema

Uma consequência da proposição anterior é dada pelo teorema a seguir

Recorrência e transiência como propriedade de classe

Numa cadeia de Markov, sejam i e$j \in S$ que se comunicam, isto é, $i \longleftrightarrow j$, então

(1) i é recorrente $\Longleftrightarrow$ j é recorrente.

(2) i é transitório $\Longleftrightarrow$ j é transitório.

(3) i e j têm mesmo período.

Isto é, recorrência, transiência e periodicidade são propriedades que a **classe** herda dos estados.

Prova de (1) e (2) na lousa

Exemplo: Passeio Aleatório - continuação

Mostre (usando a proposição) que o passeio aleatório **simples** em $\mathbb{Z}$ é:

- recorrente se $p = 1/2$
- transitório se $p \neq 1/2$.

Sugestão: aplique a fórmula de Stirling:

$$n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

Resolução na lousa

A recorrência do passeio aleatório simples **simétrico** é diferente da recorrência vista nos exemplos anteriores, como veremos a seguir.

Tempo da primeira visita a um estado

Tempo da primeira visita

Para $i \in S$, denote por T_i o tempo ou instante da primeira visita ao estado i, após o instante $n = 0$, isto é,

$$T_i = \begin{cases} \min\{n > 0 : X_n = i\} \\ +\infty, & \text{se o estado } i \text{ nunca for visitado} \end{cases}$$

Exemplo: $\{T_i = 10\} = \{X_1 \neq i, X_2 \neq i, \ldots, X_9 \neq i, X_{10} = i, \}$

Se a cadeia inicia em i $(X_0 = i)$, então $\{T_i \mid X_0 = i\}$ representa o primeiro retorno ao estado i, também denominado de tempo de recorrência do estado i.

Primeira visita e primeiro retorno

Introduzimos as seguintes notações.

Primeira visita

A probabilidade de que a 1a.visita ao estado j, a partir do estado i, ocorra no instante m é dada por

$$
\begin{aligned}
f_{ij}^{(m)} &= P\big(X_m = j, X_\ell \neq j, 1 \leq \ell \leq m-1 \mid X_0 = i\big) \\
&= P\big(T_j = m \mid X_0 = i\big)
\end{aligned}
$$

Primeiro retorno

A probabilidade de que que o 1o.retorno ao estado i ocorra no instante m é dada por

$$
\begin{aligned}
f_{ii}^{(m)} &= P\big(X_m = i, X_\ell \neq i, 1 \leq \ell \leq m-1 \mid X_0 = i\big) \\
&= P\big(T_i = m \mid X_0 = i\big)
\end{aligned}
$$

Recorrência e transiência - outro critério

Note que a probabilidade de um eventual retorno a i é dado por

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = P\big(T_i < \infty \mid X_0 = i\big)$$

e, pela definição (slide 04 desse arquivo):

Recorrência e transiência - critério

O estado i é **recorrente** se $P(T_i < \infty \mid X_0 = i) = 1$.
O estado i é **transitório** se $P(T_i < \infty \mid X_0 = i) < 1$.

Note que, se i é transitório então, com probabilidade positiva a cadeia nunca mais retorna ao estado i, ou seja,

$$P(T_i = \infty \mid X_0 = i) > 0 \quad \Longrightarrow \quad E(T_i \mid X_0 = i) = +\infty$$

i.e., tempo **médio** do primeiro retorno a um estado transitório é infinito.

tempo médio de recorrência e recorrência/transiência

Tempo médio de recorrência

O tempo médio μ_i de retorno a um estado i ou o tempo médio de recorrência do estado i, $i \in S$, é definido por

$$\mu_i = E(T_i \mid X_0 = i) = \sum_{n \geq 1} n \cdot f_{ii}^{(n)}$$

O argumento do slide anterior estabelece que

se i é um estado <u>transitório</u> então $\mu_i = +\infty$

Entretanto, μ_i ainda pode ser infinito para um estado i **recorrente.**
$\longrightarrow$ exemplo na lousa

Se i é um estado <u>recorrente</u>, dependendo de μ_i ser finito ou infinito, há uma classificação adicional (dada a seguir).

Recorrência nula e positiva

Definição: recorrência nula e prositiva

Seja $i \in S$ um estado recorrente. Dizemos que

- i é recorrente nulo se $\mu_i = +\infty \quad \left(\iff \mu_i^{-1} = 0 \right)$;
- i é recorrente positivo se $\mu_i < +\infty \quad \left(\iff \mu_i^{-1} > 0 \right)$.

Exemplo: Passeio aleatório simples simétrico

Mostrar que o passeio aleatório simples simétrico $(p = 1/2)$ em $\mathbb{Z}$ é recorrente **nulo**.

Resolução na lousa

$\longrightarrow$ calcular $f_{00}^{(2n)}$ pelo princípio da reflexão e aplicar a fórmula de Stirling

Recorrência em cadeia finita

Se a cadeia é finita, isto é, o espaço de estados S é finito, então pelo menos 1 (um) estado é recorrente, e todos os estados recorrentes são recorrentes positivos.

Recorrência nula pode ocorrer apenas em espaço de estados enumerável não-finito.

Demonstração na lousa

Classificação de estado

$$\text{ESTADO}\begin{cases}\text{Transitório}\\ \text{Recorrente}\begin{cases}\text{nulo}\begin{cases}\text{periódico}\\ \text{aperiódico}\end{cases}\\ \text{positivo}\begin{cases}\text{periódico}\\ \text{aperiódico}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Definição: Ergodicidade

(a) Um estado **recorrente positivo e aperiódico** é denominado ergódico.

(b) Uma cadeia **irredutível, recorrente positiva e aperiódica** é denominado ergódica.