MAE 312 - LISTA DE EXERCÍCIOS 3

Profa. Beti

1. Determine a distribuição estacionária da cadeia de Markov periódica com $E = \{a, b, c, d\}$ e cuja matriz de probabilidades de transição é

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. Determine a distribuição estacionária da cadeia de Markov com $E = \{a, b, c, d\}$ e cuja matriz de probabilidades de transição é

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. ♣ Uma pessoa possui r guarda-chuvas que utiliza para ir de casa para o trabalho e vice-versa. Se ele está em casa (no trabalho) no início (fim) do dia e está chovendo, então ele pega um guarda-chuva, se houver um lá, e o leva para o trabalho (casa). Se não está chovendo no momento de sair, ele nunca pega um guarda-chuva. Assuma que a probabilidade da ocorrência de chuva no início (fim) do dia é p, $p \in [0, 1]$, independente de qualquer coisa.

   (a) Defina uma cadeia de Markov com $r + 1$ estados que nos auxilie a determinar a proporção do tempo que a pessoa fica molhada (note que segundo as suposições, a pessoa se molha se está chovendo no momento de saída de casa ou trabalho e todos os guarda-chuvas estão no outro local).

   (b) Mostre que as probabilidades estacionárias são dadas por $(q = 1 - p)$

$$\pi_i = \begin{cases} q/(r+q), & \text{se } i = 0, \\ 1/(r+q), & \text{se } i = 1, \dots, r. \end{cases}$$

   (c) Qual é a proporção do tempo que a pessoa fica molhada ?

   (d) Quando $r = 3$, qual valor de p maximiza a fração do tempo que a pessoa fica molhada ?

4. O **processo de nascimento e morte** (em tempo discreto) é uma cadeia de Markov tendo como espaço de estados o conjunto dos números naturais e tendo matriz de transição da seguinte forma.

$$p_{0,1} = q(0) = 1 - p_{0,0} \quad \text{e} \quad p_{i,i+1} = q(i) = 1 - p_{i,i-1}, \text{ se } i \geq 1$$

com $\{q(i), i \geq 0\}$ sendo uma sequência de números reais estritamente maiores que zero e estritamente menores que um.

(a) Que condição deve ser satisfeita pela sequência $\{q(i), i \geq 0\}$ para que o processo de nascimento e morte tenha uma distribuição estacionária ?

(b) ♣ Refaça o item (a) para o caso particular em que $q(i) = q, 0 < q < 1$, para todo $i \geq 0$. INTERPRETE (descrevendo em palavras) o resultado da maneira mais abrangente possível.

5. Considere o *passeio aleatório (em meio aleatório) com barreiras refletoras*, isto é, o espaço de estados é $E = \{0, 1, \ldots, N-1, N\}$ e uma partícula pode ir à direita ou à esquerda, mas com probabilidades de transição dadas por

$$p_{0,1} = 1, \quad p_{N,N-1} = 1 \quad \text{e} \quad p_{i,i+1} = p_i = 1-q_i = 1-p_{i,i-1}, \quad 0 < p_i < 1, \quad \text{para } i = 1, \ldots, N-1.$$

Determine a distribuição estacionária do processo.

6. ♣ Considere uma cadeia de Markov com espaço de estados $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$, o conjunto dos números naturais, e com matriz de probabilidades de transição dada abaixo. Seja $\{\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$ uma distribuição de probabilidade em E.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Faça o diagrama de transições e classifique os estados da cadeia. Suponha que $\alpha_1 > 0$ e $\alpha_2 > 0$, para que a cadeia seja aperiódica. Qual condição na distribuição de probabilidade $\{\alpha_i,\ i \in E\}$ é necessária e suficiente para que exista uma distribuição limite? E qual é essa distribuição limite ?

7. *Passeio aleatório simples com barreiras absorventes* - Note que a cadeia é redutível (classifique os estados!).

Considere o problema da ruina do jogador, em que o jogador A começa com R\$ a, $a > 0$, e ganha cada partida valendo R\$ 1 com probabilidade p (a probabilidade de perder 1 real é $q = 1-p$). O jogador A pára de jogar quando vai à ruina, isto é, chega a 0 (zero) reais ou quando fica com um total de N reais, $N > a$. Seja α_a a probabilidade do jogador A, começando com R\$ a, eventualmente chegar a R\$ N, isto é, ele parar o jogo por ganhar a fortuna desejada. E seja T_a o tempo de duração do jogo, começando com a reais, isto é, com a notação usual $S_0 = a$ e $S_k = S_{k-1} + X_k,\ k \geq 1$,

$$T_a = \min\{n \geq 0 : S_n = 0 \text{ ou } S_n = N\}.$$

Assuma que $\mu_a = E(T_a) < \infty$.

(a) Mostre que temos o seguinte sistema de equações de diferença (homogêneo):

$$\alpha_a = p\alpha_{a+1} + q\alpha_{a-1}, \quad a = 1, 2, \ldots, N-1,$$

com condições de fronteira $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_N = 1$.

(b) Resolva a equação, mostrando que

$$\alpha_a = \begin{cases} \frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^N}, & \text{se } p \neq \frac{1}{2}; \\ \frac{a}{N}, & \text{se } p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(c) ♣ Mostre que

$$\mu_a = 1 + p\,\mu_{a+1} + q\,\mu_{a-1}\ , \quad a = 1, \ldots, N-1\ ,$$

com condições de fronteira $\mu_0 = 0$ e $\mu_N = 0$. (Esse é um sistema de equações de diferença não-homogêneo).

(d) ♣ Mostre que

$$E(T_a) = \mu_a = \begin{cases} a(N-a) & \text{se } p = \frac{1}{2}\ , \\ \dfrac{a}{q-p} - \dfrac{N}{q-p}\left(\dfrac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^N}\right) & \text{se } p \neq \frac{1}{2}\ . \end{cases}$$

Note que a variável aleatória T_a é o tempo até a cadeia chegar em um dos estados absorventes, e portanto, μ_a é o tempo médio até a absorção.

8. Suponha que as marcas A e B de um produto tem 0,7 e 0,8, respectivamente, de fidelidade dos seus consumidores, isto é, um consumidor que escolheu A essa semana, na semana que vem escolherá A com probabilidade 0,7 ou experimentará B com probabilidade 0,3.

   (a) Qual é a divisão de mercado, a longo prazo, desse produto (entre essas 2 marcas) ?

   (b) Suponha agora que uma terceira marca está no mercado com fidelidade de 0,9; e que um consumidor que quer trocar de marca, o faz com igual probabilidade entre as outras marcas. Qual é a nova divisão de mercado entre as marcas desse produto, a longo prazo ?

9. *Modelo de difusão de Bernoulli-Laplace*

   Considere duas urnas, cada uma contendo m bolas. Das $2m$ bolas, a são azuis e as restantes $2m - a$ são brancas. Dizemos que o sistema está no estado i se a primeira urna contém i bolas azuis e $m - i$ bolas brancas, enquanto que a segunda urna contém

$a - i$ bolas azuis e $m - a + i$ bolas brancas. Cada ensaio consiste na escolha aleatória de uma bola de cada urna e trocam-se as bolas escolhidas de urna. Denote por X_n o estado do sistema após n ensaios/trocas. Note que $\{X_n, n \geq 1\}$ é uma cadeia de Markov.

(a) Determine suas probabilidades de transição.

(b) Verifique que a distribuição estacionária é dada por

$$\pi(i) = \frac{\begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m - a \\ m - i \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2m \\ m \end{pmatrix}}, \quad i = 0, 1, \ldots, a.$$

(c) Você pode dar uma explicação simples e intuitiva da razão da expressão acima ser a resposta correta ?

10. Uma cadeia de Markov associada a um processo de produção pode ser descrita da seguinte maneira. Uma peça inicia o processo no estado M (manufatura). A partir do estado M, 20% das peças precisam ser retrabalhadas de maneira que retornam ao estado M; 10% das peças são descartadas e 70% são encaminhadas ao estágio de acabamento. No estágio de acabamento, 5% das peças ainda retornam ao estado M, 10% permanecem no acabamento, 5% são descartadas e 80% são encaminhados para venda.

(a) Formule uma cadeia de Markov com estados $S = \{M, A, D, V\}$, com A representando o estágio de acabamento, D representando o descarte e V, a venda.

(b) Calcule a probabilidade de uma peça ser descartada no processo de produção.

Fonte: Durrett (2016), Essentials of Stochastic Processes - p. 87, exerc 1.44