Cadeias de Markov

Definição, principais conceitos e resultados iniciais

Cadeia de Markov - definição

Propriedade Markoviana

Um processo estocástico $\{X_n\}$, com **espaço de estados discreto** (enumerável) S e em **tempo discreto**, é uma cadeia de Markov se possui a propriedade Markoviana, isto é, para todo $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j \in S$,

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i)$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}(n)$$

Isto é, condicionado ao "presente", o "passado" e o "futuro" são independentes.

$$P(\overbrace{X_{n+1} = j}^{futuro} \mid \overbrace{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}}^{passado}, \overbrace{X_n = i}^{presente})$$
$$= P(\underbrace{X_{n+1} = j}_{futuro} \mid \underbrace{X_n = i}_{presente}) = p_{ij}(n)$$

Probabilidades de transição

Probabilidades de transição homogêneas

Uma cadeia de Markov $\{X_n\}$ é dita ser homogênea (no tempo) ou estacionária se, para todo $n \geq 0$,

$$p_{ij}(n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}(0) = p_{ij}$$

Essas probabilidades de transição podem ser representadas por uma matriz P, chamada de matriz de probabilidades de transição, cujos elementos p_{ij} satisfazem:

- $p_{ij} \geq 0$ para todo $i, j \in S$
- $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1$ para todo $i \in S$

  ou seja, a soma dos elementos de cada linha é 1, para todas as linhas.
  Uma matriz que satisfaz as 2 condições acima é denominada matriz estocástica.

Matriz de probabilidades de transição

Suponha que o espaço de estados seja $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$, então a matriz de probabilidades de transição é representada por

$$\mathbf{P} = \text{presente} \begin{array}{c c} & \text{futuro} \\ & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & \ldots \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

ou $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S \times S}$

$p_{ij} =$ probabilidade do processo ou sistema, estando do estado i, ir para o estado j, em um passo/instante de tempo.

Exemplo 4.1 - S. Ross (modificado)

Suponha que a chance de chover amanhã depende apenas se choveu ou não hoje e não depende das condições de dias anteriores. Considere também que se chover hoje então não choverá amanhã com probabilidade α; e se não chover hoje, então choverá amanhã com probabilidade β.

Qual é o espaço de estados?

$S = \{\text{chove}, \text{não chove}\}$ ou $\{a, b\}$ ou ainda $\{0, 1\}$

E a matriz de probabilidades de transição em um passo?

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{chove} & \text{não chove} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{chove} \\ \text{não chove} \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}$$

EXEMPLOS

- Exercício 04-Lista 01 (Ruína do jogador)
- Exercício 10-Lista 01 (Urna de Ehrenfest)
- Exercício 06-Lista 01

$\Longrightarrow$ Resolução na aula

Teorema

Denote por $\pi_0(j) \stackrel{ou}{=} \pi^{(0)}(j) = P(X_0 = j)$, a probabilidade que, no tempo 0 (estado inicial), o processo esteja no estado $j \in S$.

Então o vetor (linha) $\boldsymbol{\pi_0}$ ou $\boldsymbol{\pi^{(0)}} = (\pi^{(0)}(j), j \in S)$ representa a distribuição inicial da cadeia.

Caracterização do processo

A matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P} = (p_{ij})_{i,j \in S}$ e a distribuição inicial $\boldsymbol{\pi^{(0)}} = (\pi^{(0)}(j), j \in S)$ caracterizam completamente a cadeia de Markov $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração: na lousa

Observação: consideraremos o vetor de probabilidades como sendo vetor linha, isto é, por exemplo, se $S = \{a, b, c, d\}$ então

$$\boldsymbol{\pi^{(0)}} = \left(\pi^{(0)}(a), \pi^{(0)}(b), \pi^{(0)}(c), \pi^{(0)}(d)\right)$$

Exemplo 4.8 - S.Ross (modificado)

Considere o exemplo anterior (chove/não chove) com $\alpha = 0,3$ e $\beta = 0,4$, então a matriz de probabilidades de transição em um passo é

$$\mathbf{P} = \begin{array}{l} \\ \text{chove} \\ \text{não chove} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{chove} & \text{não chove} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Perguntas:

(a) se chover hoje, calcule a probabilidade que choverá depois de amanhã.

(b) se não chover hoje, qual é a probabilidade que choverá depois de amanhã.

(c) se chover hoje, calcule a probabilidade que choverá daqui a 4 dias.

Resolução na lousa

A matriz de probabilidades de transição em 2 passos é

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,61 & 0,39 \\ 0,52 & 0,48 \end{pmatrix}$$

A matriz de transição em 4 passos:

$$\mathbf{P}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,5749 & 0,4251 \\ 0,5668 & 0,4332 \end{pmatrix}$$

A matriz de transição em 8 passos:

$$\mathbf{P}^{(8)} = \begin{pmatrix} 0,57146 & 0,42854 \\ 0,57139 & 0,42861 \end{pmatrix}$$

A matriz de transição em 10 passos:

$$\mathbf{P}^{(10)} = \begin{pmatrix} 0,57143 & 0,42857 \\ 0,57143 & 0,42857 \end{pmatrix}$$

Equações de Chapman-Kolmogorov

Para todo $n \geq 0$ e $i, j \in S$, aplicando o teorema da probabilidade total, temos

$$P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_{n+m} = j \mid X_n = k) P(X_n = k | X_0 = i)$$

Usando a notação
$p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$, tem-se que

Equações de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)};$$

ou matricialmente

$$\mathbf{P}^{(n+m)} = \mathbf{P}^{(n)} \cdot \mathbf{P}^{(m)}$$

A matriz $\mathbf{P}^{(n)}$

Note que $\mathbf{P}^{(n)}$ é uma matriz, cujas caselas/entradas representam

$$\mathbf{P}_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i) \overset{homog}{=} P(X_{\ell+n} = j \mid X_\ell = i)$$

a probabilidade da cadeia ir do estado i para o estado j em n passos.

No exemplo (chove/não chove), note que (para 5 casas decimais),

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(10)} \quad \text{para todo} \quad n \geq 10$$

isto nos remete à noção de "convergência".

Portanto, se existir, o limite

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i_0)$$

pode depender do estado inicial i_0.

A matriz $\mathbf{P}^{(n)}$ - perguntas

- Como calcular $\mathbf{P}^{(n)}$?
- Quando existe o limite de $\mathbf{P}^{(n)}$ quando $n \to \infty$?
- Se o limite acima existe, como obtê-lo?
- Se o limite acima existe, ele depende do estado inicial ?
  Isto é, temos um limite para cada i_0 (linha i_0) ?
- Veja as 2 linhas de $\mathbf{P}^{(10)}$ do exemplo chove/não chove.
  O que ocorre?
- No item acima, o que isso significa (interpretação)?
  Isso acontece sempre?

$\longrightarrow$ o comportamento assintótico está conectado com a classificação dos estados (e da cadeia).