Cadeias de Markov

Acoplamento

Teorema de Convergência

Referências:

- Häggström, *Finite Markov Chains*
- Brémaud, *Markov Chains - Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, Queues*, 2020, Springer

Convergência de cadeias de Markov

Objetivo:

Mostrar que, sob determinadas condições, a distribuição da cadeia de Markov num instante n grande estará "próxima" da distribuição estacionária, qualquer que seja a distribuição inicial.

Distância em variação total

Definição: distância em variação total

Sejam $\boldsymbol{\eta}= (\eta_i; i \in S)$ e $\boldsymbol{\xi}= (\xi_i; i \in S)$ duas distribuições de probabilidade em S, S enumerável. A distância em variação total entre $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\xi}$ é definida por

$$d_{_V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} |\eta_i - \xi_i|$$

Se X e Y são variáveis aleatórias, assumindo valores em S, com distribuições de probabilidade $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\xi}$, respectivamente, denota-se também

$$d_{_V}(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = d_{_V}(X, Y)$$

Distância em variação total - resultado

Lema

Sejam $\boldsymbol{\eta}= (\eta_i; i \in S)$ e $\boldsymbol{\xi}= (\xi_i; i \in S)$ duas distribuições de probabilidade em S, S enumerável.

$$d_V(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \sum_{i \in S} \left| \eta_i - \xi_i \right| = \sup_{A \subseteq S} \left| \boldsymbol{\eta}(A) - \boldsymbol{\xi}(A) \right|$$

Para X e Y variáveis aleaórias no mesmo espaço de estados S, tem-se que

$$d_V(X, Y) = \sup_{A \subseteq S} \left| P(X \in A) - P(Y \in A) \right|$$

Prova: ver Brémaud - Lema 4.1.2

Convergência em variação total

Convergência em variação total - definição

Se $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \boldsymbol{\xi}^{(2)}, \ldots$ e $\boldsymbol{\eta}$ são distribuições de probabilidade em S, dizemos que $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ **converge para** $\boldsymbol{\eta}$ em variação total quando $n \to \infty$ se

$$\lim_{n\to\infty} d_V(\boldsymbol{\xi}^{(n)}, \boldsymbol{\eta}) = 0$$

Notação: $\boldsymbol{\xi}^{(n)} \xrightarrow{var.total} \boldsymbol{\eta}$

Seja $\{X_n\}_{n\geq 0}$ um processo estocástico em S. Dada uma distribuição $\boldsymbol{\pi}$ em S, dizemos que o processo $\{X_n\}$ converge em variação total para $\boldsymbol{\pi}$ se

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} \left| P(X_n = i) - \pi_i \right| = 0$$

Convergência de cadeias de Markov

Teorema 3

Seja $\mathbf{X} = \{X_n\}$ uma cadeia de Markov irredutível recorrente positiva e aperiódica com espaço de estados enumerável S, matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$, distribuição inicial arbitrária $\boldsymbol{\nu}^{(\mathbf{0})}$ e distribuição estacionária $\boldsymbol{\pi}$. Então,

$$\boldsymbol{\nu}^{(\mathbf{0})}\mathbf{P}^n \overset{var.total}{\longrightarrow} \boldsymbol{\pi} \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

Interpretação:

Se a cadeia for irredutível recorrente positiva e aperiódica, então para qualquer que seja a distribuição inicial, a distribuição do processo num instante n grande estará próxima da distribuição estacionária.

Dizemos, nesse caso, que a cadeia de Markov está se aproximando do equilíbrio quando $n \to \infty$.

Demonstração do Teorema de Convergência

O teorema de convergência (Teorema 3) vale para S enumerável (finito ou infinito). No entanto, a demonstração será feita para o caso em que S é finito. Será feita NA LOUSA.

A demonstração para o caso infinito é similar, com detalhes adicionais para lidar com somas infinitas.

Passos:

(1) Para cadeia de Markov irredutível recorrente positiva e aperiódica, exite $M < \infty$ tal que $P^{(M)}$ é uma matriz ergódica (todas as entradas/células são estritamente positivas) $\longrightarrow$ ver Proposição

(2) Usar acoplamento
Ver desenho na lousa

(3) Mostrar que o tempo de acoplamento é finito

(4) Relacionar tempo de acoplamento com a distância de variação total

Proposição

Ergodicidade da matriz de transição

Seja $\mathbf{X} = \{X_n\}$ uma cadeia de Markov irredutível recorrente positiva e aperiódica com espaço de estados S e matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$.

Então existe um inteiro positivo $M < \infty$, tal que $p_{ij}^{(M)} > 0$ para todo $i, j \in S$.

Prova: ver Teorema 2.3.10 - Brémaud (com $d = 1$).

Defina

$$\alpha = \inf\{p_{ij}^{(M)} : i \in S\}$$

e note que, a partir da Proposição acima, $\alpha > 0$.