Cadeias de Markov

Reversibilidade

Cadeia de Markov Reversível no Tempo

Seja $\{X_n, -\infty < n < +\infty\}$ uma cadeia de Markov e considere o processo reverso no tempo

$$\{Y_n, -\infty < n < +\infty\} \quad \text{definido por} \quad Y_n = X_{-n}\ , \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\longrightarrow$ ver gráfico na lousa (e jogo de letras)

Note que

- o processo $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma cadeia de Markov.
- Se π é a (única) distribuição estacionária de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ então π também é distribuição estacionária de $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$

Jogo de letras - Exemplos de frases

Exemplo de reversibilidade é quando um filme é exibido normalmente "para frente" ou "para trás", não há diferença no "comportamento". Por exemplo, o andar lateral de um caranguejo.

Exemplos de frases cujas letras lidas ao contrário levam à mesma "frase"

- arara rara
- ato idiota
- o lobo ama bolo
- a miss é péssima
- a torre da derrota
- a base do teto desaba
- a cara rajada da jararaca
- anotaram a data da maratona
- socorram me, subi no ônibus em marrocos

Cadeia de Markov Reversível no Tempo

Definição

Uma cadeia de Markov **irredutível recorrente positiva** é dita ser reversível (no tempo) se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ têm mesma matriz de probabilidades de transição.

Proposição: definição alternativa

A cadeia de Markov **irredutível recorrente positiva** com matriz de probabilidade de transição $\mathbf{P}$ é dita ser reversível (com respeito a distribuição estacionária $\boldsymbol{\pi}$ ou em equilíbrio) se

$$\pi_i \, p_{ij} = \pi_j \, p_{ji} \, , \quad \forall \; i, j \; \in S$$

Essas são as chamadas equações de balanço detalhado.

Reversibilidade e distribuição estacionária

Teorema

Para uma cadeia de Markov **irredutível**, se existe um vetor α que satisfaz

$$\alpha_j \geq 0,\ \forall j \in S \quad \text{e} \quad \sum_{j \in S} \alpha_j = 1\ ;$$

e as equações de balanço detalhado

$$\alpha_i\, p_{ij} = \alpha_j\, p_{ji}\,, \quad \forall\ i, j\ \in S$$

então a cadeia é

(i) recorrente positiva e

(ii) reversível com respeito ao vetor α; e

(iii) α é a (única) distribuição estacionária da cadeia de Markov.

Demonstração na lousa

Exemplo

Considere a cadeia de Markov com espaço de estados $S = \{a, b, c\}$ e matriz de probabilidades de transição a seguir.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

(a) Classifique os estados. A cadeia é irredutível?
(b) A cadeia é reversível?
(c) A cadeia tem distribuição estacionária? Qual?

$\longrightarrow$ Resolução na lousa

Observações

O teorema fornece uma maneira simples de calcularmos a distribuição estacionária, **se** a cadeia de Markov for reversível.

ATENÇÃO:

(1) Se o sistema de equações de balanço detalhado tiver uma única solução, então α é a (única) distribuição estacionária da cadeia.

(2) Se o sistema **não** tiver solução, então a cadeia não é reversível.

(3) A cadeia pode (ou deve) ter distribuição estacionária, se o sistema de equações de balanço global tiver solução.

Mais um exemplo:

A urna de Ehrenfest é reversível?
Se for reversível, encontre a distribuição estacionária.