Listas de acompanhamento - MAE0312

Eduardo F. M. D. Costa - eduardo.figueiredo.costa@usp.br

25 de maio de 2021

O intuito desse conjunto de exercícios é auxiliar os alunos de MAE0312 no acompanhamento das aulas de Introdução aos Processos Estocásticos (2021/1). Esses exercícios **não fazem parte da avaliação da disciplina (em outras palavras, não precisam ser entregues)**. A ideia é simplesmente oferecer um material adicional que possa ser utilizado para revisão dos conceitos e discussão nas monitorias.

A maior parte da lista é baseada nos exercícios do Prof. Konstantopoulos (UC Berkeley). As soluções serão disponibilizadas em arquivo separado. Qualquer dúvida, estou à disposição!

1 Conjunto de slides 1: Introdução

Exercício 1: Assuma que 80% dos filhos de alunos da USP escolham estudar na USP, e o restante na Unicamp; 40% dos filhos de alunos da Unicamp escolham a Unicamp, e o resto se divida igualmente entre USP e Unesp; e, finalmente, 70% dos filhos de alunos da Unesp escolham a Unesp, 20% USP e 10% Unicamp. Nessa situação,

(i) Esse processo é de Markov? Defina um espaço de estados conveniente e construa a matriz de transição.

(ii) Encontre a probabilidade de que o neto de um aluno da USP escolha a USP.

(iii) Modifique a hipótese inicial para que o filho de um aluno da USP escolha sempre a USP. Nesse caso, qual a probabilidade de que o neto de um aluno da USP estude na USP?

Exercício 2: Uma certa máquina usa apenas os dígitos 0 e 1 e deve transmitir um desses dígitos em várias etapas. No entanto, em cada etapa, há uma probabilidade p de que o dígito recebido da etapa anterior seja alterado antes de seguir para a próxima etapa (e, naturalmente, uma probabilidade $q = 1 - p$ de que não haja alteração).

(i) Esse é um processo de Markov?

(ii) Qual é a matriz de transição do processo?

(iii) Qual é a probabilidade de que, começando com o dígito 0, a máquina produza o dígito 0 após duas etapas?

Exercício 3: No exemplo 2 (slides 19/20), verifique se você consegue obter a solução da equação de diferença para $P_{11}^{(n)}$ (ou seja, verifique se entendeu como se chega até essa equação e como resolvê-la). Em seguida, refaça esse exemplo via diagonalização de matrizes (discussão do slide 26).

2 Conjunto de slides 2: Exemplos

Exercício 1: Um apostador joga um jogo em que, a cada rodada, ganha 1 real com probabilidade p e perde 1 real com probabilidade $q = 1 - p$. Pelas regras do jogo, se ele atinge 0 real (ruína), é obrigado a parar. Adicionalmente, se ele atinge T reais, também para de jogar. Essa é uma descrição possível do clássico Problema da Ruína do Apostador.

(i) Defina o espaço de estados conveniente para o problema. Construa a matriz de transição. Se quiser, represente o processo por meio de um esquema como o do slide 2. Reflita sobre a razão desse processo ser de Markov.

(ii) Seja X_n a fortuna do apostador na rodada n. Defina $r_x := \mathbb{P}_x(X_n = 0 \text{ para algum } n \geq 0)$. Quanto vale r_0? E r_T?

(iii) Suponha que o apostador inicie com $0 < x < T$ reais. Expresse r_x em função de p, q, r_{x-1} e r_{x+1}.

Dica: Use a lei da probabilidade total (condicionando no primeiro passo) e, em seguida, a propriedade de Markov. Ou seja, faça o que fizemos no slide 4. **Certifique-se de que entendeu bem o que fizemos nesse item, pois é uma técnica muito utilizada no curso. Vários exercícios são resolvidos por esse tipo de condicionamento.**

(iv) Cheque que a solução obtida em sala (slide 4) é, de fato, uma solução para o problema (ou seja, verifique se as soluções obtidas para cada caso respeitam as equações que você escreveu nos itens (ii) e (iii).

Exercício 2: Para o processo de ramificação:

(i) Verifique se entendeu os slides 9-13, até chegarmos nas equações (*) e (**). A equação (*) nos permite calcular ρ. Tendo ρ, podemos calcular $\tilde{\rho}$ com (**). Lembre-se de que $\tilde{\rho}$ é a probabilidade de extinção, que é o objeto de interesse do problema.

(ii) Assuma que $G_0 = 1$ (ou seja, a geração inicial tem apenas um indivíduo) e que o número de filhos por indíviduo segue uma distribuição tal que $\mathbb{P}(X = 0) = 0.3$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X = 2) = 0.3$. Calcule a probabilidade de extinção dessa família.

(iii) Na situação do item (ii), o que ocorreria se a distribuição de probabilidade de X fosse tal que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0.5$ e $\mathbb{P}(X = 2) = 0.5$? O resultado é intuitivo?

(iv) Verifique se os resultados dos itens (ii) e (iii) estão de acordo com o Teorema 2 (slide 23).

3 Conjunto de slides 3: Propriedade Forte de Markov

Exercício 1: Para o Passeio Aleatório em $\mathbb{Z}$:

(i) Revise como procedemos para obter a equação (*) do slide 8. O gabarito fornecerá um detalhamento de algumas contas feitas em sala.

(ii) Calcule o tempo esperado de chegada no estado 0 partindo do estado 1 quando $p = 0.3$ (preferencialmente, revise as contas feitas no slide 10).

(iii) Calcule o tempo esperado de chegada no estado 0 partindo do estado 5 quando $p = 0.4$ (ver slide 11).

4 Conjunto de slides 5: Recorrência e transitoriedade

Fonte dos exercícios/soluções dessa seção: Prof. Konstantopoulos (UC Berkeley)

Exercício 1: Não se preocupe com o conceito de estados essenciais.

62.

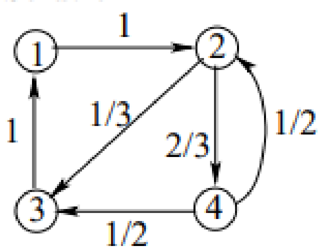
A Markov chain has transition probability matrix

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Draw the transition diagram.
Are there any absorbing states?
Which are the communicating classes?
Can you find a stationary distribution?

What are the periods of the states?
Are there any inessential states?
Which states are recurrent?
Which states are transient?
Which states are positive recurrent?

Solution.



- There are no absorbing states because there is no state i for which $p_{i,i} = 1$.
- All states communicate with one another. Therefore there is only one communicating class, $\{1, 2, 3, 4\}$, the whole state space. (We refer to this by saying that the chain is irreducible.)

• Yes, of course we can. We can ALWAYS find a stationary distribution if the state space is FINITE. It can be found by solving the system of equations (known as balance equations)

$$\pi \mathsf{P} = \pi,$$

which, in explicit form, yield

$$\begin{aligned}
\pi(1) &= \pi(3) \\
\pi(2) &= \pi(1) + \tfrac{1}{2}\pi(4) \\
\pi(3) &= \tfrac{1}{3}\pi(2) + \tfrac{1}{2}\pi(4) \\
\pi(4) &= \tfrac{2}{3}\pi(2)
\end{aligned}$$

Solving these, along with the normalisation condition $\pi(1) + \pi(2) + \pi(3) + \pi(4) = 1$, we find

$$\pi(1) = \pi(4) = \pi(3) = 9/2, \quad \pi(2) = 27/4.$$

• Since the chain is irreducible the periods of all the states are the same. So let take a particular state, say state 4 and consider the set

$$\{n \geq 1 : \ p_{4,4}^{(n)} > 0\}.$$

We see that the first few elements of this set are

$$\{2, 5, 6, \dots\}.$$

We immediately deduce that the greatest common divisor of the set is 1. Therefore the period of state 4 is 1. And so each state has period 1. (We refer to this by saying that the chain is aperiodic.)

• Since all states communicate with one another there are no inessential states.

• Since $\pi(i) > 0$ for all i, all states are recurrent.

• Since all states are recurrent there are no transient states.

• Since $\pi(i) > 0$ for all i, all states are positive recurrent.

Exercício 2: Dica: reflita sobre os casos do passeio aleatório que estudamos em sala.

83. ---

Give an example of a Markov chain with infinitely many states that
(i) is irreducible and positive recurrent
(ii) is irreducible and null recurrent
(iii) is irreducible and transient