Processo de Poisson

Definições e relação com a distribuição Exponencial

Referências: Ross, *Intr.Probab. Models* - §5.3
Grimmett & Stirzaker - §6.8

Definição e notação preliminares

Um processo $\{N((0,t]); t > 0\}$ em que $N((0,t])$ representa o número de ocorrências de um determinado **evento** no intervalo de tempo $(0,t]$, é chamado de **processo de contagem**, se

- assume valores em $\{0, 1, \ldots\}$
- para $s < t$, $N((0,s]) \leq N((0,t])$ ($N(\cdot)$ é não decrescente)
- $N((s,t]) = N((0,t]) - N((0,s])$ representa o número de ocorrências no intervalo $(s,t]$

Adotaremos indistintamente a notação $N(t) := N((0,t])$, logo

$$N((s,t]) = N((0,t]) - N((0,s]) = N(t) - N(s)$$

neste curso, nos restringiremos ao caso em que o processo é homogêneo (no tempo), para $s, u > 0$:

$$N((s,s+u]) = N(s+u) - N(s) \overset{homog.}{=} N(u) = N((0,u])$$

Exemplos

Considere que o instante $t = 0$ é pré-determinado, como um tempo de referência.
Discuta se os exemplos abaixo podem ser considerados um processo de contagem. Descreva o "evento" de interesse.

(a) $N((0, t]) =$ número de pessoas diagnosticadas com covid-19 até o tempo t, na cidade de SP.

(c) $N((0, t]) =$ número de clientes que entram em uma agência bancária até o tempo t.

(d) $N((0, t]) =$ número de clientes que saem em uma agência bancária até o tempo t.

(e) $N((0, t]) =$ número de clientes que estão em uma agência bancária até o tempo t.

Incrementos estacionários e independentes

O número de ocorrências $N(s+u) - N(s) = N((s, s+u])$ é denominado de incremento no intervalo $(s, s+u]$, para $s > 0, u > 0$.

Incrementos estacionários

Dizemos que o processo $\{N(t)\}_t$ tem incrementos estacionários, se a distribuição de $N((s, s+u])$ é a mesma para todo s.

Note que se o processo for homogêneo (no tempo) então ele tem incrementos estacionários.

Incrementos independentes

Dizemos que o processo $\{N(t)\}_t$ tem incrementos independentes se as ocorrências em intervalos disjuntos são independentes.

Discuta se os exemplos dados possuem incrementos estacionários e/ou independentes $\longrightarrow$ na lousa

Definição de $o-$pequeno

Definição: Uma função g é $o(h)$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{h} = 0 \ ,$$

isto é, a função g vai para 0 mais rápido do que h quando $h \to 0$.

Exemplos:

- $g(x) = x^2$ é $o(h)$
- $g(x) = x$ **não** é $o(h)$
- combinação linear de funções $o(h)$ é $o(h)$.

Processo de Poisson - definição A

Processo de Poisson - via taxas infinitesimais

Um processo de Poisson homogêneo com intensidade ou taxa λ, $\lambda > 0$, é um processo de contagem $\boldsymbol{N}= \{N(t); t \geq 0\}$ assumindo valores em $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que

(a) $N(0) = 0$;

(b) o processo $\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;

(c) para todo $t \geq 0$ e para $h > 0$ pequeno

$$P(N(t+h) = n+k \mid N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{se } k = 1, \\ o(h) & \text{se } k \geq 2, \end{cases}$$

Interpretação de (c): para todo instante de tempo t, num intervalo de tempo pequeno h pode haver no máximo uma ocorrência (0 ou 1 ocorrência).

Processo de Poisson - definição B

Processo de Poisson - via distribuição Poisson

Um processo de Poisson homogêneo com intensidade ou taxa λ, $\lambda > 0$, é um processo de contagem $N = \{N(t); t \geq 0\}$ assumindo valores em $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ tal que

(a) $N(0) = 0$;

(b) o processo $\{N(t), t \geq 0\}$ tem incrementos independentes;

(c) $N(s+t) - N(s)$ tem distribuição de Poisson com parâmetro λt, isto é,

$$P(N(s+t) - N(s) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

A condição (c), em ambas as definições, implica que os incrementos também são estacionários.

Prova da equivalência das definições $\longrightarrow$ na lousa

Tempo das ocorrências e tempo **entre** ocorrências

- No processo de Poisson (homogêneo) denote por $S_0, S_1, S_2, \ldots$ $(S_0 < S_1 < S_2 \cdots)$ os instantes (aleatórios) de ocorrências do evento ou das chegadas, isto é S_k é o instante da $k-$ésima chegada/ocorrência, definido por

$$S_0 = 0 \quad \text{e} \quad S_k = \inf\{t > 0 : N(t) = k\}$$

- Então, os tempos entre ocorrências/chegadas são denotados por $\{T_1, T_2, \ldots, \}$, ou seja, $T_k = S_k - S_{k-1}$.

Ver diagramas na lousa

Relação do Processo de Poisson e a distribuição Exponencial

Teorema

As variáveis aleatórias $T_1, T_2, \ldots$ que representam os tempos entre ocorrências de uma processo de Poisson com intensidade λ são independentes e têm distribuição exponencial com parâmetro (taxa) λ.

Prova: lousa

Corolário

Os tempos de ocorrência de um processo de Poisson $\{S_1, S_2, \ldots\}$ satisfazem

$$S_k \sim \mathrm{Gama}(k, \lambda) \quad k = 1, 2, \ldots$$

Note que $S_k = T_1 + \cdots + T_k$

Prova: via função geradora de momentos

Uma terceira "definição" do processo de Poisson

Seja $\{T_1, T_2, \ldots\}$ uma sequência de variáveis aleatórias representando os tempos entre ocorrências em um processo de contagem e defina $S_n = T_1 + \cdots + T_n$.

Processo de Poisson - construção

Se $T_1, T_2, \ldots$ são independentes e identicamente distribuídas com distribuição Exponencial de parâmetro (taxa) λ, então o processo definido por

$$Y(t) = \max\{n \geq 1 : S_n \leq t\}$$

é um Processo de Poisson com intensidade λ.

Note a relação

$$\{Y(t) \geq k\} \quad \Longleftrightarrow \quad \{S_k \leq t\}$$

Observação da abordagem construtiva

Seja $\{T_1, T_2, \ldots\}$ uma sequência de variáveis aleatórias representando os tempos entre ocorrências de um processo de contagem.

Os tempos das ocorrências são representados pela sequência de variáveis aleatórias definidas por $S_n = T_1 + \ldots + T_n$, $n \geq 1$.
Considere o processo de contagem definido por

$$X(t) = \max\{n \geq 1 : S_n \leq t\}$$

Processo de Renovação

Se T_k's são **independentes e identicamente distribuídas** com uma função de distribuição (acumulada) F, qualquer, então $\{X(t)\}_t$ é um processo de renovação.

Note que $\{X(t)\}_t$ é um processo de Poisson se e só se T_k's são independentes e identicamente distribuídas de acordo com uma Exponencial de taxa λ.