EP02 - Métodos de Monte Carlo MAP2212 - Laboratório de Comutação e Simulação

Danilo Brito da Silva - Nº USP: 10693250

19 de abril de 2022

1 Introdução

Este exercício tem por objetivo estimar a integral de $f(x)$, $x \in [0.1]$ utilizando quatro variantes do Método de Monte Carlo (MMC): *Crud*, *Hit or Miss*, *Importance Sampling* e *Control Variate*.

$$f(x) = e^{-ax} \cos bx \tag{1}$$

Utilizaremos $a = 0.442705074$ e $b = 0.10693250$. Para cada método, o erro relativo deverá ser $\mid \hat{g} - g \mid / g \leq 0.0005$, onde $\hat{g}$ é a estimativa numérica do valor da integral, e g é o verdadeiro valor da integral (desconhecido).
Como g é desconhecido, nos apoiaremos no Teorema do Limite Central para estimar o erro, em que, para grandes números, $\sigma^2 \approx s^2$:

$$\epsilon = \sqrt{\frac{s^2}{n}} \tag{2}$$

Para cada um dos métodos, vamos gerar n variáveis pseudo-aleatórias e armazená-las como vetor, calcular variância e erro padrão. Caso o erro seja maior que 0.0005, aumentamos o n em 2 vezes e repetimos o processo. O valor da função $g = \int_0^1 f(x)dx$ será estimado como a média dos valores gerados em cada método.

2 Método Crud

O valor da integral é calculado como sendo a média dos valores da $f(x)$ em n pontos aleatórios com x_i pertencente ao intervalo $[0, 1]$ e distribuição uniforme, $i = 1, ..., n$. Portanto, temos:

$$\hat{g} = \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} f(x_i)$$

Utilizando o Python, rodamos o seguinte código:

Dessa forma, obtivemos os seguintes resutados:
$\hat{g} = 0.79304; n = 54000; \epsilon = 0.0005$

3 Método Hit or Miss

Neste método, geramos pares de pontos (x_i, y_i) e escolhemos uma função auxiliar $h(x, y)$ de distribuição Bernoulli tal que

$$h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \;\; f(x) \geq y, \\ 0 & \text{se} \;\; f(x) < y. \end{cases}$$

Assim, vamos estimar $g = \int_0^1 \int_0^1 h(x,y)dxdy$ como $\hat{g} = \frac{1}{n}\sum_1^n h(x_i, y_i) = \frac{n*}{n}$ e a estimativa da variância será dada por $s^2 = \dfrac{\hat{g}(1-\hat{g})}{n}$.

Executamos o código abaixo no R e obtivemos os seguintes resultados:

$\hat{g} = 0.79393; n = 656000; \epsilon = 0.0005$

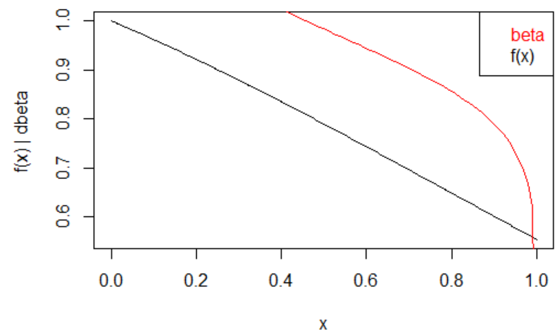
4 Método Importance Sampling

Neste método, escolhemos uma função auxiliar $k(x)$ que seja função de distribuição de probabilidade conhecida e se aproxime da $f(x)$.

$$g = \int f(x)dx = \int \frac{f(x)}{k(x)}k(x)dx = \int \frac{f(x)}{k(x)}dK(x)$$

$$\hat{g} = \frac{1}{n}\sum_1^n \frac{f(x_i)}{k(x_i)}, x_i \sim k, i = 1:n, s^2 = \frac{1}{n}\int \left(\frac{f(x)}{k(x)} - \hat{g}\right)^2 dK(x)$$

Vamos escolher a função de distribuição Beta(α, β), integrável, razoavelmente proporcional a $f(x)$ e cuja razão $f/Beta$ seja limitada no intervalo $[0, 1]$, com $\alpha = 0.9$ e $\beta = 1.1$, ilustrada no gráfico abaixo, e armazenar os resultados de $f(x_i)/k(x_i)$ em um vetor e calcular sua média para chegar na aproximação $\hat{g}$.



Executando os comandos acima no R, obtivemos os seguintes resultados:
$\hat{g} = 0.78075; n = 17000; \epsilon = 0.00025$

5 Método Control Variate

No método Control Variate, escolhemos uma função $\varphi(x)$ de comportamento parecido com a $f(x)$, porém mais fácil de integrar.

$$g = \int \varphi(x)dx + \int (f(x) - \varphi(x))dx = g' + \int (f(x) - \varphi(x))dx$$

Com os estimadores $\hat{g} = \frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)$ e $\hat{g'} = \frac{1}{n}\sum_1^n f(x_i)$ e a variância dada por $Var(\hat{g} - \hat{g'}) = Var(\hat{g}) + Var(\hat{g'}) - 2Cov(\hat{g}, \hat{g'})$, o método é útil se as funções $f(x)$ e $\varphi(x)$ possuem forte correlação positiva.

Assim sendo, escolhemos a $\varphi(x) = 1 - 0.5x$, conforme imagem a seguir:

No R, armazenamos os valores de $f(x)$ e $\varphi(x)$ e suas diferenças em vetores. Assim, estimamos a integral de $f(x)$ como sendo a média de $\varphi(x)$ mais a média da diferença de $f(x)$ e $\varphi(x)$, conforme abaixo:

Neste método, obtivemos os seguintes resultados: $\hat{g} = 0.79439; n = 15000; \epsilon = 0.00049$

6 Conclusões

O comparativo abaixo nos mostra que os métodos e *Control Variate* e *Importance Sampling* tiveram melhor desempenho do quesito n e erro:

Método	Estimativa	n	Erro
Crud	0.79304	54000	0.0005
Hit or Miss	0.79393	656000	0.0005
Importance Sampling	0.78075	17000	0.00025
Control Variate	0.79439	15000	0.00049

Percebemos que as quatro estimativas são bem próximas umas das outras, com média aritmética de 0.81121245, que nos dá uma boa aproximação do verdadeiro valor de g.

Vale destacar que, embora o método *Importance Sampling* tenha dado uma ótima aproximação, ele é muito sensível à escolha da função auxiliar, que poderia nos trazer um resultado mais distante da realidade quando não bem escolhida.