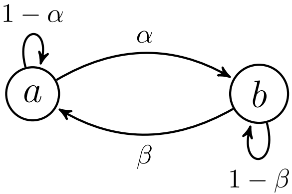
# Cadeias de Markov

## Distribuição Limite

Existência e relação com distribuição estacionária

# Revendo os exemplos - Exemplo 1

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}$$



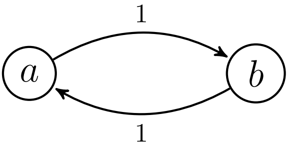

cadeia irredutível recorrente positiva aperiódica (cadeia ergódica)

$$\mathbf{P}^n = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta+\alpha(1-\alpha-\beta)^n & \alpha-\alpha(1-\alpha-\beta)^n \\ \beta-\beta(1-\alpha-\beta)^n & \alpha+\beta(1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$

- todos as caselas/entradas da matriz limite são positivas
- as linhas são iguais à distribuição estacionária
- a distribuição limite não depende do estado inicial

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$




cadeia irredutível recorrente positiva periódica ($d = 2$)

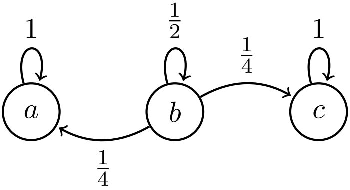
$$\mathbf{P}^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

portanto, não existe o limite de $\mathbf{P}^n$.

No entanto, existe distribuição estacionária, $\pi = (1/2, 1/2)$.

# Exemplo 3

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$




Cadeia redutível: 1 classe transitória $(\{b\})$, 2 classes absorventes (recorrentes positivas aperiódicas) $(\{a\}$ e $\{b\})$

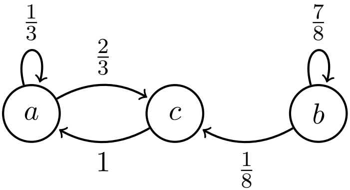
$$\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ depende do estado inicial

Existem infinitas distrib. estacionárias: $\boldsymbol{\pi} = \Big(\gamma, 0, 1 - \gamma\Big)$, $\gamma \in [0, 1]$.

# Exemplo 4

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 7/8 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$




Cadeia redutível: 1 classe transitória $(\{b\})$, 1 classe recorrente positiva aperiódica ($\{a, c\}$)

Existe distribuição estacionária? Sim, e única: $\boldsymbol{\pi} = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}\right)$.

$$\mathbf{P}^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & 2/5 \\ 3/5 & 0 & 2/5 \\ 3/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \\ \boldsymbol{\pi} \end{pmatrix}$$

- Existem entradas/caselas com valores nulos (não é ergódica)
- as linhas coincidem com a distribuição estacionária
- distribuição limite não depende do estado inicial

# Limite das Probabilidades de Transição

Interesse

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) \,, \forall i, j \in S$$

Pelos exemplos, vimos que o limite $(*)$

- pode não existir
  **Pergunta**: Sob que condições existe o $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$ ?
  $\longrightarrow$ periodicidade impede que haja limite
- pode existir e depender do estado inicial
- pode existir e **não** depender do estado inicial

# Comportamento assintótico de estado TRANSITÓRIO

Estados transitórios não serão visitados após algum tempo finito e portanto, intuitivamente, $\forall\, i$, $p_{ij}^{(n)} \to 0$, para $j$ transitório.

Do primeiro critério de classificação temos o resultado formal

**Proposição 1 - Probabilidade de transição limite de estado transitório**

Se $j$ é um estado transitório então, para todo $i \in S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$$

e, portanto,

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

# Comportamento assintótico de estado RECORRENTE

A probabilidade limite e o tempo médio de recorrência estão conectados, conforme enunciado abaixo.

## Proposição 2 - Probabilidade limite de estado RECORRENTE

Seja $j$ é um estado recorrente e aperiódico com tempo médio de recorrência $\mu_j$, então

(a) Se $i \longleftrightarrow j$ então

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$$

- (a1) se, adicionalmente, $j$ é recorrente positivo então $p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} > 0$
- (a2) se, entretanto, $j$ é recorrente nulo então $p_{ij}^{(n)} \to \frac{1}{\mu_j} = 0$

(b) Se $i$ e $j$ pertencem a classes diferentes então

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

# Condição suficiente e necessária para existência

**Teorema 2 - Condição suficiente e necessária para existência de distribuição limite**

Uma condição necessária e suficiente para a existência de distribuição limite, que não dependa do estado inicial, é que exista, no espaço de estados $S$ da cadeia, exatamente uma classe $C$ $(C \subseteq S)$ de estados recorrentes positivos e aperiódicos tal que $f_{ij} = 1$ para todo $j \in C$ e todo $i \in S$.

Teorema 2 e a Proposição 2 estabelecem que, para todo $i \in S$ e $j \in C$,

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j)$$

Note que a cadeia não precisa ser irredutível, mas só pode haver uma única classe recorrente positiva e aperiódica
e as classes restantes devem ser transitórias e/ou recorrentes nulas (com probabilidades limite nulas).

# Teorema Ergódico

Pelos Teoremas 1 e 2, Lema de Kac e Proposição 2 temos:

## Teorema 3 - Teorema Ergódico

Considere uma cadeia de Markov irredutível.
A cadeia tem uma única distribuição estacionária $\pi$ **se e somente se** todos os estados são recorrentes positivos.
Essa distribuição estacionária $\pi$ satisfaz,

$$\pi_j \stackrel{Kac}{=} \frac{1}{\mu_j} > 0 \ , \ \text{para todo } j \in S$$

Além disso, se a cadeia for aperiódica, então

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \stackrel{Prop.2}{=} \pi_j$$

Ergodicidade $\longleftrightarrow \{\lim_n p_{ij}^{(n)} > 0 \ , \ \forall\, j \in S\}$

# Resumo para cadeia de Markov FINITA

| | | |
|---|---|---|
| distribuição estacionária única | Teorema 1 $\Longleftrightarrow$ | existe exatamente uma classe recorrente positiva |
| $\Uparrow$ | | $\Uparrow$ |
| $\exists$ distribuição limite não depende do estado inicial | Teorema 2 $\Longleftrightarrow$ | existe exatamente uma classe recorrente positiva aperiódica |
| $\Uparrow$ | | $\Uparrow$ |
| (*) ergodicidade | Teorema 3 $\Longleftrightarrow$ | cadeia irredutível recorrente positiva aperiódica |

(*) todas as probabilidades limites são estritamente positivas