MAE0312 – Lista de exercícios 2

Profa. Beti

Os itens ou exercícios assinalados com 🍂 serão resolvidos em classe.

Os itens assinalados com $\diamondsuit$ serão resolvidos posteriormente.

1. Assuma que o espaço de estados das seguintes cadeias de Markov é $S \subseteq \{a, b, c, d, e\}$. Para cada cadeia, classifique os estados, isto é, determine as classes e especifique se os estados/classes são transitórios, recorrentes ou absorventes, e se a cadeia é irredutível ou não. Especifique os períodos dos estados (ou das classes).

(a) $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ (b) $\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad$ (d) 🍂 $\mathbf{P}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Uma urna contém seis fichas (similares às fichas de poquer), das quais três são vermelhas e três são verdes. Duas fichas são selecionadas da urna. Se uma ficha for vermelha e a outra verde, então as fichas selecionadas são descartadas e duas fichas azuis são colocadas na urna. Caso contrário, as fichas selecionadas retornam à urna. Esse procedimento é repetido até que a urna contenha apenas fichas azuis. Denote por X_n o número de fichas vermelhas na urna após a $n-$ésima extração. Considere que $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov. Esse é um modelo elementar de uma reação química no qual átomos vermelhos e verdes se combinam para formar uma molécula azul.

   (a) Determine o espaço de estados S e a matriz de probabilidades de transição da cadeia.

   (b) Classifique os estados. A cadeia é irredutível ?

3. Uma urna contém sempre N bolas, algumas brancas e as restantes pretas. A cada passo lança-se uma moeda que tem probabilidade p, $0 < p < 1$, de sair *cara*. Se sair *cara* então uma bola é retirada ao acaso da urna e reposta por uma bola **branca**; se sair *coroa*, então a bola retirada é reposta por uma bola **preta**. Denote por X_n o número de bolas brancas na urna após n passos. Considere que $\{X_n, n \geq 0\}$ é uma cadeia de Markov.

   (a) Determine o espaço de estados S e as probabilidades de transição p_{ij}, para $i, j \in S$.

   (b) Classifique os estados e encontre os seus períodos. A cadeia é irredutível ?

   (c) Se $p = 1$, qual é o tempo esperado até que haja apenas bolas brancas na urna se inicialmente haviam i brancas e $N - i$ pretas ?

   (d) $\diamondsuit$ Suponha que $N = 2$. Encontre a proporção do tempo que a cadeia fica em cada estado.

4. Toda manhã Pedro sai de sua casa para correr. Ele sai de casa pela porta da frente ou pela porta de trás com igual probabilidade. Antes de sair de casa ele escolhe um par de tenis (ou vai correr descalço se não há nenhum par de tenis na porta da qual ele sairá de casa). Ao retornar em casa ele entra por qualquer uma das duas portas (frente ou trás) com mesma probabilidade e deixa o par de tenis lá. Se ele tem um total de k pares de tenis, qual é a proporção de tempo/vezes que ele corre descalço ? Para responder essa pergunta, resolva os itens abaixo.

(a) Defina um estocástico apropriado para responder à pergunta, isto é, especifique **cuidadosamente** o que representa X_n.

(b) Especifique o espaço de estados S e a matriz de probabilidades de transição do processo.

(c) Qual estado representa quando Pedro corre descalço?

(d) $\diamondsuit$ Calcule a proporção de tempo que ele corre descalço.

5. **Processo de ramificação** (tempo discreto)

Suponha que um organismo biológico no fim de sua vida produz um número aleatório X de descendentes com distribuição de probabilidades

$$P(X=k)=a_k, \quad k=0,1,2,\ldots, \text{ com } a_k \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

Assuma que cada organismo age independentemente do outros com relação ao número de descendentes. Assuma, por simplicidade, que o tempo de vida de cada organismo é fixo e é o mesmo para todos eles. Seja Y_n o tamanho da população na $n-$ésima geração. Então $\{Y_n, n>0\}$ é uma cadeia de Markov com probabilidades de transição

$$p_{ij} = P(Y_{n+1}=j \mid Y_n = i) = P(X_1+\cdots+X_i=j)$$

com X_i sendo variáveis independentes e identicamente distribuídas como X descrita acima.

(a) Suponha que $a_k<1$ para todo $k\geq 0$ e que $a_0>0$. Especifique o espaço de estados S e classifique os estados da cadeia.

(b) Seja $\mu = E(X) = \sum_{k\geq 0} k.a_k$. Mostre, usando condicionamento, que $\mathrm{E}(Y_n)=\mu \mathrm{E}(Y_{n-1})$. Mostre que se $X_0=1$ então $\mathrm{E}(X_n)=\mu^n$.

(c) Se $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$, usando a fórmula de variância condicional (*Exercício 1 da Lista 1*), mostre que, ainda considerando que $X_0=1$,

$$\mathrm{Var}(Y_n) = \begin{cases} \sigma^2\mu^{n-1}\left(\frac{\mu^n-1}{\mu-1}\right), & \text{se } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2, & \text{se } \mu = 1 \end{cases}$$

6. Suponha que uma montadora de automóveis monta apenas carros de 3 tipos: compacto (2 volumes), sedan (3 volumes) e perua. A linha de montagem tem as seguintes regras.

- Duas peruas nunca podem ser montadas em seguida para não desequilibrar a linha de montagem.
- Um compacto deve ser montado após um sedan para equilibrar a linha.
- Um compacto pode ser seguido por um sedan ou uma perua, mas não por outro compacto.

Construa uma matriz de transição **P** baseado nessas regras e preencha com letras $a,b,c,d,\ldots$ as probabilidades positivas não definidas numericamente pelas regras.

(a) Qual é a probabilidade de que, **após** a montagem de uma perua, o segundo carro montado também seja uma perua (isto é, as peruas estariam separadas por apenas um carro de outro tipo) ? Use as letras $a,b,\ldots$ se necessário. A cadeia é irredutível ? Classifique os estados.

(b) $\diamondsuit$ Suponha que a montadora tem o compromisso de entregar 10.000 carros no final do mes, sendo que aproximadamente 50% deles devem ser compactos, 10% sedans e 40% peruas. Encontre as probabilidades de transição (isto é, calcule os valores de $a,b\ldots$) de maneira que a montadora cumpra o compromisso e satisfaça as regras da linha de montagem.