Cadeias de Markov

Diagramas de transição

Classificação de estados

Classificação da cadeia

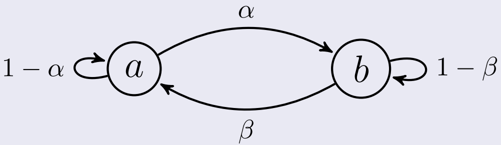
Diagrama de transição

Considere a cadeia de Markov (chove/não chove) com matriz de probabilidades de transição dada por

$$\mathbf{P} = \begin{array}{l} \\ \text{chove} \\ \text{não chove} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{chove} & \text{não chove} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}$$

Diagrama de transição

Denote por: $a =$ chove e $b =$ não chove



Recorrência e transiência

Definição

O **estado** i, $i \in S$, é denominado recorrente (ou persistente), se

$$P(X_n = i \text{ para algum } n \geq 1 \mid X_0 = i) = 1$$

ou seja, se a probabilidade de um eventual retorno ao estado i, tendo partido de i, é 1.

Se a probabilidade acima é estritamente menor que 1, então o estado i é denominado transitório (ou transiente).

Exemplos: classificar os estados da cadeia

Para cada cadeia faça o diagrama de transição, classifique os estados e informe se a cadeia é ou não irredutível.

Exemplo 1: Considere uma cadeia com $S = \{a, b, c, d, e\}$ e

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 3/5 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplo 2: Considere uma cadeia com $S = \{a, b\}$ e

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemplos-continuação

Exemplo 3: Considere uma cadeia com $S = \{a, b, c, d\}$ e

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolução dos exemplos na lousa

O comportamento dos estados e as relações entre eles que vocês visualizam pelos diagramas de transição podem ser formalizados da seguinte maneira.

Acessibilidade e comunicabilidade

Definição

Sejam i e $j \in S$ dois estados de uma cadeia de Markov.

(a) O estado j é dito ser **acessível** pelo estado i (denota por $i \to j$) se, para algum $n \geq 0$, $p_{ij}^{(n)} > 0$.

(b) Dois estados i e j que são acessíveis um pelo outro são ditos (inter)**comunicantes** (denotado por $i \leftrightarrow j$).

Propriedades da comunicabilidade:

(1) $i \leftrightarrow i$ (reflexiva)

(2) $i \leftrightarrow j \Longrightarrow j \leftrightarrow i$ (simetria)

(3) $i \leftrightarrow j,\ j \leftrightarrow k \Longrightarrow i \leftrightarrow k$ (transitiva)

Prova: na lousa

Classe(s) de estados e irredutibilidade

As propriedades acima implicam que a relação de comunicabilidade é uma relação de equivalência. Portanto, o espaço de estados S pode ser particionado em classes disjuntas (classes comunicantes).

Dois estados que se comunicam estão na mesma classe.

Cadeia irredutível

A cadeia de Markov é dita ser irredutível se há apenas uma única classe, isto é, se todos os estados se comunicam entre si.

O diagrama de transição permite visualizar se a cadeia é ou não irredutível e, quando S é finito, facilmente conseguimos classificar os estados do espaço de estados em recorrente, transiente ou transitória e absorvente $(*)$
$(*)$ Uma classe com um único estado recorrente é chamado de estado **absorvente.**

Periodicidade

Período de um estado

O período $d(i)$ do estado i é definido por

$$d(i) = \text{max. divisor comum}\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

Se $d(i) = 1$ dizemos que o estado i é aperiódico
Se $d(i) > 1$ dizemos que o estado i é periódico com período $d(i)$

Resultado 1

Se i e j se comunicam, então eles têm o mesmo período.

Resultado 2

Recorrência, transiência e período são propriedades de **classe** e da cadeia, se ela for irredutível.

Exercício: Determine os períodos dos estados dos exemplos.

Exemplos-continuação

Exceto pelas entradas com valor 1 (probabilidade 1) da matriz de transição, o diagrama de transição não necessita explicitar os valores das probabilidades envolvidas.

Exemplo 4: Considere uma cadeia com $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ e

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

As entradas da matriz com $*$ indicam probabilidades de transição positivas.

Classificação e limite de $P^{(n)}$

Para cada um dos exemplos 1 a 4, considerando os diagramas de transição, o que pode ser dito sobre

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} \ ?$$

- O limite existe?
- Caso exista, tem-se alguma informação sobre alguma entrada (casela) da matriz limite?