Cadeias de Markov

Como simular uma cadeia de Markov

(espaço de estados finito)

Referência: livro do Häggström - Finite Markov Chains

Como simular uma variável aleatória qualquer

Resultado de Probabilidade

Seja X é uma variável aleatória com função de distribuição F_X.

- Se X é **contínua**, a variável aleatória $W = F_X(X)$ tem distribuição Uniforme $(0, 1)$
- Se F_X é uma função de distribuição **contínua e estritamente crescente** e $U \sim$ Uniforme $(0, 1)$, então

  $Y = F_X^{-1}(U)$ tem função de distribuição F_X

  Obs.: *este último item é válido para qualquer função de distribuição usando a definição mais ampla de função inversa:*

  $$F_X^{-1}(u) = \inf\{y : F_X(y) \geq u\}$$

Em particular, se X for uma variável aleatória que assume apenas valores inteiros não-negativos, então a variável Y definida por

$$Y = k \quad \Longleftrightarrow \quad F_X(k-1) < U \leq F_X(k)$$

tem função de distribuição F_X

Geradores de números (pseudo) aleatórios

Para simular valores de qualquer variável aleatória X basta ter F_X^{-1} e números $u_1, u_2, u_3, \ldots,$ <u>uniformemente distribuídos</u> no intervalo $(0, 1)$.

- Aplicativos computacionais têm um gerador de números pseudo aleatórios.
- Os números gerados $u_1, u_2, u_3, \ldots,$ **não** são aleatórios.
  Eles são gerados por uma função.
- Os números gerados passam por testes de aleatoriedade, de independência e de aderência à uma distribuição Uniforme (0,1).
- Atenção à semente
  $\longrightarrow$ fornece a mesma sequência se a mesma semente for usada.
- Atenção à quantidade de números gerados
  $\longrightarrow$ pode entrar em ciclo.

Como simular uma CADEIA de MARKOV

Toda informação sobre uma cadeia de Markov está contida na matriz de probabilidades de transição $\mathbf{P}$ e na distribuição inicial $\boldsymbol{\pi_0}$.

Para simular uma cadeia de Markov precisamos:

- uma sequência de números aleatórios com distribuição Uniforme $(0, 1)$: $u_o, u_1, \ldots, u_n, \ldots$
- uma **função inicial** para simular o valor inicial X_0
  $\longrightarrow$ usa $\boldsymbol{\pi_0}$ e um número aleatório u_0.
- uma **função de atualização** para simular o valor X_n dado X_{n-1}
  $\longrightarrow$ usa $\mathbf{P} = (p_{ij}; i, j \in S)$ e um numero aleatório u_n, para todo instante/passo n.

Como simular uma CADEIA de MARKOV

Função inicial

A função inicial $\psi : [0,1] \to S$ simulará o valor inicial da cadeia. Portanto deve satisfazer:

- ψ é constante por partes;
- para cada estado $i \in S$, o comprimento total dos intervalos para os quais $\psi(u) = i$ é igual a $\pi_0(i)$.

Função de atualização

A função de atualização $\phi : S \times [0,1] \to S$ simulará a evolução da cadeia ao longo do tempo, isto é, ela atualizará o estado da cadeia em cada instante do tempo (a cada passo). Portanto satisfaz:

- ϕ é constante por partes;
- para cada par de estados $i, j \in S$, o comprimento total dos intervalos para os quais $\phi(i,u) = j$ é igual a p_{ij}.

Simulando o valor inicial - especificar ψ

Considere a cadeia com espaço de estados $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$.
Então uma opção para ψ é

$$\psi(u) = \begin{cases} s_1 & \text{para} \quad u \in [0, \pi_0(s_1)) \\ s_2 & \text{para} \quad u \in [\pi_0(s_1), \pi_0(s_1) + \pi_0(s_2)) \\ \vdots & \qquad\quad\;\; \vdots \\ s_i & \text{para} \quad u \in \left[\sum_{j=1}^{i-1} \pi_0(s_j) \, , \, \sum_{j=1}^{i} \pi_0(s_j) \right) \\ \vdots & \qquad\quad\;\; \vdots \\ s_k & \text{para} \quad u \in \left[\sum_{j=1}^{k-1} \pi_0(s_j), 1 \right] \end{cases}$$

Atenção: Essa função ψ **não é única.**

Simulando o valor inicial - verificando condições

O valor inicial X_0 é simulado via a função ψ e uma variável aleatória $U_0 \sim$ Uniforme$(0, 1)$, com a seguinte representação (como variável aleatória)

$$X_0 = \psi(U_0)$$

Essa função ψ satisfaz as condições, pois é constante por partes e

$$\int_0^1 1\!\!1_{\{\psi(u)=s_i\}} du = P(\psi(U_0) = s_i) = \sum_{j=1}^{i} \pi_0(s_j) - \sum_{j=1}^{i-1} \pi_0(s_j) = \pi_0(s_i)$$

$$= P(X_0 = s_i)\ , \quad \text{para todo} \quad s_i \in S.$$

Simulando o passo seguinte - especificar ϕ

Para cada $s_i \in S$

$$\phi(s_i, u) = \begin{cases} s_1 & \text{para} \quad u \in [0, p_{s_i s_1}) \\ s_2 & \text{para} \quad u \in [p_{s_i s_1}\,,\, p_{s_i s_1} + p_{s_i s_2}) \\ \vdots & \qquad\quad\;\; \vdots \\ s_j & \text{para} \quad u \in \left[\sum_{\ell=1}^{j-1} p_{s_i s_\ell}\,,\, \sum_{\ell=1}^{j} p_{s_i s_\ell}\right) \\ \vdots & \qquad\quad\;\; \vdots \\ s_k & \text{para} \quad u \in \left[\sum_{\ell=1}^{k-1} p_{s_i s_\ell}, 1\right] \end{cases}$$

Verificando condições de ϕ

Essa opção de função ϕ satisfaz as condições, pois é constante por partes e,

$$\int_0^1 \mathbb{1}_{\{\phi(s_i,u)=s_j\}} du = P(\phi(s_i, U_0) = s_j) = \sum_{\ell=1}^{j} p_{s_i s_\ell} - \sum_{\ell=1}^{j-1} p_{s_i \ell}$$

$$= p_{s_i s_j} = P(X_1 = s_j \mid X_0 = s_i) \,, \quad \text{para cada par } \; s_i, s_j \in S.$$

Atenção: Essa função ϕ tdambém **não é única**.

Estrutura geral da simulação

Assim, gerando independentes variáveis $U_0, U_1, U_2, \ldots$ com distribuição Uniforme [0,1], uma cadeia de Markov pode ser simulada através de

$$X_0 = \psi(U_0) \quad \text{estado inicial}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= \phi(X_0, U_1) \quad \text{estado no passo 1} \\
X_2 &= \phi(X_1, U_2) \quad \text{estado no passo 2} \\
X_3 &= \phi(X_2, U_3) \quad \text{estado no passo 3} \\
X_4 &= \phi(X_3, U_4) \quad \text{estado no passo 4} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Exemplo: chove/não chove

Considere a cadeia com $S = \{a, b\}$, em que
$a =$ chove e $b =$não chove

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$

Especifique 2 (duas) opções para a função de atualização ϕ.