MAE0312 - Introdução aos Processos Estocásticos - Lista 01

Profa. Beti

Entregar os exercícios assinalados com ♣.
Os exercícios assinalados com ✎ serão resolvidos em classe.

- As listas devem ser feitas INDIVIDUALMENTE.
- Não esqueça de colocar seu NOME e N.USP de forma bem visível na lista.

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias com distibuição conjunta. Mostre que :

   (a) $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X \mid Y)) = \mathrm{E}(X)$. (b) $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(X \mid Y)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(X \mid Y))$.

   Você pode considerar o caso que X e Y são ambas contínuas com função densidade de probabilidade conjunta $f(x, y)$ ou o caso em que ambas são discretas com função discreta de probabilidade $p(x, y)$.

2. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas e seja N uma variável aleatória inteira, não-negativa e **independente** dos X_i's. Em muitas aplicações tem-se interesse na variável que é representada pela **soma aleatória** de variáveis aleatórias. **Mostre** que

   (a) $\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{E}(N).\mathrm{E}(X)$ (b) $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \mathrm{E}(N).\mathrm{Var}(X) + (\mathrm{E}(X))^2.\mathrm{Var}(N)$

3. ♣ Considere uma urna contendo 50 bolas vermelhas e 50 bolas azuis. Retira-se uma bola por vez, sem reposição. Denote por X_n o número de bolas vermelhas remanescentes na urna após a retirada da $n-$ésima bola.

   (a) A seq. $\{X_1, X_2, \ldots, X_{100}\}$ possui a propriedade Markoviana ?
   (b) Calcule $P(X_{10} = 47 \mid X_9 = 48)$.
   (c) Calcule $P(X_{20} = 47 \mid X_{19} = 48)$.
   (d) Calcule $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ especificando os possíveis valores de j.
   (e) A seq. $\{X_1, X_2, \ldots, X_{100}\}$ tem probabilidades de transições homogêneas (no tempo) ?

4. ✎ (Ruina do jogador) Considere um jogador que a cada jogada da partida ganha R$ 1,00 com probabilidade p ou perde R$ 1,00 com probabilidade $1 - p$. Se supormos que o jogador abandona o jogo quando ele for a ruína (ficar com R$ 0,00) ou se ele obtiver a fortuna de R$ N, então "esse jogo pode ser modelado por uma cadeia de Markov com um número finito de estados" . (Na verdade esse é um exemplo de um passeio aleatório com finitos estados). Defina qual é a sequência de variáveis aleatórias que representa o "jogo" e que pode ser modelada por uma cadeia de Markov. Forneça o espaço de estados e determine as probabilidades de transição da cadeia.

5. (Ruina do jogador) Um jogo consiste em partidas que um jogador, chamado de jogador A, ganha cada partida valendo R\$ 1,00 com probabilidade p, ou perde R\$1,00 com probabilidade $1-p$, $0 < p < 1$. Isto é, se X_i representa o valor ganho pelo jogador A na $i-$ésima partida, então $X_i \in \{-1, +1\}$, com $P(X_i = +1) = p = 1 - P(X_i = -1)$. Considere a sequência de variáveis $\{S_0, S_1, \ldots, \}$ tal que $S_o = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

   (a) Simule no computador (linguagem a sua escolha) uma sequência $\{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$ para $p = 1/2$ e $n = 1.000$. E imprima o resultado num gráfico coordenado (n, S_n).

   (b) Calcule a probabilidade

$$P(S_{2n} = 0 \mid S_0 = 0) \ , \quad n = 1, 2, \ldots$$

6. ✎ Uma cadeia de Markov $\{X_n\}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, 2\}$ tem a seguinte matriz de transição de probabilidades.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$$

   Se sabe-se que o processo inicia no estado 1 ($X_0 = 1$), determine a probabilidade do processo estar no estado 2 no instante 2.

7. ♣ Considere uma cadeia de Markov $\{X_n; n \geq 0\}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, 2\}$, distribuição de probabilidade inicial $\mathbf{p}_0 = (1/4, 1/2, 1/4)$, e matriz de transição

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

   (a) Calcule $P(X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1)$.

   (b) Mostre que $P(X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1 \mid X_0 = 0) = p_{01} \ \ p_{11}$.

   (c) Calcule $p_{01}^{(2)}$.

8. Uma cadeia de Markov $\{X_n\}$ com espaço de estados $S = \{0, 1, 2\}$ tem a seguinte matriz de transição de probabilidades.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

   Calcule $P(X_3 = 1 \mid X_1 = 0)$ e $P(X_3 = 1 \mid X_0 = 0)$.

9. ♣ Três bolas brancas e três bolas pretas são distribuídas aleatoriamente em 2 urnas de maneira que cada urna conterá 3 bolas. Dizemos que o sistema está no estado i, $i = 0, 1, 2, 3$ se a primeira urna conter i bolas brancas. A cada passo uma bola é retirada de cada urna e as bolas são trocadas de urnas. Denote por X_n o estado do sistema após n passos. Explique por que $\{X_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é uma cadeia de Markov e determine sua matriz de probabilidades de transição.

10. ✎ **Urna de Ehrenfest** Suponha que um compartimento, com M moléculas, tem uma membrana separando o compartimento em duas partes: A e B. Inicialmente o compartimento A possui j moléculas e o compartimento B, $M-j$ moléculas. Dizemos que uma *transição* ocorre toda vez que uma molécula atravessa a membrana (de A para B ou de B para A). Denote por X_n o número de moléculas no compartimento A após n transições. Note que a cada transição a variável X_n é acrescida ou decrescida de exatamente uma molécula. Suponha que a probabilidade de que uma molécula mude de compartimento é proporcional ao número de moléculas no compartimento que a molécula estava. Construa um cadeia apropriada para esse processo, isto é, descreva em português a sequência de variáveis que representa o processo, defina o espaço de estados e forneça matriz de transição do processo. O modelo descrito acima é chamado de *modelo de difusão de Ehrenfest* .

11. ♣ Suponha que o fato de chover ou não hoje depende apenas nas condições do tempo dos 2 últimos dias. Isto é suponha que se choveu nos 2 últimos dias então choverá hoje com probabilidade 0,7; se choveu ontem, mas não antes-de-ontem, então choverá hoje com probabilidade 0,5; e se choveu antes-de-ontem, mas não ontem, então choverá hoje com probabilidade 0,4; e se não choveu nos 2 últimos dias então choverá hoje com probabilidade 0,2.

    (a) Se o estado do processo no instante n depende apenas se choveu ou não no instante $n-1$, então o modelo acima **não** é uma cadeia de Markov. Explique.

    (b) Podemos transformar o modelo acima em uma cadeia de Markov dizendo que o estado no instante n é determinado pela presença ou não de chuva nos 2 dias anteriores, adotando a seguinte nomenclatura.

        estado 0 $\Leftrightarrow$ se choveu hoje e ontem;
        estado 1 $\Leftrightarrow$ se choveu hoje mas não ontem;
        estado 2 $\Leftrightarrow$ se choveu ontem mas não hoje;
        estado 3 $\Leftrightarrow$ se não choveu hoje nem ontem.

    Determine a matriz de probabilidades de transição para a cadeia de Markov com 4 estados definidos acima.

    (c) Se não choveu ontem nem antes de ontem, qual a probabilidade que choverá amanhã ?