Alguns resultados úteis

Profa. Beti 2022

1. Algumas fórmulas envolvendo somas. Esses resultados podem ser provados por indução.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k &= \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{(soma finita de PA)}\\
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2\\
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}
\end{aligned}$$

2. Alguns resultados em séries

$$\text{Para} \quad \{a_n\}_n, a_n \geq 0, \forall n, \quad \text{se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \text{então} \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} a_k = +\infty$$

$$\text{Para} \quad \{a_n\}_n, a_n \geq 0, \forall n, \quad \text{se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty, \quad \text{então} \quad \lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} a_k = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} = +\infty \quad \text{para} \quad r \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} < +\infty \quad \text{para} \quad r > 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(Euler, 1735)}$$

3. Progressão geométrica (PG) com $a_1 = 1$o.termo da sequência e $q =$ razão

   A soma dos primeiros n termos da sequência é denotada por S_n.

$$S_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \, \frac{1-q^n}{1-q}$$

   Se $|q| < 1$, então a soma **infinita** dos termos da PG é dada por

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

4. Fatorial e elementos combinatóricos (n e k inteiros não-negativos)

   (a) Fatorial

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k)$$

   Convenção: $0! = 1$

(b) Fórmula de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}$$

(c) Permutação de n elementos distintos: $n!$

(d) Arranjo (ordenado) de n elementos distintos em subconjuntos de k, $k \leq n$:

$$A_{n,k} = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ termos}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(e) Combinação de n elementos distintos em subconjuntos de k, $k \leq n$:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$$

Convenção: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = 0$ para $k > n$.

(f) Permutação com elementos repetidos

Exemplo 1: número de anagramas de ARARA: $\dfrac{5!}{3!\,2!}$

Exemplo 2: número de anagramas de TAQUARUSSU: $\dfrac{10!}{1!\,2!\,1!\,3!\,1!\,2!}$

Caso geral: se há n elementos sendo n_1 do tipo $1, \ldots, n_k$ do tipo k, com $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, o número total de permutações com esses elementos repetidos é dado por

$$\frac{n!}{n_1!\; n_2! \cdots n_k!}$$

Note que, no exemplo 1, o resultado é similar à combinação, mas em combinação os elementos são todos distintos.

5. Para $0 < n \leq a,\ 0 < n \leq b$, ou seja, $0 < n \leq \min\{a, b\}$

$$\binom{a+b}{n} = \binom{a}{0}\binom{b}{n} + \binom{a}{1}\binom{b}{n-1} + \cdots + \binom{a}{n}\binom{b}{0}$$

Aplicação: para provar que a soma das probabilidades na distribuição hipergeométrica é igual a 1.

6. Binômio de Newton

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
\vdots\quad &\quad \vdots \\
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k \quad \text{para } n \text{ inteiro positivo}
\end{aligned}$$

Casos particulares

$$\begin{aligned}
(1+t)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k \quad \text{para } n \text{ inteiro positivo} \\
(1-t)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k\, t^k \quad \text{para } n \text{ inteiro positivo}
\end{aligned}$$

7. Binômio de Newton generalizado

O binômio de Newton pode ser generalizado para α **real** através da seguinte soma **infinita**

$$(a+b)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} a^{\alpha-k}\, b^k$$

para $0 \leq |a| < |b|$ (ou $0 \leq |b| < |a|$), e com

$$\binom{\alpha}{k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

Aplicação: para provar que a soma das probabilidades na dist. binomial negativa é igual a 1.

Considere $\alpha = -r$, $r > 0$, $a = 1$ e $b = -q$, temos que

$$(1-q)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-q)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^k \binom{-r}{k}}_{(*)} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} q^k$$

Demonstração de $(*)$

$$\begin{aligned}
\binom{k+r-1}{k} &= \frac{(k+r-1)!}{k!(r-1)!} = \frac{\overbrace{(k+r-1)(k+r-2)\cdots(r+1)r}^{k \text{ termos}}}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{(-r)(-r-1)(-r-2)\cdots(-r-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{-r}{k}
\end{aligned}$$

8. Logaritmo

Definição: $\log_b x = y \iff b^y = x$

Convenção: $\log_e x = \ln x$ e $\log_{10} x = \log x$. É comum considerar $\log x = \ln x$

Propriedades (válidas para qualquer base):

- $\log 1 = 0$
- $\log(ab) = \log a + \log b$
- $\log(y^c) = c \log y$, em particular, para $c = -1$, $\log(1/y) = -\log y$
- $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

9. Desenvolvimento em série de Taylor

Seja f uma função real infinitamente derivável em um ponto $a \in \mathbb{R}$.

A série de Taylor dessa função é expressá-la como uma série infinita de potências, em torno do ponto a, dada por

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k
\end{aligned}$$

em que $f^{(k)}$ denota a $k-$ésima derivada de f, e $f^{(0)} = f$.

Quando $a = 0$, essa série também é chamada de série de Maclaurin.

Exemplos:

- Exponencial: $f(x) = e^x$ em torno de $a = 0$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Logaritmo: $f(x) = \ln(1+x)$ em torno de $a = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\, x^k \quad \text{para} \quad |x| < 1$$

- Geométrica: $f(x) = x^m/(1-x)$ em torno de $a = 0$ (compare com PG)

$$\frac{x^m}{1-x} = \sum_{k=m}^{\infty} x^k \quad \text{para} \quad |x| < 1$$

- Logaritmo: $f(x) = \ln(1-x)$ em torno de $a = 0$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad \text{para} \quad |x| < 1$$

- Logaritmo: $f(x) = \ln x$ em torno de $a = 1$

$$\ln x = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k \quad \text{para} \quad |x| < 1$$

- Há expressões para as funções trigonométricas e hiperbólicas

10. Expressões para a função **exponencial**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\text{Se} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = x \quad \text{então} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{y_n}{n}\right)^n = e^x$$

11. Função gama

A função gama é definida, para todo a real positivo, por

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} u^{a-1} e^{-u} du$$

Propriedades

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(a) = (a-1)\,\Gamma(a-1)$ (via integração por partes)
- Se $n \in I\!N$, então $\Gamma(n) = (n-1)!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

12. Função beta

    A função beta é definida por, para reais $a > 0$ e $b > 0$,

$$\beta(a,b) \stackrel{def}{=} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du \stackrel{resultado}{=} \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Fonte principal:
Mood, Graybill, Boes; *Introduction to the Theory of Statistics*, 3rd edition, McGraw-Hill, 1974.