Introdução aos Processos Estocásticos

Introdução

Nos cursos introdutórios de probabilidade e estatística estudou-se

X variável aleatória $\longrightarrow$ f.d.p., Função de Distribuição, funções geradoras, E(X), Var(X)

(X, Y) vetor de v.a. $\longrightarrow$ dist. conjuntas, marginais, condicionais, f.geradora de momentos bivariada; esperanças (marginais), esperanças condicionais, covariâncias, correlação; transformações.

$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \longrightarrow$ dist. conjuntas/marginais/condicionais; f.geradora de momentos multivariada; esperanças marginais/condicionais, covariâncias; transformações

Motivação

Considere que há um fenômeno se desenvolvendo aleatoriamente no decorrer do tempo.

Então, a sequência ordenada $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ representa a evolução desse fenômeno, ou sistema, nos instantes $1, 2, \ldots, n$.

(*Note que* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *não são necessariamente independentes*)

Temos, portanto, o conceito de processo e não apenas de evento. Daí o nome **processo aleatório** ou **processo estocástico**.

$\longrightarrow$ Quando n cresce, qual é o comportamento da sequência?

Às vezes, o índice pode representar, não o tempo, mas uma localização no espaço $\longrightarrow$ **campo aleatório**.

Em outras situações pode-se ter um processo duplamente indexado, um índice representando o espaço e o outro, o tempo, ou seja, temos um **processo estocástico espacial**.

Definição

Processo estocástico

Um processo estocástico é uma coleção ou família de variáveis aleatórias $\boldsymbol{X} = \{X_t, t \in T\}$ indexadas pelo conjunto T, com T frequentemente representando o tempo.

- Para cada tempo $t_0 \in T$, t_0 fixado, X_{t_0} é uma variável aleatória (unidimensional) representando o "estado" do sistema no instante t_0,

  $$X_{t_0} : \Omega \longrightarrow S$$

  O conjunto em que X_t assume valores é denominado espaço de fases ou espaço de estados e é denotado por S.
- Para cada $\omega_0 \in \Omega$, $X_t(\omega_0)$ é uma função real em t.
  O gráfico dessa função é chamado de caminho amostral.

Tipos de processos

O conjunto de índices T e o espaço de estados S podem ser

tempo discreto: $T \subseteq \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$
tempo contínuo: $T \subseteq \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$
espaço de estados discreto: $S \subseteq \mathbb{Z}$ (ou $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^d$, V)
espaço de estados contínuo: $S \subseteq \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^d$)

Assim podemos ter 4 tipos de processos estocásticos:

- tempo discreto e espaço de estados discreto
- tempo contínuo e espaço de estados discreto
- tempo discreto e espaço de estados contínuo
- tempo contínuo e espaço de estados contínuo

Cadeia de Markov é uma classe de processos em que o espaço de estados é discreto (finito ou enumerável) e o tempo pode ser discreto ou contínuo.

Nessa disciplina estudaremos alguns processos que se enquadram nos 3 primeiros tipos.

Exemplos de processos estocásticos

- $X_t =$ saldo em conta corrente no instante t
  $t = 0$: instante de abertura da conta ou outra data fixada
  $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$, e $S \subset \mathbb{R}$
- $X_t =$ quantidade de chuva numa localidade até o instante t ou no instante t
  $T = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^+$, e $S \subset \mathbb{R}^+$ ou $\mathbb{N}$
- $X_t =$ número de clientes que entraram num banco até o instante t
  $Y_t =$ número de clientes que saíram do banco até o instante t
  $Z_t =$ número de clientes que estão no banco no instante t
  $T = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$, e $S = \mathbb{N}$
- outros exemplos: volume de vendas, valor de uma ação no mercado financeiro, índice de inflação.
- Séries temporais (ver IPEA data)

Trajetória ou caminho amostral

Um processo estocástico $\boldsymbol{X} = \{X_t, t \in T\}$ é uma função de 2 variáveis: $\omega \in \Omega$ e $t \in T$.

Trajetória ou caminho amostral

Num processo estocástico, se fixarmos $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega)$ é uma função real de t. Um gráfico dessa função, com ω fixado, é chamado de uma realização ou trajetória ou caminho amostral do processo estocástico.

Observações

- Os gráficos exibidos nos exemplos são exemplos de trajetórias.
- O gráfico é uma amostra de tamanho $n = 1$ do processo.
- Não há nenhuma aleatoriedade na função $X_t(\omega)$ para ω fixado.
- A componente aleatória (de qualquer variável aleatória ou processo aleatório) é oriunda do comportamento ao se variar os elementos do espaço amostral.
- Para $t_0 \in T$ fixado, já vimos que X_{t_0} é variável aleatória.

Perguntas

Por que estudar processos estocásticos?

modelagem,
previsão,
análise do comportamento do sistema a longo prazo (comportamento assintótico)

Como analisar processos estocásticos?

caminho amostral: usado em séries temporais
estrutura probabilística: distribuição (lei) de probabilidade do processo

Distribuição finito-dimensionais

Para caracterizar completamente o comportamento probabilístico de um processo estocástico $\boldsymbol{X} = \{X_t, t \in T\}$ precisamos da distribuição conjunta

$$P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \ldots, X_{t_k} \leq x_k)$$

para todo $\quad t_1, t_2, \ldots, t_k \in T$;
para todo $\quad x_1, x_2, \ldots, x_k \in S$;
para todo $\quad k = 1, 2, \ldots$

Distribuições finito-dimensionais

As distribuições conjuntas acima são chamadas de **distribuições finito-dimensionais** ou distribuições de dimensão finita.

SITUAÇÃO REAL $\Longleftrightarrow$ MODELO

sofisticação do modelo VERSUS flexibilidade na análise

Exemplos:

- $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ i.i.d. $\longrightarrow$ fácil de analisar, mas ...
- Redes neurais, lógica fuzzy, ... $\longrightarrow$ têm muitos parâmetros para serem estimados, então ...

Markov (em 1907) consegue descrever uma grande quantidade de situações reais através de modelos com boa estrutura matemática de análise. Esses modelos são chamados de processos Markovianos.

Estruturas de processos:

- Processos Markovianos
- Processos Estacionários
- Processos de Renovação
- Martingais
- Processos de difusão