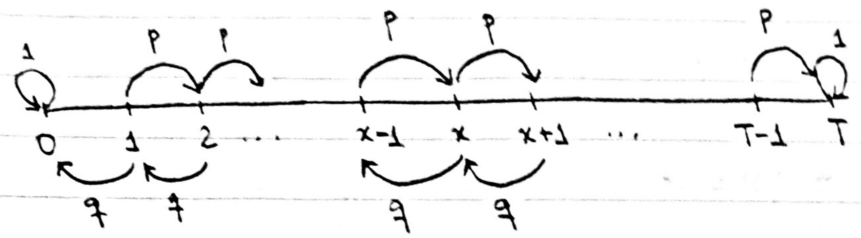
LISTA DE ACOMPANHAMENTO 2: EXEMPLOS

Ex 1:

i)



Espaço de estados: $S := \{0, 1, \dots, T\}$

Matriz de transição:

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & x-1 & x & x+1 & \cdots & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & q & 0 & p & \cdots & 0 \\ & & & & & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ii) Primeiro, verifique se você entende a notação $\mathbb{P}_x$(alguma coisa). Essa notação é equivalente a $\mathbb{P}$(alguma coisa$\mid X_0 = x$). Por exemplo,

$\mathbb{P}_0(X_2 = 7) \equiv \mathbb{P}(X_2 = 7 \mid X_0 = 0)$ = prob. de estarmos no estado 7 depois de 2 transições tendo partido do estado 0

Vamos usar essa notação com frequência para evitar ficar escrevendo a todo momento o condicional.

Assim, voltando à questão:

$r_0 = \mathbb{P}_0(X_n = 0 \text{ para algum } n \geq 0) = \mathbb{P}(X_n = 0 \text{ p/ algum } n \geq 0 \mid X_0 = 0) = 1$, afinal já estamos partindo do zero!

$\pi_T = \mathbb{P}_T(X_n = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0 \mid X_0 = T) = 0$, pois observe que a transição do estado T ocorre sempre para o próprio estado T (consequência de termos assumido que o jogo para se o apostador atinge T reais.

(iii) Para $0 < x < T$ (para facilitar, vou chamar $\{X_n = 0 \text{ para algum } n \geq 0\}$ de ruína):

$$\mathbb{P}_x(\text{ruína}) = \mathbb{P}(\text{ruína} \mid X_0 = x)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lei da Prob. Total}}}{=} \mathbb{P}(\text{ruína} \mid X_0 = x, X_1 = x-1)\,\overbrace{\mathbb{P}(X_1 = x-1 \mid X_0 = x)}^{q} + \mathbb{P}(\text{ruína} \mid X_0 = x, X_1 = x+1)\,\underbrace{\mathbb{P}(X_1 = x+1 \mid X_0 = x)}_{p}$$

$$= q\,\mathbb{P}(\text{ruína} \mid X_0 = x, X_1 = x-1) + p\,\mathbb{P}(\text{ruína} \mid X_0 = x, X_1 = x+1)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Propriedade de Markov}}}{=} q\,\mathbb{P}(\text{ruína} \mid X_1 = x-1) + p\,\mathbb{P}(\text{ruína} \mid X_1 = x+1)$$

$$= q\,\pi_{x-1} + p\,\pi_{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad \pi_x = q\,\pi_{x-1} + p\,\pi_{x+1}$$

(iv) Em sala, chegamos a: $\pi_x = \begin{cases} \dfrac{\rho^x - \rho^T}{1 - \rho^T} & \text{se } \rho \equiv \dfrac{q}{p} \neq 1 \quad (I) \\[2ex] 1 - \dfrac{x}{T} & \text{se } \rho \equiv \dfrac{q}{p} = 1 \quad (II) \end{cases}$

Vamos checar os casos (I) e (II):

* $r_T = 0$?

$$(I)\ r_T = \frac{\rho^T - \rho^T}{1-\rho^T} = 0 \quad \text{OK}$$

$$(II)\ r_T = 1 - \frac{T}{T} = 0 \quad \text{OK}$$

* $r_0 = 1$?

$$(I)\ r_0 = \frac{\rho^0 - \rho^T}{1-\rho^T} = \frac{1-\rho^T}{1-\rho^T} = 1 \quad \text{OK}$$

$$(II)\ r_0 = 1 - \frac{0}{T} = 1 \quad \text{OK}$$

* $r_x = q\, r_{x-1} + p\, r_{x+1}$?

$$(I)\ q\, r_{x-1} + p\, r_{x+1} = q\, \frac{\rho^{x-1} - \rho^T}{1-\rho^T} + p\, \frac{\rho^{x+1} - \rho^T}{1-\rho^T}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^T}\left[q\rho^{x-1} + p\rho^{x+1} \underbrace{- q\rho^T - p\rho^T}_{-(p+q)\rho^T = -\rho^T}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\rho^T}\left[q\rho^x \frac{p}{q} + p\rho^x \frac{q}{p} - \rho^T\right] = \frac{1}{1-\rho^T}\left[\rho^x - \rho^T\right] = r_x \quad \text{OK}$$

$$(II)\ q\, r_{x-1} + p\, r_{x+1} = \left(1 - \frac{x-1}{T}\right)q + \left(1 - \frac{x+1}{T}\right)p$$

$$= q + p - \frac{x}{T}(p+q) + \underbrace{\frac{q}{T} - \frac{p}{T}}_{=0 \text{ pois } p=q \text{ em (II)}} = 1 - \frac{x}{T} = r_x \quad \text{OK}$$

tilibra

LISTA DE ACOMPANHAMENTO – EXEMPLOS

2. Como $G_0 = 1$, $\tilde{\rho} = \rho$ (pois $\psi_0(s) = \mathbb{E}[s^{G_0}] = \mathbb{E}[s^1] = s \Rightarrow \psi_0 = Id$

Como $\tilde{\rho} = \psi_0(\rho)$, $\tilde{\rho} = Id(\rho) = \rho$)

Mais detalhes no slide 13

De (*) no slide 13, sabemos que ρ satisfaz:

$$s = \varphi(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{x=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=x)\, s^x$$

Do Teorema 1 (slide 18), ρ ($= \tilde{\rho}$, prob de extinção) será dada pela menor solução da equação acima em $[0,1]$.

ii) Do enunciado,

$$s = \mathbb{P}(X=0)\, s^0 + \mathbb{P}(X=1)\, s^1 + \mathbb{P}(X=2)\, s^2 + \sum_{x \geq 3} \underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{=0}\, s^x$$

$$s = 0.3 \times 1 + 0.4 \times s + 0.3 \times s^2$$

$$0.3 s^2 - 0.6 s + 0.3 = 0$$

$$s = \frac{0.6 \pm \sqrt{0.6^2 - 4 \times 0.3 \times 0.3}}{2 \times 0.3} = 1 \pm \frac{\sqrt{0.36 - 0.36}}{0.6} = \underline{1}$$

Portanto,

$\tilde{\rho} = \rho = 1$ // A população se extingue c/ probabilidade 1

iii) Nesse caso, repetindo o que fizemos com a nova distrib.:

$$s = 0.5s + 0.5s^2$$

$$0.5s^2 - 0.5s = 0 \quad \therefore \quad s(0.5s - 0.5) = 0 \begin{cases} s = 0 \\ s = 1 \end{cases}$$

Pelo Teo 1, $\tilde{\rho} = \rho = 0$

É intuitivo pois cada indivíduo tem 1 ou 2 filhos. Dessa forma, a população nunca se extingue.

<u>OBS</u>: Verifique que:

Em (ii): $E(X) = 0.3 \times 0 + 0.4 \times 1 + 0.3 \times 2 = 1$

Em (iii): $E(X) = 0.5 \times 1 + 0.5 \times 2 = 1.5$

Nossos resultados estão de acordo com o Teorema 2 (slide 23).