

Listas de acompanhamento - MAE0312

Eduardo F. M. D. Costa - eduardo.figueiredo.costa@usp.br

6 de maio de 2021

O intuito desse conjunto de exercícios é auxiliar os alunos de MAE0312 no acompanhamento das aulas de Introdução aos Processos Estocásticos (2021/1). Esses exercícios **não fazem parte da avaliação da disciplina (em outras palavras, não precisam ser entregues)**. A ideia é simplesmente oferecer um material adicional que possa ser utilizado para revisão dos conceitos e discussão nas monitorias.

A maior parte da lista é baseada nos exercícios do Prof. Konstantopoulos (UC Berkeley). As soluções serão disponibilizadas em arquivo separado. Qualquer dúvida, estou à disposição!

1 Conjunto de slides 1: Introdução

Exercício 1: Assuma que 80% dos filhos de alunos da USP escolham estudar na USP, e o restante na Unicamp; 40% dos filhos de alunos da Unicamp escolham a Unicamp, e o resto se divida igualmente entre USP e Unesp; e, finalmente, 70% dos filhos de alunos da Unesp escolham a Unesp, 20% USP e 10% Unicamp. Nessa situação,

- (i) Esse processo é de Markov? Defina um espaço de estados conveniente e construa a matriz de transição.
- (ii) Encontre a probabilidade de que o neto de um aluno da USP escolha a USP.
- (iii) Modifique a hipótese inicial para que o filho de um aluno da USP escolha sempre a USP. Nesse caso, qual a probabilidade de que o neto de um aluno da USP estude na USP?

Exercício 2: Uma certa máquina usa apenas os dígitos 0 e 1 e deve transmitir um desses dígitos em várias etapas. No entanto, em cada etapa, há uma probabilidade p de que o dígito recebido da etapa anterior seja alterado antes de seguir para a próxima etapa (e, naturalmente, uma probabilidade $q = 1 - p$ de que não haja alteração).

- (i) Esse é um processo de Markov?
- (ii) Qual é a matriz de transição do processo?
- (iii) Qual é a probabilidade de que, começando com o dígito 0, a máquina produza o dígito 0 após duas etapas?

Exercício 3: No exemplo 2 (slides 19/20), verifique se você consegue obter a solução da equação de diferença para $P_{11}^{(n)}$ (ou seja, verifique se entendeu como se chega até essa equação e como resolvê-la). Em seguida, refaça esse exemplo via diagonalização de matrizes (discussão do slide 26).

2 Conjunto de slides 2: Exemplos

Exercício 1: Um apostador joga um jogo em que, a cada rodada, ganha 1 real com probabilidade p e perde 1 real com probabilidade $q = 1 - p$. Pelas regras do jogo, se ele atinge 0 real (ruína), é obrigado a parar. Adicionalmente, se ele atinge T reais, também para de jogar. Essa é uma descrição possível do clássico Problema da Ruína do Apostador.

(i) Defina o espaço de estados conveniente para o problema. Construa a matriz de transição. Se quiser, represente o processo por meio de um esquema como o do slide 2. Reflita sobre a razão desse processo ser de Markov.

(ii) Seja X_n a fortuna do apostador na rodada n . Defina $r_x := \mathbb{P}_x(X_n = 0 \text{ para algum } n \geq 0)$. Quanto vale r_0 ? E r_T ?

(iii) Suponha que o apostador inicie com $0 < x < T$ reais. Expresse r_x em função de p , q , r_{x-1} e r_{x+1} .

Dica: Use a lei da probabilidade total (condicionando no primeiro passo) e, em seguida, a propriedade de Markov. Ou seja, faça o que fizemos no slide 4. **Certifique-se de que entendeu bem o que fizemos nesse item, pois é uma técnica muito utilizada no curso. Vários exercícios são resolvidos por esse tipo de condicionamento.**

(iv) Cheque que a solução obtida em sala (slide 4) é, de fato, uma solução para o problema (ou seja, verifique se as soluções obtidas para cada caso respeitam as equações que você escreveu nos itens (ii) e (iii)).

Exercício 2: Para o processo de ramificação:

(i) Verifique se entendeu os slides 9-13, até chegarmos nas equações (*) e (**). A equação (*) nos permite calcular ρ . Tendo ρ , podemos calcular $\tilde{\rho}$ com (**). Lembre-se de que $\tilde{\rho}$ é a probabilidade de extinção, que é o objeto de interesse do problema.

(ii) Assuma que $G_0 = 1$ (ou seja, a geração inicial tem apenas um indivíduo) e que o número de filhos por indivíduo segue uma distribuição tal que $\mathbb{P}(X = 0) = 0.3$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0.4$ e $\mathbb{P}(X = 2) = 0.3$. Calcule a probabilidade de extinção dessa família.

(iii) Na situação do item (ii), o que ocorreria se a distribuição de probabilidade de X fosse tal que $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0.5$ e $\mathbb{P}(X = 2) = 0.5$? O resultado é intuitivo?

(iv) Verifique se os resultados dos itens (ii) e (iii) estão de acordo com o Teorema 2 (slide 23).

3 Conjunto de slides 3: Propriedade Forte de Markov

Exercício 1: Para o Passeio Aleatório em \mathbb{Z} :

(i) Revise como procedemos para obter a equação (*) do slide 8. O gabarito fornecerá um detalhamento de algumas contas feitas em sala.

(ii) Calcule o tempo esperado de chegada no estado 0 partindo do estado 1 quando $p = 0.3$ (preferencialmente, revise as contas feitas no slide 10).

(iii) Calcule o tempo esperado de chegada no estado 0 partindo do estado 5 quando $p = 0.4$ (ver slide 11).