

**1.** Uma urna contém  $N$  bolas,  $N$  conhecido, das quais  $\theta$  são brancas e  $N - \theta$  são verdes,  $\theta$  desconhecido. Considere o experimento que consiste em retirar  $n < N$  bolas, uma a uma, da urna, SEM reposição. Seja  $X_i = 1$  se a  $i$ -ésima bola extraída da urna é branca e  $X_i = 0$ , caso contrário,  $i = 1, \dots, n$ . Suponha, a priori, que  $\theta$  é distribuído segundo o modelo uniforme sobre o conjunto  $\{0, 1, \dots, N\}$ .

- a) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0$ .
- b) Obtenha a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 + X_2 + \dots + X_n = n - 1$ .
- c) Obtenha a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_j = 1, X_{j+1} = 0, \dots, X_n = 0$ .
- d) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 + X_2 + \dots + X_n = j$ .

**2.** Refaça o exercício anterior, considerando, a priori, que  $\theta$  é distribuído segundo o modelo binomial  $(N, p)$ ,  $0 < p < 1$ . No item (d), mostre que a distribuição a posteriori do número de bolas brancas dentre as  $N - n$  bolas remanescentes na urna é binomial. Quais os parâmetros dessa distribuição?

**3.** Refaça o exercício 1, considerando, a priori, que  $\theta$  é distribuído segundo o modelo hipergeométrico de parâmetros  $A$ ,  $B$  e  $N$ , com  $A + B \geq N$ . No item (d), mostre que a distribuição a posteriori do número de bolas brancas dentre as  $N - n$  bolas remanescentes na urna é hipergeométrica de parâmetros  $A - j$ ,  $B - (n - j)$  e  $N - n$ .

**4.** Uma urna contém  $\theta$  bolas, numeradas de 1 a  $\theta$ ,  $\theta \in \{2, 3, 4, 5\}$ . Uma bola é extraída da urna “ao acaso”. Seja  $X$  o número da bola retirada. Considere, a priori,  $\theta$  é distribuído segundo o modelo uniforme sobre  $\{2, 3, 4, 5\}$ . Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X = 3$ . Qual seria a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X = 5$ ?

**5.** Uma urna contém  $\theta$  bolas, numeradas de 1 a  $\theta$ ,  $\theta \in \{2, 3, \dots, 100\}$ . Duas bolas são retiradas SEM reposição da urna. Seja  $X_i$  o número da  $i$ -ésima bola extraída da urna,  $i = 1, 2$ . Considere, a priori,  $\theta$  distribuído segundo o modelo uniforme sobre  $\{2, 3, \dots, 100\}$ .

- a) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = 16$  e  $X_2 = 4$ .
- b) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = 4$  e  $X_2 = 16$ .
- c) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $\max\{X_1, X_2\} = 16$ .

**6.** Uma urna contém  $\theta$  bolas, numeradas de 1 a  $\theta$ ,  $\theta \in \{k, k + 1, \dots\}$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  conhecido. Considere o experimento que consiste em retirar  $n$  bolas,  $n < k$ , uma a uma, da urna, SEM reposição. Seja  $X_i$  o número da  $i$ -ésima bola extraída da urna,  $i = 1, \dots, n$ . Mostre

que para qualquer distribuição a priori para  $\theta$ , a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$  coincide com a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ .

**7.** Uma urna contém 5 bolas, das quais  $\theta_1$  são brancas,  $\theta_2$  são verdes e  $5 - \theta_1 - \theta_2$  são amarelas. Duas bolas são retiradas, uma a uma, SEM reposição da urna. Seja  $X_i = (1, 0, 0)$ , se a  $i$ -ésima bola retirada da urna é branca,  $X_i = (0, 1, 0)$ , se é verde, e  $X_i = (0, 0, 1)$  se é amarela,  $i = 1, 2$ . Suponha que  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  é distribuído, a priori, segundo o modelo uniforme no espaço paramétrico  $\Theta = \{(u, v) \in \mathbb{N}^2 : u + v \leq 5\}$ .

- a) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = X_2 = (1, 0, 0)$ .
- b) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = (0, 0, 1)$  e  $X_2 = (1, 0, 0)$ .
- c) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = (1, 0, 0)$  e  $X_2 = (0, 0, 1)$ .

**8.** Suponha que a proporção de itens defeituosos em um grande lote produzido,  $\theta$ , é 0,1 ou 0,2. Suponha ainda que, a priori,  $\mathbb{P}(\theta = 0,1) = 0,6$  e  $\mathbb{P}(\theta = 0,2) = 0,4$ . Seis itens são selecionados ao acaso do lote e inspecionados. Seja  $X_i = 1$  se o  $i$ -ésimo item inspecionado é defeituoso e  $X_i = 0$ , caso contrário,  $i = 1, \dots, 6$ .

- a) Obtenha a posteriori de  $\theta$  dado  $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 0$ .
- b) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $\sum_{i=1}^6 X_i = 2$ .

**9.** Considere  $\Theta = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Suponha que  $X$ , dado  $\theta = i$ , seja uniformemente distribuída no conjunto  $\{i, i+1, i+2\}$ . Suponha, a priori, que  $\theta \sim \text{Poisson}(\lambda_0)$ ,  $\lambda_0 > 0$ . Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X = x$ ,  $x = 0, 1, 2, \dots$ .

**10.** Considere novamente o problema do avião desaparecido visto em aula. Considere agora que  $\Theta = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ . Seja  $p_i$  a probabilidade a priori do avião estar na região  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Seja  $\alpha_i$  a probabilidade de uma busca na região  $i$  ser malsucedida quando, de fato, o avião desapareceu naquela região,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

- a) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  se uma busca na região 1 é malsucedida. Para  $i, j \neq 1$ ,  $i \neq j$ , compare a razão entre as probabilidades a posteriori de  $\theta = i$  e  $\theta = j$  com a correspondente razão de probabilidades a priori.
- b) Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  sabendo que  $m$  buscas, uma na região 1, uma na região 2, ..., uma na região  $m$ ,  $m < k$ , foram todas malsucedidas. (Observação: Suponha que buscas sucessivas malsucedidas não alteram as probabilidades de novas buscas malsucedidas)

**11.** Considere  $\Theta = \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ . Suponha que  $X$ , dado  $\theta = i$ , seja uniformemente distribuída no conjunto  $\{1, \dots, i\}$ . Suponha, a priori, que  $\mathbb{P}(\theta = i) = i(1-p)^2 p^{i-1} \mathbb{I}_{\{1, 2, \dots\}}(i)$ . Obtenha a distribuição a posteriori de  $\theta$  dado  $X = x$ ,  $x = 1, 2, \dots$ . Qual é a distribuição de  $\theta - x$  dado  $X = x$ ?

**12.** Refaça os exercícios 1, 2 e 3, considerando que a urna contém  $N$  bolas, das quais  $\theta_1$  são da cor 1,  $\theta_2$  são da cor 2, ...,  $\theta_k$  são da cor  $k$  e  $N - \sum_{i=1}^k \theta_i$  são da cor  $k + 1$ . Especifique, nesse caso, espaço paramétrico, espaço amostral e distribuições a priori e a posteriori para o parâmetro de interesse  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ .

**13.** Prove os seguintes resultados admitindo as suposições SP1, SP2 e SP3:

- a) se  $A$ ,  $B$  e  $D$  são eventos tais que  $A \preceq B$  e  $B \preceq D$ , então  $A \preceq D$ .
- b) se  $A$  e  $B$  são eventos tais que  $A \subseteq B$ , então  $A \preceq B$ .
- c) se  $A$  e  $B$  são eventos tais que  $A \preceq B$ , então  $B^c \preceq A^c$ .
- d) se  $A_1, \dots, A_n$  e  $B_1, \dots, B_n$  são eventos tais que  $B_i \cap B_j = \emptyset$ , se  $i \neq j$ , e  $A_i \preceq B_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ , então  $\cup_{i=1}^n A_i \preceq \cup_{i=1}^n B_i$ .