Cadeias de Markov

Distribuição Estacionária

Notação

Distribuição inicial $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$

Denota-se a distribuição inicial de uma cadeia de Markov por $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$

$$\boldsymbol{\pi}^{(0)} = \left(\pi^{(0)}(j)\right)_{j\in S} \quad \text{ou} \quad \left(\pi_j^{(0)}\right)_{j\in S} \quad \text{ou} \quad \left(\pi_0(j)\right)_{j\in S}$$

$$\pi_0(j) \overset{\text{ou}}{=} \pi^{(0)}(j) \overset{\text{ou}}{=} \pi_j^{(0)} = P(X_0 = j) \quad \forall\, j \in S$$

Distribuição da cadeia no instante n

Denota-se a distribuição da cadeia no instante n $(n \geq 1)$ por $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \left(\pi^{(n)}(j)\right)_{j\in S} \quad \text{ou} \quad \left(\pi_j^{(n)}\right)_{j\in S} \quad \text{ou} \quad \left(\pi_n(j)\right)_{j\in S}$$

$$\pi_n(j) \overset{\text{ou}}{=} \pi^{(n)}(j) \overset{\text{ou}}{=} \pi_j^{(n)} = P(X_n = j) \quad \forall\, j \in S$$

Vetor $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$: distribuição de X_n

Pelo Teorema da Probabilidade Total, para todo $j \in S$

$$\pi^{(1)}(j) = \sum_{i \in S} \pi^{(0)}(i)\, p_{ij}$$

ou em termos matriciais: $\boldsymbol{\pi}^{(1)} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{P}$
Analogamente

$$\boldsymbol{\pi}^{(2)} = \boldsymbol{\pi}^{(1)}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{P}^2$$

e para qualquer $n \geq 1$,

$$(*) \qquad \boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}^{(n-2)}\mathbf{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\pi}^{(1)}\mathbf{P}^{n-1} = \boldsymbol{\pi}^{(0)}\mathbf{P}^n$$

Distribuição $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ de X_n - observações

- A longo prazo (n grande), **se** se a cadeia for "bem comportada", espera-se que ela se estabilize, ou entre em regime estacionário, ou esteja em equilíbrio, no sentido que

$$\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}$$

isto é, a distribuição da cadeia no instante n e no instante $n-1$ devam ser as mesmas.
Nesse caso, essa distribuição de equilíbrio, denotada por $\boldsymbol{\pi}$, deve satisfazer, pela primeira igualdade da expressão $(*)$,

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$

- Pelo último termo da expressão $(*)$, **se** existir $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n$, esse limite está conectado com a distribuição de equilíbrio $\boldsymbol{\pi}$ (próximo tópico, próximo arquivo).

Distribuição Estacionária

Distribuição Estacionária - definição

O vetor (linha) π é chamado de distribuição estacionária da cadeia de Markov se satisfaz

(a) as equações de balanço global

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \boldsymbol{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj} \,, \quad \forall j \in S$$

(b) as condições de uma "distribuição" de probabilidade

$$\pi_j \geq 0, \ \forall j \in S \quad \text{e} \quad \sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

Nomenclatura: distribuição estacionária, distribuição invariante, distribuição de equilíbrio, ou ainda medida invariante ("medida" não precisa somar 1).

Existência, unicidade, exemplos

A distribuição estacionária é a solução do sistema linear estabelecido na definição.

O sistema pode ser

- impossível (não tem solução)
- possível e indeterminado (tem infinitas soluções)
- possível e determinado (tem uma única solução)

Perguntas:

- Quando (sob quais condições sobre os estados ou cadeia) existe solução?
  $\longrightarrow$ EXISTÊNCIA de distribuição estacionária
- Se existe, quando ela é unica?
  $\longrightarrow$ UNICIDADE da distribuição estacionária

Exemplos

Considere as cadeias com matriz de probabilidades de transição abaixo. Para cada cadeia,

(a) classifique os estados e especifique os períodos;

(b) verifique se existe distribuição estacionária (se o sistema tem solução);

(c) verifique se existe uma única distribuição estacionária (a solução é única?).

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{P}_3 =$ matriz de transição do passeio aleatório simples simétrico em $\mathbb{Z}$

Resolução na lousa $\longrightarrow$ resolver e tentar conectar existência e unicidade da distribuição estacionária com a classificação

Existência de distribuição estacionária

Dos exemplos observa-se que

- A existência da distribuição estacionária está relacionada com a existência de estados (ou classes) recorrentes positivos(as).
- A **periodicidade** é irrelevante para a existência da distribuição estacionária.
- Para a existência da distribuição estacionária precisa-se ter estado(s) recorrente(s) positivo(s), mas a cadeia não precisa ser irredutível podendo ter estados transitórios e/ou recorrentes nulos.

Mas quando a distribuição estacionária é **única**?

Unicidade da distribuição estacionária

Teorema 1 - Unicidade da Distribuição Estacionária

Para uma cadeia de Markov com espaço de estados enumerável (finito ou não), existe uma única distribuição estacionária se e somente se o espaço de estados contém exatamente uma classe de estados recorrentes positivos.

Note que a cadeia não precisa ser irredutível, podendo ter também outras classes, mas elas têm que ser transitórias e/ou recorrentes nulas.

A cadeia também não precisa ser aperiódica.

Demonstração omitida

Lema de recorrência de Kac

Lema de Kac

Seja $\boldsymbol{X} = \{X_n, n \geq 0\}$ uma cadeia de Markov irredutível com espaço de estados S finito ou enumerável. Se $\boldsymbol{X}$ tem um única **medida** invariante $\boldsymbol{\pi}$ então

$$\mu_i = E(T_i \mid X_0 = i) = \frac{1}{\pi_i} \quad \forall i \in S$$

Observação:

- Esse lema vale para o caso de uma cadeia irredutível transitória. Lembre-se do passeio aleatório com $p \neq \frac{1}{2}$ (para $i \in \mathbb{Z}$, $\mu_i = +\infty$ e **medida** invariante $\pi_i = 0$).
- Em uma cadeia finita e irredutível recorrente positiva, temos que
    - $\boldsymbol{\pi}$ é uma distribuição estacionária, $\mu_i < \infty$ e portanto $\pi_i > 0$ para todo $i \in S$.
    - π_i é a proporção do tempo que a cadeia dispende no estado i.

Exemplo: chove/não-chove

Considere a cadeia de Markov em $S = \{a, b\}$ cuja matriz de probabilidades de transição é

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

(a) A cadeia tem distribuição estacionária? Por que? Determine a distribuição estacionária $\boldsymbol{\pi} = (\pi_a, \pi_b)$.

(b) Mostre que a distribuição (de probab.) do **primeiro** retorno ao estado a é dada por

$$f_{aa}^{(1)} = 1 - \alpha \quad \text{e} \quad f_{aa}^{(n)} = \alpha\beta(1-\beta)^{n-2}, \quad \text{para } n = 2, 3, \ldots$$

(c) Calcule o tempo médio de retorno ao estado a, $\mu_a = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{aa}^{(n)}$, e verifique que $\pi_a = \dfrac{1}{\mu_a}$.