MAE0312 - Lista de exercícios 5: Processo de Poisson

1. Suponha que um inseto (chame-o de inseto-mãe) ponha ovos segundo uma distribuição de Poisson de parâmetro λ, e que a probabilidade de que cada ovo dê origem a um novo inseto é p. Supondo que cada ovo produza um novo inseto independente dos outros ovos, ache a distribuição, e especifique o parâmetro da mesma, do número de novos insetos produzidos pelo inseto-mãe.

2. Se X e Y são v.a. independentes com $X \sim$ Poisson (λ_1) e $Y \sim$ Poisson (λ_2).

   (a) Mostre que $X + Y \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   (b) Calcule a distribuição condicional de X dado que $X + Y = n$, para $n \geq 0$. Identifique a distribuição. **Lembre-se** de especificar o suporte dessa distribuição condicional.

3. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a. independentes com função densidade de probabilidade,

$$f_{X_i}(u) = \lambda_i \, e^{-\lambda_i u}, \ u > 0, \ \text{para cada } i = 1, \ldots, n$$

   (a) Mostre que
$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

   (b) Seja $Y = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Mostre que $Y \sim \text{Exponencial}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

   (c) Mostre que
$$P(X_k = Y) = P\Big(X_k = \min(X_1, \ldots, X_n)\Big) = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}.$$

   (d) Suponha que $\lambda_i = \lambda, i = 1, \ldots, n$, $\lambda > 0$. Mostre que $X_1 + \cdots + X_n$ tem distribuição $\text{Gama}(n, \lambda)$.

   Sugestão: use função geradora de momentos.

4. Num intervalo de tempo $(0, t]$, o número de partículas radioativas $N(t)$ emitidas por um reator segue um Processo de Poisson com taxa λ. Cada partícula é classificada, independente das outras partículas, como sendo do tipo α ou do tipo β, com probabilidade p e $1 - p$, respectivamente. Denote por $X(t)$ o número de partículas do tipo α e por $Y(t)$ o número de partículas do tipo β, de modo que $N(t) = X(t) + Y(t)$. Para todo $t > 0$,

   (a) Encontre a distribução de $X(t)$.

   (b) Encontre a distribução de $Y(t)$.

   (c) Mostre que $X(t)$ e $Y(t)$ são independentes.

   (Sug.: estabeleça primeiro a distribução de $X(t) \mid N(t) = n$. Esse caso é similar ao problema dos ovos e do inseto).

5. ♣ Alice e Bernardo precisam de um transplante de rim. Se Alice não receber um novo rim, ela morrerá após um tempo exponencial de taxa μ_A; e se Bernardo não receber um novo rim, ele morrerá após um tempo exponencial com taxa μ_B. O número de rins doados segue um processo de Poisson com taxa λ. Se a equipe médica decidiu que o primeiro rim que chegar irá para Alice (ou para Bernardo, se ele estiver vivo e Alice tiver falecido na ocasião) e o próximo irá para Bernardo (se ele ainda estiver vivo).

   (a) Qual é a probabilidade de que Alice receba um rim novo ?

   (b) Qual é a probabilidade de que Bernardo receba um rim novo ?

6. Numa certa avenida, os carros passam num local de acordo com um processo de Poisson com taxa $\lambda = 3$ carros por minuto. Se você atravessa a avenida sem olhar, qual é a probabilidade de você chegar são e salvo do outro lado da avenida se você demora s segundos para atravessá-la ?

   (a) Calcule essa probabilidade para $s = 2,\ 5,\ 10$ e 20 segundos. Assuma que se você estiver na avenida quando um carro passar, então você se machucará com certeza.

   (b) Ssuponha agora que você é suficientemente ágil para desviar de 1 carro, mas se 2 ou mais carros passarem enquanto você atravessa a avenida, você se machucará. Calcule a probabilidade de cruzar a avenida são e salvo se você demora s segundos para atravessá-la. Forneça os valores da probabilidade para $s = 5,\ 10,\ 20$ e 30 segundos.

7. Considere um processo de Poisson com taxa λ. Dado que ocorreu exatamente 1 (um) evento do processo até o instante t, encontre a distribuição do tempo de ocorrência desse evento, isto é, encontre a distribuição condicional de T_1 dado que $N(t) = 1$. Interprete verbalmente o resultado.

8. Para um processo de Poisson, mostre que para $s < t$,

$$P\{N(s) = k \mid N(t) = n\} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k},\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

   Interprete verbalmente este resultado.

9. Certo supermercado tem duas entradas A e B. Os fregueses entram pela entrada A conforme um processo de Poisson com taxa média de 15 fregueses por minuto. Pela entrada B, os fregueses entram conforme outro processo de Poisson, independente do primeiro, a uma taxa média de 10 por minuto.

   (a) Seja X_t o número total de fregueses que entram no supermercado até o instante t (inclusive), para $t \geq 0$. Mostre que $\{X_t; t \geq 0\}$ também é um processo de Poisson. Qual o parâmetro deste processo ?

   (b) Seja T_1 o tempo em que o primeiro freguês entra pela entrada A, e V_1 o tempo em que o primeiro freguês entra pela entrada B. Ache a distribuição de $\min(T_1, V_1)$, o mínimo dos dois tempos.

   (c) Determine a probabilidade de que o primeiro freguês a entrar no mercado o faça pela entrada A.

10. O número de homens que entram num supermercado segue um processo de Poisson com taxa $\lambda = 2/\text{min}$ e o número de mulheres que entram no supermercado segue um processo de Poisson com taxa $\mu = 4/\text{min}$. Mostre que a probabilidade de pelo menos 2 homens chegarem antes de 1 mulher é $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2$, isto é, prove que

$$P(T_1^H + T_2^H < T_1^M) = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 ,$$

onde $\{T_i^H\}$ e $\{T_j^M\}$ são os tempos entre chegadas de homens e mulheres, respectivamente.

11. ♣ O número de carros que passam pelo pedágio da imigrantes num determinado dia segue um processo de Poisson com taxa de 1 veículo por minuto. Nesse dia você está descendo a serra e fura o pneu do carro em que você está justamente no pedágio. A troca de pneus demora 20 minutos.

    (a) Qual é a probabilidade de que menos do que 3 veículos passarem pelo pedágio durante a troca de penus ?

    (b) Qual é a probabilidade de que nenhum veículo passe pelo pedágio nos primeiros 5 minutos ?

    (c) Se 15% dos carros são caminhões, qual é a probabilidade de que pelo menos um caminhão passe no pedágio nesses 20 min. ?

    (d) Você estava trocando o pneu então não pode observar os veículos passando, mas seu/sua amigo(a) observou que passaram 3 caminhões durante a troca do pneu. Então, dado que 3 caminhões passaram pelo pedágio, qual é o número esperado de veículos que passaram pelo pedágio nesses 20 minutos ?

12. ♣ Pedro e Paulo entram juntos numa barbeira e são atendidos imediatamente por dois barbeiros. Pedro quer aparar a barba e Paulo quer cortar o cabelo. Considere que os tempos de corte de cabelo e aparo de barba sejam variáveis aleatórias independentes. Se o tempo de corte de cabelo tem distribuição exponencial com média de 20 minutos e o tempo de aparo de barba tem dist. exponencial com média de 15 minutos, qual é a probabilidade de que Pedro saia antes de Paulo ?

13. Um banco está com apenas 2 caixas operando. Três clientes A, B e C chegam simultaneamente. A e B vão diretamente aos caixas e C então espera até A ou B sair para ser atendido. Calcule a probabilidade de que A ainda esteja no banco após B e C terem saído nos casos em que os tempos de serviços de cada caixa são exponencias com média $1/\mu$ para ambos os caixas, e independentes.

14. Suponha que uma agência de correios tem 2 atendentes, A e B, com sistema de fila única. Quando você chega na agência, ambos os atendentes estão ocupados. Você será o próximo a ser atendido. Suponha que o tempo de atendimento de A tem distribuição exponencial com taxa μ e o de B tem distribuição exponencial com taxa λ, e são independentes. Seja T o tempo total que você fica na agência. Mostre que $E(T) = \frac{3}{\lambda+\mu}$.