Вестник Омского университета, 2003. №4. С. 19–21.

УДК 519

НЕЛИНЕЙНЫЕ СКАЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИСКЛЮЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА

С.С. Мелихов

Сибирский институт бизнеса и информационных технологий,
кафедра естественно-научных дисциплин
644053, Омск, ул. XIX Партсъезда, 19б

Получена 12 мая 2003 г.

The article tells about some kind of non-line scalar equations with vectorial parameter. The theorems about searching of decesions for particular cases of scalar equations ormulated and proved.

Пусть $f:\mathbb{C}^{m+1}\to\mathbb{C}$ – аналитическая в начале координат функция такая, что $f(0)=f_z^{'}(0)=0$.

Рассматривается задача об отыскании малых решений $z=z(u), z(u)\to 0$ при $\|u\|\to 0$, уравнения

$$f(z,u_1,...,u_m)=0. \tag{1}$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение

$$f(z,0,...,u_k,0,...,0)=0. \tag{2}$$

Известно (см., например, [1]), что каждое малое решение уравнения (2) представимо в виде абсолютно сходящегося ряда по положительным дробным степеням параметра u_k.

В работах [2], [3] в терминах уравнения (2) показано существование и вид малых решений уравнения (1) для случаев когда уравнение (2) имеет однократное малое решение или когда оно имеет малое решение кратности $n>1$. В первом случае уравнение (1) будет иметь малое решение, которое представимо в виде абсолютно сходящегося в некоторой окрестности нуля степенного ряда по переменным $u_1,...,u_m$ без свободного члена. Во втором случае уравнение (1) будет иметь ровно n таких малых решений.

В работе продолжено исследование нелинейных скалярных уравнений, допускающих исключение параметра, начатое в [4]. При этом основное внимание уделяется не условиям существования малых решений, которые могут быть получены, например, из теории аналитических отображений [5], а конструктивному построению таких решений. Решения уравнения (1) конструируются при помощи простых решений уравнения (2).

Теорема 1. Пусть $f:\mathbb{C}^{m+1}\to\mathbb{C}$ – аналитическая в начале координат функция

$$f(z,u_1,...,u_m)=(z-u_k)^n+g_n(z,u_1,...,u_m)=0. \tag{3}$$

Причем $f(0)=f_z^{'}(0)=0$, $n\in N$, $g_n(z,u)$ – однородная, непрерывная по $z,u_1,...,u_m$, степени n. Пусть также

$$f(z,0,u_k,0)=(z-u_k)^n. \tag{4}$$

Тогда уравнение (3) имеет n малых решений, которые (после замен: $z=u_k+u_ky$, $u_1=\alpha_1u_k$, $u_2=\alpha_2u_k,...$, $u_m=\alpha_mu_k$) представимы в виде абсолютно сходящихся в некоторой окрестности нуля степенных рядов по переменным $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$, без свободных членов. Причем уравнение (3) сводится к решению уравнения

$$F(y,\alpha_1,...,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},...,\alpha_m), \tag{5}$$

которое содержит $(m-1)$ параметр.

Наличие n малых решений доказано в [3]. Выполнив подстановки, получим

$$u_k^ny^n+g_n(u_k(1+y),\alpha_1u_k,...,\alpha_mu_k)=0.$$

В силу однородности g_n получим

$$u_k^ny^n+u_k^nG(y,\alpha_1,...,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1}...,\alpha_mu_k)=0,$$

$$y^n+G(y,\alpha_1,...,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},...,\alpha_mu_k)=0.$$

Последнее уравнение вида (5).

Пример 1.

$$(z-u_2)^3+(u_1^2+u_3^2)z+u_2u_3^2=0,$$

$$f(0)=f_z^{'}(0)=0, f(z,0,u^2,0)=(z-u_2)^3.$$

Выполнив подстановки: $z = u_2(1+y)$, $u_1 = \alpha_1 u_2$, $u_3 = \alpha_3 u_2$, получим $y^3+(\alpha_1^2+\alpha_3^2)y+\alpha_1^2 = 0$.

Уравнение содержит два параметра.

Теорема 2. Пусть $f : \mathbb{C}^{m+1} \to \mathbb{C}$ – аналитическая в начале координат функция такая, что $f(0) = f_z'(0) = 0$.

$$f(z, u_1, ..., u_m) =$$

$$= z^n + g_n(z, u_1, ..., u_{k-1}, u_{k+1}, ..., u_m) - u_k^p = 0, \quad (6)$$

где $g_n(z,u)$ – однородная, непрерывная по z, u_1, $..., u_{k-1}$, $u_{k+1}, ..., u_m$; $P \in N$.

Пусть $f(z, 0, u_k, 0) = 0$ имеет однократное малое решение $z = u_k^{\frac{p}{n}}$. Тогда уравнение (6) имеет малое решение, которое (после замен: $z = u_k^{\frac{p}{n}}(1+y)$, $u_1 = u_k^{\frac{p}{n}}\alpha_1, ..., u_m = u_k^{\frac{p}{n}}\alpha_m$) представимо в виде абсолютно сходящегося в некоторой окрестности нуля степенного ряда по переменным $\alpha_1, ..., \alpha_m$ без свободного члена. Причем уравнение (6) сводится к решению уравнения

$$F(y, \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_m) = 0 \quad (7)$$

с $(m-1)$ параметром, к которому применима теорема о неявной функции.

Доказательство существования малого решения уравнения (6) в [2].

Выполнив подстановки, получим

$$f(u_k^{\frac{p}{n}}(1+y), u_k^{\frac{p}{n}}\alpha_1, ..., u_k^{\frac{p}{n}}\alpha_m) =$$

$$= u_k^p(1+y)^n + g_n(u_k^{\frac{p}{n}})(1+y), ..., u_k^{\frac{p}{n}}\alpha_m) - u_k^p = 0,$$

$$(1+y)^n + G((1+y), \alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_m) - 1 = 0.$$

Последнее уравнение – это уравнение вида (7), и очевидно, что к нему применима теорема о неявной функции.

Пример 2.

$$z^3 + u_3 z^2 - u_2 u_3 z - u_1^5 = 0$$

Подстановки: $z = u_1^{\frac{5}{3}}(1+y)$, $u_2 = u_1^{\frac{5}{3}}\alpha_2$, $u_3 = u_1^{\frac{5}{3}}\alpha_3$. Получим

$$(1+y)^3 + \alpha_3(1+y)^2 - \alpha_2\alpha_3(1+y) - 1 = 0.$$

В последнем уравнении два параметра, и к нему применима теорема о неявной функции.

Теорема 3. Пусть

$$f(z, u_1, ..., u_m) = (z-u_1)^n + u_2 z^{n-1} +$$

$$+ u_3 z^{n-2} + ... + u_{m-1} z + u_m = 0. \quad (8)$$

Причем $f(0) = f_z'(0) = 0$, $n \in N$.

Уравнение (8) имеет n малых решений, которые (после замен: $z = u_1 + u_1 y$, $u_2 = u_1\alpha_2$, $u_3 = u_1^2\alpha_3, ...,$ $u_{m-1} = u_1^{n-1}\alpha_{m-1}$, $u_m = u_1^n\alpha_m$) представимы в виде абсолютно сходящихся рядов по переменным $\alpha_1, ..., \alpha_m$ без свободных членов.

Причем уравнение (8) сводится к решению уравнения

$$F(y, \alpha_2, ..., \alpha_m) = 0, \quad (9)$$

с $(m-1)$ параметром.

Наличие n малых параметров решений доказано в [3].

Выполнив подстановки, получим

$$f(u_1 + u_1 y, u_1^{p_2}\alpha_2, ..., u_1^{p_m}\alpha_m) =$$

$$= (u_1^n + y^n + u_1^{p_2}\alpha_2 \cdot u_1^{n-1}(1+y)^{n-1} +$$

$$+ u_1^{p_3}\alpha_3 \cdot u_1^{n-2}(1+y)^{n-2} + ... +$$

$$+ u_1^{p_{m-1}}\alpha_{m-1} \cdot u_1(1+y) + u_1^{p_m}\alpha_m = 0.$$

После деления на u_1^n получим

$$y^n + u_1^{p_2-1} \cdot \alpha_2(1+y)^{n-1} +$$

$$+ u_1^{p_3-2} \cdot \alpha_3(1+y)^{n-2} + ... +$$

$$+ u_1^{p_{m-1}+1-n} \cdot \alpha_{m-1}(1+y) + u_1^{p_m-n} \cdot \alpha_m = 0.$$

Для исключения параметра u_1 необходимо решить систему

$$\begin{cases} P_2 - 1 = 0, \Rightarrow P_2 = 1, \\ P_3 - 2 = 0, \Rightarrow P_3 = 2, \\ .... \\ P_{m-1} + 1 - n = 0, \Rightarrow P_{m-1} = n-1, \\ P_m - n = 0 \Rightarrow P_m = n. \end{cases}$$

Тем самым мы нашли нужные степени в подставках для исключения одного параметра.

Теперь получим следующее уравнение:

$$y^n + \alpha_2(1+y)^{n-1} + ... + \alpha_{m-1}(1+y) + \alpha_m = 0,$$

в котором уже $(m-1)$ параметр, т. е. это уравнение вида (9).

Теорема 4. Пусть

$$f(z, u_0, u_1, ..., u_{n-1}) =$$

$$= z^n + u_{n-1}z^{n-1} + ...u_1 z - u_0^p = 0. \quad (10)$$

Причем $f(0) = f_z'(0) = 0$; $p, n \in N$.

Уравнение (10) имеет малое решение, которое (после замен: $z = u_0^{\frac{p}{n}}(1+y)$, $u_{n-1} = u_0^{\frac{p}{n}}\alpha_{n-1}$, $u_{n-2} = u_0^{\frac{2p}{n}}\alpha_{n-1}$, ..., $u_1 = u_0^{\frac{p(n-1)}{n}} \cdot \alpha_1$) представимо в виде абсолютно сходящегося в некоторой окрестности нуля степенного ряда по переменным $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ без свободного члена.

Причем уравнение (10) сводится к решению уравнения

$$F(y, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) = 0, \quad (11)$$

с $(n-1)$ параметром, к которому применима теорема о неявной функции.

Доказательство существования малого решения уравнения (10) в [2].

Выполним подстановки: $z = u_0^{\frac{p}{n}}(1+y)$, $u_{n-1} = u_0^{k_1}\alpha_{n-1}$, $u_{n-2} = u_0^{k_2}\alpha_{n-2}$, ..., $u_1 = u_0^{k_n}\alpha_1$.

Получим

$$u_0^p(1+y)^n + u_0^{k_1}\alpha_{n-1}\cdot u_0^{\frac{p(n-1)}{n}}\cdot(1+y)^{n-1}+$$

$$+u_0^{k_2}\cdot\alpha_{n-2}\cdot u_0^{\frac{p(n-2)}{n}}\cdot(1+y)^{n-2}+...+$$

$$+u_0^{k_n}\cdot\alpha_1\cdot u_0^{\frac{p}{n}}\cdot(1+y) - u_0^p = 0.$$

После деления на u_0^p получаем

$$(1+y)^n + u_0^{k_1+\frac{p(n-1)}{n}-p}\cdot\alpha_{n-1}(1+y)^{n-1}+$$

$$+u_0^{k_2+\frac{p(n-2)}{n}-p}\cdot\alpha_{n-2}(1+y)^{n-2}+...+$$

$$+u_0^{k_n+\frac{p}{n}-p}\cdot(1+y)-1=0.$$

Для исключения параметра u_0 необходимо решить следующую систему:

$$\begin{cases} k_1 + \frac{p(n-1)}{n} - p = 0, \Rightarrow k_1 = \frac{p}{n}, \\ k_2 + \frac{p(n-2)}{n} - p = 0, \Rightarrow k_2 = \frac{2p}{n}, \\ \text{.........} \\ k_n + \frac{p}{n} - p = 0, \Rightarrow k_n = \frac{(n-1)p}{n}. \end{cases}$$

Тем самым мы доказали целесообразность постановок для исключения параметра. После исключения параметра получим

$$(1+y)^n + \alpha_{n-1}(1+y)^{n-1} + ... + \alpha_1(1+y) - 1 = 0.$$

Это уравнение вида (11) с $(n-1)$ параметром и к нему, очевидно, применима теорема о неявной функции.

В качестве примера, демонстрирующего последнюю теорему, рассмотрим физическую задачу.

В [1, с. 508] при решении задачи о колебании спутника в плоскости его эллиптической орбиты около направления радиус-вектора было получено следующее уравнение разветвления поставленной задачи:

$$\xi^3 - 2\pi^2\mu\xi + 4\pi^3 e = 0. \tag{12}$$

Надо найти $\xi = \xi(\mu, e)$.

Введем следующие обозначения: $z = \xi$, $u_2 = 2\pi^2\mu$, $u_0^3 = -4\pi^3 e$, получим

$$z^3 - u_2 z - u_0^3 = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) – это уравнение вида (10) . Выполним замены (см. теорему 4): $z = u_0(1+y)$, $u_2 = u_0^2\alpha_2$, подставим в (13).

$$u_0^3(y+1)^3 - u_0^3\alpha_2(y+1) - u_0^3 = 0| : u_0^3,$$

$$(1+y)^3 - \alpha_2(1+y) - 1 = 0,$$

$$y^3 + 3y^2 + (3-\alpha_2)y - \alpha_2 = 0.$$

Это уравнение вида (11), и к нему применима теорема о неявной функции.

Решение ищем в виде: $y = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + \ldots$.

Подставив y в последнее уравнение, методом неопределенных коэффициентов найдем a_1 и a_2.

$$(a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + ...)^3 + 3(a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2 + ...)^2 +$$

$$+(3-\alpha_2)(a_1\alpha_2 + a_2\alpha_2^2) - \alpha_2 = 0$$

$$\begin{cases} 3a_1 - 1 = 0, \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, \\ 3a_1^2 - a_1 + 3a_2 = 0, \Rightarrow a_2 = 0. \end{cases}$$

То есть $y = \frac{1}{3}\alpha_2 + ...$

Учитывая наши замены (13), получим

$$z = u_0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{u_2}{u_0} + ...$$

Учитывая, что $u_0 = \sqrt[3]{4\pi e}$, $u_2 = 2\pi^2\mu$, окончательно получим решение задачи в обозначениях [1]:

$$\xi = -\pi\sqrt[3]{4e} - \frac{2}{3}\cdot\frac{\pi\mu}{\sqrt[3]{4e}} + ...$$

<u>Замечание</u>. Решение можно получить с требуемой точностью, если брать для y бо́льшее число членов ряда.

---

[1] *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

[2] *Громов В.А.* О некоторых решениях скалярного уравнения с векторным параметром // Сиб. мат. журнал. 1991. № 5. С. 179-181.

[3] *Громов В.А., Мелихов С.С.* О некоторых решениях нелинейного скалярного уравнения с векторным параметром // Вестн. Ом. ун-та. 2001. № 1. С. 13-14.

[4] *Мелихов С.С.* О некоторых видах нелинейных уравнений с векторным параметром, допускающих исключение одного или нескольких параметров // Вест. Ом. ун-та. 2002. № 1. С. 24-25.

[5] *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных. М: Мир, 1965.