ステイホーム数学

ステイホーム数学

ステイホーム数学　第１回　ピタゴラス数の見つけ方

春の海ひねもすのたりのたりかな

Stay home 週間　おじさん達はやることがよく分からなくて毎日昼寝ばかり。

昼寝ついでに次のことを思いついたので報告します。

題して、ステイホームの定理

等差数列の隣り合う３つの項 a, b, c には

$$a + c = 2b$$

という関係があります。
これを利用して、ピタゴラス数を見つけることができます。

例えば、$7^2 = 49$ を中項にして

$$48, 49, 50$$

から　$7^2 + 24^2 = 25^2$

$$45, 49, 53$$

から　$28^2 + 45^2 = 53^2$

ステイホーム数学　第２回　ピタゴラス数の見つけ方

前回は＜夢のお告げ＞をヒントに、等差数列を利用してピタゴラス数を導き出しました。

等差中項に $7^2 = 49$ を置くと、
公差１の時、$48, 49, 50$ から　$(7, 24, 25)$
公差４の時、$45, 49, 53$ から　$(28, 45, 53)$
などのピタゴラス数が出てきました。
今回は、等差中項に $5^2 = 25$、公差を４でやってみました。
$21, 25, 29$ から　$(20, 21, 29)$
となります。
さて、どうしてこんなことができるのでしょう。
次回は種明かしをします。

ステイホーム数学　第３回　ピタゴラス数の見つけ方

そもそもピタゴラス数というのは、３つの自然数の組 (a, b, c) で
$$a^2 + b^2 = c^2$$
という関係が成り立つもので、直角三角形の３辺になるものでした。
よく知られているものとしては、$(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ などがあります。

夢の内容はこうでした。
$a^2 + b^2 = c^2$ は、$b^2 = c^2 - a^2$ と変形でき 、この形を目標にします。
等差中項に b^2、公差を d とすると、$c - a = 2d$ となり、
$$b^2 = \frac{a+c}{2} = \frac{(c+a)(c-a)}{2(c-a)} = \frac{(c^2 - a^2)}{4d}$$
と変形できます。
$4d$ が平方数であれば、すなわち $d = k^2$ であれば、$4d = (2k)^2$ となり、
$$(2kb)^2 = c^2 - a^2$$
となり、めでたくピタゴラス数が得られるということでした。

$b = 7, d = 1$ とすると、等差数列は、$48,\ 49,\ 50$ で
$$4 \cdot 7^2 = 50^2 - 48^2、$$
両辺を４で割って、$7^2 = 25^2 - 24^2$
$b = 7, d = 4$ とすると、等差数列は、$45,\ 49,\ 53$ で
$$16 \cdot 7^2 = 53^2 - 45^2、すなわち、28^2 = 53^2 - 45^2$$
$b = 5, d = 4$ とすると、等差数列は $21, 25, 29$ で
$$16 \cdot 5^2 = 29^2 - 21^2、すなわち、20^2 = 29^2 - 21^2$$
となります。

【演習問題】
(1) ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ を３辺のの長さとする、直角三角形の内接円の半径は自然数であることを示せ。

ステイホーム数学　第４回　ピタゴラス数の見つけ方

前回までは「夢のお告げ」に沿って、ピタゴラス数の見つけ方をお話ししました。
今回は、ピタゴラス数を見つける別のやり方を紹介します。
下のような奇数を小さい順に並べた数列 $\{a_n\}$ を考えます。

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27, 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 39,\ 41,\ \cdots\cdots ①$$

n 番目の項は，$a_n = 2n - 1$ と表されます。

等差数列なので、第 n 項までの和は、$\dfrac{(\text{項数}) \times \{(\text{最初}) + (\text{最後})\}}{2}$ で表され、

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \frac{n\{1 + (2n - 1)\}}{2} = n^2$$

となります。すなわち、
「n 番目までの奇数の和は n^2」$\cdots\cdots$②
と言えます。

このことを利用して，ピタゴラス数を見つけてみましょう。
(その１)
今，この数列の中で (1 以外で) 平方数になっているものに注目します。

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \boxed{9},\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ \boxed{25},\ 27, 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 39,\ 41,\ 43,\ 45,\ 47,\ \boxed{49},\ \cdots$$

第５項の９を例にして考えてみます。
第５項は，$\boxed{9} = 3^2$ で，そこまでの和は 5^2 です。また，第５項の直前まで和、すなわち第４項までの奇数の和は 4^2 なので，

$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \boxed{9} = (1 + 3 + 5 + 7) + \boxed{9} = 4^2 + 3^2$$

つまり、$3^2 + 4^2 = 5^2$
ピタゴラス数 (3, 4, 5) が見つけられました。

同様にして，第 13 項の $25 = 5^2$ についても，

$$13^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + 23 + 25 = (1 + 3 + 5 + \cdots + 23) + 25 = 12^2 + 5^2$$

ピタゴラス数 (5, 12, 13) を見つけることができます。

ステイホーム数学　第 5 回　ピタゴラス数の見つけ方
前回の復習です。
奇数列
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, $\cdots$
の項が平方数となるところ、例えば 49 に注目します。これは第 25 番目の奇数、つまり、第 25 項ということです。
この数列の第 n 項までの和は n^2 なので、第 25 項の 49 までの和は

$$1+3+5+7+\cdots+43+45+47+49=25^2$$

となります。
ひとつ手前の第 24 項の 47 までの和は、

$$\underline{1+3+5+7+\cdots+43+45+47}=\underline{24^2}$$

これに第 25 項 $49=7^2$ を加えると、

$$\underline{1+3+5+7+\cdots+43+45+47}+49=\underline{24^2}+7^2$$

したがって、$7^2+24^2=25^2$ が得られます。

ステイホーム数学　第 6 回　ピタゴラス数の見つけ方
ここでもう一度ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ （ただし、$a,\ b,\ c$ は自然数で、$a<b<c$) について振り返ってみます。

素朴な疑問 (1)

ピタゴラス数，すなわち $a^2+b^2=c^2$ を満たす正の整数の 3 つの組 $(a,\ b,\ c)$ は無数に存在するのだろうか.

ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ に対して，正の整数 d を掛けた $(ad,\ bd,\ cd)$ も明らかにピタゴラス数になります。

$$(ad)^2+(bd)^2=(a^2+b^2)d^2=c^2d^2=(cd)^2$$

$(\mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5}),\ (6,\ 8,\ 10),\ (9,\ 12,\ 15),\ (12,\ 16,\ 20),\cdots$
はすべてピタゴラス数だが、後ろに続くものは $(3,\ 4,\ 5)$ の各要素に自然数をかけてできたものであって、最初の公約数が 1 以外ないもの (既約ピタゴラス数と呼ぶことにする) で代表させ、これらがどのくらいあるかを考えることにします。
$(\mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5}),\ (\mathbf{5},\ \mathbf{12},\ \mathbf{13})$ は既約ピタゴラス数
$(9,\ 12,\ 15),\ (10,\ 24,\ 26)$ は既約ピタゴラス数ではない.
先程の【素朴な疑問】を次のように言い換えます。

素朴な疑問 (2)

既約ピタゴラス数は無数に存在するのだろうか.

【演習問題】
(1) ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ の 3 つの数のうち 1 組の 2 数が互いに素ならば、他の 2 組の 2 数も互いに素であることを証明せよ。
(2) 既約ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ の 3 つの数は奇数が 2 つ、偶数が 1 つであることを示せ。

ステイホーム数学　第７回　ピタゴラス数の見つけ方

このことを一般化してみます。

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, ……①

奇数列①の第 n 項が平方数 N^2 となるところを見つけます。第 n 項までの和が n^2 なので、

$$\underbrace{1+3+5+7+9+\cdots+(N^2-2)}_{(n-1)^2}+\boxed{N^2}=n^2$$
$$(n-1)^2+N^2=n^2$$

$(N,\ n-1,\ n)$ はピタゴラス数です。数列①の第 n 項は $2n-1$ なので、

$$2n-1=(2k-1)^2$$

となります。これを解くと、$n=2k^2-2k+1$

したがって、ピタゴラス数 $(2k-1,\ 2k^2-2k,\ 2k^2-2k+1)$ が得られます。

$2k^2-2k$ と $2k^2-2k+1$ は隣り合う２数なので互いに素。前回の演習問題 (1) より、

$$(2k-1,\ 2k^2-2k,\ 2k^2-2k+1) \qquad \cdots\cdots \quad ②$$

は既約なピタゴラス数。

②において、$k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ とすれば、下のような既約ピタゴラス数が無数に得られます。

$$(3,\ 4,\ 5),\ (5,\ 12,\ 13),\ (7,\ 24,\ 25),\ (9,\ 40,\ 41),\ (11,\ 60,\ 61),\ \cdots\cdots$$

素朴な疑問 (2) の答

既約ピタゴラス数は無数に存在する.

簡単に次のようにまとめることもできます。

３以上の奇数に対して、$\left(\text{奇数},\ \dfrac{\text{奇数}^2-1}{2},\ \dfrac{\text{奇数}^2+1}{2}\right)$ が既約ピタゴラス数になっています。

ピタゴラス数が無数にあることはわかったのですが、全ての既約なピタゴラス数が②の形で表されるとはいえません。実際、$(8,\ 15,\ 17),\ (20,\ 21,\ 29)$ は既約なピタゴラス数ですが、②の形をしてません。

【演習問題】

(3)$a,\ b$ が自然数のとき、次のことを証明せよ。

a と b は互いに素 $\Longleftrightarrow$ a^2 と b^2 は互いに素

ステイホーム数学　第８回　ピタゴラス数の見つけ方

【演習問題】(2) の解答例
既約ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ の３つの数は奇数が２つ、偶数が１つであることを示せ。

【復習】
ピタゴラス数、既約ピタゴラス数の定義

◯ ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ とは：
３つの自然数の組 (a, b, c) で
$$a^2 + b^2 = c^2$$
という関係が成り立つもの
【例】 $(3,\ 4,\ 5),\ (6,\ 8,\ 10),\ (5,\ 12,\ 13),\ (15,\ 36,\ 39)$

◯ 既約ピタゴラス数とは：
ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ で $a,\ b,\ c$ の３つの数の公約数が１以外ないもの
【例】 $(3,\ 4,\ 5),\ (5,\ 12,\ 13),\ (8,\ 15,\ 17)$

【証明】
既約ピタゴラス数 ($a,\ b,\ c$ の公約数は１以外にない) なので、３つとも偶数ではあり得ません。
・奇数の２乗は奇数、偶数の２乗は偶数
・２乗して奇数なら元の数も奇数、２乗して偶数なら元の数も偶数
・a と b は互いに素 $\Longleftrightarrow$ a^2 と b^2 は互いに素
であることに留意します。

(i) ３つのうち２つが偶数、１つが奇数の場合。
$a^2 + b^2 = c^2$ より $a,\ b,\ c$ のうちの２つが偶数であると、残りも偶数になってしまいます。
これはあり得ません。

(ii) ３つともに奇数の場合。
$a^2 + b^2 = c^2$ より $a,\ b,\ c$ のうちの２つが奇数であると、残りは偶数になってしまいます。
これはあり得ません。

以上より、「３つの数は奇数が２つ、偶数が１つである」となります。

証明終わり

ステイホーム数学　第９回　ピタゴラス数の見つけ方

(その２) 奇数列を用いた別の方法

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27, 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 39,\ 41,\ \cdots\cdots$ ①

前回までは奇数列①の中に、平方数を一つ見つけ、それ以前の和と平方数との和が、そこまでの和に一致することを利用しました。

$$1+3+5+7+9+\cdots+a_{n-1}+a_n \quad = n^2$$

今度は隣り合う２項の和 $a_{n-1}+a_n$ が平方数 N^2になっているところを見つけます。

$$1+3+5+7+9+\cdots+a_{n-2}+\underbrace{a_{n-1}+a_n}_{N^2} \quad = n^2$$

このとき、

$$(n-2)^2 \qquad + \qquad N^2 \qquad = n^2$$

となって、ピタゴラス数 $(N,\ n-2,\ n)$ が得られることになります。

実際に、①の数列の隣り合う２項の和が平方数になっているところを探してみます。

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ 25,\ 27, 29,\ 31,\ 33,\ 35,\ 37,\ 39,\ 41,\ \cdots\cdots$

例えば、第 16 項、第 17 項の和は $31+33=64=8^2$ となっています。

$1+3+5+\cdots\cdots+29+31+33=17^2$

$\therefore \quad 15^2+8^2=17^2$

$(8,\ 15,\ 17)$ というピタゴラス数が見つかります。

【演習問題】(4)

第４項＋第５項 $=16=4^2$ を利用して、ピタゴラス数を求めよ。

【演習問題】(5)

第 63 項＋第 65 項 $=127+129=256=16^2$ を利用して、$16^2+63^2=65^2$ であることを確かめよ。

ステイホーム数学　第 10 回　ピタゴラス数の見つけ方

さらに、隣り合う 3 項の和$\underline{a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}$が平方数 N^2 になっているところを見つけます。

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, ⋯⋯

$25+27+29=81=9^2$ なので、

$1+3+5+\cdots\cdots+21+23+\boxed{25+27+29}=15^2$

$\therefore \quad 12^2+9^2=15^2$

ピタゴラス数 $(9,12,15)$ が得られますが、これは既約ピタゴラス数ではありません。

隣り合う 4 項の和$\underline{a_{n-3}+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}$が平方数 N^2 になっているところを見つけます。

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, ⋯⋯

$13+15+17+19=64=8^2$ なので、

$1+3+5+7+9+11+\boxed{13+15+17+19}=10^2$

$\therefore \quad 6^2+8^2=10^2$

ピタゴラス数 $(6,8,10)$ が得られますが、これは既約ピタゴラス数ではありません。

【演習問題】(6)
隣り合う 3 項の和$\underline{a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}$が平方数 N^2 になるときに求まるピタゴラス数は既約ではないことを示せ。

ステイホーム数学　第 11 回　ピタゴラス数の見つけ方

ピタゴラス数あるいは既約ピタゴラス数が無数にあることはわかった (第 7 回) のですが、今までやってきたやり方ですべての既約ピタゴラス数を見つけることができるかどうかはわかりませんでした。
そこで、今回は全ての既約ピタゴラス数を求める、あるやり方を紹介します。

既約ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$(ただし、$a,\ b,\ c$ は自然数で $a<b<c$) を考えます。

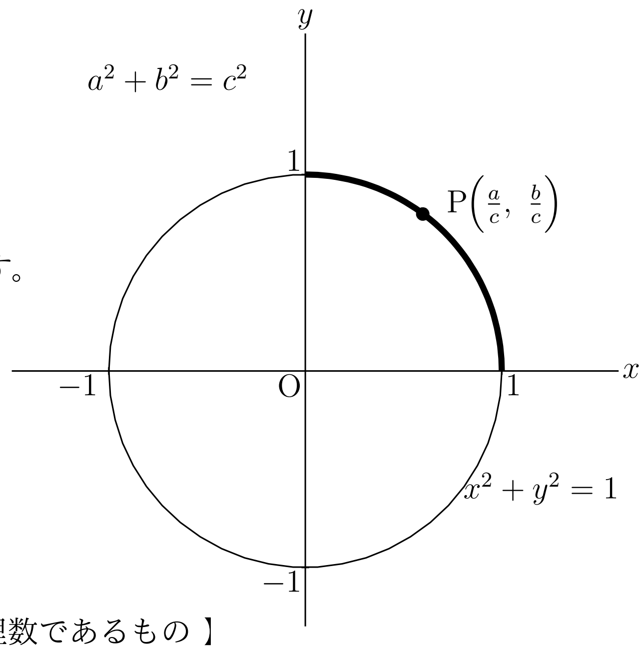
$a^2+b^2=c^2$ $\qquad\cdots\cdots③$

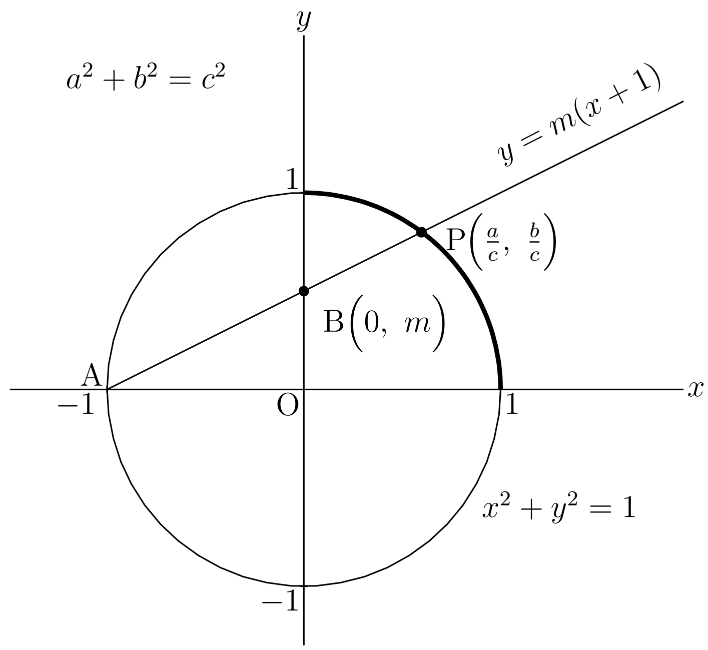
が成り立ちます。この両辺を c^2 で割ると、

$$\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=1$$

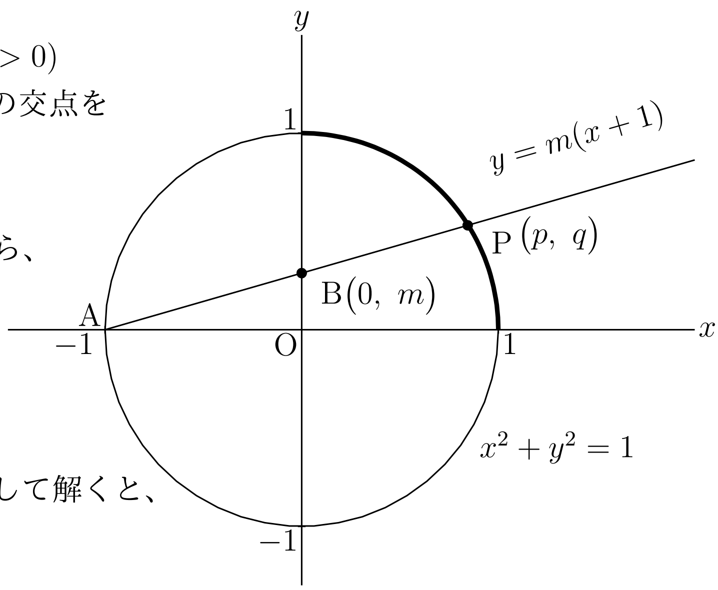
すなわち、$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$ $\qquad\cdots\cdots④$

が得られます。
$a,\ b,\ c$ が自然数なので、$\dfrac{a}{c}$ と $\dfrac{b}{c}$ は正の有理数です。
④の等式は、平面上の点 $\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$ が
円 $x^2+y^2=1$ の第 1 象限の四半分上 に
あることを示しています。
つまり、全ての既約ピタゴラス数を扱うには、
円 $x^2+y^2=1$ の第 1 象限の有理点を当って行けば
良いことになります。
【有理点：平面上の点で x 座標、y 座標が共に有理数であるもの 】





ステイホーム数学　第 12 回　ピタゴラス数の見つけ方



　円 $x^2+y^2=1$　　$\cdots\cdots$①

の第 1 象限に点 P$(p,\ q)$ をとります。$(p>0,\ q>0)$

点 A$(-1,\ 0)$ と点 P を結び、この直線と y 軸との交点を B$(0,\ m)$ とします。

明らかに、$0<m<1$ です。

△AOB は直角三角形で、OA$=1$, OB$=m$ だから、m は直線 AP の傾きを表します。

したがって、直線 AP の方程式は、

$$y=m(x+1) \qquad \cdots\cdots ②$$

となります。

点 P$(p,\ q)$ は円①と直線②の交点なので、連立して解くと、

$$p=\frac{1-m^2}{1+m^2},\ q=\frac{2m}{1+m^2} \qquad \cdots\cdots ③$$

となります。

演習問題 (12-1)

$(x,\ y)$ についての連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y=m(x+1) \end{cases}$$

を解け。

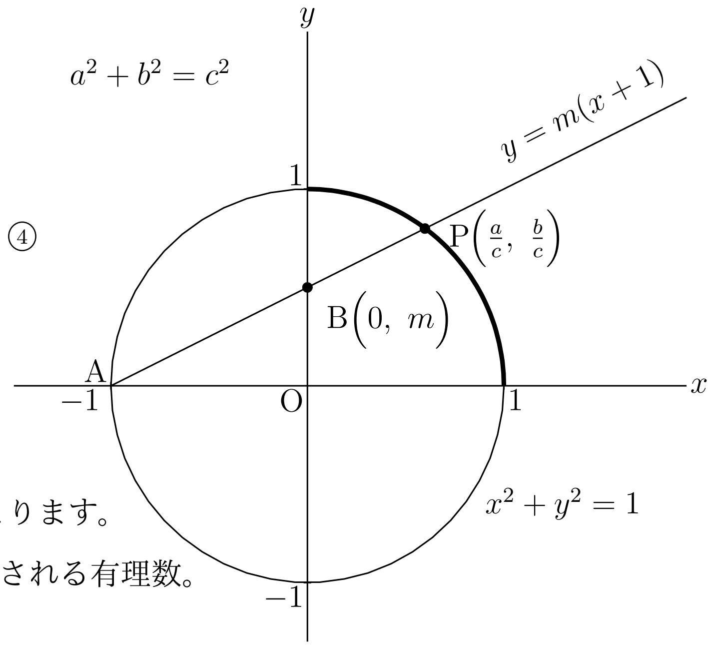
演習問題 (12-2)

点 P$(p,\ q)$ $(p>0,\ q>0)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の点なので、$p=\cos\theta,\ q=\sin\theta\ (0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ とおける。このとき、$m=\tan\dfrac{\theta}{2}$ であり、$\cos\theta=\cos^2\dfrac{\theta}{2}-\sin^2\dfrac{\theta}{2},\ \sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$ であることを示せ。

ステイホーム数学　第 13 回　ピタゴラス数の見つけ方

3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$(ここでは便宜上、a と b の大小は付けないことにします) がピタゴラス数であるとき、$a^2+b^2=c^2$ より、$\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=1$ であり、$\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}$ は共に正の有理数だから、点 $\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$ は、円 $x^2+y^2=1$ の第 1 象限の四半分円上 の有理点です。
したがって、ピタゴラス数を見つけるには、円 $x^2+y^2=1$ の第 1 象限の四半分円上 にある有理点を調べれば良いということになりました。
そのために平面上で点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ と円 $x^2+y^2=1$ の第 1 象限の四半分円上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を結び、y 軸上との交点を $\mathrm{B}(0,\ m)$ とすると、

$$p=\frac{1-m^2}{1+m^2},\ q=\frac{2m}{1+m^2}\qquad\cdots\cdots③$$



となるというのが前回の話でした。
点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は直線 $y=m(x+1)$ 上の点なので、

$$q=m(p+1)\qquad\therefore\ m=\frac{q}{1+p}\qquad\cdots\cdots④$$

③、④より、
有理数の加減乗除の計算結果は有理数なので

$$p,\ q\text{ が共に有理数}\quad\Longleftrightarrow\quad m\text{ が有理数}$$

y 軸上 $0<y<1$ の範囲に有理点 $\mathrm{B}(0,\ m)$ をとります。
すなわち、$m=\dfrac{l}{k}$ (k、l は自然数で $k>l$) と表される有理数。
③に $m=\dfrac{l}{k}$ を代入すると、

$$p=\frac{1-\left(\frac{l}{k}\right)^2}{1+\left(\frac{l}{k}\right)^2}=\frac{k^2-l^2}{k^2+l^2},\quad q=\frac{2\left(\frac{l}{k}\right)}{1+\left(\frac{l}{k}\right)^2}=\frac{2kl}{k^2+l^2}$$

$p,\ q$ は、$p=\dfrac{a}{c},\ q=\dfrac{b}{c}$ と表せる有理数だったから、
$a=k^2-l^2,\ b=2kl,\ c=k^2+l^2$ とすれば、$a^2+b^2=c^2$ を満たし、
$(k^2-l^2,\ 2kl,\ k^2+l^2)$ はピタゴラス数になります。(ただし、$k,\ l$ は $k>l$ である自然数)

【例】
$(k,\ l)=(2,1)$ のとき、$(k^2-l^2,\ 2kl,\ k^2+l^2)=(3,\ 4,\ 5)$
$(k,\ l)=(3,2)$ のとき、$(k^2-l^2,\ 2kl,\ k^2+l^2)=(5,\ 12,\ 13)$
$(k,\ l)=(8,1)$ のとき、$(k^2-l^2,\ 2kl,\ k^2+l^2)=(63,\ 16,\ 65)$

【演習問題】[13-1]
$(k^2-l^2)^2+(2kl)^2=(k^2+l^2)^2$ を確かめよ。
【演習問題】[13-2]
演習問題 (5) から $16^2+63^2=65^2$ であることがわかったが、
今回やったことから $33^2+56^2=65^2$ であることも確かめよ。

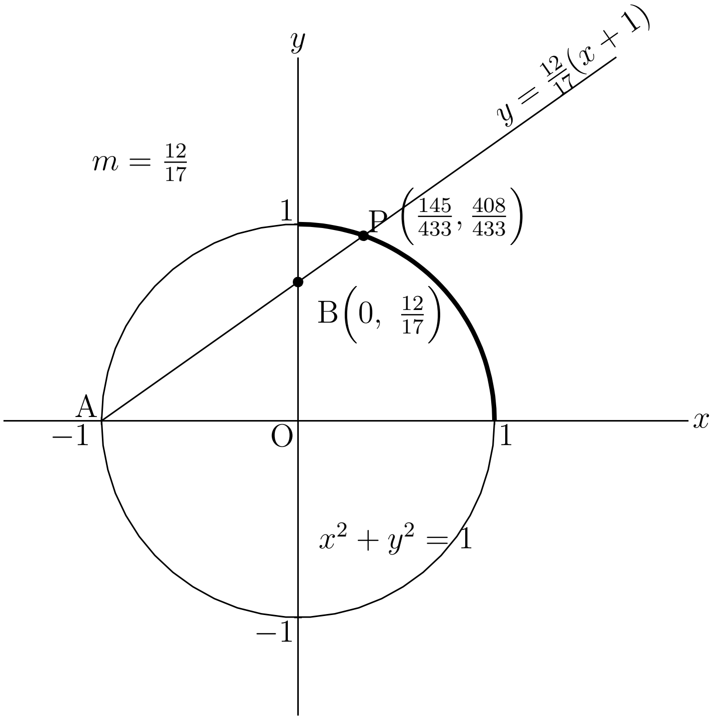
ステイホーム数学　第14回　ピタゴラス数の見つけ方

第11回から第13回までやってきたことをまとめてみます。
既約ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ をすべて見つけることを考えます。

$a^2+b^2=c^2$ を $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$ と変形することにより、$\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の第1象限の有理点と考えられます。
一方、点 $\mathrm{A}(-1,0)$ と y 軸上の点 $\mathrm{B}(0,\ m),\ (m$ は有理数で $0<m<1)$ を結ぶと、点Bと円 $x^2+y^2=1$ 上の第1象限の有理点との一対一の対応が作れ、いま、$m=\dfrac{l}{k}$ $(k,\ l$ は自然数で $l<k)$ とすれば、$a=k^2-l^2,\ b=2kl,\ c=k^2+l^2$ となることがわかりました。

まとめ

$k,\ l$ が自然数で $k>l$ とするとき、
$(k^2-l^2,\ 2kl,\ k^2+l^2)$ はピタゴラス数である。
既約ピタゴラス数は上の様に表せる.



ステイホーム数学　第 15 回　曲線上の有理点

第 11 回から第 13 回までやってきたことから、ピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ は無数にあるので、　$a^2+b^2=c^2$ を $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$ と変形することにより、円 $x^2+y^2=1$ 上には無数の有理点があることがわかります.

このこと、つまり曲線上に有理点が無数にあるということは、当たり前のことなのでしょうか？

$\left(\dfrac{a}{c},\ \dfrac{b}{c}\right)$ は円 $x^2+y^2=1$ 上の有理点と考えられます。

曲線 $x^2+y^2=1$ 上に有理点は無数にある。

$x^2+y^2=2$ 上に有理点はあるか。

$x^2+y^2=3$ 上に有理点はあるか。

$x^4+y^4=1$ 上に有理点はあるか。

【有理点：平面上の点で x 座標、y 座標が共に有理数であるもの 】

ステイホーム数学　第 回　フィボナッチ数列

フィボナッチ数列

$F_0 = 0,\ F_1 = 1$
$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

フィボナッチ数列の中に 0, 1 以外の平方数は現れるか。144
任意の自然数 d は、あるフィボナッチ数 F_n の約数

ある自然数 n が存在して、$d|F_n$

円 $x^2 + y^2 = 1$
点 $(-1,\ 0)$ と点 $(0,\ \dfrac{n}{m})$ を結んだ直線との交点

三方陣

三方陣について

三方陣とフィボナッチ数列

倍数の見分け方

7の倍数

9の倍数

　夢のお告げ
すべての自然数は 11111000 という形の数の約数である。

バーゼル問題

オイラー

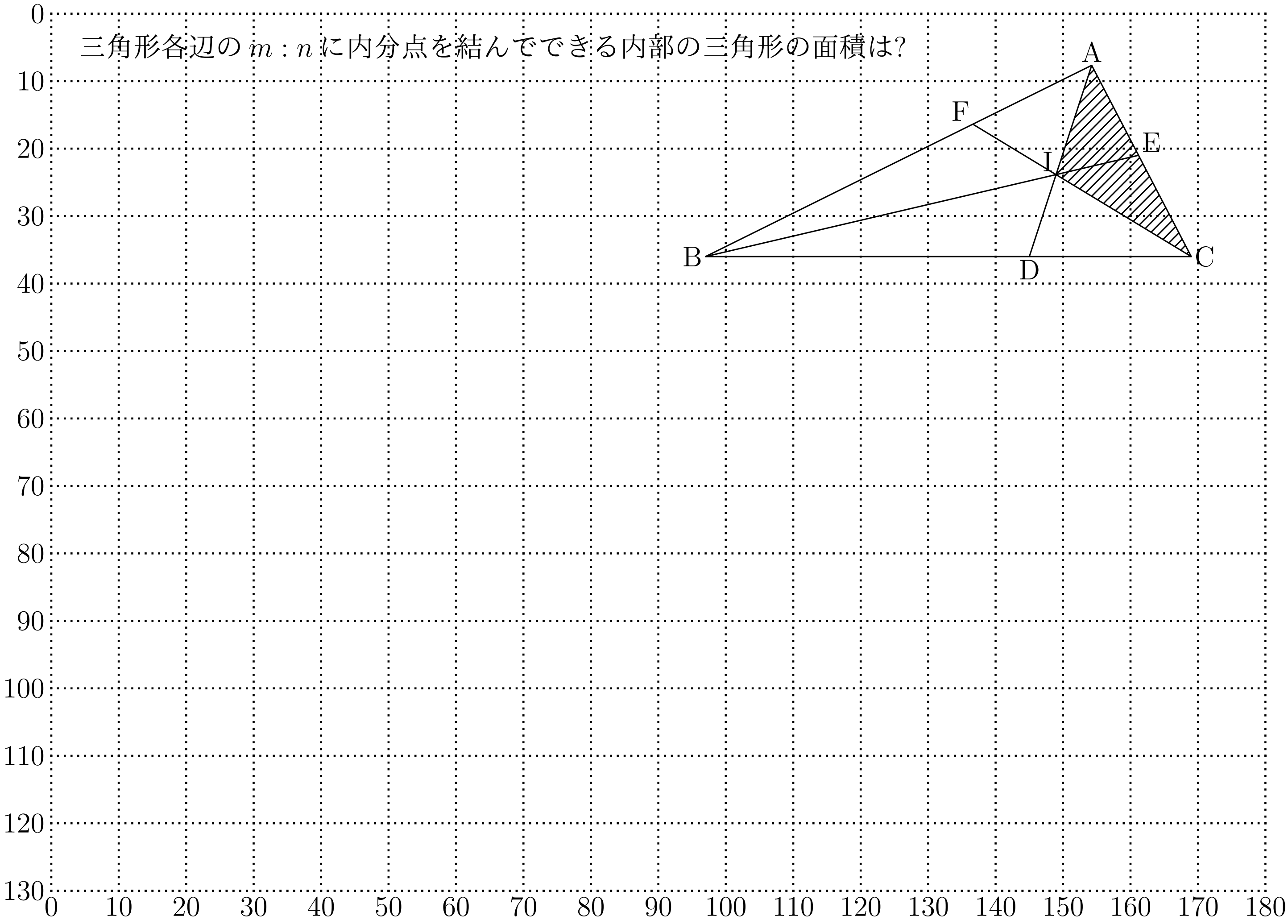
$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

五色問題

三角形

各辺の 2:1 に内分点を結んでできる内部の三角形の面積は元の三角形の 1/7

三角形各辺の $m:n$ に内分点を結んでできる内部の三角形の面積は?



重複組合せ

点 Q(q, 0) と置くと、点 P、R、S の座標も q を使って表すことができ、QR の長さは $\boxed{\text{ア}}$ となる。したがって、長方形 PQRS の面積も q を使って表すことができ，q = $\boxed{\text{イ}}$ のときに面積が最大となる。

	ア	イ
1	$-\frac{3}{2}q+6$	2
2	$-\frac{3}{2}q+6$	3
3	$-q+12$	3
4	$-3q+12$	2
5	$-3q+12$	3

	a	b
1	0	$-\frac{11}{10}$
2	1	$-\frac{9}{10}$
3	-1	$-\frac{9}{8}$
4	2	$\frac{7}{8}$
5	-2	$-\frac{7}{6}$

正答

[判断推理]

No.1

ある会社で，社員を対象に，アメリカ，イタリア，オーストラリア，中国に行ったことがあるかどうかをアンケート調査したところ，次のような結果が得られた。このとき，確実にいえるのはどれか。(地方上級〈全国型，関東型，中部・北陸型))

○ アメリカに行ったことのある社員は，全員が中国に行ったことがある。
○ オーストラリアに行ったことのある社員は，全員が中国に行ったことがない。
○ オーストラリアに行ったことがない社員は，全員がイタリアに行ったことがある。
○ 社員全員が行ったことがある国はない。

1 アメリカとオーストラリアに行ったことがある社員がいる。
2 イタリアとオーストラリアに行ったことがある社員がいる。
3 イタリアのみに行ったことがある社員がいる。
4 オーストラリアのみに行ったことがある社員がいる。
5 3 か国に行ったことがある社員はいない。

【解説】

図のように、半径 1 と半径 2 の同心円、および半径 2 の円周に沿って等間隔に配置された 6 個の半径 1 の円がある。この図における灰色部分の面積の和として、正しいのはどれか。

1　$3\pi - \sqrt{3}$
2　3π
3　$5\pi - 3\sqrt{3}$
4　$4\pi - \sqrt{3}$
5　4π

【解説】

$$\pi + 4\pi + \pi \times 6 - 2 \times 4\pi = 3\pi$$