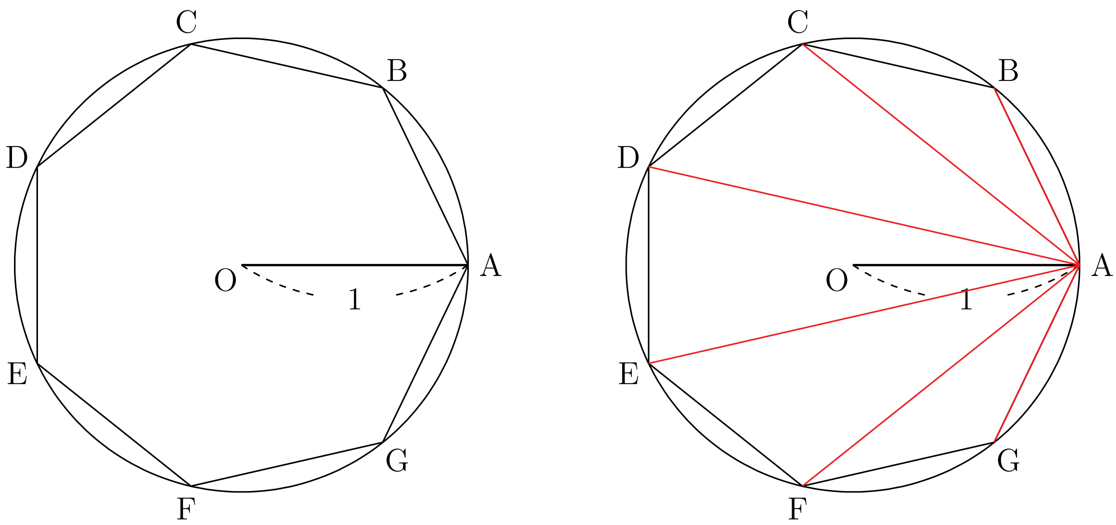
次の値を求めよ。

$$L = 8(1 - \cos\frac{2\pi}{7})(1 - \cos\frac{4\pi}{7})(1 - \cos\frac{6\pi}{7})$$

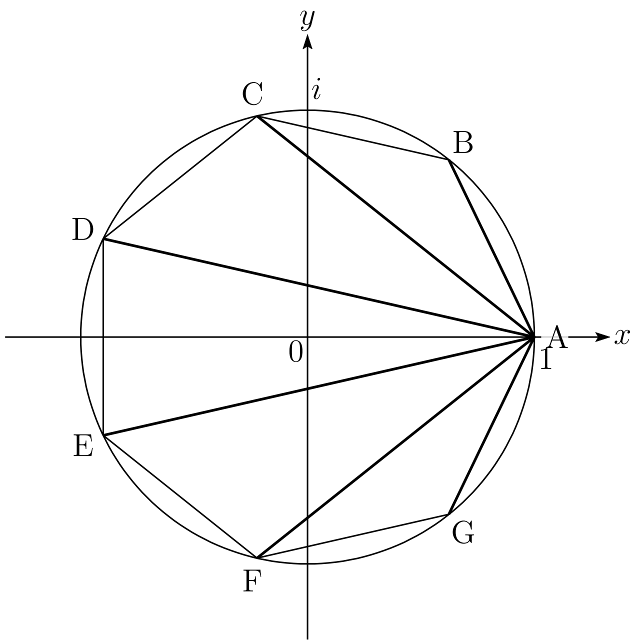
解説

実は、L の値は単位円に内接する正七角形 ABCDEFG の A を端点とする６つの線分の長さの積 AB・AC・AD・AE・AF・AG で、7 となります。



【解】

複素数平面上に原点を中心に単位円を描き、それに内接する正七角形 ABCDEFG を図のようにおきます。すなわち、A(1)、B($e^{\frac{2}{7}\pi i}$)、C($e^{\frac{4}{7}\pi i}$)、D($e^{\frac{6}{7}\pi i}$)、E($e^{\frac{8}{7}\pi i}$)、F($e^{\frac{10}{7}\pi i}$)、G($e^{\frac{12}{7}\pi i}$) です。



線分 AB の長さは、

$$\mathrm{AB}=|1-e^{\frac{2}{7}\pi i}|=\sqrt{(1-\cos\tfrac{2}{7}\pi)^2+\sin^2\tfrac{2}{7}\pi}=\sqrt{2(1-\cos\tfrac{2}{7}\pi)}$$

同様にして、

$$\mathrm{AC}=|1-e^{\frac{4}{7}\pi i}|=\sqrt{(1-\cos\tfrac{4}{7}\pi)^2+\sin^2\tfrac{4}{7}\pi}=\sqrt{2(1-\cos\tfrac{4}{7}\pi)}$$

$$\mathrm{AD}=|1-e^{\frac{6}{7}\pi i}|=\sqrt{(1-\cos\tfrac{6}{7}\pi)^2+\sin^2\tfrac{6}{7}\pi}=\sqrt{2(1-\cos\tfrac{6}{7}\pi)}$$

$\mathrm{AE}=|1-e^{\frac{8}{7}\pi i}|$ ですが、対称性より、

$$\mathrm{AE}=\mathrm{AD}=\sqrt{2(1-\cos\tfrac{6}{7}\pi)}$$

AF、AG についても同様にして、

$$\mathrm{AF}=\mathrm{AC}=|1-e^{\frac{10}{7}\pi i}|=\sqrt{2(1-\cos\tfrac{4}{7}\pi)}$$

$$\mathrm{AG}=\mathrm{AB}=|1-e^{\frac{12}{7}\pi i}|=\sqrt{2(1-\cos\tfrac{2}{7}\pi)}$$

これより、

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AG}=\left(\sqrt{2(1-\cos\tfrac{2}{7}\pi)}\right)^2=2(1-\cos\tfrac{2}{7}\pi)$$

$$\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AF}=\left(\sqrt{2(1-\cos\tfrac{4}{7}\pi)}\right)^2=2(1-\cos\tfrac{4}{7}\pi)$$

$$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}=\left(\sqrt{2(1-\cos\tfrac{6}{7}\pi)}\right)^2=2(1-\cos\tfrac{6}{7}\pi)$$

となり、これらを掛け合わせると、

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AG}=8(1-\cos\frac{2\pi}{7})(1-\cos\frac{4\pi}{7})(1-\cos\frac{6\pi}{7})$$

となります。

さて、複素数の範囲で

$$x^7=1$$

を解くと、解は $x=1,\ e^{\frac{2}{7}\pi i},\ e^{\frac{4}{7}\pi i},\ e^{\frac{6}{7}\pi i},\ e^{\frac{8}{7}\pi i},\ e^{\frac{10}{7}\pi i},\ e^{\frac{12}{7}\pi i}$ となり、複素数平面の正七角形の 7 つの頂点 A、B、C、D、E、F、G に対応します。

これより、

$$x^7-1=(x-1)(x-e^{\frac{2}{7}\pi i})(x-e^{\frac{4}{7}\pi i})(x-e^{\frac{6}{7}\pi i})(x-e^{\frac{8}{7}\pi i})(x-e^{\frac{10}{7}\pi i})(x-e^{\frac{12}{7}\pi i})$$

また

$$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

と因数分解されるので、

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-e^{\frac{2}{7}\pi i})(x-e^{\frac{4}{7}\pi i})(x-e^{\frac{6}{7}\pi i})(x-e^{\frac{8}{7}\pi i})(x-e^{\frac{10}{7}\pi i})(x-e^{\frac{12}{7}\pi i})\\&=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\end{aligned}$$

となります。

$f(x)$ に $x=1$ を代入し、絶対値をとれば、

$$|1-e^{\frac{2}{7}\pi i}||1-e^{\frac{4}{7}\pi i}||1-e^{\frac{6}{7}\pi i}||1-e^{\frac{8}{7}\pi i}||1-e^{\frac{10}{7}\pi i}||1-e^{\frac{12}{7}\pi i}|=7$$

$|1-e^{\frac{2}{7}\pi i}|$ =AB、$|1-e^{\frac{4}{7}\pi i}|$ =AC、$|1-e^{\frac{6}{7}\pi i}|$ =AD、$|1-e^{\frac{8}{7}\pi i}|$ =AE、$|1-e^{\frac{10}{7}\pi i}|$ =AF、$|1-e^{\frac{12}{7}\pi i}|$ =AG なので、

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AE}\cdot\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AG}=7$$

よって、

$$8(1-\cos\frac{2\pi}{7})(1-\cos\frac{4\pi}{7})(1-\cos\frac{6\pi}{7})=7$$