Distance Homothetique

Cedric Zanni

18 janvier 2013

Notation : Supposons que l'on ait un segment AB sur lequel est défini un poids variant linéairement $\tau(t) = \tau_0 + \Delta\tau.t$ (paramétré par $t \in [0;1]$) correspondant au rayon voulu autour du segment. Nous introduisons la paramétrisation suivante du segment, définie sur $[0;1]$:

$$\Gamma(t) = A + t.\overrightarrow{AB}$$

On a alors (avec P le point de calcul) :

$$\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2$$

Notons $\overrightarrow{u}$ le vecteur directeur (unitaire) du segment.

Hypothèse : On suppose que l'on travail uniquement avec des segments à rayon positif (cette hypothèse n'est pas très restreignante) :

$$\forall t \in [0;1],\ \tau(t) > 0$$

De plus, on considère pour le moment que $\Delta\tau$ est positif, donc que le rayon maximum associé au segment se trouve en B. Cela permet de réduire le nombre de cas à étudier, on pourra facilement déduire les résultats pour $\Delta\tau$ négatif en inversant la paramétrisation du segment. Cela signifie que le seul espace de paramètre ayant un intérêt est $]-\frac{\tau_0}{\Delta\tau}; +\infty[$ (en effet on a alors $\tau(t) > 0$)

1 Distance minimal à un segment

Nous cherchons la distance minimale dans l'espace homothétique entre un point $P \in \mathbb{R}^3$ et le segment pondéré AB :

$$\min_{t\in[0;1]} \frac{\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|}{\tau(t)}$$

$\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|$ et $\tau(t)$ étant positif cela revient à étudier le problème suivant :

$$\min_{t\in[0;1]} \frac{\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|^2}{\tau(t)^2}$$

Soit :

$$\min_{t\in[0;1]} \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^2}$$

Posons :

$$g(t) = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^2}$$

1.1 Etude de la fonction à minimiser :

Etude des limites :

$$\lim_{t \to -\frac{\tau}{\Delta\tau}} \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^2} = +\infty$$
$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^2} = \frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2}{\Delta\tau^2} > 0$$

Calcul de la dérivé de g (fonction rationnel) :

$$g'(t) = \left(\frac{\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^2}\right)'$$
$$g'(t) = \frac{(\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2)'.(\tau_0 + \Delta\tau.t)^2 - (\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2).((\tau_0 + \Delta\tau.t)^2)'}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^4}$$
$$g'(t) = \frac{(2\|\overrightarrow{AB}\|^2.t - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}).(\tau_0 + \Delta\tau.t)^2 - (\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2).(2\Delta\tau(\tau_0 + \Delta\tau.t))}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^4}$$
$$g'(t) = 2\frac{(\|\overrightarrow{AB}\|^2.t - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}).(\tau_0 + \Delta\tau.t) - \Delta\tau.(\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2)}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^3}$$
$$g'(t) = 2\frac{((\|\overrightarrow{AB}\|^2.t - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}).(\tau_0 + \Delta\tau.t) - \Delta\tau.(\|\overrightarrow{AB}\|^2.t^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.t + \|\overrightarrow{AP}\|^2))}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^3}$$
$$g'(t) = 2\frac{(t^2(\Delta\tau\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \Delta\tau\|\overrightarrow{AB}\|^2) + t(\|\overrightarrow{AB}\|^2.\tau_0 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}\Delta\tau + 2\Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}) + (-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.\tau_0 - \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2)}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^3}$$

On a donc :

$$g'(t) = \frac{2}{(\tau_0 + \Delta\tau.t)^3}\left(t(\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}) - (\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2)\right)$$

Etude du signe de la dérivé sur $]-\frac{\tau}{\Delta\tau};+\infty[$: On remarquera tout d'abord que le dénominateur est positif sur cet intervalle, il ne reste donc plus qu'à étudier le signe du numérateur.

$$g'(t) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow t(\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}) - (\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow t(\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}) \geq (\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2)$$

Deux cas se présente en fonction du signe de $\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}$, c'est à dire en fonction du signe de $\tau_0 + \Delta\tau\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)$. On remarquera que $\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ est la coordonné de la projection du point P sur le segment dans le système de coordonné de celui-ci. Donc

$$\tau_0 + \Delta\tau\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) = \tau\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)$$

représente le poids du projeté, deux cas se présente en fonction du signe de ce dernier.

Cas 1 : $\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \leq -\frac{\tau_0}{\Delta\tau} \Leftrightarrow \tau\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) \leq 0$

Dans ce cas la on a :

$$g'(t) < 0$$
$$\Leftrightarrow t > \frac{(\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2)}{(\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP})}$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\tau_0 \overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \Delta\tau \left\|\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right\|^2}{\tau_0 + \Delta\tau \overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}}$$

Par le théorème de Pythagore on a l'existence de $h \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left\|\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)^2 + h^2$$

On a donc :

$$g'(t) < 0$$

$$\Leftrightarrow t > \frac{\tau_0 \overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \Delta\tau \left\|\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right\|^2}{\tau_0 + \Delta\tau \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)}$$

$$\Leftrightarrow t > \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) \frac{\tau_0 + \Delta\tau \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) + \frac{h^2}{\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)}}{\tau_0 + \Delta\tau \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)}$$

$$\Leftrightarrow t > \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) - \frac{h^2}{-\left(\tau_0 + \Delta\tau \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)\right)}$$

On a $\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|} \leq -\frac{\tau_0}{\Delta\tau}$ et $-\left(\tau_0 + \Delta\tau\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)\right) \geq 0$ donc :

$$\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) - \frac{h^2}{-\left(\tau_0 + \Delta\tau \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)\right)} \leq -\frac{\tau_0}{\Delta\tau}$$

Hors on a $t \in]-\frac{\tau_0}{\Delta\tau}; +\infty[$, donc la condition pour que $g'(t)$ soit négatif est nécessairement vérifiée. La fonction g est donc décroissante ce qui implique que

$$\underset{t\in[0;1]}{\operatorname{argmin}}\, g(t) = 1$$

Cas 2 : $\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|} > -\frac{\tau_0}{\Delta\tau} \Leftrightarrow \tau\left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) > 0$

En reprenant le raisonnement du cas 1 on peut montrer que :

$$g'(t) < 0$$

$$\Leftrightarrow t < \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right) + \frac{h^2}{\left(\tau_0 + \Delta\tau \left(\overrightarrow{u}.\frac{\overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|}\right)\right)}$$

Il est d'en déduire que la dérivé de g est d'abord positive puis négative sur $]-\frac{\tau_0}{\Delta\tau}; +\infty[$. Ce qui permet d'en conclure que le minimum de la fonction g est atteint au point d'annulation de ça dérivée. On a donc

$$\underset{t\in]-\frac{\tau_0}{\Delta\tau};+\infty[}{\operatorname{argmin}}\, g(t) = \{t \in]-\frac{\tau_0}{\Delta\tau}; +\infty[\ /\ g'(t) = 0\}$$

En reprenant la définition de g', on obtient :

$$g'(t) = 0$$
$$\Leftrightarrow t(\|\overrightarrow{AB}\|^2.\tau_0 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}) - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}.\tau_0 + \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2}{\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}$$

et donc

$$\underset{t\in]-\frac{\tau_0}{\Delta\tau};+\infty[}{\operatorname{argmin}} g(t) = \frac{\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + \Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2}{\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}$$

On peut aisément en déduire $\underset{t\in[0;1]}{\operatorname{argmin}}\, g(t)$.

1.2 argmin et Distance minimal

Pour résumer, on a :

$$\underset{t\ /\ \tau(t)>0}{\operatorname{argmin}} \frac{\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|}{\tau(t)} = \begin{cases} \frac{\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}+\Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2}{\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2+\Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}} & si\ \tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} > 0 \\ sign(\Delta\tau)\infty & sinon \end{cases}$$

Il est facile d'en déduire

$$\underset{t\in[0;1]}{\operatorname{argmin}} \frac{\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|}{\tau(t)} = \begin{cases} \min\left(\max\left(0, \frac{\tau_0\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}+\Delta\tau\|\overrightarrow{AP}\|^2}{\tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2+\Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}}\right), 1\right) & si\ \tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} > 0 \\ 0 & si\ \tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} \leq 0\ et\ \Delta\tau < 0 \\ 1 & si\ \tau_0\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \Delta\tau\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} \leq 0\ et\ \Delta\tau > 0 \end{cases}$$

1.3 Interprétation géométrique

Soit un point $P \in \mathbb{R}^3$, tel que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ ne soit pas colinéaire. On se restreint au plan définit par (A, B, P) et on va utiliser comme axe des abscisses la direction $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$. Dans le nouveau repère ainsi défini on a :

$$A = (0, 0)$$
$$B = (L, 0)$$
$$P = (P_x, P_y)$$

On utilise une paramétrisation par abscisse curviligne du segment et on obtient une nouvelle fonction de rayon :

$$\tau(t) = \tau_0 + \frac{t}{L}\Delta\tau$$

On peut donc obtenir le point d'intersection de la droite représentant les rayons (voir figure 1) avec l'axe des abscisses, ce point Z a comme coordonné :

$$Z = (-\frac{\tau L}{\Delta\tau}, 0).$$

On a donc :

$$\overrightarrow{dir} = \overrightarrow{PZ} = (-\frac{\tau L}{\Delta\tau} - P_x, -P_y)$$

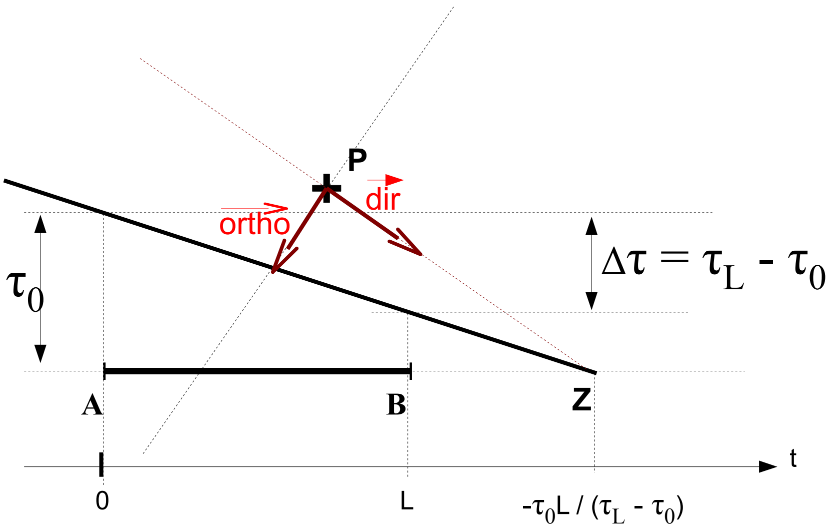

FIGURE 1 – blablabla.

On peut en déduire un vecteur orthogonal que l'on nommera $\overrightarrow{ortho}$:

$$\overrightarrow{ortho} = \overrightarrow{PZ} = (-P_y, \frac{\tau L}{\Delta\tau} + P_x)$$

Ceci permet de définir une droite Ω passant par P et ayant comme direction $\overrightarrow{ortho}$:

$$\Omega = \{P + \omega\ \overrightarrow{ortho}\ \ /\ \omega \in \mathbb{R}\}$$

On recherche le point d'intersection de Ω avec l'axe des abscisses :

$$\left(P + \omega\ \overrightarrow{ortho}\right)_y = 0$$

$$\Leftrightarrow P_y + \omega(\frac{\tau L}{\Delta\tau} + P_x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega = \frac{-P_y}{\frac{\tau L}{\Delta\tau} + P_x} = 0$$

En ré-injectant cette expression dans la définition de la droite Ω, on obtient l'abscisse de l'intersection :

$$t = P_x + \frac{\Delta\tau {P_y}^2}{\tau L + \Delta\tau P_x}$$

que l'on peut réécrire :

$$t = \frac{\tau(P_x L) + \Delta\tau({P_x}^2 + {P_y}^2)}{\tau L + \Delta\tau P_x}$$

Si on re-normalise l'axe des abscisse pour obtenir la version initial de la paramétrisation du segment, on a alors :

$$\tilde{t} = \frac{\tau(P_x L) + \Delta\tau({P_x}^2 + {P_y}^2)}{\tau L^2 + \Delta\tau(P_x L)},$$

on reconnait le résultat précédemment démontrer.

2 Sélection d'une portion de segment par une sphère en espace homothétique

Chercher les points d'un segment pondéré en espace homothétique situé à l'intérieur d'une sphère de rayon R revient à chercher l'ensemble suivant :

$$\left\{ t \in [0;1] \ / \ \frac{\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|}{\tau(t)} \leq R \right\}$$

Cela revient à rechercher l'ensemble suivant :

$$\left\{ t \in [0;1] \ / \ \|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|^2 \leq R^2.\tau^2(t) \right\}$$

Nous sommes donc amenés à étudier une inéquation du second degré :

$$(\|\overrightarrow{AB}\|^2 - R^2\Delta\tau^2)t^2 - 2(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} + R^2\Delta\tau\tau_0)t + \|\overrightarrow{AP}\|^2 - R^2\tau_0^2 \leq 0$$

Ceci se résout facilement en étudiant le signe du déterminant associé.

2.1 Etude préliminaire

En théorie, une inéquation du second degré peut avoir pour solution deux intervalles disjoint, cependant on peut montrer que dans le cas présent, les solutions ayant un intérêt forme nécessairement une partie connexe.

Pour le montrer nous allons temporairement introduire de nouvelle notation. La paramétrisation est choisi de telle sorte à ce que $\tau(0) = 0$:

$$\tau(t) = \Delta\tau t$$

On a alors :

$$\|\overrightarrow{\Gamma(t)P}\|^2 = h^2 + (t-d)^2$$

avec d la distance entre le point de calcul P et le point du segment de poids minimal (voir figure **??**). L'inéquation obtenue est :

$$t^2(1 - R^2\Delta\tau^2) - 2td + h^2 \leq 0$$

Son discriminant est :

$$\Delta = d^2 - (1 - R^2\Delta\tau^2)h^2$$

Pour qu'il puisse y avoir 2 intervalles de solution disjoint il faut que le déterminant soit strictement positif et que le terme de degré 2 soit négatif (voir figure **??**), soit :

$$(1 - R^2\Delta\tau^2) < 0$$

$$d^2 - (1 - R^2\Delta\tau^2)h^2 > 0$$

On notera au passage que $(1 - R^2\Delta\tau^2) < 0$ implique $d^2 - (1 - R^2\Delta\tau^2)h^2 \geq 0$ Les racines sont donc

$$\frac{-d \pm \sqrt{d^2 + (R^2\Delta\tau^2 - 1)h^2}}{R^2\Delta\tau^2 - 1}$$

On peut noter que $\sqrt{d^2 + (R^2\Delta\tau^2 - 1)h^2} \geq d$ et donc $-d + \sqrt{\Delta} \geq 0$ et $-d - \sqrt{\Delta} \leq -2d$, d étant positif on peut donc en conclure que les deux racines sont de signe opposé.

Le seul intervalle ayant un intérêt est donc :

$$\left[\frac{-d+\sqrt{d^2+(R^2\Delta\tau^2-1)h^2}}{R^2\Delta\tau^2-1};+\infty\right[$$

En effet, sur

$$\left]-\infty;\frac{-d+\sqrt{d^2+(R^2\Delta\tau^2-1)h^2}}{R^2\Delta\tau^2-1}\right]\subset\mathbb{R}^-$$

on a $\tau(t)<0$, cela ne peut donc pas correspondre à un morceau de segment (le fait que l'on ne travail qu'avec des segments à rayon positif est une de nos hypothèses d'origine).

2.2

Soit avec des notations simplifié :

$$(a-R^2d^2).t^2-2(b+R^2dq).t+c-R^2q^2\leq 0$$

$\alpha=a-R^2d^2$; $\beta=b+R^2dq$; $\gamma=c-R^2q^2$
Le comportement dépend de :
signe de α :
$\alpha>0$