Propiedades de los complejos

$z = (a+bi) \to \bar{z}(a-bi)$

① $\bar{\bar{z}} = z$ ② $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ ③ $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

④ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ ⑤ $z - \bar{z} = 2bi$ ⑥ $\overline{z^{-1}} = \frac{z}{|z|^2} = (\bar{z})^{-1}$

$$\boxed{\begin{array}{l} i^0 = 1 \\ i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}}$$

imaginarios

Polinomios

$$\boxed{P = Q \cdot C + R \Rightarrow P \,\underline{|\, Q}\quad R \;\; C}$$

$$\boxed{(x-z)(x-\bar{z}) = x^2 - 2\,\mathrm{Re}\,z + |z|^2}$$

Distancia

$$\boxed{d(z,w) = |z-w|}$$

$$\boxed{w^2 = b^2 - 4ac}$$

$$\boxed{\frac{-b \pm w}{2 \cdot a}} \to \text{"Báskara" de pol. complejos}$$

Si los coeficientes son reales las raíces $\mathbb{C}$ son ellas y su conjugado → Raíz z y $\bar{z}$ tmb

iso { MONO = dim(Nu f) = 0 (iny.) ; EPI = dim(Im f) = dim(V) }

Forma trigonométrica

$$\boxed{z = |z|(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \arg(z) \\ \hline \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \\ \arg(z^3) = 3 \cdot \arg(z) \end{array}}$$

Polinomios en $\mathbb{C}$

$$\boxed{K[x] = \{\text{coeficientes en } K\}}$$

$\mathbb{Z}[P]$, $\mathbb{Q}[P]$, $\mathbb{R}[P]$ $\mathbb{C}[P]$

$$\boxed{P(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}$$

$$\boxed{f(v) = M_E(f)\cdot(v)} \to \text{TL}$$

C_{EB} $M_{BB'}$ $C_{B'E} = M_{EE}$ → cambio de base

Relación $P(x)$ y sus coef con sus raíces

$$\boxed{-\frac{B}{A} = x_1 + x_2}$$

$$\boxed{\frac{-a_{m-1}}{a_m} = x_1 + x_2 + \cdots + x_m}$$

Autoval y autovec

$$\boxed{\det(A - \lambda Id) = 0}$$

Pol característico

$$\boxed{P(x) = \det(A - \lambda Id)}$$

AI.0

NORMA $= \|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_m^2}$

PROP $= \|\vec{AB}\| = \boxed{\|B - A\|}$ (DISTANCIA)

$\boxed{A \cdot B = 0}$ si $A \perp B$

PROD. ESCALAR

$$\boxed{\begin{gathered} \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \\ (x, y)(w, z) = xw + yz \end{gathered}}$$

$L_1 \parallel L_2 \Rightarrow v_d \parallel w \to v_d = \lambda w$

PRODUCTO VECTORIAL $= \boxed{A \times B = -(B \times A)}$

ANGULO EN VECTORES

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}}$$

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$

$k A \times B = k(A \times B) + A \times C$

$A \times A = 0$

$A \times B \perp A$, $A \times B \perp B$

ANGULO ENTRE VEC. DE ($\mathbb{R}^3$)

$$\cos\alpha° = \frac{\text{Prod escalar}}{\text{producto de los modulos}}$$

DISTANCIA

$$d(P, \pi) = \boxed{\frac{|(P - Q) \cdot N|}{\|N\|}} = \boxed{\frac{|(P) \cdot (N) - d|}{\|N\|}}$$

PTO CUALQ DE π (Q)

VARIABLE INDEPENDIENTE (d)

PRODUCTO DE MATRICES

$\boxed{A \cdot A^{-1} = Id}$ $\quad \boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$

$\boxed{(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}}$ $\quad \boxed{(A^{-1})^N = (A^N)^{-1}}$

PROPIEDADES DETERMINANTES

TRIANG SUP o INF.

$\Rightarrow \boxed{\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}}$

$\boxed{\text{Si } \det(A) \neq 0 \Rightarrow \boxed{SCD}}$

$\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}}$

$\Rightarrow$ ES INVERSIBLE !!

CANT. DE ECUACIONES $= Rg(A)$ (RANGO)

$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

$\boxed{S \oplus S^{\perp} = V}$

BASES ORTOGONALES Y BASES ORTONORMALES

Sea $B = \{V_1, \ldots, V_n\}$ base de $V \longrightarrow$ EVPI

B es BOG $\to$ si $V_i \perp V_j$, $(i \neq j)$ osea $(V_i, V_j) = 0$.

$\to$ Si todos sus vectores son ortogonales entre sí.

B es BON $\to$ si $(V_i, V_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$

$\to$ Una BON es una BOG compuesta por vectores unitarios (de norma 1)

En caso de tener una base cualquiera y me den ganas de ortonormalizarla, puedo recurrir al algoritmo de Gram y Schmidt

$\to$ ALGORITMO DE GRAM Y SCHMIDT

Tengo una base $B = \{V_1, V_2, V_3\}$

$$M_1 = V_1$$

$$M_2 = V_2 - \frac{(M_1, V_2)}{(M_1, M_1)} M_1$$

$$M_3 = V_3 - \frac{(M_2, V_3)}{(M_2, M_2)} M_2 - (*)$$

$(*)\ \frac{(M_1, V_3)}{\|V_1\|^2} M_1$

$$BOG = \{M_1, M_2, M_3\}$$

$M_1 \leftarrow V_1$

$$BON = \left\{ \frac{M_1}{\|M_1\|}, \frac{M_2}{\|M_2\|}, \frac{M_3}{\|M_3\|} \right\}$$

Notar que si el PI entre $(V_1, V_2) = 0$ entonces $M_2 = V_2$ es decir que ya eran ortogonales

Matriz de un producto interno

Base $= \{(V_1), (V_2), (V_3)\}$

$$G_B = \begin{pmatrix} (V_1, V_1) & (V_1, V_2) & (V_1, V_3) \\ & (V_2, V_2) & (V_2, V_3) \\ & & (V_3, V_3) \end{pmatrix}$$

Definimos un PI como:

$$(M, V) = [M]_B^H \, G_B \, [v]_B$$

Propiedades de G = 1) G es hermítica

2) G es definida positiva $\to Nul(G) = \{0\}$

3) G es inversible

Obs $G_{Bon} = Id \implies [M]^H_{Bon} [v]_{Bon} = PIC$

$G_{BOG} = D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$ = Diagonal

Definimos positiva a una matriz (A)

$$\boxed{x^T A x > 0}$$

Criterio de Sylvester: si A es simétrica y todos sus determinante > 0 definimos A como una matriz positiva.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \det(a) > 0 \wedge \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0 \implies A \text{ es positiva}$$

$\to$ creo que se llaman menor ("principales de A")

Teorema de Pitágoras $= \|M + v\|^2 = \|M\|^2 + \|v\|^2$

Álgebra II

Producto interno en $\mathbb{C}$

Notación = $(a, b) \rightarrow$ "a contra b"

$(u, v) \rightarrow$ operación que a cada $u, v \in V$ e $\mathbb{C}$ e.v. le hace corresponder un n° complejo.

1) $(u, v) = \overline{(v, u)}$ 2) $(u+v, w) = (u.w + v.w)$ 3) $(ku, v) = \bar{k}(u, v)$ $k \in \mathbb{C}$.

4) $(v, v) \geq 0$ $\wedge$ $[(v, v) = 0] \Leftrightarrow [v = 0_V]$

$\boxed{\text{Producto interno canónico (PIC) = producto escalar de Álgebra I}}$

Producto interno canónico entre dos matrices (PIC)

Distancia de dos v: $dist(v, u) = \|v - u\|$

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} o & p \\ q & r \\ s & t \end{pmatrix}$$

$(A, B) = a.o + b.p + c.q + d.r + e.s + f.t = n°$

$\boxed{\text{Si el producto interno de "A" contra "B" da "0"} \Rightarrow A \perp B}$

Otro método

$$\underbrace{(A, B)}_{(PIC)} = tr(\underbrace{A^T B}_{\text{producto de matrices}})$$

Propiedades

~~$(u, v+w) = (u+v, w)$~~

$(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$

$(u, v+w) = (u, v) + (u, w)$

$(u, kv) \neq \bar{k}(u, v)$

$(ku, v) = \bar{k}(u, v)$

$(0_V, u) = (0.v, u) = 0(v, u) = 0$

$(u, kv) = k(u, v)$

Producto interno de funciones

$$V = C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$$

$$(f, g) = \int_a^b f(t).g(t)\, dt$$

$\boxed{\text{Si modifico el intervalo cambia el producto interno}}$

Norma

$\boxed{\text{Generalización de módulo para vectores.}}$

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)}$$

$(v, v) \geq 0$ propiedad

$\boxed{\text{Si cambio mi producto interno, cambia mi norma}}$

Propiedades de la norma

1) $\|v\| \geq 0$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$

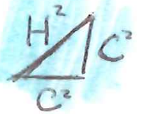
2) $\|kv\| = |k|.\|v\|$, $v \in V$, $k \in \mathbb{R}$

3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (desigualdad triangular)

Ortogonalidad

$u \perp v \Leftrightarrow (u, v) = 0$

$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$



Pitágoras

Ángulo entre vectores

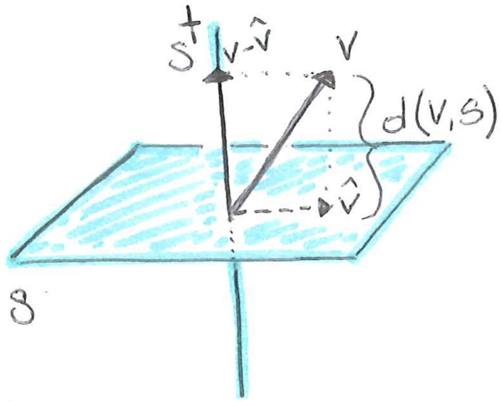
$ang(u, v) = \theta$

$$\cos(\theta) = \frac{\overbrace{(u, v)}^{PI}}{\|u\| . \|v\|}$$

Algebra II

Proyecciones ortogonales

$V = P_S(V) + P_{S^\perp}(V)$



NOTACIÓN $\Rightarrow P_S(V) = \hat{V} = P_S V = \hat{V}$

COMO BUSCAR $S^\perp$, SI TENGO UNA BASE DE S. $B_S = \{b_1, b_2, b_3\}$

$S^\perp \perp S \iff \begin{cases} (b_1, V) = 0 \\ (b_2, V) = 0 \\ (b_3, V) = 0 \end{cases}$

FORMULA DE PROYECCIÓN

DADO $S / B_S = \{b_1, b_2, \ldots, b_r\}$

$$\boxed{P_S(V) = \frac{(b_1, V)}{(b_1, b_1)} b_1 + \frac{(b_2, V)}{(b_2, b_2)} b_2 + \ldots + \frac{(b_r, V)}{(b_r, b_r)} b_r}$$

PROPIEDADES DE LA PROYECCION

1) $P_S(M+V) = P_S(M) + P_S(V)$
2) $P_S(k \cdot V) = k\, P_S(V)$
3) $P_S(V) = V \iff V \in S$
4) $P_S(V) = 0_V \iff V \perp S$
$V \in S^\perp$

DISTANCIA DE UN VECTOR A UN SUBESPACIO

$$d(V,S) = \|V - \hat{V}\| = \|V - P_S(V)\|$$

MATRIZ DE PROYECCIÓN (P)

Q = los vectores de la base del subespacio sobre el cual yo quiero proyectar puestos en columnas.

$B_S = \{b_1, b_2, b_3\} \rightarrow$ ES $BON_S \Rightarrow Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \Rightarrow Q^T = \begin{pmatrix} — b_1 — \\ — b_2 — \\ — b_3 — \end{pmatrix}$

$P = Q \cdot Q^T \Rightarrow \underbrace{P_S(V)}_{\text{Proyección}} \neq \underbrace{P \cdot V}_{\text{MATRIZ POR VECTOR}}$

$P_S + P_{S^\perp} = I$

$P^2 = P = P^T$

EN CASO QUE B_S NO SEA BON, LA ORTONORMALIZO CON GRAM-SCHMIDT.

FACTORIZACIÓN QR

$_n|\overline{R}^n \quad _m|\overline{Q}^n \quad _m|\overline{A}^n$

$_m|\overline{A}^n = {_m|}\overline{Q}^n \overline{R}^n \rightarrow$ TRIANGULAR SUPERIOR CON ELEMENTOS POSITIVOS EN LA DIAGONAL, ES INVERSIBLE.

$Q \rightarrow$ COLUMNAS ORTONORMALES

$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \rightarrow$ ARMAMOS UNA BON $\rightarrow$ (G Y S + NORMALIZAR) $\rightarrow Q = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \hat{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}}_{BON_{col(A)}}$

$\boxed{Q^T A = R} \leftarrow Q^T A = \underbrace{Q^T Q}_{Id} R \leftarrow$

Subespacios

$Col(BA) \subseteq Col(B)$

$Nul(A) \subseteq Nul(B.A)$

$Nul(A) = Nul(A^T A)$

$Nul(A) = (Fil(A))^{\perp} \Rightarrow (Nul(A))^{\perp} = Fil(A)$

$Nul(A^T) = (Col(A))^{\perp}$

$Rg(A^T A) = Rg(A)$ $\quad Fil(A) = Col(A^T)$

$Rg(A) + dim(Nul(A)) = n^{o}$ colum de A

$Rg(A) = dim(Col(A)) = dim(Fil(A))$

Como saber si dos σ + f(x) son LI **Wronskiano**

sean f, g, h funciones

$W = \begin{pmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{pmatrix}$ si $\exists\, x / det(W) \neq 0 \Rightarrow$ $\boxed{f, g, h \text{ son LI}}$

$\boxed{Ax = b \xrightarrow{SCI} \Rightarrow b \in Col(A)}$

$\hookrightarrow$ SCD $\Rightarrow$ x = una sol partic $+ \lambda (Nul(A))$

Propiedad maravillosa

Vectores LI <=> cordenadas respecto a una base LI

Matriz cambio de base

$B = \{b_1, b_2, b_3\}$ $\quad B' = \{w_1, w_2, w_3\}$ $\quad C_{BB'} = \begin{pmatrix} [b_1]_{B'} & [b_2]_{B'} & [b_3]_{B'} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$

$C_{BB'} = (C_{B'B})^{-1}$

Cuadrados mínimos

$\boxed{Ax = b} \to SI \Rightarrow \boxed{A^T A \hat{x} = A^T b} \to SC$

$\hookrightarrow$ solución aproximada de $Ax = b$

$\hookrightarrow$ La solución es $\hat{x}$!!!!

$\boxed{\hat{b} = P_{col(A)}(b)}$

La sostenido

$\boxed{A^{\#} = (A^T A)^{-1} A^T}$

$\boxed{A^{\#} . A = Id}$

$\boxed{A . A^{\#} = P_{Col(A)}} \to$ Matriz de proyección sobre col(A)

$v = P_S(v) + P_{S^{\perp}}(v)$

Cálculo del error

$\|b - A\hat{x}\|$

SUBESPACIOS

→ DADO POR SUS GENERADORES

$S = gen\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, $v \in \mathbb{R}^n$

→ DADO POR SUS ECUACIONES

$S = \{x \in \mathbb{R}^n : EC_1, EC_2, \dots, EC_3\}$

LI LD

1) $0_V \in S$

2) $x, y \in S \wedge \alpha \in K \Rightarrow (\alpha x + y) \in S$

COMBINACIÓN LINEAL

DOS VECTORES SON LI (O MÁS..) SII LA ÚNICA COMBINACIÓN LINEAL DE COMPONENTES QUE FORMAN EL VECTOR EN CUESTIÓN ES 0 (ES DECIR, UNO ES CL DE LOS OTROS)

$$\begin{cases} \alpha_1(v_1) + \alpha_2(v_2) + \alpha_3(v_3) = 0 \\ (\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0) \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\} \rightarrow \text{LI} \end{cases}$$

OTRO CASO LD

FORMAS DE SABER SI DOS O MÁS VECTORES SON LI

1) PONERLOS EN UNA MATRIZ DE COLUMNAS

$$\begin{pmatrix} | & | & | & & | \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_4 \\ | & | & | & & | \end{pmatrix} = 0_V$$

Y TE FIJAS QUE VECTORES HACEN QUE EL CONJ. SEA LD O SI EL SIST. ES $\boxed{SCD}$ ES LI.

2) FORMA TRADICIONAL (SIST. DE ECUACIONES)

$$\begin{cases} EC_1 \\ EC_2 \\ EC_3 \\ \vdots \end{cases}$$

$\boxed{\text{ESTA COMB. LINEAL SE LLAMA TRIVIAL}}$

SUMA DE SUBESPACIOS

$S+T \rightarrow$ SI $\exists\, S \cap T$ LA SUMA ES NORMAL.

SI $\nexists$ LA SUMA SE DICE DIRECTA Y SE LA NOTA COMO $\boxed{S \oplus T}$

- POLINOMIOS DE DISTINTO GRADO SON LI.

↳ SI! LOS POLINOMIOS SON VECTORES.

BASES

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ES UNA BASE DE $(V_K \in V)$ ES SII B ES LI

- TODAS LAS BASE DE UN MISMO E.V TIENEN LA MISMA CANT. DE VECTORES.
- EXISTEN BASES DE ESPACIOS VECTORIALES COMO DE SUBESPACIOS.

INTERSECCIÓN DE DOS SUBESPACIOS

SEAN $S \wedge T$ DOS SUBESP.

$S \cap T$ → SI UNO ESTÁ DADO POR SUS EC. Y OTRO POR SUS GEN. BUSCO QUE VECTORES CUMPLEN LOS EC.

AMBOS DADOS POR SUS GEN: LO PONGO EN UNA MATRIZ Y △GULO Y ME FIJO CUÁL SE VA PARA QUE SEA LI, EL QUE SE VA $\in (S \cap T)$

LI Ó LD SEGÚN SU DETERMINANTE

(SI TENGO n VECTORES $v \in \mathbb{R}^n$)

SUPONGO QUE MI MATRIZ ES A

$\det(A) = 0 \Rightarrow SCI \Rightarrow$ LD

$\det(A) \neq 0 \Rightarrow SCD \Rightarrow$ LI

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1, & v_2, & \dots, & v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

- SEA $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ LA DIMENSIÓN DE B' Ó DEL SUBESPACIO Ó ESPACIO QUE REPRESENTA ES N Ó LA CANTIDAD DE VECTORES $= N$

DIMENSIÓN $= \text{Dim}(B) = N$

BASES CANÓNICAS

$E_n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

CON $e_k = (0, 0, \dots, 1, 0)$ (1 en la posición k)

$P_2 = \{1, t, t^2\}$

$P_3 = \{1, t, t^2, t^3\}$

$P_1 = \{1, t\}$

LLL.

ESPACIOS DE DIMENSIÓN 8

P_8 TIENE DIM 8

SUBESPACIOS FUNDAMENTALES DE UNA MATRIZ.

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad x \in \mathbb{R}^m$ $\quad Ax$ es una combinación lineal de las columnas de A. $\longrightarrow \left(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_m A_m \right)$

ESPACIO COLUMNA $(\mathrm{Col}(A))$ → ES EL ESPACIO GENERADO POR LAS COLUMNAS LI DE A

ESPACIO FILA $(\mathrm{Fil}(A))$ → ES EL ESPACIO GENERADO POR LAS FILAS DE A QUE SON LI

RANGO

DEFINIMOS EL RANGO DE UNA MATRIZ COMO LA CANT. DE FILAS Ó COLUMNAS LI $\longrightarrow Rg(A) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Col}(A)) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Fil}(A))$

ESPACIO NULO

$x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = 0.$

$\mathrm{Nul}(A) \rightarrow$ Notación

SUBESPACIOS ORTOGONALES

sea S un subesp. $\in \mathbb{R}^n$ $\exists$ $S^\perp \in \mathbb{R}^n$ $\mid S \oplus S^\perp = V,\ V = \mathbb{R}^n$

↳ LA SUMA DE S Y $S^\perp$ siempre ES DIRECTA.

$\dim(S \cap S^\perp) = 0.$

COMO CALCULAR $S^\perp$ →

SI TENGO $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

$$\begin{cases} v_1 \cdot w_1 = 0 \\ v_2 \cdot w_2 = 0 \\ \vdots \\ v_n \cdot w_n = 0 \end{cases} \rightarrow S^\perp = \{w_1, w_2, \dots\}$$

$\mathrm{Col}(BA) \subseteq \mathrm{Col}(B)$

$\mathrm{Nul}(A) \subseteq \mathrm{Nul}(BA)$

$\mathrm{Nul}(A) \stackrel{=}{\subseteq} \mathrm{Nul}(A^TA)$

$\mathrm{Nul}(A) = (\mathrm{Fil}(A))^\perp$

$\mathrm{Nul}(A)^\perp = \mathrm{Fil}(A)$

$\mathrm{Nul}(A^T) = (\mathrm{Col}(A))^\perp$

$Rg(A) = Rg(A^TA)$

$\mathrm{Fil}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$

$\mathrm{Col}(A^T) = \mathrm{Fil}(A)$

$\mathrm{Nul}(A^T)^\perp = \mathrm{Col}(A)$

TEOREMAS DE LAS DIMENSIONES Y MÁS

$Rg(A) + \dim(\mathrm{Nul}(A)) = n°$ columnas de A.

$Rg(A) = \dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Fil}(A))$

$\dim(\mathbb{R}^n) = n \quad , \dim(\mathbb{R}^{n\times m}) = m\times n$

$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

COORDENADAS DE UN VECTOR EN UNA BASE.

SEA $B = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ UNA BASE y w un vector. B base de $S \in \mathbb{R}^n \wedge w \in \mathbb{R}^n$ (en un mismo espacio V)

$$w = d_1 V_1 + d_2 V_2 + \dots + d_n V_n$$ siendo $(d_1, d_2, \dots, d_n)^T$ las coordenadas de w en B.

OBS: LA BASE SE CONSIDERA ORDENADA

NOTACIÓN. $[w]_B = (d_1, d_2, \dots, d_n)^T$

- LAS COORDENADAS SON ÚNICAS. $\exists! (d_1, \dots, d_n)$

PROPIEDADES.

$[V + w]_B = [V]_B + [w]_B$

$[kV]_B = k[V]_B$

PROPIEDAD MARAVILLOSA

DADO UN CONJUNTO DE VECTORES $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ y una base B.

$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ es LI en V $\iff \{[V_1]_B, \dots, [V_n]_B\}$ ES LI en k^n

(ES DECIR: VECTORES LI sii COORDENADAS LI)

MATRIZ DE CAMBIO DE COORDENADAS

$$C_{BB'} = C_{B'E} \cdot C_{EB}$$

CÓMO ARMARLA

SEA UNA BASE B y E DOS BASES EN V

$B = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$

$$C_{BE} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [V_1]_E & \dots & [V_n]_E \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$C_{EB} = C_{BE}^{-1}$$

PARA QUE SIRVE.

Sea P(t) un vector de P

$[P(t)]_E = C_{BE} \cdot [P(t)]_B$

$[P(t)]_B = C_{EB} \cdot [P(t)]_E$

TRANSFORMACIONES LINEALES

- Definimos una TL como una multiplicación de matrices $\to A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ó $\in \mathbb{C}^{n \times m}$ $\wedge$ $x \in \mathbb{R}^m$ ó $\mathbb{C}^m$

$T(x) = Ax.$

PROPIEDADES (SEA $T: V \to W$)

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- $T(k.x) = k.T(x)$
- $T(0_V) = 0_W$

- LAS TL CONSERVAN LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

$$C_{B'C'} = C_{CC'} \cdot C_{BC} \cdot C_{B'B}$$ $\to$ B'B BC CC'

NUCLEO E IMAGEN DE UNA TL

$Nu(F) = \{ v \in V / F(v) = 0_V \} \rightarrow$ ES SUBESPACIO DE V

$Im(F) = gen\{F(v_1), \ldots, F(v_n)\} \rightarrow$

TEOREMA DE LAS DIMENSIONES PARA UNA T.L ($F: V \rightarrow W$)

$$DIM(Nu(F)) + DIM(Im(F)) = DIM(V)$$

PARA LAS TRANSFORMACIONES LINEALES MATRICIALES

$Nu(F) = Nul(A)$

$Im(F) = Col(A)$

$dim(Im(F)) = Rg(A)$

CLASIFICACIÓN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL ($f: V \rightarrow W$)

- INYECTIVA O MONOMORFISMO = PARA CADA X SOLO HAY UN SOLO $f(x)$. $Nu(F) = 0_V$
- SOBREYECTIVA O EPIMORFISMO = $Im(F) = W$
- BIYECTIVA O ISOMORFISMO = $Nu(F) = 0_V \wedge Im(F) = W$

MATRIZ ASOCIADA A UNA T.L

(O REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA TL)

- SEA F UNA TL Y B Y B' ($T(v) = w$) DOS BASES:

$F: V \rightarrow W$

$B = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$

$B' = \{W_1, W_2, \ldots, W_n\}$

$$[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} | & & | \\ [T(V_1)]_{B'} & \ldots & [T(V_n)]_{B'} \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[T]_{BB'} \cdot [v]_B = [T(v)]_{B'}}$$

RELACIÓN NÚCLEO E IMAGEN CON LA MATRIZ ASOCIADA A UNA TL

IMAGEN

- $w \in Im(T) \iff [w]_{B'} = [T(v)]_{B'}$
- $w \in Im(T) \iff [w]_{B'} \in Col([T]_{BB'})$

NUCLEO

- $v \in Nu(T) \iff [T(v)]_{B'} = 0_W$
- $v \in Nu(T) \iff [v]_B \in Nul([T]_{BB'})$

AT. 7

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES (DE UNA MATRIZ)

DADA UNA MATRIZ $A \in \mathbb{R}^{m \times}$.

LOS AUTOVALORES ASOCIADOS A LA MATRIZ A SON:

$$\boxed{\lambda \in \mathbb{R} \;/\; \det(A - \lambda . I) = 0}$$

si $\lambda_1 \in \mathbb{C}^* \Rightarrow \exists \lambda_2 / \lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ LO MISMO PARA LO AVEC

AUTOVALORES $P_A(\lambda)$

PROPIEDADES A.VAL

1. $tr(A) = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i$
2. A semejante a B $\Rightarrow P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$
3. A triangular $\Rightarrow P_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (a_{ii} - \lambda)$
4. $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + \det(A)$
5. $A^n v = \lambda^n v$

multiplicidad geométrica de λ = $m_g(\lambda) = \dim(S_\lambda)$

multiplicidad algebraica de λ = $m_A(\lambda)$ = cant de veces que se repite uno λ en $P(\lambda)$

6. A triangular $\Rightarrow \lambda_i$ = elemento de la diagonal
7. $\det(A) = \prod_{i=0}^{m} \lambda_i$

DADO UNA MATRIZ CON SU POLINOMIO MATRICIAL

Sea la matriz

$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \circ\circ\circ + a_1 A + a_0 I$

su polinomio asociado es

$Q(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \circ\circ\circ + a_1 t + a_0 . 1$.

$$\boxed{Av = \lambda v \Rightarrow P(A)v = Q(\lambda) v}$$

siendo A una matriz y λ su autovalor

Obs. la multiplicidad de los autovalores se mantiene

$v \rightarrow$ autovector de A asociado a λ

AUTOVECTORES

son los v /

$Av = \lambda v \Rightarrow (A - \lambda I) v = 0$

$Nu(A - \lambda I) \Rightarrow v$, $\boxed{v \in Nu(A - \lambda I)}$

Autoespacio $S_\lambda(A)$

son los subespacios generador por los autovectores

$$\boxed{S_{\lambda_i}(A) = \{ v \in \mathbb{K}^m / Av = \lambda v \}}$$

MATRICES UNITARIAS

A es unitaria sii las columnas de A (filas) forman una BON de $\mathbb{K}^n$

$BON = (A_1, A_2, \circ\circ\circ, A_n) \Rightarrow A = (A_1, A_2, \circ\circ\circ, A_n)$

$A^H . A = I \Rightarrow$ las columnas de A forman una BON de $\mathbb{K}^n$

(Adelanto)

v es avec de A y B $\Rightarrow$ v es avec de A.B y A+B

α es aval de A $\wedge$ β de B $\Rightarrow$ $\alpha\beta$ lo es de A.B

A y A^k tienen los mismos avec. (ojo)

DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ

- A es diagonalizable si $A = P\Lambda P^{-1}$ $\quad P = \begin{pmatrix} | & & | \\ Ave_i & \cdots & Ave_i \\ | & & | \end{pmatrix}$
- Si los Avectores de A son $\neq \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1}$ $\quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$
- A es diagonalizable $\Rightarrow A^n$ es diagonalizable
- $A = P\Lambda P^{-1} \Rightarrow A^n = P\Lambda^n P^{-1}$

UNA MATRIZ A ES SEMEJANTE A OTRA B $\Rightarrow$ $A = PBP^{-1}$ $\Rightarrow$ $tr(A) = tr(B)$, $det(A) = det(B)$

$$\boxed{A = SBS^{-1} \rightarrow A.S = S.B\underbrace{S^{-1}.S}_{I} \Rightarrow AS = SB}$$

$\Rightarrow$ TIENEN LOS MISMOS AUTOVALORES, NO ASÍ AUTOVECTORES

$A = P_1\Lambda P_1^{-1} \rightarrow P_1^{-1}AP_1 = \underbrace{P_1^{-1}P_1}_{I}\Lambda \underbrace{P^{-1}P}_{I} = \Lambda$

$B = P_2\Lambda P_2^{-1} \rightarrow P_2^{-1}BP_2 = \dots = \Lambda$

$P_1^{-1}AP_1 = P_2^{-1}BP_2 \Rightarrow \boxed{A = \underbrace{P_1P_2^{-1}}_{S}B\underbrace{P_2P_1^{-1}}_{S}} \rightarrow$ SI SE CUMPLE $\Rightarrow$ A ∧ B son semejantes

TEOREMA DE CAYLEY-HAMILTON

Si $P(t)$ es polinomio característico de A $\Rightarrow P(A) = 0$
(y A diagonalizable)

MATRICES UNITARIAS Y ORTOGONALES

- A es ortogonal $\Rightarrow A^T = A^{-1} \wedge A^TA = I$
- A es unitaria $\Rightarrow A^H = A^{-1} \wedge A^HA = I$
- Sean $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\} \wedge B_2 = \{u_1, \dots, u_n\}$ dos base ortonormales

La matriz $C_{B_1B_2}$ es ortogonal (resp. unitaria)

DEFINICIONES / NOMENCLATURA

MATRIZ ORTOGONAL $\Rightarrow$ LAS col(A) FORMAN UNA BOG (son ortogonales)
MATRIZ UNITARIA $\Rightarrow$ LAS col(A) FORMAN UNA BON (son ortonormales) (ortogonales y de mod igual a 1)
MATRIZ SIMÉTRICA $\Rightarrow A = A^T$
MATRIZ HERMÍTICA $\Rightarrow A = A^H$
MATRIZ ANTISIMÉTRICA $\Rightarrow A^T = -A$

MATRIZ ANTISIMETRICA ($A^T = -A$)

- Los autovalores de A son imaginarios puros o nulos.
- Autovectores asociado a autovalores ≠ son ortogonales.
- A es diagonalizable unitariamente ($A = U \Lambda U^H$)

MATRIZ SIMETRICA ($A = A^T$)

- A tiene autovalores reales ($\lambda_i \in \mathbb{R}$)
- $\det(A) \in \mathbb{R}$
- Autovalores asociados a autovalores ≠ son ortogonales.
- A es diagonalizable ortogonalmente ($A = P \Lambda P^T$), con P ortogonal.

MATRIZ HERMITICA ($A = A^H$)

- A tiene autovalores reales ($\lambda_i \in \mathbb{R}$)
- $\det(A) \in \mathbb{R}$
- Autovalores asociados a autovalores ≠ son ortogonales
- A es diagonalizable ortogonalmente ($A = P \Lambda P^T$), con P ortogonal

MATRICES ORTOGONALES ($col(A) \to BON(\mathbb{R}^n)$)

- $AA^T = A^T A = Id$
- $A^T = A^{-1}$
- Las columnas de A son una BON

MATRICES UNITARIAS ($col(A) \to BON(\mathbb{C}^n)$)

- $AA^H = A^H A = Id$
- $A^H = A^{-1}$
- Las columnas de A son una BON

PROPIEDADES

- $\det(A) = \pm 1$
- $\det(A) = 1 \Rightarrow$ A es de rotac
- Autovectores asoc. a autoval ≠ son ortogonales
- Son matrices diagonalizabl ortogonalmentes

FORMAS CUADRÁTICAS

#DEFINE $P(x) \to$ Polinomio característico

$$\det(A-\lambda I) = P(x)$$

EXPRESIÓN GRAL PARA $\mathbb{R}^2 \wedge \mathbb{R}^3$

- $f(x,y) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x\,y + \ldots$
- $f(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$

DEFINICIONES DE FORMAS CUADRICAS

Se $Q(x) = x^T Q x$ una forma cuadrica. $\lambda_i \to$ AVES

- $\forall x \neq 0,\ Q(x) > 0 \to$ DEFINIDA POSITIVA $\to \forall \lambda_i \,/\, P(x)=0,\ \lambda_i > 0$
- $\forall x \neq 0,\ Q(x) < 0 \to$ DEFINIDA NEGATIVA $\to \forall \lambda_i \,/\, P(\lambda)=0,\ \lambda_i < 0$
- $\forall x \neq 0,\ Q(x) \leq 0 \to$ SEMIDEFINIDA " $\to \forall \lambda_i \,/\, P(\lambda)=0,\ \lambda_i \leq 0$
- $\forall x \neq 0,\ Q(x) \geq 0 \to$ SEMIDEFINIDA POSITIVA $\to \forall \lambda_i \,/\, P(\lambda)=0;\ \lambda_i \geq 0$
- $\forall x \neq 0,\ Q(x) \geq 0 \vee Q(x)\ 0 \to$ INDEFINIDA $\to$ AVES $>, < . \vee = 0$

#DATO como las formas cuadraticas tienen asociadas matrices simetricas sus $\lambda_i \,/\, P(\cdot)=0 \to$ son reales $(\in \mathbb{R})$

CAMBIO DE VARIABLES

Sea $Q(x) = x^T A x$ en coordenadas de la base de autovectores asociados a A ~~(normalizada, es decir una BON)~~ y ~~ortogonalizada~~

Se escribe $Q'(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_i y_i^2$ con $\lambda_i \,/\, P(x)=0$

La matriz cambio de base entre la canonica y la base de autovectores es la matriz ortogonal P cuyas columnas son una BON de A (es decir, los autovectores asociados a A ortogonalizados y normalizados)

PRODUCTO INTERNO

Si la matriz A asociada a una forma cuadrática, es definida positiva $\Rightarrow$ define un PI en $\mathbb{K}(\mathbb{C} \vee \mathbb{R})$ $(x,y) = x^H Q y$

CAMBIO DE VARIABLES (FACIL)

$$Q(x) = x^T A x$$

$Q'(y) = \lambda_i y_i^2 \longrightarrow$ el cambio de variables es

$$\left.\begin{aligned} x &= Py \\ y &= P^T x \end{aligned}\right\}$$ siendo P la matriz ortogonal asociada a A.

TEOREMA DE RAYLEIGH

$$\forall x \neq 0 \quad \lambda_{min} \leq \frac{Q(x)}{\|x\|^2} \leq \lambda_{max}$$

$$\max_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} = \lambda_{max}$$

DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES (DVS)

DADA UNA MATRIZ $A^{n\times m}$ SE PUEDE FACTORIZAR COMO $A = U\Sigma V^T$

CON $U \in C^{m\times m}$ Y $V \in C^{n\times n}$ (MATRICES UNITARIAS ORTOGONALES CUANDO A SEA REAL) Y $\Sigma \in R^{m\times n}$ UNA MATRIZ "DIAGONAL" SUS ELEMENTOS σ_{ij} VALEN 0 CUANDO $i \neq j$ (Σ, LOS σ_{ii} TIENEN QUE ESTAR ORDENADOS DE $> \to <$)

① $V \to$ COLUMNA DE AUTOVECTORES NORMALIZADOS DE LA MATRIZ QUE RESULTA DE HACER $A^H . A$.

② $U \to$ IDEM ① PERO CON LA MATRIZ $A . A^H$. PERO ADEMÁS SUS COLUMNAS CUMPLEN $A v_i = \sigma_{ii} u_i$, SIENDO v_i EL AUTOVECTOR NORMALIZADO Y σ_{ii} EL AUTOVALOR SINGULAR (VALOR SINGULAR) ASOCIADO AL AVD ASOCIADO AL AVE

③ $\Sigma \to$ SUS ELEMENTOS "DIAGONALES" SON LOS VALORES SINGULARES

VALOR SINGULAR $\to$ SEA λ_i UN AVA EL VALOR SINGULAR ASOCIADO ES $\sigma_i \; / \; \lambda_i = \sigma_i^2 \Rightarrow$ SERÍA $\sqrt{\lambda_i} = \sigma_i$

VALOR MÁXIMO DE $\|T(x)\|$

SEA $A \in R^{n\times m}$ EL MÁXIMO VALOR DE LA EXPRESIÓN $\|Ax\|$ SOBRE EL CONJUNTO DE LOS x DE NORMA UNITARIA ES EL MÁXIMO VALOR SINGULAR DE A. Y ESE VALOR LO ALCANZA EN EL AUTOVECTOR ASOCIADO AL AUTOVALOR ASOCIADO AL ~~A~~ VALOR SINGULAR.

UN RESULTADO SIMILAR VALE PARA EL MÍNIMO SOLO CUANDO EL NUL(A) ES SOLO EL TRIVIAL.

MATRIZ PSEUDO INVERSA (A^+)

$A = U\Sigma V^T$, $A^+ = V\Sigma^+ U^T$ DONDE Σ^+ ES LA MATRIZ DIAGONAL CON LOS σ_{ii} INVERSOS. Y TRANSPUESTA. (?) Ó $\boxed{A^+ = (A^T A)^{-1} . A^T}$

Aplicaciones: • EL PROBLEMA DE CUADRADOS MÍNIMOS TIENE COMO SOLUCIÓN $\hat{x} = A^+ . b \to$ SE DENOMINA SOLUCIÓN DE NORMA MÍNIMA.

• CUMPLE QUE $A . A^+ = P_{col(A)}$

• $A^+ . A = I_{r\times r}$ (SIENDO r EL RANGO DE A)

Propiedades de una DVS

- RANGO(A) → $Rg(A) = Rg(\Sigma) = Rg(\Sigma^T)$ = cant de valores sing no nulos

7.8 Aplicaciones de las DVS

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $A = \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ u_1 & \cdots & u_m \\ | & & | \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} D & 0 \\ \vdots & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\Sigma} \underbrace{\begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix}^T}_{V^T}$. Si $rg(A) = r$ entonces:

- $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ es BON de $Col(A)$ } U
- $\{u_{r+1}, \ldots, u_m\}$ es BON de $[Col(A)]^\perp$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es BON de $Fil(A)$ } V^T
- $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es BON de $[Fil(A)]^\perp$ → $[Fil(A)]^\perp = Nul(A)$