Interpolación Polinomial

La interpolación polinomial consiste en hallar el $P(x)$ que ~~mejor~~ pase por una $\underline{N}$ cantidad de puntos en un determinado $\mathbb{R}^{n \times n}$

Como hipótesis, dichos ptos tienen que estar en abscisas diferentes

uno

Relación entre el grado y el número de puntos

En gral: $\boxed{\text{Para } N+1 \text{ puntos, sería natural buscar un polinómio de grado } \geq N}$

El problema trata de, dados $n+1$ números $\neq$ $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ y $n+1$ números $\neq$ $(y_0, y_1, \dots, y_n)$, encontrar el $P(x) = y$ de grado $\leq n$ / $P(x_j) = y_j$ con $j = 0, 1, \dots, N$.

Encontrar un polinomio es igual a conocer sus coeficientes.

$$\boxed{P(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n}$$

Reducción a sistemas de Ec (Ej con $3 = N+1$)

Dado

$P(x) = y$
$P(z) = \omega$
$P(p) = Q$

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = y \rightarrow C_0 + C_1(x) + C_2(x)^2 = y \\ P(z) = \omega \rightarrow C_0 + C_1(z) + C_2(z)^2 = \omega \\ P(p) = \omega \rightarrow C_0 + C_1(p) + C_2(p)^2 = Q \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \text{ Ec.} \\ 3 \text{ inc.} \end{array}$$

$\downarrow$

Matriz $\longrightarrow$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & x & x^2 & y \\ 1 & z & z^2 & \omega \\ 1 & p & p^2 & Q \end{array}\right]$ $\leftarrow$ Gauss-Jordan. $\longrightarrow$ hallo $\underline{C_0, C_1 \wedge C_2.}$

Is this the "Matriz de Vendenmonde"?

Teorema

$\exists$ un único polinomio de grado $\geq n$ que pasa por los puntos $(x_0, y_0) \dots (x_n, y_n)$

Polinomio Interpolador de Lagrange (dado una f)

$$\boxed{P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x)}$$

$(y_0, \cdots, y_n) \rightarrow$ COEFICIENTES

~~$P(x_i) = f(x_i)$~~

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &= f(x_0) \\ y_1 &= f(x_1) \\ &\cdots \\ y_n &= f(x_n) \end{aligned}}$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)} \quad \cdots$$

$$L_n = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

En gral. los L_k se escriben así.

$$\boxed{L_k(x) = \frac{\prod_{i=0\, i\neq k}^{n} (x-x_i)}{\prod_{i=0\, i\neq k}^{n} (x_k-x_i)}}$$

Polinomio de Lagrange

$$\boxed{P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)}$$

Interpolación de Lagrange en Matlab (Google it)

Polinomio Interpolador de Newton

$$P(x) = \Delta y^{(n)}(0)(x-x_{n-1})\cdots(x-x_0) + \Delta y^{(n-1)}(0)(x-x_{n-2})\ldots(x-x_0)$$

$$+ \cdots + \Delta y^{(1)}(0)(x-x_0)(x-x_0) + \Delta y^{(0)}(0)$$

- $\Delta y^{(0)}(k) = y_k$
- $\Delta y^{(n)}(0) = \dfrac{\Delta y^{(n-1)}(1) - \Delta y^{(n-1)}(0)}{x_n - x_0}$
- $\Delta y^{(1)}(k) = \dfrac{\Delta y^{(0)}(k+1) - \Delta y^{(0)}(k)}{x_{k+1} - x_k} = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$

PARA un m que no sean ni $\underline{1}$, ni $\underline{0}$, ni $\underline{n}$.

POS

- $$\Delta y^{(m)}(k) = \frac{\Delta y^{(m-1)}(k+1) - \Delta y^{(m-1)}(k)}{x_{k+m} - x_k}$$

Ejemplo con el método de Newton

$\{(1,6);(2,12);(4;30)\}$

1	6	a	c
2	12	b	
4	30		

$$a = \frac{12-6}{2-\boxed{1}} = 6 \qquad c = \frac{9-6}{4+(-1)} = 1$$

$$b = \frac{30-12}{\boxed{4}-2} = 9$$

$\Rightarrow$

1	6	6	1
2	12	9	
4	30		

$\Rightarrow P(x) = 6 + 6(x-1) + 1(x-1)(x-2)$

$P(x) = 6 + 6x - 6 + x^2 - x - 2x + 2$

$P(x) = x^2 + 3x + 2$

DE ACÁ SACO EL $P_{0,1}(x)$ QUE CORRESPONDE A LOS DOS PRIMEROS PUNTOS

DE ACÁ El $P_{1,2}(x)$ QUE CORRESPONDE A LOS DOS SEGUNDOS PUNTOS.

$P(4) = 4^2 + 3.4 + 2 = 16 + 12 + 2 = 16 + 14 = 30$ ✓

$P(1) = 1^2 + 3.1 + 2 = 4 + 2 = 6$ ✓

$P(2) = 4 + 6 + 2 = 12$ ✓

- LA interpolación lineal presenta grandes desventajas cuando se aplica a números relativamente grande de datos.
- LA interpolación de spline es una interpolación que mantiene la suavidad entre sus puntos hasta cierto orden de derivadas.

Función matlab.

polyfit(, ,)

polyval(, ,)

interpl(, ,)

Integración

Métodos aproximados.

→ consiste en remplazar $f(z)$ por una $\tilde{f}(z)$ similar pero más sencilla.

y el error de integración

$$\boxed{\Delta I_{(A,b)}(f) = \left| I_{(A,B)}(f) - \tilde{I}_{(A,B)}(f) \right|}$$

Aproximación mediante el pol de Taylor

$$\boxed{f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2} f''(c)(x-c)^2 + \ldots + \frac{1}{N!} f^{(N)}(c)(x-c)^{(N)}}$$

ORDEN!

El error aprox de Taylor

$$\boxed{e_N(x) = \frac{1}{(N+1)!} f^{(N+1)}(\xi_x)(x-c)^{N+1}}$$

Métodos de las sumas de Rieman

Es el método más simple y consist en remplazar las integrales mediante un número finito de sumas.

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} h_k f(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$h_k = \frac{b-a}{N}$$

Métodos de los trapecios compuesto

Se reemplaza las integrales por un número finito de sumas, aproximado la función $f(x)$ por una función continua lineal a trozos

Para ello se toma una red de ptos

$a = x_0 < \cdots < x_k < \cdots < x_N = b$

con $x_{k+1} = x_k + h_k$. Luego se aproxima, en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$, la integral de $f(x)$ por la integral de la recta que une los puntos $(x_k, f(x_k))$ y $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$

con red uniforme → PASO

$$\int_a^b f(t)\,dt \cong \cancel{\frac{b-a}{N}}^{\,x_{k+1}-x_k} \left(\frac{f(x_0) + f(x_N)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(x_k) \right)$$

POR EJEMPLO,

$$\boxed{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}(t-x_k)+f(x_k)\,dt}$$

de donde saqué esto: (ooo)

TRES

Error de aprox. (PDF)

METODO DE SIMPSON COMPUESTO

El metodo consiste en tomar un polinomio de segundo grado a trozos para ellos se toma una (otra) red de puntos o nodos

$$\boxed{a = x_0 < \dots < x_k < \dots < x_n = b}$$

- $x_{k+1} = x_k + h_k$
- N par.
- red de puntos uniformen $\left(h = \frac{b-a}{N}\right)$

$$\boxed{\int_{x_k}^{x_{k+2}} f(t)\,dt \cong \frac{h}{3}\left(f(x_k) + 4f(x_{k+1}) + f(x_{k+2})\right)}$$

Error de la integración. (PDF)

CUADRATURAS

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt \cong \sum_{k=0}^{N} W_k f(x_k)}$$

- LA SUMA DE RIEMAN ES UNA CUADRATURA DE ORDEN CERO
- TRAPECIOS ES DE ORDEN 1
- SIMPSON ES DE ORDEN 3

INTEGRAR A PARTIR DE DATOS

Cuando solo se tiene un conjunto de datos (x_k, y_k) con $0 \le k \le N$ y $h = \frac{x_N - x_0}{N}$ sin conocer necesariamente una función que los relaciona, se integran usando cualquiera de los métodos anteriores.

SUMA DE RIEMAN

$$I = h \sum_{k=0}^{N} y_k$$

TRAPECIOS

$$I = h\left(\frac{y_0 + y_N}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} y_k\right)$$

SIMPSONS (CON N PAR)

$$I = \frac{h}{3}\left(y_0 + 2\sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} y_{2i-2} + 4\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} y_{2i-1} + y_N\right)$$

Funciones Primitivas

f continua $\Rightarrow F \,/\, F'(x) = f(x)$, infinitas primitivas

$$\boxed{F(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

Ecuaciones diferenciales

$y' = f(t,y)$

con t la var independiente e $y = y(t)$ como la función incognita

MÉTODO DE EULER (EDO DE 1ER ORDEN)

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Para un paso $h>0$ planteamos la aproximación de Taylor de primer orden.

$$y(t_1) = y(t_0+h) \simeq y_1 = y(t_0) + y'(t_0)h = y(t_0) + f(t_0, y_0(t_0))\,h$$
$$= y_0 + f(t_0, y_0)\,h$$

...

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k)} \quad y \quad \boxed{t_{k+1} = t_k + h}$$

Tomo $h>0$ como paso. Para un intervalo $[t_1, t_2]$

Consta la solución de encontrar una curva de soluciones parecido a la posta.

MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

- Los aprox por polinomios de Taylor de orden N, con $N \geq 2$ requiere determinar $y'', y''', \ldots, y^{(n)}$. Los métodos Runge-Kutta evaden la dificultad antes mencionada.

  A pesar que aproximan por Taylor, remplazan las $y'', y''' \ldots y^{(N)}$ por combinaciones ingeniosas de $f(t,y)$

- En estos métodos solo se debe implementar la función $f(t,y)$

MÉTODO DE HEUN (2do orden)

CUATRO

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & h>0 \\ y(t_0) = y_0 . \end{cases}$$

Taylor de 2do orden.

condición inicial (t_0, y_0)

$$\boxed{\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(F_1 + F_2) \end{cases}}
\qquad
\boxed{\begin{cases} F_1 = f(t, y_k) \\ F_2 = f(t_k + h, y_k + hF_1) \end{cases}}$$

Método de Euler modificado

Es como el método de Heun, pero se diferencia en como se aproximan las derivadas parciales.

con $k = 0, 1, 2, \ldots, N$

$$\boxed{\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = y_k + hF_2 \end{cases}}
\qquad
\boxed{\begin{cases} F_1 = f(t_k, y_k) \\ F_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot F_1\right) \end{cases}}$$

Este método se puede encuadrar en los métodos predictor - corrector

Método Runge-Kutta de orden cuatro

$$\boxed{\begin{cases} t_{k+1} = t_k + h \\ y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}}
\qquad
\boxed{\begin{cases} K_1 = f(t_k, y_k) \\ K_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_1\right) \\ K_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}K_2\right) \\ K_4 = f\left(t_k + h, y_k + \cancel{\tfrac{h}{4}}K_3\right) \end{cases}}$$

Ecuaciones no Lineales

- Consideremos solución de una Ec no lineal a $\forall x_s \in T \,/\, f(x_s) = 0$. con $x_s \in \mathbb{R}$. (sin raíces complejas).
- x_s puede ser de orden múltiple.

Teorema de Bolzano

Sea una f continua en (a,b). Si $\boxed{f(a) \cdot f(b) < 0}$ entonces $\exists\, x_s \in (a,b)$ / $f(x_s) = 0$

- no se puede garantizar la unicidad de la solución
- Si $f(x)$ es estrictamente monótona $\Rightarrow$ x_s es única.

Tipos de métodos de resolución de ecuaciones

→ Métodos directos que permiten despejar soluciones (Baskara, resolvente por ejemplo)
→ Métodos aproximados, que consiste en encontrar soluciones parecidas a las que buscamos
→ Métodos gráficos, que permiten visualizar en forma aproximada las soluciones
→ Métodos numéricos de distinta naturaleza.

Método de Bisección

Formula para hallar las k iteraciones para un det. e_k

- Condiciones de Bolzano deben cumplirse.

El método de bisección es la aplicación reiterada del teorema de bolzano.

$$\boxed{e_k = |x_k - x_s| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0)} \qquad \boxed{\text{Calculamos } x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}}$$

$$\boxed{e_N = \frac{(b_0 - a_0)}{2^{N+1}}}$$

- Es un método iterativo que genera una sucesión de aproximaciones
- El error de aprox. disminuye de forma irregular
- El método es robusto, solo requiere la continuidad de f y localizar la solución en un intervalo donde la función cambia de signo.
- Requiere evaluar f en cada paso.
- Es relativamente lento.
- No se define de antemano a que solución se converge.
- No es aplicable a vectores ni complejos.

$$E_r = \frac{X_r(\text{actual}) - X_r(\text{anterior})}{X_r(\text{actual})}$$

$\cancel{x_N = \frac{a_N + b_N}{2}}$ → N iteraciones

$$f(x_N) = f\left(\frac{x_a + x_b}{2}\right)$$

itero hasta alcanzar el error deseado

$$\boxed{x_N = \frac{x_a + x_b}{2}}$$

me fijo si

$f(x_a) \cdot f(x_n) > 0$?

si? → sustituye a x_a

no? → sustituye a x_b

$I = (x_a, x_b)$ → aquí

METODO DE NEWTON - RAPMSON

SE BASA EN LA APROXIMACIÓN LINEAL DE $F(x)$ EN UN ENTORNO DE LA SOLUCIÓN.

CINCO

- TOMO UN PUNTO x_0 en un entorno de x_s.
- SUPONGO LA EXISTENCIA DE LA DERIVADA de f.
- APROXIMO $f(x_s)$ por el polinomio de taylor de orden 1 en x_0.

$$\boxed{0 = f(x_s) \cong f(x_0) + f'(x_s - x_0)}$$

→ Taylor de orden uno.

si $f'(x_0) \neq 0$. $\Rightarrow \boxed{x_s \cong -x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}} \qquad \boxed{x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

sucesión de soluciones.

Propiedades

- Requiere la evaluación de f y f' en c/PASO
- CONVERGENCIA CUADRÁTICA ⇔ sol única y derivada ≠0.
- PARA LAS RAÍCES DOBLES ⇒ convergencia lineal.
- TAMBIÉN SIRVE PARA RAÍCES COMPLEJAS.

METODO SECANTE

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k)(x_{k-1})}}.$$

SE APROXIMA LA DERIVADA POR EL COCIENTE INCREMENTAL

MÉTODOS ITERATIVOS

Procedimiento que a partir de 1 o más datos iniciales permite generar una sucesión convergente.

Ej: Newton - Raphson, Bisección.

Calcular el orden de convergencia.

Un resultado clásico para calcular el orden de convergencia de una iteración con la pinta de $\boxed{x_{k+1} = g(x_k).}$ es:

Sea $g \in C^k([a,b])$. Si la sucesión $x_{k+1} = g(x_k)$ converge en un punto fijo x_s y $\exists$ un entero p / $g^{(k)}(x_s) = 0$ para $1 \leq k < p$ $\wedge$ $g^{(p)}(x_s) \neq 0$
$\Rightarrow$ el orden de convergencia es p.

Si se trabaja en un intervalo donde la solución es única y la $f'(x)$ no se anula $\Rightarrow$ orden de conv. cuad.

Fix trapecios

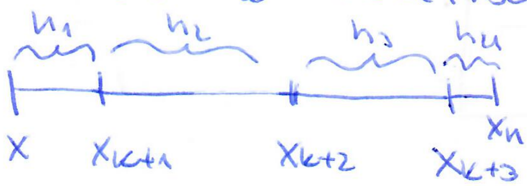
El método de trapecios consiste en ~~ptos~~, dado una red de ptos entre los límites de integración, encontrar el polinomio interpolador e integrarlo.

Para cualquier red de puntos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{N-1} h_k \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

N = cant de ptos.

$h_k = x_{k+1} - x_k$ = es el paso entre los nodos. $\neq$ para cada par de nodos.



Si tenés la suerte de que los puntos sean equidistantes, $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left(\frac{f(x_1) + f(x_n)}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} f(x_k)\right)$$

el paso es siempre el mismo.

(i.e. $\forall$ los ptos que no son los extremos)

Ecuaciones Diferenciales

$\left\{\begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right.$ $y' = f(t,y)$ con t como variable independiente y $y = y(t)$ como función incognita.

Euler (EDO de 1er orden)

Con un paso h en un I
$I = [a,b]$

$$\left\{\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + h\, f(t_k, y_k) \\ t_{k+1} = t_k + h \end{array}\right.$$

→ La solución consiste en par una curva (tabla de valores).

t	$y(t)$
a	
$\vdots$	
b	

Métodos de Runge
↓ Kutta

~~Euler mejorado~~

HEUN

con un h, y un I

$$\left\{\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}(F_1 + F_2) \\ t_{k+1} = t_k + h \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} F_1 = f(t, y_k) \\ F_2 = f(t_k + h, y_k + hF_1) \end{array}\right.$$

EULER MODIFICADO

con h, $I = [a,b]$, (t_0, y_0)

$$\left\{\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + hF_2 \\ t_{k+1} = t_k + h \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} F_1 = f(t_k, y_k) \\ F_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \end{array}\right.$$

RUNGE KUTTA ORDEN CUATRO

$$\left\{\begin{array}{l} y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4) \\ t_{k+1} = t_k + h \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} F_1 = f(t_k, y_k) \\ F_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_1) \\ F_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}F_2) \\ F_4 = f(t_k + h, y_k + hF_3) \end{array}\right.$$

HOJA DE FORMULAS (SOLO FORMULAS)

MÉTODOS NUMÉRICOS

Integración

TRAPECIOS SIMPLE

$$(b-a)\,\frac{f(b)+f(a)}{2} = \int_a^b f(x).$$

TRAPECIOS COMPUESTO PARA UNA RED DE PUNTOS CUALQUIERA

$$\int_a^b f(x) = h_k\left(\sum_{k=1}^{N-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}\right), \quad \text{con } h = x_{k+1}-x_k.$$

TRAPECIOS COMPUESTO PARA UNA RED DE PUNTOS EQUIDISTANTES

$$\int_a^b f(x) = h\left(\frac{f(x_1)+f(x_N)}{2} + \sum_{k=2}^{N-1} f(x_k)\right)$$

SIMPSON SIMPLE

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a)+4f(m)+f(b)\right)$$

$$m = \frac{a+b}{2}$$

$$h = \frac{b-a}{2}$$

SIMPSON COMPUESTO PARA UNA RED DE PUNTOS EQUIDISTANTES

$$\int_a^b f(x) = \frac{h}{3}\left(f(\overset{a}{x_1}) + f(\overset{b}{x_n}) + 2\sum_{2m-1} f(x_{2m-1}) + 4\sum_{2m} f(x_{2m})\right)$$

IMPARES PARES

ERRORES DE INTEGRACIÓN

TRAPECIOS

$$E_T(h) = -f''(\alpha)\frac{h^3}{12},$$

SIMPSON

$$E_S(h) = -f^{(4)}(\alpha)\frac{h^5}{2880}$$

COTA MAX. $\alpha = b$. PARA $\int^b$ $|f''(\alpha)|\frac{h^2}{12}(b-a)$ $|f^{(4)}(\alpha)|\frac{h^4}{2880}(b-a)$

ECUACIONES NO LINEALES (MÉTODOS ITERATIVOS)

~~MÉTO~~

BISECCIÓN

① $$X_r = \frac{X_a + X_b}{2}$$

② $$f(X_a) * f(X_r) \overset{?}{\gtrless} 0$$

$>$: $\cancel{X_r = X_a}$ $X_a = X_r$

$<$: $X_b = X_r$.

ENCONTRAR CUANDO CAMBIA DE SIGNO LA ECUACIÓN NO LINEAL Y TOMARLO COMO $I = [X_a, X_b]$ INICIAL.

$$E_p = \left| \frac{X_r(\text{ACTUAL}) - X_r(\text{ANT})}{X_r(\text{ACTUAL})} \right|$$

↳ VA CAMBIANDO ITERACIÓN A ITERACIÓN.

$X_{r\ \text{FINAL}} \cong$ RAIZ.

$$e_k = |X_k - X_s|$$

$$e_k \leq \frac{1}{2^{k+1}} (b_0 - a_0)$$

NEWTON RAPHSON

① Elijo un X_0 APROXIMADO A LA SOLUCIÓN.

② ASEGURO QUE $f(x) = 0$, O QUE MI $g(x)$ ESTÉ DE ESA FORMA

③ ITERO CON LA FÓRMULA

$$X_{N+1} = X_N - \frac{f(X_N)}{f'(X_N)}$$

CALCULAR ORD. CONVER.