Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Северо-Осетинский государственный университет имени Коста Левановича Хетагурова»

Курсовая работа

«Решение систем линейных уравнений. Метод Гаусса»

Выполнил:

Студент 1 курса

Направления «Информатика и вычислительная техника»

Кадзаев Артур Геворгович

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. Цель и задачи моделирования

2. Математическое описание объекта моделирования, начальные и граничные условия

3. Алгоритм реализации задачи

4. Порядок выполнения работы

Список использованных источников

# ВВЕДЕНИЕ

В линейной алгебре существуют четыре основных класса задач, которые включают в себя решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), вычисление определителей, нахождение обратных матриц и определение собственных значений и собственных векторов матриц. Эти задачи имеют важное прикладное значение при решении многих проблем в науке и технике, а также при реализации многих алгоритмов вычислительной математики, математической физики и обработки результатов экспериментальных исследований.

Для решения СЛАУ используются преимущественно два класса методов: прямые и итерационные. Прямые методы дают алгоритм, который позволяет получить точное решение СЛАУ. Однако из-за ограничений реальных ЭВМ точность решения будет приближенной. Итерационные методы основаны на повторяющихся процессах и позволяют получать решение СЛАУ последовательными приближениями. Прямые методы универсальны и применяются для решения систем сравнительно невысокого порядка (порядка около 200), а итерационные методы выгодно использовать для СЛАУ высокого порядка со слабо заполненными матрицами.

Данная курсовая работа посвящена решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса. Этот метод решения относится к прямым методам. Системами линейных алгебраических уравнений являются системы вида:

 (1)

Данная нам система имеет вид:

, (2)

значит, подходит под определение системы линейных алгебраических уравнений.

Данный метод является наиболее известным и популярным точным способом решения такого вида систем. Этот метод заключается в последовательном исключении неизвестных, о котором будет сказано позже.

Алгоритм метода Гаусса включает в себя два этапа: приведение матрицы к треугольному виду и нахождение неизвестных. Процесс приведения матрицы к треугольному виду называется прямым ходом, а нахождение неизвестных - обратным. Однако, если один из ведущих элементов матрицы равен нулю, метод Гаусса не может быть применен. Тем не менее, для нормальной матрицы с ненулевым определителем всегда возможна такая перестановка уравнений, что на главной диагонали не будет нулей. В приведенном коде для упрощения не делается перестановок, однако в нем есть проверка решений, а прямой и обратный ход вынесены в отдельные подпрограммы для большей наглядности.

Точность результатов, полученных при использовании метода Гаусса, зависит от точности выполнения арифметических операций в процессе преобразования элементов матрицы. Чтобы уменьшить погрешность при делении на диагональный элемент, рекомендуется переставить уравнения таким образом, чтобы на диагонали был наибольший по модулю элемент рассматриваемого столбца. Эта процедура называется выбором главного элемента столбца. Для контроля полученных решений их можно подставить в исходную СЛАУ.

# 1. Цель и задачи моделирования

В списке ниже представлены цели и задачи, которые могут быть достигнуты при моделировании решения систем линейных уравнений методом Гаусса:

- Закрепление знаний курса "Информатика и вычислительная техника" и использование их при решении математических задач

- Овладение навыками формализации задач при моделировании и использование математических алгоритмических моделей для решения этих задач

- Освоение техник работы с программой "Python"

- Формирование представления о компьютерном моделировании математических задач и их решений

- Закрепление навыков и знаний, полученных при изучении курса "Информатика и вычислительная техника"

- Получение необходимого минимума знаний аналитических и численных методов при реализации математических моделей конкретных задач

- Ознакомление с основными принципами построения математических моделей и технологических процессов

- Научение самостоятельно составлять алгоритмы решения технических задач, составлять и реализовывать соответствующие компьютерные программы на языке программирования Python.

Главной целью данного моделирования является закрепление знаний курса " Информатика и вычислительная техника", полученных в процессе обучения. Однако, помимо этого, есть и другие цели и задачи, которые могут быть важными при выполнении курсовой работы.

# 2. Математическое описание объекта моделирования, начальные и граничные условия

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными - это набор уравнений вида:



где x1, x2, ..., xn - неизвестные, aij (1≤i≤m, 1≤j≤n) - коэффициенты и bi (1≤i≤m) - константы. Цель состоит в том, чтобы найти значения x1, x2, ..., xn, которые удовлетворяют всем уравнениям системы.

Система линейных уравнений называется однородной, если все ее правые части равны нулю, иначе - неоднородной.

Система (1) называется квадратной, если число m уравнений равно числу n неизвестных.

Решение системы (2.1) - совокупность n чисел c1, c2, …, cn, таких что подстановка каждого ci вместо xi в систему (2.1) обращает все её уравнения в тождества.

Система (2.1) называется совместной, если имеет хотя бы одно решение, то есть если существует набор значений переменных, который удовлетворяет всем уравнениям системы. Другими словами, совместность означает, что система имеет как минимум одно решение. Если система не имеет решений, то она называется несовместной.

Совместная система вида (2.1) может иметь одно или более решений.

Из этого выходит главный критерий совместимости - Теорема Кронекера-Капелли:

Система линейных уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда все миноры её расширенной матрицы, начиная с первого и заканчивая (n-1)-м, равны нулю. Здесь "n" - количество неизвестных в системе уравнений. Этот критерий обеспечивает необходимое условие существования решения и может быть использован для определения матрицы, обратной к матрице системы уравнений путем применения алгоритма Гаусса-Жордана.

Докажем необходимость этой теоремы, т.е. что если система линейных уравнений имеет решение, то ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и определитель расширенной матрицы не равен нулю.

Пусть дана система линейных уравнений с матрицей коэффициентов A размерности m \* n, где m - число уравнений, n - число неизвестных, и столбцом свободных членов b. Расширенная матрица системы имеет вид [A|b].

Если система имеет решение, то существует такой вектор x, что Ax = b. Рассмотрим матрицу [A|b]x. Очевидно, что Ax равно b, а последний столбец матрицы [A|b]x также равен b. Значит, матрица [A|b]x равна [Ax|b], что также можно записать как [b|b]. Таким образом, мы получили, что [A|b]x = [b|b].

Поскольку система имеет решение, определитель матрицы A не равен нулю, а значит, матрица A имеет полный ранг n. Это означает, что в матрице A найдется n линейно независимых строк (или столбцов).

Рассмотрим теперь расширенную матрицу [A|b]. Поскольку матрица A имеет n линейно независимых строк, то в матрице [A|b] также найдется n линейно независимых строк. Значит, ранг расширенной матрицы не меньше n.

Пусть система совместна. Тогда существуют числа  такие, что . Следовательно, столбец  является линейной комбинацией столбцов  матрицы . Из того, что ранг матрицы не изменится, если из системы его строк (столбцов) вычеркнуть или приписать строку (столбец), которая является линейной комбинацией других строк (столбцов) следует, что rangA=rangB.

Теперь докажем достаточность.

Пусть rangA=rangB. Возьмем в матрице A какой-нибудь базисный минор. Так rangA=r , то он же и будет базисным минором и матрицы A. Тогда, согласно теореме о базисном миноре, последний столбец матрицы A будет линейной комбинацией базисных столбцов, то есть столбцов матрицы A. Следовательно, столбец свободных членов системы является линейной комбинацией столбцов матрицыA.

Напомним, что рангом совместной системы называется ранг её основной матрицы (либо расширенной, так как они равны).

Плюсы метода заключаются в следующем:

1. Для матриц ограниченного размера менее трудоёмкий по сравнению с другими методами.
2. Позволяет однозначно установить, совместна система или нет, и если совместна, найти её решение.
3. Позволяет найти максимальное число линейно независимых уравнений - ранг матрицы системы.

Решения c1, c2, …, cn и c1, c2, …, cm совместной системы вида (2.1) называются различными, если нарушается хотя бы одно из равенств:

1 = c1, c2 = c2, …, cn = cm.

Если система уравнений (2.1) имеет только одно решение, она считается определённой. В случае, когда система имеет как минимум два различных решения, она называется неопределённой.

Система линейных уравнений может быть представлена в матричной форме как:

 или . (2.2)

В данном случае, матрица А представляет собой матрицу системы, х - столбец неизвестных, а b - столбец свободных членов. При добавлении столбца свободных членов справа от матрицы А, получается матрица, называемая расширенной матрицей.

В алгебре существуют несколько основных методов решения линейных уравнений. Некоторые из них включают:

1. Метод замены переменных: Этот метод основан на последовательной замене переменных в системе уравнений с целью упрощения и получения конкретных значений для неизвестных. После каждой замены переменных система уравнений упрощается до тех пор, пока не будет достигнуто единственное решение.
2. Метод метода Крамера: Этот метод использует правило Крамера для нахождения решений системы линейных уравнений. Он основан на использовании определителей матрицы коэффициентов и соответствующих им миноров, чтобы найти значения для каждой неизвестной переменной.
3. Метод Гаусса: Этот метод также известен как метод исключения Гаусса. Он основан на применении элементарных преобразований к системе уравнений для приведения ее к эквивалентной треугольной форме. Затем можно использовать обратный ход метода Гаусса для нахождения значений неизвестных переменных.
4. Метод прямоугольных разностей: Этот метод применяется для решения систем линейных уравнений, возникающих при аппроксимации дифференциальных уравнений методом прямоугольных разностей. Он основан на разбиении исходного интервала на равные промежутки и замене производных разностными отношениями.

Метод Гаусса, также известный как метод исключения Гаусса, является одним из основных методов решения систем линейных уравнений. Он основан на применении элементарных преобразований к системе уравнений с целью приведения ее к эквивалентной треугольной форме, а затем использовании обратного хода для нахождения значений неизвестных переменных.

Процесс решения системы уравнений методом Гаусса включает следующие шаги:

1. Подготовка расширенной матрицы: Расширенная матрица состоит из матрицы коэффициентов системы уравнений и столбца свободных членов. В начале работы метода Гаусса, формируется расширенная матрица на основе исходной системы.
2. Прямой ход: Цель прямого хода - привести расширенную матрицу к эквивалентной треугольной форме. Это достигается путем выполнения элементарных преобразований над строками матрицы. Элементарные преобразования включают в себя перестановку строк, умножение строки на ненулевое число и сложение строк с умноженным коэффициентом.
3. Обратный ход: После завершения прямого хода, расширенная матрица принимает треугольную форму. Обратный ход метода Гаусса осуществляется для нахождения значений неизвестных переменных. Начиная с последнего уравнения и последней неизвестной переменной, вычисляются значения неизвестных последовательно для каждого уравнения, используя уже найденные значения предыдущих неизвестных.
4. Проверка и интерпретация решений: После выполнения обратного хода, получаются значения неизвестных переменных, которые являются решением исходной системы линейных уравнений. Эти значения могут быть проверены путем подстановки в исходную систему, чтобы убедиться в их правильности.

Рассмотрим решение СЛАУ методом Гаусса:

Предположим, что данная система имеет следующий вид:

 (2.3)



Матрица A, основная матрица системы, и столбец b свободных членов могут быть изменены с помощью элементарных преобразований над строками, в соответствии с их свойствами. Применение этих же преобразований к столбцу свободных членов позволяет привести основную матрицу системы к ступенчатому виду:

 (2.4)

Допустим, базисный минор - это ненулевой минор максимального порядка, содержащий только коэффициенты при переменных C:\Users\Huawei\AppData\Local\Microsoft\Windows\Clipboard\HistoryData\{30F93E47-D8E3-4D26-8F5C-CB2BC1B820CA}\{A6836777-A729-414D-B92F-B443A7141D91}\ResourceMap\{F4A2E9AA-D3B3-4EEF-A172-58A8F2BC3996} и расположенный в верхнем левом углу основной матрицы. Тогда переменные C:\Users\Huawei\AppData\Local\Microsoft\Windows\Clipboard\HistoryData\{30F93E47-D8E3-4D26-8F5C-CB2BC1B820CA}\{A6836777-A729-414D-B92F-B443A7141D91}\ResourceMap\{F4A2E9AA-D3B3-4EEF-A172-58A8F2BC3996} называются главными переменными, а остальные - свободными.

Если для хотя бы одного числа , где i > r (где r - ранг основной матрицы), значение не равно нулю, то рассматриваемая система является несовместной, то есть не имеет ни одного решения.

Предположим, . Выполним перенос свободных переменных на другую сторону равенств и разделим каждое уравнение системы на коэффициент , где i = 1 (где j - номер строки).

 (2.5)

 (2.4)



Если мы присвоим все возможные значения свободным переменным системы (2.3) и решим новую систему относительно основных неизвестных, начиная с последнего уравнения и двигаясь вверх, мы получим все решения этой системы линейных уравнений. Поскольку новая система была получена с использованием элементарных преобразований над исходной системой (2.2), согласно теореме об эквивалентности при элементарных преобразованиях систем (2.2) и (2.3) они являются эквивалентными, то есть множества их решений совпадают. Необходимое и достаточное условие совместности системы уравнений (2.2), которое было упомянуто ранее как условие для всех i > r, может быть сформулировано в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли.

Процесс решения задачи будет проиллюстрирован на примере следующей системы линейных алгебраических уравнений:

 (3.1)

где хк - неизвестные величины; - заданные элементы расширенной матрицы системы уравнений.

Из первого уравнения системы (3.1) выражаем неизвестное 

 (3.2)

что возможно при , в противном случае надо осуществить перестановку уравнений системы. Согласно формуле (3.2) необходимо каждый элемент первой строки расширенной матрицы СЛАУ поделить на диагональный элемент

 (3.3)

Затем подставляем выражение (3.2), полученное из первого уравнения, во все остальные уравнения системы. Эта подстановка эффективно устраняет переменную из всех уравнений, кроме первого. Полученная система будет представлена обновленной расширенной матрицей.

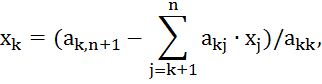
Чтобы преобразовать элементы этой расширенной матрицы, применим формулу

, где  (3.4)

В результате исключения первой неизвестной из всех уравнений, все элементы первого столбца преобразованной матрицы станут равными нулю, за исключением .

Используя второе уравнение системы, выразим неизвестную и исключим ее из остальных уравнений. Этот процесс можно продолжить для остальных неизвестных. В результате получим систему линейных уравнений (СЛАУ) с верхней треугольной матрицей, где все элементы ниже главной диагонали равны нулю.

Для каждой неизвестной запишем соответствующие выражения и формулы для преобразования элементов расширенной матрицы системы, которые обобщают формулы (3.2)-(3.4):



,

. (3.5)

Второй этап решения системы линейных уравнений (СЛАУ) известен как этап обратной подстановки метода исключения Гаусса. На этом этапе неизвестные переменные определяются по формуле (3.5), начиная с последней неизвестной и продвигаясь к первой.

Точность полученных результатов зависит от точности арифметических операций, выполняемых при манипулировании элементами матрицы. Для минимизации ошибок, возникающих при делении на диагональные элементы (как указано во второй формуле (3.5)), рекомендуется переставлять уравнения таким образом, чтобы элемент с наибольшим абсолютным значением в соответствующем столбце занимал место диагонали. Этот процесс называется поворотом столбцов или выбором ведущего элемента.

Количество арифметических операций в методе исключения Гаусса пропорционально размеру системы и составляет примерно 2/3. Полученные решения можно проверить, подставив их обратно в исходную СЛАУ и вычислив остатки, которые представляют собой разность между левой и правой частями уравнений:

 (3.6)

При малой погрешности решений величины  будут близки к нулю.