מבוא לסבוכיות ולחשוביות
סמסטר ב ה'תשפ"ה – 2025 / תרגיל 3

1. נסמן ב-$C = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$ מופע של $CNF\text{-}SAT$, באשר בכל פסוקית c_i מספר משתנים בוליאנים $x_j, 1 \le j \le n$, או שלילותיהם. יהי y_i מספר משתני העזר שנוספו לצרך תרגום הפסוקית c_i לצורת $3SAT$. נגדיר את:

   מצב א: $max|c_i| = 7$, מצב ב: $max|c_i| = 6$.

   יהי M_7 המספר הכולל של משתני עזר שיתוספו לצרך תרגום כל הפסוקיות במופע במצב א, ו-M_6 המספר הכולל עבור מצב ב. אזי

   א. $0 \le M_6 \le 6m,\ \ 0 \le M_7 \le 7m$.
   ב. $0 \le M_6 \le 4m,\ \ 0 \le M_7 \le 4m$.
   ג. $0 \le M_6 \le 3m,\ \ 0 \le M_7 \le 4m$.
   ד. $m \le M_6 \le 4m,\ \ m \le M_7 \le 4m$.
   ה. אף אחת מן הטענות לעיל אינה נכונה.

   הערה: במצב א, אין פסוקית בארך יותר מ-7, אולם לא בהכרח יש פסוקיות בארך 7. במצב ב, אין פסוקית בארך יותר מ-6, אולם לא בהכרח יש פסוקיות בארך 6.

2. תהינה D, E, F שלוש שפות השיכות ל-NP. נניח כי קימות הרדוקציות $E \preccurlyeq_p D$ ו-$F \preccurlyeq_p E$.
   קבע מי מבין הטענות הבאות היא הנכונה:

   א. אם, בנוסף, תתקים הרדוקציה $D \preccurlyeq_p F$, אזי D, E ו-F תהינה באותה מחלקת השקילות (P, NPI או NPC).
   ב. אם $F \in CoNP$ אזי $E \notin P$ אך לא ניתן לקבוע בודאות האם $D \in P$ או לא.
   ג. אם D היא NP-שלמה אזי E היא NP-שלמה אך עדין לא ניתן לקבוע בוודאות האם F הינה NP-שלמה או לא.
   ד. $D \in P$ אם ורק אם $F \in P$.
   ה. אף אחת מן הטענות לעיל אינה נכונה.

3. לבעית ה-$3SAT$ קימת גרסא בה אנו מקבלים כקלט פסוק φ בצורת $3CNF$ ועלינו להכריע האם קימת השמה שבכל פסוקית מבין פסוקיות φ מספקת לפחות ליטרל אחד ולא מספקת לפחות ליטרל אחד. (לבעיה זו קוראים $NAE\text{-}3SAT$, כשה-NAE הוא ראשי התיבות של: $Not\ All\ Equal$).

לדוגמא:

- $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \in NAE\text{-}3SAT$. זאת מכיון שעבור ההשמה $s(x_1) = T, s(x_2) = T$ ו-$s(x_3) = T$ מתקים שבכל פסוקית יש ליטרל בערך T וליטרל בערך F, שכן הפסוק יראה מהצורה: $(T \vee F \vee T) \wedge (F \vee F \vee T)$.
- $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \notin NAE\text{-}3SAT$, מכיון שבכל השמה שעבור הפסוק תהיה ולו פסוקית אחת שבה או כל הליטרלים יסופקו או כולם לא יסופקו, בנגוד לדרישות השפה. זאת, על אף שהפסוק שיך ל-$3SAT$.

נרצה להראות רדוקציה $3SAT \leq_P NAE\text{-}3SAT$. בהינתן פסוק $\varphi = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$ (מעל המשתנים הבוליאנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$) כמופע עבור בעית $NAE\text{-}3SAT$, ניצור תחילה את המשתנים החדשים $y_1, y_2, \ldots, y_m, z$. עבור כל פסוקית $C_i = (\ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3})$ נבנה את הפסוקיות: $D_{i,1} = (\ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee y_i)$ ו-$D_{i,2} = (\overline{y}_i \vee \ell_{i,3} \vee z)$. לבסוף, נגדיר: $f(\varphi) = D_{1,1} \wedge D_{1,2} \wedge D_{2,1} \wedge D_{2,2} \wedge \ldots \wedge D_{m,1} \wedge D_{m,2}$.

עבור הפסוק $\varphi = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$, מה הפסוק $f(\varphi)$ שיבנה על-ידי הרדוקציה?

א. $f(\varphi) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee y_1) \wedge (\overline{y}_1 \vee x_4 \vee z) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee y_2) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$

ב. $f(\varphi) = (\overline{y}_1 \vee x_4 \vee z) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \wedge (\overline{y}_3 \vee \overline{x}_3 \vee z)$

ג. $f(\varphi) = (y_1 \vee y_2 \vee y_3) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee y_2) \wedge (\overline{y}_1 \vee \overline{y}_2 \vee x_3)$

ד. $f(\varphi) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee y_1) \wedge (\overline{y}_1 \vee x_4 \vee z) \wedge (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee y_2) \wedge (\overline{y}_2 \vee \overline{x}_4 \vee z) \wedge (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee y_3) \wedge (\overline{y}_3 \vee \overline{x}_3 \vee z)$

ה. אף אחת מן האפשרויות לעיל אינה נכונה.

4. בבעית $Edge\text{-}Coloring$, אנו מקבלים כקלט גרף $G = (V, E)$ ומספר טבעי k ושואלים "האם קימת צביעה בקשתות של G אשר משתמשת בלכל היותר k צבעים?". בעוד שבצביעת קדקודים לשני קדקודים שכנים אסור שיהיה את אותו הצבע, בצביעת קשתות לשתי קשתות שכנות (כלומר, שתי קשתות בעלות קדקוד משותף) אסור שיהיה את אותו הצבע. כלומר, השפה הינה:

$$Edge\text{-}Coloring = \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{ניתן לצבוע בקשתות את } G \text{ בצביעה} \\ \text{המשתמשת בְּ } \leq k \text{ צבעים} \end{array} \right\}$$

נתבונן ברדוקציה $Edge\text{-}Coloring \leq_P Vertex\text{-}Coloring$.

בהינתן גרף $G = (V, E)$ נבנה קבוצת קדקודים חדשה:

$$\tilde{V} = \{x_e \mid e \in E\}$$

ונגדיר קשת חדשה בין שני קדקודים x_{e_1} וְ-x_{e_2} אם ישנו קדקוד משותף בין הקשתות e_1 וְ-e_2. משמע:

$$\tilde{E} = \left\{ \left(x_{e_1}, x_{e_2}\right) \mid e_1 \cap e_2 \neq \emptyset \right\}$$

לבסוף נגדיר: $\tilde{G} = \left(\tilde{V}, \tilde{E}\right)$.

במידה וניתן לצבוע את קשתות G בְּ-k צבעים, מהו המספר המזערי של צבעים בהם ניתן לצבוע את קדקודי $\tilde{G}$?

א. k.
ב. $3k$
ג. k^2
ד. $|V| + 1$.
ה. אף אחת מן האפשרויות לעיל אינה נכונה.

5. עבור הבעיה $Edge\text{-}Coloring$ לעיל: האם הרדוקציה פולינומיאלית?

א. כן.
ב. לא, שכן כמות הקשתות עלולה להיות רבועית כפונקציה של כמות הקדקודים.
ג. לא, שכן כמות הקשתות עלולה להיות מעריכית כפונקציה של כמות הקדקודים.
ד. לא ניתן לקבוע, תלוי בגודל הגרף.
ה. אף אחת מן הטענות לעיל אינה נכונה.

אפיאל, אמיפ