



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
LABORATÓRIO DE EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA DE PROCESSOS**

**Dissertação de Mestrado**

**DESENVOLVIMENTO DE UM GERADOR DE SINAIS DE UMA CUBA  
DE REDUÇÃO DE ALUMÍNIO COMO FONTE DE DADOS PARA  
APRENDIZAGEM DE UMA REDE NEURAL ARTIFICIAL**

**MARIÂNGELA DA SILVA ARAÚJO EMERENCIANO**

**CAMPINA GRANDE**

**2009**

MARIÂNGELA DA SILVA ARAÚJO EMERENCIANO

**DESENVOLVIMENTO DE UM GERADOR DE SINAIS DE UMA CUBA  
DE REDUÇÃO DE ALUMÍNIO COMO FONTE DE DADOS PARA  
APRENDIZAGEM DE UMA REDE NEURAL ARTIFICIAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Química da Universidade Federal de  
Campina Grande, como requisito para obtenção do título  
de Mestre em Engenharia Química.

Orientadores: Prof. Dr. Luis Gonzaga Sales Vasconcelos  
Prof. Dr. Romildo Pereira Brito

CAMPINA GRANDE

2009

**MARIÂNGELA DA SILVA ARAÚJO EMERENCIANO**

**DESENVOLVIMENTO DE UM GERADOR DE SINAIS DE UMA CUBA DE  
REDUÇÃO DE ALUMÍNIO COMO FONTE DE DADOS PARA APRENDIZAGEM  
DE UMA REDE NEURAL ARTIFICIAL**

Dissertação de mestrado apresentada e aprovada em 19 de outubro de 2009.

**Banca Examinadora:**

---

Prof. Dr. Luis Gonzaga Sales Vasconcelos  
Orientador

---

Prof. Dr. Romildo Pereira Brito  
Orientador

---

Prof. Dr. João Manzi  
Examinador

---

Dr. Marcio Henrique dos Santos Andrade  
Examinador

*A Fábio,  
Por todo amor, incentivo, dedicação e paciência em todos os  
momentos.*

## AGRADECIMENTOS

Ao prof. Luis Gonzaga, pela orientação, dedicação, paciência e conhecimentos compartilhados;

Ao meu amado pai (*in memoriam*), por todo o amor e ensinamentos nunca esquecidos;

A minha mãe, Laudeci, por ser a razão de tudo o que sou, por todo o amor, dedicação e incentivo em todos os momentos;

Ao prof. Romildo Brito, pela confiança.

Aos meus irmãos, Elizângela e Diêgo, que sempre me apoiaram e incentivaram;

A Claudia e Jailson, pela amizade e suporte nos momentos difíceis e, também, pelos prazerosos momentos de estudo em conjunto, sempre dividindo seus conhecimentos e experiências;

A Glêdes, Diógenes, Graziela que sempre me apoiaram e incentivaram durante todo o mestrado;

A todos que contribuíram de maneira direta ou indireta para a realização deste trabalho;

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro dado através da bolsa de mestrado.

*“Tudo vale à pena se a alma não é pequena.”*

*Fernando Pessoa.*

## RESUMO

A eletrólise do alumínio é um método eletroquímico que consiste em produzir metal, pela mediação de uma corrente elétrica e alumina dissolvida num banho de criolita a temperatura elevada. Atualmente, os modelos matemáticos que representam a dinâmica deste método sob a forma de balanços mássicos e energéticos são constituídos de equações diferenciais comuns acopladas, não-lineares e a coeficientes variáveis. Essa dissertação tem como objetivo desenvolver um gerador de sinais em uma cuba eletrolítica que servirá como fonte de dados para a aprendizagem de uma rede neural artificial, partindo de um modelo linear de ordem dez, com dezoito parâmetros, em função de  $dac$  e  $dma$ , que descreve o comportamento do processo de redução do alumínio. A modelagem e simulação computacional desse modelo permitiram a visualização e estudo de cada variável e parâmetro envolvido. Determinamos os parâmetros ótimos do modelo e efetuamos uma análise de sensibilidade dos parâmetros, o que nos indica a dependência entre eles e o impacto de cada parâmetro no modelo. Através de uma relação típica entre a resistência ( $R$ ) e a concentração de alumina ( $C$ ) foi possível desenvolver um modelo empírico e efetuando um ajuste nos parâmetros, verificamos que o modelo é adequado para representar  $R$  e  $C$ . O software desenvolvido poderá ser usado como alimentação de uma rede neural artificial que vai retornar os parâmetros para cada situação de operação, nos permitindo determinar novos valores de concentração de alumina, temperatura do banho e massa da crosta sem se fazer necessário a medição.

Palavras-chave: Eletrólise; Redução do alumínio; Redes neurais artificiais.

## **ABSTRACT**

The electrolysis of aluminum is an electrochemical method that consists of producing metal through the mediation of an electric current and alumina dissolved in a cryolite bath at high temperature. Currently, the mathematical models that represent the dynamics of this method under the form of mass balance and energy balance are constituted of common connected differential equations, nonlinear and the changeable coefficients. This paper aims to develop a generator of signals in an electrolytic tank that will serve as source of data for the learning of artificial neural network, through a linear model of order ten, with eighteen parameters, in function of  $dac$  and  $dma$ , that describes the behaviour of the process of reduction of aluminum. The modeling and simulation of this model allowed the visualization and study of each variable and parameter involved. We determine the optimal parameters of the model and effect an analysis of sensitivity of the parameters, that indicates the dependence between these parameters and the impact of each parameter in the model. Through a typical relation between the resistance ( $R$ ) and the alumina concentration ( $C$ ) it was possible to develop an empirical model and an adjustment of the parameters was done. We verified that the model is adjusted to represent  $R$  and  $C$ . Developed software can be used to feed the artificial neural network that will return the parameters for each operation situation, allowing to determine new values of concentration of alumina, temperature of the bath and mass of the crust with no measurement needed.

Key-words: Electrolyses; Aluminum reduction; Artificial neural network.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fluxo de reciclagem da lata de alumínio .....	19
Figura 2 - Fluxograma básico de uma refinaria .....	20
Figura 3 - Célula eletrolítica (processo Hall-Heroult).....	21
Figura 4 - Fluxograma de produção do alumínio .....	22
Figura 5 – Diagrama para o código de avaliação do modelo matemático.....	32
Figura 6 – Diagrama da determinação dos parâmetros .....	33
Figura 7 – Comparação entre os valores simulados e os valores experimentais (Nadeau, 1993) da variável de Saída C com degrau na taxa de alimentação de alumina, DMA, a -10% .....	35
Figura 8 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída T1 com degrau na taxa de alimentação de alumina, DMA, a -10% .....	36
Figura 9 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída M2 com degrau na taxa de alimentação de alumina, DMA, a -10% .....	36
Figura 10 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída C com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10% .....	37
Figura 11 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída T1 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10% .....	37
Figura 12 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída M2 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10% .....	38
Figura 13 – Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída C com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10% .....	39
Figura 14 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída T1 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10% .....	40
Figura 15 – Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída M2 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10% .....	40
Figura 16 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída C com degrau na taxa de alimentação da alumina, DMA, a -10% .....	41
Figura 17 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída T1 com degrau na taxa de alimentação da alumina, DMA, a -10% .....	41
Figura 18 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída M2 com degrau na taxa de alimentação da alumina, DMA, a -10% .....	42
Figura 19 - Diagrama esquemático de uma rede neural artificial com a resistência como entrada da rede e os parâmetros como saídas da rede.....	44
Figura 20 - Curva da Resistência da cuba em função da concentração de alumina .....	45
Figura 21 - Curva da Resistência versus log(C).....	45

Figura 22 - Curva da Resistência em função de $\log(C - 2)$ .....	46
Figura 23 - Curva da Resistência em função da concentração.....	46
Figura 24- Curva do Resíduo da Função em função do número de Iteração .....	47
Figura 25 - Curva da resistência em função da concentração utilizando o "cftool" .....	47

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Aplicações do Alumínio nos mais variados setores da indústria mundial .....	14
Tabela 2 - Principais constituintes da bauxita (em percentual).....	17
Tabela 3 - Ordem cronológica do alumínio.....	18
Tabela 4 - Especificações técnicas e condições operacionais da cuba.....	31
Tabela 5 - Valores dos Parâmetros Originais do Modelo e Valores dos Parâmetros Ótimos Simulados .....	38
Tabela 6 - Análise de Sensibilidade para os dados obtidos com DAC +10% .....	43
Tabela 7 - Análise de Sensibilidade para os dados obtidos com DMA -10% .....	43
Tabela 8 - Valores experimentais da Conc. de alumina e da Resistência da cuba .....	44
Tabela 9 – Valores dos parâmetros da função de regressão.....	46
Tabela 10 – Parâmetros com o valor de $a_4$ variável num intervalo de confiança de 95% .....	48
Tabela 11 - Análise de sensibilidade de cada parâmetro através do resíduo da função objetivo para um degrau na distância anodo-catodo (DAC) .....	62
Tabela 12 - Análise de sensibilidade de cada parâmetro através do resíduo da função objetivo para um degrau na taxa de alimentação da alumina (DMA). .....	63

## LISTA DE SÍMBOLOS

ABAL - Associação Brasileira do Alumínio

C - Concentração da alumina no banho (% mássica)

DAC, dac - Distância anodo-catodo (m)

DMA, dma - Taxa de alimentação da alumina (kg/s)

$M_1$  – Massa do banho (kg)

$M_2$  ou  $M_2$  - Massa da crosta (kg)

$M_3$  – Massa do metal (kg)

RNA - Rede Neural Artificial

R - Resistência da Cuba ( $\mu\Omega$ )

$R_{OP}$  - Ponto de operação da resistência ( $\mu\Omega$ )

$T_1$  ou  $T_1$  - Temperatura do banho ( $^{\circ}C$ )

$T_3$  – Temperatura do metal ( $^{\circ}C$ )

$T_2$  – Temperatura do banho ( $^{\circ}C$ )

$X_1$  – Massa de alumina dispersa no banho

$X_2$  – Massa de alumina depositada no banho

$z_1 - z_{27}$  - Variáveis de estado

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
<b>1.1.CARACTERÍSTICAS DO ALUMÍNIO.....</b>	<b>14</b>
<b>1.2.OBJETIVOS .....</b>	<b>16</b>
<b>1.2.1. GERAL.....</b>	<b>16</b>
<b>1.2.2. ESPECÍFICOS .....</b>	<b>16</b>
<b>2. O ALUMÍNIO.....</b>	<b>17</b>
<b>2.1.HISTÓRIA DO ALUMÍNIO.....</b>	<b>17</b>
<b>2.1.1. A RECICLAGEM DO ALUMÍNIO.....</b>	<b>18</b>
<b>2.2.PROCESSO DE PRODUÇÃO DO ALUMÍNIO .....</b>	<b>19</b>
<b>2.3.MODELAGEM MATEMÁTICA DE UMA CUBA ELETROLÍTICA.....</b>	<b>23</b>
<b>3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>24</b>
<b>4. METODOLOGIA .....</b>	<b>28</b>
<b>4.1.O MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>28</b>
<b>4.2.AVALIAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>32</b>
<b>4.3.DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS ÓTIMOS.....</b>	<b>33</b>
<b>4.4.ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO.....</b>	<b>34</b>
<b>5. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>35</b>
<b>5.1.AVALIAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO .....</b>	<b>35</b>
<b>5.2.DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS.....</b>	<b>38</b>
<b>5.3.ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DO MODELO.....</b>	<b>42</b>
<b>5.4.RELAÇÃO ENTRE A RESISTÊNCIA E A CONCENTRAÇÃO DE ALUMINA .....</b>	<b>44</b>
<b>6. CONCLUSÃO.....</b>	<b>49</b>
<b>7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>50</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>51</b>
<b>ANEXO A .....</b>	<b>54</b>
<b>ANEXO B .....</b>	<b>62</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O alumínio devido suas excelentes propriedades físico-químicas como resistência à corrosão, alta condutibilidade térmica/elétrica e a infinita reciclagem (sem perda das propriedades), apresenta uma ampla variedade de utilização, tornando-o o metal não-ferroso mais consumido por diversos setores produtivos da indústria mundial como mostra a Tabela 1, abaixo.

Tabela 1 - Aplicações do Alumínio nos mais variados setores da indústria mundial

Setor	Aplicação
Bens de Consumo	Acessórios de painéis, elementos decorativos de acabamento, bicicletas, utensílios domésticos, eletrodomésticos, mobiliário e obras de arte, elementos decorativos, acessórios de vestuário.
Automotivo e Transportes	Peças de motores, piso dos ônibus, revestimentos externos, tampas, degraus, portas, caixas de câmbio, carcaça de motores e rodas para automóveis, entre outros.
Construção Civil	Esquadrias (portas e janelas), forros, divisórias, acessórios para banheiros, telhas, fachadas, revestimentos externos.
Embalagens	Nos mais diversos tipos de embalagens rígidas, flexíveis, descartáveis; latas, etc.
Indústria Elétrica	Linhas de transmissão de energia, cabos isolados ou nus, para uso em redes de alta tensão, linhas de transmissão secundária e aplicações residenciais ou comerciais.
Máquinas e Equipamentos	Maquinário agrícola, itens de medicina hospitalar, mineração, chaparia, no revestimento de máquinas, etc.

### 1.1. Características do Alumínio

A combinação de propriedades faz do alumínio um dos mais versáteis materiais utilizados na engenharia, arquitetura e indústria em geral. Suas características permitem que ele tenha uma diversa gama de aplicações. Por isso, tal metal é um dos mais utilizados no mundo todo. Material leve, durável e bonito, o alumínio mostra uma excelente performance e propriedades superiores na maioria das aplicações. Produtos que utilizam o alumínio ganham também competitividade, em função dos inúmeros atributos que este metal incorpora como pode ser conferido a seguir (ABAL, 2007):

- *Resistência à corrosão* – quando o alumínio líquido é exposto à atmosfera, forma-se imediatamente uma fina camada de óxido, a qual protege o metal de oxidações posteriores. Essa auto proteção dá ao alumínio uma elevada resistência à corrosão. Essa propriedade facilita a conservação e a manutenção das obras, em produtos como portas, janelas, forros, telhas e revestimentos usados na construção civil, bem como em equipamentos, partes e

estruturas de veículos de qualquer porte. Nas embalagens é fator decisivo quanto à higienização e barreira à contaminação.

- *Peso específico* – a leveza é uma das principais características do alumínio. Tal característica é essencial na indústria de transportes, representando menor consumo de combustível, menor desgaste, maior eficiência e capacidade de carga. Para o setor de alimentos, traz funcionalidade e praticidade às embalagens por seu peso reduzido em relação a outros materiais.

- *Condutibilidade elétrica e térmica* - o alumínio é um excelente meio de transmissão de energia, seja elétrica ou térmica. Um condutor elétrico de alumínio pode conduzir tanta corrente quanto um condutor de cobre, que é duas vezes mais pesado e caro. Por isso, o alumínio é muito utilizado pelo setor de fios e cabos. Ele também oferece um bom ambiente de aquecimento e resfriamento. Trocadores e dissipadores de calor em alumínio são utilizados em larga escala nas indústrias alimentícia, automobilística, química, aeronáutica, petrolífera, etc.

- *Impermeabilidade e opacidade* - característica fundamental para embalagens de alumínio para alimentos e medicamentos. O alumínio não permite a passagem de umidade, oxigênio e luz. Essa propriedade faz com que o metal evite a deterioração de alimentos, remédios e outros produtos consumíveis.

- *Durabilidade* - o alumínio oferece uma excepcional resistência a agentes externos, intempéries, raios ultravioleta, abrasão e riscos, proporcionando elevada durabilidade, inclusive quando usado na orla marítima e em ambientes agressivos.

- *Beleza* - o aspecto externo do alumínio, além de conferir um bom acabamento apenas com sua aplicação pura, confere modernidade a qualquer aplicação por ser um material nobre, limpo e que não se deteriora com o passar do tempo. Por outro lado, o metal permite uma ampla gama de aplicações de tintas e outros acabamentos, mantendo sempre o aspecto original e permitindo soluções criativas de design.

*Reciclabilidade* – o alumínio possui a característica de ser infinitamente reciclável, sem perdas de suas propriedades físico-químicas.

Tal metal foi descoberto por Sir Humphrey Davy em 1809, tendo sido isolado pela primeira vez em 1825 por Hans Christian Oersted. Porém, apenas em 1886 foi desenvolvido um processo industrial econômico de redução, segundo a ABAL (2007).

A transformação do alumínio ocorre em um tipo de reator, denominado cuba eletrolítica, através da eletrólise da alumina que se encontra dissolvida no banho eletrolítico.

A eletrólise do alumínio é um método eletroquímico híbrido que consiste em produzir metal, pela mediação de uma corrente elétrica e alumina dissolvida num banho de criolita à temperatura elevada.

Segundo Pereira (2007), um melhor controle do processo implica no aumento do desempenho das cubas eletrolíticas, na redução das perdas energéticas, no aumento da eficiência dos reatores e, conseqüentemente, no aumento da produtividade da cuba.

Atualmente, os modelos matemáticos que representam a dinâmica deste processo, sob a forma de balanços mássicos e energéticos, são constituídos de equações diferenciais comuns desacopladas, não-lineares e a coeficientes variáveis, como mostra Nadeau (1993) em suas pesquisas.

## **1.2. Objetivos**

### ***1.2.1. Geral***

Desenvolver um gerador de sinais de uma cuba eletrolítica que servirá como fonte de dados para a aprendizagem de uma rede neural artificial a partir de um modelo linear de ordem dez, com dezoito parâmetros, em função de DAC e DMA, que descreve o comportamento do processo de redução do alumínio. Tendo como variáveis de saída: a concentração de alumina, a temperatura do banho e a massa da crosta.

### ***1.2.2. Específicos***

- Simular um modelo matemático linear de ordem dez que descreve a dinâmica do processo de redução do alumínio;
- Realizar um procedimento de otimização dos parâmetros do modelo;
- Realizar uma análise de sensibilidade;
- Estabelecer uma relação entre a resistência da cuba e a concentração de alumina;
- Propor um modelo que descreve a relação entre a resistência da cuba e a concentração de alumina.



## 2. O ALUMÍNIO

### 2.1. História do Alumínio

O alumínio devido suas excelentes propriedades físico-químicas, entre as quais se destacam o baixo peso específico, a resistência à corrosão, a alta condutibilidade térmica e elétrica e a infinita reciclagem, apresenta uma ampla variedade de utilização (embalagens para alimentos e medicamentos, materiais para a construção civil, peças para veículos, de bicicletas a naves espaciais, dentre outros), que o torna o metal não-ferroso mais consumido no mundo (ABAL, 2007). Além disso, é um dos elementos mais abundantes da crosta terrestre e de acordo com a Associação Brasileira do Alumínio, sua produção é superior ao que é produzido com todos os outros metais não-ferrosos.

O alumínio, apesar de ser o terceiro elemento mais abundante na crosta terrestre (ABAL, 2005), o metal puro não é encontrado na natureza em sua forma elementar devido a sua forte afinidade com o oxigênio (Mackenzie, 2003). É ainda, o metal mais jovem usado em escala industrial. O minério industrial mais importante é a bauxita, com um teor de óxido de alumínio entre 40% e 60%, como poderemos ver mais adiante na Tabela 1.

A Bauxita é um mineral que ocorre naturalmente, sendo um material heterogêneo, composto principalmente de um ou mais hidróxidos de alumínio, e várias misturas de sílica, óxido de ferro, dióxido de titânio, silicato de alumínio e outras impurezas em quantidades menores (Anderson, 1998). A Tabela 2, abaixo, mostra o percentual dos principais compostos constituintes da bauxita, em várias partes do mundo.

Tabela 2 - Principais constituintes da bauxita (em percentual)

Países	% de $\text{Al}_2\text{O}_3$	% de $\text{SiO}_2$	% de $\text{Fe}_2\text{O}_3$
Jamaica	45-49	0,8-8	17-22
Suriname e Guiana	55-60	2-5	< 3
Brasil	55	3,5	11
Austrália	53-58	4-7	12
Guiné	57-60	< 1	2-4

Fonte: TOTTEN, G. E.; MACKENZIE, D. S., 2003.

Mesmo utilizado milênios antes de Cristo, o alumínio começou a ser produzido comercialmente há cerca de 150 anos. Sua produção atual supera a soma de todos os outros metais não-ferrosos. Esses dados já mostram a importância do alumínio para a nossa sociedade. Antes de ser descoberto como metal isolado, o alumínio acompanhou a evolução das civilizações.

O processo percorrido até conhecermos o alumínio na sua forma atual foi longo, como mostra a Tabela 3, abaixo.

Tabela 3 - Ordem cronológica do alumínio

6.000 a.C.	Os Persas fabricaram potes e recipientes de argila que continham óxido de alumínio ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ).
3.000 a.C.	Argilas com alumina eram utilizadas por povos antigos do Egito e Babilônia para a fabricação de cosméticos, medicamentos e corantes de tecidos.
1809	Primeira obtenção do que até então mais se aproximava do alumínio. Humphrey Davy foi o mentor da descoberta, fundindo ferro na presença de alumina.
1821	O francês P. Berthier descobre um minério avermelhado, que contém 52% de óxido de alumínio, perto da aldeia de Lês Baux, no sul da França. É a descoberta da bauxita, o minério mais comum de alumínio.
1825	O físico dinamarquês Hans Christian Oersted consegue isolar o alumínio de outra maneira, a partir do cloreto de alumínio na forma como é conhecido hoje.
1854	Primeira obtenção do alumínio por via química, realizada por Henry Saint-Claire Deville.
1855	Deville mostra, na exposição de Paris, o primeiro lingote de um metal muito mais leve que o ferro.
1886	Torna-se público o processo de obtenção de alumínio por meio da redução eletrolítica da alumina dissolvida em banho fundido de criolita. Esse procedimento foi desenvolvido separadamente pelo norte-americano Charles Martin Hall e pelo francês Paul Louis Toussaint Héroult, que o descobriram e o patentearam quase simultaneamente. Esse processo ficou conhecido como Hall-Héroult e foi o que permitiu o estabelecimento da indústria global do alumínio.
1888	Alumina produzida comercialmente através do Processo Bayer.
1945	Na cidade de Ouro Preto (MG) é produzido o primeiro lingote de alumínio do Hemisfério Sul, na fábrica da Elquisa.

Como visto na Tabela 2, acima, apenas em 1886 foi desenvolvido um processo industrial econômico de redução. Tal processo conhecido como Hall-Héroult é usado até a atualidade.

Hoje, os Estados Unidos e o Canadá são os maiores produtores mundiais de alumínio. Entretanto, nenhum deles possui jazidas de bauxita em seu território, dependendo exclusivamente da importação. Segundo a ABAL, o Brasil possui a terceira maior reserva de bauxita no mundo, localizada na região amazônica, perdendo apenas para Austrália e Guiné. Além da Amazônia, o alumínio pode ser encontrado no sudeste do Brasil, na região de Poços de Caldas (MG) e Cataguases (MG).

### **2.1.1. A Reciclagem do Alumínio**

O alumínio é um metal durável, que possui infinito potencial de reciclagem, usado na produção de ampla variedade de produtos, como: embalagens para alimentos e medicamentos, materiais para a construção civil, peças para veículos (de bicicletas a naves espaciais), entre outros.

A reciclagem do alumínio segue fluxos diferentes, de acordo com o tipo de sucata. As fases se modificam na coleta e no retorno da sucata ao mercado, dependendo do produto a ser reciclado. Veja abaixo a Figura 1 com o fluxo de reciclagem da lata de alumínio, que serve como referência para os demais produtos.

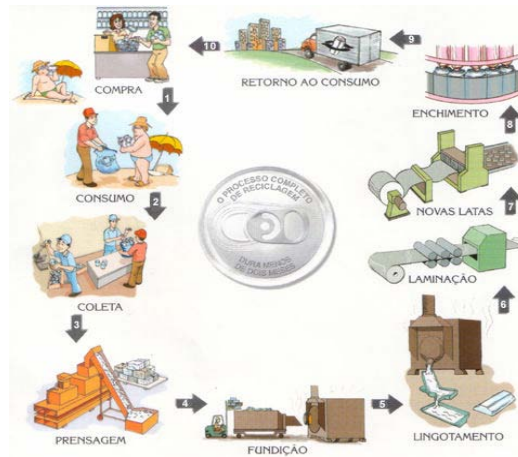


Figura 1 - Fluxo de reciclagem da lata de alumínio

Fonte: ABAL, disponível em <http://www.abal.org.br/reciclagem/fluxo.asp>

## 2.2. Processo de Produção do Alumínio

O alumínio é encontrado abundantemente na forma de óxido de alumínio ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) e suas reservas minerais são quase ilimitadas, segundo a ABAL (2007). Como vimos anteriormente, o principal minério para a produção de alumínio é a bauxita.

Toda a alumina produzida comercialmente da bauxita é obtida por um processo patenteado por Karl Josef Bayer em 1888, conhecido como *Processo Bayer*. Tal processo permite, por meio do refino da bauxita, que se obtenha o hidróxido de alumínio e/ou alumina.

A obtenção do alumínio a partir da bauxita se dá basicamente através de três etapas: mineração, refinaria e redução.

A mineração da bauxita, primeira etapa do processo, consta da remoção criteriosa da vegetação e do solo orgânico, de forma planejada para não degradar o meio ambiente. Após a extração, a bauxita passa por um processo de beneficiamento que vai desde a britagem até a secagem, a fim de reduzir o teor de sílica que possa estar contida no mineral, antes de ser enviada a refinaria onde se produz o óxido de alumina.

Na segunda etapa do processo, que ocorre na refinaria, a bauxita é transformada em alumina calcinada, que será utilizada no processo de Redução, como o principal insumo para a produção de alumínio.

A alumina é um pó branco fino, seco com a consistência semelhante a uma areia fina. Grande parte de sua produção, cerca de 90%, é destinada à obtenção de alumínio metálico,

apesar de possuir uma vasta aplicabilidade nos mais variados graus de pureza e composição. Exemplos de aplicação é o uso como abrasivo, material refratário, cerâmica, corantes, massa de polimento, tintas, indústria de vidros, pinturas metálicas entre outros (ANDRADE, 2000).

As principais fases da produção da alumina desde a mineração até a saída do produto são: moagem, digestão, filtração/evaporação, precipitação e calcinação. Tais operações possuem um fluxograma de certa complexidade, que pode ser resumido em um circuito simples, conforme a Figura 2, abaixo.

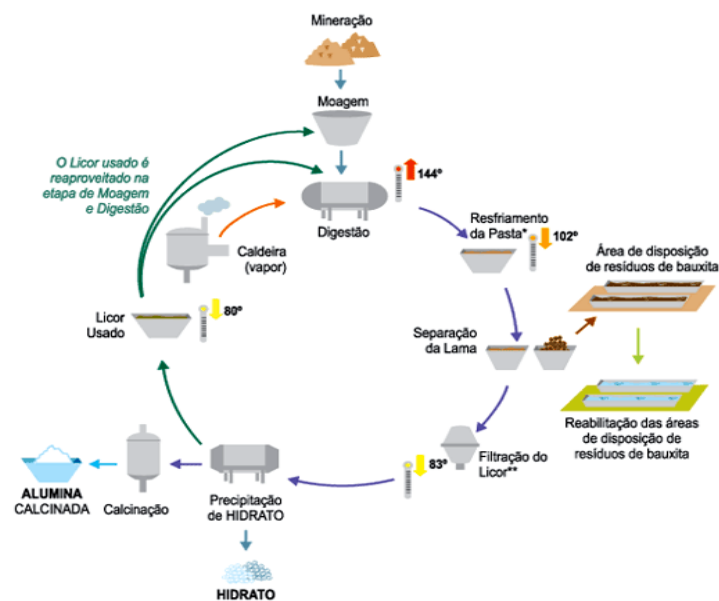


Figura 2 - Fluxograma básico de uma refinaria

Fonte: [http://www.abal.org.br/aluminio/producao\\_alupri.asp#mineracao](http://www.abal.org.br/aluminio/producao_alupri.asp#mineracao)

A bauxita é moída e misturada a uma solução de soda cáustica que a transforma em uma pasta aquecida sobre pressão. Depois de aquecida, recebe uma nova adição de soda cáustica que a fará se dissolver formando uma solução que passa pelos processos de sedimentação e filtração para que se eliminem todas as impurezas.

Essa solução, livre de todas as impurezas, está pronta para que dela se extraia apenas a alumina e isso é feito através do Processo Bayer, o mais utilizado pela indústria do alumínio.

Os cristais são secados e calcinados para eliminar a água, sendo o pó branco de alumina pura enviado à Redução para obtenção do alumínio metálico, realizado em cubas eletrolíticas a altas temperaturas, através de eletrólise, conforme mostra a equação abaixo, tal procedimento é o conhecido como processo Hall-Héroult.



Da eletrólise da molécula de alumina é produzido alumínio metálico e oxigênio gasoso, sendo que o primeiro se deposita no pólo negativo (cátodo) e o segundo se dirige para

o pólo positivo (ânodo) onde se combina com o carbono deste material formando moléculas de dióxido de carbono.

A cuba eletrolítica, como mostra a Figura 3, é constituída de várias componentes físicas. O ânodo e o cátodo são os eletrodos que permitem a circulação da corrente elétrica, que é da ordem das dezenas ou centenas de milhares de ampères. A corrente elétrica circula do ânodo (pólo positivo) para o cátodo (pólo negativo) e pode ser considerada com intensidade constante. O ânodo é imerso no banho (eletrólito em fusão no qual se encontram a alumina e alguns aditivos) de maneira a assegurar uma superfície de contato grande o suficiente entre o carbono e o eletrólito. A corrente passa através do banho, que pela sua composição química favorece a redução eletrolítica da alumina.

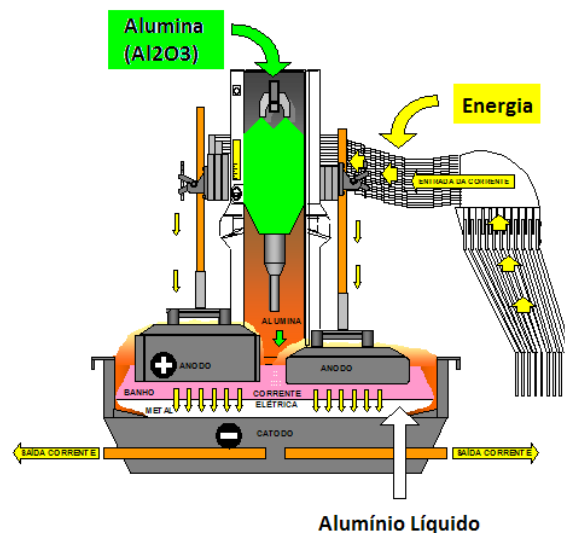


Figura 3 - Célula eletrolítica (processo Hall-Heroult)  
Fonte: modificação de DRUMOND, 2007.

Além disso, o banho em contato com as paredes laterais favorece a solidificação deste formando a crosta, que age como um isolante térmico no tanque e como agente de proteção contra a deterioração das paredes de carbono. Finalmente, pela sua densidade o alumínio produzido deposita-se sobre o cátodo de carbono e age como um equipotencial elétrico devido à sua grande condutividade elétrica. A tensão de uma cuba varia de 4 a 5 volts. A diferença de tensão é necessária para vencer resistências do circuito e gerar calor para manter o eletrólito em fusão (PEREIRA, 2007).

A Figura 4, abaixo, mostra o fluxograma de produção do alumínio, da mineração até o produto final.



Figura 4 - Fluxograma de produção do alumínio

Fonte:

Devido à grande complexidade do processo eletroquímico, vários estudos foram realizados com o objetivo de melhorar a sua compreensão e o seu controle. A eletroquímica, a modelagem, a simulação e a transferência de calor contribuíram fortemente para a evolução da compreensão do processo (Nadeau, 1993). E de acordo com vários pesquisadores, o bom funcionamento de uma cuba eletrolítica pode ser afetado através da temperatura do banho, concentração de alumina, massa da crosta e, conseqüentemente, da resistência.

Segundo Meghlaoui et.al. (1997) o controle da cuba é baseado essencialmente em um balanço de energia e um balanço de massa. Um bom balanço de energia ajuda a estabilizar a temperatura do banho e a formação da crosta. A crosta é uma fina camada de eletrólito que se solidifica em torno do cátodo do carbono, como já foi mencionado anteriormente. Um balanço de energia estável é exigido porque, quando instável, pode causar o aumento demasiado ou o derretimento da crosta. Por outro lado, um bom balanço material ajuda a manter a concentração da alumina próxima dos valores ótimos. As concentrações demasiadamente elevadas podem conduzir à formação de “lama”, uma pasta indissolúvel de difícil remoção e que pode afetar a distribuição de corrente no cátodo e perturbar a operação da cuba. Ao contrário, concentrações demasiadamente baixas podem provocar um efeito ânodo, o que não é desejável no processo; esse efeito é caracterizado por um acúmulo rápido de material sob o ânodo, aumentando a resistência da cuba e, conseqüentemente, a tensão, que pode variar de 20 a 50 V. Tal efeito causa um alto consumo de energia, um aumento na temperatura global da cuba e a emissão de gases prejudiciais, como monóxido de carbono e tetrafluoreto de carbono. Isto mostra a importância de controlar tanto a resistência da cuba quanto a concentração de alumina.

### **2.3. Modelagem Matemática de Uma Cuba Eletrolítica**

Desde os anos 70, o interesse em estudar o comportamento dinâmico das cubas vem crescendo, e muitos modelos ao longo desses anos foram criados e alguns aprimorados. Segundo Nadeau (1993), um dos modelos mais promissores foi o desenvolvido por Tikasz, Bui e Protocnik (1992). Trata-se de um modelo não-linear de ordem 18 que serve de base para um simulador construído para o estudo do comportamento dinâmico e controle da cuba, e que pode servir para tomada de decisões e supervisão. Ainda segundo Nadeau (1993), os autores apóiam que o balanço mássico da alumina é uma parte sensível do modelo, uma vez que uma baixa concentração de alumina no banho provoca o efeito anódico, que não é desejável no processo, já que isso pode acarretar uma queda de tensão de até 50 volts. Tal efeito gera um alto consumo de energia, um aumento na temperatura global do tanque e muitos outros fenômenos de natureza perturbante.

Duas variáveis importantes no modelo são: distância anodo-catodo e taxa de alimentação da alumina. Como foi dito anteriormente, esta última pode evitar o efeito anódico. A distância anodo-catodo em uma célula de eletrólise é de cerca de 4 a 6 cm, segundo Pereira (2007). Tal distância influencia a concentração de alumina dentro do banho.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Tikasz, Bui e Potocnik (1992), desenvolveram um modelo não-linear de ordem 18 que serve de base a um simulador construído para o estudo do comportamento dinâmico e controle do tanque. O simulador pode servir de instrumento de decisões e de supervisão para o tanque. Propuseram seguidamente uma versão simplificada do modelo onde agrupam as componentes do tanque que possuem propriedades similares como as seções superiores e inferiores da crosta, e exclui as componentes que têm pouca importância no contexto de uma dinâmica em curto prazo chamada cátodo de carbono. Tiveram êxito em reduzir o número de componente a seis em três fases distintas de alumina: o banho, a crosta e o metal. A dinâmica, que provém de balanços mássicos e energéticos, é representada pelas nove equações diferenciais seguintes:

$$\frac{dX_1}{dt} = dma - k_1X_1(C_s - C) - k_3X_1 \quad (3.1)$$

$$\frac{dX_2}{dt} = k_3X_1 - k_2X_2(C_s - C) \quad (3.2)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{k_1X_1(C_s - C) - k_2X_2(C_s - C) - k_6k_5I}{M_1} \quad (3.3)$$

$$\frac{dM_1}{dt} = dma - k_6k_5I - \frac{dM_2}{dt} \quad (3.4)$$

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{Q - Q_A - Q_K - Q_{FI} - Q_{HA}}{M_1C_{p1}} \quad (3.5)$$

$$\frac{dM_2}{dt} = \frac{Q_F - Q_{F1} - Q_{F2}}{H_F + (C_{p1}(T_1 - T_F) + C_{p2}(T_2 - T_F))/2 + C_{p2}(T_F - T_2)} \quad (3.6)$$

$$\frac{dT_2}{dt} = \frac{Q_F - Q_S}{M_2C_{p2}} \quad (3.7)$$

$$\frac{dM_3}{dt} = k_5I - \Delta m_t \quad (3.8)$$

$$\frac{dT_3}{dt} = \frac{Q_K - Q_B - Q_{F2} + k_5IC_{p3}(T_1 - T_3)}{M_3C_{p3}} \quad (3.9)$$

Onde as variáveis de saída são as seguintes:

$X_1$ : massa de alumina dispersada no banho;

$X_2$ : massa de alumina depositada;

$C$ : concentração de alumina dissolvida no banho;

$M_1$  : massa do banho;

$T_1$  : temperatura do banho;

$M_2$  : massa da crosta;

$T_2$  : temperatura da crosta;



$M_3$ : massa do metal;

$T_3$ : temperatura do metal.

Tabsh *et al.* (1995) desenvolveu um modelo transiente com parâmetros concentrados, dividido em duas partes. A primeira parte foi um modelo de processo e a segunda foi um modelo de controle. O modelo de processo usou 13 equações diferenciais: um balanço de calor, 11 balanços de massa de cada espécie e uma equação relacionada a distância anodo-catodo. O modelo de controle simulou o procedimento de operação e a dinâmica de controle da célula.

Tang *et al.* (1998) discutiu um modelo dinâmico que tem sido desenvolvido desde 1970. O modelo simula o processo químico e físico de uma cuba de redução através da solução de equações de balanço de massa e energia. A versão mais recente do modelo simula eventos de falhas, incluindo o movimento do lastro de metal, modificação do anodo e efeito anódico. A estratégia de controle Celtrol é usada para simular as ações de controle. As entradas do modelo foram a tensão da cuba e a concentração de alumina, enquanto a temperatura do banho, a razão do banho e o superaquecimento foram as variáveis de saída. A comparação das saídas do modelo e os valores medidos em um período de 19 horas apresentaram um erro de 0,5% para temperatura, 1,4% para a razão de banho, e 7,9% para o superaquecimento. A necessidade de medição de tensão e concentração de alumina limita a utilidade do modelo.

Wright (1993) também desenvolveu um modelo transiente com parâmetros concentrados. Este modelo inclui um submodelo para transferência de calor, tensão e balanço de massa. A estratégia de controle Celtrol foi usada para determinar as ações de controle. A saída do modelo foi comparada com medições na tensão da célula, concentração de alumina e temperatura. O modelo apresentou resultados satisfatórios em um período de 24 horas. No entanto, ajuste no coeficiente de transferência de calor foi necessário.

Taylor *et al.* (1996) desenvolveu um modelo transiente com parâmetros distribuídos, enfocando o balanço térmico na célula de redução. Em seu trabalho, o fluido foi modelado com três fases distintas: o eletrólito, o alumínio e a lama. A região da célula foi dividida em 45 tanques interconectados. Um sistema em estado estacionário foi usado para determinar o fluxo entre os tanques. Uma malha unidimensional foi usada para resolver a condução de calor entre o fluido e os materiais sólidos.

Salt (1990) discute um modelo para controle da composição do banho. O autor estabelece que o controle de razão entre o fluoreto de sódio e o fluoreto de alumínio é

determinado por vários fatores. Isto inclui a taxa de sódio absorvido nas paredes de carbono, o conteúdo de sódio da alumina, a temperatura do banho, a evolução da taxa de fluoreto de alumínio e a quantidade de fluoreto de alumínio que retorna para o sistema de absorção. Uma combinação de tendência histórica, temperatura do banho obtida na tomada de amostra para a determinação da razão do banho e o conhecimento da composição da alumina são usadas para determinar as quantidades necessárias de fluoreto de sódio e fluoreto de alumínio a serem adicionadas.

Entner (1992 e 1993) também desenvolveu um modelo que pode ser usado para reduzir oscilações na concentração de fluoreto de Alumínio ( $\text{AlF}_3$ ). O atraso de tempo entre as adições e a reação do banho é citado como causadores desta variabilidade. O modelo de Entner usa análise de regressão e uma concentração média de  $\text{AlF}_3$  em um intervalo de tempo, que é ajustado para compensar o atraso. Este modelo mostrou-se eficaz na redução da variabilidade da concentração de  $\text{AlF}_3$ . Entner, também, discutiu uma extensão do modelo para redução das oscilações de temperatura.

Sorheim e Borg (1989) desenvolveram um modelo de espaço de estado não-linear com um filtro Kalman Extendido. O modelo tem 18 variáveis de estado. No modelo inclui-se a concentração de fluoreto e alumina, massa das laterais, temperatura do leito de metal e do isolamento. Uma dificuldade encontrada foi o número de medições disponíveis. A Resistência da célula é obtida a cada 5 minutos enquanto a temperatura do banho é disponível a cada 8 horas e o conteúdo de fluoreto a cada 24 horas.

Jie *et al.* (1994) desenvolveu um filtro Kalman extendido adaptativo. O filtro é similar ao filtro Kalman extendido. A diferença é que os coeficientes do filtro são variáveis ao longo do tempo, permitindo o modelo adaptar a variações do comportamento do sistema.

Meghlaoui *et al.* (1998) construiu redes neurais artificiais para um esquema de controle preditivo para a célula eletrolítica de alumínio. A vantagem de se usar redes neurais no controle preditivo é que são muito robustas com distúrbios aleatórios na alimentação da alumina, o que é claramente uma vantagem no contexto de aplicações industriais. Outra vantagem é a aprendizagem on-line.

Rolland *et al.* (1991) desenvolveu um sistema especialista para o controle e supervisão da célula de alumínio. O objetivo do sistema foi tratar de situações diversas e auxiliar os operadores na solução de problemas complexos e incrementar a produtividade do processo.

Zeng e Li (2006) investigaram o sistema de diagnóstico de falhas do ânodo na redução de alumínio. Com base na análise de espectro da frequência, um filtro digital foi projetado para o tratamento dos sinais da amostragem. O sistema de diagnóstico para o estado de

trabalho do ânodo foi desenvolvido utilizando matemática Fuzzy. O sistema incluiu quatro módulos: a amostragem e o tratamento do sinal, o módulo da predição do efeito de ânodo, distinção do defeito do ânodo e a base de dados. Para a predição do efeito anodo, uma nova metodologia foi usada, o reconhecimento distorcido por meio da combinação de tensão da pilha com a distância anodo-catodo.

Berezin *et. al.* desenvolveram uma rede neural classificadora de ruídos para a célula de redução de alumínio a ser usado em sistemas de controle de produção da eletrólise. Esse tipo de rede permite distinguir os ruídos causados por distúrbios tecnológicos, fazendo isso revela o último em uma fase inicial de sua emergência.

Bui *et. al.* (1993) analisaram as ações de controle resultantes e a resposta dinâmica a uma mudança de etapa na temperatura do alvo do metal líquido em uma carcaça de fornalha de alumínio.

Pereira (2007) avaliou o uso de técnicas “*não-tradicionais*” no controle da composição química do banho, visando o aumento do desempenho das cubas. Estas metodologias “*não-tradicionais*” consistem na utilização de base de dados de ratio e temperatura distinta da atual e duração do ciclo de acerto da composição química do banho variado. Diferentes estratégias de controle foram testadas a fim de se identificar o desempenho de cada uma das configurações propostas.

Nadeau (1993) partiu do modelo não-linear de ordem nove de Tikasz, Bui e Potocnik (1992) e propôs construir um modelo linear da forma  $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$ , que serve de instrumento para estudar a dinâmica do método, por intermédio das técnicas de análise de sistemas lineares. Com isso, a partir do modelo não-linear de ordem nove (Tikasz *et. al.*, 1992) construiu um simulador numérico e o utilizou como substituto do método real, desenvolvendo modelos lineares aplicáveis aos arredores de um ponto de operação nominal da cuba eletrolítica. Obtendo uma boa representatividade sob condições normais de operação.

## 4. METODOLOGIA

### 4.1. O Modelo Matemático

Para o desenvolvimento deste trabalho, utilizamos o modelo linear de ordem dez (Nadeau, 1993), em função das dez variáveis de estado ( $z_1$  a  $z_{10}$ ) e de DAC e DMA. O modelo apresenta 18 parâmetros. É um modelo linear relativamente simples e que representa satisfatoriamente a dinâmica do processo segundo Nadeau (1993). Abaixo segue a descrição detalhada do procedimento de obtenção de tal modelo.

- O método utilizado para a aproximação linear do modelo não-linear de ordem nove de Tikasz *et. al.* foi o de identificação paramétrica das funções de transferência. Este método permite a obtenção de funções de transferência de ordem  $\leq 2$ , com ou sem tempo-morto por intermédio de dados que provêm diretamente do processo ou de uma simulação numérica.

- A partir das funções de transferência obtidas deduz-se a matriz de evolução dinâmica A, a matriz de aplicação de controle B, a matriz de observação C e a matriz de acoplamento entrada/saída D, que vão formar o modelo linear.

- Escolhe-se uma variável de estado como saída e uma variável de controle como entrada para ligar a função de transferência desejada.

- Provoca-se um degrau na variável de controle e traça o comportamento da variável de estado em resposta a esta. Identifica-se a forma desta resposta, de maneira a escolher o tipo de função de transferência a ser associada. De acordo com este tipo, os parâmetros a serem identificados podem ser uma combinação dos seguintes coeficientes: constante de tempo ( $\tau$ ), ganho (K), constante de velocidade ( $K_v$ ), coeficiente de amortização ( $\zeta$ ) e tempo-morto (G) do sistema. Dessa forma, os modelos lineares obtidos por identificação paramétrica das funções de transferência têm cinco configurações diferentes, algumas com tempo-morto, são elas: Configuração Integral, de Primeira Ordem, Proporcional + Integral, de Primeira Ordem + Integral e de Segunda Ordem. Detalhes da construção das funções de transferência são apresentados no anexo A, extraído de Nadeau (1993).

- Após a identificação, realizou-se uma validação parcial do modelo linear obtido através da comparação gráfica das suas saídas com as do simulador.

- ✓ Primeiro, foi construído um modelo de ordem vinte e dois, que se trata de uma formulação restrita, ou seja, sem tempo-morto.

✓ Segundo, incluiu o tempo-morto do sistema no interior do modelo, de maneira a obter uma formulação completa, determinando um modelo de ordem vinte e seis, em um estado perfeitamente estacionário.

✓ E finalmente, determinou-se um modelo linear de ordem vinte e sete, que se mostrou o mais representativo do modelo não-linear inicial, uma vez que se levou em conta o estado pseudo-estacionário.

Segue, abaixo, o conjunto de equações diferenciais que formam o modelo de ordem vinte e sete.

$$\frac{dz_1}{dt} = -0.61x10^{-3}z_1(t) - 0.30x10^{-1}dac'(t) \quad (4.1)$$

$$\frac{dz_2}{dt} = 1.000x10^{-6} + 0.1646x10^{-1}dma'(t) \quad (4.2)$$

$$\frac{dz_3}{dt} = z_4(t) \quad (4.3)$$

$$\frac{dz_4}{dt} = -0.80x10^{-3}z_4(t) - 0.16x10^{-6}z_3(t) - 0.37x10^{-4}dac'(t) \quad (4.4)$$

$$\frac{dz_5}{dt} = 4.444x10^{-6} + 0.2083dma'(t) \quad (4.5)$$

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{dz_7}{dt} = -0.11x10^{-2}z_7(t) - 0.23x10^{-6}z_6(t) + 0.27x10^{-7}dac'(t) \quad (4.7)$$

$$\frac{dz_8}{dt} = -0.10x10^{-2}z_8(t) - 0.70138x10^{-3}dma'(t) \quad (4.8)$$

$$\frac{dz_9}{dt} = -2.222x10^{-9} + 0.3507x10^{-3}dma'(t) \quad (4.9)$$

$$\frac{dz_{10}}{dt} = -0.10x10^{-2}z_{10}(t) - 1.1dac'(t) \quad (4.10)$$

$$\frac{dz_{11}}{dt} = 4.111x10^{-5} + 0.53dac'(t) \quad (4.11)$$

$$\frac{dz_{12}}{dt} = 0.8838 dma'(t) \quad (4.12)$$

$$\frac{dz_{13}}{dt} = -0.53x10^{-3}z_{13}(t) + 0.52 dac'(t) \quad (4.13)$$

$$\frac{dz_{14}}{dt} = -0.40x10^{-3}z_{14}(t) - 0.23503 dma'(t) \quad (4.14)$$

$$\frac{dz_{15}}{dt} = -1.944x10^{-5} + 0.1725x10^{-1} dma'(t) \quad (4.15)$$

$$\frac{dz_{16}}{dt} = -0.10x10^{-2}z_{16}(t) + 1.1 dac'(t) \quad (4.16)$$

$$\frac{dz_{17}}{dt} = -4,111x10^{-5} - 0.53 dac'(t) \quad (4.17)$$

$$\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t) \quad (4.18)$$

$$\frac{dz_{19}}{dt} = -0.452x10^{-3}z_{19}(t) - 0.5101x10^{-7}z_{18}(t) + 0.1466x10^{-3}dma'(t) \quad (4.19)$$

$$\frac{dz_{20}}{dt} = -0.53x10^{-3}z_{20}(t) - 0.12 dac'(t) \quad (4.20)$$

$$\frac{dz_{21}}{dt} = 4.056 \times 10^{-6} + 0.58 \times 10^{-1} dac'(t) \quad (4.21)$$

$$\frac{dz_{22}}{dt} = z_{23}(t) \quad (4.22)$$

$$\frac{dz_{23}}{dt} = -0.3537 \times 10^{-3} z_{23}(t) - 0.3127 \times 10^{-7} z_{22}(t) - 0.10393 \times 10^{-4} dma'(t) \quad (4.23)$$

$$\frac{dz_{24}}{dt} = -0.53 \times 10^{-3} z_{24}(t) - 0.49 dac'(t) \quad (4.24)$$

$$\frac{dz_{25}}{dt} = -0.40 \times 10^{-3} z_{25}(t) - 0.22292 dma'(t) \quad (4.25)$$

$$\frac{dz_{26}}{dt} = -2.139 \times 10^{-5} + 0.1624 \times 10^{-1} dma'(t) \quad (4.26)$$

$$\frac{dz_{27}}{dt} = K_5 I \quad (4.27)$$

Como dito anteriormente, esse modelo foi obtido através de uma aproximação linear do modelo não-linear de Tikasz *et. al.*, através da identificação paramétrica das funções de transferência, do tipo de segunda ordem. A identificação dos parâmetros foi realizada pelo método de Smith, que é válido para sistemas sob ou sobre amortecidos. Foi o método que se demonstrou mais adequado e rápido a necessidade do processo, segundo Nadeau (1993).

Os limites de aplicabilidade do modelo linear de ordem vinte e sete podem ser estabelecidos pela curva da resistência da cuba (R) em função da concentração de alumina no banho (C). Com efeito, a função  $R = f(C)$  possui a vantagem de demonstrar simultaneamente o impacto das duas variáveis de controle no método. Assim, as variações associadas à distância ânodo-cátodo (DAC) manifestam-se através da resistência do tanque e as variações na alimentação de alumina (DMA) manifesta-se através da concentração de alumina no banho. Contudo, a resistência não depende unicamente da concentração de alumina, mas também as variáveis de controle e de outras variáveis como a temperatura do banho e a massa da crosta, ou seja,  $R = f(C)$  é uma aproximação de  $R = f(C, T1, M2, DAC, DMA)$ .

Finalmente, conclui-se que o modelo linear de ordem vinte e sete assegura uma representação adequada do modelo não-linear inicial, para as variáveis R, C e T1. Além disso, já que o modelo identificado é desacoplado, pode-se reduzir sua ordem a dez (retirando simplesmente as variáveis que não têm influência direta no controle do processo), de maneira a conservar unicamente as variáveis que têm uma influência direta sobre a resistência da cuba, ou seja, C, T1 e M2. Levando em conta essas considerações Nadeau (1993) conseguiu obter um modelo linear de ordem dez de grande simplicidade, como mostram as equações diferenciais abaixo:

$$\frac{dz_6}{dt} = z_7(t) \quad (4.28)$$

$$\frac{dz_7}{dt} = -0.11 \times 10^{-2} z_7(t) - 0.23 \times 10^{-6} z_6(t) + 0.27 \times 10^{-7} dac'(t) \quad (4.29)$$

$$\frac{dz_9}{dt} = -2.222 \times 10^{-9} + 0.3507 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (4.30)$$

$$\frac{dz_{13}}{dt} = -0.53 \times 10^{-3} z_{13}(t) + 0.52 dac'(t) \quad (4.31)$$

$$\frac{dz_{14}}{dt} = -0.40 \times 10^{-3} z_{14}(t) - 0.23503 dma'(t) \quad (4.32)$$

$$\frac{dz_{15}}{dt} = -1.944 \times 10^{-5} + 0.1725 \times 10^{-1} dma'(t) \quad (4.33)$$

$$\frac{dz_{16}}{dt} = -0.10 \times 10^{-2} z_{16}(t) + 1.1 dac'(t) \quad (4.34)$$

$$\frac{dz_{17}}{dt} = -4.111 \times 10^{-5} - 0.53 dac'(t) \quad (4.35)$$

$$\frac{dz_{18}}{dt} = z_{19}(t) \quad (4.36)$$

$$\frac{dz_{19}}{dt} = -0.452 \times 10^{-3} z_{19}(t) - 0.5107 \times 10^{-7} z_{18}(t) + 0.1466 \times 10^{-3} dma'(t) \quad (4.37)$$

Assim, como variáveis de saída, temos:

$$C'(t) = z_6(t) + z_9(t) \quad (4.38)$$

$$T1'(t) = z_{13}(t) + z_{14}(t) + z_{15}(t) \quad (4.39)$$

$$M2'(t) = z_{16}(t) + z_{17}(t) + z_{18}(t) \quad (4.40)$$

O uso da ', significa que as variáveis C, T1 e M2 são variáveis desvio em relação ao estado estacionário.

O modelo linear de ordem dez possui o mesmo limite de aplicabilidade estabelecido para o modelo de ordem vinte e sete. Para tal, devem-se considerar certos parâmetros constantes, como mostra a Tabela 4, abaixo:

Tabela 4 - Especificações técnicas e condições operacionais da cuba

Concentração de Alumina (C)	4% em massa
Massa da Crosta (M2)	1276 kg
Temperatura do banho (T1)	980,6°C
Distância anodo-catodo (DAC)	4,4 cm
Quantidade de alumina injetada a cada quatro minutos	2,9 kg
Duração de uma alimentação	10 s
Taxa de alimentação de alumina (DMA)	0.01208 kg/s
Tensão	5,2 V
Resistência	36.6 $\mu\Omega$

Fonte: Nadeau, 1993.

## 4.2. Avaliação do Modelo Matemático

Inicialmente, simulamos o modelo matemático descrito na seção 4.1 e comparamos graficamente os resultados obtidos com os apresentados em Nadeau (1993), analisando-os fisicamente.

Para a simulação, utilizamos o software Matlab R2009a, através de *arquivos.m*, como segue abaixo:

- Um arquivo denominado ***modelo.m***, contendo o modelo matemático, isto é, contendo as dez equações diferenciais com os 18 parâmetros fixos;
- Outro arquivo nomeado ***principalDAC.m***, contendo:
  - ✓ Um vetor com a condição inicial;
  - ✓ O degrau positivo de 10% na distância anodo-catodo ( $DAC = +10\%$ );
  - ✓ As informações sobre o tempo, que foi de 6 horas;
  - ✓ A rotina “ode45”, resolve as equações usando o método de Runge-Kutta, nos fornece as respostas das variáveis de saída, a partir de uma estimativa inicial.

O mesmo procedimento foi realizado para um degrau negativo na taxa de alimentação da alumina ( $DMA = -10\%$ ).

Após, a simulação do modelo, comparamos os resultados com os resultados obtidos por Nadeau (1993), fazendo uma análise física de cada variável de saída. Um diagrama esquemático do procedimento de avaliação realizado é mostrado na Figura 7, abaixo.

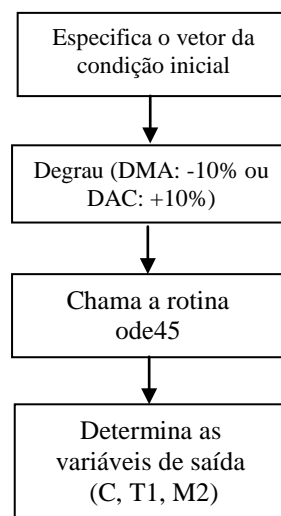


Figura 5 – Diagrama para o código de avaliação do modelo matemático



### 4.3. Determinação dos Parâmetros Ótimos

Após simular o modelo descrito na seção 4.1, calculamos os novos valores dos parâmetros através de um procedimento de otimização utilizando o *Optimization Toolbox*<sup>TM</sup> 4 do Matlab R2009a, que inclui funções para muitos tipos de otimização como, por exemplo, mínimos quadrados para funções não-lineares. Dentro das funções de referencia desse toolbox está a *lsqnonlin*, que é usada para executar um ajuste por mínimos quadrados, usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt. Um arquivo ***principal*** contém os valores iniciais dos parâmetros e a rotina ***lsqnonlin***, que através da condição inicial, calcula o valor das equações diferenciais e a função objetivo nos dando os valores dos parâmetros ótimos, utilizando o método de Levenberg-Marquardt. As funções objetivo foram:

$$Fob1 = Fob1 + [C(i) - Cdif(i)]^2; \quad (4.41)$$

$$Fob2 = Fob2 + [T1(i) - T1dif(i)]^2; \quad (4.42)$$

$$Fob3 = Fob3 + [M2(i) - M2dif(i)]^2. \quad (4.43)$$

A Figura 8, a seguir, mostra o diagrama para tal procedimento.

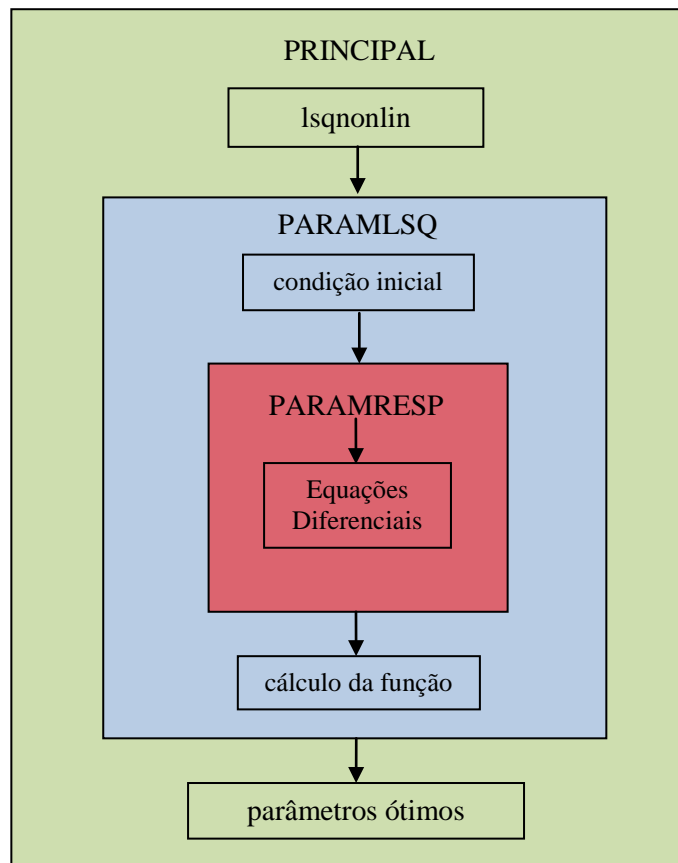


Figura 6 – Diagrama da determinação dos parâmetros

#### **4.4. Análise de Sensibilidade do Modelo**

Análise de sensibilidade é uma forma de entender quantitativamente como a solução para um modelo depende dos seus parâmetros (R. J. Kee *et. al.*, 1998).

Dessa forma, a análise de sensibilidade efetuada neste trabalho consiste em aplicar um desvio de dez por cento em cada parâmetro do modelo separadamente, ou seja, enquanto avalia-se a sensibilidade de um parâmetro todos os outros parâmetros permanecem fixos. Ao final, teremos conhecimento de que parâmetros são mais sensíveis, sua dependência, assim como o impacto deste determinado parâmetro no modelo.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1. Avaliação do Modelo Matemático

Comparando os resultados da simulação do modelo matemático com os obtidos por Nadeau (1993), vemos que as curvas das variáveis, concentração de alumina (C), temperatura do banho (T1) e massa da crosta (M2), em função do tempo, se comportam de maneira semelhante, Figuras 7-12, abaixo.

A Figura 7, abaixo, mostra que a diminuição na taxa de alimentação da alumina provoca uma diminuição de alumina dispersa no banho. Tal efeito ocorre devido ao consumo ser constante mesmo quando a taxa de alimentação (DMA) diminui, ou seja, neste caso consome-se mais que se alimenta.

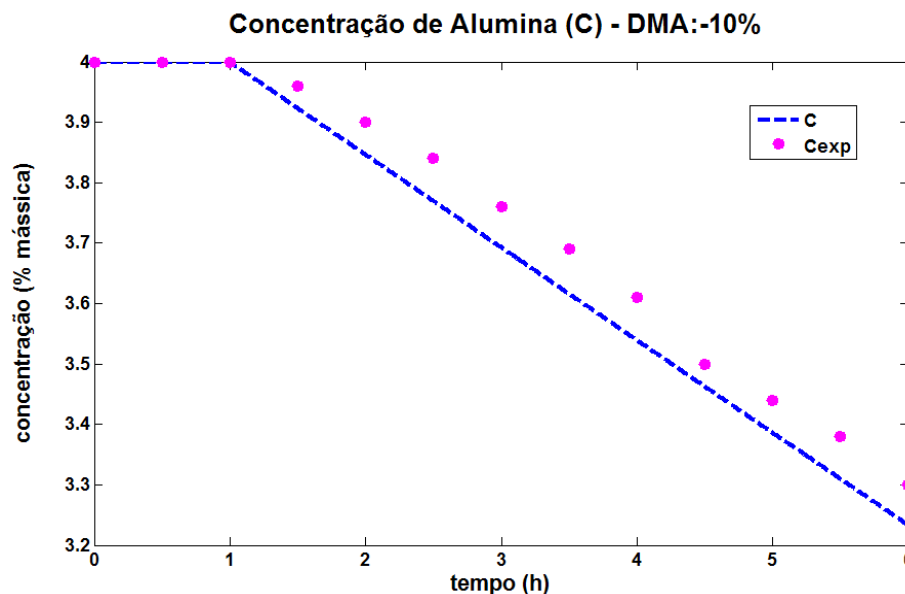


Figura 7 – Comparação entre os valores simulados e os valores experimentais (Nadeau, 1993) da variável de Saída C com degrau na taxa de alimentação de alumina, DMA, a -10%

A Figura 8, abaixo, mostra que quando a taxa de alimentação da alumina (DMA) sofre uma redução de 10%, a temperatura do banho possui duas tendências opostas. Na primeira tendência, a temperatura do banho sofre um aumento causado pelo fato de que há menos alumina a dissolver e aquecer. A segunda tendência é uma diminuição da temperatura do banho causada pela queda de resistência.

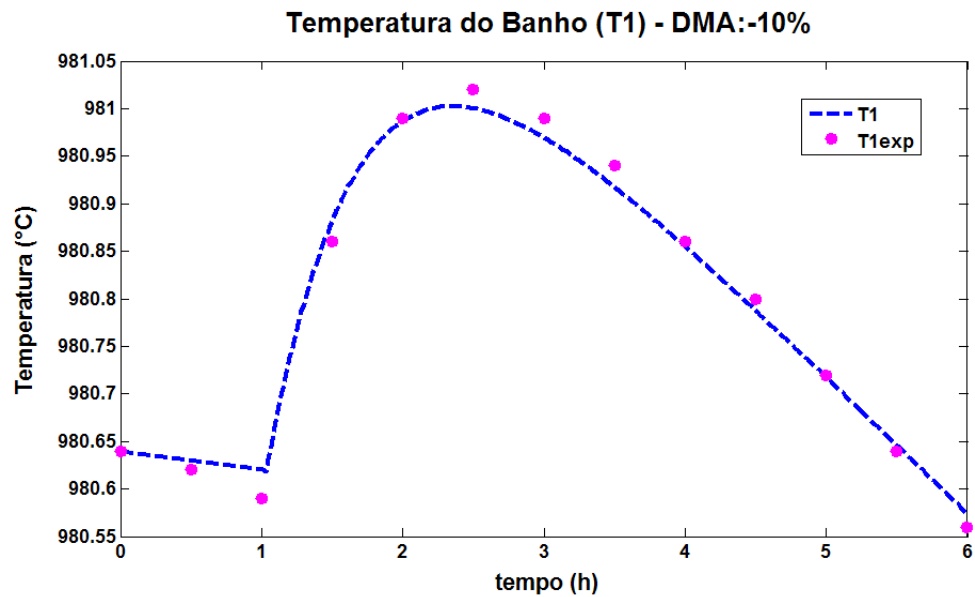


Figura 8 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída T1 com degrau na taxa de alimentação de alumina, DMA, a -10%

A figura 9, abaixo, mostra que a diminuição da taxa de alimentação da alumina (DMA) causa uma diminuição na massa da crosta, devido ao aumento da temperatura do banho.

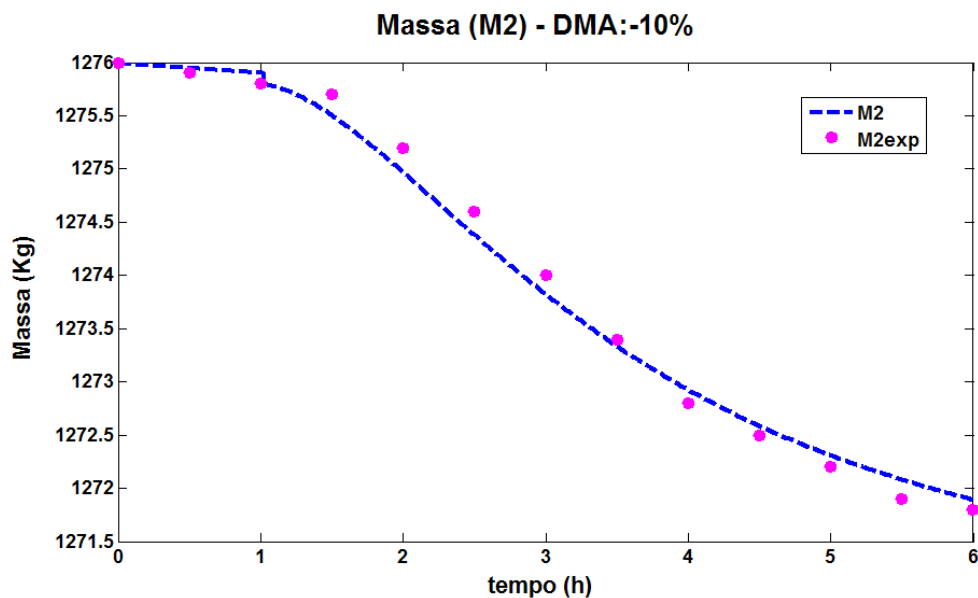


Figura 9 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída M2 com degrau na taxa de alimentação de alumina, DMA, a -10%

A figura 10, abaixo, mostra que um aumento na distância anodo-catodo provoca um ligeiro aumento da concentração de alumina, uma vez que a alumina dispersa no banho diminui com o aumento de DAC. Logo, o aumento de DAC, também, provoca um aumento da

taxa de dissolução da alumina, fazendo com que parte da alumina passe da fase dispersa à fase dissolvida.

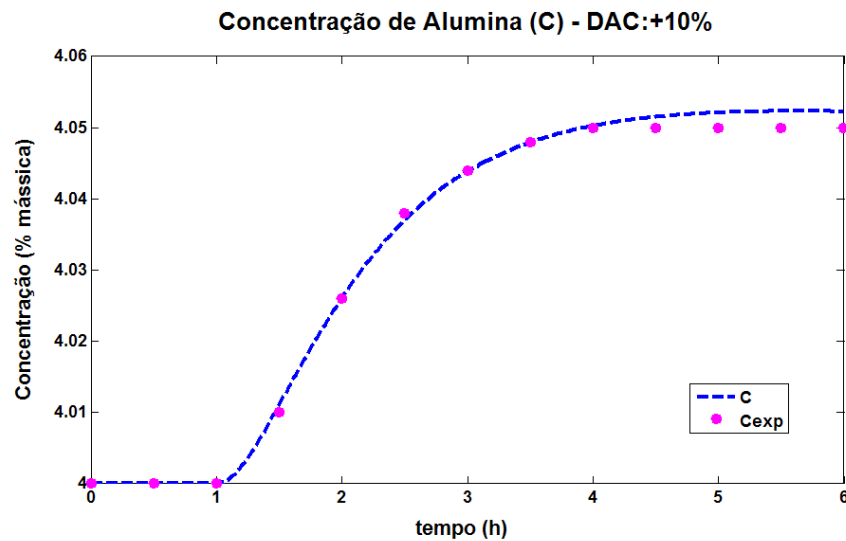


Figura 10 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída C com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10%

A Figura 11, abaixo, mostra que a temperatura do banho reage como um sistema de primeira ordem quando ocorre um aumento da distância anodo-catodo (DAC). Como já foi mencionado anteriormente, um aumento de DAC provoca um aumento da temperatura do banho.

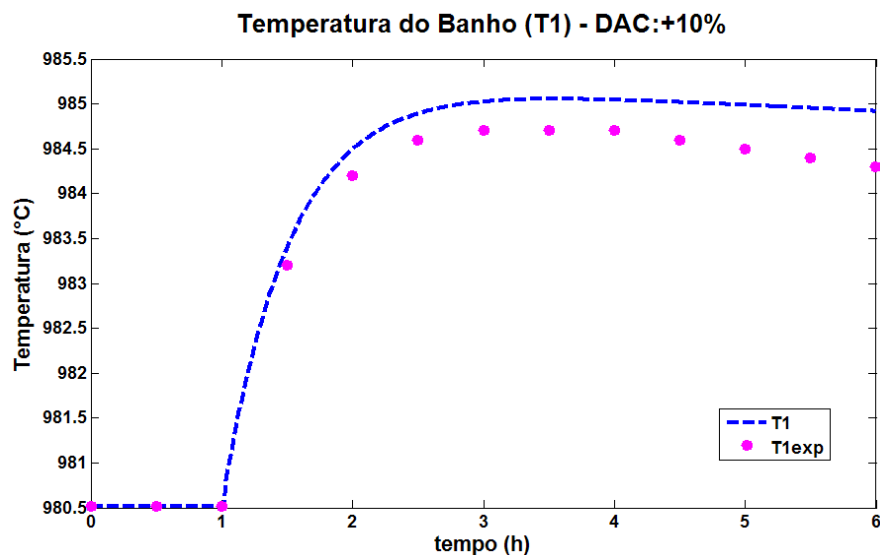


Figura 11 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída T1 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10%

A figura 12, abaixo, mostra que com o aumento da distância anodo-catodo, a massa da crosta diminui.

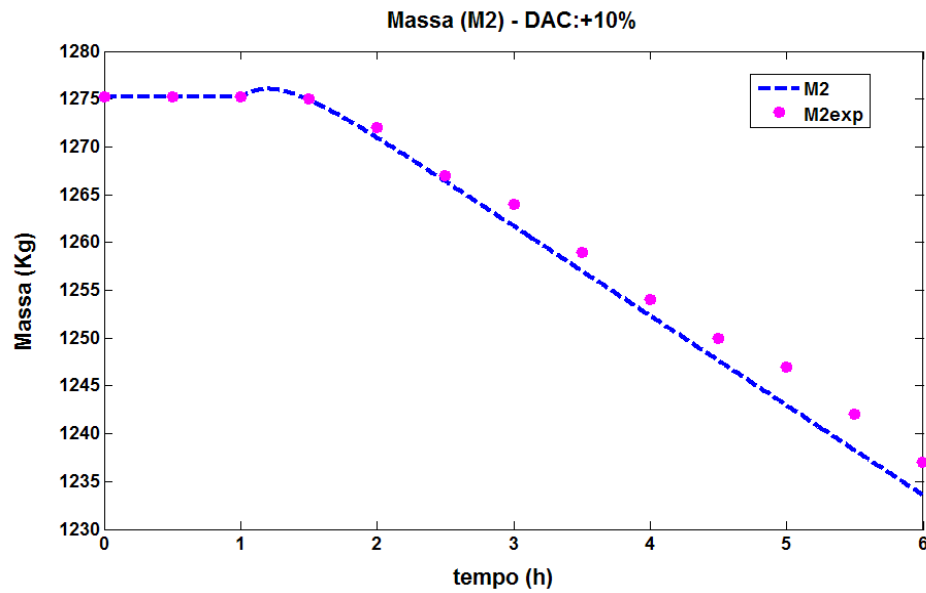


Figura 12 – Comparação entre o valor calculado e o valor experimental (Nadeau, 1993) da variável de Saída M2 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10%

## 5.2. Determinação dos Parâmetros

Os parâmetros ótimos do modelo foram calculados através de um procedimento de otimização que utiliza a método dos mínimos quadrados e são apresentados na Tabela 5, abaixo. A seguir, temos a comparação entre as curvas com os parâmetros originais e as curvas com os parâmetros ótimos, Figuras 13 – 18.

Tabela 5 - Valores dos Parâmetros Originais do Modelo e Valores dos Parâmetros Ótimos Simulados

	Parâmetros Originais do Modelo	Parâmetros Ótimos DMA -10%	Parâmetros Ótimos DAC +10%
1	$-0.11 \times 10^{-2}$	$-0.11 \times 10^{-2}$	$-0.11 \times 10^{-2}$
2	$-0.23 \times 10^{-6}$	$-0.23 \times 10^{-6}$	$-0.23 \times 10^{-6}$
3	$0.27 \times 10^{-7}$	$0.27 \times 10^{-7}$	$0.26964 \times 10^{-7}$
4	$-2.222 \times 10^{-9}$	$2.8381 \times 10^{-8}$	$-2.2099 \times 10^{-9}$
5	$0.3507 \times 10^{-3}$	$0.3507 \times 10^{-3}$	$0.3507 \times 10^{-3}$
6	$-0.53 \times 10^{-3}$	$-0.53 \times 10^{-3}$	$-0.53831 \times 10^{-3}$
7	0.52	0.52	0.52
8	$-0.40 \times 10^{-3}$	$-0.39968 \times 10^{-3}$	$-0.40 \times 10^{-3}$
9	-0.23503	-0.2350	-0.2350
10	$-1.944 \times 10^{-5}$	$-1.7301 \times 10^{-5}$	$-3.1381 \times 10^{-5}$
11	0.01725	-0.0172	0.0173
12	$-0.10 \times 10^{-2}$	$-0.10 \times 10^{-2}$	$-9.5743 \times 10^{-4}$
13	1.1	1.1	1.1
14	$-4.111 \times 10^{-5}$	$-4.111 \times 10^{-5}$	$6.0216 \times 10^{-5}$
15	-0.53	-0.53	-0.53
16	$-0.452 \times 10^{-3}$	$-0.452 \times 10^{-3}$	$-0.452 \times 10^{-3}$

Cont.	Parâmetros Originais do Modelo	Parâmetros Ótimos DMA -10%	Parâmetros Ótimos DAC +10%
17	$-0.5107 \times 10^{-7}$	$-0.47164 \times 10^{-7}$	$-0.5107 \times 10^{-7}$
18	$-0.1466 \times 10^{-3}$	$-0.1466 \times 10^{-3}$	$-0.1466 \times 10^{-3}$

Podemos observar na Figura 13 que praticamente não houve modificação na curva de concentração em função do tempo. A concentração não se alterou após efetuar uma otimização nos parâmetros.

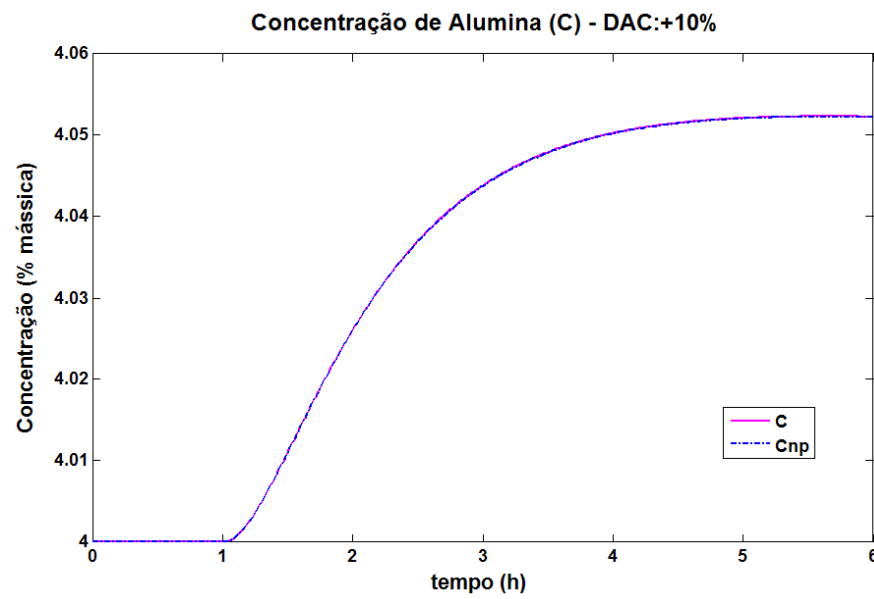


Figura 13 – Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída C com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10%

Na Figura 14, a seguir, observa-se que na curva de temperatura do banho em função do tempo, a curva com os parâmetros obtidos a partir da otimização apresentou uma pequena queda na temperatura.

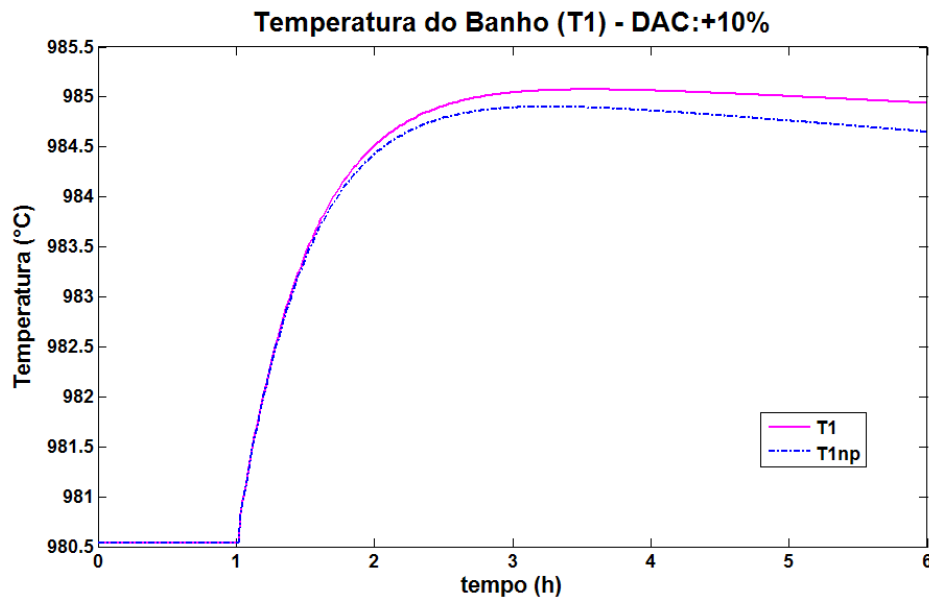


Figura 14 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída T1 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10%

A Figura 15 mostra que houve um pequeno aumento da massa da crosta para a curva obtida com os parâmetros otimizados.

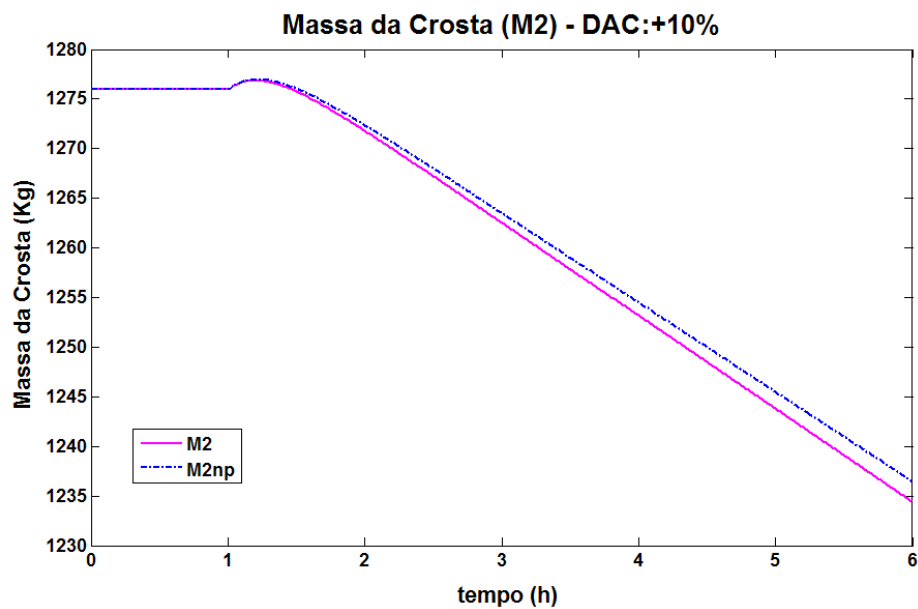


Figura 15 – Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída M2 com degrau na distância anodo-catodo, DAC, a +10%



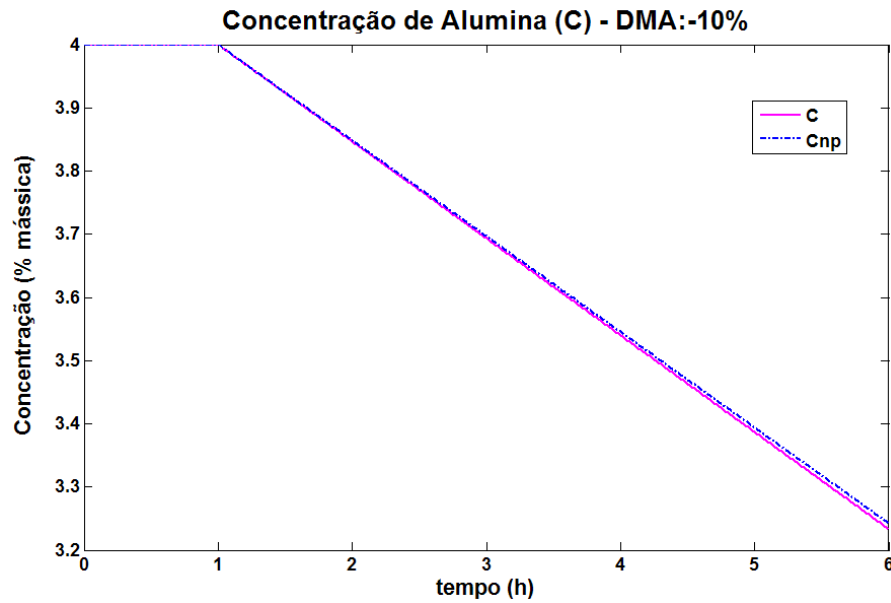


Figura 16 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída C com degrau na taxa de alimentação da alumina, DMA, a -10%

A Figura 16, acima, apresenta as curvas de concentração de alumina para um degrau de -10% na distância anodo-catodo. A curva obtida com os parâmetros otimizados mostra um pequeno aumento da concentração com relação à curva com os valores originais.

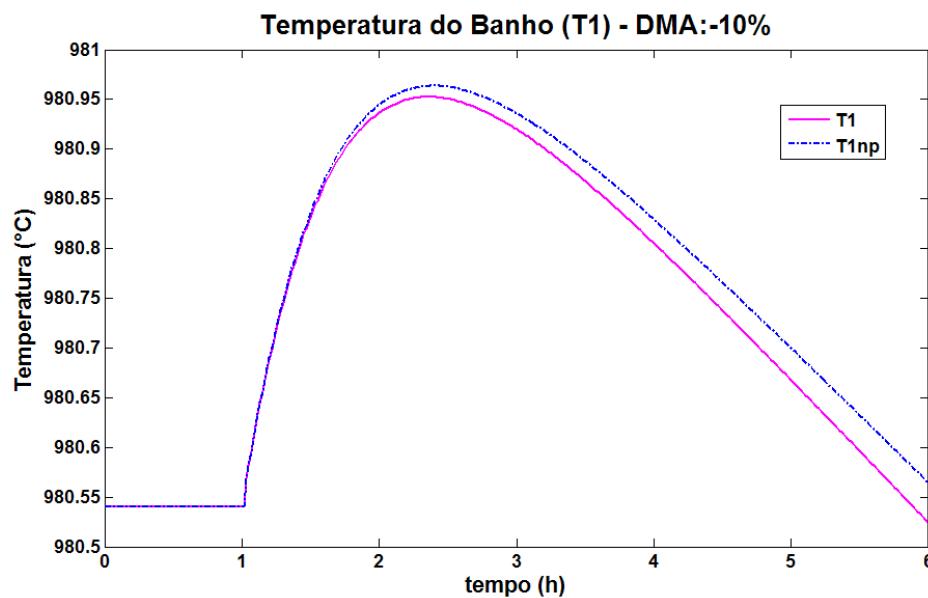


Figura 17 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída T1 com degrau na taxa de alimentação da alumina, DMA, a -10%

A Figura 17 mostra que a curva da temperatura do banho obtida com os parâmetros otimizados apresenta um pequeno aumento da temperatura ao longo do tempo.

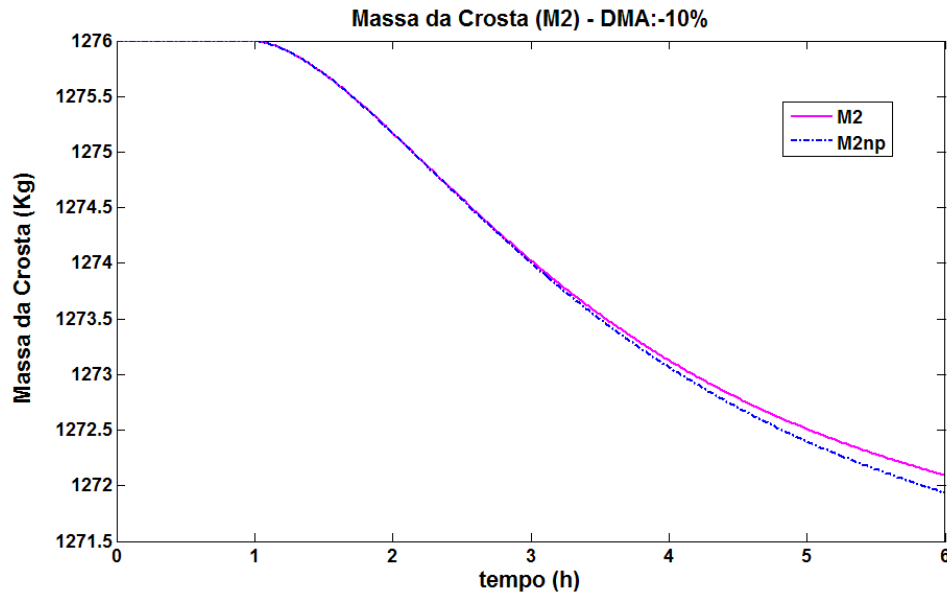


Figura 18 - Comparação entre as curvas com os parâmetros originais e os parâmetros ótimos da variável de saída M2 com degrau na taxa de alimentação da alumina, DMA, a -10%

A Figura 18 apresenta a curva da massa da crosta em função do tempo com os parâmetros originais e a curva da massa da crosta em função do tempo obtida através da otimização. Percebe-se que há uma pequena diminuição na massa da crosta com os parâmetros otimizados.

### 5.3. Análise de Sensibilidade do Modelo

Efetuada a análise de sensibilidade do modelo, podemos verificar os parâmetros que possuem uma maior sensibilidade. No anexo B se encontram as tabelas com os valores do estudo da análise de sensibilidade, cada valor de resíduo de cada função objetivo para cada parâmetro variado. As Tabelas 6 e 7, abaixo, mostram quais parâmetros são mais sensíveis com um desvio de +10% em DAC e -10% em DMA, respectivamente.

O desvio da curva quando se varia cada parâmetro foi calculado através da seguinte equação:

$$D = \left| \frac{R_{po} - R_{pv}}{R_{po}} \right| \times 100 \quad (5.1)$$

Onde,  $R_{po}$  é o valor do resíduo da função objetivo para os parâmetros originais;

$R_{pv}$  é o valor do resíduo da função objetivo para os parâmetros Variados.

Tabela 6 - Análise de Sensibilidade para os dados obtidos com DAC +10%

Parâmetro	Resíduo da função objetivo para a Concentração (parâmetro original)	Resíduo da função objetivo para a Concentração (parâmetro variado)	Desvio (%)
P1	$19,3355 \times 10^{-6}$	$32,5138 \times 10^{-6}$	68,2
P2		$56,4159 \times 10^{-6}$	192
P3		$325,4129 \times 10^{-6}$	1583
P4		$14,3862 \times 10^{-6}$	25,59
Parâmetro	Resíduo da função objetivo para a Temperatura (parâmetro original)	Valor da função objetivo para a Temperatura (parâmetro variado)	Desvio
P6	1,5093	$75,5296 \times 10^{-3}$	95
P7		6,8912	356,6
P10		1,3484	10,7
Parâmetro	Resíduo da função objetivo para a Massa da Crosta (parâmetro original)	Valor da função objetivo para a Massa da Crosta (parâmetro variado)	Desvio
P12	68,0769	92,0419	35,2
P13		46,5727	35,2
P14		70,4454	3,48
P15		296,6363	335,7

De acordo com a Tabela 6, acima, temos os parâmetros mais sensíveis do modelo quando há um desvio de +10% na variável DAC, os parâmetros destacados em azul (P3, P7 e P15) são os que possuem maior influência.

Tabela 7 - Análise de Sensibilidade para os dados obtidos com DMA -10%

Parâmetro	Resíduo da função objetivo para a Concentração (parâmetro original)	Resíduo da função objetivo para a Concentração (parâmetro variado)	Desvio
P5	$45,2690 \times 10^{-3}$	$122,4487 \times 10^{-3}$	170,5
Parâmetro	Resíduo da função objetivo para a Temperatura (parâmetro original)	Resíduo da função objetivo para a Temperatura (parâmetro variado)	Desvio
P8	$14,1247 \times 10^{-3}$	$78,1994 \times 10^{-3}$	453,6
P9		$13,3469 \times 10^{-3}$	5,5
P10		$31,3639 \times 10^{-3}$	122
P11		$32,9671 \times 10^{-3}$	133,4
Parâmetro	Resíduo da função objetivo para a Massa da Crosta (parâmetro original)	Resíduo da função objetivo para a Massa da Crosta (parâmetro variado)	Desvio
P14	$539,5063 \times 10^{-3}$	$360,2772 \times 10^{-3}$	33,2
P16		1,1448	112,2
P17		1,1007	104
P18		67,4736	12406

De acordo com a Tabela 7, acima, temos os parâmetros mais sensíveis do modelo quando há um desvio de -10% na variável DMA, os parâmetros destacados em azul (P5, P8 e P18) são os que possuem maior influência.

Com isso, teremos seis parâmetros variáveis e o restante será fixo. Esses seis parâmetros variáveis serão as saídas de uma rede neural artificial.

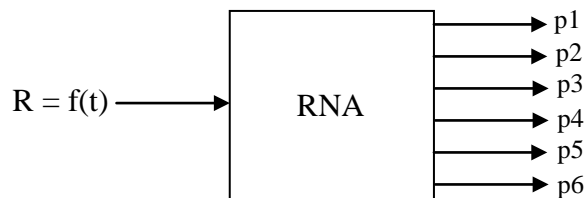


Figura 19 - Diagrama esquemático de uma rede neural artificial com a resistência como entrada da rede e os parâmetros como saídas da rede.

No Anexo B, encontram-se as Tabelas 11 e 12 com todos os valores dos resíduos das funções objetivos utilizadas para a análise de sensibilidade do modelo.

#### 5.4. Relação entre a Resistência e a Concentração de Alumina

Uma relação típica da resistência em função da concentração é mostrada na Tabela 8, abaixo.

Tabela 8 - Valores experimentais da Conc. de alumina e da Resistência da cuba

<b>Concentração (% mássica)</b>	<b>Resistência (<math>\mu\Omega</math>)</b>
2,08	44
2,10	42
2,16	40
2,25	38
2,30	37,4
2,40	36,6
2,53	36
2,80	35,7
3,50	36
4,00	36,3
4,50	36,6
5,00	36,9
5,50	37,2
6,00	37,5

A figura 20, abaixo, mostra o comportamento da curva de resistência em função da concentração de alumina, obtida a partir dos dados experimentais da Tabela 8, acima.

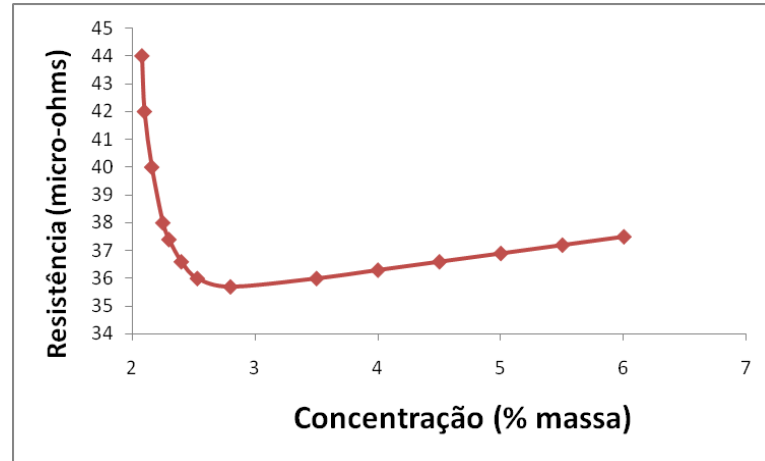


Figura 20 - Curva da Resistência da cuba em função da concentração de alumina

Para obter um modelo de R e C foram usados os valores da Tabela 8, acima, e proposto o modelo de Meghlaoui *et. al.* (1997),

$$c = a_0 \log(R - a_1) + a_2 \quad (5.2)$$

Onde as variáveis c e R representam a concentração e a resistência da célula, respectivamente. Os parâmetros  $a_0$ ,  $a_1$  e  $a_2$  são identificados através do método dos mínimos quadrados. Porém, tal modelo não conseguiu a convergência, sendo então descartado.

Analisando a Figura 20 percebemos que quando a concentração tende para 2 a resistência tende para infinito, o que dificulta o procedimento de ajuste. Observamos uma simetria aplicando logaritmo para valores maiores que 1 e menores que 1, como pode ser visto na Figura 21 abaixo.

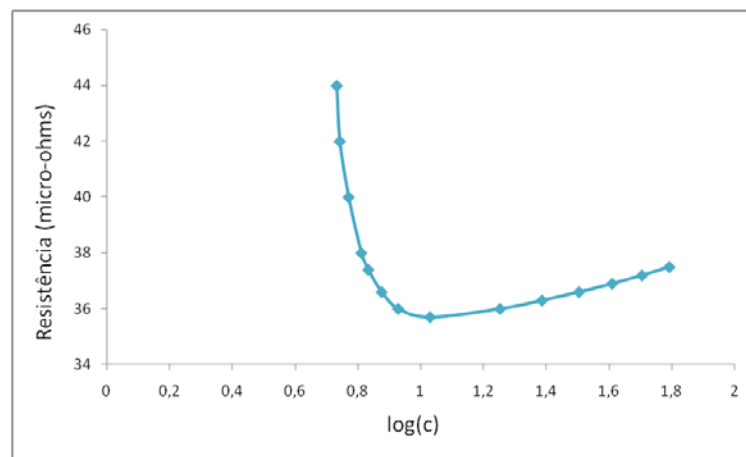


Figura 21 - Curva da Resistência versus log(C)

Então, para facilitar o procedimento de ajuste, os valores de C na Tabela 8 acima foram subtraídos de 2, com o objetivo de obter a equação de ajuste. Com isso, fazendo R versus  $\log(C-2)$  é possível observar o comportamento parabólico, como mostra a Figura 22.

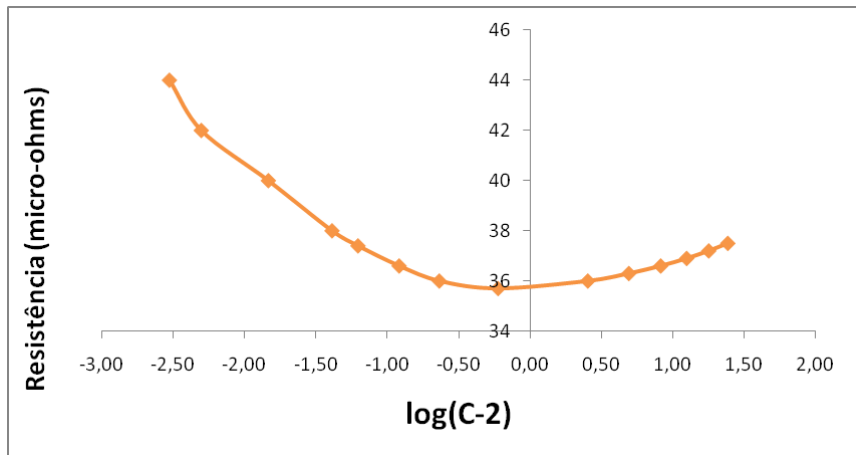


Figura 22 - Curva da Resistência em função de  $\log(C - 2)$

Diante disso, o modelo é proposto pela seguinte equação:

$$R = a_1[\log(C - 2)]^2 + a_2 \log(C - 2) + a_3 \quad (5.3)$$

Onde, R e C é a resistência da cuba e C a concentração de alumina, respectivamente. E  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são determinados pelo método dos mínimos quadrados. Seus valores são apresentados na Tabela 9, abaixo.

Tabela 9 – Valores dos parâmetros da função de regressão

$a_1$	1,2171
$a_2$	-0,1274
$a_3$	35,5728

Dessa forma,

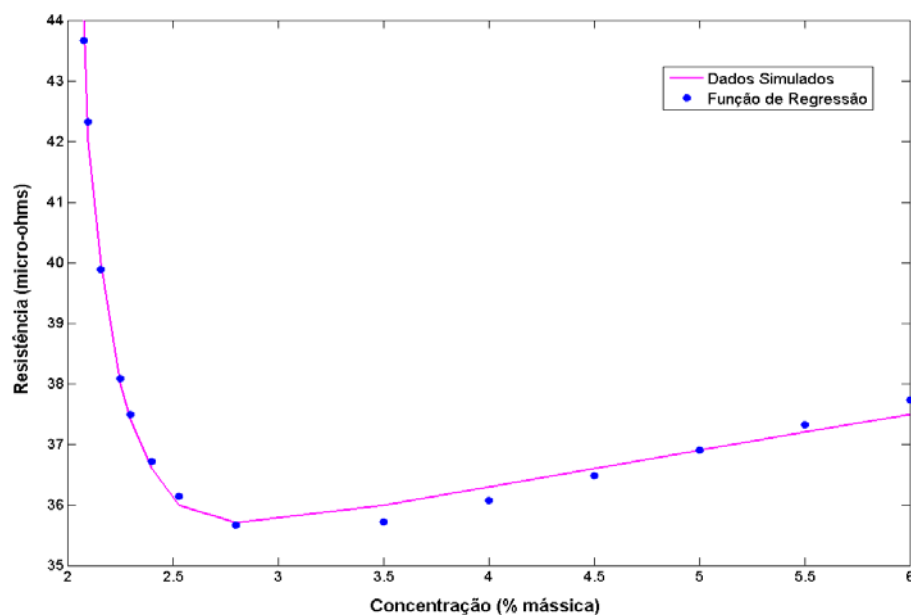


Figura 23 - Curva da Resistência em função da concentração

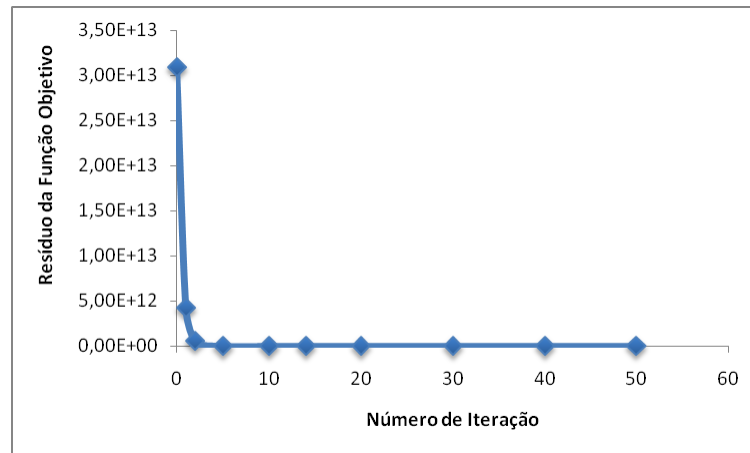


Figura 24- Curva do Resíduo da Função em função do número de Iteração

Percebemos que o fator igual a 2 tem influencia nos parâmetros da equação (5.3). Então, propomos uma modificação nesse parâmetro utilizando a ferramenta de ajuste de curvas “*cftool*” que está disponível no *Curve Fitting Toolbox™* 2 do Matlab R2009a. Tal ferramenta efetua a análise estatística dos dados com um grau de confiança de 95%. Dessa forma podemos reescrever a equação (5.3) como:

$$R = a_1[\log(C - a_4)]^2 + a_2 \log(C - a_4) + a_3 \quad (5.4)$$

Logo, temos a Figura 25 abaixo que mostra a curva da resistência em função da concentração com o parâmetro  $a_4$  variável.

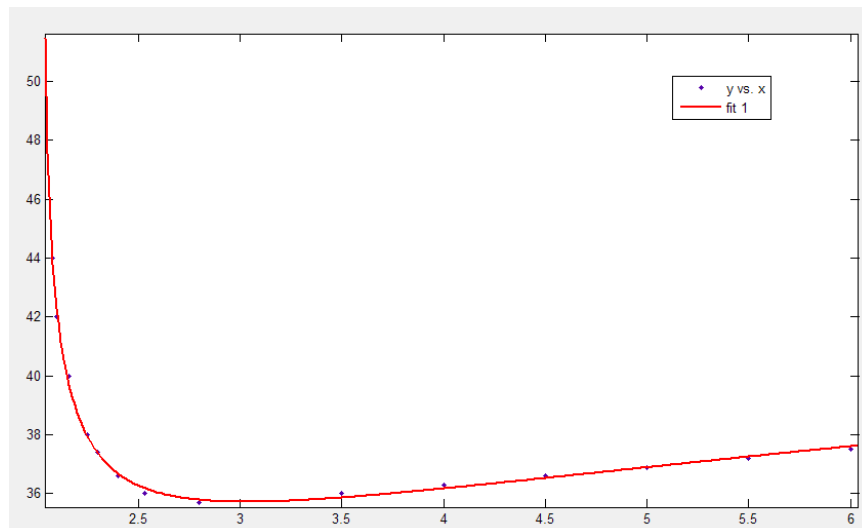


Figura 25 - Curva da resistência em função da concentração utilizando o “cftool”

A Tabela 10, abaixo, mostra os valores dos parâmetros ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ ) da função de regressão com um intervalo de confiança de 95%.

Tabela 10 – Parâmetros com o valor de  $a_4$  variável num intervalo de confiança de 95%

Parâmetros	Intervalo de confiança	Qualidade do ajuste	
$a_1 = 1,006$	(0.8257, 1.187)	$SSE$	0,3007
$a_2 = -0,02453$	(-0.1512, 0.1022)	$R^2$	0,9962
$a_3 = 35,72$	(35.52, 35.92)	$R$	0,995
$a_4 = 2,021$	(2.005, 2.038)	$RMSE$	0,1734

Onde:

- $SSE$  é a soma de quadrados devido ao erro do ajuste. Um valor mais próximo de **zero** indica um ajuste mais útil para a predição.
- $R^2$  é o quadrado da correlação entre os valores da resposta e os valores previstos da resposta. Um valor mais próximo da **unidade** indica que uma maior proporção de variação é esclarecida pelo modelo.
- $R$  (ajuste de  $R^2$ ), um valor mais perto de **1** indica um melhor ajuste.
- $RMSE$  é o erro padrão do ajuste ou erro padrão da regressão. Um valor mais próximo de **zero** indica um ajuste mais útil para a predição.

Dessa forma, estatisticamente observamos que o ajuste se deu de forma bem sucedida, uma vez que os valores de  $SSE$  e  $RMSE$  foram próximos de zero, que indica que o ajuste é mais útil para a predição. Já os valores de  $R$  e  $R^2$  ficaram próximos da unidade, o que deve ser esperado, indicando que o ajuste foi bem sucedido.

Portanto, esse modelo empírico é adequado para representar a relação entre a resistência e a concentração da alumina e poderá ser utilizada na determinação de dados a serem alimentados numa rede neural.



## 6. CONCLUSÃO

O modelo matemático linear estudado para a dinâmica do processo de eletrólise do alumínio demonstrou uma boa representatividade, sob condições normais de operação. O modelo foi validado a partir do modelo de Nadeau (1993).

Os parâmetros ótimos simulados, também, mostraram boa representatividade. A análise de sensibilidade nos parâmetros (P1-P18) nos mostrou que dos dezoito parâmetros seis têm influência direta no modelo (P3, P7 e P15 quando há um degrau em DAC; P5, P8 e P18 quando há um degrau em DMA). Tais parâmetros poderão ser determinados através de uma rede neural artificial.

O modelo empírico desenvolvido é adequado para representar a resistência como função da concentração da alumina, demonstrando bons resultados para o ajuste da curva com um intervalo de confiança de 95%.

Dessa forma, o software desenvolvido poderá ser usado para a alimentação de uma rede neural artificial que vai retornar os parâmetros (P3, P7 e P15; P5, P8 e P18) para cada situação de operação nos permitindo determinar novos valores de C, T1 e M2 sem se fazer necessário a medição.

## 7. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

- Desenvolver uma rede neural artificial no intuito de obter os parâmetros necessários para o modelo matemático que descreve o comportamento de um cuba de redução de alumínio que terá como entrada o vetor da resistência em função do tempo e retornará como saída os parâmetros necessários para determinar os valores de C, T1 e M2 sem que haja medições;
- Desenvolver um procedimento de diminuição de ruídos, que pode ser o uso da transformada de wavelet, a fim de reduzir os ruídos ou distúrbios na entrada da rede neural artificial, o que vai garantir um melhor desempenho na aprendizagem e treinamento da rede;
- Testar a rede neural com dados de planta.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAL - Associação Brasileira do Alumínio. **Fundamentos e Aplicações do Alumínio**. 2ª edição. São Paulo, 2007.

ANDERSON, I. E.; FOLEY, J. C.; FLUMERFELT, J. F.. **Simplified Aluminum Powder Metal Processing Routes for Automotive Applications**. Powder Metallurgy Aluminum and Light Alloys for Automotive Applications Conference, 1998: 75-82.

ANDRADE, Humberto Oliveira. **Processo de Produção na Refinaria da Alumar**. 2002, 72 f. Relatório Departamento Técnico Refinaria, ALUMAR, São Luís, 2000.

BEREZIN, A. I. ; POLIAKOV, P. V. ; RODNOV, O. O. ; MEZHUBOVSKY, I. V. ; GONEBNYY, I. V..**Neural Network Qualifier of Noises of Aluminium Reduction Cell**. Light Metals.

BUI, R. T.; TIKASZ, L.G.; PERON, J. **Trends in Intelligent Process Control Methods in the Primary Aluminum Industry**. IEEE , 1999, pg. 749-754.

BUI, R. T.; MEGHLAOUI, A. OUELLET, R.. **Specific Optimal Control of an Aluminum Casting Furnace**. Elsevier Science, Application Mathematics Modelling, volume 19, 1993, pg. 311-317.

DRUMOND, P. Z.. **Aumento da Produtividade de Cubas Eletrolíticas para Produção de Alumínio Através da Análise Termo-Elétrica do Conjunto Bloco Catódico e Barra Coletora**. Dissertação. Unidade Acadêmica de Engenharia Química, Universidade Federal de Campina grande, 2007.

ENTNER, Peter M. **Further Development of the  $AlF_3$  Model**. Light Metals, 1993, pg. 265-268.

JIE, Li; HUANG, Yongzhong.; WANG, Huazhang.; YEXIANG, Liu. **An Estimation Model of Alumina Concentration for Point-Feeding Aluminum Reduction Cells**. Light Metals, 1994, pg. 441-447.

LI, Jiejia; WU, Chengdong; LI, Mengxin. **The Application of Distributed Neural Network Fault Diagnosis Technique in Process Control**. Proceedings of the 6<sup>th</sup> World Congress on Intelligent Control and Automation. Dalian, China, 2006, pg. 5553-56.

MACKENZIE, D. Scott; TOTTEN, Georg E.. **Handbook of Aluminum. Volume 1: Physical Metallurgy and Process**. Marcel Dekker, Inc. New York, 2003.

MEGHLAOUI, A; BUI, R.T; THIBAUT, J; TIKASZ, L; SANTERRE, R. **Intelligent Control of the Feeding of Aluminum Electrolytic Cells Using Neural Networks**. Metallurgical and Materials Transactions B, volume 28B, abril de 1997, pag. 215-221.

MEGHLAOUI, A; BUI, R. T.; TIKASZ, L.. **Predictive Control of Aluminum Electrolytic Cells Using neural Networks**. Metallurgical and Materials Transactions B, volume 29B, outubro/1998, pag. 1007-1018.

MEGHLAOUI, A; THIBAUT, J; BUI, R.T; TIKASZ, L; SANTERRE, R.. **Neural networks for the Identification of the Aluminium Electrolysis Process.** Computers Chemical Engineering, vol. 22, nº 10, 1998, pg. 1419-1428.

NADEAU, Jean. **Identification d'un modele Lineaire pour l'analyse du Procédé d'Electrolyse de l'Aluminium.** Tese. Université de Québec, 1993.

PEREIRA, C. H. R. **Avaliação do Desempenho de Cubas Eletrolíticas para Diferentes Estratégias de Ajuste da Composição Química do Banho Eletrolítico.** Dissertação. Unidade Acadêmica de Engenharia Química, Universidade Federal de Campina grande, 2007.

KEE, R. J.; GRCAR, J. F.; SMOOTH, M. D. X; MILLER, J. A.; MEEKS, E.. **PREMIX: AFORTRAN Program for Modeling Steady Laminar One-Dimensional Premixed Flames.** Mechanical Engineering Department Yale University, New Haven, 1998.

ROLLAND, W. K.; STEINSNES, A.; LARSEN, S.; PAULSEN, K. A. **HALDRIS – An Expert System for Process Control and Supervision of Aluminum Reduction Cells.** Light Metals 1991: 437-443.

SALT, David J.. **Bath Chemistry Control System.** Light Metals, 1990, pg. 299-304.

ENTNER, Peter M. **Control of  $AlF_3$  Concentration.** Light Metals, 1992, pg. 369-374.

SORHEIM, E. A.; BORG, P. **Dynamic Model and Estimator for Online Supervision of the Alumina Reduction Cell.** Light Metals, 1989, 379-384.

STEPHEN, Martin *et al.* **Basic Concepts of Feed and Resistance Control - QLC User's Manual – ALCOA SERVICE DELIVERY GROUP (SDG) / Version 4.0,** 2005.

TABSH, I.; DUPUIS, M. **Medeling of Aluminum Reduction Cells Using Finite Element Analysis Techniques.** Light Metals, 1995, 295-299.

TANG, H.Q.; URATA, M.; READ, C. M.; STEJER, S. L.. **Response of Hall-Heroult Cell to Step-Changes in Operating Conditions: Measurements and 'Dynamic' Simulations.** Light Metals, 1998, pg. 349-357.

TAYLOR, M. P.; ZHANG, W. D.; WILLS, V.; SCHMID, S.. **Dynamic Model for the Energy Balance of an Electrolysis Cell.** Transactions of the Institution of Chemical Engineers, 1996, pg. 913-933.

TICIANELLI, Edson A. e GONZALES, Ernesto R.; **ELETROQUÍMICA: PRINCÍPIOS E APLICAÇÕES.** EDUSP, São Paulo, 1ª Edição, 1998.

TIKASZ, L., BUI, R.T., POTOCHNIK, V.. **Aluminum electrolytic cells: a computer simulator for training and supervision.** Engineering with computers, sous press, 1992.

TOTTEN, G. E.; MACKENZIE, D. S.. **Handbook of Aluminum: Physical Metallurgy and Processes.** Eastern Hemisphere Distribution, United States of America, 2003.

WRIGHT, A. **Dynamic Simulation and Control of Aluminum Reduction Smelting Cells**. Ph. D. Dissertation. U. Newcastle-upon-Tyne, U.K. 1993.

ZENG, Shuiping; JINHONG, Li. **Diagnosis System of the Anode Faults for Alumina reduction Cell**. Proceedings of the Sixth International Conference on Intelligent Systems Design and Applications. Computer Society, 2006.

#### **Web sites consultados:**

**International Aluminium Institute** – Disponível em: [http://stats.world-aluminium.org/iai/stats\\_new/historical.asp?currentYear=2025&material=1&formType=1&dataType=1&period=4&fromYear=2007&fromMonth=1&toYear=2008&toMonth=1&area=&submitSearch=Find+Stats](http://stats.world-aluminium.org/iai/stats_new/historical.asp?currentYear=2025&material=1&formType=1&dataType=1&period=4&fromYear=2007&fromMonth=1&toYear=2008&toMonth=1&area=&submitSearch=Find+Stats) - Acessado em 24/04/2009 as 20hs09min.

**Associação Brasileira do Alumínio – ABAL** – Disponível em:

<http://www.abal.org.br/aluminio/introducao.asp> - Acessado em 05/05/2009 as 00hs50min.

#### **ALCOA**

[http://www.alcoa.com/brazil/pt/custom\\_page/mercados\\_alumina\\_processo\\_resumo.asp](http://www.alcoa.com/brazil/pt/custom_page/mercados_alumina_processo_resumo.asp)

Em 19/03/2009 as 16hs22min

## ANEXO A

### Detalhes da Identificação das Funções de Transferência Obtidas por Nadeau (1993)

Encontram-se neste anexo, os cálculos detalhados sobre a identificação de todas as funções de transferência utilizadas na linearização do modelo. Para fins de referência, este anexo dá a identificação de todas as funções de transferência.

$$1) \quad h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

$$\Delta X_1 = -0,2140 \text{ kg}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{35} = 1170 \text{ s}$$

$$t_{85} = 3600 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_1}{\Delta DAC} = -0,92 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (3600 - 1170) \text{ s} = 1600 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 1170 \text{ s}) - (0,29 \times 3600 \text{ s}) = 480 \text{ s}$$

$$h_{11} = \frac{X_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-49 e^{-480s}}{1600 s + 1}$$

$$2) \quad h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1}$$

$$\Delta X_2 = -1,0120 \text{ kg}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{60} = 5000 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_2}{\Delta DAC} = -230 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Põe-se  $\zeta = 1$ , por conseguinte após o método de Smith [15]:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2} \\ &= \frac{5000}{2} \text{ s} = 2500 \text{ s} \end{aligned} \quad (5-14)$$

$$h_{21} = \frac{X_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-230}{0,63 \times 10^7 s^2 + 5000 s + 1}$$

$$3) \quad h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1}$$

$$\Delta C = 0,00053 \text{ fraction massique}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{60} = 4440 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta C}{\Delta DAC} = 0,12 \frac{\text{fraction massique}}{\text{m}}$$

$$h_{31} = \frac{C'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,12}{0,44 \times 10^7 s^2 + 4600 s + 1}$$

$$4) \quad h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta M_1 = 21 \text{ kg}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$x_0 = 2240,0 \text{ kg}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 2244,71 \text{ kg}$$

$$K_v = \frac{\Delta M_1 / \Delta t}{\Delta DAC} = \frac{21 \text{ kg} / 9000 \text{ s}}{0,0044 \text{ m}} = 0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}}$$

$$m = \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = K_v \times \Delta DAC = 0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}} \times 0,0044 \text{ m} = 0,00233 \text{ kg/s}$$

$$b = x_1 - m t_1 = 2244,71 \text{ kg} - (0,00233 \text{ kg/s} \times 14400 \text{ s}) = 2211,15 \text{ kg}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = \frac{2224,0 \text{ kg} - 2211,15 \text{ kg}}{0,00233 \text{ kg/s}} = 5500 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 5500 \text{ s} - 3600 \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$h_{41} = \frac{M_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,53 e^{-1900s}}{s}$$

$$5) \quad h_{51} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

$$\Delta T_1 = 4,31 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{35} = 810 \text{ s}$$

$$t_{85} = 3630 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_1}{\Delta DAC} = 980 \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (3630 - 810) \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 810 \text{ s}) - (0,29 \times 3630 \text{ s}) = 0,3 \text{ s}$$

$$h_{s1} = \frac{T_1'(s)}{DAC'(s)} = \frac{980 e^{-0,3s}}{1900 s + 1}$$

$$6) \quad h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta M_2 = -21 \text{ kg}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$x_0 = 1275,98 \text{ kg}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 1255,29 \text{ kg}$$

$$K_v = \frac{\Delta M_2 / \Delta t}{\Delta DAC} = \frac{-21 \text{ kg} / 9000 \text{ s}}{0,0044 \text{ m}} = -0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}}$$

$$m = \frac{\Delta M_2}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DAC = -0,53 \frac{\text{kg/s}}{\text{m}} \times 0,0044 \text{ m} = -0,00233 \text{ kg/s}$$

$$b = x_1 - m t_1 = 1255,29 \text{ kg} - (-0,00233 \text{ kg/s} \times 14400 \text{ s}) = 1288,8 \text{ kg}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = \frac{1275,98 \text{ kg} - 1288,8 \text{ kg}}{-0,00233 \text{ kg/s}} = 5500 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 5500 \text{ s} - 3600 \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$h_{61} = \frac{M_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{-0,53 e^{-1900s}}{s}$$

$$7) \quad h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta T_2 = 2,30 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$x_0 = 712,99 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 714,81 \text{ } ^\circ\text{C}$$



$$K_v = \frac{\Delta T_2 / \Delta t}{\Delta DAC} = \frac{2,30 \text{ }^\circ\text{C} / 9000 \text{ s}}{0,0044 \text{ m}} = 0,058 \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}$$

$$m = \frac{\Delta T_2}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DAC = 0,058 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \times 0,0044 \text{ m} = 0,00026 \text{ }^\circ\text{C/s}$$

$$b = x_1 - m t_1 = 714,81 \text{ }^\circ\text{C} - (0,00026 \text{ }^\circ\text{C/s} \times 14400 \text{ s}) = 711,07 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = \frac{712,99 \text{ }^\circ\text{C} - 711,07 \text{ }^\circ\text{C}}{0,00026 \text{ }^\circ\text{C/s}} = 7400 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 7400 \text{ s} - 3600 \text{ s} = 3800 \text{ s}$$

$$h_{71} = \frac{T_2'(s)}{DAC'(s)} = \frac{0,058 e^{-3800s}}{s}$$

$$8) \quad h_{81} = \frac{M_3'(s)}{DAC'(s)} = 0$$

$$9) \quad h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1}$$

$$\Delta T_3 = 4,09 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta DAC = 0,0044 \text{ m}$$

$$t_{35} = 930 \text{ s}$$

$$t_{85} = 3750 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_3}{\Delta DAC} = 930 \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (3750 - 930) \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 930 \text{ s}) - (0,29 \times 3750 \text{ s}) = 120 \text{ s}$$

$$h_{91} = \frac{T_3'(s)}{DAC'(s)} = \frac{930 e^{-120s}}{1900 s + 1}$$

$$10) \quad h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = K + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta X_{11} = -0,61598 \text{ kg}$$

$$\Delta X_{12} = -0,1838 \text{ kg}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_{11}}{\Delta DMA} = 496,60 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta X_{12} / \Delta t}{\Delta DMA} = 0,01646$$

$$h_{12} = \frac{X_1'(s)}{DMA'(s)} = 496,60 + \frac{0,01646}{s}$$

$$11) h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)} = K + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta X_{21} = -0,57480 \text{ kg}$$

$$\Delta X_{22} = -2,325 \text{ kg}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta X_{21}}{\Delta DMA} = 463,40 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta X_{22}/\Delta t}{\Delta DMA} = 0,2083$$

$$h_{22} = \frac{X_2'(s)}{DMA'(s)} = 463,40 + \frac{0,2083}{s}$$

$$12) h_{32} = \frac{C'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta C = -0,003920 \text{ Fração Mássica}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$x_0 = 0,04 \text{ Fração Mássica}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 0,03614 \text{ Fração Mássica}$$

$$K_v = \frac{\Delta C/\Delta t}{\Delta DMA} = 0,3507 \times 10^{-3} \frac{\text{fraction massique}}{\text{kg}}$$

$$m = \frac{\Delta C}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DMA = -4,35 \times 10^{-7} \frac{\text{fraction massique}}{\text{s}}$$

$$b = x_1 - m t_1 = 0,0424 \text{ fraction massique}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = 5500 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 1900 \text{ s}$$

$$h_{32} = \frac{C'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,3507 \times 10^{-3} e^{-1900s}}{s}$$

$$13) \quad h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K_v e^{-\theta s}}{s}$$

$$\Delta M_1 = -9,866 \text{ kg}$$

$$\Delta t = 9000 \text{ s}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$x_0 = 2224,0 \text{ kg}$$

$$t_1 = 14400 \text{ s}$$

$$x_1 = 2213,3 \text{ kg}$$

$$K_v = \frac{\Delta M_1 / \Delta t}{\Delta DMA} = 0,8838$$

$$m = \frac{\Delta M_1}{\Delta t} = K_v \cdot \Delta DMA = -0,001096 \text{ kg/s}$$

$$b = x_1 - m t_1 = 2229,0 \text{ kg}$$

$$t_0 = \frac{x_0 - b}{m} = 4550 \text{ s}$$

$$\theta = t_0 - 3600 \text{ s} = 950 \text{ s}$$

$$h_{42} = \frac{M_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{0,8838 e^{-950s}}{s}$$

$$14) \quad h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta T_{11} = 0,7237 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_{12} = -0,1541 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 7200 \text{ s}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{35} = 1260 \text{ s}$$

$$t_{85} = 4965 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_{11}}{\Delta DMA} = -583,42 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kg/s}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (4965 - 1260) \text{ s} = 2500 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 1260 \text{ s}) - (0,29 \times 4965 \text{ s}) = 200 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta T_{12} / \Delta t}{\Delta DMA} = 0,01725 \text{ }^\circ\text{C/kg}$$

$$h_{52} = \frac{T_1'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-583,42 e^{-200s}}{2500 s + 1} + \frac{0,01725}{s}$$

$$15) \quad h_{62} = \frac{M_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1}$$

$$\Delta M_2 = -3,56 \text{ kg}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{60} = 8850 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta M_2}{\Delta DMA} = 2870,6 \text{ s}$$

Põe-se  $\zeta = 1$ , por conseguinte após o método de Smith [15]:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2} \\ &= \frac{8850}{2} \text{ s} = 4425 \text{ s} \end{aligned} \quad (5-14)$$

$$h_{62} = \frac{M_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{2870,6}{0,1958 \times 10^8 s^2 + 8850 s + 1}$$

$$16) \quad h_{72} = \frac{T_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2 \tau \zeta s + 1}$$

$$\Delta T_2 = 0,41 \text{ °C}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{60} = 11310 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_2}{\Delta DMA} = -332,36 \frac{\text{°C}}{\text{kg/s}}$$

Põe-se  $\zeta = 1$ , por conseguinte após o método de Smith [15]:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t_{60}}{2} \\ &= \frac{11310}{2} \text{ s} = 5655 \text{ s} \end{aligned} \quad (5-14)$$

$$h_{72} = \frac{T_2'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-332,36}{0,3198 \times 10^8 s^2 + 11310 s + 1}$$

$$17) \quad \boxed{h_{82} = \frac{M_3'(s)}{DMA'(s)} = 0}$$

$$18) \quad h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)} = \frac{K e^{-\theta s}}{\tau s + 1} + \frac{K_v}{s}$$

$$\Delta T_{31} = 0,6864 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta T_{32} = -0,1450 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 7200 \text{ s}$$

$$\Delta DMA = -0,0012404 \text{ kg/s}$$

$$t_{35} = 1365 \text{ s}$$

$$t_{85} = 5070 \text{ s}$$

$$K = \frac{\Delta T_{31}}{\Delta DMA} = -553,37 \frac{^\circ\text{C}}{\text{kg/s}}$$

$$\tau = 0,67 (t_{85} - t_{35}) \quad (5-11)$$

$$= 0,67 (5070 - 1365) \text{ s} = 2500 \text{ s}$$

$$\theta = 1,3 t_{35} - 0,29 t_{85} \quad (5-12)$$

$$= (1,3 \times 1365 \text{ s}) - (0,29 \times 5070 \text{ s}) = 300 \text{ s}$$

$$K_v = \frac{\Delta T_{32}/\Delta t}{\Delta DMA} = 0,01624 \text{ } ^\circ\text{C/kg}$$

$$\boxed{h_{92} = \frac{T_3'(s)}{DMA'(s)} = \frac{-553,37 e^{-300s}}{2500 s + 1} + \frac{0,01624}{s}}$$

## ANEXO B

### Detalhes da Análise de Sensibilidade para a variação de cada parâmetro com os valores de cada Resíduo da função objetivo

Tabela 11 - Análise de sensibilidade de cada parâmetro através do resíduo da função objetivo para um degrau na distância anodo-catodo (DAC)

Parâmetro	Valores dos Parâmetros Originais	Valores dos Parâmetros Variados	Resíduo da função objetivo		
			RFob1 $19.3355 \times 10^{-6}$	RFob2 1.5093	RFob3 68.0769
P1	$-0.11 \times 10^{-2}$	$-0.121 \times 10^{-2}$	$32.5138 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P2	$-0.23 \times 10^{-6}$	$-0.253 \times 10^{-6}$	$56.4159 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P3	$0.27 \times 10^{-7}$	$0.297 \times 10^{-7}$	$325.4129 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P4	$-2.222 \times 10^{-9}$	$-2.4442 \times 10^{-9}$	$14.3862 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P5	$0.3507 \times 10^{-3}$	$0.38577 \times 10^{-3}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P6	$-0.53 \times 10^{-3}$	$-0.583 \times 10^{-3}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	0,07553	68.0769
P7	0.52	0.572	$19.3355 \times 10^{-6}$	6.8912	68.0769
P8	$-0.40 \times 10^{-3}$	$-0.44 \times 10^{-3}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P9	-0.23503	-0.258533	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P10	$-1.944 \times 10^{-5}$	$-2.1384 \times 10^{-5}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.3484	68.0769
P11	0.01725	0.018975	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P12	$-0.10 \times 10^{-2}$	$-0.11 \times 10^{-2}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	92.0419
P13	1.1	1.21	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	46.5727
P14	$-4.111 \times 10^{-5}$	$-4.5221 \times 10^{-5}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	70.4454
P15	-0.53	-0.583	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	296.6363
P16	$-0.452 \times 10^{-3}$	$-0.4972 \times 10^{-3}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P17	$-0.5107 \times 10^{-7}$	$-0.56177 \times 10^{-7}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769
P18	$-0.1466 \times 10^{-3}$	$-0.16126 \times 10^{-3}$	$19.3355 \times 10^{-6}$	1.5093	68.0769

Tabela 12 - Análise de sensibilidade de cada parâmetro através do resíduo da função objetivo para um degrau na taxa de alimentação da alumina (DMA).

Param.	Valores dos Parâmetros Originais	Valores dos Parâmetros Variados	Resíduo da função objetivo		
			RFob1 $45.2690 \times 10^{-3}$	RFob2 $14.1247 \times 10^{-3}$	RFob3 $539.5063 \times 10^{-3}$
P1	$-0.11 \times 10^{-2}$	$-0.121 \times 10^{-2}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P2	$-0.23 \times 10^{-6}$	$-0.253 \times 10^{-6}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P3	$0.27 \times 10^{-7}$	$0.297 \times 10^{-7}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P4	$-2.222 \times 10^{-9}$	$-2.4442 \times 10^{-9}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P5	$0.3507 \times 10^{-3}$	$0.38577 \times 10^{-3}$	$122.4487 \times 10^{-6}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P6	$-0.53 \times 10^{-3}$	$-0.583 \times 10^{-3}$	$45.2690 \times 10^{-6}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P7	<b>0.52</b>	<b>0.572</b>	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P8	$-0.40 \times 10^{-3}$	$-0.44 \times 10^{-3}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$78.1994 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P9	<b>-0.23503</b>	<b>-0.258533</b>	$45.2690 \times 10^{-3}$	$13.3469 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P10	$-1.944 \times 10^{-5}$	$-2.1384 \times 10^{-5}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$31.3639 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P11	<b>0.01725</b>	<b>0.018975</b>	$45.2690 \times 10^{-3}$	$32.9671 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P12	$-0.10 \times 10^{-2}$	$-0.11 \times 10^{-2}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.2247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P13	<b>1.1</b>	<b>1.21</b>	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P14	$-4.111 \times 10^{-5}$	$-4.5221 \times 10^{-5}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$360.2772 \times 10^{-3}$
P15	<b>-0.53</b>	<b>-0.583</b>	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	$539.5063 \times 10^{-3}$
P16	$-0.452 \times 10^{-3}$	$-0.4972 \times 10^{-3}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	<b>1.1448</b>
P17	$-0.5107 \times 10^{-7}$	$-0.56177 \times 10^{-7}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	<b>1.1007</b>
P18	$-0.1466 \times 10^{-3}$	$-0.16126 \times 10^{-3}$	$45.2690 \times 10^{-3}$	$14.1247 \times 10^{-3}$	<b>67.4736</b>