

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA APLICADA

**“ Variedades Inerciais em um Modelo
Atmosférico de Lorenz ”**

por

Jorge Luis Domínguez Rodríguez

Dissertação submetida como requisito parcial
para a obtenção do grau de
Mestre em Matemática Aplicada

Prof. Dr. Mark Thompson
Orientador

Porto Alegre, junho de 2006.

CIP - CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO

Rodríguez, Jorge Luis Domínguez

“ Variedades Inerciais em um Modelo Atmosférico de Lorenz ” / Jorge Luis Domínguez Rodríguez.—Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2006.

75 p.: il.

Dissertação (mestrado) —Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada, Porto Alegre, 2006.

Orientador: Thompson, Mark

Dissertação: Métodos Analíticos em Dinâmica de Fluidos
Equações de Águas Rasas, Espaços de Sobolev, Métodos Espectrais

“ Variedades Inerciais em um Modelo Atmosférico de Lorenz ”

por

Jorge Luis Domínguez Rodríguez

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Linha de Pesquisa: Métodos Analíticos em Dinâmica de Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Mark Thompson

Banca examinadora:

Prof. Dr. Manuel Milla Miranda
PPGMAp/IM/UFRJ

Prof. Dr. Leonardo Guidi
PPGMAp/IM/UFRGS

Prof. Dr. Eduardo Brietzke
PPGMAT/IM/UFRGS

Dissertação apresentada e aprovada em
21 de junho de 2006.

Prof^a. Mária Cristina Varrialle, Ph.D.
Coordenadora

Conteúdo

RESUMO	2
ABSTRACT	3
INTRODUÇÃO	4
1 FORMULAÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA	7
1.1 Noções Preliminares	7
1.2 Espaços de Sobolev	8
1.2.1 Outros Espaços de Sobolev	9
1.2.2 Espaços $H^s(\Omega)$ [Caso $\Omega = \mathbb{R}^n$]	10
1.2.3 Espaço de Funções Periódicas	10
1.2.4 Desigualdades de Sobolev	11
1.3 Equações de Água Rasa com Orografia Inferior	14
1.3.1 Formulação Física das Equações de Água Rasa	14
1.4 Formulação do Modelo Matemático	16
1.5 As Equações Balanceadas	17
2 EQUAÇÕES REDUZIDAS COM $\varepsilon = 0$	22
2.1 Considerações Gerais	23
2.2 Teoria de Existência para o Problema Reduzido	26
2.3 Análise do ε -erro e Inicialização	28
2.3.1 Técnica de Inicialização	28

2.3.2	Estimativas para o ϵ -erro	38
3	VARIEDADES INERCIAIS APROXIMADAS	56
3.1	Método de Galerkin não-linear	56
3.2	Variedades Inerciais	57
3.2.1	A Variedade Aproximada \mathcal{M}_0	64
3.2.2	A Variedade Aproximada \mathcal{M}^s	66
	BIBLIOGRAFIA	73

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor Mark Thompson pela orientação e a paciência na realização deste trabalho.

RESUMO

Estimativas de erro são estabelecidas em termos do número de Rossby para a aproximação de Galerkin não linear nas soluções do *modelo atmosférico balanceado de Lorenz* com massa forçante. Desse modo a aproximação espectral da aproximação de Galerkin não linear é ligada ao número de Rossby.

Palavras-chave: Massa forçante, equações de águas rasas, balanceadas, variedade lenta, variedade inercial aproximada.

ABSTRACT

Error estimates are established in terms of the Rossby number for a nonlinear Galerkin approximation to the solutions of *the balanced atmosphere model of Lorenz* with mass forcing. Thereby, the approximation spectral dimension of the nonlinear Galerkin approximation is linked to the Rossby number.

Keywords: Mass Forcing, Shallow Water Equations, Balanced, Slow Manifold, Approximate Inertial Manifold.

INTRODUÇÃO

O fluxo da água sobre uma superfície é um fenômeno físico do interesse prático para muitos cientistas e pesquisadores. Por exemplo, fluxos tais como marés do oceano, ondas do vento, ruptura de represas, inundações de rios e tsunamis despertam grande interesse. Apesar da familiaridade diária do fluxo da água, as equações governando o fluxo interno compreendem um papel intratável das equações, demasiado complexo para ser de uso prático na maioria das aplicações. Conseqüentemente, as descrições aproximadas do fluxo são freqüentemente mais utilizadas. Uma aproximação do uso comum para muitas aplicações conduz às **Equações de Águas Rasas**, um sistema de equações diferenciais parciais não-lineares que aproximam o momentum da superfície horizontal do fluxo. Embora sendo uma simplificação das equações completas, as equações rasas da água raramente podem ser resolvidas exatamente e apresentam mesmo grandes dificuldades para a computação numérica.

Além disso, muitas aplicações reais introduzem complicações adicionais, tais como regiões secas, variáveis topográficas e evoluir dentro do domínio. O modelo raso da água pode ser usado para prever ondas tanto em pequenas como em grandes escalas de fluidos. Por isto, as leis que governam a atmosfera permitem a presença simultânea de um número de modos de oscilações, entre elas os modos de Rossby com período de vários dias, e os modos de inércia gravidade com período de poucas horas. Logo, as ondas de gravidade são de muito menor amplitude que as ondas de Rossby. Por este motivo, desejamos eliminar as ondas de gravidade das equações primitivas, posto que podem comprometer seriamente os prognósticos; pois requerem passos de tempo pequenos e podem interferir seriamente em prognósticos de período curto.

Neste trabalho, estuda-se o modelo de Lorenz introduzido em [17], o qual é uma simplificação das Equações de Águas Rasas. Desejamos expressar nosso sistema em termos do número de Rossby, assim tomamos como referência o trabalho de C. McWilliams and I. Yavneh [19], no qual é feita uma análise das equações

sem termo viscoso $\nu\Delta\mathbf{u}$ e força externa F . Foi provado por J. W. Cárdenas & M. Thompson em [4], a existência de solução para o modelo atmosférico de Lorenz, o que nos indica o caminho a seguir com base ao problema proposto na dissertação de J. Cárdenas [5].

Aqui apresentamos novos resultados para estimativas de erro para as equações balanceadas. Mais precisamente, no capítulo 1, fazemos uma breve introdução, lembrando alguns dos principais conceitos básicos, tais como espaços L^p , espaços de Sobolev, espaço das funções periódicas, entre outros. Apresenta-se uma dedução física das Equações de Águas Rasas com orografia inferior, assim como a formulação matemática do problema. Sendo assim fazemos uma expansão das equações de águas rasas mediante a decomposição solenoidal para a velocidade

$$\mathbf{u} = \vec{k} \times \nabla\psi + \varepsilon\nabla\chi,$$

desta maneira obtemos um conjunto de equações as quais chamaremos de **Equações Diagnósticas** (1.26, 1.27 e 1.28).

No capítulo 2, negligenciando os termos de ordem maior do que um em ε , temos o novo conjunto de **Equações Reduzidas** (2.1, 2.2 e 2.3). O segundo sistema é freqüentemente resolvido utilizando técnicas numéricas como mencionamos anteriormente. Aproveitando os conhecimentos da Análise Funcional e dos espaços de Sobolev, estabelecemos o ε -erro como uma diferença entre estes sistemas e fazemos estimativas de regularidade em $H^4(\Omega)$, para $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, com a finalidade de estabelecer uma cota pequena para este erro. Com a finalidade de obter este resultado é preciso introduzir uma técnica chamada de inicialização [12], que nos permite ter valores iniciais pequenos para garantir valores no tempo sempre próximos de uma variedade lenta, isto requer a introdução de uma série de estimativas dadas mediante lemas técnicos, os quais são de vital importância para a demonstração de nosso resultado central. Por outro lado, nas nossas estimativas obtém-se termos de ordem superior ao procurado, o que requer a utilização de um argumento via contradição, seguindo J. G. Heywood & R. Rannacher em [11]. Mediante este

desenvolvimento conseguimos enunciar nosso resultado central na forma do Teorema 2.3.1.

Já no capítulo 3, introduzimos o método não-linear de Galerkin, fazendo uma aproximação por variedades inerciais para a solução $\tilde{z}(t)$ do sistema reduzido. Inspirados nos trabalhos de C. Foias, O. R. Temam, [8], X. Liu, [18] e E. S. Titi [27], introduzimos a variedade inercial $\mathcal{M}_0 = \text{graf}(\Phi_0(p))$, onde Φ_0 é descrito de maneira explícita. Na seguinte seção deste capítulo introduzimos uma outra variedade analítica $\mathcal{M}^s = \text{graf}(\Phi^s(p))$, com Φ^s dado de maneira implícita, permitindo a utilização de métodos computacionais para sua determinação, os quais, cabe lembrar, não são tratados neste trabalho.

Finalmente, combinando as estimativas dadas no Teorema 2.3.1 e a aproximação mediante variedades inerciais usando o método de Galerkin não linear temos a estimativa dada no Teorema 3.2.4, o qual nos diz que fazendo uma projeção sobre as $N + 1$ primeiras auto-funções onde $N \sim \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ ou $N \sim \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2})$ para as variedades inerciais \mathcal{M}_0 e \mathcal{M}^s , respectivamente, também é possível obter uma solução aproximada das equações de Águas Rasas.

1 FORMULAÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA

No presente capítulo daremos uma introdução acerca das principais definições da Análise Funcional, e definiremos os conhecidos espaços de Sobolev e suas principais propriedades.

No que segue, Ω denotará um aberto de \mathbb{R}^n , um ponto genérico de \mathbb{R}^n é denotado por $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, e a medida de Lebesgue sobre \mathbb{R}^n é denotada por $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$.

1.1 Noções Preliminares

Para $1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ é o espaço das funções reais sobre Ω que são L^p para a medida de Lebesgue $d\mathbf{x}$. Para $p = \infty$, $L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções reais sobre Ω mensuráveis e essencialmente limitadas. L^p é um espaço de Banach com norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \text{ess } |u(\mathbf{x})|, & p = \infty. \end{cases}$$

Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Seja $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ um multi-índice de módulo $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Definimos

$$\begin{cases} D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}, & 1 \leq i \leq n, \\ D^{\boldsymbol{\alpha}} u = D_1^{\alpha_1} u \dots D_n^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}. \end{cases}$$

Utilizamos o termo *loc* para dizer que a propriedade referida é satisfeita em subconjuntos pré-compactos¹ de Ω .

¹Conjuntos cujo fecho é compacto

1.2 Espaços de Sobolev

Considere o seguinte conjunto

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid \phi \in C^\infty(\Omega), \text{ supp}(\phi) \text{ é compacto}\}$$

chamaremos de **funções teste** os elementos deste conjunto.

Definição 1.2.1. Suponha $u, v \in L_{loc}^p(\Omega)$, e α um multi-índice. Dizemos que v é a α derivada parcial fraca de u , e denotamos $D^\alpha u = v$, se

$$\int_{\Omega} u D^\alpha \phi \, d\mathbf{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi \, d\mathbf{x}, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Lema 1.2.1. A α derivada parcial fraca de u , se existe, é unicamente definida, salvo em um conjunto de medida zero.

Demonstração. Suponha que existem $v, \tilde{v} \in L_{loc}^1(\Omega)$, satisfazendo a definição dada acima. Logo tem-se

$$\int_{\Omega} (v - \tilde{v}) \phi \, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

o que implica a unicidade da derivada fraca quase sempre. \square

Considere $1 \leq p \leq \infty$, e m um inteiro positivo.

Definição 1.2.2. O espaço das funções $u \in L_{loc}^p(\Omega)$, cuja α derivada parcial fraca existe e $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice $|\alpha| \leq m$, é chamado espaço de Sobolev e denotado por $W^{m,p}(\Omega)$.

Observação 1. Se $p = 2$, escreveremos

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega) \quad m = 0, 1, \dots$$

o qual é um espaço de Hilbert, via o produto escalar:

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u(\mathbf{x}), D^\alpha v(\mathbf{x}) \rangle$$

O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, é um espaço de Banach, com a seguinte norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & (p = \infty) \end{cases}$$

1.2.1 Outros Espaços de Sobolev

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert, $X \subset Y$, X denso em Y , com injeção continua. A teoria de interpolação, fornece uma família de espaços de Hilbert denotada por $[X, Y]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$, tal que $[X, Y]_0 = X$, $[X, Y]_1 = Y$, e

$$X \subset [X, Y]_\theta \subset Y \quad (1.1)$$

as injeções em (1.1) sendo continuas, e cada espaço denso no sucedendo. A norma sobre $[X, Y]_\theta$ é tal que

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \leq c(\theta) \|u\|_X^{1-\theta} \|u\|_Y^\theta, \quad \forall u \in X, \quad \forall \theta \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

Por interpolação entre $H^m(\Omega)$ e $H^{m+1}(\Omega)$ podemos definir para $\alpha \in (0, 1)$

$$H^{m+\alpha}(\Omega) = [H^{m+1}(\Omega), H^m(\Omega)]_{1-\alpha} \quad (1.3)$$

Assim é possível definir espaços intermediários entre espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, $W^{m+1,p}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, e assim obtemos a família de espaços $W^{s,p}(\Omega)$. $s \in \mathbb{R}_+$, $p > 1$.

Outra forma de definir estes espaços é utilizando Transformada de Fourier, como veremos na próxima seção.

1.2.2 Espaços $H^s(\Omega)$ [Caso $\Omega = \mathbb{R}^n$]

Utilizando Transformada de Fourier $u \in H^m(\Omega)$, m um inteiro positivo, se

$$\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} (2\pi)^{2|\alpha|} |\xi^{2\alpha}| |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

ou, equivalentemente,

$$\int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Assim, é natural definir o espaço de Sobolev $H^s(\Omega)$ para valores de $s \in \mathbb{R}^+$ como o conjunto das funções cujas Transformadas de Fourier satisfazem a estimativa (veja Lions [15], pag. 35.)

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

1.2.3 Espaço de Funções Periódicas

Considere $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função periódica de período $L_i > 0$, em cada coordenada x_i , ($i = 1, \dots, n$), isto é

$$u(\mathbf{x} + L_i \mathbf{e}_i) = u(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad , \quad \text{onde } \{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n \text{ é a base canônica de } \mathbb{R}^n$$

Neste caso denotamos o período por $\Omega = (0, L_1) \times \dots \times (0, L_n)$ e por $W_{per}^{m,p}(\Omega)$ o espaço das restrições a Ω das funções periódicas, as quais são $W^{m,p}(\mathbf{O})$, sobre qualquer aberto limitado \mathbf{O} .

Como um caso particular para $p = 2$ temos os espaços $H_{per}^m(\Omega)$, os quais podem ser estudados por meio de expansões em series de Fourier

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}_{\mathbf{k}} e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}}} \quad , \quad \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}} = \left(\frac{x_1}{L_1}, \dots, \frac{x_n}{L_n} \right) \quad (1.4)$$

Então, $u \in L^2(\Omega)$ se e somente se

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = |\Omega| \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} |\hat{u}_{\mathbf{k}}|^2 < \infty \quad , \quad |\Omega| = L_1 \dots, L_n$$

e $u \in H_{per}^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}^+$, se e somente se

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n} (1 + |\mathbf{k}|^2)^s |\hat{u}_k|^2 < \infty \quad (1.5)$$

Além disso, a raiz quadrada da expressão na esquerda da desigualdade (1.5) induz sobre $H_{per}^s(\Omega)$ uma norma equivalente à de $H^s(\Omega)$.

No que segue denotaremos

$$\dot{L}^2(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

$$\dot{H}^m(\Omega) = \left\{ u \in H^m(\Omega) : \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

Então $\dot{H}_{per}^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}^+$ é o espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$, satisfazendo (1.4), (1.5) e

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

1.2.4 Desigualdades de Sobolev

Lembramos algumas desigualdades conhecidas ² :

Teorema 1.2.1 (Desigualdade de Poincaré). *Sobre $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$ temos:*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad \forall u \in \dot{H}_{per}^1(\Omega).$$

Observação 2. *Em nosso caso sobre $\dot{H}_{per}^1(\Omega)$, com $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, a Desigualdade de Poincaré é dada por*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_1^{-1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad \forall u \in \dot{H}_{per}^1(\Omega).$$

Teorema 1.2.2 (Desigualdade de Schwarz com ε). *Para $a, b > 0$, e $\varepsilon > 0$, temos:*

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$$

²Para maiores detalhes veja o livro de Temam [24].

A seguir demonstramos a desigualdade de Agmon, mas fazemos isto por meios mais diretos do que os enunciados no livro de Agmon (veja [2], pag 210) e explicitando o valor das constantes envolvidas.

Teorema 1.2.3 (Desigualdade de Agmon). *Existe uma constante $C_\infty(\Omega)$ tal que*

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall u \in H_{per}^2(\Omega)$$

$$\text{onde } C_\infty = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi}}.$$

Demonstração. Não obstante o fato de que este resultado é bem conhecido na literatura, fazemos uma demonstração direta para o caso do quadrado $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, obtendo neste caso C_∞ explicitamente. Notemos que

$$u(x, y)^2 = u(\xi, y)^2 + 2 \int_\xi^x u(\xi, y) u_x(\xi, y) d\xi.$$

Então,

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq |u(\xi, y)|^2 + 2 \left(\int_\xi^x |u(\xi, y)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_\xi^x |u_x(\xi, y)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq |u(\xi, y)|^2 + 2 \left(\int_0^1 |u(\xi, y)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |u_x(\xi, y)|^2 d\xi \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Agora integrando sobre Ω , $|\Omega| = 1$, em (ξ, y) e utilizando Schwarz, temos

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^1 d\xi \int_0^1 dy \left(\int_0^1 |u(\xi, y)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |u_x(\xi, y)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u_x\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} + 2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Daí, utilizando a Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} |u|_{L^\infty(\Omega)}^2 &\leq \left(2 + \frac{1}{2\pi} \right) \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left(2 + \frac{1}{2\pi} \right) \frac{1}{2\pi} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

ou,

$$|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi}} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

□

Precisamos uma desigualdade de interpolação entre $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$. Para isto seguimos como referência a demonstração de Teman (Veja [24] pag. 291).

Teorema 1.2.4 (Desigualdade de Sobolev).

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq C_4 \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \quad \forall u \in H_{per}^1(\Omega) \quad (1.6)$$

$$\text{onde } C_4 = \sqrt[4]{\frac{1}{4\pi^2} + \frac{2}{\pi}} + 2.$$

Demonstração. Novamente posto que esta desigualdade é conhecida na bibliografia daremos uma demonstração direta do resultado para o quadrado $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, com uma constante dada explicitamente. Notemos que

$$u(x, y)^2 = u(\xi, y)^2 + 2 \int_{\xi}^x u(\xi, y) u_x(\xi, y) d\xi$$

Daí,

$$u(x, y)^2 \leq u(\xi, y)^2 + 2v_1(y),$$

$$u(x, y)^2 \leq u(x, \zeta)^2 + 2v_2(x),$$

onde

$$v_1(y) = \int_0^1 u(\xi, y) u_x(\xi, y) d\xi \quad e \quad v_2(x) = \int_0^1 u(x, \zeta) u_y(x, \zeta) d\zeta.$$

Daí,

$$u(x, y)^4 \leq u(\xi, y)^2 u(x, \zeta)^2 + 2v_1(y) u(x, \zeta)^2 + 2v_2(x) u(\xi, y)^2 + 4v_1(y) v_2(x).$$

Integrando sobre Ω , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(\mathbf{x})^4 d\mathbf{x} &\leq \int_0^1 u(\xi, y)^2 dy \int_0^1 u(x, \zeta)^2 dx + 2 \int_0^1 v_1(y) dy \int_0^1 u(x, \zeta)^2 dx \\ &\quad + 2 \int_0^1 v_2(x) dx \int_0^1 u(\xi, y)^2 dy + 4 \int_0^1 v_1(y) dy \int_0^1 v_2(x) dx \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^4 + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 (\|u\|_{L^2(\Omega)} \|D_1 u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|D_2 u\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\quad + 4\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|D_1 u\|_{L^2(\Omega)} \|D_2 u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}^4 + 4\|u\|_{L^2(\Omega)}^3 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{4\pi^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\pi} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

e, daí,

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt[4]{\frac{1}{4\pi^2} + \frac{2}{\pi}} + 2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

□

1.3 Equações de Água Rasa com Orografia Inferior

As Equações de Água Rasa ou **Shallow Water Equations** são uma forma simples das equações de movimento que podem ser usadas para descrever a estrutura horizontal de uma atmosfera. Elas descrevem a evolução de um fluido incompressível em resposta às acelerações gravitacionais e rotacionais. As soluções das equações de água rasa representam muitos tipos de movimentos, incluindo ondas Rossby e ondas inércia-gravidade.

1.3.1 Formulação Física das Equações de Água Rasa

As Equações de Água Rasa descrevem um problema físico consistindo de um fluido incompressível homogêneo de altura média H , movimentando-se sobre uma superfície com variável topográfica $h(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = (x, y)$, e extensão horizontal infinita. A velocidade horizontal u é suposta independente da altura do fluido, e a velocidade vertical é determinada pela continuidade de massa. O sistema inteiro é suposto sobre um f -plano, por isso a ro-

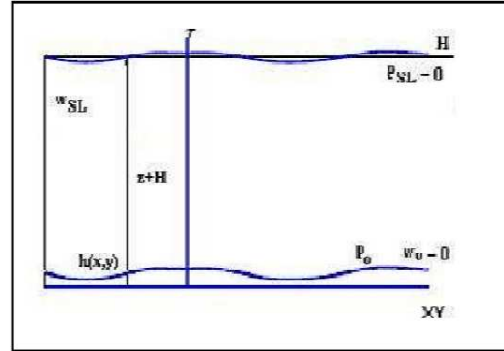


Figura 1.1: Equações de Água Rasa

tação da terra $\bar{\Omega}$ é suposta constante. Sua superfície livre superior é $z(\mathbf{x}, t) + H$. Na Figura 1.1, $z(\mathbf{x}, t)$ denota o desvio do fluido com respeito a H , g a aceleração da gravidade, p_{SL} a pressão da superfície livre e p_0 a pressão na orografia inferior.

Logo em nosso modelo suponha um fluido incompressível homogêneo em equilíbrio hidrostático, portanto:

$$\frac{dp}{d\tau} = -\rho g \quad (1.7)$$

Integrando, obtemos

$$\int_{p_{SL}=0}^p dp = \int_{z+H}^{\tau} -\rho g d\tau$$

$$p = \rho g(z + H - \tau)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = g \nabla z. \quad (1.8)$$

Por outro lado da equação de continuidade

$$\nabla \cdot u + \frac{\partial w}{\partial \tau} = 0$$

$$w_0 = 0 \quad \text{em} \quad z = h(\mathbf{x}),$$

O que implica $dw = -(\nabla \cdot u)d\tau$, ($\nabla \cdot u$ é independente de z). Integrando:

$$w_{SL} = \int_{w_0}^{w_{SL}} dw = - \int_h^{z+H} (\nabla \cdot u) d\tau = -(\nabla \cdot u)(z + H - h)$$

sendo $z + H$ e h superfícies materiais, temos:

$$w_{SL} = \frac{\partial}{\partial t}(z + H) = \frac{\partial h}{\partial t} = -(\nabla \cdot u)(z + H - h) \quad (1.9)$$

Além disso, para o movimento horizontal no sistema $\vec{U} = (0, U \sin \theta, U \cos \theta)$ e $\vec{g} = (0, 0, -g)$, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - f \vec{k} \times u, \quad (1.10)$$

onde $f = 2U_\tau = 2U \cos \theta$ é o parâmetro de Coriolis. Substituindo (1.8) em (1.10) e considerando (1.9), temos as equações de águas rasas sem termos forçados nem amortecidos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f \vec{k} \times u + g \nabla z = 0$$

$$\frac{\partial(z - h)}{\partial t} + (z + H - h) \nabla \cdot u = 0 \quad (1.11)$$

1.4 Formulação do Modelo Matemático

Vamos derivar o modelo massa forçando com orografia zero (isto é $h(x, y) = 0$) para as Equações de Águas Rasas no f -plano, introduzido por Lorenz em [17], descrito pelas equações

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + f \vec{k} \times \mathbf{u} + g \nabla z = \nu^* \Delta \mathbf{u} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}(z + H)) = k^* \Delta z + F^* \quad (1.13)$$

Aqui os movimentos horizontais e verticais do fluído ($\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, u_1 e u_2 são a velocidade zonal e meridional respectivamente), são difusivamente amortecidos com coeficientes de amortecimento ν^* , o qual é feito para ser uma viscosidade turbulenta $\sim 2,25 \times 10^6 \text{ m}^2/\text{s}$ (Lorenz [17]) e k^* . O sistema é forçado supondo que é introduzida ou retirada massa do fluído. A função que descreve esta força $F^*(\mathbf{x})$ é independente do tempo t e por conservação de massa $\int_{\Omega^*} F^* d\mathbf{x} = 0$, toda a massa adicionada é suposta como movimentando-se a uma velocidade localmente apropriada. Geralmente, a altura média $H = 8 \text{ km}$, $L = 1080 \text{ km}$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $f^{-1} = 3$ horas. As equações (1.12) e (1.13) são definidas na região do plano $\Omega^* = [0, L] \times [0, L]$, sob condições de fronteira periódicas.

Como desejamos distinguir a dependência do número de Rossby é mais conveniente usar os escalas introduzidas por Mc Williams e Yanneh em [19] e não as de Lorenz em [17], a saber

$$\mathbf{u} \longrightarrow V^* \mathbf{u}, \quad (x, y) \longrightarrow L^{-1}(x, y), \quad z \longrightarrow \frac{R[1, R]}{B} H z, \quad F^* \longrightarrow \frac{R[1, R]}{B} F H,$$

onde V^* é uma velocidade característica, $R = \frac{V^*}{fL}$ é o **número de Rossby**, $F_r = \frac{V^*}{\sqrt{gH}}$ o **número de Froude** e $B = \left(\frac{R}{F_r}\right)^2$ o **número de Burger**. Também $[1, R] = \max(1, R)$.

Por simplicidade na análise seguinte supomos que $\nu^* = k^*$ não obstante seria apropriado incluir a hipótese de que $\nu^* \ll k^*$.

Observe que $\nu_0 = f^{-1}L^{-2}\nu^* \sim 48^{-1}$ e $\nu = R^{-1}\nu_0$, $B = 8$. Suponhamos o caso $R \ll 1$, de tal maneira que $[1, R] = 1$, sob estas escalas as equações tomam a forma

$$R \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + R(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \vec{k} \times \mathbf{u} + \nabla z = R\nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.14)$$

$$R \frac{\partial z}{\partial t} + R(\mathbf{u} \cdot \nabla) z + (8 + Rz) \operatorname{div}(\mathbf{u}) = R\nu \Delta z + F \quad (1.15)$$

Estas novas equações (1.14) e (1.15) estão definidas no domínio $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

Geralmente, trabalhamos não nos termos do número de Rossby mas do parâmetro ε , relacionado a ele através da igualdade

$$\varepsilon = \frac{R[1, R]}{[1, B]} = \frac{R}{8}.$$

1.5 As Equações Balanceadas

Introduzindo a decomposição solenoidal para a velocidade

$$\mathbf{u} = \vec{k} \times \nabla \psi + \varepsilon \nabla \chi, \quad \xi = (u_2)_x - (u_1)_y,$$

onde

χ = velocidade potencial para a parte divergente da velocidade,

ψ = função de corrente para a parte rotacional de \mathbf{u} ,

$\Delta \chi$ = divergência do fluxo,

$\Delta \psi$ = vorticidade do fluxo.

Note que

$$\nabla \times \mathbf{u} = \Delta \psi = \xi \quad e \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon \Delta \chi.$$

Na equação (1.14), tomando o rotacional $\nabla \times$, temos

$$R \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t} + R \nabla \times [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}] + \nabla \times [\vec{k} \times \mathbf{u}] + \nabla \times (\nabla z) = R\nu \nabla \times (\Delta \mathbf{u}) \quad (1.16)$$

onde,

$$\begin{aligned}\nabla \times [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] &= (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\nabla \times \mathbf{u}) \\ \nabla \times [\vec{k} \times \mathbf{u}] &= \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \nabla \times (\nabla z) &= 0 \\ \nabla \times \Delta \mathbf{u} &= \Delta(\nabla \times \mathbf{u}).\end{aligned}$$

Com estas equações vetoriais temos

$$R \frac{\partial \xi}{\partial t} + R(\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi + \varepsilon R \Delta \chi \xi + \varepsilon \Delta \chi = R\nu \Delta \xi. \quad (1.17)$$

Assim, na equação (1.15), temos

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)z + \left(\frac{1}{\varepsilon} + Rz\right) \operatorname{div}(\mathbf{u}) = \nu \Delta z + \frac{F}{R}. \quad (1.18)$$

Agora na equação (1.14), tomamos a divergência

$$R \frac{\partial(\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial t} + R \operatorname{div} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] + \operatorname{div} [\vec{k} \times \mathbf{u}] + \Delta z = R\nu \operatorname{div}(\Delta \mathbf{u}), \quad (1.19)$$

onde

$$\begin{aligned}\operatorname{div} [(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] &= (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + (u_1)_x^2 + 2(u_1)_y(u_2)_x + (u_2)_y^2 \\ \operatorname{div} [\vec{k} \times \mathbf{u}] &= -(u_2)_x + (u_1)_y \\ \operatorname{div}(\Delta \mathbf{u}) &= \operatorname{div}(\nabla \operatorname{div} \mathbf{u}) = \varepsilon \Delta^2 \chi.\end{aligned}$$

Assim temos,

$$\varepsilon R \frac{\partial(\Delta \chi)}{\partial t} + R\varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla)\Delta \chi - R\nu\varepsilon\Delta^2 \chi = -R[(u_1)_x^2 + 2(u_1)_y(u_2)_x + (u_2)_y^2] + \xi - \Delta z.$$

Por outro lado, substituindo os valores de u_1 e u_2 , proporcionados pela decomposição solenoidal temos

$$\begin{aligned}[(u_1)_x^2 + 2(u_1)_y(u_2)_x + (u_2)_y^2] &= \\ &= -2\mathfrak{I}(\psi_x \psi_y) + \varepsilon [2\mathfrak{I}(\psi_y, \chi_y) + 2\mathfrak{I}(\psi_x, \chi_x) + \varepsilon (\chi_{xx}^2 + 2\chi_{xy}^2 + \chi_{yy}^2)].\end{aligned}$$

Definamos

$$\mathfrak{E}(\psi, \chi) = 2\mathfrak{I}(\psi_y, \chi_y) + 2\mathfrak{I}(\psi_x, \chi_x) + \varepsilon(\chi_{xx}^2 + \chi_{yy}^2 + 2\chi_{xy}^2). \quad (1.20)$$

Então,

$$\varepsilon R \frac{\partial(\Delta\chi)}{\partial t} + R\varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla)\Delta\chi - R\nu\varepsilon\Delta^2\chi = 2R\mathfrak{J}(\psi_x\psi_y) - \varepsilon R\mathfrak{E}(\psi, \chi) + \xi - \Delta z.$$

Então as equações (1.14) e (1.15) tomam a forma

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi - \nu\Delta\xi = -\left(\frac{1}{8} + \varepsilon\xi\right)\Delta\chi, \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)z - \nu\Delta z = -(1 + \varepsilon z)\Delta\chi + \frac{F}{R}, \quad (1.22)$$

$$\varepsilon R \frac{\partial\Delta\chi}{\partial t} + \varepsilon R(\mathbf{u} \cdot \nabla)\Delta\chi - \nu\varepsilon R\Delta^2\chi = 2R\mathfrak{J}(\psi_x, \psi_y) - \varepsilon R\mathfrak{E}(\psi, \chi) + \xi - \Delta z, \quad (1.23)$$

$$\xi = \Delta\psi. \quad (1.24)$$

Recordemos agora que as Equações Balanceadas são obtidas negligenciando os termos $O(\varepsilon R)$. Assim, em (1.23) temos que

$$\Delta(\psi - z) = -16\varepsilon\mathfrak{J}(\psi_x, \psi_y)$$

tal que, se $\mathfrak{J}(\psi_x, \psi_y) = O(1)$, temos $(\psi - z) = O(\varepsilon)$. Isto motiva a introdução de uma nova variável dependente w , dada por $\psi - z = \varepsilon w$.

Na equação (1.22), fazendo cálculos vetoriais temos

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \nu\Delta z = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)z - (1 + \varepsilon z)\Delta\chi + \frac{F}{R},$$

onde

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)z = \left(\vec{k} \times \nabla\psi \cdot \nabla\right)z + \varepsilon\nabla\chi \cdot \nabla z = \mathfrak{J}(\psi, z) + \varepsilon\nabla\chi \cdot \nabla z.$$

Por outro lado, $\psi = z + \varepsilon w$, então $\mathfrak{J}(\psi, z) = \varepsilon\mathfrak{J}(w, z)$. Daí, temos

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \nu\Delta z = \varepsilon\mathfrak{J}(z, w) - \varepsilon\nabla\chi \cdot \nabla z - (1 + \varepsilon z)\Delta\chi + \frac{F}{R}. \quad (1.25)$$

Agora da equação (1.21), considerando que $\xi = \Delta z + \varepsilon\Delta w$, temos

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial\Delta w}{\partial t} - \varepsilon\nu\Delta^2 w &= -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\Delta z - \varepsilon(\mathbf{u} \cdot \nabla)\Delta w \\ &\quad - \left(\frac{\partial\Delta z}{\partial t} - \nu\Delta^2 z\right) - \left(\frac{1}{8} + \varepsilon\Delta z + \varepsilon^2\Delta w\right)\Delta\chi, \end{aligned}$$

Agora calculamos cuidadosamente os termos do lado direito da equação anterior:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Delta z &= \mathfrak{J}(\psi, \Delta z) + \varepsilon \nabla \chi \cdot \nabla \Delta z \\ &= \mathfrak{J}(z, \Delta z) + \varepsilon \mathfrak{J}(w, \Delta z) + \varepsilon \nabla \chi \cdot \nabla \Delta z \end{aligned}$$

Analogamente,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Delta w = \mathfrak{J}(z, \Delta w) + \varepsilon \mathfrak{J}(w, \Delta w) + \varepsilon \nabla \chi \cdot \nabla \Delta w.$$

A fim de calcular o terceiro termo utilizamos a equação (1.25), anteriormente encontrada:

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} - \nu \Delta^2 z = -\Delta^2 \chi + \varepsilon [\Delta \mathfrak{J}(z, w) - \Delta (\nabla \chi \cdot \nabla z) - \Delta (z \Delta \chi)] + \frac{\Delta F}{R},$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta \mathfrak{J}(z, w) &= \mathfrak{J}(\Delta z, w) + 2\mathfrak{J}(z_x, w_x) + 2\mathfrak{J}(z_y, w_y) + \mathfrak{J}(z, \Delta w) \\ \Delta (\nabla \chi \cdot \nabla z) &= \nabla \Delta \chi \cdot \nabla z + 2\nabla \chi_x \cdot \nabla z_x + 2\nabla \chi_y \cdot \nabla z_y + \nabla \chi \cdot \nabla \Delta z \\ \Delta (z \Delta \chi) &= \Delta z \Delta \chi + 2\nabla z \cdot \nabla \Delta \chi + z \Delta^2 \chi. \end{aligned}$$

Daí temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta z}{\partial t} - \nu \Delta^2 z &= -\Delta^2 \chi + \varepsilon [\mathfrak{J}(\Delta z, w) + 2\mathfrak{J}(z_x, w_x) + 2\mathfrak{J}(z_y, w_y) + \mathfrak{J}(z, \Delta w) \\ &\quad - 3\nabla \Delta \chi \cdot \nabla z - 2\nabla \chi_x \cdot \nabla z_x - 2\nabla \chi_y \cdot \nabla z_y - \nabla \chi \cdot \nabla \Delta z \\ &\quad - \Delta z \Delta \chi - z \Delta^2 \chi] + \frac{\Delta F}{R} \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \Delta w}{\partial t} - \varepsilon \nu \Delta^2 w &= \mathfrak{J}(\Delta z, z) + \varepsilon \mathfrak{J}(\Delta z, w) - \varepsilon \nabla \chi \cdot \nabla \Delta z + \varepsilon \mathfrak{J}(\Delta w, z) \\ &\quad + \varepsilon^2 \mathfrak{J}(\Delta w, w) - \varepsilon^2 \nabla \chi \cdot \nabla \Delta w + \Delta^2 \chi + \varepsilon [-\mathfrak{J}(\Delta z, w) \\ &\quad - 2\mathfrak{J}(z_x, w_x) - 2\mathfrak{J}(z_y, w_y) - \mathfrak{J}(z, \Delta w) + 3\nabla \Delta \chi \cdot \nabla z \\ &\quad + 2\nabla \chi_x \cdot \nabla z_x + 2\nabla \chi_y \cdot \nabla z_y + \nabla \chi \cdot \nabla \Delta z + \Delta z \Delta \chi \\ &\quad + z \Delta^2 \chi] - \left(\frac{1}{8} + \varepsilon \Delta z + \varepsilon^2 \Delta w \right) \Delta \chi - \frac{\Delta F}{R} \end{aligned}$$

Finalmente da equação (1.23), temos

$$\varepsilon \frac{\partial \Delta \chi}{\partial t} - \nu \varepsilon \Delta^2 \chi = -\varepsilon (\mathbf{u} \cdot \nabla) \Delta \chi + 2 \mathfrak{J}(\psi_x, \psi_y) - \varepsilon \mathfrak{E}(\psi, \chi) + \frac{1}{8} \Delta w,$$

onde

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \nabla) \Delta \chi &= \mathfrak{J}(z, \Delta \chi) + \varepsilon \mathfrak{J}(w, \Delta \chi) + \varepsilon \nabla \chi \cdot \nabla \Delta \chi \\ \mathfrak{J}(\psi_x, \psi_y) &= \mathfrak{J}(z_x, z_y) + \varepsilon \mathfrak{J}(z_x, w_y) + \varepsilon \mathfrak{J}(w_x, z_y) + \varepsilon^2 \mathfrak{J}(w_x, w_y).\end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial \Delta \chi}{\partial t} - \nu \varepsilon \Delta^2 \chi &= \left[\frac{1}{8} \Delta w + 2\mathfrak{J}(z_x, z_y) \right] + \varepsilon [\mathfrak{J}(\Delta \chi, z) + 2\mathfrak{J}(z_x, w_y) \\ &+ 2\mathfrak{J}(w_x, z_y) - 2\mathfrak{J}(\psi_y, \chi_y) - 2\mathfrak{J}(\psi_x, \chi_x)] \\ &+ \varepsilon^2 [\mathfrak{J}(\Delta \chi, w) - \nabla \chi \cdot \nabla \Delta \chi + 2\mathfrak{J}(w_x, w_y) - \chi_{xx}^2 - \chi_{yy}^2 - 2\chi_{xy}^2].\end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que $\psi = z + \varepsilon w$, temos

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}(\psi_y, \chi_y) &= \mathfrak{J}(z_y, \chi_y) + \varepsilon \mathfrak{J}(w_y, \chi_y) \\ \mathfrak{J}(\psi_x, \chi_x) &= \mathfrak{J}(z_x, \chi_x) + \varepsilon \mathfrak{J}(w_x, \chi_x)\end{aligned}$$

Deste modo obtemos o novo conjunto de equações a seguir que chamaremos de **Equações Diagnósticas**³:

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \nu \Delta z = -\Delta \chi + \varepsilon [\mathfrak{J}(z, w) - \nabla \chi \cdot \nabla z - z \Delta \chi] + \frac{F}{R}, \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial \Delta w}{\partial t} - \varepsilon \nu \Delta^2 w &= \left[-\frac{1}{8} \Delta \chi + \mathfrak{J}(\Delta z, z) + \Delta^2 \chi \right] + \varepsilon [2\mathfrak{J}(\Delta w, z) + 3\nabla \Delta \chi \cdot \nabla z \\ &+ z \Delta^2 \chi + 2\mathfrak{J}(w_x, z_x) + 2\mathfrak{J}(w_y, z_y) + 2\nabla \chi_x \cdot \nabla z_x + 2\nabla \chi_y \cdot \nabla z_y] \\ &+ \varepsilon^2 [\mathfrak{J}(\Delta w, w) - \nabla \chi \cdot \nabla \Delta w - \Delta w \Delta \chi] - \frac{\Delta F}{R}\end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial \Delta \chi}{\partial t} - \nu \varepsilon \Delta^2 \chi &= \left[\frac{1}{8} \Delta w + 2\mathfrak{J}(z_x, z_y) \right] + \varepsilon [\mathfrak{J}(\Delta \chi, z) + 2\mathfrak{J}(z_x, w_y) \\ &+ 2\mathfrak{J}(w_x, z_y) + 2\mathfrak{J}(\chi_y, z_y) + 2\mathfrak{J}(\chi_x, z_x)]\end{aligned} \quad (1.28)$$

$$+ \varepsilon^2 [-\nabla \chi \cdot \nabla \Delta \chi + 2\mathfrak{J}(w_x, w_y) + 2\mathfrak{J}(\chi_y, w_y)]$$

$$+ 2\mathfrak{J}(\chi_x, w_x) + \mathfrak{J}(\Delta \chi, w) - \chi_{xx}^2 - \chi_{yy}^2 - 2\chi_{xy}^2]$$

³Também chamadas Equações da Vorticidade - Divergência.

2 EQUAÇÕES REDUZIDAS COM $\varepsilon = 0$

Neste capítulo apresentamos como um exemplo não trivial o caso no qual $\varepsilon = 0$. Este caso também é tratado no artigo de Kopell [12], mas para as equações de Navier Stokes, que não é o caso neste trabalho.

No sistema reduzido (1.26) - (1.28), desprezando os termos da ordem ε mais alta do que zero, obtemos o conjunto reduzido das equações

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{z} + \Delta \tilde{\chi} - \frac{F}{R} = 0, \quad (2.1)$$

$$-\frac{1}{8} \Delta \tilde{\chi} + \mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}) + \Delta^2 \tilde{\chi} - \frac{\Delta F}{R} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{8} \Delta \tilde{w} + 2\mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_y) = 0. \quad (2.3)$$

De (2.2) obtemos

$$\tilde{\chi} = \left(-\Delta^2 + \frac{1}{8} \Delta \right)^{-1} \left(\mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}) - \frac{\Delta F}{R} \right)$$

e substituindo $\tilde{\chi}$ in (2.1) obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} - \nu \Delta \tilde{z} &= \frac{F}{R} - \left(-\Delta + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[\mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}) - \frac{\Delta F}{R} \right] \\ \tilde{z}(0) &= \tilde{z}_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Então \tilde{w} e $\tilde{\chi}$ são obtidas das equações reduzidas (2.2) e (2.3) em Ω . A condição inicial deve ser restrita a

$$\tilde{w}(0) = -16\Delta^{-1}\mathfrak{J}(\psi_{0,y}, \psi_{0,x}), \quad \left(\tilde{\psi}(0) = \tilde{z}(0) - 16\varepsilon\Delta^{-1}\mathfrak{J}(\psi_{0,y}, \psi_{0,x}) \right)$$

e

$$\tilde{\chi}(0) = \left(-\Delta^2 + \frac{1}{8} \Delta \right)^{-1} \left(\mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}_0, \tilde{z}_0) - \frac{\Delta F}{R} \right). \quad (2.5)$$

Segue-se que podemos com segurança comparar o ε -sistema reduzido (1.26)–(1.28), somente para os dados iniciais restritos z_0 , $\psi_0 = \tilde{\psi}(0)$, $\chi_0 = \tilde{\chi}(0)$ dados por (2.5). Em essência, supomos que estes dados iniciais ficam próximos a uma Variedade Lenta e obtemos estimativas em intervalos determinados do tempo.

2.1 Considerações Gerais

Seja

$$\mathcal{V} = \left\{ \Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}, \text{ satisfazendo } \int_{\Omega} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \int_{\Omega} z \, d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

onde \mathcal{P} é o espaço dos polinômios trigonométricos de período 2π em $\mathbf{x} = (x, y)$.

Em cada caso definimos

$$H \text{ o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } L^2(\Omega) \text{ e}$$

$$V = \dot{H}_{per}^1(D) \text{ o fecho de } \mathcal{V} \text{ em } H^m(\Omega)$$

Funções em $H_{per}^m(\Omega)$ podem ser estudadas por meio de series de Fourier

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ z(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}}(t) \\ b_{\mathbf{k}}(t) \end{pmatrix} e^{2\pi i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{k} \neq 0, \quad \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad z = \tilde{z}.$$

Tem-se $\Psi \in H_{per}^m(\Omega)$ se e somente se

$$\|\Psi\|_{m,2}^2 = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2} (|a_{\mathbf{k}}|^2 + |b_{\mathbf{k}}|^2) (1 + |\mathbf{k}|^2)^m < \infty.$$

Definição 2.1.1. Para $u \in H$ e $v \in V$, definimos

$$|u|^2 = \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx, \quad e \quad \|v\|^2 = \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx$$

as normas e $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ os produtos internos em H e V , respectivamente.

Definimos o operador A_0 com $D(A_0) = \dot{H}_{per}^2(\Omega)$ por meio da forma bilinear

$$\langle A_0 u, v \rangle = \langle\langle u, v \rangle\rangle \quad u, v \in \dot{H}_{per}^1(\Omega)$$

A_0^{-1} é um operador linear contínuo de H em $D(A_0)$, além disso, compacto e auto-adjunto em H . Assim podemos usar a teoria espectral elementar de operadores compactos auto-adjuntos em espaços de Hilbert para inferir que existe uma base ortonormal de auto-funções de A_0^{-1}

$$A_0^{-1} w_j = \mu_j w_j, \quad w_j \in D(A_0)$$

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots, \quad \mu_j \longrightarrow 0, \text{ quando } j \longrightarrow \infty.$$

Fazendo $\lambda_j = \mu_j^{-1}$, obtemos uma seqüência enumerável de autofunções $\{w_j, j \in \mathbb{N}\}$, as quais formam uma base ortonormal de H , tais que

$$A_0 w_j = \lambda_j w_j, \quad w_j \in D(A_0)$$

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad \lambda_j \longrightarrow \infty, \text{ quando } j \longrightarrow \infty$$

Considerando A_0 um operador não limitado, definido positivo, auto-adjunto utilizamos a teoria espectral (veja [23]) para definir potências destes operadores A_0^s de A_0 para $s \in \mathbb{R}$. Para todo $s > 0$, A_0^s é um operador não limitado auto-adjunto com domínio denso. O operador A_0^s é positivo definido e injetivo.

Para $u, v \in H^1(\Omega)$ definimos $B(u, v) \in V'$ por

$$b(u, v, w) = \langle B(u, v), w \rangle = \langle (u \cdot \nabla) v, w \rangle, \quad u, v, w \in V.$$

$$= \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j \, d\mathbf{x}.$$

Então B é um operador contínuo bilinear de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ (ou $V \times V$) em V' e este operador pode ser estendido como um operador de $H^{m_1}(\Omega) \times H^{m_2}(\Omega)$ em V' ou H , para apropriados valores de m_1 e m_2 . Enunciamos a seguir algumas desigualdades para o operador definido acima:

$$\text{E1. } |b(u, v, w)| \leq C_4 |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| |w|^{1/2} \|w\|^{1/2}, \quad \forall u, v, w \in V.$$

Demonstração. Fazendo repetidas aplicações das desigualdades de Schwarz e Sobolev, encontramos

$$|b(u, v, w)| \leq \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} |u_i (D_i v_j) w_j| \, d\mathbf{x}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^2 \|u_i\|_{L^4(\Omega)} \|D_i v_j\|_{L^2(\Omega)} \|w_j\|_{L^4(\Omega)}$$

$$\leq \left(\sum_{i,j=1}^2 |D_i v_j|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^2 \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i,j=1}^2 \|w_j\|_{L^4(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Por outro lado, utilizando a equação (1.6), tem-se

$$\sum_{i,j=1}^2 \|u_i\|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C_4^2 \sum_{i,j=1}^2 |u_i| |\nabla u_i| \leq C_4^2 |u| \|u\|.$$

Analogamente, temos uma estimativa para w_j . Daí,

$$|b(u, v, w)| \leq C_4 |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| |w|^{1/2} \|w\|^{1/2}$$

□

Observação 3. Se $u, v, w \in V$, a relação

$$b(u, v, w) = -b(u, w, v)$$

estabelece uma outra estimativa para b :

$$|b(u, v, w)| \leq C_4 |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} |v|^{1/2} \|v\|^{1/2} \|v\|.$$

$$\text{E2. } |B(u, v)| \leq C_\infty |u|^{1/2} |A_0 u|^{1/2} \|v\|, \forall v \in V, \forall u \in D(A_0).$$

Demonstração. Note que

$$|B(u, v)| = |(u \cdot \nabla)v| \leq |u|_\infty |A_0^{1/2} v| \leq C_\infty |u|^{1/2} |A_0 u|^{1/2} |A_0^{1/2} v|.$$

□

$$\text{E3. } |B(u, v)| \leq C_1 |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\|^{1/2} |A_0 v|^{1/2}, \forall u \in V, \forall v \in D(A_0).$$

Demonstração. Interpolando e utilizando a desigualdade 1.6, temos

$$\begin{aligned} |B(u, v)| &\leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_4^2 |u|^{1/2} |A_0^{1/2} u|^{1/2} |A_0^{1/2} v|^{1/2} |A_0 v|^{1/2} \end{aligned}$$

e assim temos, $C_1 = C_4^2$.

□

$$\text{E4. } \|B(u, v)\| \leq \frac{C_2}{\sqrt{\lambda_1}} |A_0 u| |A_0 v|, \forall u, v \in D(A_0).$$

Demonstração. Também,

$$\begin{aligned} |A_0^{1/2} B(u, v)| &= |\nabla[(u \cdot \nabla)v]| \\ &\leq \|A_0^{1/2} u\|_{L^4(\Omega)} \|A_0^{1/2} v\|_{L^4(\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\Omega)} |A_0 v| \\ &\leq C_4^2 |A_0^{1/2} u|^{1/2} |A_0 u|^{1/2} |A_0^{1/2} v|^{1/2} |A_0 v|^{1/2} + |u|_\infty |A_0 v| \\ &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0 u| |A_0 v| + C_\infty |u|^{1/2} |A_0 u|^{1/2} |A_0 v| \\ &\leq (C_4^2 + C_\infty) \lambda_1^{-1/2} |A_0 u| |A_0 v|. \end{aligned}$$

Logo, temos $C_2 = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} + \frac{2}{\pi}} + 2 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi}}$ □

E5. $\left| A_0^{s/2} B(u, v) \right| \leq \frac{C_3}{\lambda_1^{s/2-1/2}} |A_0^{s/2} u| |A_0^{\frac{s+1}{2}} v|, s > 1.$

Demonstração. Utilizando a fórmula de Leibniz, temos:

$$\begin{aligned} \left| A_0^{s/2} B(u, v) \right| &\leq \sum_{\beta \leq s/2} \binom{s/2}{\beta} \left| A_0^\beta u \right| \left| A_0^{s/2-\beta} A_0^{1/2} v \right|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \frac{\sum_{\beta \leq s/2} \binom{s/2}{\beta} C_\infty}{\lambda_1^{s/2-1/2}} \left| A_0^{s/2} u \right| \left| A_0^{\frac{s+1}{2}} v \right| \end{aligned}$$

Assim temos $C_3 = \sum_{\beta \leq s/2} \binom{s/2}{\beta} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{1 + \frac{1}{4\pi}}.$ □

2.2 Teoria de Existência para o Problema Reduzido

Nesta seção consideramos a teoria de existência para o problema reduzido descrito pelas equações (2.4) (e (2.5)). Denotaremos $\nabla^\perp = \left(\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial x} \right)$, além disso, lembremos que

$$\mathfrak{J}(f, g) = \begin{vmatrix} f_x & g_x \\ f_y & g_y \end{vmatrix} = \nabla f \cdot \nabla^\perp g.$$

Observe primeiramente que para \tilde{z} suficientemente suave, obtemos mediante integração por partes:

$$\int_{\Omega} \mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla \Delta \tilde{z} \cdot \nabla^\perp \tilde{z} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \Delta \tilde{z} \operatorname{div} (\nabla^\perp \tilde{z}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Além disto,

$$\begin{aligned} \langle J(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}), \tilde{z} \rangle &= \int_{\Omega} \mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}) \tilde{z} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\nabla(\Delta \tilde{z}) \cdot \nabla^\perp \tilde{z}) \tilde{z} \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla(\Delta \tilde{z}) \cdot \nabla^\perp \tilde{z}^2 \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta \tilde{z} \operatorname{div} (\nabla^\perp \tilde{z}^2) \, d\mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

por outro lado $\langle \mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}), \Delta \tilde{z} \rangle = - \langle \mathfrak{J}(\tilde{z}, \Delta \tilde{z}), \Delta \tilde{z} \rangle$, obtendo assim,

$$\int_{\Omega} \mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad (2.6)$$

$$\langle \mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}), \tilde{z} \rangle = 0, \quad e \quad \langle \mathfrak{J}(\Delta \tilde{z}, \tilde{z}), \Delta \tilde{z} \rangle = 0 \quad (2.7)$$

Note que (2.4) pode ser reescrita na forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} + \nu \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) A_0 \tilde{z} = \frac{F}{8R} + \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) \\ \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

No que segue supomos que $z_0 \in H_{per}^2(\Omega)$. Esta não parece ser uma exigência muito restritiva. Tomando o produto escalar de (2.8) com $(A_0 + \frac{1}{8}) \tilde{z}$. Obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\|^2 = \\ \frac{1}{8} \left\langle \frac{F}{R}, \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\rangle + \left\langle \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Note que o termo

$$\begin{aligned} \left\langle \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\rangle &= \langle \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), A_0 \tilde{z} \rangle + \frac{1}{8} \langle \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), \tilde{z} \rangle \\ &= 0 \quad \text{por (2.7)} \end{aligned}$$

Utilizando a Desigualdade de Schwarz e a Desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left| \left\langle \frac{F}{R}, \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\rangle \right| &\leq \frac{\lambda_1^{-1/2}}{8} \left| \frac{F}{R} \right| \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\| \\ &\leq \frac{\delta}{2} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\|^2 + \frac{1}{128\delta\lambda_1} \left| \frac{F}{R} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Então, usando as estimativas (2.10) na equação (2.9), temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 + \frac{1}{2} (\nu - \delta) \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\|^2 \leq \frac{1}{128\delta\lambda_1} \left| \frac{F}{R} \right|^2 = \frac{\mathcal{C}_\delta}{2}$$

e

$$\frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 + (\nu - \delta) \lambda_1 \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 \leq \mathcal{C}_\delta \quad (2.11)$$

segue-se que

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 \leq e^{-(\nu-\delta)\lambda_1 t} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) z_0 \right|^2 + \frac{\mathcal{C}_\delta}{\lambda_1(\nu-\delta)} (1 - e^{-(\nu-\delta)\lambda_1 t}) \quad (2.12)$$

Um teorema de existência rigoroso pode ser estabelecido por meio dos métodos padrão de Faedo-Galerkin [24], mostrando desse modo que (2.4) tem uma solução forte satisfazendo (2.12). A teoria de variedades inerciais aproximadas de Constantin-Foias-Temam pode ser aplicada ao sistema (2.2) - (2.4). Entretanto, vamos examinar primeiro a aproximação do sistema completo (1.26) - (1.28) por este sistema reduzido.

$$\text{Note que (2.12) conduz a } \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right| \leq \frac{\mathcal{C}_\delta^{1/2}}{\lambda_1^{1/2}(\nu-\delta)^{1/2}}.$$

Daqui, tomando $\delta = \nu/2$ é possível dizer

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right| \leq \frac{1}{4\lambda_1\nu} \left| \frac{F}{R} \right| = D_{F,z_0} \quad (2.13)$$

2.3 Análise do ε -erro e Inicialização

Desejamos comparar as soluções dos sistemas (1.26) - (1.28) e (2.1) - (2.3). Isto estabelece um sistema de equações, onde teremos que fazer as estimativas a fim de demonstrar que dito erro é controlado pela escolha dos dados iniciais.

2.3.1 Técnica de Inicialização

Nesta seção introduziremos uma Técnica de Inicialização, a qual nos permitira tomar os dados iniciais perto de uma variedade (lenta), Σ , a qual definiremos no Lema Técnico 2.3.2.

A escolha dos dados iniciais permitirá um maior controle em nossas constantes a estimar, as quais serão suficientemente pequenas para as finalidades precisas. Fazemos isto enunciando e demonstrando alguns Lemas Técnicos, os quais permitiram fazer uma estimativa do ε -erro.

Lema Técnico 2.3.1. *Seja \tilde{z} satisfazendo (2.1). Então,*

$$|A_0^{3/2} \tilde{z}| \leq \rho_1 \quad , \quad \forall t \geq t_0 = \frac{2}{\nu \lambda_1},$$

onde

$$\rho_1 = \sqrt{\frac{5}{32\lambda_1\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \left|\frac{F}{R}\right|^2 \exp \left[\frac{C_\infty^2}{8\lambda_1^2\nu^3} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 \left|\frac{F}{R}\right|^2 \right]}$$

e F feito uma apropriada variedade de dimensão infinita.

Demonstração. Integrando a equação (2.11) entre t e $t+r$, obtemos

$$(\nu - \delta) \int_t^{t+r} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\|^2 d\tau \leq \mathcal{C}_\delta r + \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2.$$

Note que

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right| \leq \sqrt{1 + \frac{1}{8\lambda_1}} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\|.$$

Segue-se fazendo $\delta = \nu/2$, temos $\mathcal{C}_\delta = \frac{1}{32\nu\lambda_1} \left| \frac{F}{R} \right|^2$ e

$$\begin{aligned} \int_t^{t+r} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right|^2 d\tau &\leq \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left[\mathcal{C}_\delta r + \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 \right] \\ &\leq \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left[\mathcal{C}_\delta r + \frac{2\mathcal{C}_\delta}{\nu\lambda_1} + e^{-\frac{\lambda_1\nu}{2}t} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z}_0 \right|^2 \right]. \end{aligned}$$

Coloque $\sigma = \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right|^2$. Tomando o produto interno de (2.8) com $\left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z}$,

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dt} + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right\|^2 = \underbrace{\left\langle \frac{F}{8R}, \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\rangle}_{\sigma_1} + \underbrace{\left\langle \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\rangle}_{\sigma_2},$$

onde

$$\sigma_2 \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right)}{2\nu} |\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z})|^2 + \frac{\nu}{2} \left| A_0^{1/2} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right|^2.$$

Por outro lado,

$$|\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z})| \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left| A_0^{3/2} \tilde{z} \right|^2 \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \sigma.$$

Então, utilizando a desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned}\sigma_1 &\leq \frac{\nu}{2} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right\|^2 + \frac{1}{2\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \\ \sigma_2 &\leq \frac{1}{2\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) C_\infty^2 \lambda_1^{-1} \sigma^2 + \frac{\nu}{2} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right\|^2.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\frac{d\sigma}{dt} \leq \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) C_\infty^2 \lambda_1^{-1} \sigma^2 + \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2,$$

onde

$$\begin{aligned}\int_t^{t+r} \sigma d\tau &\leq \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left[\mathcal{C}_\delta r + \frac{2\mathcal{C}_\delta}{\nu\lambda_1} + e^{-\frac{\lambda_1\nu}{2}t} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z}_0 \right|^2 \right] = a_3 \\ a_1 &= \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) C_\infty^2 \lambda_1^{-1} a_3 \\ a_2 &= \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2 r.\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema de Gronwall uniforme obtemos a estimativa,

$$\sigma(t) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2 \right) \exp(a_1) \quad , \quad t \geq r.$$

Note que para t grande,

$$\begin{aligned}a_3 &\sim \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left[\mathcal{C}_\delta r + \frac{2\mathcal{C}_\delta}{\nu\lambda_1} \right] \\ a_1 &\sim \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right)^2 C_\infty^2 \lambda_1^{-1} \left[\mathcal{C}_\delta r + \frac{2\mathcal{C}_\delta}{\nu\lambda_1} \right]\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\sigma(t) &\leq \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left[2 \left(\mathcal{C}_\delta + \frac{2\mathcal{C}_\delta}{\nu\lambda_1 r} \right) + \left| \frac{F}{8R} \right|^2 r \right] \exp(a_1) \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left| \frac{F}{R} \right|^2 \left[\frac{1}{16\lambda_1\nu^2} + \frac{1}{8\lambda_1^2\nu^3 r} + \frac{r}{64\nu} \right] \\ &\quad \times \exp \left[\left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right)^2 \left| \frac{F}{R} \right|^2 \left(\frac{1}{16\lambda_1^2\nu^3} + \frac{1}{8\lambda_1^3\nu^4 r} \right) C_\infty^2 \right]\end{aligned}$$

tomando $r = \frac{2}{\nu\lambda_1}$, para $t \geq \frac{2}{\nu\lambda_1}$, temos

$$\sigma(t) \leq \frac{5}{32\lambda_1\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left| \frac{F}{R} \right|^2 \exp \left[\frac{C_\infty^2}{8\lambda_1^2\nu^3} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right)^2 \left| \frac{F}{R} \right|^2 \right]$$

□

Lema Técnico 2.3.2. *Seja \tilde{z} satisfazendo a equação (2.1) e cujos dados iniciais são tais que $2\lambda_1^{-1}C_\infty\rho_1 \leq \nu$. Então*

$$\left| A_0^{3/2}\tilde{z}_t \right| \leq \left| A_0^{3/2}\tilde{z}_t(t_0) \right| = \beta \quad , \quad t \geq t_0, \quad (2.14)$$

onde β é uma constante pequena.

Demonstração. Derivando em relação a t a equação (2.8) e supondo F independente de t , obtemos que

$$\frac{\partial^2 \tilde{z}}{\partial^2 t} + \nu A_0 \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} = \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} [\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z}) + \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t)]. \quad (2.15)$$

Tomando o produto interno da equação (2.15) com $A_0^3 \tilde{z}_t$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| A_0^{3/2} \tilde{z}_t \right|^2 + \nu \left| A_0^2 \tilde{z}_t \right|^2 &= \langle (A_0 + 1/8)^{-1} [\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z}) + \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t)], A_0^3 \tilde{z}_t \rangle \\ &\leq (|\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z})| + |\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t)|) \left| A_0^2 \tilde{z}_t \right|, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z})| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{z}_t| |A_0^{3/2} \tilde{z}| \\ |\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t)| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{z}_t| |A_0^{3/2} \tilde{z}|. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| A_0^{3/2} \tilde{z}_t \right|^2 + \nu \left| A_0^2 \tilde{z}_t \right|^2 \leq 2C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left| A_0^{3/2} \tilde{z}_t \right| \left| A_0^{3/2} \tilde{z} \right| \left| A_0^2 \tilde{z}_t \right|$$

Aplicando Schwarz's, temos

$$\frac{d}{dt} \left| A_0^{3/2} \tilde{z}_t \right|^2 + \nu \left| A_0^2 \tilde{z}_t \right|^2 \leq \frac{4C_\infty^2 \lambda_1^{-2} \rho_1^2}{\nu} \left| A_0^{3/2} \tilde{z}_t \right|^2$$

Supomos como hipótese, com base nos dados iniciais, que $2\lambda_1^{-1}C_\infty\rho_1 \leq \nu$ e assim obtemos a estimativa desejada. \square

Lema Técnico 2.3.3. *Seja \tilde{z} satisfazendo (2.1). Então,*

$$|A_0^2 \tilde{z}| \leq \rho_2 \quad , \quad \forall t \geq t_0,$$

onde

$$\begin{aligned}\rho_2^2 &= \left\{ \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 \left[\frac{1}{\nu^4 \lambda_1^4} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^4 + 1 \right] \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_1}{2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \rho_1^2 + \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right\} \times \exp(b_1) \\ b_1 &= \frac{8}{\nu^4 \lambda_1^3} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^3 C_\infty^2 \left[\frac{1}{\nu^4 \lambda_1^4} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^4 + 1 \right] \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \\ &\quad + \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^2 \lambda_1^{-2} \rho_1^2\end{aligned}$$

Demonstração. Tomando o produto interno de (2.8) com $(A_0 + \frac{1}{8})^3 \tilde{z}$ e pondo $Y = \left| (A_0 + \frac{1}{8})^2 \tilde{z} \right|^2$ temos:

$$\frac{1}{2} \frac{dY}{dt} + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\|^2 = \underbrace{\left\langle \frac{F}{8R}, \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^3 \tilde{z} \right\rangle}_{Y_1} + \underbrace{\left\langle \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^3 \tilde{z} \right\rangle}_{Y_2}$$

onde

$$Y_2 \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)}{2\nu} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) \right|^2 + \frac{\nu}{2} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\|^2.$$

Por outro lado

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) \right| \leq 2C_\infty \lambda_1^{-1} Y.$$

Então, utilizando a desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned}Y_2 &\leq \frac{\nu}{2} \left| A_0^{1/2} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right|^2 + \frac{\left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)}{2\nu} \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \\ Y_1 &\leq \frac{2 \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) C_\infty^2 \lambda_1^{-2}}{\nu} Y^2 + \frac{\nu}{2} \left| A_0^{1/2} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right|^2.\end{aligned}$$

Segue-se que

$$\frac{dY}{dt} \leq \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \left[2C_\infty^2 \lambda_1^{-2} Y^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right]. \quad (2.16)$$

Agora tomando o produto interno de (2.8) com $(A_0 + \frac{1}{8})^2 \tilde{z}$,

$$\frac{1}{2} \frac{d\sigma}{dt} + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right\|^2 = \underbrace{\left\langle \frac{F}{8R}, \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\rangle}_{\sigma_1} + \underbrace{\left\langle \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\rangle}_{\sigma_2},$$

onde

$$\sigma_2 \leq \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) |\mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z})|^2 + \frac{\nu}{8} \left| A_0^{1/2} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right|^2,$$

Além disto

$$|\mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z})| \leq C_\infty \lambda_1^{-1} \sigma^{1/2} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right\|$$

Então, utilizando a desigualdade de Schwarz,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\leq \frac{\nu}{8} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\|^2 + \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \\ \sigma_2 &\leq \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) C_\infty^2 \lambda_1^{-2} \sigma + \frac{3\nu}{8} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^2 \tilde{z} \right\|^2. \end{aligned}$$

Logo, temos

$$\frac{d\sigma}{dt} + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right\|^2 \leq \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left[\frac{C_\infty^2 \lambda_1^{-2}}{\nu} \sigma + \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right]$$

Integrando de t até $t + r$, e lembrando que

$$Y \leq \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{3/2} \tilde{z} \right\|^2,$$

temos

$$\int_t^{t+r} Y d\tau \leq \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right)^2 \left[\frac{C_\infty^2 \lambda_1^{-2}}{\nu} \int_t^{t+r} \sigma d\tau + \left| \frac{F}{8R} \right|^2 r \right] + \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \sigma(t).$$

Note que para $t \geq \frac{2}{\nu\lambda_1}$, tem-se

$$\int_t^{t+r} Y d\tau \leq \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right)^2 \left[\frac{C_\infty^2 \lambda_1^{-2}}{\nu} a_3 + \left| \frac{F}{8R} \right|^2 r \right] + \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1} \right) \rho_1^2 = b_3$$

Daí, na equação (2.16) aplicando o Lema de Gronwall Uniforme

$$Y(t) \leq \left(\frac{b_3}{r} + b_2 \right) \exp(b_1) \quad , \quad \forall \quad t \geq r$$

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{2}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) C_\infty^2 \lambda_1^{-2} b_3 \\
b_2 &= \frac{1}{2\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2 r \\
b_3 &\sim \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 \left[\frac{2}{\nu^3} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^4 \lambda_1^{-3} \left(\mathcal{C}_\delta r + \frac{2\mathcal{C}_\delta}{\nu\lambda_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{F}{8R} \right|^2 r \right] + \frac{1}{\nu} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \rho_1^2.
\end{aligned}$$

Então, tomando $r = t_0$, temos

$$\begin{aligned}
Y(t) &\leq \left\{ \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 \left[\frac{4}{\nu^3} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^4 \lambda_1^{-3} \mathcal{C}_\delta + \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_1}{2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \rho_1^2 + \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right\} \\
&\quad \times \exp(b_1)
\end{aligned}$$

por outro lado $C_\delta = \frac{1}{32\nu\lambda_1} \left| \frac{F}{R} \right|^2$, e

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{8}{\nu^4 \lambda_1^3} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^3 C_\infty^2 \left[\frac{1}{\nu^4 \lambda_1^4} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^4 + 1 \right] \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \\
&\quad + \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^2 \lambda_1^{-2} \rho_1^2
\end{aligned}$$

assim tem-se

$$\begin{aligned}
Y(t) &\leq \left\{ \frac{2}{\nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 \left[\frac{1}{\nu^4 \lambda_1^4} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right)^2 C_\infty^4 + 1 \right] \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda_1}{2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \rho_1^2 + \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} \left(1 + \frac{1}{8\lambda_1}\right) \left| \frac{F}{8R} \right|^2 \right\} \times \exp(b_1)
\end{aligned}$$

□

Lema Técnico 2.3.4. *Seja $\tilde{\chi}$ satisfazendo (2.2). Então,*

$$|A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \leq \rho_3 \quad , \quad \forall t \geq t_0$$

$$\text{onde } \rho_3 = C_\infty \lambda_1^{-1} \rho_1^2 + \lambda_1^{-1/2} \left| \frac{A_0 F}{R} \right|.$$

Demonstração. Temos da equação (2.2),

$$A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{\chi} = \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) - \frac{A_0 F}{R}.$$

Por outro lado temos

$$|A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \leq \lambda_1^{-1/2} |A_0^2 \tilde{\chi}| \leq \lambda_1^{-1/2} \left| A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{\chi} \right|.$$

Logo, é possível dizer

$$|A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \leq \lambda_1^{-1/2} \left(|\mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z})| + \left| \frac{A_0 F}{R} \right| \right),$$

onde

$$|\mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z})| \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \rho_1^2.$$

Desta última estimativa segue o resultado. □

Lema Técnico 2.3.5. *Seja \tilde{w} satisfazendo (2.3). Então,*

$$|A_0^{3/2} \tilde{w}| \leq \rho_4, \quad \forall t \geq t_0$$

onde $\rho_4 = 32C_\infty \lambda_1^{-1} \rho_2$.

Demonstração. Da equação (2.3), tem-se

$$A_0 \tilde{w} = 16 \mathfrak{I}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_y).$$

Então,

$$\begin{aligned} |A_0^{3/2} \tilde{w}| &\leq 16 (|A_0 \tilde{z}_x| \|\nabla \tilde{z}_y\|_{L^\infty(\Omega)} + |\nabla \tilde{z}_x| \|A_0 \tilde{z}_y\|_{L^\infty(\Omega)}) \\ &\leq 16 \left(2C_\infty |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0 \tilde{z}|^{1/2} |A_0^2 \tilde{z}|^{1/2} \right) \\ &\leq 32C_\infty \lambda_1^{-1} |A_0^2 \tilde{z}|^2. \end{aligned}$$

Assim concluímos a demonstração. □

Lema Técnico 2.3.6. *Seja $\tilde{\chi}$ satisfazendo (2.2). Então,*

$$\left| \frac{\partial(A_0 \tilde{\chi})}{\partial t} \right| \leq M_1, \quad \forall t \geq t_0$$

onde $M_1 = 2C_\infty \lambda_1^{-3/2} \rho_1 \beta$.

Demonstração. Note que $\frac{\partial(A_0\tilde{\chi})}{\partial t} = A_0 \frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t}$, da equação (2.2) temos,

$$A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t} = \mathfrak{I}(A_0\tilde{z}_t, \tilde{z}) + \mathfrak{I}(A_0\tilde{z}, \tilde{z}_t).$$

Por outro lado,

$$\left| A_0 \frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t} \right| \leq \lambda_1^{-1} \left| A_0^2 \frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t} \right| \leq \lambda_1^{-1} \left| A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial t} \right|.$$

Daí,

$$\left| \frac{\partial(A_0\tilde{\chi})}{\partial t} \right| \leq \lambda_1^{-1} (|\mathfrak{I}(A_0\tilde{z}_t, \tilde{z})| + |\mathfrak{I}(A_0\tilde{z}, \tilde{z}_t)|),$$

onde

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}(A_0\tilde{z}_t, \tilde{z})| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \rho_1 |A_0^{3/2} \tilde{z}_t| \\ |\mathfrak{I}(A_0\tilde{z}, \tilde{z}_t)| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \rho_1 |A_0^{3/2} \tilde{z}_t|. \end{aligned}$$

Utilizando a técnica de inicialização introduzida no Lema Técnico 2.3.2, temos

$$\left| \frac{\partial(A_0\tilde{\chi})}{\partial t} \right| \leq 2C_\infty \lambda_1^{-3/2} \rho_1 |A_0^{3/2} \tilde{z}_t| \leq 2C_\infty \lambda_1^{-3/2} \rho_1 \beta.$$

O controle deste termo é conseguido com controle de $|A_0^{3/2} \tilde{z}_t(0)|$ ou com β , essencialmente uma forma de inicialização. \square

Lema Técnico 2.3.7. *Seja $\tilde{\chi}$ satisfazendo (2.2). Então,*

$$|A_0^2 \tilde{\chi}| \leq M_2 \quad , \quad \forall t \geq t_0,$$

onde $M_2 = C_\infty \lambda_1^{-1/2} \rho_1^2 + \left| \frac{A_0 F}{R} \right|$.

Demonstração. Da equação (2.2), temos

$$|A_0^2 \tilde{\chi}| \leq |\mathfrak{I}(A_0\tilde{z}, \tilde{z})| + \left| \frac{A_0 F}{R} \right| \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \rho_1^2 + \left| \frac{A_0 F}{R} \right|.$$

\square

Lema Técnico 2.3.8. *Seja \tilde{w} satisfazendo (2.3). Então,*

$$\left| \frac{\partial(A_0\tilde{w})}{\partial t} \right| \leq M_3 \quad , \quad \forall t \geq t_0,$$

onde $M_3 = 32C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \rho_1 \beta$.

Demonstração. Da equação (2.3) temos

$$\frac{\partial(A_0\tilde{w})}{\partial t} = 16 (\mathfrak{J}(\tilde{z}_{tx}, \tilde{z}_y) + \mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_{ty})),$$

onde

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(\tilde{z}_{tx}, \tilde{z}_y)| &\leq \|A_0^{1/2}\tilde{z}_{tx}\|_{L^4(\Omega)} \|A_0^{1/2}\tilde{z}_y\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_4^2 |A_0\tilde{z}_t|^{1/2} |A_0^{3/2}\tilde{z}_t|^{1/2} |A_0\tilde{z}|^{1/2} |A_0^{3/2}\tilde{z}|^{1/2} \\ &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \rho_1 |A_0^{3/2}\tilde{z}_t|. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$|\mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_{ty})| \leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \rho_1 |A_0^{3/2}\tilde{z}_t|.$$

Utilizando a Técnica de inicialização introduzida no Lema técnico 2.3.2, temos

$$\left| \frac{\partial(A_0\tilde{w})}{\partial t} \right| \leq 32C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \rho_1 |A_0^{3/2}\tilde{z}_t(0)| \leq 32C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \rho_1 \beta$$

O controle deste termo também é conseguido com controle de β . □

Lema Técnico 2.3.9. *Seja \tilde{w} satisfazendo (2.3). Então temos:*

$$|A_0\tilde{w}| \leq M_4, \quad \forall t \geq t_0,$$

onde $M_4 = 2(C_\infty + 2C_4^2)\lambda_1^{-3/2}\rho_2^2$.

Demonstração. Utilizando a equação (2.3), temos

$$A_0^2\tilde{w} = 16A_0\mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_y),$$

isto é,

$$|A_0^2\tilde{w}| \leq 16 (|\mathfrak{J}(A_0\tilde{z}_x, \tilde{z}_y)| + 2|\mathfrak{J}(\tilde{z}_{xx}, \tilde{z}_{yy})| + 2|\mathfrak{J}(\tilde{z}_{xy}, \tilde{z}_{yy})| + |\mathfrak{J}(\tilde{z}_x, A_0\tilde{z}_y)|),$$

onde

$$|\mathfrak{J}(A_0\tilde{z}_x, \tilde{z}_y)| \leq |A_0^{3/2}\tilde{z}_x| |\nabla\tilde{z}_y|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\infty |A_0^2\tilde{z}| |A_0\tilde{z}|^{1/2} |A_0^2\tilde{z}|^{1/2} \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^2\tilde{z}|^2.$$

De maneira análoga para o outro termo obtemos,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}_x, \tilde{z}_y)| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \rho_2^2 \\ |\mathfrak{I}(\tilde{z}_x, A_0 \tilde{z}_y)| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \rho_2^2. \end{aligned}$$

Nos termos restantes temos,

$$|\mathfrak{I}(\tilde{z}_{xx}, \tilde{z}_{yx})| \leq |A_0^{3/2} \tilde{z}|_{L^4(\Omega)}^2 \leq C_4^2 |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^2 \tilde{z}| \leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^2 \tilde{z}|^2.$$

Também,

$$|\mathfrak{I}(\tilde{z}_{xy}, \tilde{z}_{yy})| \leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \rho_2^2.$$

Das estimativas acima facilmente concluímos a demonstração. \square

2.3.2 Estimativas para o ε -erro

Agora com a ajuda dos lemas técnicos antes demonstrados teremos possibilidades para estimar o ε -erro. Assim, demonstraremos que a norma em $H^2(\Omega)$ da diferença entre a solução do sistema diagnóstico e o sistema balanceado é de ordem $\varepsilon^{1/2}$.

Enunciamos o resultado de uma longa serie de estimativas, como um teorema.

Teorema 2.3.1. *Suponha que os dados iniciais estejam próximos da variedade lenta, Σ , tendo a hipótese $C_\infty(\varepsilon + 1)\rho_1\lambda_1^{-1} \leq \frac{\nu}{4}$. Então a seguinte estimativa é válida*

$$\|z - \tilde{z}\|_{H^2(\Omega)} \sim \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \quad , \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T] \quad (2.17)$$

Demonstração. Fazendo $z = Z + \tilde{z}$, $w = W + \tilde{w}$, $\chi = \mathcal{X} + \tilde{\chi}$ e subtraindo (2.1), (2.2) e (2.3) de (1.26), (1.27) e (1.28), respectivamente, multiplicando na equação para Z por ε e passando para a variável $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_0 Z}{\partial \tau} + \nu \varepsilon A_0^2 Z - \varepsilon A_0^2 \mathcal{X} &= \mathcal{H}_1 \\
\frac{\partial A_0 \mathcal{X}}{\partial \tau} + \nu \varepsilon A_0^2 \mathcal{X} - \frac{1}{8} A_0 W &= \mathcal{H}_2 \\
\varepsilon \frac{\partial A_0 W}{\partial \tau} + \nu \varepsilon A_0^2 W + A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \mathcal{X} &= \mathcal{H}_3
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$Z(\tau_0) = \mathcal{X}(\tau_0) = W(\tau_0) = 0.$$

Os termos do lado direito da equação (2.18) são dados por:

$$\mathcal{H}_1 = \varepsilon^2 [A_0 \mathfrak{J}(z, w) - A_0 (\nabla \chi \cdot \nabla z) + A_0 (z A_0 \chi)] \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_2 &= -\frac{\partial(A_0 \tilde{\chi})}{\partial \tau} - \nu \varepsilon A_0^2 \tilde{\chi} - 2 [\mathfrak{J}(z_x, z_y) - \mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_y)] \\
&\quad - \varepsilon [-\mathfrak{J}(A_0 \chi, z) + 2\mathfrak{J}(z_x, w_y) + 2\mathfrak{J}(w_x, z_y) + 2\mathfrak{J}(\chi_y, z_y) + 2\mathfrak{J}(\chi_x, z_x)] \\
&\quad - \varepsilon^2 [\nabla \chi \cdot \nabla A_0 \chi + 2\mathfrak{J}(w_x, w_y) + 2\mathfrak{J}(\chi_y, w_y) + 2\mathfrak{J}(\chi_x, w_x) - \mathfrak{J}(A_0 \chi, w) \\
&\quad - \chi_{xx}^2 - \chi_{yy}^2 - 2\chi_{xy}^2]
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_3 &= -\frac{\partial(A_0 \tilde{w})}{\partial \tau} - \nu \varepsilon A_0^2 \tilde{w} + \mathfrak{J}(A_0 z, z) - \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) \\
&\quad - \varepsilon [-2\mathfrak{J}(A_0 w, z) - \nabla A_0 \chi \cdot \nabla z + z A_0^2 \chi + 2\mathfrak{J}(w_x, z_x) + 2\mathfrak{J}(w_y, z_y) \\
&\quad + 2\nabla \chi_x \cdot \nabla z_x + 2\nabla \chi_y \cdot \nabla z_y] - \varepsilon^2 [\nabla \chi \cdot \nabla A_0 w - \mathfrak{J}(A_0 w, w) - A_0 w A_0 \chi]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Pondo $\Theta = \begin{pmatrix} Z \\ X \\ W \end{pmatrix}$, a equação (2.18) pode ser escrita na forma matricial

$$\frac{\partial A_0 \Theta}{\partial \tau} + \mathcal{L}_0 \Theta = \mathcal{H}, \tag{2.22}$$

onde

$$\mathcal{L}_0 = \begin{pmatrix} \nu \varepsilon A_0^2 & -\varepsilon A_0^2 & 0 \\ 0 & \nu \varepsilon A_0^2 & -\frac{1}{8}A_0 \\ 0 & A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8}\right) & \nu \varepsilon A_0^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \\ \mathcal{H}_3 \end{pmatrix}.$$

Utilizando uma base de auto-funções do sistema diagonal

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \exp(2\pi i(mx + ny)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

obtemos a matriz

$$\mathcal{L}_{0mn} = \begin{pmatrix} \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 & -\varepsilon \lambda_{m,n}^2 & 0 \\ 0 & \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 & -\frac{1}{8}\lambda_{m,n} \\ 0 & \lambda_{m,n} \left(\lambda_{m,n} + \frac{1}{8}\right) & \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad \lambda_{m,n} = 4\pi^2(m^2 + n^2).$$

Associada com esta matriz está o **Polinômio de Cayley-Hamilton** de tal modo que as raízes de

$$\begin{vmatrix} \lambda - \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 & \varepsilon \lambda_{m,n}^2 & 0 \\ 0 & \lambda - \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 & \frac{1}{8}\lambda_{m,n} \\ 0 & -\lambda_{m,n} \left(\lambda_{m,n} + \frac{1}{8}\right) & \lambda - \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_{m,n}^0 = \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2, \quad \lambda_{m,n}^\pm = \lambda_{m,n}^0 \pm \frac{i}{2\sqrt{2}} \lambda_{m,n} \sqrt{\lambda_{m,n} + \frac{1}{8}}$$

são associados com a base de auto-vectores

$$U_{m,n}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad U_{m,n}^+ = \begin{pmatrix} -\varepsilon \lambda_{m,n} \\ \frac{i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\lambda_{m,n} + \frac{1}{8}} \\ \lambda_{m,n} + \frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad U_{m,n}^- = \begin{pmatrix} -\varepsilon \lambda_{m,n} \\ -\frac{i}{2\sqrt{2}} \sqrt{\lambda_{m,n} + \frac{1}{8}} \\ \lambda_{m,n} + \frac{1}{8} \end{pmatrix},$$

dando origem à transformação de semelhança formada pelos autovetores, dados acima

$$P_{m,n} = (U_{m,n}^0 \quad U_{m,n}^+ \quad U_{m,n}^-),$$

tal que

$$P_{m,n}^{-1} \mathcal{L}_{0mn} P_{m,n} = \begin{pmatrix} \lambda_{m,n}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{m,n}^+ & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{m,n}^- \end{pmatrix} = \Lambda_{m,n}.$$

Segue-se tomando coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\lambda_{m,n} \hat{Z}_{m,n})}{\partial \tau} + \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 \hat{Z}_{m,n} - \varepsilon \lambda_{m,n}^2 \hat{\mathcal{X}}_{m,n} &= (\hat{\mathcal{H}}_1)_{m,n} \\ \frac{\partial(\lambda_{m,n} \hat{\mathcal{X}}_{m,n})}{\partial \tau} + \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 \hat{\mathcal{X}}_{m,n} - \frac{1}{8} \lambda_{m,n} \hat{W}_{m,n} &= (\hat{\mathcal{H}}_2)_{m,n} \\ \frac{\partial(\lambda_{m,n} \hat{W}_{m,n})}{\partial \tau} + \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^2 \hat{W}_{m,n} + \lambda_{m,n} \left(\lambda_{m,n} + \frac{1}{8} \right) \hat{\mathcal{X}}_{m,n} &= (\hat{\mathcal{H}}_3)_{m,n} \end{aligned}$$

ou,

$$\lambda_{m,n} \frac{\partial \hat{\Theta}_{m,n}}{\partial \tau} + \mathcal{L}_{0mn} \hat{\Theta}_{m,n} = \hat{\mathcal{H}}_{m,n}$$

Assim, obtemos que

$$P_{m,n}^{-1} \hat{\mathcal{H}}_{m,n} = \lambda_{m,n} \frac{\partial}{\partial \tau} P_{m,n}^{-1} \hat{\Theta}_{m,n} + P_{m,n}^{-1} \mathcal{L}_{0mn} P_{m,n} P_{m,n}^{-1} \hat{\Theta}_{m,n}$$

ou

$$P_{m,n}^{-1} \hat{\mathcal{H}}_{m,n} = \lambda_{m,n} \frac{\partial}{\partial \tau} P_{m,n}^{-1} \hat{\Theta}_{m,n} + \Lambda_{m,n} P_{m,n}^{-1} \hat{\Theta}_{m,n} \quad (2.23)$$

Tomando o produto escalar de (2.23) com

$$\lambda_{m,n}^2 P_{m,n}^* \hat{\Theta}_{m,n} \quad , \quad P^* \text{ é a matriz adjunta de } P$$

obtemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\lambda_{m,n}^3 |\hat{\Theta}_{m,n}|^2 \right) + \lambda_{m,n}^2 \left\langle \hat{\Theta}_{m,n}, \Lambda_{m,n} \hat{\Theta}_{m,n} \right\rangle = \lambda_{m,n}^2 \langle \hat{\mathcal{H}}_{m,n}, \hat{\Theta}_{m,n} \rangle \quad (2.24)$$

e tomando a parte real da equação (2.24) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\lambda_{m,n}^3 |\hat{\Theta}_{m,n}|^2 \right) + \nu \varepsilon \lambda_{m,n}^4 |\hat{\Theta}_{m,n}|^2 = \lambda_{m,n}^2 \operatorname{Re} \langle \hat{\mathcal{H}}_{m,n}, \hat{\Theta}_{m,n} \rangle \quad (2.25)$$

Somando (2.25) com m e n , obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left| A_0^{3/2} \Theta \right|^2 + \nu \varepsilon |A_0^2 \Theta|^2 \leq | \langle \mathcal{H}, A_0^2 \Theta \rangle | \quad (2.26)$$

Neste caso temos de estimar os termos $\underbrace{\langle \mathcal{H}_1, A_0^2 Z \rangle}_{E_1}$, $\underbrace{\langle \mathcal{H}_2, A_0^2 \mathcal{X} \rangle}_{E_2}$ e $\underbrace{\langle \mathcal{H}_3, A_0^2 W \rangle}_{E_3}$

na norma $L^2(\Omega)$.

Estimativas para $\langle \mathcal{H}_1, A_0^2 Z \rangle = E_1$

1. Vejamos o primeiro termo

$$A_0 \mathfrak{J}(z, w) = A_0 \mathfrak{J}(Z, W) + A_0 \mathfrak{J}(Z, \tilde{w}) + A_0 \mathfrak{J}(\tilde{z}, W) + A_0 \mathfrak{J}(\tilde{z}, \tilde{w}),$$

onde

$$|A_0 \mathfrak{J}(Z, W)| \leq |\mathfrak{J}(A_0 Z, W)| + 2|\mathfrak{J}(Z_x, W_x)| + 2|\mathfrak{J}(Z_y, W_y)| + |\mathfrak{J}(Z, A_0 W)|.$$

Em seguida, estimando cada um dos termos acima, temos

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(A_0 Z, W)| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} W| \\ |\mathfrak{J}(Z, A_0 W)| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} W|. \end{aligned}$$

Nos outros termos, temos:

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(Z_x, W_x)| &\leq \|\nabla Z_x\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla W_x\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq \|A_0 Z\|_{L^4(\Omega)} \|A_0 W\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq C_4^2 |A_0 Z|^{1/2} |A_0^{3/2} Z|^{1/2} |A_0 W|^{1/2} |A_0^{3/2} W|^{1/2} \\ &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} W|. \end{aligned}$$

Assim, também,

$$|\mathfrak{J}(Z_y, W_y)| \leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} W|$$

contudo, temos:

$$|A_0 \mathfrak{J}(Z, W)| \leq 2\lambda_1^{-1/2} (C_\infty + 2C_4^2) |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} W| \quad (2.27)$$

de maneira análoga, é possível dizer:

$$|A_0 \mathfrak{J}(Z, \tilde{w})| \leq 2\lambda_1^{-1/2} (C_\infty + 2C_4^2) |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} \tilde{w}| \quad (2.28)$$

$$|A_0 \mathfrak{J}(\tilde{z}, W)| \leq 2\lambda_1^{-1/2} (C_\infty + 2C_4^2) |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} W| \quad (2.29)$$

$$|A_0 \mathfrak{J}(\tilde{z}, \tilde{w})| \leq 2\lambda_1^{-1/2} (C_\infty + 2C_4^2) |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} \tilde{w}| \quad (2.30)$$

Por outro lado para as equações balanceadas temos:

$$|A_0^{3/2}\tilde{z}| \leq \rho_1 \quad , \quad |A_0^{3/2}\tilde{w}| \leq \rho_4 \quad , \quad |A_0^{3/2}\tilde{\chi}| \leq \rho_3.$$

$$\begin{aligned} | \langle A_0 \mathfrak{J}(z, w), A_0^2 Z \rangle | &\leq 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2) \left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 \right. \\ &\quad \left. + (\rho_1 + \rho_4)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\rho_4 \right) |A_0^2\Theta| \end{aligned} \quad (2.31)$$

2. No seguinte termo a estimar, temos:

$$A_0(\nabla \chi \cdot \nabla z) = A_0(\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla Z) + A_0(\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla \tilde{z}) + A_0(\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla Z) + A_0(\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla \tilde{z}),$$

onde temos

$$\begin{aligned} |A_0(\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla Z)| &\leq |\nabla A_0 \mathcal{X} \cdot \nabla Z| + 2|\nabla \mathcal{X}_x \cdot \nabla Z_x| \\ &\quad + |\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 Z| + 2|\nabla \mathcal{X}_y \cdot \nabla Z_y| \end{aligned}$$

De maneira análoga ao item 1, temos:

$$\begin{aligned} |A_0(\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla Z)| &\leq 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2)|A_0^{3/2}\mathcal{X}| |A_0^{3/2}Z| \\ |A_0(\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla \tilde{z})| &\leq 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2)|A_0^{3/2}\mathcal{X}| |A_0^{3/2}\tilde{z}| \\ |A_0(\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla Z)| &\leq 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2)|A_0^{3/2}\tilde{\chi}| |A_0^{3/2}Z| \\ |A_0(\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla \tilde{z})| &\leq 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2)|A_0^{3/2}\tilde{\chi}| |A_0^{3/2}\tilde{z}| \end{aligned}$$

Contudo, temos:

$$\begin{aligned} | \langle A_0(\nabla \chi \cdot \nabla z), A_0^2 Z \rangle | &\leq 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2) \left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 \right. \\ &\quad \left. + (\rho_1 + \rho_3)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\rho_3 \right) |A_0^2\Theta| \end{aligned} \quad (2.32)$$

3. Finalmente, estimamos o último termo

$$A_0(zA_0\chi) = A_0(ZA_0\mathcal{X}) + A_0(ZA_0\tilde{\chi}) + A_0(\tilde{z}A_0\mathcal{X}) + A_0(\tilde{z}A_0\tilde{\chi}),$$

onde

$$A_0(ZA_0\mathcal{X}) = A_0ZA_0\mathcal{X} + 2\nabla Z \cdot \nabla A_0\mathcal{X} + ZA_0^2\mathcal{X}.$$

Estimamos cada um destes termos em separado:

(a) Veja o primeiro termo

$$\begin{aligned}
|A_0 Z A_0 \mathcal{X}| &\leq \|A_0 Z\|_{L^4(\Omega)} \|A_0 \mathcal{X}\|_{L^4(\Omega)} \\
&\leq C_4^2 |A_0 Z|^{1/2} |A_0^{3/2} Z|^{1/2} |A_0 \mathcal{X}|^{1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}|^{1/2} \\
&\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} \mathcal{X}|
\end{aligned}$$

(b) No seguinte termo,

$$\begin{aligned}
|\nabla Z \cdot \nabla A_0 \mathcal{X}| &\leq \|\nabla Z\|_{L^\infty(\Omega)} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| \\
&\leq C_\infty |A_0^{1/2} Z|^{1/2} |A_0^{3/2} Z|^{1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| \\
&\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} \mathcal{X}|
\end{aligned}$$

(c) Finalmente, no termo restante

$$\begin{aligned}
|Z A_0^2 \mathcal{X}| &\leq \|Z\|_{L^\infty(\Omega)} |A_0^2 \mathcal{X}| \\
&\leq C_\infty |Z|^{1/2} |A_0 Z|^{1/2} |A_0^2 \mathcal{X}| \\
&\leq C_\infty \lambda_1^{-1} |A_0^{3/2} Z| |A_0^2 \mathcal{X}|
\end{aligned}$$

Dos item a), b) e c), é possível dizer:

$$\begin{aligned}
|A_0(Z A_0 \mathcal{X})| &\leq \lambda_1^{-1/2} (C_4^2 + 2C_\infty) |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} \mathcal{X}| + C_\infty \lambda_1^{-1} |A_0^{3/2} Z| |A_0^2 \mathcal{X}| \\
|A_0(Z A_0 \tilde{\chi})| &\leq \lambda_1^{-1/2} (C_4^2 + 2C_\infty) |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| + C_\infty \lambda_1^{-1} |A_0^{3/2} Z| |A_0^2 \tilde{\chi}| \\
|A_0(\tilde{z} A_0 \mathcal{X})| &\leq \lambda_1^{-1/2} (C_4^2 + 2C_\infty) |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} \mathcal{X}| + C_\infty \lambda_1^{-1} |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^2 \mathcal{X}| \\
|A_0(\tilde{z} A_0 \tilde{\chi})| &\leq \lambda_1^{-1/2} (C_4^2 + 2C_\infty) |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| + C_\infty \lambda_1^{-1} |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^2 \tilde{\chi}|
\end{aligned}$$

Destas últimas equações, temos:

$$\begin{aligned}
| \langle A_0(z A_0 \chi), A_0^2 Z \rangle | &\leq \lambda_1^{-1/2} (C_4^2 + 2C_\infty) \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| \right. \\
&\quad \left. + \rho_1 \rho_3 |A_0^2 \Theta| + C_\infty \lambda_1^{-1} \left(|A_0^{3/2} \Theta| |A_0^2 \Theta| + |A_0^{3/2} \Theta| M_2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \rho_1 |A_0^2 \Theta| + \rho_1 M_2 |A_0^2 \Theta| \right) \right)
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Dos cálculos feitos nos item 1, 2 e 3, e as equações (2.31), (2.32) e (2.33), obtidas nestes, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &\leq \varepsilon^2 \left\{ 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2) \left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_4)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\rho_4 \right) \right. \\ &\quad + 2\lambda_1^{-1/2}(C_\infty + 2C_4^2) \left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\rho_3 \right) \\ &\quad + \lambda_1^{-1/2}(C_4^2 + 2C_\infty) \left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\rho_3 \right) \\ &\quad \left. + C_\infty\lambda_1^{-1} \left(|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| + |A_0^{3/2}\Theta|M_2 + \rho_1|A_0^2\Theta| + \rho_1M_2 \right) \right\} |A_0^2\Theta| \end{aligned}$$

denotando $r = 2C_4^2\lambda_1^{-1/2}$, $s = C_\infty\lambda_1^{-1/2}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &\leq \varepsilon^2\lambda_1^{-1/2}s|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + \varepsilon^2\lambda_1^{-1/2}s\rho_1|A_0^2\Theta|^2 \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ (6s + 9r/2)|A_0^{3/2}\Theta|^2 + [2(s + r)(\rho_1 + \rho_4) \right. \\ &\quad + (4s + 5r/2)(\rho_1 + \rho_3) + 5\lambda_1^{-1/2}M_2]|A_0^{3/2}\Theta| \\ &\quad \left. + [2(s + r)(\rho_3 + \rho_4) + (r/2 + 2s)\rho_3 + s\lambda_1^{-1/2}M_2]\rho_1 \right\} |A_0^2\Theta| \end{aligned}$$

novamente fazendo $a_1 = 6s + 9r/2$, $a_2 = 2(s + r)(\rho_1 + \rho_4) + (4s + 5r/2)(\rho_1 + \rho_3) + 5\lambda_1^{-1/2}M_2$, $a_3 = [2(s + r)(\rho_3 + \rho_4) + (r/2 + 2s)\rho_3 + s\lambda_1^{-1/2}M_2]\rho_1$, temos

$$\begin{aligned} |< \mathcal{H}_1, A_0^2Z >| &\leq \varepsilon^2\lambda_1^{-1/2}s|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + \varepsilon^2\lambda_1^{-1/2}s\rho_1|A_0^2\Theta|^2 \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ a_1|A_0^{3/2}\Theta|^2 + a_2|A_0^{3/2}\Theta| + a_3 \right\} |A_0^2\Theta| \end{aligned} \quad (2.34)$$

Estimativas para $< \mathcal{H}_2, A_0^2X > = \mathbf{E}_2$

Trataremos de estimar os termos um a um muito cuidadosamente.

1. Utilizando o Lema Técnico 2.3.6, temos diretamente, utilizando o Lema de Schwarz

$$\left| \left\langle \frac{\partial(A_0\tilde{\chi})}{\partial\tau}, A_0^2\mathcal{X} \right\rangle \right| \leq \delta\nu\varepsilon|A_0^2\Theta|^2 + \frac{M_1^2}{4\delta\nu\varepsilon}. \quad (2.35)$$

2. Utilizando o Lema Técnico 2.3.7, obtemos,

$$|\langle A_0^2\tilde{\chi}, A_0^2\mathcal{X} \rangle| \leq M_2|A_0^2\mathcal{X}|. \quad (2.36)$$

3. Veja o seguinte termo

$$\mathfrak{J}(z_x, z_y) - \mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_y) = \mathfrak{J}(Z_x, Z_y) + \mathfrak{J}(Z_x, \tilde{z}_y) + \mathfrak{J}(\tilde{z}_x, Z_y).$$

Observe que

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(Z_x, Z_y)| &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z|^2 \\ |\mathfrak{J}(\tilde{z}_x, Z_y)| &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} Z| \\ |\mathfrak{J}(Z_x, \tilde{z}_y)| &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} Z| \end{aligned}$$

levando à estimativa

$$2| \langle \mathfrak{J}(z_x, z_y) - \mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{z}_y), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + 2\rho_1 |A_0^{3/2} \Theta| \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.37)$$

4. Em seguida, estimamos os termos de ordem ε .

(a) Note que

$$\mathfrak{J}(A_0 \chi, z) = \mathfrak{J}(A_0 \mathcal{X}, Z) + \mathfrak{J}(A_0 \mathcal{X}, \tilde{z}) + \mathfrak{J}(A_0 \tilde{\chi}, Z) + \mathfrak{J}(A_0 \tilde{\chi}, \tilde{z})$$

e

$$|\mathfrak{J}(A_0 \mathcal{X}, Z)| \leq |\nabla A_0 \mathcal{X}| |\nabla Z|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} Z|.$$

Enquanto,

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(A_0 \mathcal{X}, \tilde{z})| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} \tilde{z}| \\ |\mathfrak{J}(A_0 \tilde{\chi}, Z)| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} Z| \\ |\mathfrak{J}(A_0 \tilde{\chi}, \tilde{z})| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} \tilde{z}|. \end{aligned}$$

Segue-se que

$$| \langle \mathfrak{J}(A_0 \chi, z), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.38)$$

(b) Para os outros termos será suficiente estimar um deles:

$$\mathfrak{J}(z_x, w_y) = \mathfrak{J}(Z_x, W_y) + \mathfrak{J}(Z_x, \tilde{w}_y) + \mathfrak{J}(\tilde{z}_x, W_y) + \mathfrak{J}(\tilde{z}_x, \tilde{w}_y),$$

onde pelo visto no item 1, temos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}(Z_x, W_y) &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} W| \\
\mathfrak{I}(Z_x, \tilde{w}_y) &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} Z| |A_0^{3/2} \tilde{w}| \\
\mathfrak{I}(\tilde{z}_x, W_y) &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} W| \\
\mathfrak{I}(\tilde{z}_x, \tilde{w}_y) &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{z}| |A_0^{3/2} \tilde{w}|.
\end{aligned}$$

Daí, temos:

$$2| \langle \mathfrak{I}(z_x, w_y), A_0^2 \Theta \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_4) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_4 \right) |A_0^2 \Theta|. \quad (2.39)$$

Analogamente, para as outras equações estimadas de maneira similar, obtém-se

$$2| \langle \mathfrak{I}(w_x, z_y), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_4) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_4 \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.40)$$

$$2| \langle \mathfrak{I}(\chi_y, z_y), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.41)$$

$$2| \langle \mathfrak{I}(\chi_x, z_x), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.42)$$

Das equações (2.38) - (2.42), tem-se

$$\begin{aligned}
|\langle \mathcal{H}_2(\varepsilon), A_0^2 \mathcal{X} \rangle| &\leq \varepsilon \left\{ C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) \right. \\
&\quad + 4C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_4) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_4 \right) \\
&\quad \left. + 4C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) \right\} |A_0^2 \Theta|. \quad (2.43)
\end{aligned}$$

5. Finalmente temos de estimar os termos de ordem ε^2

(a) Veja que

$$\nabla \chi \cdot \nabla A_0 \chi = \nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 \mathcal{X} + \nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 \tilde{\chi} + \nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 \mathcal{X} + \nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 \tilde{\chi},$$

onde

$$\begin{aligned}
|\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 \mathcal{X}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}|^2 \\
|\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 \tilde{\chi}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \\
|\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 \mathcal{X}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} \mathcal{X}| \\
|\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 \tilde{\chi}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}|^2.
\end{aligned}$$

Destas ultimas equações, é possível ter

$$| \langle \nabla \chi \cdot \nabla A_0 \chi, A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_3 \right)^2 |A_0^2 \Theta| \quad (2.44)$$

(b) Os termos seguintes possuem estimativas similares ao caso quando estimamos os de ordem ε . Por esta razão utilizamos diretamente estas estimativas

$$2| \langle \mathfrak{I}(w_x, w_y), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \right)^2 |A_0^2 \Theta| \quad (2.45)$$

$$2| \langle \mathfrak{I}(\chi_y, w_y), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.46)$$

$$2| \langle \mathfrak{I}(\chi_x, w_x), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.47)$$

do mesmo maneira feito acima, temos

$$| \langle \mathfrak{I}(A_0 \chi, w), A_0^2 \mathcal{X} \rangle | \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.48)$$

(c) Finalmente nos termos restantes temos

$$\chi_{xx}^2 = \mathcal{X}_{xx}^2 + 2\mathcal{X}_{xx} \tilde{\chi}_{xx} + \tilde{\chi}_{xx}^2.$$

e, então,

$$\begin{aligned} |\chi_{xx}^2| &\leq \|A_0 \mathcal{X}\|_{L^4(\Omega)}^2 + 2\|A_0 \mathcal{X}\|_{L^4(\Omega)} \|A_0 \tilde{\chi}\|_{L^4(\Omega)} + \|A_0 \tilde{\chi}\|_{L^4(\Omega)}^2 \\ &\leq C_4^2 |A_0 \mathcal{X}| |A_0^{3/2} \mathcal{X}| + 2C_4^2 |A_0 \mathcal{X}|^{1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}|^{1/2} |A_0 \tilde{\chi}|^{1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}|^{1/2} \\ &\quad + C_4^2 |A_0 \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \\ &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}|^2 + 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| + C_4^2 \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}|^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} |\chi_{xx}^2| &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \mathcal{X}| + |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \right)^2 \\ |\chi_{yy}^2| &\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \mathcal{X}| + |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \right)^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\chi_{xy}^2 = \mathcal{X}_{xy}^2 + 2\mathcal{X}_{xy} \tilde{\chi}_{xy} + \tilde{\chi}_{xy}^2$$

e, então,

$$\begin{aligned}
|\chi_{xy}^2| &\leq \|A_0^{1/2} \mathcal{X}_x\|_{L^4(\Omega)}^2 + 2\|A_0^{1/2} \mathcal{X}_x\|_{L^4(\Omega)} \|A_0^{1/2} \tilde{\chi}_x\|_{L^4(\Omega)} + \|A_0^{1/2} \tilde{\chi}_x\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq \|A_0 \mathcal{X}\|_{L^4(\Omega)}^2 + 2\|A_0 \mathcal{X}\|_{L^4(\Omega)} \|A_0 \tilde{\chi}\|_{L^4(\Omega)} + \|A_0 \tilde{\chi}\|_{L^4(\Omega)}^2 \\
&\leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \mathcal{X}|^2 + 2|A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| + |A_0^{3/2} \tilde{\chi}|^2 \right)
\end{aligned}$$

ou,

$$|\chi_{xy}^2| \leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \mathcal{X}| + |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| \right)^2.$$

Assim, temos:

$$|< \chi_{xx}^2 + \chi_{yy}^2 + 2\chi_{xy}^2, A_0^2 \mathcal{X} >| \leq 4C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_3 \right)^2 |A_0^2 \Theta|. \quad (2.49)$$

Das equações (2.44) - (2.49), temos a seguinte estimativa para os termos de ordem ε^2 :

$$\begin{aligned}
|< \mathcal{H}_2(\varepsilon^2), A_0^2 \mathcal{X} >| &\leq \varepsilon^2 \left\{ (C_\infty + 4C_4^2) \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_3 \right)^2 \right. \\
&\quad + C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) \\
&\quad + 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \right)^2 \\
&\quad \left. + 4C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) \right\} |A_0^2 \Theta|
\end{aligned} \quad (2.50)$$

Das equações (2.37), (2.43) e (2.50) temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &\leq M_1 |A_0^2 \Theta| + \nu \varepsilon M_2 |A_0^2 \Theta| \\
&\quad + 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + 2\rho_1 |A_0^{3/2} \Theta| \right) |A_0^2 \Theta| \\
&\quad + \varepsilon \left\{ C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) \right. \\
&\quad + 4C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_4) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_4 \right) \\
&\quad \left. + 4C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) \right\} |A_0^2 \Theta| \\
&\quad + \varepsilon^2 \left\{ (C_\infty + 4C_4^2) \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_3 \right)^2 + 2C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \right)^2 \right. \\
&\quad + C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) \\
&\quad \left. + 4C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) \right\} |A_0^2 \Theta|
\end{aligned}$$

lembrando que $r = 2C_4^2\lambda_1^{-1/2}$ e $s = C_\infty\lambda_1^{-1/2}$ temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &\leq M_1|A_0^2\Theta| + \nu\varepsilon M_2|A_0^2\Theta| + r \left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + 2\rho_1|A_0^{3/2}\Theta| \right) |A_0^2\Theta| \\
&+ \varepsilon \left\{ (4r+s)|A_0^{3/2}\Theta|^2 + [(s+2r)(\rho_1+\rho_3) + 2r(\rho_1+\rho_4)]|A_0^{3/2}\Theta| \right. \\
&+ [s\rho_3 + 2r(\rho_3+\rho_4)]\rho_1 \left. \right\} |A_0^2\Theta| \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ (2s+5r)|A_0^{3/2}\Theta|^2 + [2\rho_3(s+2r) + 2r\rho_4 + (2r+s)(\rho_4+\rho_3)] \right. \\
&\quad \times |A_0^{3/2}\Theta| + [(s+2r)\rho_3^2 + r\rho_4^2 + (2r+s)\rho_4\rho_3] \left. \right\} |A_0^2\Theta|
\end{aligned}$$

Novamente denotando $b_1 = 4r + s$, $b_2 = (s + 2r)(\rho_1 + \rho_3) + 2r(\rho_1 + \rho_4)$, $b_3 = [s\rho_3 + 2r(\rho_3 + \rho_4)]\rho_1$, $c_1 = 2s + 5r$, $c_2 = 2\rho_3(s + 2r) + 2r\rho_4 + (2r + s)(\rho_4 + \rho_3)$ e $c_3 = (s + 2r)\rho_3^2 + r\rho_4^2 + (2r + s)\rho_4\rho_3$, obtemos

$$\begin{aligned}
|<\mathcal{H}_2, A_0^2\mathcal{X}>| &\leq M_1|A_0^2\Theta| + \nu\varepsilon M_2|A_0^2\Theta| + r|A_0^{3/2}\Theta|^2|A_0^2\Theta| + 2\rho_1r|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| \\
&+ \varepsilon \left\{ b_1|A_0^{3/2}\Theta|^2 + b_2|A_0^{3/2}\Theta| + b_3 \right\} |A_0^2\Theta| \\
&+ \varepsilon^2 \left\{ c_1|A_0^{3/2}\Theta|^2 + c_2|A_0^{3/2}\Theta| + c_3 \right\} |A_0^2\Theta|
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Estimativas para $<\mathcal{H}_3, A_0^2W> = \mathbf{E}_3$

1. Utilizando o Lema Técnico 2.3.8, temos diretamente utilizando o Lema de Schwarz

$$\left| \left\langle \frac{\partial(A_0\tilde{w})}{\partial\tau}, A_0^2W \right\rangle \right| \leq \delta\nu\varepsilon|A_0^2\Theta|^2 + \frac{M_3^2}{4\delta\nu\varepsilon}. \tag{2.52}$$

2. Novamente utilizando o Lema Técnico 2.3.9, podemos dizer:

$$| \langle A_0\tilde{w}, A_0^2W \rangle | \leq M_4|A_0^2\Theta|. \tag{2.53}$$

3. Vejamos o seguinte termo

$$\mathfrak{J}(A_0z, z) - \mathfrak{J}(A_0\tilde{z}, \tilde{z}) = \mathfrak{J}(A_0Z, Z) + \mathfrak{J}(A_0Z, \tilde{z}) + \mathfrak{J}(A_0\tilde{z}, Z).$$

As estimativas para cada um destes termos são similares às feitas anteriormente.

Assim temos:

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{J}(A_0Z, Z)| &\leq C_\infty\lambda_1^{-1/2}|A_0^{3/2}Z|^2 \\
|\mathfrak{J}(A_0Z, \tilde{z})| &\leq C_\infty\lambda_1^{-1/2}|A_0^{3/2}Z| |A_0^{3/2}\tilde{z}| \\
|\mathfrak{J}(A_0\tilde{z}, Z)| &\leq C_\infty\lambda_1^{-1/2}|A_0^{3/2}\tilde{z}| |A_0^{3/2}Z|.
\end{aligned}$$

Daí temos:

$$| < \mathfrak{J}(A_0 z, z) - \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}), A_0^2 W > | \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + 2\rho_1 |A_0^{3/2} \Theta| \right) |A_0^2 \Theta| \quad (2.54)$$

4. A seguir, estimamos os termos de ordem ε ,

(a) Para este termo, utilizamos diretamente estimativas antes feitas para \mathcal{H}_2 , obtendo:

$$2| < \mathfrak{J}(A_0 w, z), A_0^2 W > | \leq 2C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_1) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_1 \right) |A_0^2 \Theta|. \quad (2.55)$$

(b) No seguinte termo, temos:

$$\nabla A_0 \chi \cdot \nabla z = \nabla A_0 \mathcal{X} \cdot \nabla Z + \nabla A_0 \mathcal{X} \cdot \nabla \tilde{z} + \nabla A_0 \tilde{\chi} \cdot \nabla Z + \nabla A_0 \tilde{\chi} \cdot \nabla \tilde{z},$$

onde

$$\begin{aligned} |\nabla A_0 \mathcal{X} \cdot \nabla Z| &\leq |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |\nabla Z|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq |A_0^{3/2} \mathcal{X}| C_\infty |A_0^{1/2} Z|^{1/2} |A_0^{3/2} Z|^{1/2} \\ &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} Z|. \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned} |\nabla A_0 \mathcal{X} \cdot \nabla \tilde{z}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} \tilde{z}| \\ |\nabla A_0 \tilde{\chi} \cdot \nabla Z| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} Z| \\ |\nabla A_0 \tilde{\chi} \cdot \nabla \tilde{z}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} \tilde{z}|. \end{aligned}$$

Destas últimas equações temos:

$$| < \nabla A_0 \chi \cdot \nabla z, A_0^2 W > | \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_1 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta|. \quad (2.56)$$

(c) No terceiro termo temos

$$z A_0^2 \chi = Z A_0^2 \mathcal{X} + Z A_0^2 \tilde{\chi} + \tilde{z} A_0^2 \mathcal{X} + \tilde{z} A_0^2 \tilde{\chi},$$

onde

$$\begin{aligned}
|ZA_0^2\mathcal{X}| &\leq \|Z\|_{L^\infty(\Omega)}|A_0^2\mathcal{X}| \\
&\leq C_\infty|Z|^{1/2}|A_0Z|^{1/2}|A_0^2\mathcal{X}| \\
&\leq C_\infty\lambda_1^{-1}|A_0^{3/2}Z||A_0^2\mathcal{X}|.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
|ZA_0^2\tilde{\chi}| &\leq C_\infty\lambda_1^{-1}|A_0^{3/2}Z||A_0^2\tilde{\chi}| \\
|\tilde{z}A_0^2\mathcal{X}| &\leq C_\infty\lambda_1^{-1}|A_0^{3/2}\tilde{z}||A_0^2\mathcal{X}| \\
|\tilde{z}A_0^2\tilde{\chi}| &\leq C_\infty\lambda_1^{-1}|A_0^{3/2}\tilde{z}||A_0^2\tilde{\chi}|.
\end{aligned}$$

Destas últimas equações, obtemos

$$\begin{aligned}
|<zA_0^2\chi, A_0^2W>| &\leq C_\infty\lambda_1^{-1}\left(|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\right)|A_0^2\Theta|^2 \\
&\quad + C_\infty\lambda_1^{-1}M_2\left(|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\right)|A_0^2\Theta|.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

(d) Nos outros termos as estimativas são feitas de maneira análoga às estimativas feitas para \mathcal{H}_2 . Desta maneira temos:

$$\begin{aligned}
2|<\mathfrak{J}(w_x, z_x), A_0^2W>| &= 2C_4^2\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_1)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_4\rho_1\right)|A_0^2\Theta| \\
2|<\mathfrak{J}(w_y, z_y), A_0^2W>| &= 2C_4^2\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_1)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_4\rho_1\right)|A_0^2\Theta| \\
2|<\nabla\chi_x \cdot \nabla z_x, A_0^2W>| &= 2C_4^2\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_4\rho_3\right)|A_0^2\Theta| \\
2|<\nabla\chi_y \cdot \nabla z_y, A_0^2W>| &= 2C_4^2\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_4\rho_3\right)|A_0^2\Theta|.
\end{aligned}$$

Das equações (2.55), (2.56), (2.57) e as estimativas acima, é possível estabelecer a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
|<\mathcal{H}_3(\varepsilon), A_0^2W>| &\leq \varepsilon \left\{ 2C_\infty\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_1)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_4\rho_1\right) \right. \\
&\quad \left. + C_\infty\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_1 + \rho_3)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1\rho_3\right) \right. \\
&\quad \left. + C_\infty\lambda_1^{-1}\left(|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| + \rho_1|A_0^2\Theta| + M_2|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_1M_2\right) \right. \\
&\quad \left. + 4C_4^2\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_1)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_4\rho_1\right) \right. \\
&\quad \left. + 4C_4^2\lambda_1^{-1/2}\left(|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3)|A_0^{3/2}\Theta| + \rho_4\rho_3\right) \right\} |A_0^2\Theta|.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

5. Finalmente, estimaremos os termos de ordem ε^2 .

(a) Veja o primeiro termo

$$\nabla \chi \cdot \nabla A_0 w = \nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 W + \nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 \tilde{w} + \nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 W + \nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 \tilde{w},$$

onde

$$\begin{aligned} |\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 W| &\leq \|\nabla \mathcal{X}\|_{L^\infty(\Omega)} |\nabla A_0 W| \\ &\leq C_\infty |A_0^{1/2} \mathcal{X}|^{1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}|^{1/2} |A_0^{3/2} W| \\ &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} W|. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} |\nabla \mathcal{X} \cdot \nabla A_0 \tilde{w}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \mathcal{X}| |A_0^{3/2} \tilde{w}| \\ |\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 W| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} W| \\ |\nabla \tilde{\chi} \cdot \nabla A_0 \tilde{w}| &\leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} |A_0^{3/2} \tilde{\chi}| |A_0^{3/2} \tilde{w}|. \end{aligned}$$

Daí temos

$$| \langle \nabla \chi \cdot \nabla A_0 w, A_0^2 W \rangle | \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta|. \quad (2.59)$$

(b) No seguinte termo temos uma estimativa imediata das feitas anteriormente,

$$| \langle \mathfrak{J}(A_0 w, w), A_0^2 W \rangle | \leq C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \right)^2 |A_0^2 \Theta|. \quad (2.60)$$

(c) O terceiro termo é também uma estimativa feita para \mathcal{H}_1 , então

$$| \langle A_0 w A_0 \chi, A_0^2 W \rangle | \leq C_4^2 \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) |A_0^2 \Theta|. \quad (2.61)$$

Das equações (2.59), (2.60) e (2.61), temos

$$\begin{aligned} | \langle \mathcal{H}_3(\varepsilon^2), A_0^2 W \rangle | &\leq \varepsilon^2 \left\{ (C_4^2 + C_\infty) \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta|^2 + (\rho_4 + \rho_3) |A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \rho_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + C_\infty \lambda_1^{-1/2} \left(|A_0^{3/2} \Theta| + \rho_4 \right)^2 \right\} |A_0^2 \Theta|. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Das equações (2.54), (2.58) e (2.62)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_3 \leq & M_3|A_0^2\Theta| + \nu\varepsilon M_4|A_0^2\Theta| + s\varepsilon\lambda_1^{-1/2}|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + s\varepsilon\rho_1\lambda_1^{-1/2}|A_0^2\Theta|^2 \\
& + s|A_0^{3/2}\Theta|^2|A_0^2\Theta| + 2\rho_1s|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| \\
& + \varepsilon \left\{ (3s + 4r)|A_0^{3/2}\Theta|^2 + [(\rho_4 + 2\rho_1 + \rho_3)(2r + 1) + s\lambda_1^{-1/2}M_2]|A_0^{3/2}\Theta| \right. \\
& + (\rho_3 + \rho_4)\rho_1 + 2r\rho_4(\rho_1 + \rho_3) + s\lambda_1^{-1/2}\rho_1M_2 \left. \right\} |A_0^2\Theta| \\
& + \varepsilon^2 \left\{ (r/2 + 2s)|A_0^{3/2}\Theta|^2 + [(r/2 + s)(\rho_4 + \rho_3) + 2s\rho_4]|A_0^{3/2}\Theta| \right. \\
& + (r/2 + s)\rho_4\rho_3 + s\rho_4^2 \left. \right\} |A_0^2\Theta|.
\end{aligned}$$

ainda denotando $d_1 = 3s + 4r$, $d_2 = (\rho_4 + 2\rho_1 + \rho_3)(2r + 1) + s\lambda_1^{-1/2}M_2$, $d_3 = (\rho_3 + \rho_4)\rho_1 + 2r\rho_4(\rho_1 + \rho_3) + s\lambda_1^{-1/2}\rho_1M_2$, $e_1 = r/2 + 2s$, $e_2 = (r/2 + s)(\rho_4 + \rho_3) + 2s\rho_4$ e $e_3 = (r/2 + s)\rho_4\rho_3 + s\rho_4^2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_3 \leq & M_3|A_0^2\Theta| + \nu\varepsilon M_4|A_0^2\Theta| + \varepsilon s\lambda_1^{-1/2}|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + \varepsilon s\rho_1\lambda_1^{-1/2}|A_0^2\Theta|^2 \\
& + s|A_0^{3/2}\Theta|^2|A_0^2\Theta| + 2\rho_1s|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| \\
& + \varepsilon \left\{ d_1|A_0^{3/2}\Theta|^2 + d_2|A_0^{3/2}\Theta| + d_3 \right\} |A_0^2\Theta| \\
& + \varepsilon^2 \left\{ e_1|A_0^{3/2}\Theta|^2 + e_2|A_0^{3/2}\Theta| + e_3 \right\} |A_0^2\Theta|.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Tendo feito nossas estimativas, voltamos agora à equação (2.26). Utilizando as equações (2.34), (2.51) e (2.63), temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left| A_0^{3/2}\Theta \right|^2 + \nu\varepsilon|A_0^2\Theta|^2 \leq & M_1|A_0^2\Theta| + \nu\varepsilon M_2|A_0^2\Theta| + M_3|A_0^2\Theta| + \nu\varepsilon M_4|A_0^2\Theta| \\
& + (r + s)|A_0^{3/2}\Theta|^2|A_0^2\Theta| + 2\rho_1(r + s)|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| \\
& + \varepsilon s\lambda_1^{-1/2}|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + \varepsilon s\rho_1\lambda_1^{-1/2}|A_0^2\Theta|^2 \\
& + \varepsilon^2 s\lambda_1^{-1/2}|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + \varepsilon^2 s\rho_1\lambda_1^{-1/2}|A_0^2\Theta|^2 \\
& + \varepsilon \left\{ (b_1 + d_1)|A_0^{3/2}\Theta|^2 + (b_2 + d_2)|A_0^{3/2}\Theta| \right. \\
& + (b_3 + d_3) \left. \right\} |A_0^2\Theta| + \varepsilon^2 \left\{ (a_1 + c_1 + e_1)|A_0^{3/2}\Theta|^2 \right. \\
& + (a_2 + c_2 + e_2)|A_0^{3/2}\Theta| + (a_3 + c_3 + e_3) \left. \right\} |A_0^2\Theta|
\end{aligned}$$

assumindo como hipótese $s(\varepsilon + 1)\rho_1\lambda_1^{-1/2} \leq \frac{\nu}{4}$ e pondo novas constantes, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \left| A_0^{3/2}\Theta \right|^2 + \nu\varepsilon|A_0^2\Theta|^2 \leq & c'|A_0^2\Theta| + \varepsilon c''|A_0^2\Theta| + \varepsilon^2 c'''|A_0^2\Theta| \\
& + c_0|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + c_1|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| \\
& + \varepsilon c_3|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + \varepsilon c_4|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta| \\
& + \varepsilon^2 c_5|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|^2 + \varepsilon^2 c_6|A_0^{3/2}\Theta||A_0^2\Theta|
\end{aligned}$$

utilizando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left| A_0^{3/2} \Theta \right|^2 + \frac{3\nu\varepsilon}{4} |A_0^2 \Theta|^2 &\leq \frac{c'^2}{4\nu\delta\varepsilon} + \frac{\varepsilon c''^2}{4\nu\delta} + \frac{\varepsilon^3 c'''^2}{4\nu\delta} + 6\nu\varepsilon\delta |A_0^2 \Theta|^2 \\ &+ (c_0 + \varepsilon c_3 + \varepsilon^2 c_5) |A_0^{3/2} \Theta| |A_0^2 \Theta|^2 \\ &+ \left(\frac{c_1^2}{4\nu\delta\varepsilon} + \frac{\varepsilon c_4^2}{4\nu\delta} + \frac{\varepsilon^3 c_6^2}{4\nu\delta} \right) |A_0^{3/2} \Theta|^2 \end{aligned}$$

pondo $\delta = \frac{1}{24}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left| A_0^{3/2} \Theta \right|^2 + \nu\varepsilon |A_0^2 \Theta|^2 &\leq \frac{12c'^2}{\nu\varepsilon} + \frac{12\varepsilon c''^2}{\nu} + \frac{12\varepsilon^3 c'''^2}{\nu} \\ &+ 2(c_0 + \varepsilon c_3 + \varepsilon^2 c_5) |A_0^{3/2} \Theta| |A_0^2 \Theta|^2 \\ &+ \left(\frac{12c_1^2}{\nu\varepsilon} + \frac{12\varepsilon c_4^2}{\nu} + \frac{12\varepsilon^3 c_6^2}{\nu} \right) |A_0^{3/2} \Theta|^2. \end{aligned}$$

Da teoria de equações diferenciais existe um intervalo $[\tau_0, \tau_0 + s]$, s pequeno, tal que

$$|A_0^{3/2} \Theta| \leq \frac{\nu\varepsilon}{2(c_0 + \varepsilon c_3 + \varepsilon^2 c_5)},$$

assim, trocando novamente as constantes, onde devemos notar que $c' \sim O(\varepsilon)$

$$c_0 = \frac{12c'^2}{\nu\varepsilon^2} + \frac{12c''^2}{\nu} + \frac{12\varepsilon^2 c'''^2}{\nu}, \quad c = \frac{12c_1^2}{\nu\varepsilon} + \frac{12\varepsilon c_4^2}{\nu} + \frac{12\varepsilon^3 c_6^2}{\nu}$$

temos uma equação do tipo:

$$\frac{d}{d\tau} \left| A_0^{3/2} \Theta \right|^2 \leq \varepsilon c_0 + c |A_0^{3/2} \Theta|^2$$

daí,

$$\left| A_0^{3/2} \Theta \right|^2 \leq \frac{\varepsilon c_0}{c} (e^{c(\tau-\tau_0)} - 1)$$

esta última desigualdade sendo válida no intervalo $[\tau_0, \tau_0 + T]$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\varepsilon c_0}{c} (e^{cT} - 1)} &\leq \frac{\nu\varepsilon}{2(c_0 + \varepsilon c_3 + \varepsilon^2 c_5)} \\ (e^{cT} - 1) &\leq \frac{c\nu^2\varepsilon}{4c_0(c_0 + \varepsilon c_3 + \varepsilon^2 c_5)^2} \\ T &\leq \frac{1}{c} \log \left(\frac{c\nu^2\varepsilon}{4c_0(c_0 + \varepsilon c_3 + \varepsilon^2 c_5)^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

Assim é possível concluir com a seguinte estimativa;

$$|A_0 \Theta| \leq \varepsilon^{1/2} K, \quad t \in [t_0, t_0 + T]$$

onde K é uma constante. □

3 VARIEDADES INERCIAIS APROXIMADAS

Neste capítulo fazemos uma aproximação por meio de uma variedade inercial, para isto empregamos o método não linear de Galerkin. Embora o problema de achar uma variedade inercial aproximada para as Equações de Água Rasa e as Equações Diagnóstico seja um problema aberto, a apresentação neste capítulo tem por objetivo mostrar que se tem outra alternativa na procura de soluções para as Equações de Água Rasa. No caso de existir uma Variedade Inercial Aproximada temos de fato estimativas da solução aproximada com a solução real.

3.1 Método de Galerkin não-linear

O método de Galerkin não-linear é motivado pela teoria de Variedades Inerciais Aproximadas (veja por exemplo [9, 10, 12]). Em princípio este pode ser utilizado para equações da forma

$$\frac{dU}{dt} + AU + G(U) = f, \quad (3.1)$$

onde A é um operador linear, auto-adjunto, definido positivo com inverso compacto e G inclui a não-linearidade. Seja $P = P_N$ a projeção em H sobre H_N , o espaço gerado pelas N primeiras auto-funções $\{w_1, \dots, w_N\}$ de A , e seja $Q = Q_N = I - P_N$. Denote $p = PU$, $q = QU$, p representa a superposição de grandes vórtices e q representa pequenos vórtices.

Usando os operadores projeção P e Q , vemos que a equação 3.1 é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + Ap + PG(p + q) &= Pf, & p(0) &= P\tilde{z}(0) \\ \frac{\partial q}{\partial t} + Aq + QG(p + q) &= Qf, & q(0) &= Q\tilde{z}(0) \end{aligned}$$

A diferença do método de Galerkin padrão no qual se faz $q = 0$, e daí,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + Ap + PG(p) = Pf$$

No método de Galerkin não linear não podemos negligenciar completamente $q(t)$, mas aproximamos utilizando uma relação funcional entre $q(t)$ e $p(t)$,

$$q(t) = \Phi(p(t))$$

Como com variedades inerciais, usando a forma inercial (aproximada), obtemos o seguinte ODE

$$\frac{\partial p(t)}{\partial t} + Ap(t) + PG(p(t) + \Phi(p(t))) = Pf.$$

3.2 Variedades Inerciais

A seguir reescrevemos a equação resultante do sistema reduzido, já utilizada no capítulo anterior:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} + \nu A_0 \tilde{z} = \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[\mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) + \frac{F}{8R} \right]. \quad (3.2)$$

Agora aplicamos o método de Galerkin não linear, a seguir denotaremos $p = P\tilde{z}$, $q = Q\tilde{z}$. Projetando a equação (3.2) sobre o primeiro grupo de auto-funções, tem-se

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nu A_0 p = \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[P\mathfrak{J}(A_0 p + A_0 q, p + q) + \frac{PF}{8R} \right], \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nu A_0 q = \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[Q\mathfrak{J}(A_0 p + A_0 q, p + q) + \frac{QF}{8R} \right]. \quad (3.4)$$

Uma Variedade Inercial para (3.2) é um subconjunto $\mathcal{M} \subset H$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. \mathcal{M} é uma variedade de Lipschitz de dimensão finita,
2. \mathcal{M} é positivamente invariante sob o fluxo, (i.e. se $\tilde{z}_0 \in \mathcal{M}$ então a solução de (3.2) $\tilde{z}(t) \in \mathcal{M}$ para todo $t > 0$),
3. \mathcal{M} atrai cada trajetória exponencialmente (i.e. para toda solução $\tilde{z}(t)$ da equação (3.2) $\text{dist}(\tilde{z}(t), \mathcal{M}) \rightarrow 0$ exponencialmente.)

Se além disto requerermos \mathcal{M} ser o gráfico de uma função Lipschitz $\Phi : H_N \rightarrow QH$, então a condição de invariância (2) é equivalente a: Para toda solução $p(t)$ e $q(t)$ de (3.3), (3.4), respectivamente, com $q(0) = \Phi(p(0))$ temos $q(t) = \Phi(p(t))$ para todo $t > 0$. Daí, se tal função Φ existe, então a redução do sistema (3.3), (3.4) para \mathcal{M} é equivalente à equação diferencial ordinária, a qual é chamada uma **forma inercial**:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nu A_0 p = \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[P\mathfrak{J}(A_0 p + A_0 \Phi(p(t)), p + \Phi(p(t))) + \frac{PF}{8R} \right] \quad (3.5)$$

Teorema 3.2.1. *Suponha $F \in D \left[\left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \right]$, onde s é um número real fixo tal que $s \geq 3/2$. ou $s = 1/2, 1$. Então existe uma constante K_s dependendo de ν, λ_1, R e $|(A_0 + 1/8)^{s-1} F|$, tal que se $t_s = t_0 + 2s(\nu\lambda_1)^{-1}$ e $t \geq t_s$, temos*

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right| \leq K_s. \quad (3.6)$$

Além, se $t \geq t_s^{(1)} = t_s + 3\sqrt{2}(4T_s)^{-1}$, então

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right| \leq K_s^{(1)}. \quad (3.7)$$

Demonstração. *Passo 1.* Primeiro provaremos que (3.6) é válida para todo s tal que $2s$ é um inteiro não negativo.

Para $s = 0$, tomando o produto interno de (3.2) com \tilde{z} , temos

$$\frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \tilde{z} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \tilde{z} \right\|^2 \leq \left\langle \frac{F}{8R}, \tilde{z} \right\rangle$$

ou,

$$\frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \tilde{z} \right|^2 + \nu \lambda_1 \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \tilde{z} \right|^2 \leq \frac{1}{\nu \lambda_1} \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{-1/2} F}{8R} \right|^2$$

tal que,

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \tilde{z} \right|^2 \leq \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \tilde{z}(0) \right|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2 \lambda_1^2} \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{-1/2} F}{8R} \right|^2 (1 - e^{-\nu \lambda_1 t})$$

ou,

$$\begin{aligned} |\tilde{z}|^2 &\leq \left(\lambda_1 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{1/2} \tilde{z}(0) \right|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} \\ &+ \frac{1}{\nu^2 \lambda_1^2} \left(\lambda_1 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{-1/2} F}{8R} \right|^2 (1 - e^{-\nu \lambda_1 t}) \end{aligned}$$

Tomando $K_0 = \frac{2}{\nu\lambda_1} \left(\lambda_1 + \frac{1}{8}\right)^{-1/2} \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{-1/2} F}{8R} \right| e$

$$t_0 = \begin{cases} (\nu\lambda_1)^{-1} \log \left(\frac{4|\tilde{z}(0)|^2}{2K_0^2} \right) & , \quad \tilde{z}(0) \neq 0 \\ 0 & , \quad \tilde{z}(0) = 0 \end{cases}$$

então se $t \geq t_0$,

$$|\tilde{z}| \leq K_0.$$

Agora seja r um número fixo. Para $s = 1/2$, uma vez que a solução do sistema reduzido $\tilde{z}(t)$ é limitada em V para todo $\tilde{z}(0)$ e todo intervalo finito $[0, T]$, existe uma constante $K_{1/2}(r, \nu, \lambda_1, |(A_0 + \frac{1}{8})^{-1/2} F|)$ tal que se $t > t_{1/2} = t_0 + r$, então a estimativa (3.6) é válida.

Para $s = 1$, tomando o produto interno de (3.2) com $(A_0 + \frac{1}{8}) \tilde{z}$, temos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\|^2 \leq \left| \frac{A_0^{-1/2} F}{8R} \right| \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right\|$$

ou,

$$\frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 + \nu\lambda_1 \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 \leq \frac{1}{\nu\lambda_1} \left| \frac{F}{8R} \right|^2$$

daí,

$$\left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z} \right|^2 \leq \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \tilde{z}(0) \right|^2 e^{-\nu\lambda_1 t} + \frac{1}{\nu^2\lambda_1^2} \left| \frac{F}{8R} \right|^2 (1 - e^{-\nu\lambda_1 t})$$

Tomando $K_1 = \frac{2}{\nu\lambda_1} \left| \frac{F}{8R} \right|$, temos que a estimativa (3.6) é válida, para todo $t \geq t_1 = t_0 + 2r$

Passo 2. Para $s > \frac{3}{2}$, $2s$ é um inteiro não negativo, supomos (3.6) válida para $s - 1/2$. Tomando o produto interno de (3.2) com $(A_0 + \frac{1}{8})^{2s-1} \tilde{z}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right\|^2 &\leq \frac{2}{\nu\lambda_1} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) \right|^2 \\ &\quad + \frac{2}{\nu\lambda_1} \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{s-1} F}{8R} \right|^2 \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1} \mathfrak{J}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}) \right| &\leq \sum_{\beta \leq s-1} \binom{s-1}{\beta} C_\infty \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\beta+3/2} \tilde{z} \right| \times \\ &\quad \times \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-\beta-1/2} \tilde{z} \right|^{1/2} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-\beta+1/2} \tilde{z} \right|^{1/2} \\ &\leq \frac{d_1}{\lambda_1^{s-3/2}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right|^2, \end{aligned}$$

onde $d_1 = \sum_{\beta \leq s-1} \binom{s-1}{\beta} C_\infty$, daí:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right\|^2 &\leq \\ \frac{2}{\nu \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2}{\lambda_1^{2s-3}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right|^4 + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{s-1} F}{8R} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Agora substituindo s por $s - 1/2$ na desigualdade acima. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1/2} \tilde{z} \right|^2 + \nu \left| A_0^{1/2} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1/2} \tilde{z} \right|^2 &\leq \\ \frac{2}{\nu \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2}{\lambda_1^{2s-4}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1/2} \tilde{z} \right|^4 + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{s-3/2} F}{8R} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

se for $t \geq t_{s-1/2}$,

$$\int_t^{t+r} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1/2} \tilde{z} \right\|^2 d\tau \leq \frac{2}{\nu^2 \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2 K_{s-1/2}^4}{\lambda_1^{2s-4}} + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{s-3/2} F}{8R} \right|^2 \right\} r + \frac{K_{s-1/2}^2}{\nu}$$

logo de (3.9), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1/2} \tilde{z} \right|^2 + \nu \lambda_1 \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1/2} \tilde{z} \right|^2 &\leq \\ \frac{2}{\nu \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2}{\lambda_1^{2s-2}} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{s-1/2} \tilde{z} \right\|^4 + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{s-3/2} F}{8R} \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

Em seguida, utilizando o Lema Uniforme de Gronwall, temos que existe uma constante $K_s(\nu, \lambda, R, |(A_0 + \frac{1}{8})^{s-1} F|)$, tal que se $t \geq t_{s-1/2} + r$, então a estimativa dada em (3.6) é válida para todo s .

Passo 3. Provaremos que (3.6) é válida, para todo $s > 3/2$.

Seja θ um número real tal que $\theta > 3/2$ e $s < \theta < s + 1/2$, onde $2s$ é um inteiro não negativo. Substituindo s por θ em (3.8) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^\theta \tilde{z} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^\theta \tilde{z} \right\|^2 \leq \\ \frac{2}{\nu \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2}{\lambda_1^{2\theta-3}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^\theta \tilde{z} \right|^4 + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{\theta-1} F}{8R} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \tilde{z} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \tilde{z} \right\|^2 \leq \\ \frac{2}{\nu \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2}{\lambda_1^{2\theta-4}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \tilde{z} \right|^4 + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{\theta-3/2} F}{8R} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

De (3.11), para $r_1 = (2\theta - 2s)r$ temos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+r_1} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \tilde{z} \right\|^2 d\tau \leq \\ \frac{2}{\nu^2 \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2}{\lambda_1^{4s-2\theta-2}} \int_t^{t+r_1} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right|^4 d\tau + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{\theta-1} F}{8R} \right|^2 r_1 \right\} \\ + \frac{1}{\nu \lambda_1^{2s-2\theta+1}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right|^2 \end{aligned}$$

para $t \geq t_s$, pelo *passo 2*, obtemos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+r_1} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \tilde{z} \right\|^2 d\tau \leq \\ \frac{2}{\nu^2 \lambda_1} \left\{ \frac{d_1^2 r_1}{\lambda_1^{4s-2\theta-2}} K_s^4 + \left| \frac{(A_0 + \frac{1}{8})^{\theta-1} F}{8R} \right|^2 r_1 \right\} + \frac{K_s^2}{\nu \lambda_1^{2s-2\theta+1}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Agora de (3.10) e (3.12), pelo Lema Uniforme de Gronwall, temos que existe uma constante $K_\theta(r, \nu, \lambda_1, |(A_0 + \frac{1}{8})^{\theta-1} F|)$ tal que se $t \geq t_s + r_1 = t_0 + 2\theta \cdot r = t_\theta$ então (3.6) é válida. Se escolhemos um r apropriado $r = (\nu \lambda_1^{-1})$, então provamos a primeira parte do teorema.

Como consequência desta estimativa, derivando em relação a t , a equação (3.2), e supondo F independente de t , temos:

$$\frac{\partial^2 \left(A_0 + \frac{1}{8}\right) \tilde{z}}{\partial^2 t} + \nu A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8}\right) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} = \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z}) + \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t), \quad (3.13)$$

Neste caso tomamos como ponto inicial t_s . Seja θ um número real tal que $\theta > 3/2$ e $s < \theta < s + 1/2$, onde $2s$ é um inteiro não negativo. Tomando o produto interno de (3.13) com $\left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^{2\theta-1} \tilde{z}_t$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right\|^2 \leq \\ \left| A_0^{-1/2} \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^{\theta-1} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z}) \right| \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \tilde{z}_t \right\| \\ + \left| A_0^{-1/2} \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^{\theta-1} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t) \right| \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \tilde{z}_t \right\| \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right\|^2 \leq \\ \frac{2}{\nu \lambda_1} \left\{ \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^{\theta-1} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z}) \right|^2 + \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^{\theta-1} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t) \right|^2 \right\} \end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^{\theta-1} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}_t, \tilde{z}) \right| &\leq \frac{d_1}{\lambda_1^{\theta-3/2}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \tilde{z} \right| \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \tilde{z}_t \right| \\ \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^{\theta-1} \mathfrak{I}(A_0 \tilde{z}, \tilde{z}_t) \right| &\leq \frac{d_1}{\lambda_1^{\theta-3/2}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \tilde{z} \right| \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \tilde{z}_t \right|. \end{aligned}$$

Dai, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right\|^2 \leq \\ \frac{4d_1^2}{\nu \lambda_1^{2\theta-2}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \tilde{z} \right|^2 \left| \left(A_0 + \frac{1}{8}\right)^\theta \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Seja r um número fixo. Supondo a estimativa (3.7) válida para $\theta - 1/2$ e mudando θ por $\theta - 1/2$ em (3.14). Então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2 + \nu \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right\|^2 \leq \\ \frac{4d_1^2}{\nu \lambda_1^{2\theta-3}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \tilde{z} \right|^2 \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

para $r_1 = (2\theta - 2s)r$ temos

$$\begin{aligned} \int_t^{t+r_1} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right\|^2 d\tau \leq \\ \frac{4d_1^2}{\nu^2 \lambda_1^{4s-2\theta-1}} \int_t^{t+r_1} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \tilde{z} \right|^2 \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2 d\tau + \frac{1}{\nu \lambda_1^{s-\theta+1/2}} \left| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^s \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right|^2. \end{aligned}$$

Se $t \geq t_s^{(1)}$, então

$$\int_t^{t+r_1} \left\| \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{\theta-1/2} \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} \right\|^2 d\tau \leq \frac{4d_1^2 K_s^2 \left(K_s^{(1)} \right)^2 r_1}{\nu^2 \lambda_1^{4s-2\theta-1}} + \frac{\left(K_s^{(1)} \right)^2}{\nu \lambda_1^{s-\theta+1/2}}. \quad (3.16)$$

Agora, do Lema Uniforme de Gronwall, a hipótese de indução (3.16) e (3.14), temos que existe uma constante $K_\theta^{(1)}(r, \nu, \lambda_1, |(A_0 + 1/8)^{\theta-1} F|)$ tal que se $t \geq t_s^{(1)} + r_1$, então (3.7) é válida para θ . \square

Como uma consequência do teorema anterior, lembrando que $q = Q\tilde{z}$, temos o seguinte corolário:

Corolário 3.2.1. *Seja $F \in D \left[(A_0 + \frac{1}{8})^s \right]$, onde s é um número fixo e $s \geq 3/2$ ou $s = \frac{1}{2}, 1$. Para qualquer solução $\tilde{z}(t) = p(t) + q(t)$ de (3.3), (3.4) o componente dos pequenos vortices q de \tilde{z} satisfaz as desigualdades:*

$$|q| \leq K_s \lambda_{N+1}^{-s} \quad (3.17)$$

$$\left| \frac{\partial q}{\partial t} \right| \leq K_s^{(1)} \lambda_{N+1}^{-s}. \quad (3.18)$$

3.2.1 A Variedade Aproximada \mathcal{M}_0

Argumentos heurísticos e físicos conduzem Foias - Manley - Temam em [8, 9] a introduzir a variedade analítica de dimensão finita

$$\mathcal{M}_0 = \text{graf}(\Phi_o), \quad (3.19)$$

onde

$$\Phi_0(p) = (\nu A_0)^{-1} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[Q\mathfrak{I}(A_0 p, p) + \frac{QF}{8R} \right], \quad p \in H_N$$

como uma melhor aproximação ao atrator universal (global) em H_N .

Queremos mostrar que todas as soluções de (3.2) são atraídas por uma vizinhança muito fina de \mathcal{M}_0 . Seja $q_N = \Phi_0(p)$, onde $p = p(t) = P\tilde{z}(t)$, $\tilde{z}(t)$ é uma solução de (3.2). Então esta satisfaz

$$\nu A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) q_N = Q\mathfrak{I}(A_0 p, p) + \frac{QF}{8R}. \quad (3.20)$$

Primeiro obtemos uma estimativa de $|A_0^s q_N|$. Tomemos o produto interno da equação anterior com $A_0^{2s-1} q_N$. Então para $s > 0$, temos

$$\nu \left| A_0^{s+1/2} q_N \right|^2 \leq \left| A_0^{s-3/2} Q\mathfrak{I}(A_0 p, p) \right| \left| A_0^{s+1/2} q_N \right| + \left| A_0^{s-3/2} \frac{QF}{8R} \right| \left| A_0^{s+1/2} q_N \right|$$

onde, utilizando a fórmula de Leibniz temos;

$$\begin{aligned} \left| A_0^{s-3/2} Q\mathfrak{I}(A_0 p, p) \right| &\leq \sum_{\beta \leq s-3/2} \binom{s-3/2}{\beta} \left| A_0^{\beta+3/2} p \right| \left| A_0^{s-\beta-1} p \right|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \sum_{\beta \leq s-3/2} \binom{s-3/2}{\beta} \left| A_0^{\beta+3/2} p \right| C_\infty \left| A_0^{s-\beta-1} p \right|^{1/2} \left| A_0^{s-\beta} p \right|^{1/2} \\ &\leq \sum_{\beta \leq s-3/2} \binom{s-3/2}{\beta} C_\infty \lambda_{N+1}^{-s+7/2} \left| A_0^{s-3/2} p \right| \left| A_0^{s-1} p \right|. \end{aligned}$$

Então

$$\left| A_0^{s-3/2} Q\mathfrak{I}(A_0 p, p) \right| \leq \frac{d_2}{\lambda_{N+1}^{s-7/2}} \left| A_0^{s-3/2} p \right| \left| A_0^{s-1} p \right|$$

onde $d_2 = \sum_{\beta \leq s-3/2} \binom{s-3/2}{\beta} C_\infty$. Assim, temos

$$\nu \left| A_0^{s+1/2} q_N \right|^2 \leq \left\{ \frac{d_1}{\lambda_{N+1}^{s-7/2}} \left| A_0^{s-3/2} p \right| \left| A_0^{s-1} p \right| + \left| A_0^{s-3/2} \frac{QF}{8R} \right| \right\} \left| A_0^{s+1/2} q_N \right|$$

obtendo,

$$\nu \left| A_0^{s+1/2} q_N \right| \leq \frac{d_1}{\lambda_{N+1}^{s-7/2}} \left| A_0^{s-3/2} p \right| \left| A_0^{s-1} p \right| + \left| A_0^{s-3/2} \frac{QF}{8R} \right|$$

Supondo: $\left| A_0^{s-3/2} p \right| \leq K_{s-3/2}$, $\left| A_0^{s-1} p \right| \leq K_{s-1}$.

Defina

$$K'_s = \frac{1}{\nu} \left\{ \frac{c}{\lambda_{N+1}^{s-7/2}} K_{s-3/2} K_{s-1} + \left| A_0^{s-3/2} \frac{QF}{8R} \right| \right\}$$

escrevemos este resultado, da seguinte maneira.

Lema 3.2.1. *Supondo $F \in D \left[(A_0 + \frac{1}{8})^s \right]$, $s \geq 3/2$ ou $s = 1/2, 1$. Se $t \geq t_s$, temos*

$$\|A_0^s q_N\| \leq K'_s \quad \text{ou} \quad |A_0^s q_N| \leq K'_s \lambda_{N+1}^{-1/2}.$$

Agora tentamos estimar a distância das órbitas de (3.2) para \mathcal{M}_0 . Seja $\tilde{z}(t) = p(t) + q(t)$ uma órbita de (3.2), $\tilde{z}_N(t) = p(t) + q_N(t)$, então

$$\begin{aligned} \text{dist}(\tilde{z}(t), \mathcal{M}_0) &\leq |\tilde{z}(t) - \tilde{z}_N(t)| \\ &\leq |q(t) - q_N(t)|. \end{aligned}$$

Seja $\delta = q(t) - q_N(t)$. De (3.4) e (3.20) obtemos

$$\nu A_0 \left(A_0 + \frac{1}{8} \right) \delta = Q\mathfrak{I}(A_0 p, q) + Q\mathfrak{I}(A_0 q, p) + Q\mathfrak{I}(A_0 q, q) + \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Para s fixo, $s \geq 1$ ou $s = 1/2$, temos

$$\begin{aligned} |Q\mathfrak{I}(A_0 p, q)| &\leq C_\infty |A_0^{3/2} p| |A_0^{1/2} q|^{1/2} |A_0^{3/2} q|^{1/2} \\ &\leq C_\infty K_{3/2} K_s \lambda_{N+1}^{-s+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Q\mathfrak{I}(A_0q, p)| &\leq C_\infty |A_0^{3/2}q| |A_0^{1/2}p|^{1/2} |A_0^{3/2}p|^{1/2} \\
&\leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-s+3/2} K_s K_{1/2}^{1/2} K_{3/2}^{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|Q\mathfrak{I}(A_0q, q)| &\leq C_\infty |A_0^{3/2}q|^{3/2} |A_0^{1/2}q|^{1/2} \\
&\leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-2s+5/2} K_s^2.
\end{aligned}$$

Logo, temos

$$|A_0^2\delta| \leq \frac{C_\infty}{\nu\lambda_{N+1}^{s-1}} K_{3/2} K_s + \frac{C_\infty}{\nu\lambda_{N+1}^{s-3/2}} K_s K_{1/2}^{1/2} K_{3/2}^{1/2} + \frac{C_\infty}{\nu\lambda_{N+1}^{2s-5/2}} K_s^2 + \frac{K_s^{(1)}}{\nu\lambda_{N+1}^{s-3/2}}$$

daí, obtemos

$$|A_0\delta| \leq \rho_s \lambda_{N+1}^{-s+3/2} \quad \text{para } t \geq t_s^{(1)}$$

onde,

$$\rho_s = \frac{C_\infty}{\nu\lambda_{N+1}^{1/2}} K_{3/2} K_s + \frac{C_\infty}{\nu} K_s K_{1/2}^{1/2} K_{3/2}^{1/2} + \frac{C_\infty}{\nu\lambda_1^{s-1}} K_s^2 + \frac{K_s^{(1)}}{\nu}.$$

Enunciamos, isto mediante o seguinte resultado:

Teorema 3.2.2. *Assuma $F \in D \left[(A_0 + \frac{1}{8})^{s-3/2} \right]$, $s \geq 3/2$ ou $s = 1/2, 1$. Então se $t \geq t_s$, para qualquer órbita de (3.2)*

$$|q(t) - \Phi_0(p(t))| \leq \rho_s \lambda_{N+1}^{-s+1/2} \quad (3.21)$$

$$\|q(t) - \Phi_0(p(t))\| \leq \rho_s \lambda_{N+1}^{-s+1} \quad (3.22)$$

$$|A_0(q(t) - \Phi_0(p(t)))| \leq \rho_s \lambda_{N+1}^{-s+3/2}. \quad (3.23)$$

3.2.2 A Variedade Aproximada \mathcal{M}^s

Denotemos por

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \{p \in PH : |A_0^{3/2}p| \leq K_{3/2}\}, \\
\mathcal{B}^\perp &= \{q \in QV : |A_0^{3/2}q| \leq K_{3/2}\}
\end{aligned}$$

onde $K_{3/2}$ satisfaz (3.6).

Para N grande, existe uma aplicação $\Phi^s : \mathcal{B} \rightarrow QV$, satisfazendo

$$\Phi^s(p) = (\nu A_0)^{-1} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[Q\mathfrak{J}(A_0 p + A_0 \Phi^s(p), p + \Phi^s(p)) + \frac{QF}{8R} \right], \quad \forall p \in \mathcal{B} \quad (3.24)$$

Além disto, o gráfico de Φ^s , o qual denotamos \mathcal{M}^s ,

$$\mathcal{M}^s = \text{graf}(\Phi^s),$$

é uma C -variedade analítica e esta contém todas as soluções estacionárias de (3.2).

O seguinte teorema estabelece a existência de Φ^s e dá um limite inferior para N .

Lema 3.2.2. *Seja N suficientemente grande para que*

$$\lambda_{N+1} \geq \max \left\{ 16r_2^2, \frac{r_1^2}{K_{3/2}^2} \right\}. \quad (3.25)$$

Então existe uma única aplicação $\Phi^s : \mathcal{B} \rightarrow QV$ que satisfaz (3.24). Além disto

$$\left| A_0^{3/2} \Phi^s(p) \right| \leq \lambda_{N+1}^{-1/2} r_1, \quad (3.26)$$

onde

$$\begin{aligned} r_1 &= \nu^{-1} \left(4C_\infty K_{3/2}^2 \lambda_{N+1}^{-1/2} + \left| \frac{QF}{8R} \right| \right), \\ r_2 &= \nu^{-1} C_\infty K_{3/2} \lambda_{N+1}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $p \in \mathcal{B}$ fixo. Definamos $T_p : \mathcal{B}^\perp \rightarrow QV$ por

$$T_p(q) = (\nu A_0)^{-1} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} \left[Q\mathfrak{J}(A_0 p + A_0 q, p + q) + \frac{QF}{8R} \right].$$

Será suficiente mostrar que T_p tem um único ponto fixo.

1. Primeiro mostraremos que $T_p : \mathcal{B}^\perp \rightarrow \mathcal{B}^\perp$. Seja $q \in \mathcal{B}^\perp$, e $w \in H$, com $|w| = 1$. Então,

$$\left| \left\langle A_0^{3/2} T_p(q), w \right\rangle \right| \leq \nu^{-1} \left[\left\langle \mathfrak{J}(A_0 p + A_0 q, p + q), A_0^{-1/2} Qw \right\rangle + \left\langle A_0^{-1/2} \frac{QF}{8R}, w \right\rangle \right],$$

onde, o termo genérico da parte não linear, na desigualdade acima, satisfaz

$$|\mathfrak{J}(A_0 p, p)| \leq C_\infty \left| A_0^{3/2} p \right| \left| A_0^{1/2} p \right|^{1/2} \left| A_0^{3/2} p \right|^{1/2} \leq C_\infty K_{3/2}^2 \lambda_{N+1}^{-1/2}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \left| \left\langle A_0^{3/2} T_p(q), w \right\rangle \right| &\leq 4\nu^{-1} C_\infty K_{3/2}^2 \lambda_{N+1}^{-1/2} \left| A_0^{-1/2} Qw \right| + \lambda_{N+1}^{-1/2} \nu^{-1} \left| \frac{QF}{8R} \right| \\ &\leq \nu^{-1} \left(4C_\infty K_{3/2}^2 \lambda_{N+1}^{-1/2} + \left| \frac{QF}{8R} \right| \right) \lambda_{N+1}^{-1/2}. \end{aligned}$$

Desta última equação e utilizando (3.25) temos

$$\left| A_0^{3/2} T_p(q) \right| \leq \lambda_{N+1}^{-1/2} r_1 \leq K_{3/2} \quad (3.27)$$

2. Agora mostramos que T_p é uma contração. Observe que

$$\frac{\partial}{\partial q} T_p(q) \eta = (\nu A_0)^{-1} \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} Q [\mathfrak{J}(A_0 p + A_0 q, \eta) + \mathfrak{J}(A_0 \eta, p + q)] \quad , \quad \forall \eta \in QV$$

Seja $w \in H$, com $|w| = 1$. Então,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle A_0^{3/2} \frac{\partial}{\partial q} T_p(q) \eta, w \right\rangle \right| &\leq \nu^{-1} \left| \left\langle \mathfrak{J}(A_0 p + A_0 q, \eta), A_0^{-1/2} Qw \right\rangle \right| \\ &\quad + \nu^{-1} \left| \left\langle \mathfrak{J}(A_0 \eta, p + q), A_0^{-1/2} Qw \right\rangle \right|, \end{aligned}$$

onde, o termo geral da última desigualdade satisfaz a seguinte estimativa:

$$|\mathfrak{J}(A_0 p, \eta)| \leq C_\infty \left| A_0^{3/2} p \right| \left| A_0^{1/2} \eta \right|^{1/2} \left| A_0^{3/2} \eta \right|^{1/2} \leq C_\infty K_{3/2} \lambda_{N+1}^{-1/2} \left| A_0^{3/2} \eta \right|.$$

Então,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle A_0^{3/2} \frac{\partial}{\partial q} T_p(q) \eta, w \right\rangle \right| &\leq 4\nu^{-1} C_\infty K_{3/2} \lambda_{N+1}^{-1/2} \left| A_0^{3/2} \eta \right| \left| A_0^{-1/2} Qw \right| \\ &\leq 4\nu^{-1} C_\infty K_{3/2} \lambda_{N+1}^{-1} \left| A_0^{3/2} \eta \right|. \end{aligned}$$

Assim,

$$\left| A_0^{3/2} \frac{\partial}{\partial q} T_p(q) \right|_{\mathcal{L}(QV)} \leq r_2 \lambda_{N+1}^{-1/2}.$$

Aplicando (3.25), temos

$$\left| A_0^{3/2} \frac{\partial}{\partial q} T_p(q) \right|_{\mathcal{L}(QV)} \leq \frac{1}{2}.$$

Pelo Principio da Contração concluímos que existe um único $q(p) \in \mathcal{B}^\perp$ tal que

$$q(p) = T_p(q).$$

Denotamos $\Phi^s(p) = q(p)$, observe que (3.27) implica (3.26). \square

A seguir demonstraremos que toda trajetória $\tilde{z}(t) = p(t) + q(t)$ se aproxima numa pequena vizinhança da variedade \mathcal{M}^s .

Teorema 3.2.3. *Seja N suficientemente grande tal que (3.25) seja válida. Então, para toda solução $\tilde{z}(t) = p(t) + q(t)$ de (3.3), (3.4) temos*

$$\|q(t) - \Phi^s(p(t))\| \leq 2\nu^{-1} K_s^{(3)} \lambda_{N+1}^{-s+1/2} \quad (3.28)$$

e

$$|q(t) - \Phi^s(p(t))| \leq 2\nu^{-1} K_s^{(3)} \lambda_{N+1}^{-s}, \quad (3.29)$$

onde

$$K_s^{(3)} = C_\infty \lambda_{N+1}^{-s+3/2} K_s^2 + C_\infty K_{3/2}^2 + K_0^{(1)}.$$

Demonstração. Seja $\Delta(t) = \Phi^s(p(t)) - q(t)$. De (3.4) e (3.24) temos

$$\begin{aligned} \nu A_0 \Delta &= \left(A_0 + \frac{1}{8} \right)^{-1} Q [\mathfrak{J}(A_0 p, \Delta) + \mathfrak{J}(A_0 \Delta, p) - \mathfrak{J}(A_0 q, q) + \mathfrak{J}(A_0 \Phi^s(p), \Phi^s(p))] \\ &\quad + \frac{\partial q}{\partial t}. \end{aligned}$$

Tomando o produto interno em H da equação acima com $A_0^2 \Delta$, temos

$$\begin{aligned} \nu |A_0^{3/2} \Delta|^2 &\leq |< \mathfrak{J}(A_0 p, \Delta), A_0 \Delta >| + |< \mathfrak{J}(A_0 \Delta, p), A_0 \Delta >| + |< \mathfrak{J}(A_0 q, q), A_0 \Delta >| \\ &\quad + |< \mathfrak{J}(A_0 \Phi^s(p), \Phi^s(p)), A_0 \Delta >| + \left| \left\langle \frac{dq}{dt}, A_0 \Delta \right\rangle \right|, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} |\mathfrak{J}(A_0 p, \Delta)| &\leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} |A_0^{3/2} p| |A_0^{3/2} \Delta| \leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} K_{3/2} |A_0^{3/2} \Delta| \\ |\mathfrak{J}(A_0 \Delta, p)| &\leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} |A_0^{3/2} p| |A_0^{3/2} \Delta| \leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} K_{3/2} |A_0^{3/2} \Delta| \\ |\mathfrak{J}(A_0 q, q)| &\leq C_\infty |A_0^{1/2} q|^{1/2} |A_0^{3/2} q|^{1/2} \leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-s+1} K_s^2 \end{aligned}$$

e

$$|\mathfrak{J}(A_0\Phi^s(p), \Phi^s(p))| \leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} |A_0^{3/2}\Phi^s(p)|^2 \leq C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} K_{3/2}^2.$$

Dai,

$$\begin{aligned} \nu |A_0^{3/2}\Delta|^2 &\leq 2C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} K_{3/2} |A_0^{3/2}\Delta| |A_0\Delta| + C_\infty \lambda_{N+1}^{-s+1} K_s^2 |A_0\Delta| \\ &\quad + C_\infty \lambda_{N+1}^{-1/2} K_{3/2}^2 |A_0\Delta| + \lambda_{N+1}^{-1/2} K_0^{(1)} |A_0\Delta| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu |A_0^{3/2}\Delta| &\leq 2C_\infty \lambda_{N+1}^{-1} K_{3/2} |A_0^{3/2}\Delta| + C_\infty \lambda_{N+1}^{-s+1/2} K_s^2 \\ &\quad + C_\infty \lambda_{N+1}^{-1} K_{3/2}^2 + \lambda_{N+1}^{-1} K_0^{(1)} \end{aligned}$$

tal que

$$(\nu - 2C_\infty \lambda_{N+1}^{-1} K_{3/2}) |A_0^{3/2}\Delta| \leq \left(C_\infty \lambda_{N+1}^{-s+3/2} K_s^2 + C_\infty K_{3/2}^2 + K_0^{(1)} \right) \lambda_{N+1}^{-1}.$$

Pelo Lema 3.2.2, temos que $\nu/2 \geq 2C_\infty \lambda_{N+1}^{-1} K_{3/2}$. Assim da desigualdade acima temos

$$|A_0^{3/2}\Delta| \leq \frac{2K_s^{(3)}}{\nu} \lambda_{N+1}^{-3/2},$$

concluindo a prova. \square

Do Teorema 2.3.1 enunciado e demonstrado no capítulo anterior e desta aproximação pelas variedades inerciais $(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}^s)$, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.2.4. *Para a solução geral $z(t)$ do sistema (1.26)-(1.28), que constituem as equações diagnósticas e a solução aproximada $p(t)$ usando o método não-linear de Galerkin no sistema reduzido (para $\tilde{z}(t)$), podemos inferir as seguintes estimativas:*

1. *Para a aproximação $q_N = \Phi_0(p)$, onde a solução do sistema reduzido é da forma $\tilde{z}(t)_N = p(t) + q_N(t)$, e N suficientemente grande tal que $N \sim \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$ temos*

$$\|z - p\|_{H^2(\Omega)} \leq \varepsilon^{1/2} K + K'_1 \lambda_{N+1}^{-1/2} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \quad , \quad t \geq t_0 \quad (3.30)$$

2. Fazendo $q = \Phi^s(p)$, com solução do sistema reduzido da forma $\tilde{z}(t) = p(t) + q(t)$, e N suficientemente grande tal que $N \sim O(\varepsilon^{-1/2})$ temos

$$\|z - p\|_{H^2(\Omega)} \leq \varepsilon^{1/2}K + r_1\lambda_{N+1}^{-1} = O(\varepsilon^{1/2}) \quad , \quad t \geq t_0. \quad (3.31)$$

Demonstração. seja $z(t)$ a solução do sistema de equações diagnósticas, $\tilde{z}(t)$ a solução do sistema reduzido e $p(t)$ a solução utilizando o método não linear de Galerkin:

1. Do teorema 2.3.1 temos

$$\|z - \tilde{z}\|_{H^2(\Omega)} \leq O(\varepsilon^{1/2})K$$

e do Lema 3.2.1,

$$\|\tilde{z} - p\|_{H^2(\Omega)} = |A_0q_N| \leq K'_1\lambda_{N+1}^{-1/2}$$

então

$$\begin{aligned} \|z - p\|_{H^2(\Omega)} &\leq \|z - \tilde{z}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{z} - p\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|z - \tilde{z}\|_{H^2(\Omega)} + |A_0q_N| \\ &\leq \varepsilon^{1/2}K + K'_1\lambda_{N+1}^{-1/2} \quad , \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

Assim temos $O(\varepsilon^{1/2}) \sim O(N^{-1/2})$ ou equivalentemente $N \sim O(\varepsilon^{-1/2})$.

2. Em seguida, para a variedade \mathcal{M}^s , isto é $q = \Phi_s(p)$, do Lema 3.2.2, temos

$$|A_0\Phi^s(p)| \leq \lambda_{N+1}^{-1}r_1$$

então novamente temos;

$$\begin{aligned} \|z - p\|_{H^2(\Omega)} &\leq \|z - \tilde{z}\|_{H^2(\Omega)} + \|\tilde{z} - p\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \|z - \tilde{z}\|_{H^2(\Omega)} + |A_0\Phi_s(p)| \\ &\leq \varepsilon^{1/2}K + r_1\lambda_{N+1}^{-1} \quad , \quad t \geq t_0 \end{aligned}$$

assim temos $O(\varepsilon^{1/2}) \sim O(N^{-1})$ ou equivalentemente $N \sim O(\varepsilon^{-1/2})$. □

Devemos lembrar um resultado utilizado na prova do Teorema 3.30, fazendo um ordenamento dos autovalores do laplaciano $\lambda_{n,m} = 4\pi^2(m^2 + n^2)$, com $m, n \neq 0$, obtemos uma seqüência λ_N .

Seja $N(\lambda)$ = o número de autovalores menores ou iguais que λ , isto é

$$4\pi^2(m^2 + n^2) \leq \lambda$$

Geometricamente, $N(\lambda)$ é o número de pontos, no primeiro quadrante, no interior da circunferência:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \right)^2$$

desta maneira, $N(\lambda)$ é aproximadamente igual a um quarto da area da circunferência, i.e

$$N(\lambda) \leq \frac{\lambda}{16\pi} \quad (3.32)$$

Por outro lado, estes quadrados incluem a parte da circunferência:

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \right)^2$$

no primeiro quadrante. Isto é igual a um quarto da circunferência, daí;

$$N(\lambda) \geq \frac{\lambda}{16\pi} - \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \quad (3.33)$$

das equações (3.32) e (3.33) segue-se que

$$N(\lambda) = \frac{\lambda}{16\pi} + O(\sqrt{\lambda}) \quad (3.34)$$

obtendo desta última que $\lambda_N \sim N$ o qual justifica nosso resultado final.

Bibliografia

- [1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*. Academic Press. New York, 1975.
- [2] S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*. Van Nostrand. Princeton, N.J., 1965.
- [3] S. R. M. Barros and J. W. Cárdenas, *A Nonlinear Galerkin Method for the Shallow-Water Equations on Periodic Domains*. *J. Computational Physics* **172** (2001), 592-608.
- [4] J. W. Cárdenas, *Técnicas Analíticas e Computacionais para um Modelo Atmosférico de Lorenz*. Dissertação de Mestrado, UFRGS, 1994.
- [5] J. W. Cárdenas, M. Thompson, *Error Estimates and Existence of Solutions for an Atmospheric Model of Lorenz on Periodic Domains*. *Nonlinear Analysis* **54** (2003), 123-142 .
- [6] B. Desjardins and E. Grenier, *On the Homogeneous Model of Wind-Driven Ocean Circulation*. *Siam J. Appl. Math* **60** (1999), 43-60.
- [7] E. C. Lawrence, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, 1998.
- [8] C. Foias, O. R. Temam, *Approximation of Attractors by Algebraic or Analytic Sets*. *SIAM. J. Math. Anal* **25**(1994), 1269-1302.
- [9] C. Foias, O. P. Manley, R. Temam, *Approximate Inertial Manifolds and Viscosity in Turbulent Flows*. *Phys. Fluids. A3*, **5** (1991), 898-911.
- [10] O. Goubet, *Construction of Approximate Inertial Manifolds Using Wavelets* *Siam J. Math. Anal* **23** (1992), 1455-1481.
- [11] J. G. Heywood & R. Rannacher, *On the Question of Turbulence Modeling By Approximate Inertial Manifolds and the Nonlinear Galerkin Method*. *SIAM J. Numer. Anal* **30** (1993), 1603-1621.

- [12] N. Kopell, *Invariant Manifolds and Initialization Problem for Some Atmospheric Equations*, *Physica D* **14** (1985), 203-215.
- [13] C. D. Levermore, M. Oliver and E. S. Titi, *Global Well-Posedness for Models of Shallow Water in a Basin With a Varying Bottom*. *Indiana University Mathematics Journal* **45** (1996), 479-510.
- [14] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux limites non Linéaires*. Dunod Gauthier-Villars. Paris 1969.
- [15] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*. vol **1**, Dunod. Paris 1968.
- [16] E. Lorenz, *Attractor Sets and Quase Geostrophic Equilibrium*, *J. Atmospheric. Sciences*, **37** (1980), 1655-1689.
- [17] E. Lorenz, *On the Existence of a Slow Manifold*, *J. Atmospheric. Sciences* **4** (1986), 1547-1557.
- [18] X. Liu, *On Approximate Inertial Manifolds for two and three Dimensional Turbulent Flows*, *J. Math. Anal. Appl* **163** (1992), 559-580.
- [19] C. McWilliams and I. Yavneh, *Robust Multigrid Solution of the Shallow-Water Balance Equation*, *J. Computational Physics* **119** (1995), 1-25.
- [20] S. Panchev, *Dynamic Meteorology*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1985.
- [21] S. Quin, J. Weiss, *Wavelets and Numerical Solution of Partial Differential Equations*, *J. Comput. Phys* **106** (1993), 155-175.
- [22] D. A. Randall, *The Shallow Water Equations Report*. Departament of Atmospheric Science. Colorado State University, 2004.
- [23] F. Riesz and B. SZ. Nagy, *Functional Analysis*. Frederick Ungar Publishing CO. New York 1953.

- [24] R. Temam, *Navier - Stokes Equations*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [25] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [26] M. Thompson, *Aplications of A.I.M. Theory in Fluid and Magneto Hydrodynamics. Atas do 40^o Seminario Brasileiro de Análise*, 1994.
- [27] E. S. Titi, *On Approximative Inertial Manifolds to the Navier-Stokes Equations. J. Math. Anal Appl* **149** (1990), 540-557.
- [28] A. N. Yannacopoulos, A. S. Tomlin, J. Brindley, J. H. Merkin, M. J. Pilling, *The Use of Algebraic Sets in the Approximation of Inertial Manifolds and Lumping in Chemical Kinetic Systems. Physica D* **83** (1995), 421-449.
- [29] I. Yavneh, A. F. Shchepetkin, J. C. McWilliams and L. P. Graves, *Multi-grid Solution of Rotating Stably Stratified Flows: the Balanced Equations and their Turbulent Dynamics. J. Computational Physics* **136** (1997), 245-262.