第五章　离散信号与系统的时域分析

引　言

有限长序列在数字信号处理中是很重要的一种序列，当然可以用 z 变换和傅立叶变换来研究，但是对它来说，可以导出反映它的有限长这一特点的一种有用工具，这就是离散傅立叶变换(DFT)。离散傅立叶变换除了作为有限长序列的一种傅立叶表示法在理论上相当重要外，而且由于存在着计算离散傅立叶变换的有效快速算法，因而离散傅立叶变换在各种数字信号处理的算法中起着核心的作用。

有限长序列的离散傅立叶变换(DFT)和周期序列的离散傅立叶级数(DFS)本质上是一样的，为了更好的理解 DFT，需要先讨论周期序列的离散傅立叶级数。而为了讨论离散傅立叶级数及离散傅立叶变换，我们首先来回顾并讨论傅立叶变换的几种可能形式。

一、连续时间，连续频率的傅立叶变换

即连续时间非周期信号 $x(t)$的傅立叶变换关系，所得到的是连续的非周期的频谱密度函数 $X(j\omega)$这一变换对为：

正变换　$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

反变换　$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

这一变换对的示意图如下

可以看出时域连续函数造成频域是非周期的谱，而时域的非周期性造成频域是连续的谱。

常见非周期信号频谱

二、连续时间离散频率的傅立叶变换——傅立叶级数

设 $x(t)$代表一个周期为 Tp 的周期性连续时间函数，$x(t)$可展成傅立叶级数，其傅立叶级数的系数为 $x(jn\Omega)$，$x(jn\Omega)$是离散频率的非周期函数。$x(t)$和 $x(jn\Omega)$组成变换对，表示为

正变换:

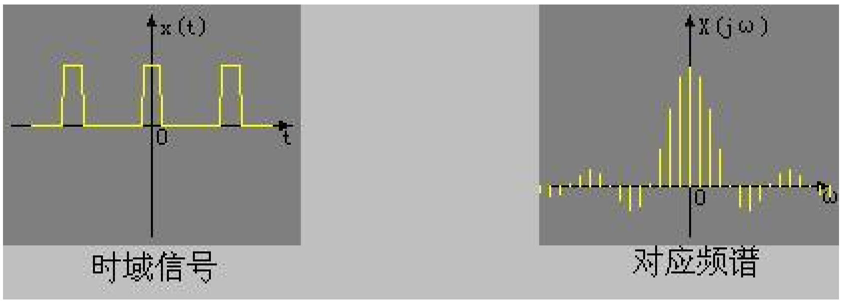
$$X(jn\Omega)=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jn\Omega t}dt$$

反变换:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(jn\Omega)e^{jn\Omega t}$$

其中Ω 为离散频谱相邻两谱线的角频率间隔，n 为谐波序号

这一变换对的示意图如下



可以看出时域的连续函数造成频域是非周期的谱函数，而频域的离散频谱就与时域的周期时间函数相对应。

常见周期信号频谱

三、离散时间连续频率的傅立叶变换——序列的傅立叶变换

正变换: $$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换: $$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

这里的ω是数字频率，它和模拟角频率Ω的关系为 $\omega=\Omega T$ 。

这一变换对的示意图如下

可以看出时域的离散化造成频域的周期延拓,而时域的非周期对应于频域的连续

常见非周期序列与非周期信号频谱比较

四、离散时间离散频率的傅立叶变换——离散傅立叶变换

这一变化对是针对有限长序列或周期序列才存在的,它相当于把序列的连续傅立叶变换对加以离散化(抽样),频域的离散化造成时间函数也成周期,故级数应限制在一个周期之内。

正变换
$$X(k)=X(e^{j\frac{2\pi}{N}k})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

反变换
$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

这一变换对的示意图如下

可以看出时域和频域都是离散的和周期的。

离散傅里叶变换动态演示

对以上四种傅立叶变换形式简要归纳如下:

时间函数	频率函数
连续和非周期	非周期和连续
连续和周期	非周期和离散
离散和非周期	周期和连续
离散和周期	周期和离散

【小结】

总结以上四种傅立叶变换对的形式，可得如下结论:

假若一个函数在一个域内（时间或频率）是周期性的，则相应的在另一个域中的变换式必是取样的形式，即离散变量的函数。反之，如果在一个域中的函数是取样的，则在另一个域中必是周期性函数。在一个域中函数的周期必是另一域中两取样点间增量的倒数。

离散时间傅里叶变换性质

设 $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$

1、线性

$$FT[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

2、 时移与频移

$$FT[x(n-n_0)]=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

$$FT[e^{j\omega_0 n}x(n)]=X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

3、 帕斯维尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2d\omega$$

该定理说明信号在时域的能量与在频域表现的能量相等。对于周期序列有下式:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\tilde{x}(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|\tilde{X}(k)|^2$$

式中 N 为周期序列的周期。

4、 序列卷积的傅里叶变换

设 $y(n)=x(n)*h(n)$， 则

$$Y(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})\bullet H(e^{j\omega})$$

离散系统的频域分析

基本信号$e^{j\omega k}$激励下的零状态响应

对一任意的周期离散信号 $f(k)$，利用离散傅里叶级数可以将其表示为指数信号 $e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$ 的线性组合，即

$$f(k)=\sum_{n=\langle N\rangle}F_n e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$$

式中：

$$F_n=\frac{1}{N}\sum_{k=\langle N\rangle}f(k)e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}$$

同样，利用离散时间傅里叶变换可以将任一非周期离散信号$f(k)$表示为指数信号$e^{j\omega k}$的线性组合，即

$$f(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}F(e^{j\omega})e^{j\omega k}d\omega$$

式中：

$$F(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}f(k)e^{-j\omega k}$$

因此，与连续信号的情况一样，我们将指数信号$e^{j\omega k}$称为基本信号。指数信号 $e^{j(\frac{2\pi}{N})nk}$ 实质上与基本信号$e^{j\omega k}$一样，它只不过是当 $\omega=n(\frac{2\pi}{N})$ 时的特例。

设稳定离散 LTI 系统的单位响应为$h(k)$，则系统对基本序列$e^{j\omega k}$的零状态响应为

$$y_f(k)=e^{j\omega k}*h(k)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)e^{j\omega(k-i)}=e^{j\omega k}\cdot\sum_{i=-\infty}^{\infty}h(i)e^{-j\omega i}$$

式中的求和项正好是$h(k)$的离散时间傅里叶变换，记为$H(e^{j\omega})$，即

$$H(e^{j\omega})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h(k)e^{-j\omega i}$$

称 $H(e^{j\omega})$ 为**传输函数**或**频率响应**。于是可写为

$$y_f(k)=e^{j\omega k}\cdot H(e^{j\omega})$$

这正是频域分析的基础。式(6.2-7)表明，一个稳定的离散 LTI 系统，对 $e^{j\omega k}$ 这一基本信号的零状态响应是基本信号$e^{j\omega k}$本身乘上一个与时间序数k无关的常系数$H(e^{j\omega})$，而$H(e^{j\omega})$为系统单位响应$h(k)$的离散时间傅里叶变换。 $H(e^{j\omega})$ 一般是ω的连续函数，而且是复函数，即

$$H(e^{j\omega})=\left|H(e^{j\omega})\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|H(e^{j\omega})\right|$称为系统的**幅频响应**或**幅度响应**，$\varphi(\omega)$称为系统的**相频响应**或**相位响应**。

应用上式就可以很方便地求出离散 LTI 系统对正弦序列的稳态响应。设输入周期正弦序列为

$$f(k)=A\cos\omega_0 k \qquad -\infty<k<\infty$$

式中,A、ω_0分别为正弦序列的幅度和角频率。应用欧拉公式，可将$f(k)$写成

$$f(k)=\frac{A}{2}[e^{j\omega_0 k}+e^{-j\omega_0 k}]$$

$f(k)$通过一个频响函数为$H(e^{j\omega})$的离散LTI系统的稳态响应可表示为

$$y_s(k)=\frac{A}{2}[H(e^{j\omega_0})e^{j\omega_0 k}+H(e^{-j\omega_0})e^{-j\omega_0 k}]$$

式中:

$$H(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\omega_0}=H(e^{j\omega})\Big|e^{j\varphi(\omega)}\Big|_{\omega=\omega_0}$$

由于$\left|H(e^{j\omega})\right|$为$\omega$的遇函数,而$\varphi(\omega)$为$\omega$的奇函数,因而可写为

$$y_s(k)=\frac{A}{2}\left|H(e^{j\omega_0})\right|[e^{j(\omega_0 k+\varphi(\omega_0))}+e^{-j(\omega_0 k+\varphi(\omega_0))}]=A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos(\omega_0 k+\varphi(\omega_0))$$

这样就得到一个与连续系统相似的结论:一个离散LTI系统对正弦序列的稳态响应$y_s(k)$也是一个同频率的正弦序列,但在幅度上要乘以因子$\left|H(e^{j\omega_0})\right|$,相位上要附加$\varphi(\omega_0)$.

例: 已知描述一离散LTI系统的差分方程为

$$y(k)+\frac{1}{2}y(k-1)=f(k-1)$$

若输入正弦序列$f(k)=10\cos(\frac{\pi}{2}k+\frac{2\pi}{3})$,求该系统的稳态响应$y_s(k)$。

解 应用时域分析的方法,可以求出系统的单位响应$h(k)$,从而得到其频率响应$H(e^{j\omega})$。然而,应用离散时间傅里叶变换的有关性质,也可直接从系统差分方程得到其频率响应。若将方程中的输入$f(k)$用单位序列$\delta(k)$代换,则响应$y(k)$即为$h(k)$,原方程可改为

$$h(k)+\frac{1}{2}h(k-1)=\delta(k-1)$$

对上式两端求离散时间傅里叶就换,从而得到

$$H(e^{j\omega})+\frac{1}{2}e^{-j\omega}H(e^{j\omega})=e^{-j\omega}$$

则有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{e^{j\omega}+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5+4\cos\omega}} e^{-j\arctan\frac{\sin\omega}{\cos\omega+\frac{1}{2}}}$$

由输入正弦序列的表达式可知,其中 $\omega = \frac{\pi}{2}$ 所以有

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j\arctan 2}$$

则该离散系统的稳态响应为

$$y_s(k) = \frac{20}{\sqrt{5}} \cos(\frac{\pi}{2}k + \frac{2\pi}{3} - \arctan 2)$$

若输入正弦序列改为 $f(k) = 10\cos(\pi k + \frac{2\pi}{3})$,即 ω 改为 π,则据

$$H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = 2$$

从而其输出的稳态响应为

$$y_s(k) = 20\cos(\pi k + \frac{2\pi}{3})$$

一般信号 $f(k)$ 激励下的零状态响应

一离散 LTI 系统,若外加激励为任意信号 $f(k)$ 时,该系统的零状态响应 $y_f(k)$ 为

$$y_f(k) = f(k) * h(k)$$

这是离散系统的时域法求解.如果应用本章的讨论可知,求解可用频域的方法来进行.应用离散时间傅里叶变换的有关性质,在频域中可以表示为

$$Y_f(e^{j\omega}) = F(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega})$$

式中 $F(e^{j\omega})$、$H(e^{j\omega})$ 和 $y_f(e^{j\omega})$ 分别为:输入序列 $f(k)$、系统的单位响应 $h(k)$、系统的零状态响应 $y_f(k)$ 的离散时间傅里叶变换.将上式求得的 $y_f(e^{j\omega})$ 取离散时间傅里叶反变换,就可得到响应 $y_f(k)$.频域分析将时域中的卷积运算转化为频域中的相乘运算,为系统响应的求解带来较大方便.在用式求解系统响应时,如何由已知系统求得系统频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是一个不能回避的问题.下面对此作简要分析.

稳定离散 LTI 系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 是该系统单位响应 $h(k)$ 的离散时间傅里叶变换，当然可以由 $h(k)$ 求得 $H(e^{j\omega})$。而系统单位响应 $h(k)$ 往往要由描述系统的差分方程来求得. 我们知道, 对一个离散 LTI 系统而言, 其输出 $y(k)$ 与输入 $f(k)$ 间的 N 阶线性常系数差分方程一般具有如下形式:

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i f(k-i)$$

式中, a_i 和 b_i 都是常数. 若系统是稳定的, 对上式两端求离散时间傅里叶变换, 并应用离散时间傅里叶变换的时移性质, 可以得到

$$\sum_{i=0}^{N} a_i e^{-j\omega i} Y(e^{j\omega}) = \sum_{i=0}^{M} b_i e^{-j\omega i} F(e^{j\omega})$$

从而得到该系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{F(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{i=0}^{M} b_i e^{-j\omega i}}{\sum_{i=0}^{N} a_i e^{-j\omega i}}$$

将上式相比较, 可以看到, 和连续系统的情况一样, $H(e^{j\omega})$ 是两个多项式之比, 其分子、分母均为 $e^{j\omega}$ 的多项式。其分母多项式的系数就是差分方程左边各项的系数, 而分子多项式的系数为差分方程右边各项的系数. 因此, 根据这一规律就可以很方便地由差分方程直接写出该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$。

例: 描述一稳定离散 LTI 系统的差分方程为

$$y(k) + 0.1y(k-1) - 0.02y(k-2) = 6f(k)$$

试求其单位响应 $h(k)$。

解: 写出该系统的频率响应

$$H(e^{j\omega}) = \frac{6}{1 + 0.1e^{-j\omega} - 0.02e^{-j2\omega}}$$

欲求的单位响应 $h(k)$ 为 $H(e^{j\omega})$ 的离散时间傅里叶反变换. 为此, 利用部分分式展开法, 将 $H(e^{j\omega})$ 写为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{6}{(1-0.1e^{-j\omega})(1+0.2e^{-j\omega})} = \frac{2}{1-0.1e^{-j\omega}} + \frac{4}{1+0.2e^{-j\omega}}$$

据单边指数序列的变换式可得系统单位响应

$$h(k) = 2(0.1)^k \varepsilon(k) + 4(-0.2)^k \varepsilon(k)$$

若给该系统施加信号 $f(k)=(0.5)^k\varepsilon(k)$，则该系统的零状态响应 $y_f(k)$ 即可求得。

由于

$$F(e^{j\omega})=\frac{1}{1-0.5e^{-j\omega}}$$

则有

$$Y(e^{j\omega})=F(e^{j\omega})\cdot H(e^{j\omega})=\frac{6}{(1-0.5e^{-j\omega})(1-0.1e^{-j\omega})(1+0.2e^{-j\omega})}$$

同理,将$Y(e^{j\omega})$展开成部分分式有

$$Y_f(e^{j\omega})=\frac{\frac{75}{14}}{1-0.5e^{-j\omega}}+\frac{-\frac{1}{2}}{1-0.1e^{-j\omega}}+\frac{\frac{8}{7}}{1+0.2e^{-j\omega}}$$

得零状态响应

$$y_f(k)=\frac{75}{14}(0.5)^k\varepsilon(k)-\frac{1}{2}(0.1)^k\varepsilon(k)+\frac{8}{7}(-0.2)^k\varepsilon(k)$$

在形式上,上例中所采用的求解步骤与连续时间系统频率分析是一样的.因而与连续系统的频域分析一样,这里最困难的一步就是如何求$Y_f(e^{j\omega})$的反变换.一般情况下,直接按离散时间傅里叶反变换的定义式来求,很难得到结果,所以正确进行部分分式展开,并利用常变换对来求反变换才是一种可行的方法.

如果离散 LTI 系统的输入为周期序列,则可利用离散傅里叶级数 F_n进行频域分析.其分析过程与连续系统完全一样,这里不再重复.

若$f(k)$是一个有限长序列,系统的$h(k)$也是一个有限长序列,则在满足由循环卷积求线卷积的条件下,它们的 DET 满足

$$Y(n)=F(n)\cdot H(n)$$

此时,由 DET 利用 FFT 算法可以求得系统的响应$y(k)$。