有关矩阵的秩及其应用

在矩阵理论中，矩阵的秩是一个重要的概念。它是矩阵的一个数量特征，而且是初等变换下的不变量。矩阵的秩与矩阵是否可逆、线性方程组的解的情况等都有着密切的联系。

一个向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩。所谓矩阵的行秩就矩阵的行向量组的秩，矩阵的列秩就是矩阵的列向量组的秩。矩阵的行秩等于矩阵的列秩，并统称为矩阵的秩。另外，矩阵的秩等于它的不为零的子式的最高阶数，这是矩阵的秩的行列式定义。事实上，以上两种对矩阵的秩的定义是等价的。

我们约定用 E 表示单位矩阵，分别用 A^{-1}， A^{*}， $r(A)$ 表示矩阵 A 的可逆矩阵、伴随矩阵和矩阵 A 的秩。矩阵的秩有以下的几个简单的性质：

（1）$r(A)=0$，当且仅当 A 是零矩阵；

（2）$r(A)=n$，当且仅当 $|A|\neq 0$ ；

（3）设 A 是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)\leq min(m,n)$

（4） $r(kA)=\begin{cases} r(A), & k\neq 0 \\ 0, & k=0 \end{cases}$

（5） $r\begin{pmatrix} A & O \\ BC & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}=r(A)+A(B)$

矩阵可以进行加法、减法、数乘、乘法、阶乘、伴随等一系列运算。而矩阵经过运算后所得到新矩阵的秩往往与原矩阵的秩有一定的关系。

定理 1 两矩阵和的秩不超过两矩阵秩的和。即：设 A、B 均为 $m\times n$ 矩阵，则

$$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$$

推论 1 两矩阵差的秩的不小于两矩阵秩的差。即：设 A、B 均为 $m\times n$ 矩阵，则

$$r(A-B)\geq r(A)-r(B)$$

推论 2 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 均为 $m\times n$ 矩阵，且 $r(A_1)=r(A_2)=\cdots=r(A_k)=1$，则

$$r(A_1+A_2+\cdots+A_k)\leq k$$

证明：由定理 1 得

$$
\begin{aligned}
&r(A_1+A_2+\cdots+A_k)\\
&\le r(A_1)+r(A_2+A_3+\cdots+A_k)\\
&\le r(A_1)+r(A_2)+r(A_3+A_4+\cdots+A_k)\\
&\cdots\cdots\\
&\le r(A_1)+r(A_2)+\cdots+r(A_k)\\
&=k
\end{aligned}
$$

定理 2 矩阵的乘积的秩不超过各因子的秩。即：设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，则

$$r(AB)\le min\{r(A), r(B)\}$$

定理 3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，P 是 m 阶可逆矩阵，Q 是 n 阶可逆矩阵，则

$$r(A)=r(PA)=r(AQ)=r(PAQ)$$

推论 设 A 是是 $m\times n$ 矩阵，则 $r(A)=r$，当且仅当存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得 $A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$

利用分块矩阵证明秩的若干性质

关于矩阵秩的一些性质的证明，有着多种方法。若充分利用分块矩阵来证明，虽然带有一定的技巧性，但不并难想，尤其是，这种方法的证明本身显得非常简洁，而且方法也很统一，具有较大的优越性。

定理 4 设 A、B 均为 n 阶方阵。则

$$r(AB+A+B)\le r(A)+r(B)$$

证明：由分块矩阵的乘法得

$$\begin{pmatrix}A & B\\ A & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B+E & O\\ E & O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}AB+A+B & O\\ AB+A & O\end{pmatrix}$$

由定理 2 得

$$r\begin{pmatrix}AB+A+B & O\\ AB+A & O\end{pmatrix}\le r\begin{pmatrix}A & B\\ A & O\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$$

故 $r(AB+A+B)\le r\begin{pmatrix}AB+A+B & O\\ AB+A & O\end{pmatrix}\le r(A)+r(B)$

定理 5 设 A、C 均为 $m\times n$ 矩阵，B、D 均为 $n\times s$ 矩阵，则

$$r(AB-CD)\le r(A-C)+r(B-D)$$

证明：由分块矩阵的乘法得

$$\begin{pmatrix} E_m & C \\ O & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A-C & O \\ O & B-D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_n & B \\ O & E_s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A-C & AB-CD \\ O & B-D \end{pmatrix}$$

其中$\begin{pmatrix} E_m & C \\ O & E_n \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E_n & B \\ O & E_s \end{pmatrix}$是可逆矩阵。

由定理 3 得

$$r\begin{pmatrix} A-C & AB-CD \\ O & B-D \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A-C & O \\ O & B-D \end{pmatrix}=r(A-C)+r(B-D)$$

故$r(AB-CD)\le r\begin{pmatrix} A-C & AB-CD \\ O & B-D \end{pmatrix}=r(A-C)+r(B-D)$。

定理 6 （Frobenius 不等式）

设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times s$ 矩阵，C 是 $s\times t$ 矩阵。则

$$r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$$

证明：由分块矩阵的乘法得

$$\begin{pmatrix} AB & ABC \\ B & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_s & C \\ O & -E_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}$$

由定理 2 得

$$r\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}\le r\begin{pmatrix} AB & ABC \\ B & O \end{pmatrix}$$

因为$r\begin{pmatrix} AB & ABC \\ B & O \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} O & ABC \\ B & O \end{pmatrix}=r(B)+r(ABC)$

$$r\begin{pmatrix} AB & O \\ B & BC \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} AB & O \\ O & BC \end{pmatrix}=r(AB)+r(BC)$$

所以 $r(AB)+r(BC)\leq r(B)+r(ABC)$

即 $r(ABC)\geq r(AB)+r(BC)-r(B)$.

若 A 为 n 阶矩阵，分别用 A^k, A^m, A^k 代替 Frobenius 不等式中的 A、B、C，即得以下推论 1

推论 1 设 A 是 n 阶方阵，m，k 为非负整数，则 $r(A^{m+2})\ge(m+1)\cdot r(A^2)-m\cdot r(A)$。

证明：对 m 用数学归纳法。

当 $m=0$ 时，不等式显然成立。

由 Frobenius 不等式得

$$r(A^3)=r(A\cdot A\cdot A)\ge r(A\cdot A)+r(A\cdot A)-r(A)=2\cdot r(A^2)-r(A)$$

所以当 $m=1$ 时不等式成立。

假设当 $m=k$ 时不等式成立，即

$$r(A^{k+2})\ge (k+1)\cdot r(A^2)-k\cdot r(A)$$

于是

$$\begin{aligned}r(A^{k+3})&=r(A^{k+1}\cdot A\cdot A)\\&\ge r(A^{k+1}\cdot A)+r(A\cdot A)-r(A)\\&\ge (k+1)\cdot r(A^2)-k\cdot r(A)+r(A^2)-r(A)\\&=(k+2)\cdot r(A^2)-(k+1)\cdot r(A)\end{aligned}$$

所以当 $m=k+1$ 时不等式也成立。

故 $r(A^{m+2})\ge (m+1)\cdot r(A^2)-m\cdot r(A)$。

定理 7　设 A 是 n 阶方阵，且 $r(A)=r(A^2)$

则对任意自然数 k，有 $r(A^k)=r(A)$

证明：

构造分块矩阵 $\begin{pmatrix}A^2 & O\\ O & A^2\end{pmatrix}$

由 Frobenius 公式

$$r(A^2)+r(A^2)\le r\begin{pmatrix}A^2 & O\\ A & A^2\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}A^2 & -A^3\\ A & O\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}O & -A^3\\ A & O\end{pmatrix}=r(A)+r(A^3)$$

由 $r(A)=r(A^2)$

所以 $r(A^3)\ge r(A^2)+r(A^2)-r(A)\ge r(A^2)$

由定理 2 得

$$r(A^3)=r(A^2\cdot A)\le r(A^2)$$

故 $r(A^2)=r(A^3)$

由此可推得 $r(A^3)=r(A^4)$,　$r(A^4)=r(A^5),\cdots$

故对任意自然数 k，有 $r(A^k)=r(A)$

定理 8 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r$，则必存在 $m\times r$ 矩阵 B 与 $r\times n$ 矩阵 C，且 $r(B)=r(C)=r$，使 $A=BC$。

证明：因为，由定理 3 的推论得存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$$

将 P、Q 分块：$P=(B_{m\times r},\ P')$，$Q=\begin{pmatrix}C_{r\times n}\\ Q'\end{pmatrix}$

其中 P'是$m\times(m-r)$ 矩阵，Q'是$(n-r)\times n$ 矩阵。

因为 P、Q 分别是 m 阶和 n 阶可逆矩阵。所以 P 的 m 个列向量线性无关，Q 的 n 个行向量也线性无关，从而 B 的 r 个列向量线性无关，C 的 r 个行向量也线性无关。

故 $r(B)=r(C)=r$，且 $A=(B,P')\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\ Q'\end{pmatrix}=BC$。

推论 1 设 A 是 n 阶方阵，则 $r(A)\le 1$，当且仅当 A 可以表示为一个 $n\times 1$ 矩阵和一个 $1\times n$ 矩阵的乘积。

证明： （充分性）

设 $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1,\ b_2,\ \cdots\ b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$

则 A 的任何一个二阶子式

$$\begin{vmatrix}a_ib_j & a_ib_k\\ a_mb_j & a_mb_k\end{vmatrix}=a_ia_m\begin{vmatrix}b_j & b_k\\ b_j & b_k\end{vmatrix}=0$$

其中 $1\le i<m\le n$，$1\le j<k\le n$

所以 $r(A)\le 1$。

（必要性）

若 $r(A)=0$，即 A 是零矩阵，则显然有

$$A=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(0,\ 0,\ \cdots\ 0)$$

命题成立。

若 $r(A) = 1$，则存在 $n\times1$ 矩阵 B 和 $1\times n$ 矩阵 C，且 $r(B) = r(C) = 1$，使 $A = BC$。

推论 2 设 A 是 n 阶方阵，且 $r(A) = 1$，则 $A^2 = kA$。

证明：由推论 1 得，存在 $n\times1$ 矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 和 $1\times n$ 矩阵 $\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & b_n \end{pmatrix}$，使得

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & b_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\cdot k\cdot\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & b_n \end{pmatrix} \\ &= k\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1, & b_2, & \cdots & b_n \end{pmatrix} \\ &= kA \end{aligned}$$

其中 $k = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

故 $A^2 = kA$

矩阵的秩的内容是非常丰富的，其应用是十分广泛的，证明矩阵秩的有关性质，除了利用分块矩阵以外，它可以用行（列）向量组的极大线性无关组来证，用矩阵的初等变换来证明，还可以联系到齐次线性方程组的基础解系来证。