

第八章 离散傅立叶变换

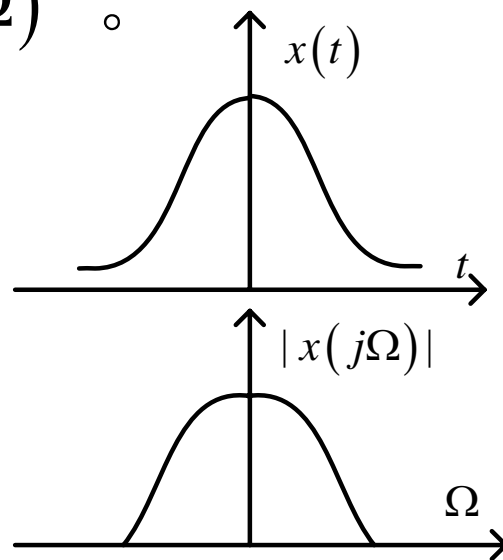
§ 8.1 傅立叶变换的几种形式

傅立叶变换是建立起以时间为自变量的信号与以频率为自变量的频谱函数之间的某种对应关系。时间或频率的取值不同（连续的或离散的）形成多种不同形式的傅立叶变换对。

(1) 连续时间，连续频率的傅立叶变换

连续的时间非周期信号 $x(t)$ 傅氏变换，得到连续的非周期频谱密度函数 $x(j\Omega)$ 。

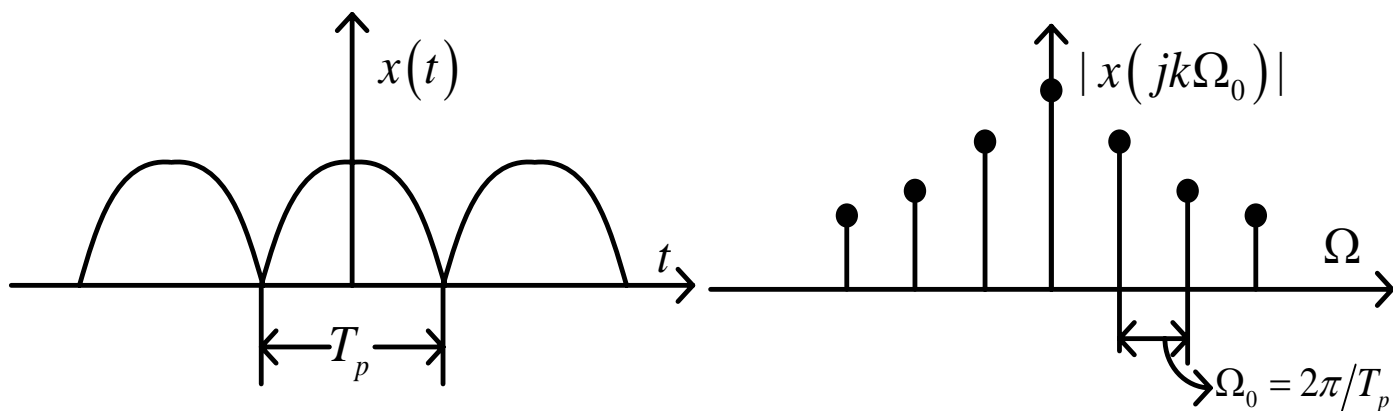
$$\begin{cases} x(j\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases}$$



(2) 连续时间，离散频率的傅立叶变换 傅立叶级数

$x(t)$ 周期为 T_p 的周期性连续时间函数, $x(t)$ 展成傅立叶级数, 其系数 $x(jk\Omega_0)$, $x(jk\Omega_0)$ 是离散频率的非周期函数。

$$\begin{cases} x(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \\ x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \end{cases}$$



其中 $\Omega_0 = 2\pi F = 2\pi/T_p \rightarrow$ 谱线间的角频率间隔， k 为谐波序号。

时域的连续函数 \longrightarrow 频域非周期的频谱。

时域的周期性 \longrightarrow 频域的离散频谱。

(3) 离散时间, 连续频率的傅立叶变化 序列的傅立叶变换

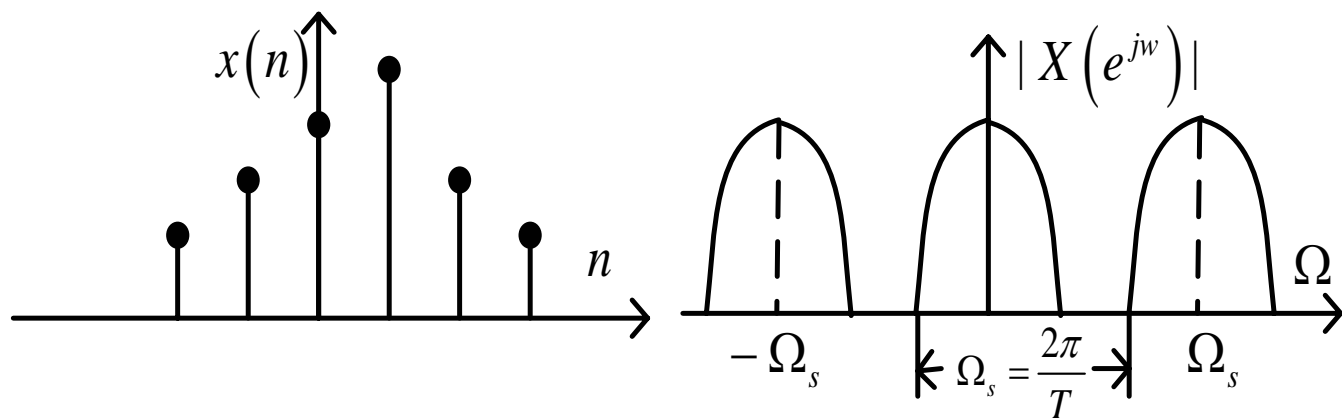
$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{cases}$$

这里的 ω 是数字频率, Ω 是模拟频率 | $\omega = \Omega T$ |

把序列看成是模拟信号的抽样，抽样的时间间隔为 T ，抽样频率为 $f_s = \frac{1}{T}$ ， $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$ ，那么

$$X(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) e^{-jn\Omega T}$$

$$x(n) = \frac{1}{\Omega_s} \int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} X(e^{j\Omega T}) e^{jn\Omega T} d\Omega$$



时域的离散化 \longrightarrow 频率的周期延拓
时域的非周期性 \longrightarrow 频率的连续性

三种傅立叶变换归纳

T_p		$\Omega_0 = 2\pi/T_p$
T ,		$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$,

上面这三种变化都不适合于在计算机上计算，因为至少在一个域内函数是连续的，感兴趣的是时域和频率都应该是离散的——→ 离散傅立叶变换。我们要讨论的是：离散时间、离散频率的傅立叶变换。既然有一个域的离散必然要造成另一域的周期延拓，从周期性的序列的离散傅立叶变换开始讨论。

§ 8.1 周期序列的傅立叶变换—— 离散的傅立叶奇数 (DFS)

设 一个周期为N的一个周期序列，即：

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN), r \text{ 为任意整数.}$$

周期序列不是绝对可和的，所以不能用Z变换来表示：

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |\tilde{x}(n)| |z^{-n}| = \infty$$

同连续时间周期信号一样，周期序列可用离散傅立叶变换来表示。用周期为**N**的复指数序列来表示：

	$e^{j\Omega_0 t} = e^{j(2\pi/T_p)t}$	T_p	$\Omega_0 = 2\pi/T_p$	$e^{jk(2\pi/T_p)t}$
	$e^{jw_0 n} = e^{j(2\pi/N)n}$	N	$w_0 = 2\pi/N$	$e^{jk(2\pi/N)n}$

周期为**N**的复指数序列的基频序列为：

$$e_1(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}n}$$

k次谐波序列为：

$$e_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

表现形式与连续的周期函数相同，但**DFS**的谐波成分只有**N**个独立成分。这是因为：

$$e^{j\frac{2\pi}{N}(k+rN)n} = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad r \text{ 为任意整数.}$$

即：

$$e_{rN+k}(n) = e_k(n)$$

所以对**DFS**而言，只能取 $k=0$ 到 $k=N-1$ 个独立的谐波分量：

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \quad \text{两端同乘 } e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$$

这里 $\tilde{x}(k)$ 是 k 次的谐波系数，下一步求解系数 $\tilde{x}(k)$ 利用：

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}rn} = \begin{cases} 1 & r = mN, m \text{ 为任意整数} \\ 0 & \text{其它 } r \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}rn} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k-r)} \right] = \tilde{x}(r)
 \end{aligned}$$

把 r 换成 k , 有:

$$\tilde{x}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

这就是 $k=0,\cdots,N-1$ 的 N 个谐波系数, $\tilde{x}(k)$ 的公式。

$$\begin{aligned}\tilde{x}(k+mN) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+mN)} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \tilde{x}(k)\end{aligned}$$

即： $\tilde{x}(k)$ 亦是以 N 为周期。

一般引进记号： $w_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$\tilde{x}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) w_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{x}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) w_N^{-nk}$$

周期序列 $\tilde{x}(k)$ 可以看成是对 $\tilde{x}(n)$ 一个周期 $x(n)$ 作 Z 变换，然后把 Z 变换在 Z 平面单位园上按等间隔抽样而得到。

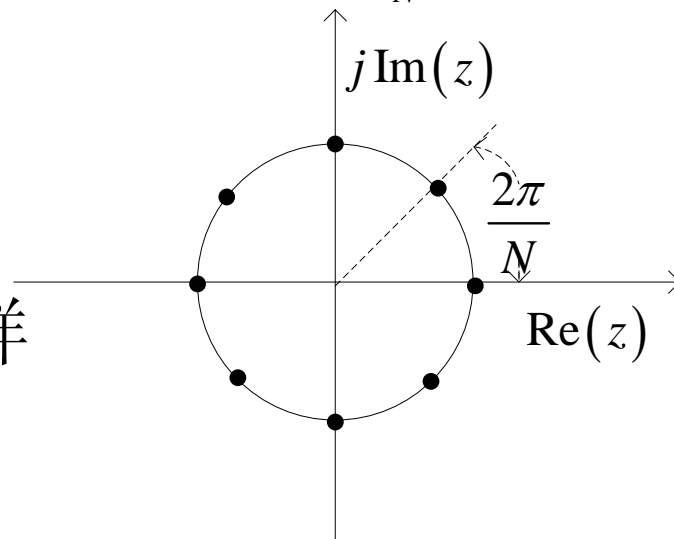
$$\text{令: } x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它 } n \end{cases}$$

$$\text{则 } x(n) \text{ 的 } Z \text{ 变换为: } x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$\text{比较一下可得: } \tilde{x}(k) = x(z) \Big|_{z=w_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}}$$

相等于在单位圆

对 Z 变换的等间隔抽样



§ 8.2 DFS的性质

从上面可知**DFS**可以用抽样的**Z**变换来解释许多性质与**Z**变换相似。但是 $x(n)$ 和 $\tilde{x}(k)$ 都有周期性，因而与**Z**变换相比还是存在一些差别。

若： $\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n)$ 是周期为**N**的周期序列。

$$\tilde{x}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)]$$

$$\tilde{x}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

(1) 线性:

$$DFS \left[a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n) \right] = a\tilde{x}_1(k) + b\tilde{x}_2(k)$$

a, b 为任意常数, 所得到的频率序列亦为周期序列, 周期为 N 。

(2) 序列的移位

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = w_N^{-mk} \tilde{x}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk} \tilde{x}(k)$$

证：

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n+m) w_N^{nk} = \sum_{i=m}^{N-1+m} \tilde{x}(i) w_N^{ik} w_N^{-mk}$$

这里 $\tilde{x}(i)$ 和 w_N^{ik} 都是以N为周期的周期函数。

(3) 调制特性（频率位移）

$$DFS \left[w_N^{nl} \tilde{x}(n) \right] = \tilde{x}(k + l)$$

$$\begin{aligned} DFS \left[w_N^{nl} \tilde{x}(n) \right] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) w_N^{nk} w_N^{nl} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) w_N^{n(l+k)} = \tilde{x}(k + l) \end{aligned}$$

(4) 周期卷积和

如果： $\tilde{y}(k) = \tilde{x}_1(k) \cdot \tilde{x}_2(k)$

则： $\tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{y}(k)]$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m)$$

证： $\tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{x}_1(k) \cdot \tilde{x}_2(k)] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(k) \cdot \tilde{x}_2(k) w_N^{-nk}$

代入：

$$\tilde{x}_1(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) w_N^{mk}$$

则：

$$\begin{aligned} \tilde{y}(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(k) w_N^{-(n-m)k} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \left[\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_2(k) w_N^{-(n-m)k} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \cdot \tilde{x}_2(n-m) \end{aligned}$$

同样通过变量代换，有：
$$\tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \cdot \tilde{x}_1(n-m)$$

这个公式和线性卷积公式不同。

1) 结果 $\tilde{y}(n)$ 的周期为N； 2) 求和只在一个周期上进行。

同样，如果：
$$\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \cdot \tilde{x}_2(n)$$

那么：
$$\tilde{y}(k) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1(l) \cdot \tilde{x}_2(k-l) = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}_1(l) \cdot \tilde{x}_2(k-l)$$

§ 8.3 离散傅立叶变化DFT——有限长序列的离散频率表示

周期序列实际上只有有限个序列值才有意义，因而DFS表达式亦适合于有限长序列 → DFT.

若 $x(n)$ 有限长序列，长度为N

$$x(n) = \begin{cases} \tilde{x}(n) & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad \tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

通常把 $\tilde{x}(n)$ 的第一周期 $n=0$ 到 $n=N-1$ 定义为“主值区间”：

$$\tilde{x}(n) = x(n \text{ 模 } N) = x((n))_N$$

把 $\tilde{x}(n)$ 看成 $x(n)$ 的以 N 为周期的周期延拓。

用 $((n))_N$ 表示 n 对 N 取余数或称 n 对 N 取模值。

例： $\tilde{x}(n)$ 是周期为 $9=N$ 的序列，求 $n=25, n=-5$ 两数对 N 的余数。

解： $\because n=25=2\times 9+7 \quad \therefore ((25))_9=7$

$$\because n=-5=(-1)\times 9+4 \quad \therefore ((-5))_9=4$$

所以有： $\tilde{x}(25)=x(25)_9=x(7)$

$$\tilde{x}(-5)=x((-5))_9=x(4)$$

利用矩形序列 $R_N(n)$ ，即：

$$R_N(n)=\begin{cases} 1 & 0\leq n\leq N-1 \\ 0 & \text{其它}n \end{cases}$$

所以： $x(n) = \tilde{x}(n) R_N(n)$

对于频率的周期序列 $\tilde{x}(k)$ 也有：

$$x(k) = x((k))_N \text{ or } x(k) = \tilde{x}(k) R_N(k)$$

从上面的**DFS**和**IDFS**表达是可以看出求和只限在
 $n = 0 \sim N-1$ 及 $k = 0 \sim N-1$ 主值区间进行。

适用于 \longrightarrow 主值序列 $x(n)$ 和 $X(k)$

那么有限长序列的离散傅立叶变换定义为：

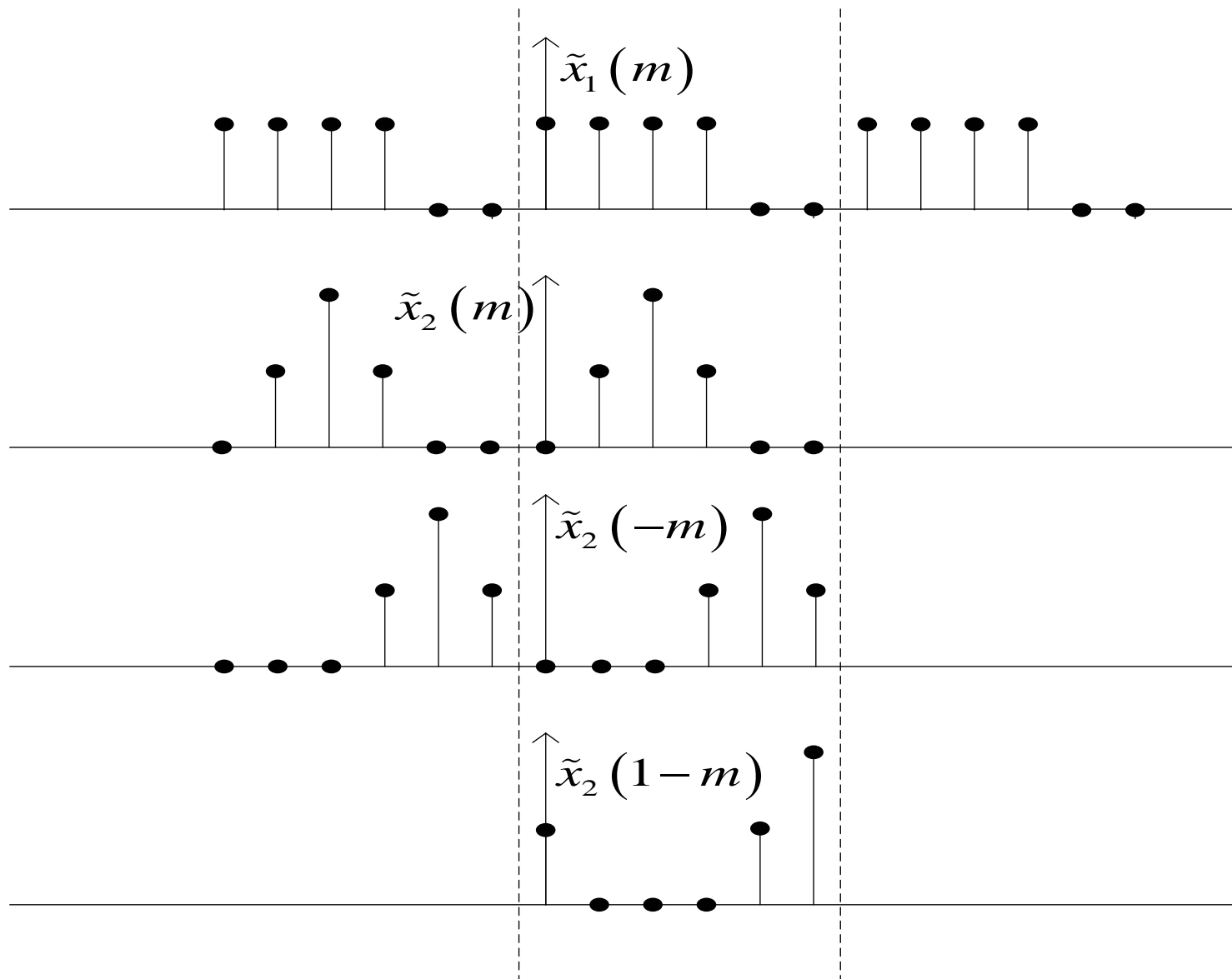
正变换：

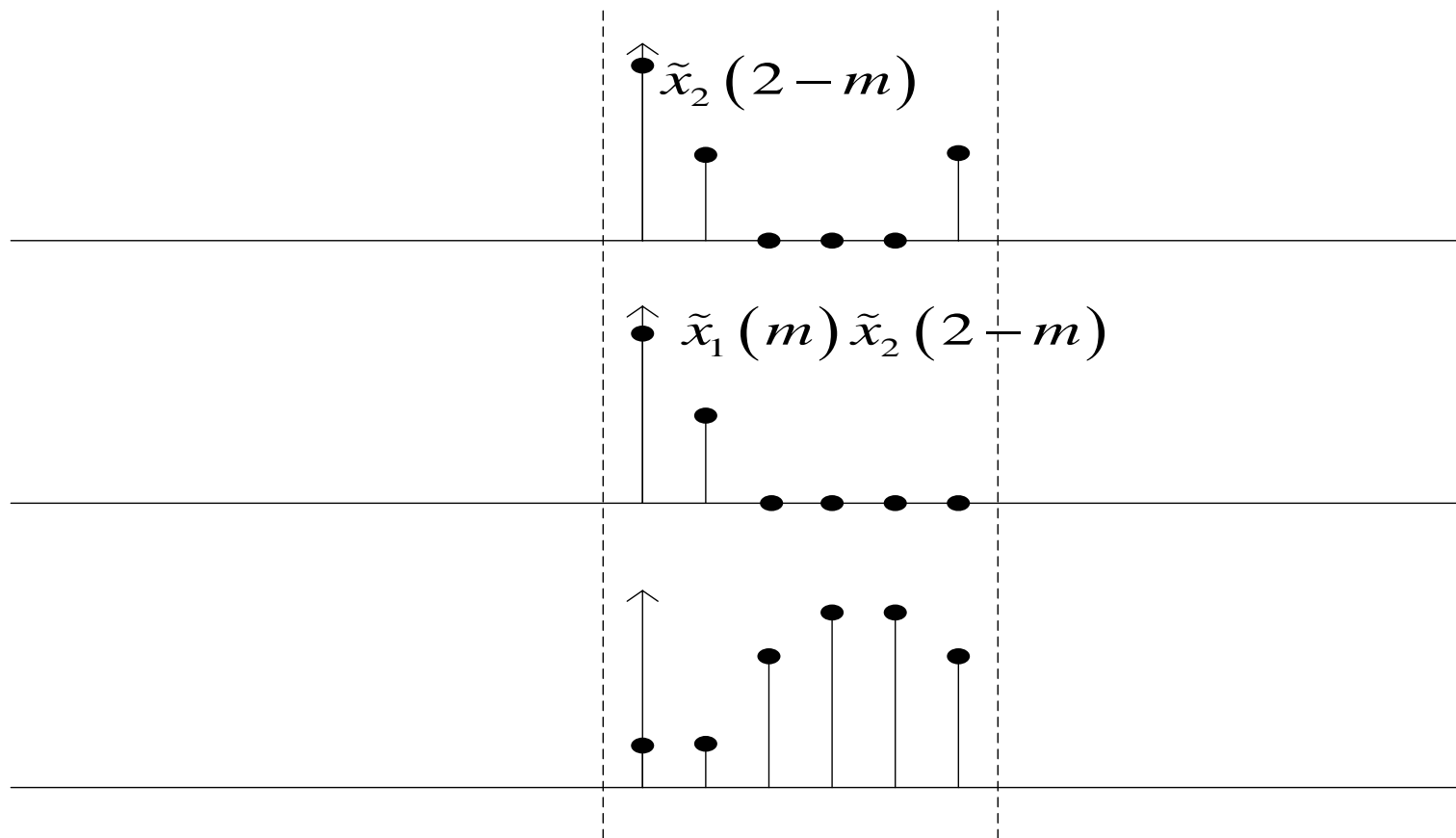
$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) w_N^{nk} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

反变换：

$$x(n) = DFT[x(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) w_N^{-nk} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

隐含有周期性的意义。





§ 8.4 DFT变换的性质

$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$, $DFT[x_2(n)] = X_2(k)$. 周期为 N

(1) 线性

$$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

其中 a, b 为任意函数。

说明：① 若 $x_1(n), x_2(n)$ 周期为 $N \longrightarrow ax_1(k) + bx_2(k)$
周期亦为 N .

② 若 $x_1(n)$ 的周期为 N_1 , $x_2(n)$ 的周期为 N_2
且 $N_1 \neq N_2$, 那么 $aX_1(k) + bX_2(k)$ 的周期为

$$N = \max(N_1, N_2)$$

缺的补零。

(2) 序列的圆周移位

一有限长序列的圆周移位是指用其长度为N的周期，将 $x(n)$ 延拓成周期序列 $\tilde{x}(n)$ 并加以移位，然后取主值区间 $n = 0 \sim N-1$ 上的序列值。

因此有：

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

这里： $x((n+m))_N \rightarrow x(n)$ 的周期延拓序列 $\tilde{x}(n)$ 的移位

$x((n+m))_N R_N(n)$ 表示对此延拓移位后的周期序列取主值序列, $x_m(n)$ 还是一个长度为 N 的有限长序列。

$$\begin{aligned} x_m(k) &= DFT[x_m(n)] \\ &= DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = w_N^{-mk} X(k). \end{aligned}$$

证：采用周期序列的移位性质：

$$DFS[x((n+m))_N] = DFS[\tilde{x}(n+m)] = w_N^{-mk} \tilde{x}(k)$$

利用**DFT**和**DFT**关系的性质，即序列取主值区间，变换也取主值区间，得：

$$\begin{aligned} DFT\left[x((n+m))_N R_N(n)\right] &= DFT\left[\tilde{x}(n+m) R_N(n)\right] \\ &= w_N^{-mk} \tilde{x}(k) R_N(k) = w_N^{-mk} X(k) \end{aligned}$$

有限长序列得圆周位移等效于在离散频域中引入一个和频率成正比得线性相移 $w_N^{-mk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}km} \rightarrow$ 频谱得幅度没有影响。

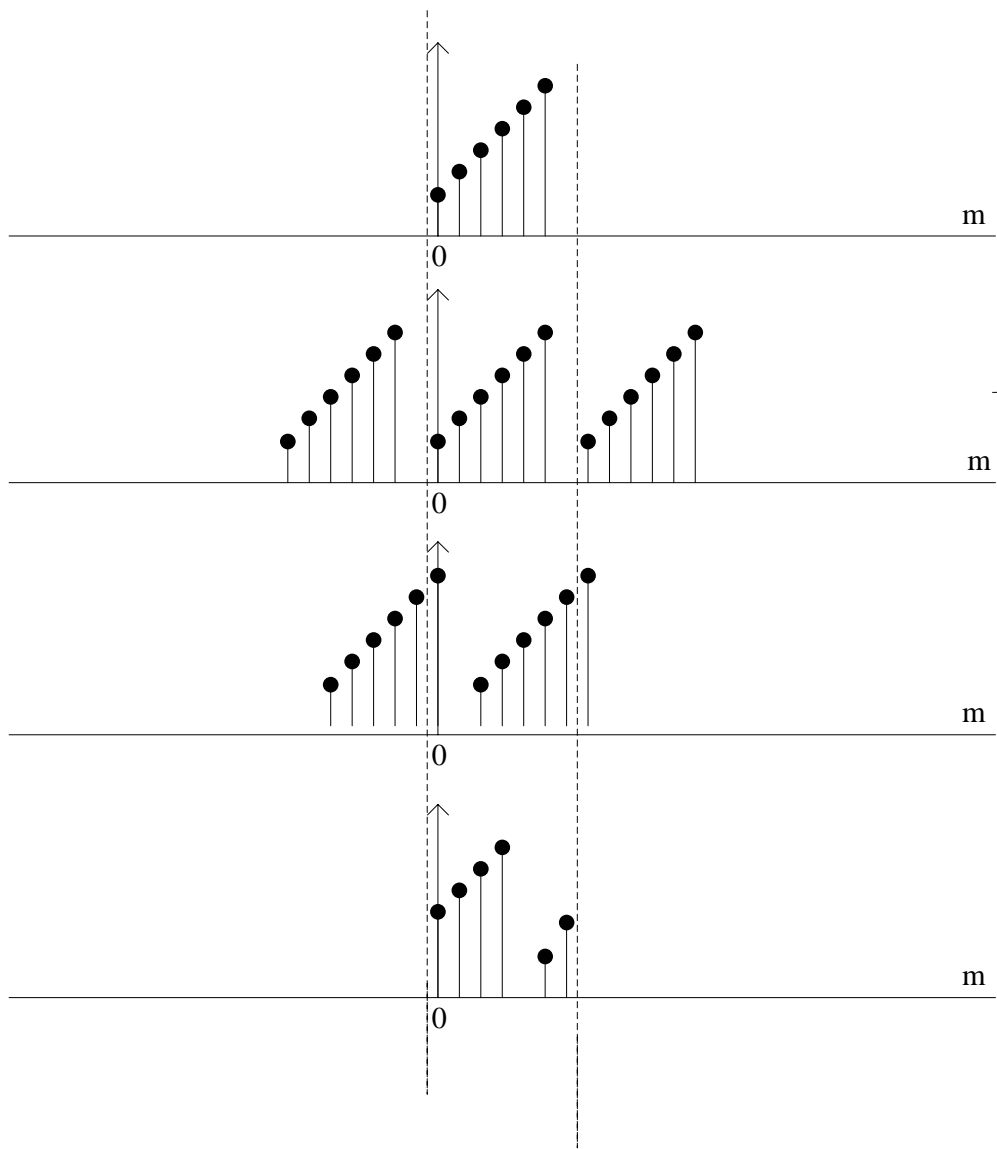
同样对于频域有限长序列 $X(k)$ 也可以看成是分布在一个 N 等分得圆周上，所以对于 $X(k)$ 的圆周位移，有：

$$IDFT\left[X\left((k+l)\right)_N R_N(k)\right] = w_N^{-nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

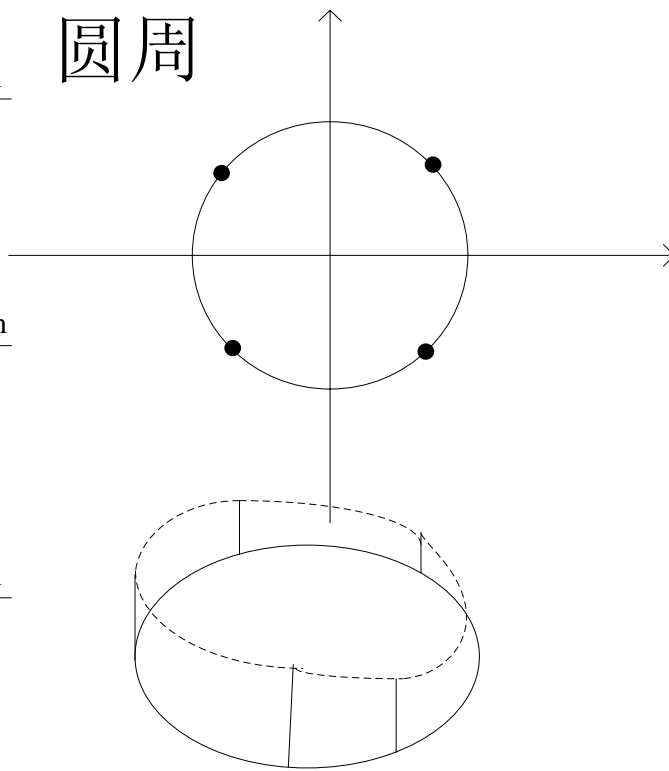
$$DFT \left[x(n) \sin \frac{2\pi nl}{N} \right] = \frac{1}{2} \left[X((k-l))_N - X((k+l))_N \right] R_N(k)$$

$$DFT \left[x(n) \cos \frac{2\pi nl}{N} \right] = \frac{1}{2} \left[X((k-l))_N + X((k+l))_N \right] R_N(k)$$

调制特性： 时序列的调制等效于频域的圆周移位



N等分
圆周



(3) 共轭对称性

以前学过：

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)], x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)]$$

对于长度都是N的序列，按照上式定义的共轭对称分量及反对称共轭分量的长度都是 $2N - 1$

因此须从 $x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 入手 $\xrightarrow{\text{周期}} N \rightarrow$
取出他们的主值序列即可

$x_{ep}(n)$ ：圆周共轭对称分量

$x_{op}(n)$ ：圆周共轭反对称分量

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

$\tilde{x}(n)$ 的共轭对称分量 $\tilde{x}_e(n)$ 及其共轭反对称分量 $\tilde{x}_o(n)$ 为

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)] = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]$$

同样可以论证：

$$\tilde{x}_e(n) = \tilde{x}_e^*(-n)$$

$$\tilde{x}_o(n) = -\tilde{x}_o^*(-n)$$

有限长序列 $x(n)$ 的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$ 定义为：

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N + x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((N-n))_N]R_N(n)$$

$$\because \tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)$$

$$\begin{aligned}\therefore x(n) &= \tilde{x}(n)R_N(n) = [\tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)]R_N(n) \\ &= x_{ep}(n) + x_{op}(n).\end{aligned}$$

注：

$$\operatorname{Re}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) + x^*(n)]$$

$$j \operatorname{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$$

设 $DFT[x^*(n)] = DFT\{\text{Re}[x(n)] + j \text{Im}[x(n)]\}$

$$(1) \quad DFT[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k).$$

$x^*(n)$ 表示 $x(n)$ 的共轭复序列。

证：

$$\begin{aligned} & DFT[x^*(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) w_N^{nk} R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) w_N^{-nk} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((-k))_N R_N(k) = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n) w_N^{(N-k)n} \right]^* R_N(k) \\ &= X^*((N-k))_N R_N(k) \end{aligned}$$

这里利用了：

$$w_N^{Nn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nN} = e^{-j2\pi n} = 1$$

$$w_N^{-nk} = w_N^{(N-k)n}$$

$$(2) \quad DFT[x^*((-n))_N R_N(n)] = X^*(k)$$

证：

$$\begin{aligned} & DFT[x^*((-n))_N R_N(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N R_N(n) w_N^{nk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^*((-n))_N w_N^{-nk} \right]^* \\
&= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^*((n))_N w_N^{nk} \right]^* \\
\text{利用周期性} \quad &= \left[\sum_{n=0}^{N-1} x^*(n)_N w_N^{nk} \right]^* \\
&= X^*(k).
\end{aligned}$$

$$(3) \quad DFT\{\operatorname{Re}[x(n)]\} = X_{ep}(k)$$

$$= \frac{1}{2} [X((k))_N + X^*((N-k))_N] R_N(k)$$

$$\text{证： 由于} \quad \operatorname{Re}[x(n)] = \frac{1}{2} [x(n) + x^*(n)]$$

$$\begin{aligned}
\therefore DFT\{\text{Re}[x(n)]\} &= \frac{1}{2}\{DFT[x(n)] + DFT[x^*(n)]\} \\
&= \frac{1}{2}[X(k) + X^*((N-k))_N R_N(k)] \\
&= \frac{1}{2}[X(k) + X^*((N-k))_N] R_N(k) \\
&= X_{ep}(k).
\end{aligned}$$

说明复序列实部的DFT等于序列DFT的圆周共轭对称部分。

$$\begin{aligned}
 (4) \quad DFT\{j \operatorname{Im}[x(n)]\} &= X_{op}(k) \\
 &= \frac{1}{2}[X((k))_N - X^*((N-k))_N]R_N(k)
 \end{aligned}$$

证： $j \operatorname{Im}[x(n)] = \frac{1}{2}[x(n) - x^*(n)]$

故 $DFT\{j \operatorname{Im}[x(n)]\} = \frac{1}{2}\{DFT[x(n)] - DFT[x^*(n)]\}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}[X(k) - X^*((N-k))_N R_N(k)] \\
 &= \frac{1}{2}[X((k)) - X^*((N-k))_N]R_N(k) \\
 &= X_{op}(k).
 \end{aligned}$$

说明复序列虚部的DFT等于序列DFT的圆周共轭及反对称部分。

可以证明： $X_{ep}(k) = X_{ep}^*((N-k))_N R_N(k)$

含义： $X_{ep}(k)$ 的模偶对称，辐角奇对称

$$\begin{cases} |X_{ep}(k)| = |X_{ep}((N-k))_N R_N(k)| \\ \arg[X_{ep}(k)] = -\arg[X_{ep}((N-k))_N R_N(k)] \end{cases}$$

同样： $X_{op}(k) = -X_{op}^*((N-k))_N R_N(k)$

含义： $X_{op}(k)$ 实部奇对称，虚部偶对称。

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[X_{op}(k)] = -\operatorname{Re}[X_{op}((N-k))_N R_N(k)] \\ \operatorname{Im}[X_{op}(k)] = \operatorname{Im}[X_{op}((N-k))_N R_N(k)] \end{cases}$$

(5) . 若 $x(n)$ 是实序列，则显然 $X(k)$ 只有圆周共轭对称部分，即：

$$X(k) = X^*((N-k))_N R_N(k).$$

(6) .若 $x(n)$ 是纯序数序列, 那么 只有圆周共轭反对称部分, 即:

$$X(k) = -X^*((N-k))_N R_N(k).$$

上述两种情况, 只要知道一半数目的 $X(k)$ 就可以了, 另一半可以利用对称性求出 \Rightarrow 简化计算

根据 $x(n)$ 与 $X(k)$ 的对称特性, 同样可以找到的实部、虚部与 $X(n)$ 的圆周共轭对称部分及圆周共轭反对称部分的关系。

$$(7) \quad DFT[X_{ep}(n)] = \text{Re}[x(k)]$$

$$(8) \quad DFT[X_{op}(n)] = j \text{Im}[x(k)]$$

例：利用共轭对称性，可以用一次DFT运算来计算两个实序列的DFT。设 $x_1(n), x_2(n)$ 都是实数序列。试求 $DFT[x_1(n)], DFT[x_2(n)]$

解：

$$w(n) = x_1(n) + jx_2(n)$$

$$\begin{aligned}
 \text{则 } DFT[w(n)] &= W(k) = DFT[x_1(n) + jx_2(n)] \\
 &= DFT[x_1(n)] + jDFT[x_2(n)] \\
 &= X_1(k) + jX_2(k)
 \end{aligned}$$

又 $x_1(n) = \text{Re}[w(n)]$, 故

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= DFT\{\text{Re}[w(n)]\} = W_{ep}(k) \\
 x_1(k) &= \frac{1}{2}[W(k) + W^*((N-k))_N]R_N(k)
 \end{aligned}$$

同样由于 $x_2(n) = \text{Im}[w(n)]$ 故

$$x_2(k) = \frac{1}{j}W_{op}(k) = \frac{1}{2j}[W(k) - W^*((N-k))_N]R_N(k)$$

4.DFT形式下的帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k)$$

$$\begin{aligned} \text{证: } \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y^*(n) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W_N^{-nk} \right]^* \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) Y^*(k) \end{aligned}$$

若 $y(n) = x(n)$ 则有：

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)x^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(k)X^*(k)$$

即
$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

一个序列在时域和频域计算的能量是相同的。

5. 圆周卷积

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列

$$(0 \leq n \leq N-1)$$

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k), DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

若： $Y(k) = X_1(k)X_2(k)$

则： $y(n) = IDFT[Y(k)]$

$$\begin{aligned} &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m)_N x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \end{aligned}$$

证：这个卷积和式子相当于周期序列 $\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n)$
作周期卷积和后再取主值序列。

先将 $Y(k)$ 周期延拓，即 $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$

按照DFS的周期卷积和公式

$$\tilde{y}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N$$

由于 $0 \leq m \leq N-1$ 为主值区间，故

$$x_1((m))_N = x_1(m)$$

$$\therefore y(n) = \tilde{y}(n) R_N(n) = \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1((m))_N x_2((n-m))_N \right] R_N(n)$$

注： $x_2((n-m))_N$ 只在 $m=0$ 到 $N-1$ 范围内

取值 \rightarrow 它是圆周位移，一般我们用：

$$\begin{aligned} x_1(n) \textcircled{N} x_2(n) &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) x_2((n-m))_N \right] R_N(n) \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} x_2(m) x_1((n-m))_N \right] R_N(n) \end{aligned}$$

利用时域与频域的对称性，有：

若 $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$

则：
$$Y(k) = DFT[y(n)] = \frac{1}{N} X_1(k) \textcircled{N} X_2(k)$$

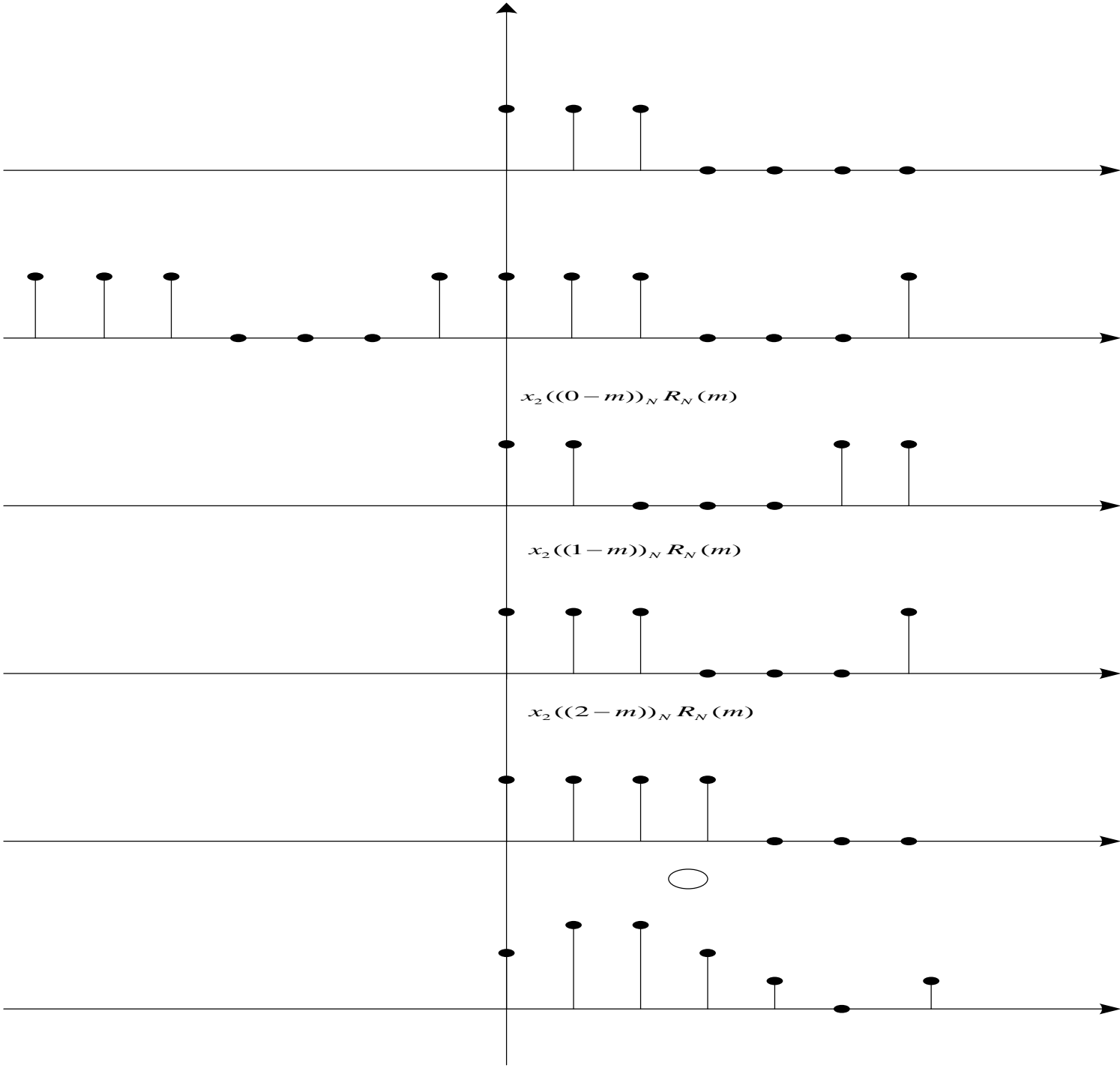
$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(0) & x_2(N-1) & x_2(N-2) & \dots & x_2(1) \\ x_2(1) & x_2(0) & x_2(N-1) & \dots & x_2(2) \\ x_2(2) & x_2(1) & x_2(0) & \dots & x_2(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2(N-1) & x_2(N-2) & x_2(N-3) & \dots & x_2(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_1(1) \\ x_1(2) \\ \vdots \\ x_1(N-1) \end{bmatrix}$$

若 $y(n) = x_1(n) \cdot x_2(n)$. $x_1(n), x_2(n)$ 为N点的有限

长序列 $Y(k) = DFT[y(n)] = \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_1(l) X_2((k-l))_N \right] R_N(k)$

$$= \frac{1}{N} \left[\sum_{l=0}^{N-1} X_2(l) X_1((k-l))_N \right] R_N(k)$$

$$= \frac{1}{N} X_1(k) \textcircled{N} X_2(k)$$



6. 有限长序列的线性卷积与圆周卷积

$x_1(n)$ 长度为 N_1 , $x_2(n)$ 长度为 N_2

$$\text{线性卷积: } y_l(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m) = \sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

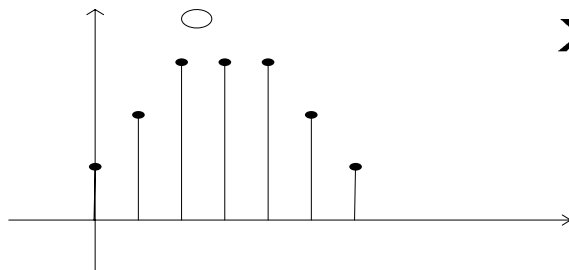
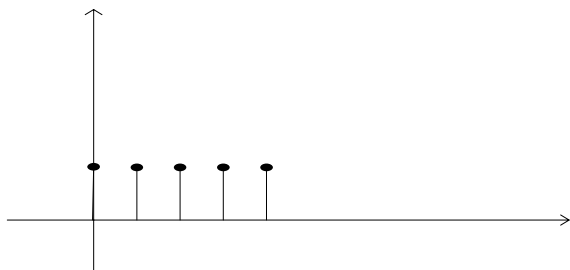
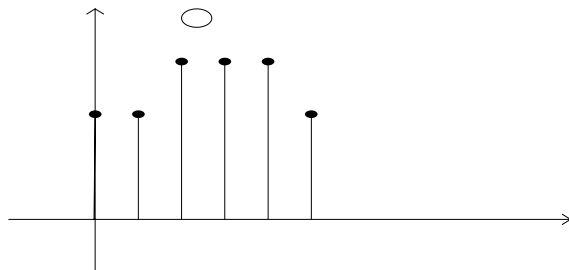
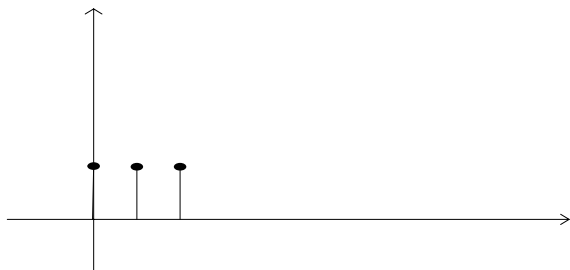
对 $x_1(m): 0 \leq m \leq N_1 - 1$, 对 $x_2(m): 0 \leq n - m \leq N_2 - 1$

有: $0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 2 \Rightarrow y(n)$ 是有限长序列,

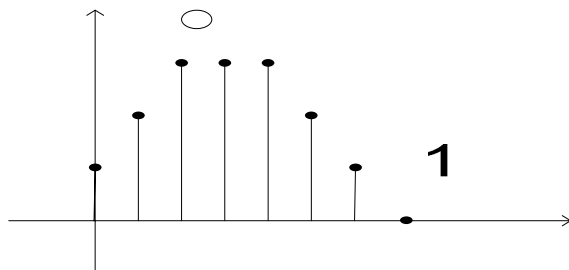
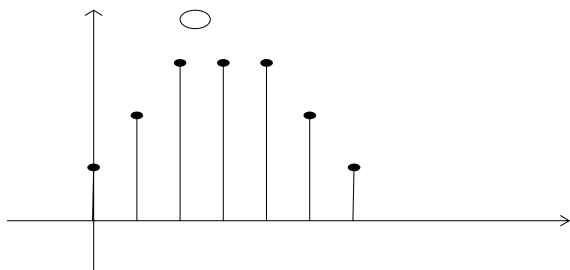
长度为 $N_1 + N_2 - 1$ 。

对于 $x_1(n) \circledcirc x_2(n)$ 而言, 假设其为 L 点的圆周卷积。

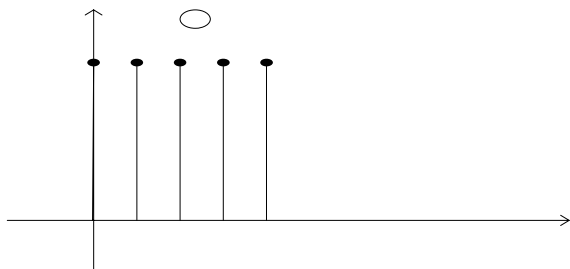
$$x_1(n) = \begin{cases} x_1(n) & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0 & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases} \quad x_2(n) = \begin{cases} x_2(n) & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0 & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$



$X_1(n)$



1



0

1

2

$X_2(n)$

这样：

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m)) \right]_L R_L(n)$$

$$\widetilde{x_2}(n) = x_2((n))_L = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL)$$

$$y_c(n) = \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m))_L \right] R_L(n)$$

$$= \left[\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n + rL - m) \right] R_L(n)$$

$$= \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n + rL - m) \right] R_L(n) = \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n + rL) \right] R_L(n)$$

L点的圆周卷积 $y_c(n)$ 是线性卷积 $y_l(n)$ 以L为周期的周期延拓序列的主值序列。

自然有：

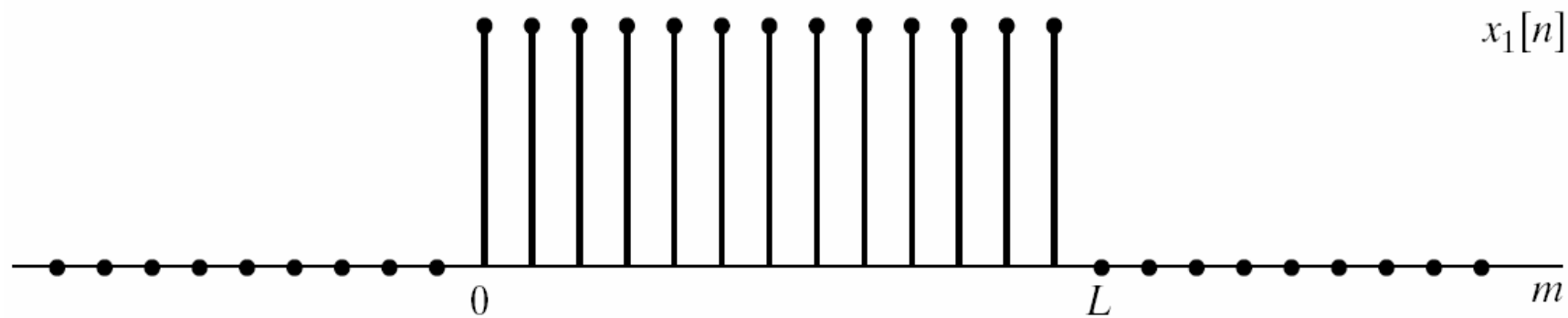
$$L \geq N_1 + N_2 - 1$$

Circular Convolution as Linear Convolution with Aliasing

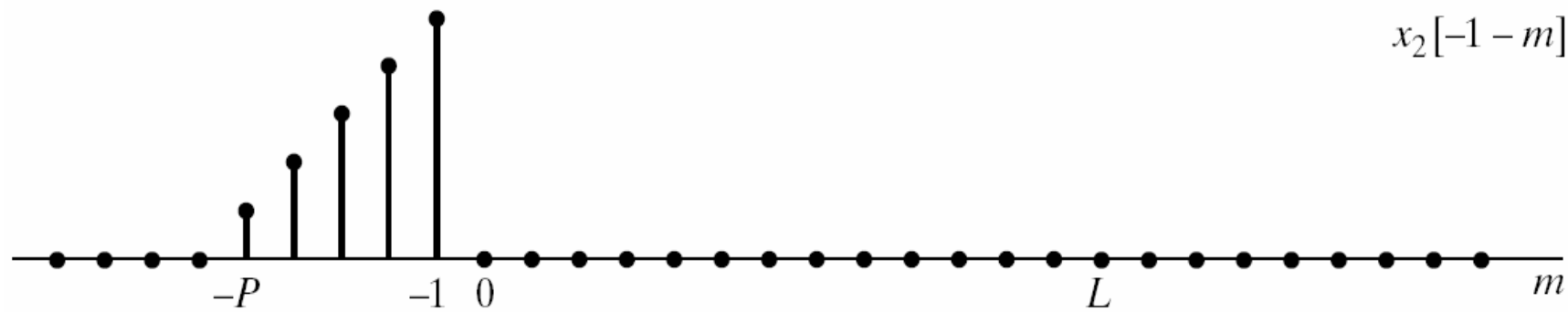
$X(e^{j\omega})$ can be considered as sampled at frequencies $\omega_k = 2\pi k / N$, then the resulting sequence corresponds to the DFS coefficients of the periodic sequence

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - rN]$$

$$X[k] = \begin{cases} X(e^{j(2\pi k/N)}), & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



(a)



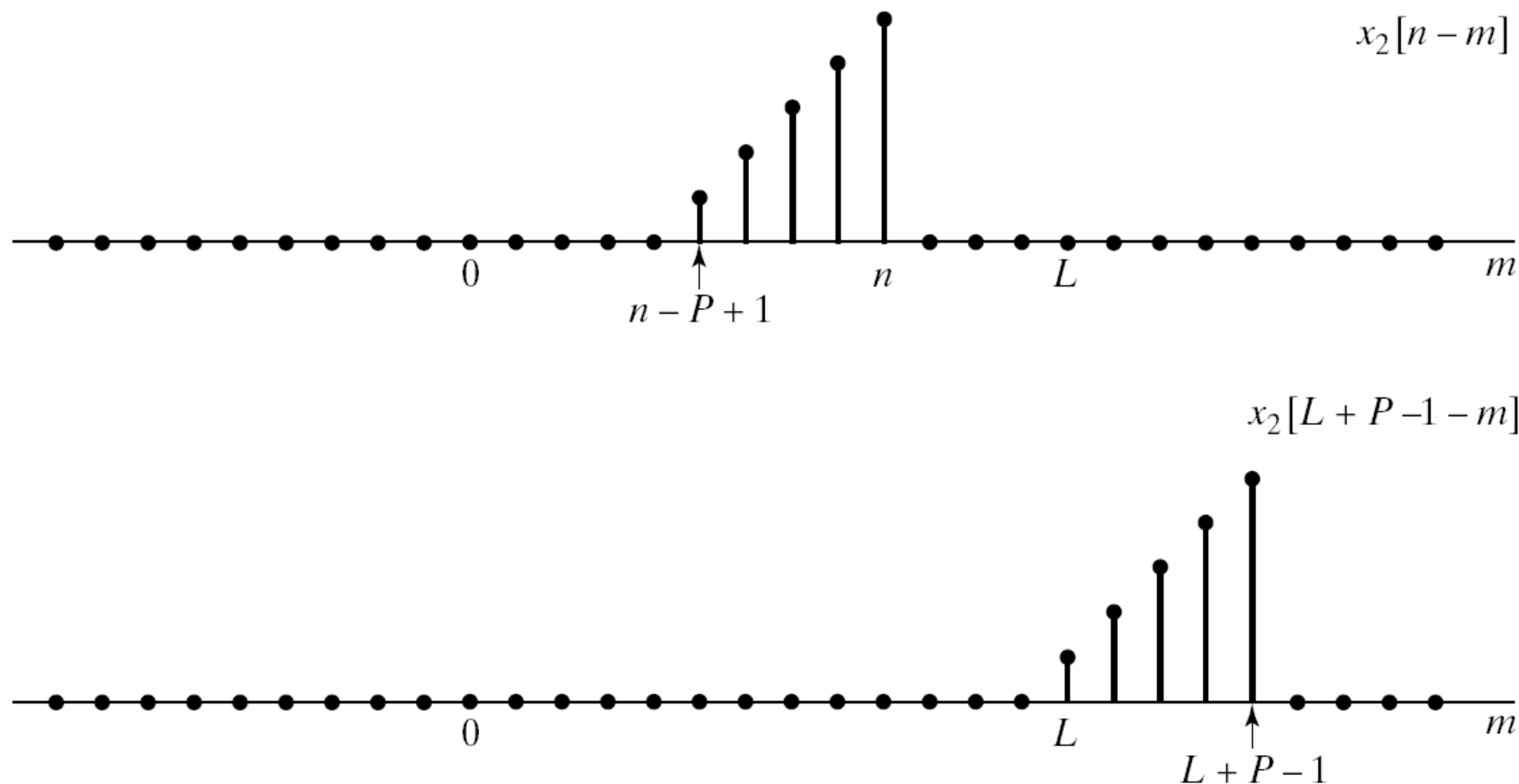


Figure 8.17 Example of linear convolution of two finite-length sequences showing that the result is such that $x_3[n] = 0$ for $n \leq -1$ and for $n \geq L + P - 1$. (a) Finite-length sequence $x_1[n]$. (b) $x_2[n-m]$ for several values of n .

$$x_p[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

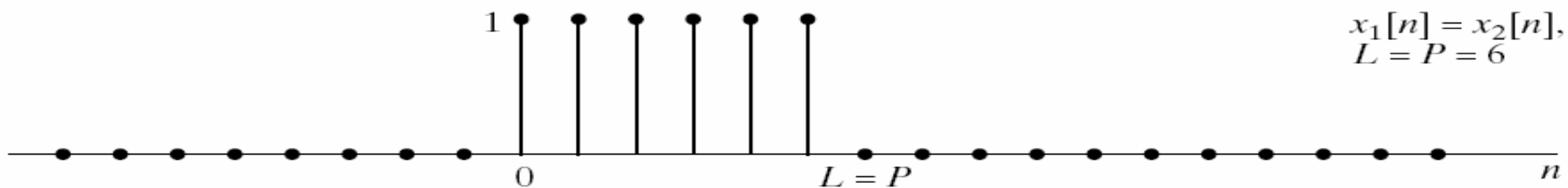
$$X_3(k) = X_3(e^{j(2\pi k/N)}), \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k)$$

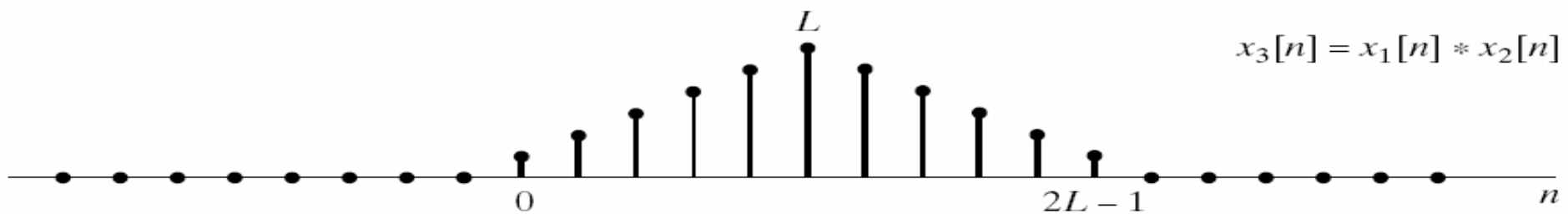
$$x_{3p}[n] = \begin{cases} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n-rN], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x_{3p}[n] = x_1[n] \odot x_2[n]$$

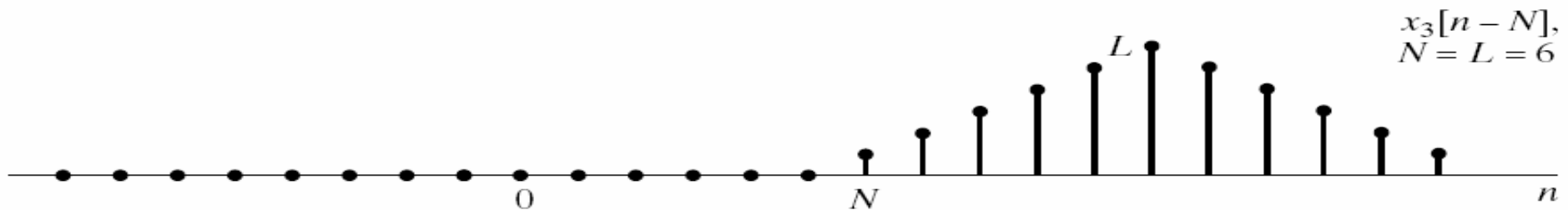
Example 8.12 Circular Convolution as Linear Convolution with Aliasing



(a)



(b)



(c)

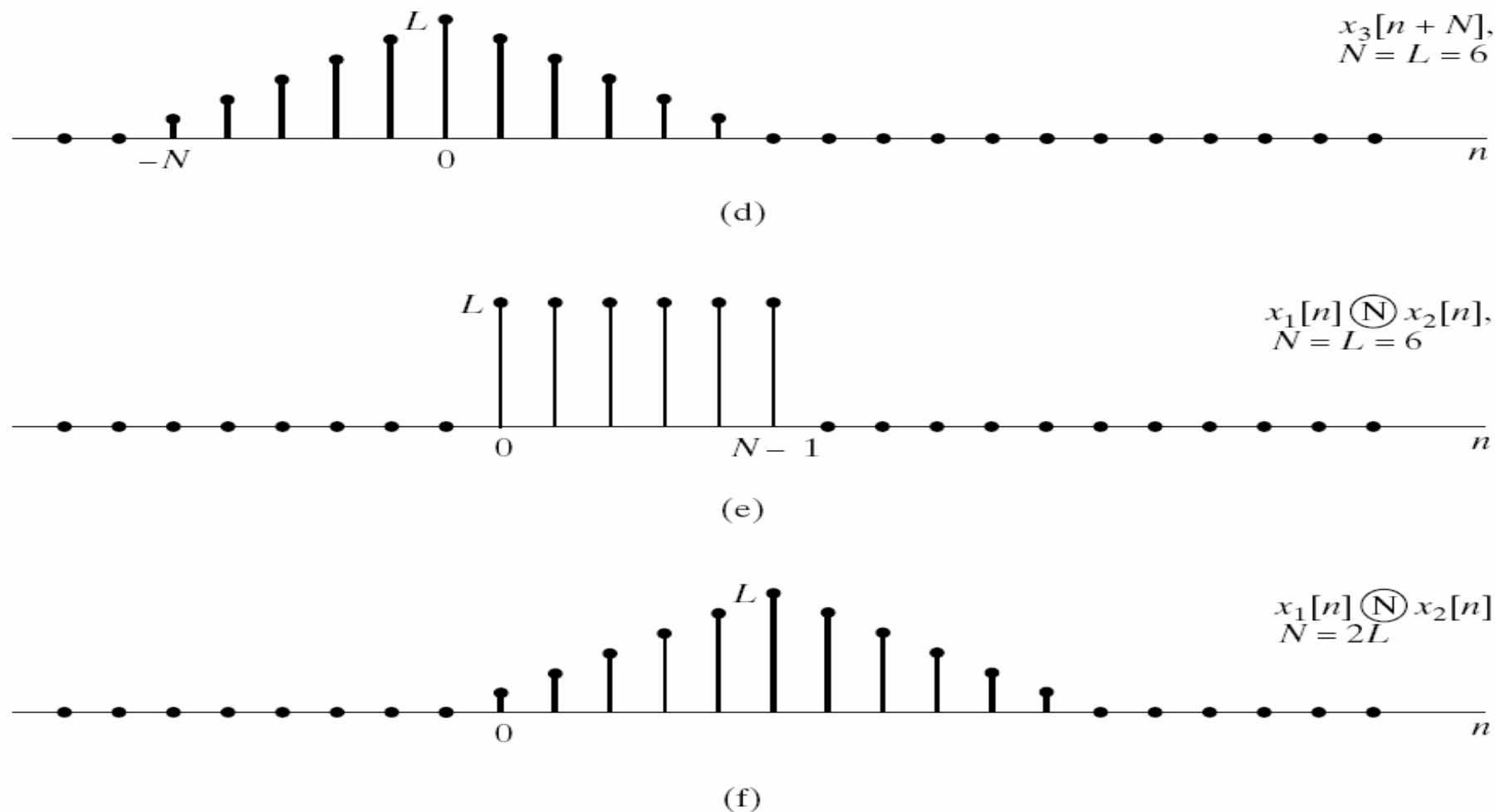


Figure 8.18 Illustration that circular convolution is equivalent to linear convolution followed by aliasing. (a) The sequences $x_1[n]$ and $x_2[n]$ to be convolved. (b) The linear convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$. (c) $x_3[n-N]$ for $N=6$. (d) $x_3[n+N]$ for $N=6$. (e) $x_1[n] \textcircled{6} x_2[n]$, which is equal to the sum of (b), (c), and (d) in the interval $0 \leq n \leq 5$. (f) $x_1[n] \textcircled{12} x_2[n]$.

Consider two finite-duration sequences $x_1[n]$ and $x_2[n]$, with $x_1[n]$ of length L and $x_2[n]$ of length P , $P < L$

Let us consider the L – point circular convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$. The linear convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$ will have the length of $L + P - 1$

$$x_{3p}[n] = \begin{cases} x_1[n] \odot_L x_2[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_3[n - rL], & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

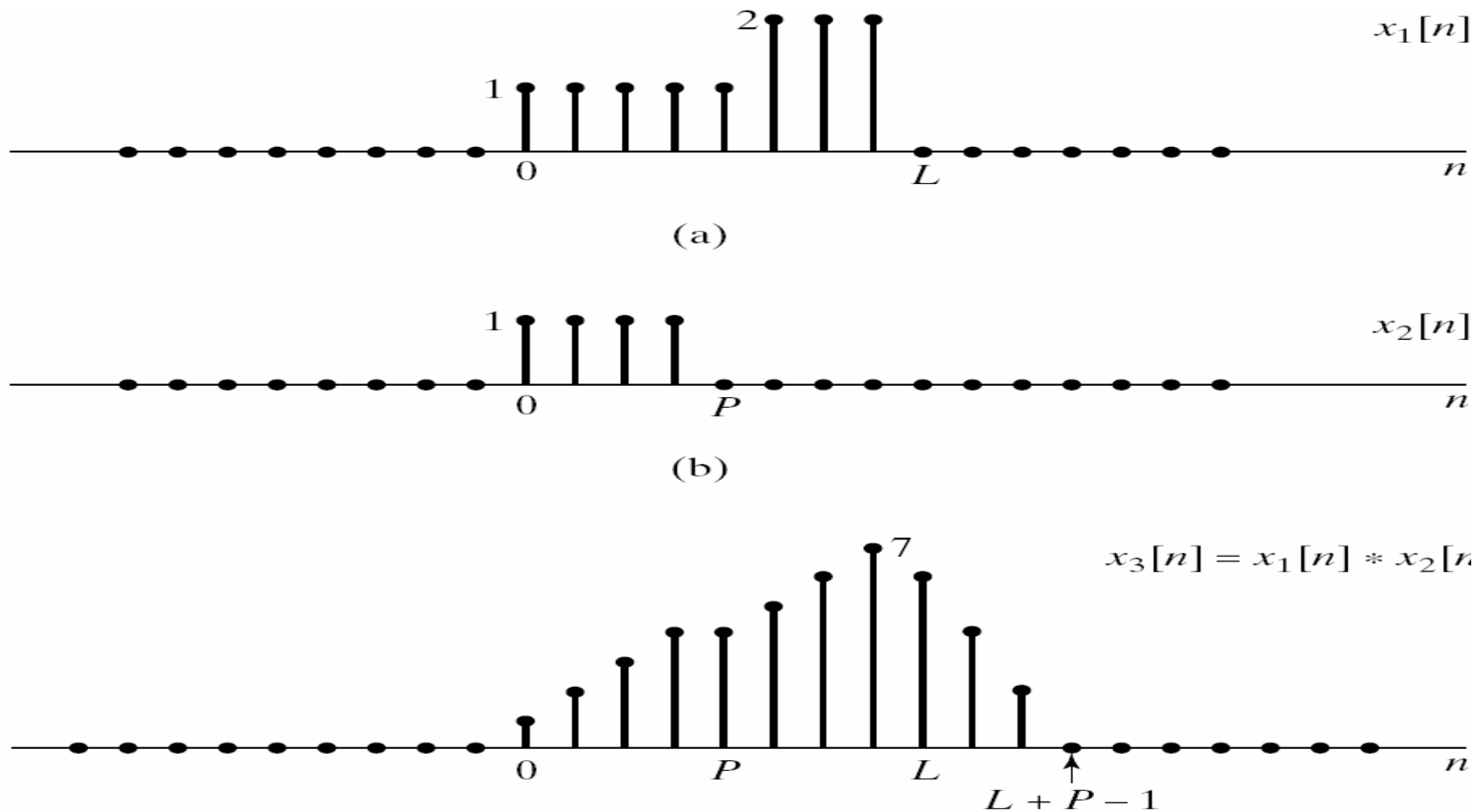
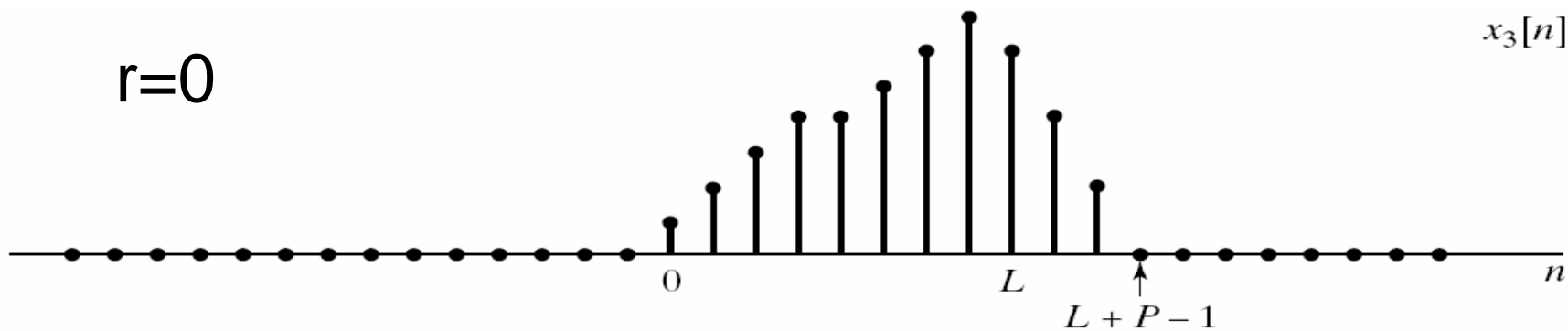
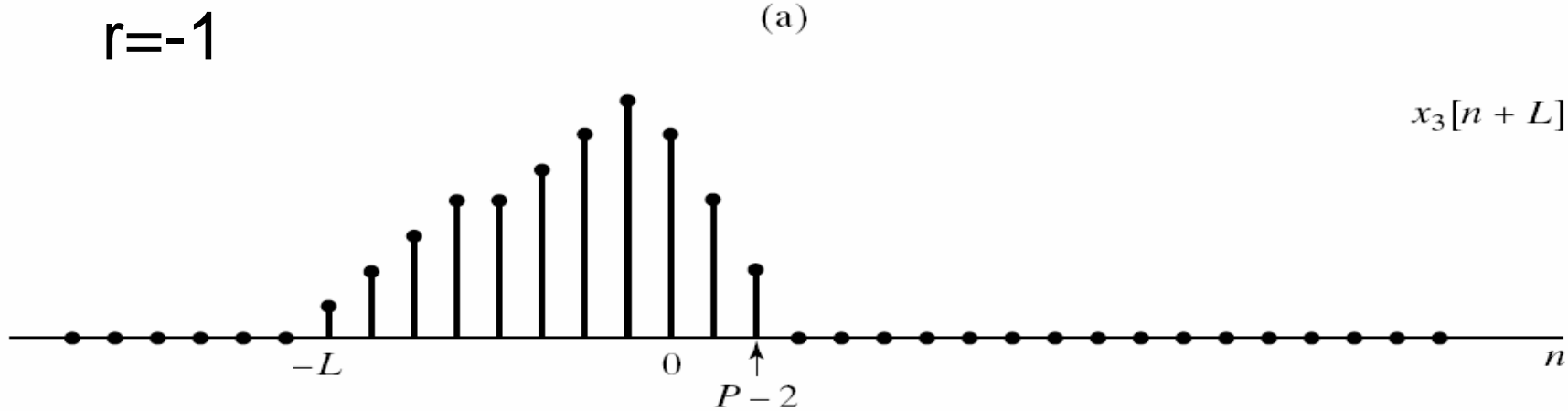


Figure 8.19 An example of linear convolution of two finite-length sequences.



(a)



(b)

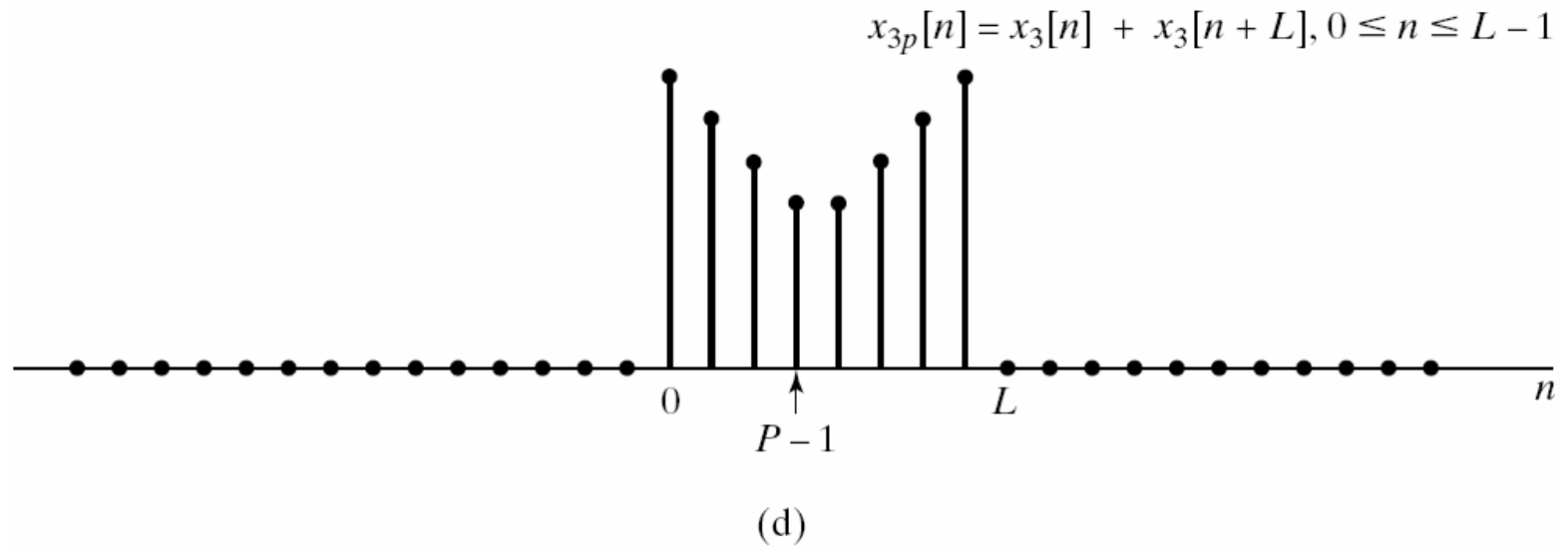
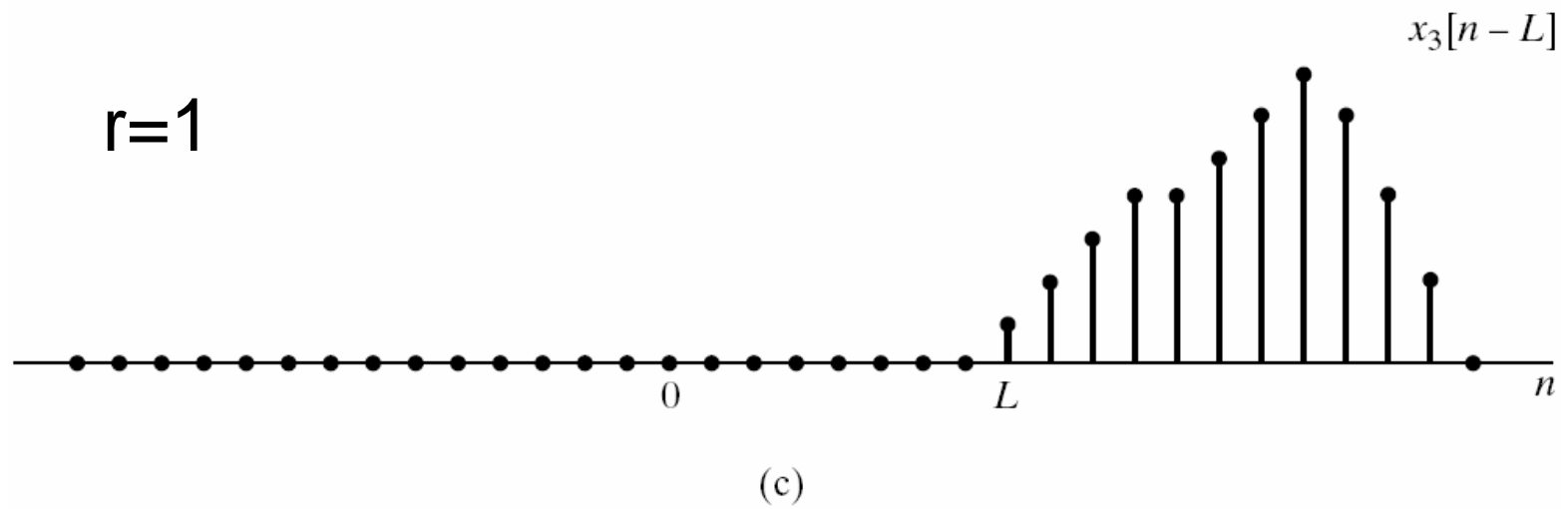
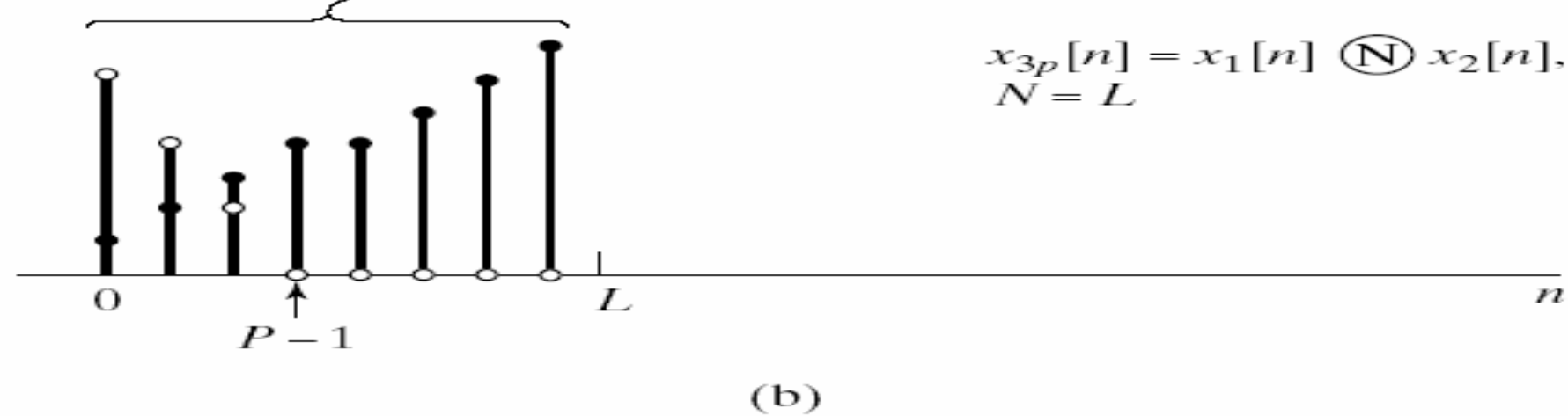
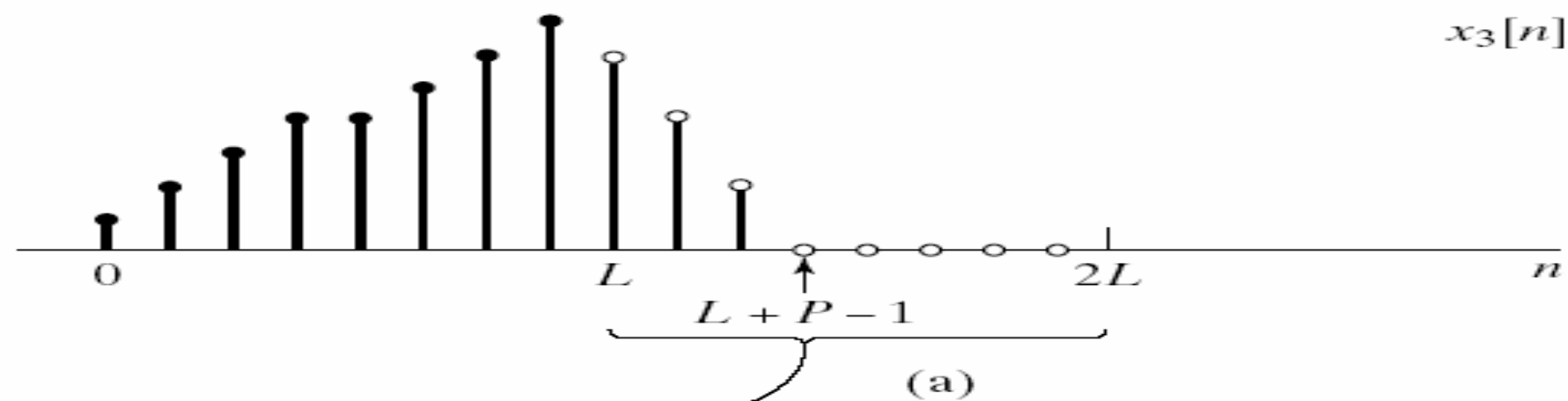


Figure 8.20 Interpretation of circular convolution as linear convolution followed by aliasing for the circular convolution of the two sequences $x_1[n]$ and $x_2[n]$ in Figure 8.19.

- $x_{3p}[n]$ is influenced only by $x_3[n]$ and $x_3[n + L]$
- whenever $P < L$, only the term $x_3[n + L]$ will alias into the interval $0 \leq n \leq L - 1$
-



$$x_{3p}[n] = x_1[n] \oplus x_2[n], \\ N = L$$

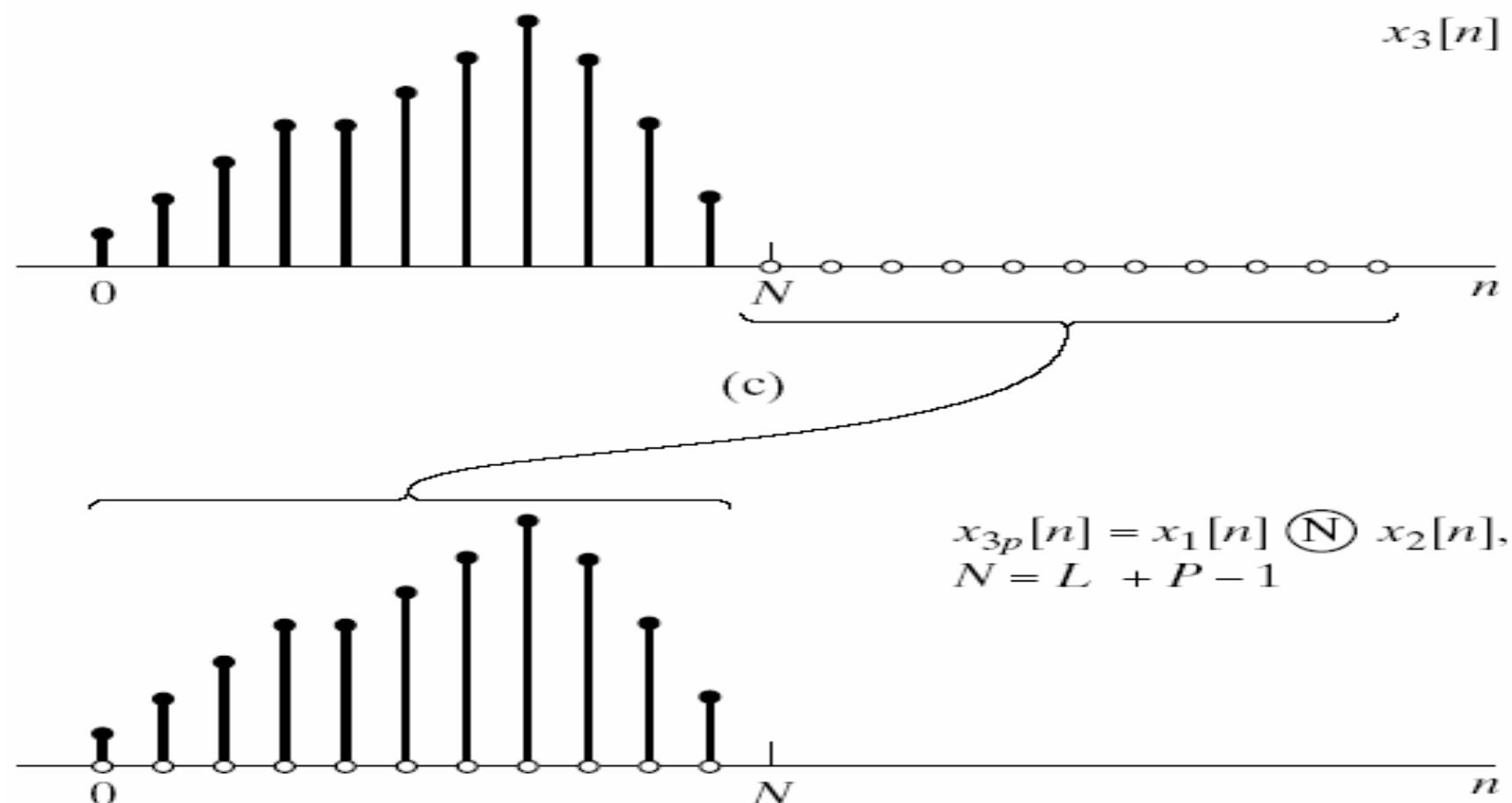


Figure 8.21 Illustration of how the result of a circular convolution “wraps around.” (a) and (b) $N = L$, so the aliased “tail” overlaps the first $(P - 1)$ points. (c) and (d) $N = (L + P - 1)$, so no overlap occurs.

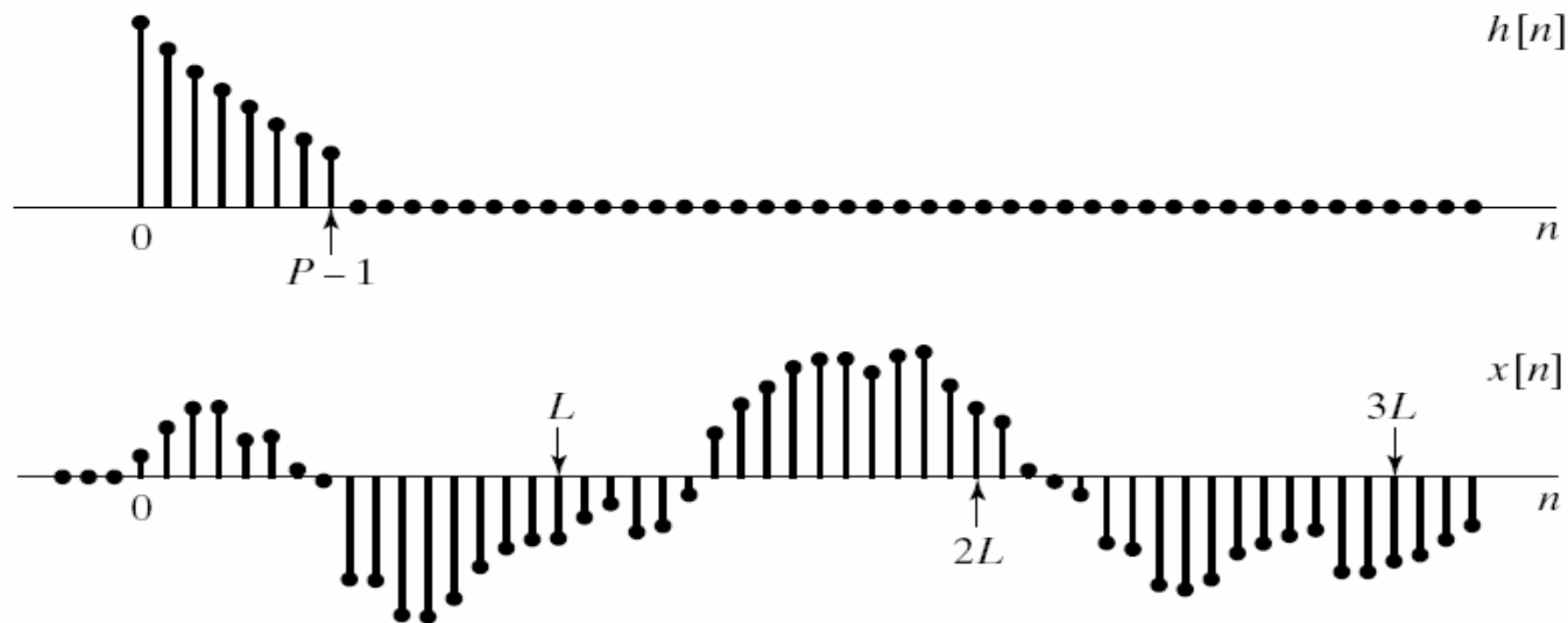


Figure 8.22 Finite-length impulse response $h[n]$ and indefinite-length signal $x[n]$ to be filtered.

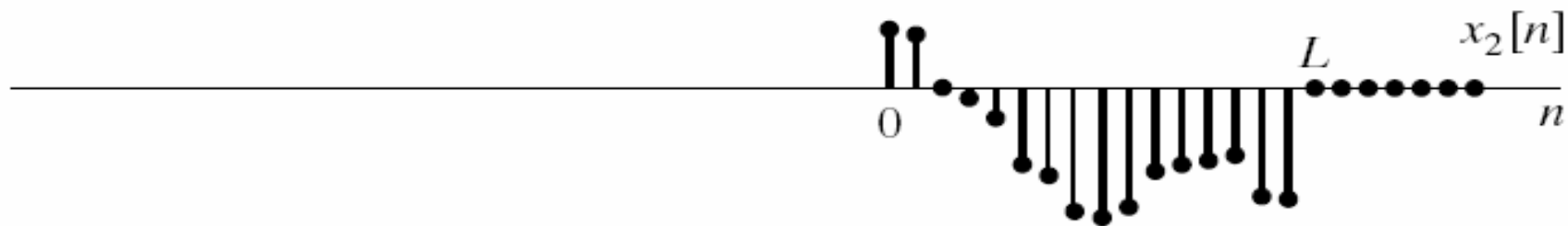
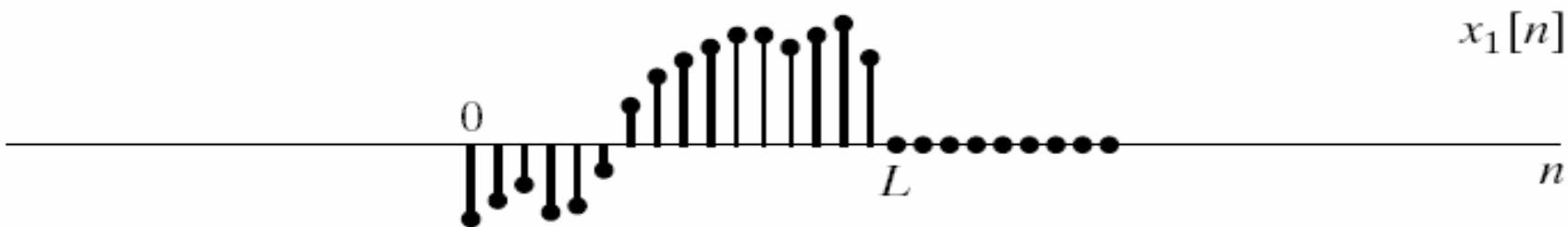
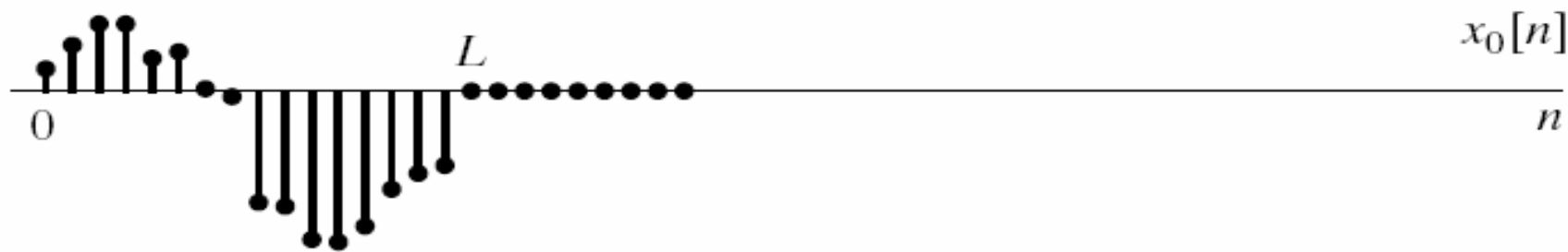
Block Convolution

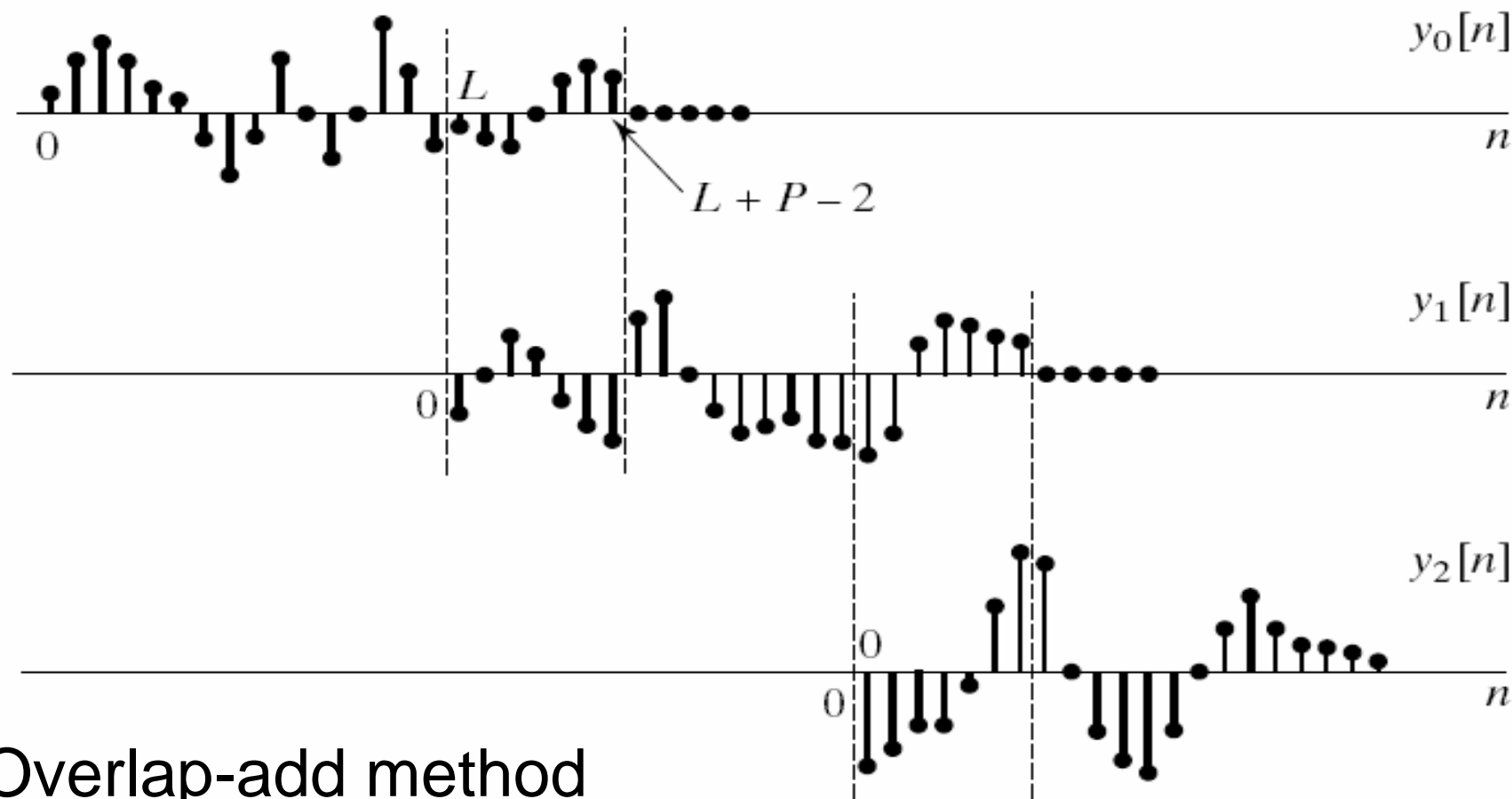
$$x[n] = \sum_{r=0}^{\infty} x_r[n], \text{ where}$$

$$x_r[n] = \begin{cases} x[n + rL], & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{r=0}^{\infty} y_r[n], \text{ where}$$

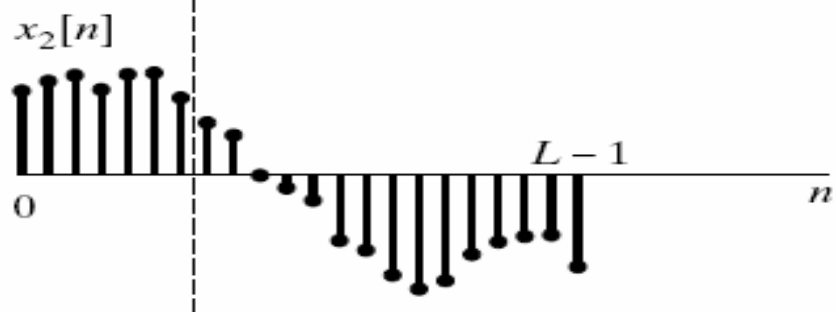
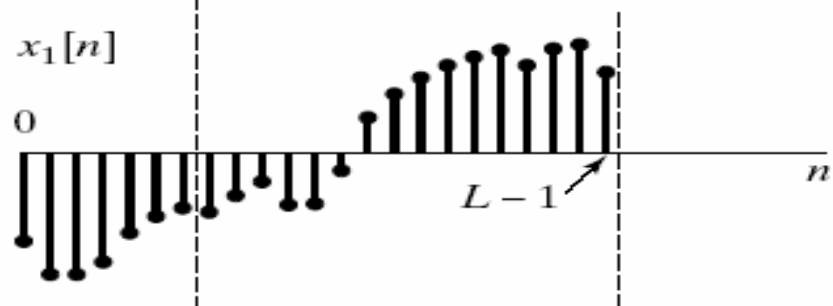
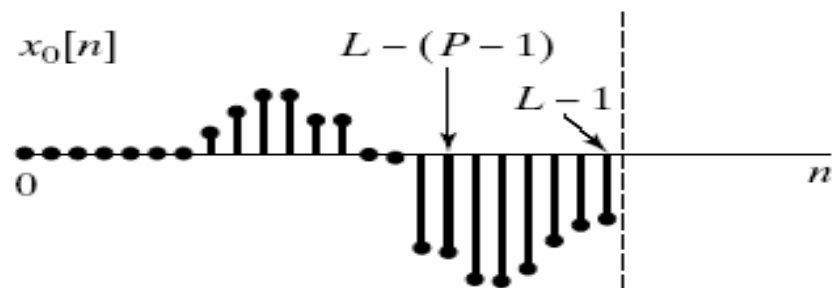
$$y_r[n] = x_r[n] * h[n]$$



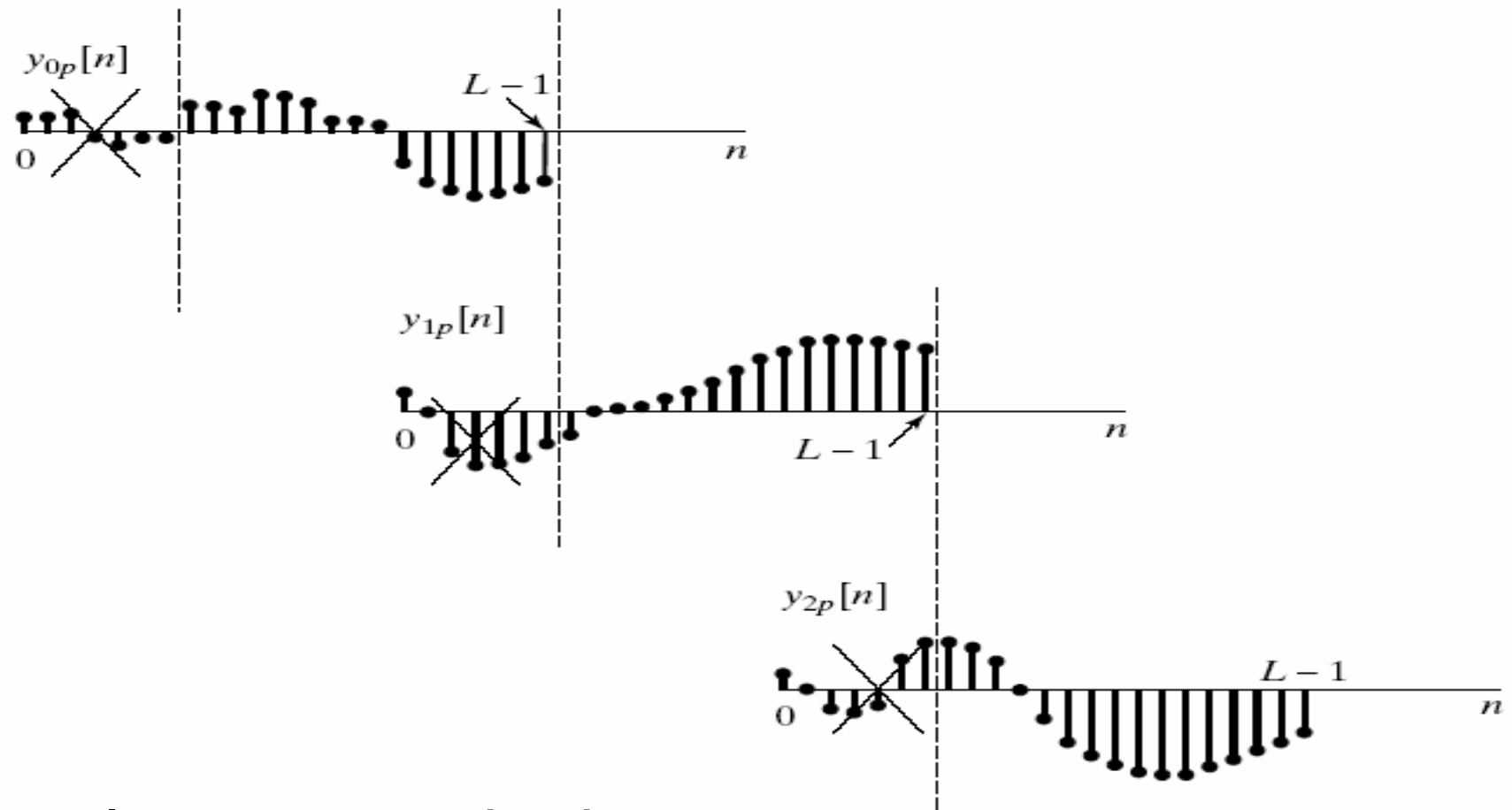


Overlap-add method

Figure 8.23 (a) Decomposition of $x[n]$ in Figure 8.22 into nonoverlapping sections of length L . (b) Result of convolving each section with $h[n]$.



(a)



Overlap-save method

Figure 8.24 (a) Decomposition of $x[n]$ in Figure 8.22 into overlapping sections of length L . (b) Result of convolving each section with $h[n]$. The portions of each filtered section to be discarded in forming the linear convolution are indicated.

§ 8.5 抽样Z变换—频域抽样理论

$X(\tilde{k})$ 的值和 $X(\tilde{n})$ 的一个周期的Z变换在单位圆上N等分点上的抽样值相等。

→ 频域抽样，对任意序列吗？

绝对可和序列 $x(n)$ $x(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

由绝对可和 \rightarrow 傅立叶变换存在且连续 \rightarrow Z变换
 ROC包括单位圆。 $X(Z)$ 在单位圆上的N个均分点上
 抽样，得到 $\tilde{x}(k)$

$$\therefore X(k) = X(Z) \big|_{Z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) W_N^{nk} \xrightarrow{\text{能否得到}} x(n)$$

$$\begin{aligned} \tilde{X}_N(n) &= IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) W_N^{mk} \right] W_N^{-nk} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} \right] \end{aligned}$$

由于

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(m-n)k} = \begin{cases} 1, & m=n+rN \\ 0 \end{cases}$$

故：

$$X_N \widetilde{(n)} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN)$$

由 $X(\widetilde{k})$ 得到的周期序列 $x_N \widetilde{(n)}$ 是原周期序列 $x(n)$ 的周期延拓。[时域抽样 \rightarrow 频域周期延拓，
频域抽样 \rightarrow 时域的周期延拓]

若 $x(n)$ 不是有限长序列 \rightarrow 混叠

$x(n)$ 有限长序列 M , if $N \geq M$ 则可以无失真的得到 $x(n)$ 。

$$X_N(n) = \widetilde{X}_N(n) R(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rN) R_N(n) = x(n), N \geq M$$

在每个抽样点上

$$X(e^{jW}) \Big|_{W=\frac{2\pi}{N}k} = X(k), k = 0, 1, \dots, N-1$$

内插函数具有线性相位

$X(k)$ $\xrightarrow{\text{N个频域抽样}}$ $x(n)$ 。 $X(Z)$? 及频率响应 $X(e^{j\omega})$

设 $x(n)$ $0 \leq n \leq N-1$ 。 $X(Z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) Z^{-n}$

$$\therefore x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk}$$

$$\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) W_N^{-nk} \right] Z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \left[\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-nk} Z^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \frac{1 - W_N^{-Nk} Z^{-N}}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}} = \frac{1 - Z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x(k)}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}} \end{aligned}$$

利用N个频率抽样恢复X(Z)的内插公式

$$X(Z) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \phi_k(Z), \phi_k(Z) = \frac{1}{N} \cdot \frac{1 - Z^{-N}}{1 - W_N^{-k} Z^{-1}}$$

令其分子为零，得：

$$Z = e^{j\frac{2\pi}{N}r}, r = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

分子项有N个零点。令其分母为零则

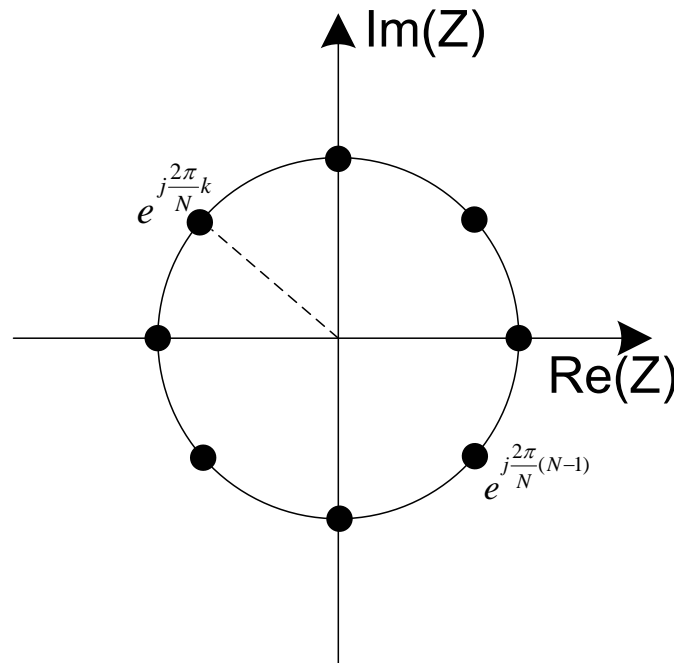
$$Z = W_N^{-k} = e^{j\frac{2\pi}{N}k}$$

一个极点

它将和第 k 个零点对消 $\rightarrow \phi_k(Z)$ 只在本身插值点处 $e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ 不为零

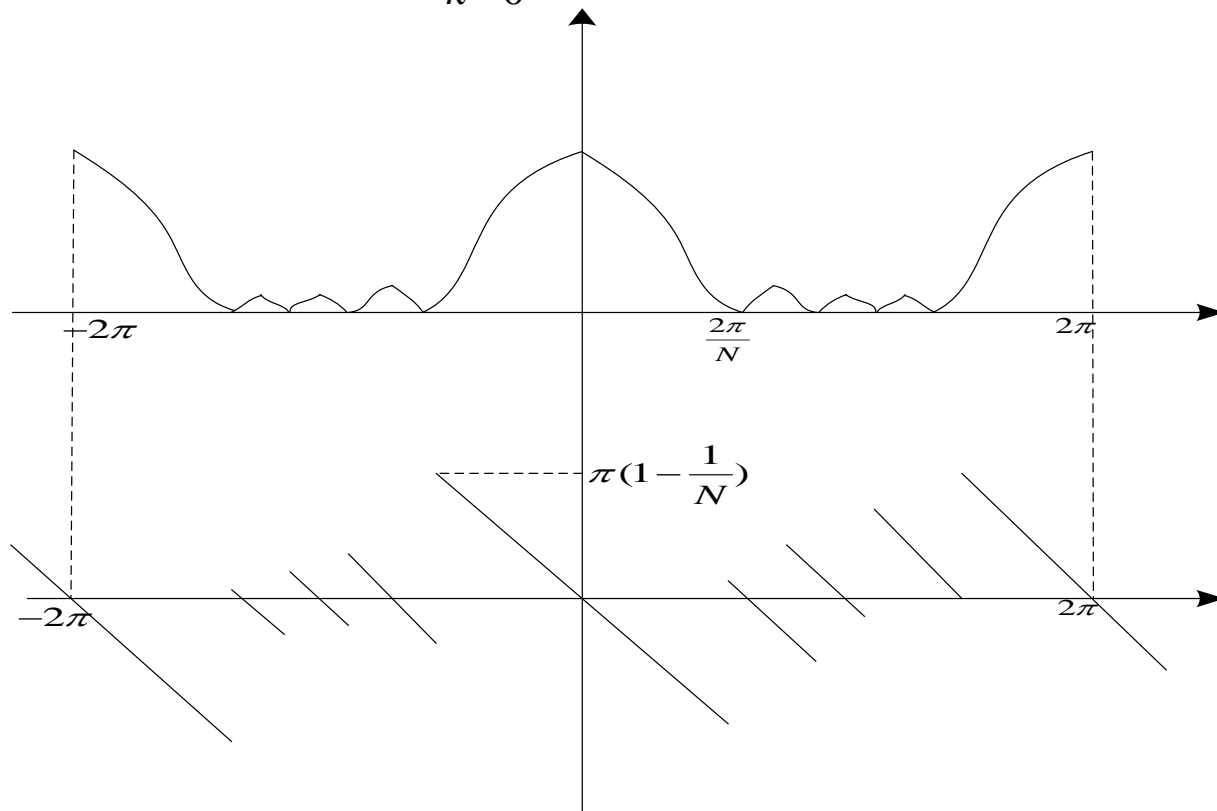
在其它 $(N-1)$ 个抽样点 i 上($i \neq k$)都是零点($N-1$ 个零点)

在 $Z=0$ 处有 $(N-1)$ 阶极点



看一下它的频率响应，求单位圆上 $Z=e^{j\omega}$ 的Z变换

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \phi_k(e^{j\omega})$$



$$\begin{aligned}
 \phi_k(e^{jw}) &= \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-jwN}}{1 - e^{-j(w - k \frac{2\pi}{N})}} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{wN}{2}}{\sin[(w - \frac{2\pi}{N}k)/2]} e^{-j(\frac{N-1}{2}w + \frac{k\pi}{N})} \\
 \angle \phi(w) &= -\frac{N-1}{2}w
 \end{aligned}$$

$$\phi_k(e^{jw}) = \phi(w - k \frac{2\pi}{N})$$

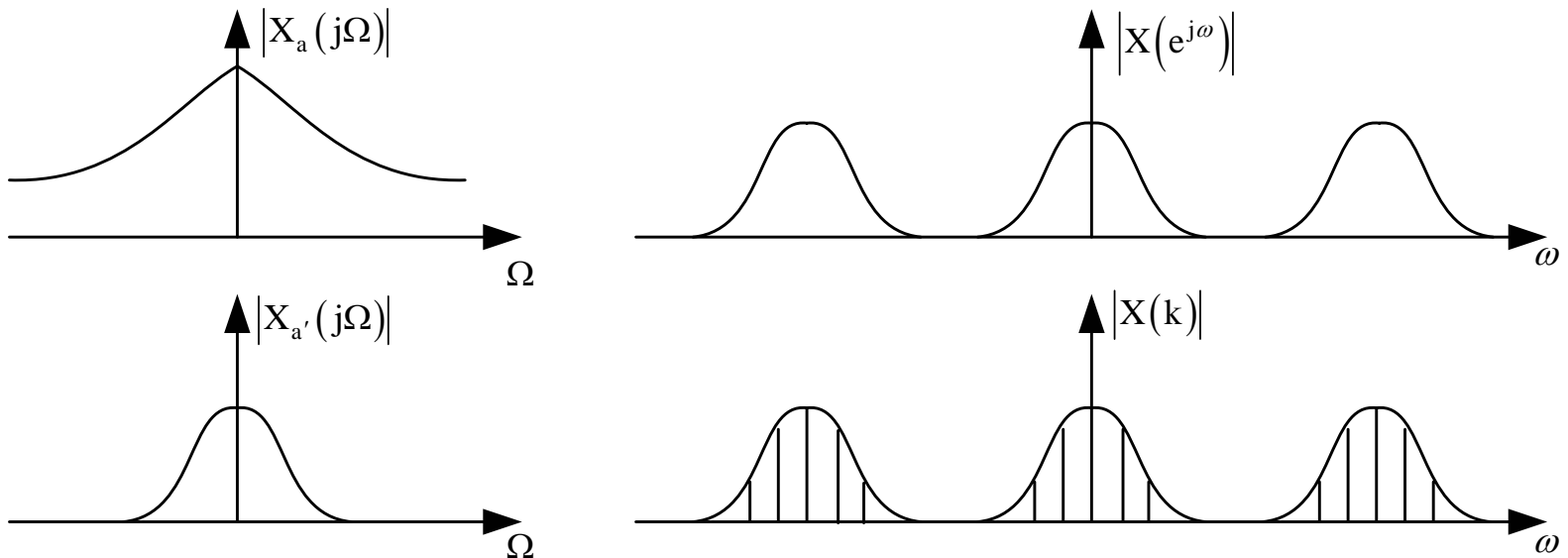
$$\phi(w) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\frac{wN}{2})}{\sin w/2} e^{-j\frac{N-1}{2}w}$$

$w = 0$ 时, $\phi(w) = 1$, 当 $w = i \frac{2\pi}{N}$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$ 时) $\phi(w) = 0$

在抽样点上为1

$$\phi(w - k \frac{2\pi}{N}) = \begin{cases} 1, & w = k \frac{2\pi}{N} \\ 0, & w = i \frac{2\pi}{N}, i \neq k \end{cases}$$

§ 8.6 离散傅里叶变换的应用



DFT的角频率间隔是 $\frac{2\pi}{N} \Rightarrow \omega = \Omega T$

$$\therefore \Omega_k = \frac{2\pi k}{NT} \quad (k=0,1,\dots,N-1). \quad \text{连续时间频率。}$$

\Rightarrow 频率分辨率为: $F=1/NT$, N : DFT的点数, T 是采样周期。

1. 混迭现象: $f_s \geq 2f_h \Rightarrow T = \frac{1}{f_s} \leq \frac{1}{2f_h}$

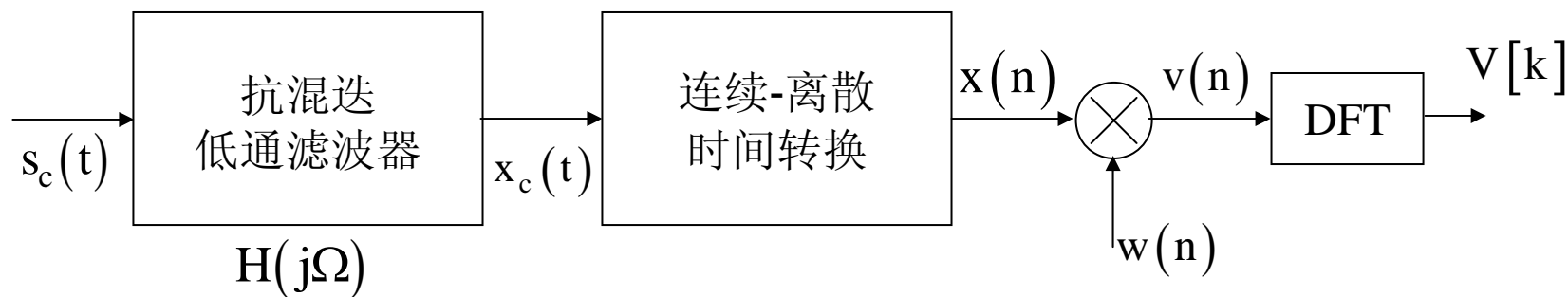
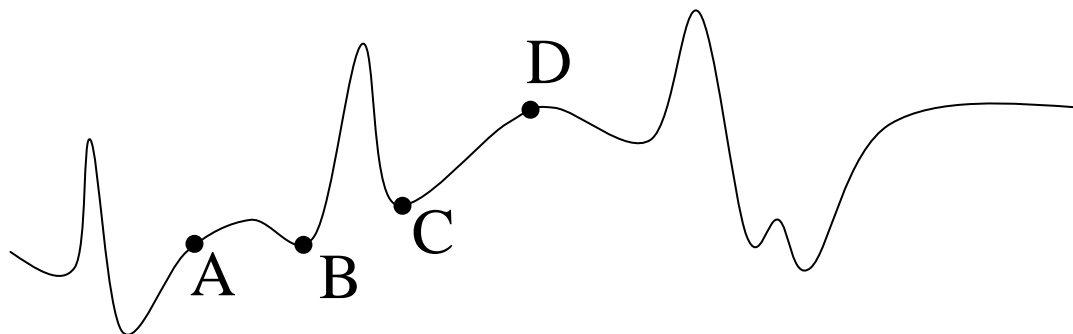
有限长序列记录长度为: $T_p = NT = 1/F$

所以有: $F \geq 2f_h / N$

2. 频率泄漏:

3. 栅栏效应: $[0, 2\pi]$ 上 N 点均匀采样, $x(k)$ 离散点。

4. 信号长度的选择：随机信号而言



$$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

加窗的DFT为：

$$V[k] = \sum_{n=0}^{N-1} v(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

这里假设窗的长度： $L \leq N$

$$V[k] = V(e^{j\omega}) \bigg|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

$V[k]$ 是 $V(e^{j\omega})$ 的样本，DFT相邻频率间的间隔为 $2\pi/N$ ，再由 $\omega = \Omega T$ ，有：

$$\Omega_k = \frac{2\pi k}{NT}, \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

