第十五章 傅里叶(Fourier)级数

［教学目标］通过教学使学生达到：

1 明确三角级数产生的实际背景并理解有关概念和性质；

2 理解以 2π 为周期的函数的傅里叶级数的有关概念及收敛定理；

3 明确以 2π 为周期的函数的傅里叶级数是以 2π 周期的函数的傅里叶级数的推广，理解奇、偶函数的傅里叶级数和傅里叶级数的收敛定理；

［教学重难点］重点是将函数展开成傅里叶级数，难点是傅里叶级数收敛性的判别及收敛性定理的证明。

［教学方法］讲授

［教学时间］讲授 10 学时，习题课 4 学时，总计 14 学时

［教学内容］三角级数；傅里叶级数及收敛定理，周期函数的傅里叶级展开式，奇函数和偶函数的傅里叶级数展开式。把某些函数展开成正弦或余弦级数。

［考核目标］

1. 熟练地将以 2π 为周期的函数展成 Fourier 级数，并应用收敛定理求级数在指定点的和；

2. 将 2π 为周期的函数展成 Fourier 级数，会求函数的正弦级数和余弦级数；

3. 准确表述收敛性定理，知道其证明主要思路。

Fourier 级数的基本概念性质

一 Fourier 级数的定义

1　**定义**：设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上以 2π 为周期的函数，且 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，称形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

的函数项级数为 $f(x)$ 的 Fourier 级数($f(x)$ 的 Fourier 展开式)，其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx, n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\cdots$$

称为 $f(x)$ 的 Fourier 系数，记为 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

2　**说明**

1）在未讨论收敛性，证明 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 一致收敛到 $f(x)$ 之前，不能将“~”改为“=”；此处“~”也不包含“等价”之意，而仅仅表示 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 是 $f(x)$ 的 Fourier 级数，或者说 $f(x)$ 的 Fourier 级数是 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$. 2) 要求 $[-\pi,\pi]$ 上 $f(x)$ 的 Fourier 级数,只须求出 Fourier 系数.

例 1　设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其在 $[-\pi,\pi]$ 上可表示为 $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le\pi\\ 0, -\pi<x<0\end{cases}$, 求 $f(x)$ 的 Fourier 展开式.

3) 计算 $f(x)$ 的 Fourier 系数的积分也可以沿别的长度为 2π 的去件来积.如

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos nxdx, n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\sin nxdx, n=1,2,\cdots$$

例 2　设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,其在 $[0,2\pi)$ 上等于 x ,求 $f(x)$ 的 Fourier 级

数.

4) 如果 $f(x)$ 仅定义在长为 2π 的区间上,例如定义在 $[0,2\pi)$ 上，此时 $f(x)$ 不是周期函数，从而不能按上述方法展开为 Fourier 级数.但可对 $f(x)$ 在 $[0,2\pi)$ 外补充定义，使其以 2π 为周期，如定义

$$\tilde{f}(x)=f(x-2n\pi)\,,\qquad x\in(2n\pi,2(n+1)\pi)$$

它有下述性质: a) $x\in[0,2\pi)$ 时, $\tilde{f}(x)=f(x)$； b) $\tilde{f}(x)$ 以 2π 为周期.

例 3: $f(x)=e^x,(-\pi\le x<\pi)$

二　正弦级数和余弦级数

1　**定义**

形如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 的三角级数(函数项级数)称为正弦级数;形如 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 的三角级数(函数项级数称为余弦级数.

2　如果 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,在 $[-\pi,\pi]$ 上绝对可积，若 $f(x)$ 是奇函数,则有 $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$；若 $f(x)$ 是偶函数,则有 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$.

3　设 $f(x)$ 仅在 $[0,\pi]$ 上有定义，如果按奇函数的要求,补充定义 $f(x)=-f(-x),x\in[-\pi,0)$,然后再作 2π 周期延拓,必得奇函数，所得 Fourier 级数必为正弦级数. 对应地，补充定义 $f(x)=f(-x),x\in[-\pi,0)$ 后,再作 2π 周期延拓,必得偶函数，所得 Fourier 级数必为余弦级数.

例 4: $f(x)=\begin{cases}1,0\le x<h\\0,h\le x<\pi\end{cases}$　$(0<h<\pi)$,将 $f(x)$ 展开成余弦函数.

三　一般周期函数的 Fourier 级数

设 $f(x)$ 是周期为 T 的函数,且在 $[0,T]$ 上绝对可积，则有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{2n\pi}{T} x + b_n \sin\frac{2n\pi}{T} x),$$

其中 $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx$，

$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi}{T} xdx, n=1,2,\cdots$ $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi}{T} xdx, n=1,2,\cdots$

例 5：求 $f(x)=|x|, -1 \le x \le 1$ 的 Fourier 展开式.

四　Fourier 级数的复数表示形式

设 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则其复数表示形式为

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx},$$

其中，复的 Fourier 系数 $C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx = \overline{C}_{-n}$.

Fourier 级数收敛的判定

一　Riemann（黎曼）引理

1　**Riemann（黎曼）引理**　设 $f(x)$ 在（有界或无界）区间 $<a,b>$ 上绝对可积，则

$$\int_a^b f(x)\cos pxdx \to 0, \qquad \int_a^b f(x)\sin pxdx \to 0 \qquad (p \to \infty).$$

推论 1　在 $[0,T]$ 上绝对可积函数 $f(x)$ 的 Fourier 系数

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2n\pi}{T} xdx \to 0, (n \to \infty);$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2n\pi}{T} xdx \to 0, (n \to \infty)$$

二　Fourier 级数收敛的充要条件

定理 1 $\lim_{n\to\infty} T_n(x)=s \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon)\in(0,\pi]$ 和 $N=N(\varepsilon)$，使得当 $n\ge N(\varepsilon)$ 时成立

$$\left|\int_0^\delta \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u}\varphi(u)du\right|<\varepsilon,$$

其中 $\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2\delta$.

三 Fourier 级数收敛的 Dini 判别法

1 **推论 2:** 设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上除去有限点外存在有界导数,则 $f(x)$ 的 Fourier 级数点点收敛,且

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)), x\in(0,2\pi)\\ \frac{1}{2}(f(+0)+f(2\pi-)), x=0\text{或}2\pi\end{cases}$$

特别地，$x\in(0,2\pi)$ 是 $f(x)$ 的连续点时，$\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-))=f(x)$,即

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

2 **推论 2 的应用:**

例 1 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，其在 $[-\pi,\pi]$ 上可表示为 $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x\le\pi\\ 0, -\pi<x<0\end{cases}$,判定 $f(x)$ 的 Fourier 级数的收敛性.

例 2 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,其在 $[0,2\pi)$ 上等于 x ,判定 $f(x)$ 的 Fourier 级数的收敛性

例 3; $f(x)=e^{ax}$, $(-\pi\le x<\pi)$ $(a\ne 0)$

四 Jordan 判别法

设 $f(x)$ 在$[0,2\pi]$上单调(或有界交差),则推论 2 的结论成立,即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases}\frac{1}{2}(f(x+)+f(x-)), x\in(0,2\pi)\\ \frac{1}{2}(f(+0)+f(2\pi-)), x=0或2\pi\end{cases}$$

Fourier 级数的积分

一　逐项积分定理

1　**定理**　设周期为2π 的函数 $f(x)$ 局部绝对可积且在$[-\pi,\pi]$上

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛，且逐项积分公式成立：

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt.$$

3　**注意**：（1）以上是默认在$[-\pi,\pi]$上讨论的,一般的逐项积分公式为：

$$\int_c^x f(t)dt=\int_c^x\frac{a_0}{2}dt+\sum_{n=1}^{\infty}\int_c^x(a_n\cos nt+b_n\sin nt)dt,$$

其中c,x是$[-\pi,\pi]$上任意两点；(2) 逐项积分定理中,并没有要求 $f(x)$ 的 Fourier 级数是收敛的，但逐项积分后所得的级数总是收敛的; (3) 并非每个三角技术都能成为局部绝对可积函数的 Fourier 级数.

例　$s(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln x}$.

4　**逐项积分定理的应用**: 求 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 展开并证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

二　Fourier 级数的逐项求导问题

假定 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续可微，且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad 0\le x\le 2\pi,$$

问是否成立下式:

$$f'(x)\sim(\frac{a_0}{2})'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)',\qquad 0\le x\le 2\pi.$$

这就是 Fourier 级数的逐项求导问题.