Jawaban Kuis Peubah Acak Kontinu & Ganda

Soal 1: Mobile Cloud Gaming

(a) Fungsi Peubah Acak Biaya

Misalkan T adalah peubah acak durasi sesi permainan (dalam menit).

- **Paket Casual (Model A):** Tarif linear Rp 1.500 per menit.

$$C_A(T) = 1500T$$

- **Paket Hardcore (Model B):** Biaya tetap Rp 20.000 untuk 20 menit pertama, ditambah Rp 1.500 per menit untuk kelebihannya.

$$C_B(T) = \begin{cases} 20.000 & 0 \le T \le 20 \\ 20.000 + 1.500(T - 20) & T > 20 \end{cases}$$

(b) Nilai Harapan Biaya ($E[C_A]$ dan $E[C_B]$)

Diketahui $T \sim$ Eksponensial(λ) dengan mean μ. Maka PDF-nya adalah $f_T(t) = \frac{1}{\mu}e^{-t/\mu}$ untuk $t \ge 0$.

Harapan Paket Casual

Menggunakan sifat linearitas ekspektasi ($E[aX] = aE[X]$):

$$E[C_A] = E[1500T] = 1500E[T] = 1500\mu$$

Harapan Paket Hardcore

Menggunakan definisi nilai harapan untuk fungsi peubah acak:

$$E[C_B] = \int_0^\infty C_B(t)f_T(t)\,dt$$

Kita pecah integralnya menjadi dua bagian:

$$\begin{aligned} E[C_B] &= \int_0^{20} 20.000 \cdot \frac{1}{\mu}e^{-t/\mu}\,dt + \int_{20}^\infty (20.000 + 1500(t-20)) \cdot \frac{1}{\mu}e^{-t/\mu}\,dt \\ &= 20.000 \underbrace{\int_0^\infty f_T(t)\,dt}_{=1} + \int_{20}^\infty 1500(t-20)\frac{1}{\mu}e^{-t/\mu}\,dt \end{aligned}$$

Bagian integral kedua (biaya tambahan) dapat dihitung dengan substitusi $u = t - 20$ (sehingga $du = dt$, batas $20 \to 0$ dan $\infty \to \infty$):

$$\begin{aligned} \text{Tambahan} &= \int_0^\infty 1500u \cdot \frac{1}{\mu}e^{-(u+20)/\mu}\,du \\ &= 1500e^{-20/\mu} \underbrace{\int_0^\infty u \cdot \frac{1}{\mu}e^{-u/\mu}\,du}_{=E[T]=\mu} \\ &= 1500\mu e^{-20/\mu} \end{aligned}$$

Maka total nilai harapannya adalah:

$$E[C_B] = 20.000 + 1500\mu e^{-20/\mu}$$

Soal 2: Peubah Acak Ganda 2D

Diketahui PDF gabungan:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y), & (x,y) \in D \\ 0, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Dimana D adalah segitiga dengan titik sudut $(1,1)$, $(4,1)$, dan $(5,5)$.

(a) Daerah Segitiga dan Konstanta c

Persamaan garis batas segitiga:

- Bawah (melalui (1,1) dan (4,1)): $y = 1$
- Kiri (melalui (1,1) dan (5,5)): $m = \frac{5-1}{5-1} = 1 \Rightarrow y = x$
- Kanan (melalui (4,1) dan (5,5)): $m = \frac{5-1}{5-4} = 4 \Rightarrow y - 1 = 4(x-4) \Rightarrow x = \frac{y+15}{4}$

Untuk menghitung konstanta c, kita gunakan syarat total peluang $= 1$. Kita gunakan urutan integrasi $dx\,dy$ (horizontal strip) untuk memudahkan batas:

- Batas y: 1 sampai 5.
- Batas x: y sampai $\frac{y+15}{4}$.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_1^5 \int_y^{\frac{y+15}{4}} c(x+y)\,dx\,dy \\ \frac{1}{c} &= \int_1^5 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_{x=y}^{x=\frac{y+15}{4}} dy \end{aligned}$$

Setelah perhitungan integral (dilakukan terpisah), didapatkan hasil integralnya adalah 34.

$$1 = 34c \implies c = \frac{1}{34}$$

(b) Fungsi Distribusi Kumulatif Gabungan (Joint CDF)

Joint CDF didefinisikan sebagai:

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v)\,du\,dv$$

Secara lengkap:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x < 1 \text{ atau } y < 1 \\ \int_1^y \int_v^{\min(x, \frac{v+15}{4})} \frac{1}{34}(u+v)\,du\,dv & \text{jika } (x,y) \in D \\ 1 & \text{jika } x \geq 5 \text{ dan } y \geq 5 \end{cases}$$

(c) Peluang $P(X > 4)$

Kita hitung volume di bawah kurva PDF untuk daerah $X > 4$ di dalam segitiga D. Daerah ini dibatasi oleh: $x = 4$, $x = 5$, garis kiri $y = x$ (tidak relevan karena di kanan $x = 4$, garis kanan membatasi), garis kanan $y = 4x - 15$. Mari kita cek batasnya. Untuk $x \in [4,5]$, daerah segitiga dibatasi di bawah oleh $y = 4x - 15$ dan di atas oleh $y = x$.

$$P(X > 4) = \int_4^5 \int_{4x-15}^{x} \frac{1}{34}(x+y)\,dy\,dx$$

Perhitungan integral:

$$\begin{aligned} \text{Inner} &= \frac{1}{34}\left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{4x-15}^{x} \\ \text{Outer} &= \int_4^5 (\dots)\,dx = \frac{23}{68} \approx 0.338 \end{aligned}$$

Jadi, $P(X > 4) = \frac{23}{68}$.

Soal 3: Evaluasi Server (Gaussian)

Diketahui:

- Server A: $X_A \sim \mathcal{N}(\mu_A = 200, \sigma_A^2 = 16)$
- Server B: $X_B \sim \mathcal{N}(\mu_B = 210, \sigma_B^2 = 9)$
- Independen.

(a) Peluang Total Waktu Tunggu > 415 ms

Misalkan $T = X_A + X_B$. Karena penjumlahan variabel Normal independen menghasilkan variabel Normal:

$$\mu_T = \mu_A + \mu_B = 200 + 210 = 410$$
$$\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 = 16 + 9 = 25 \implies \sigma_T = 5$$

Kita hitung $P(T > 415)$ dengan standarisasi Z:

$$Z = \frac{415 - \mu_T}{\sigma_T} = \frac{415 - 410}{5} = 1$$

$$P(T > 415) = P(Z > 1) = Q(1) \quad \text{atau} \quad 1 - \Phi(1)$$

(b) Load Balancer (Optimasi Bobot w)

Total waktu sistem: $Y = wX_A + (1 - w)X_B$. Kita ingin meminimalkan variansi Y. Rumus variansi untuk kombinasi linear independen:

$$\text{Var}(Y) = w^2\text{Var}(X_A) + (1 - w)^2\text{Var}(X_B)$$

Substitusi nilai variansi:

$$V(w) = 16w^2 + 9(1 - w)^2$$

Untuk mencari minimum, turunkan terhadap w dan samakan dengan 0:

$$\frac{dV}{dw} = 32w + 18(1 - w)(-1)$$
$$0 = 32w - 18 + 18w$$
$$18 = 50w$$
$$w = \frac{18}{50} = 0.36$$

Jadi, bobot yang harus dipilih adalah $\mathbf{w = 0.36}$.