

Индивидуальное домашнее задание 3

Шумилкин Андрей. Группа 163

Вариант 48 .

Задача 1

а) Составим из данных векторов матрицу и найдем ее ранг – он и будет совпадать с рангом системы, то есть с размерностью базиса образованного этими векторами. А в базис могут войти вектора, у которых в столбце есть базисная переменная, при этом только по одному с каждой «ступеньки».

$$\begin{pmatrix} -13 & -34 & -35 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ 35 & 21 & -9 & -22 \\ 5 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} -1 & -18 & -15 & 17 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ 35 & 21 & -9 & -22 \\ 5 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Домножим 1-ую строку на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ 35 & 21 & -9 & -22 \\ 5 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ 35 & 21 & -9 & -22 \\ 5 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & 55 & 50 & -49 \\ 35 & 21 & -9 & -22 \\ 5 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на -35:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & 55 & 50 & -49 \\ 0 & -609 & -534 & 573 \\ 5 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 1-ую, домноженную на -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & 55 & 50 & -49 \\ 0 & -609 & -534 & 573 \\ 0 & -86 & -76 & 80 \end{pmatrix}$$

Разделим 4-ую строку на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & 55 & 50 & -49 \\ 0 & -203 & -178 & 191 \\ 0 & -86 & -76 & 80 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на -4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & 55 & 50 & -49 \\ 0 & -3 & -18 & -21 \\ 0 & -86 & -76 & 80 \end{pmatrix}$$

Разделим 4-ую строку на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & 55 & 50 & -49 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & -86 & -76 & 80 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами 4-ую и 2-ую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 55 & 50 & -49 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & -86 & -76 & 80 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на -55:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -280 & -434 \\ 0 & -50 & -40 & 53 \\ 0 & -86 & -76 & 80 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на 50:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -280 & -434 \\ 0 & 0 & 260 & 403 \\ 0 & -86 & -76 & 80 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 2-ую, домноженную на 86:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -280 & -434 \\ 0 & 0 & 260 & 403 \\ 0 & 0 & 440 & 682 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & -20 & -31 \\ 0 & 0 & 260 & 403 \\ 0 & 0 & 440 & 682 \end{pmatrix}$$

Домножим 3-ую строку на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 20 & 31 \\ 0 & 0 & 260 & 403 \\ 0 & 0 & 440 & 682 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на -13:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 20 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 440 & 682 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 3-ую, домноженную на -22:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 & -17 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 20 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базисом могут являться векторы u_1, u_2 и u_3 .

б) Базис в пространстве \mathbb{R}^5 должен иметь размерность 5. Приведем наши вектора к ступенчатому виду и посмотрим какими векторами мы можем это сделать.

$$\begin{pmatrix} -13 & -34 & -35 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \\ 35 & 21 & -9 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} -1 & -18 & -15 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \\ 35 & 21 & -9 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Домножим 1-ую строку на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 3 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 5 \\ 35 & 21 & -9 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & -50 & -40 \\ -3 & 1 & 5 \\ 35 & 21 & -9 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & -50 & -40 \\ 0 & 55 & 50 \\ 35 & 21 & -9 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на -35:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & -50 & -40 \\ 0 & 55 & 50 \\ 0 & -609 & -534 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 1-ую, домноженную на -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & -50 & -40 \\ 0 & 55 & 50 \\ 0 & -609 & -534 \\ 0 & -86 & -76 \end{pmatrix}$$

Разделим 2-ую строку на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & -10 & -8 \\ 0 & 55 & 50 \\ 0 & -609 & -534 \\ 0 & -86 & -76 \end{pmatrix}$$

Разделим 3-ую строку на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & -10 & -8 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & -609 & -534 \\ 0 & -86 & -76 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 11 & 10 \\ 0 & -609 & -534 \\ 0 & -86 & -76 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на -11:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & -609 & -534 \\ 0 & -86 & -76 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на 609:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 684 \\ 0 & -86 & -76 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 2-ую, домноженную на 86:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 684 \\ 0 & 0 & 96 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 57:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 96 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 3-ую, домноженную на 8:

$$\begin{pmatrix} 1 & 18 & 15 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Видим, что на четвертом и пятом «уровне» не хватает базисных переменных, при этом во время преобразований мы не прибавляли четвертую и пятую строку ни к каким другим. Мы можем дополнить наш набор векторов до базиса данного пространства $\vec{b}_1 = (0, 0, 0, 1, 0)$, $\vec{b}_2 =$

$(0, 0, 0, 0, 1)$, поскольку во время приведения к ступенчатому виду мы только прибавляли к четвертой и пятой строке, а не эти строки к чему-либо, а при записи векторов b_1 и b_2 у них в первых трех строках стоят нули, а значит их прибавление к четвертой и пятой строке ничего не изменит и при приведении к ступенчатому виду матрица, составленная из векторов $(u_1, u_2, u_3, b_1, b_2)$ так же будет иметь ранг 5, а значит эти вектора будут являться базисом в \mathbb{R}^5 .

Задача 2

Будем рассматривать искомую ОСЛУ так же, как и линейную оболочку данных векторов – то есть как описание подпространства U .

Тогда нам нужно просто перейти от одного способа задания подпространства (с помощью линейной оболочки) к другому (с помощью СЛУ).

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -12 & 24 & 29 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -68 & 36 & 74 & 14 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -38 & 126 & 137 & 23 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 27 & 25 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -68 & 36 & 74 & 14 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -38 & 126 & 137 & 23 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Домножим 1-ую строку на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -27 & -25 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 11 & 3 & -4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -68 & 36 & 74 & 14 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -38 & 126 & 137 & 23 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на -11:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -27 & -25 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 271 & 43 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ -68 & 36 & 74 & 14 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -38 & 126 & 137 & 23 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на 68:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -27 & -25 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 271 & 43 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -1800 & -1626 & -258 & -68 & -68 & 1 & 0 \\ -38 & 126 & 137 & 23 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на 38:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -27 & -25 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 271 & 43 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & -1800 & -1626 & -258 & -68 & -68 & 1 & 0 \\ 0 & -900 & -813 & -129 & -38 & -38 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 6:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -27 & -25 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 271 & 43 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -900 & -813 & -129 & -38 & -38 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на 3:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -27 & -25 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 271 & 43 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 2-ому столбцу 4-ый, домноженный на -7:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -25 & -4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 271 & 43 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 246 & 39 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 271 & 43 & 11 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Домножим 2-ую строку на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 246 & 39 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -271 & -43 & -11 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ому столбцу 1-ый, домноженный на -246:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 39 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -271 & -43 & -11 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ому столбцу 1-ый, домноженный на -39:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -271 & -43 & -11 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ому столбцу 2-ый, домноженный на 271:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -43 & -11 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ому столбцу 2-ый, домноженный на 43:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -11 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$S = \left(\begin{array}{cccc} 10 & 11 & 0 & 0 \\ -11 & -12 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$\text{rg } A = 2$.

Тогда матрица искомой системы:

$$\Psi = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

И получаем следующую ОСЛУ:

$$\begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Задача 3

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= (-4, -1, -6, 0), \\ \vec{a}_2 &= (0, -3, -2, -2), \\ \vec{a}_3 &= (-8, 1, -10, 2), \\ \vec{a}_4 &= (-4, 5, -2, 4). \end{aligned}$$

$$L_1 = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4 \rangle.$$

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= (8, 2, 12, 0), \\ \vec{b}_2 &= (8, -1, 10, -2), \\ \vec{b}_3 &= (8, 5, 14, 2), \\ \vec{b}_4 &= (-8, 4, -8, 4). \end{aligned}$$

$$L_2 = \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4 \rangle.$$

Найдем базис L_1 , составив матрицу из векторов, линейной оболочкой которых она является и с помощью линейных преобразований поймем какие векторы являются линейно-независимыми:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ -8 & 1 & -10 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ей строке 1-ую, домноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -4 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Как видим, базисом L_1 являются \vec{a}_1 , \vec{a}_2 и тогда $\dim L_1 = 2$.

Теперь таким же образом найдем базис L_2 :

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 & 0 \\ 8 & -1 & 10 & -2 \\ 8 & 5 & 14 & 2 \\ -8 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 8 & 5 & 14 & 2 \\ -8 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Как видим, базисом L_2 являются \vec{b}_1 , \vec{b}_2 и тогда $\dim L_2 = 2$.

Теперь найдем базис $U = L_1 + L_2$, для чего выпишем базисные векторы для L_1 и L_2 в матрицу и с помощью линейных преобразований найдем линейно-независимые векторы:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 8 & 2 & 12 & 0 \\ 8 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом базисом U будут \vec{a}_1, \vec{a}_2 и $\dim U = 2$.

Вектор, который входит в пересечение должен раскладываться по базису каждого из подпространств, т.е. отсюда $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 = \beta_1 \cdot b_1 + \beta_2 \cdot b_2$.
 $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 - \beta_1 \cdot b_1 - \beta_2 \cdot b_2$ Тогда составим и решим с помощью метода Гаусса СЛУ для получившегося уравнения:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 & -8 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & -12 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 & -13 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ -6 & -2 & -12 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 & -13 \\ 0 & 12 & 0 & -12 \\ -6 & -2 & -12 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 & -13 \\ 0 & 12 & 0 & -12 \\ 0 & 88 & 0 & -88 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Разделим 2-ую строку на 12:

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 88 & 0 & -88 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на -88:

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 15 & 2 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -15:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\begin{cases} a_1 = -2b_1 - 2b_2 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

Составим ФСР, в которой будет два вектора, так как ранг матрицы равен двум, взяв значения $(1,0)$ и $(1, -1)$ для b_1, b_2 соответственно.

Получим:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что сумма размерностей суммы и пересечения подпространств равна сумме размерностей исходных подпространств $\Rightarrow \dim V = 2$.

Пусть базисом V будут \vec{z}_1, \vec{z}_2 . Найдем данные вектора, выразив через базис подпространства L_1 с помощью найденных в ФСР значений:

$$z_1 = -2 \cdot a_1 = (8, 2, 12, 0)$$

$$z_2 = -a_2 = (0, 3, 2, 2)$$

Ответ:

Базисом L_1 являются \vec{a}_1, \vec{a}_2 и тогда $\dim L_1 = 2$.

Базисом L_2 являются \vec{b}_1, \vec{b}_2 и тогда $\dim L_2 = 2$.

Базисом U будут \vec{a}_1, \vec{a}_2 и $\dim U = 2$.

Базисом V будут \vec{z}_1, \vec{z}_2 и $\dim V = 2$.

Задача 4

а) Для того, чтобы \mathbb{R}^4 разлагалось в прямую сумму данных подпространств необходимо, чтобы размерность их пересечения была равна нулю и чтобы размерность их суммы была равна четырём.

Сразу заметим, что размерность исходных подпространств равна 2 и 2, поскольку для первого:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -8 & 8 \\ -6 & 20 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ -6 & 20 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & -70 & -83 & 23 \end{pmatrix}$$

Для второй:

$$\begin{pmatrix} 9 & -10 & -13 & 0 \\ -12 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 9 & -10 & -13 & 0 \\ -3 & -8 & -17 & 1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & -34 & -64 & 3 \\ -3 & -8 & -17 & 1 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами 1-ую и 2-ую строку:

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & -17 & 1 \\ 0 & -34 & -64 & 3 \end{pmatrix}$$

Далее найдем размерность их суммы, записав в матрицу и найдя ее ранг:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -8 & 8 \\ -6 & 20 & 7 & 5 \\ 9 & -10 & -13 & 0 \\ -12 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -8 & 8 \\ -6 & 20 & 7 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 5 \\ -12 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -8 & 8 \\ -6 & 20 & 7 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 5 \\ 0 & -38 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ -6 & 20 & 7 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & 5 \\ 0 & -38 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 40 & -5 & 15 \\ 3 & 10 & -6 & 5 \\ 0 & -38 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 40 & -5 & 15 \\ 0 & 55 & 39 & -4 \\ 0 & -38 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

Разделим 2-ую строку на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 55 & 39 & -4 \\ 0 & -38 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 17 & 21 & -13 \\ 0 & -38 & -18 & -9 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 17 & 21 & -13 \\ 0 & -4 & 24 & -35 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & -4 & 24 & -35 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 4-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 47 & -67 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & -4 & 24 & -35 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 47 & -67 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & 0 & 492 & -647 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами 2-ую и 3-ую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & 0 & 47 & -67 \\ 0 & 0 & 492 & -647 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на -10:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & 0 & 47 & -67 \\ 0 & 0 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & 0 & 3 & -113 \\ 0 & 0 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на -7:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & 0 & 3 & -113 \\ 0 & 0 & 1 & 814 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & 0 & 0 & -2555 \\ 0 & 0 & 1 & 814 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами 3-ую и 4-ую строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & 117 & -153 \\ 0 & 0 & 1 & 814 \\ 0 & 0 & 0 & -2555 \end{pmatrix}$$

Как видим, размерность суммы равна четырем, а значит равна размерности пространств, которую мы хотим разложить в прямую сумму

Мы знаем, что сумма размерностей суммы и пересечения подпространств равна сумме размерностей исходных подпространств $\Rightarrow \dim V = 0$.

Из вышесказанного получаем, что $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

б) Мы уже показали в предыдущем задании, что вектора, которыми заданы подпространства образуют базис в \mathbb{R}^4 . Тогда нам достаточно просто разложить данный вектор по базису, составленному из векторов, задающих подпространства.

Тогда нам нужно решить линейное уравнение, заданное с помощью данных векторов(записанных в столбцы), а значения координат разлагаемого вектора будут столбцом свободных членов и полученные коэффициенты будут координатами вектора в базисе:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -6 & 9 & -12 & 4 \\ 5 & 20 & -10 & 2 & -5 \\ -8 & 7 & -13 & -4 & -21 \\ 8 & 5 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -6 & 9 & -12 & 4 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ -8 & 7 & -13 & -4 & -21 \\ 8 & 5 & 0 & 1 & 8 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -6 & 9 & -12 & 4 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ -8 & 7 & -13 & -4 & -21 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -5 & -6 & 9 & -12 & 4 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ -3 & 13 & -22 & 8 & -25 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 1-ой строке 3-ую, домноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -19 & 31 & -20 & 29 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ -3 & 13 & -22 & 8 & -25 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -19 & 31 & -20 & 29 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ -1 & 32 & -53 & 28 & -54 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 1-ой строке 3-ую, домноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ -1 & 32 & -53 & 28 & -54 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ 0 & 83 & -137 & 76 & -137 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на -6:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 14 & -1 & -10 & -1 \\ 0 & -1 & -131 & 136 & -131 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 13:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & -1 & -131 & 136 & -131 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -1835 & 1894 & -1835 \\ 0 & 12 & -13 & -3 & -13 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на -12:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -1835 & 1894 & -1835 \\ 0 & 0 & 20435 & -21099 & 20435 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 11:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -1835 & 1894 & -1835 \\ 0 & 0 & 250 & -265 & 250 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на 7:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -85 & 39 & -85 \\ 0 & 0 & 250 & -265 & 250 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -85 & 39 & -85 \\ 0 & 0 & 80 & -187 & 80 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -5 & -148 & -5 \\ 0 & 0 & 80 & -187 & 80 \end{array} \right)$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 16:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -5 & -148 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2555 & 0 \end{array} \right)$$

Разделим 4-ую строку на -2555:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -5 & -148 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на 148:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 1758 & -1704 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Добавим к 2-ой строке 4-ую, домноженную на -1758:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & -48 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 0 & -1704 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Добавим к 1-ой строке 4-ую, домноженную на 48:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & 0 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 0 & -1704 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Разделим 3-ую строку на -5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & 0 & 83 \\ 0 & 1 & -1704 & 0 & -1704 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 1704:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 84 & 0 & 83 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Добавим к 1-ой строке 3-ую, домноженную на -84:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -51 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на 51:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Домножим 1-ую строку на -1:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Откуда получаем, что:

$$x = u_1 + u_3.$$