

Индивидуальное домашнее задание 5

Шумилкин Андрей. Группа 165

Вариант 38.

Задача 1

Для квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(-3b+17) + x_2^2(7-b) + 4x_3^2 + 2x_1x_2(10-2b) + 2x_1x_3(3b-13) + 2x_2x_3(-7+b)$$

выясните при каких значениях параметра b она является положительно определённой, а при каких – отрицательно определённой.

Решение.

Составим матрицу квадратичной формы. Она будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была положительно опеределённой нужно чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны. Найдем данные миноры:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b+17) > 0 \Rightarrow b < \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) \\ (10-2b) & (7-b) \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{aligned} (-3b+17)(7-b) - (10-2b)^2 &= (-21b+119+3b^2-17b) - \\ &- (100-40b+4b^2) = -b^2+2b+19. \end{aligned}$$

$$-b^2+2b+19=0$$

$$D = 4 + 76 = 4\sqrt{5}$$

$$b = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{-2}$$

$$b_1 = 1 + 2\sqrt{5}, \quad b_2 = 1 - 2\sqrt{5}.$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_2 > 0$ при $1 - 2\sqrt{5} < b < 1 + 2\sqrt{5}$.

$$\begin{aligned}
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (-3+b) & 0 & (-3+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} (-6b+30) & (10-2b) & (3b-13) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & (3b-5) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ 4 & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \\
&= (3-b) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 4 & (-7+b) \end{vmatrix} = (3-b) \cdot (8b-40) = -8b^2 + 64b - 120 > 0
\end{aligned}$$

В данном определителе порядок преобразований следующий, при этом ни одно из данных элементарных преобразований не изменило определитель:

- Прибавили ко второй строке третью.
- Отняли от первого столбца третий.
- Прибавили к первой строке третью, домноженную на 2.
- Отняли от первой строки вторую, домноженную на 3.
- Отнимем от первого столбца второй, домноженный на 3.

$$\begin{aligned}
-8b^2 + 64b - 120 &= 0 \\
D &= 4096 - 3840 = 256 = 16^2 \\
b &= \frac{-64 \pm 16}{-16} \\
b_1 &= 3, \quad b_2 = 5.
\end{aligned}$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_3 > 0$ при $3 < b < 5$.

Заметим, что $\frac{17}{3} > 1 + 2\sqrt{5}$. Заметим, что интервалы для Δ_2 и Δ_3 входят в интервал для Δ_1 . При этом интервал для Δ_3 входит в интервал для Δ_2 .

Тогда форма является положительно определённой при $3 < b < 5$.

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определённой, нужно чтобы угловые миноры ётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны. Тогда:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b + 17) < 0 \Rightarrow b > \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 > 0 \text{ при } 1 - 2\sqrt{5} < b < 1 + 2\sqrt{5}.$$

$$\Delta_3 < 0 \text{ при } b < 3, b > 5$$

Интервал для Δ_2 не входит в интервал для Δ_1 . Значит нет b , при которых форма является отрицательно определённой.

Задача 2

Подпространство U евклидова пространства в \mathbb{R}^4 задано уравнением $3x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.

(а) Постройте в U ортонормированный базис.

(б) Для вектора $u = (0, 2, 1, 0)$ найдите его проекцию на U , его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U .

Решение.

(а) Запишем уравнение в виде $x_3 = 3x_1 + 5x_2 + 3x_4$ и найдем ФСР. Количество решений в ней будет равно 3.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	3	0
0	1	5	0
0	0	3	1

$$\Phi = (\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Где столбцы ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 образуют ФСР и заданное подпространство будет являться линейной оболочкой данных столбцов, поскольку они линейно-независимы (легко заметить, так как в трех строках в одном месте единица, а в остальных нули).

Для наглядности запишем векторы, которые образуют подпространство:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= (1 \ 0 \ 3 \ 0) \\ \vec{x}_2 &= (0 \ 1 \ 5 \ 0) \\ \vec{x}_3 &= (0 \ 0 \ 3 \ 1)\end{aligned}$$

Теперь с помощью метода Грама-Шмидта ортогонализируем и нормируем данные векторы.

(\vec{u}, \vec{v}) – скалярное произведение векторов.

$$\begin{aligned}\vec{b}_1 &= (1 \ 0 \ 3 \ 0) \\ \vec{b}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{(\vec{x}_2, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \cdot \vec{b}_1 = (0 \ 1 \ 5 \ 0) - \frac{15}{10} \cdot (1 \ 0 \ 3 \ 0) = (-1,5 \ 1 \ 0,5 \ 0) \\ \vec{b}_3 &= \vec{x}_3 - \frac{(\vec{x}_3, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \cdot \vec{b}_1 - \frac{(\vec{x}_3, \vec{b}_2)}{(\vec{b}_2, \vec{b}_2)} \cdot \vec{b}_2 = (0 \ 0 \ 3 \ 1) - \frac{9}{10} (1 \ 0 \ 3 \ 0) - \\ &\quad - \frac{1,5}{3,5} (-1,5 \ 1 \ 0,5 \ 0) = \left(-\frac{3,15}{3,5} \ 0 \ \frac{1,05}{3,5} \ 1\right) - \left(-\frac{2,25}{3,5} \ \frac{1,5}{3,5} \ \frac{0,75}{3,5} \ 0\right) = \\ &= \frac{1}{3,5} (-0,9 \ -1,5 \ 0,3 \ 3,5)\end{aligned}$$

Нормируем их по формуле

$$\vec{e}_j = \frac{\vec{b}_j}{\|\vec{b}_j\|}, \text{ где } \|\vec{b}_j\| = \sqrt{(b_j, b_j)}.$$

$$\begin{aligned}e_1 &= \frac{\vec{b}_1}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \ 0 \ \frac{3}{\sqrt{10}} \ 0\right) \\ e_2 &= \frac{\vec{b}_2}{\sqrt{3,5}} = \left(-\frac{1,5}{\sqrt{3,5}} \ \frac{1}{\sqrt{3,5}} \ \frac{0,5}{\sqrt{3,5}} \ 0\right) = \left(-\frac{3}{\sqrt{14}} \ \sqrt{\frac{2}{7}} \ \frac{1}{\sqrt{14}} \ 0\right) \\ e_3 &= \frac{\vec{b}_3}{\sqrt{\frac{44}{35}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{44}{35}} \cdot 3,5} (-0,9 \ -1,5 \ 0,3 \ 3,5) = \frac{1}{\sqrt{15,4}} (-0,9 \ -1,5 \ 0,3 \ 3,5)\end{aligned}$$

(e_1, e_2, e_3) – искомый ортонормированный базис.

(б) Ортонормированный базис U

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix} \\ e_3 &= \frac{1}{\sqrt{15,4}} \begin{pmatrix} -0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

вектор $u = (0, 2, 1, 0)$.

Учитывая, что у мы нашли ортонормированный базис U ортогональная проекция будет иметь вид:

$$pr_U u = \sum_{i=1}^3 (u, e_i) e_i$$

$$\begin{aligned} pr_U u &= \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{2,7}{15,4} \begin{pmatrix} -0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{15}{14} & \frac{5}{7} & \frac{5}{14} & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{2,43}{15,4} & \frac{4,05}{15,4} & -\frac{0,81}{15,4} & -\frac{9,45}{15,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{44} & \frac{43}{44} & \frac{53}{44} & -\frac{27}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -27 & 43 & 53 & -27 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Тогда найдем ортогональную составляющую:

$$ort_U u = \begin{pmatrix} \frac{27}{44} & \frac{45}{44} & -\frac{9}{44} & \frac{27}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 & 27 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $(pr_U u, ort_U u) = 0$, значит они найдены правильно.

Расстояние от \vec{u} до подпространства U равно $|ort_U u| = \frac{9}{\sqrt{44}}$.

Задача 3

Составьте уравнение прямой в \mathbb{R}^3 , параллельной плоскости $-2x + 4y + 2z = 0$, проходящей через точку $(2, 3, 2)$ и пересекающей прямую $x = 2t + 1, y = 4t - 2, z = 3t + 1$.

Решение.

Заметим, что искомая прямая будет лежать в некой плоскости, которая должна быть параллельна плоскости, заданной уравнением $-2x + 4y + 2z = 0$, и при этом проходящей через точку $(2, 3, 2)$.

Тогда данная плоскость будет задана уравнением $-2(x-2) + 3(y-3) + 2(z-2) = 0$.

Теперь рассмотрим прямую:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 4t - 2 \\ z = 3t + 1 \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3y - 4z = -10 \end{cases}$$

Тогда найдем точку пересечения заданной прямой и плоскости и нам останется просто записать уравнение прямой, проходящей через две точки. Из уравнения плоскости: $-2x + 4 + 3y - 9 + 2z - 4 = 0 \Rightarrow -2x + 3y + 2z = 9$.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3y - 4z = -10 \\ -2x + 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

Решим данную систему с помощью метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -10 \\ -2 & 3 & 2 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 6 & 6 & 39 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & 59 \end{array} \right)$$

$$z = \frac{59}{14}.$$

$$y = \frac{\frac{59 \cdot 4}{14} - 10}{3} = \frac{16}{7}.$$

$$x = \frac{\frac{16}{7} + 4}{2} = \frac{22}{7}.$$

Теперь у нас есть две точки, через которые проходит прямая, уравнение которой мы ищем: $A = (2, 3, 2)$ и $B = (\frac{22}{7}, \frac{16}{7}, \frac{59}{14})$.

Направляющим вектором данной прямой будет являться $\overrightarrow{AB} = (\frac{8}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{31}{14})$, тогда параметрическое уравнение прямой будет иметь вид:

$$\begin{cases} x = \frac{8}{7}t + 2 \\ y = -\frac{5}{7}t + 3 \\ z = \frac{31}{14}t + 2 \end{cases}$$

Задача 4

Дан куб $ABCD A' B' C' D'$ со стороной 3. Точка F – середина ребра BB' , а точка E лежит на ребре BB' , причём $BE : EB' = 5 : 6$. Найдите угол и расстояние между прямыми AE и $D'F$.

Решение.

Расположим наш куб в декартовой системе координат следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= (0, 0, 0) \\ B &= (0, 3, 0) \\ C &= (3, 3, 0) \\ D &= (3, 0, 0) \\ A' &= (0, 0, 3) \\ B' &= (0, 3, 3) \\ C' &= (3, 3, 3) \\ D' &= (3, 0, 3) \end{aligned}$$

Тогда точка F будет иметь координаты $(0, 3, 1.5)$, а точка $E - (0, 3, \frac{18}{11})$.

Найдем уравнение прямых AE и DF :

Точка на прямой $AE - A(0, 0, 0)$ и направляющий вектор $11\overrightarrow{AE} = (0, 33, 18)$, значит ее уравнение:

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{33} = \frac{z}{18}$$

Точка на прямой $D'F - F(0, 3, 1.5)$ и направляющий вектор $\overrightarrow{D'F} = (-3, 3, -1.5)$, значит ее уравнение:

$$\frac{x}{-3} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1.5}{-1.5}$$

Найдем угол между данными прямыми по формуле:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{(11\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{D'F})}{\sqrt{|11\overrightarrow{AE}|} \cdot \sqrt{|\overrightarrow{D'F}|}} = \frac{72}{\sqrt{1413} \cdot \sqrt{20.25}} = \frac{16}{\sqrt{1413}}. \\ \phi &= \arccos \left(\frac{16}{\sqrt{1413}} \right). \end{aligned}$$