Индивидульное домашнее задание 4
Шумилкин Андрей. Группа 163
Вариант 44.

Задача 1

Базис $\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$ и базис $\mathbb{e}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$.

$e_1 = (1, 2, 0)$, $e_2 = (2, -1, 1)$, $e_3 = (0, 1, 2)$.
$e'_1 = (-2, 3, 3)$, $e'_2 = (4, -1, 4)$, $e'_3 = (1, -4, -1)$.

$\vec{v}$ имеет в базисе $\mathbb{e}$ координаты $(1, 4, 2)$.

а) Матрица перехода C – это такая матрица, что $(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot C$ по определению, причем здесь запись в скобках значит, это матрица в которой указанные базисные векторы будут столбцами в указанном порядке
Тогда $C = (e_1, e_2, e_3)^{-1} \cdot (e'_1, e'_2, e'_3)$.
Решим данное матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & | & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & | & 7 & -9 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & | & 19 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & | & 19 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 11 & | & 22 & 11 & -11 \end{pmatrix}$$

Домножим 2-ую строку на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 22 & 11 & -11 \end{array}\right)$$

Разделим 3-ую строку на 11:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -9 & -19 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 9:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Тогда матрица перехода от базиса $\mathbb{e}$ к базису $\mathbb{e}'$:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

б) Как мы знаем, матрица перехода, умноженная(матрица перехода слева) на столбец, составленный из координат вектора в базисе $\mathbb{e}'$, даст столбец координат данного вектора в базисе $\mathbb{e}$.
Тогда найти координаты $\vec{v}$ в базисе $\mathbb{e}'$ мы можем следующим образом(в данном месте оговорим, что v – вектор, потому что стрелка с чертой после нее выглядит не очень красиво, сливается с ней):

$$(v')^T = C^{-1} \cdot (v)^T$$

Найдем C^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Добавим к 1-ой строке 3-ую, домноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Разделим 2-ую строку на 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на 2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -0.6 & -0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -0.6 & -0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

После умножим в указанном нами порядке:

$$\begin{pmatrix} -0.6 & -0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 2.2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Получаем, что координаты данного вектора в базисе $\mathbb{e}'$ равны $(-0.6, 2.2, -1)$.

Задача 2

$a_1 = (1,0,0,0,0)$, $a_2 = (0,1,0,0,0)$, $a_3 = (0,0,5,0,0)$, $a_4 = (-3,0,0,1,0)$, $a_5 = (-2,0,0,0,1)$.

$b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (0,1,-2)$, $b_3 = (10,-10,20)$, $b_4 = (-6,0,0)$, $b_5 = (-1,-1,2)$.

а) Мы знаем, что если V, W – векторные пространства над полем F и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис V, то для всякого набора векторов F и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ существует единственное линейное отображение $\varphi : V \to W$ такое, что $\varphi(e_1) = f_1,\ \varphi(e_2) = f_2, \ldots,\ \varphi(e_n) = f_n$.
Откуда следует, что, если мы докажем, что $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ является базисом в $\mathbb{R}^5$, то мы докажем, что искомое отображение существует и единственно.

Для этого просто проверим, что ранг матрицы, составленной из данных векторов равен пяти:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 1-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Разделим 3-ую строку на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Да, ранг равен пяти, так что искомое линейное отображение существует и единственно.

б) Из определения ядра линейного отображения, которое является множеством всех векторов из $\mathbb{R}^5$, которые данное линейное отображение переводит в нулевой вектор, и из того, что матрица линейного отображения в базисах $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ и базисе $\mathbb{R}^3$ равна матрице, составленной из векторов $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, записанных по столбцам в указанном порядке, понятно, что ядро будет равно пространству решений ОСЛУ, матрица которого будет равна вышеупомянутой матрице. Тогда решим данную

ОСЛУ и найдем ее ФСР, которая и будет базисом ядра:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 20 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получаем:

$$\begin{cases} x_1 = -10x_3 + 6x_4 + x_5 \\ x_2 = 10x_3 + x_5 \end{cases}$$

Составим ФСР, в которой будет три вектора, а значит и размерность искомого базиса будет равна трем, так как кол-во свободных переменных – три, взяв значения $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$ для x_3, x_4, x_5 соответственно.

Получим три следующих вектора, составляющих базис ядра:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Но они записаны в базисе $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, поэтому переведем их в стандартный базис $\mathbb{R}^5$.

$$u_1 = -10a_1 + 10a_2 + a_3 = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_2 = 6a_1 + a_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$u_3 = a_1 + a_2 + a_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Теперь найдем базис образа. Образ линейного отображения в данном случае совпадает с пространством, порожденным векторами-столбцами матрицы линейного отображения(которую мы уже определили выше), поскольку $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ – базис в $\mathbb{R}^5$.
Тогда нам нужно транспонированную матрицу линейного отображения привести к ступенчатому виду и ее ненулевые строки и будут являться базисом.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 10 & -10 & 20 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 10 & -8 & 16 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на -10:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 16 \\ -6 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 1-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 8:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Добавим к 5-ой строке 2-ую, домноженную на 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получается, что векторы (b_1, b_2) будут образовывать базис образа линейного отображения и они уже записаны в стандартном базисе $\mathbb{R}^3$. Заметим также, что его размерность будет равна двум, а размерность базиса ядра – трем, что соответствует теореме о том, что сумма размерностей двух данных базисов будет равна размерности базиса пространства из которого строится отображение, т.е. $\mathbb{R}^5$.

Задача 3

Задача 4

$Q(x_1, x_2, x_3) = 4 \cdot x_1^2 - 3 \cdot x_3^2 - 4 \cdot x_1 x_2 + 12 \cdot x_1 x_3 + 2 \cdot x_2 x_3 = \left[4x_1^2 + 4x_1(3x_3 - x_2) + (3x_3 - x_2)^2\right] - (3x_3 - x_2)^2 - 3 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_2 x_3$.

$x = S_1 \cdot y$.

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & -1.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $y_1 = 2x_1 + 3x_3 - x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$
$Q = y_1^2 - 9y_3^2 + 6y_2y_3 - y_2^2 - 3 \cdot y_3^2 + 2 \cdot y_2y_3 = y_1^2 - 12y_3^2 + 8y_2y_3 - y_2^2 = y_1^2 - \left[y_2^2 - 8y_2y_3 + 16y_3^2\right] + 4y_3^2$.

$y = S_2 \cdot z$.

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пусть $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - 4y_3$, $z_3 = y_3$.
$Q = z_1^2 - z_2^2 + 4z_3^2$.

Матрица данной квадратичной формы – это

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Матрица преобразований S равна $S_1 \cdot S_2$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда проверим, что найденная матрица канонической формы, которая получается равна diag(1,-1,4) также равна равна $S^T \cdot A \cdot S$. Это действительно так. (Проверил с помощью программы, код приложил к письму), а значит S и есть матрица искомой замены.