Индивидульное домашнее задание 5
Шумилкин Андрей. Группа 165
Вариант 38.

Задача 1

Для квадратичной формы

$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(-3b+17)+x_2^2(7-b)+4x_3^2+2x_1x_2(10-2b)+2x_1x_3(3b-13)+2x_2x_3(-7+b)$

выясните при каких значениях параметра b она является положительно определённой, а при каких – отрицательно определённой.

Составим матрицу квадратичной формы. Она будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была положительно опеределённой нужно чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны. Найдем данные миноры:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b+17) > 0 \Rightarrow b < \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) \\ (10-2b) & (7-b) \end{vmatrix} > 0$$

$$(-3b+17)(7-b) - (10-2b)^2 = (-21b+119+3b^2-17b) - \\ -(100-40b+4b^2) = -b^2+2b+19.$$

$$-b^2+2b+19 = 0$$
$$D = 4+76 = 4\sqrt{5}$$
$$b = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{-2}$$
$$b_1 = 1+2\sqrt{5},\ b_2 = 1-2\sqrt{5}.$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_2 > 0$ при $1-2\sqrt{5} < b < 1+2\sqrt{5}$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (-3+b) & 0 & (-3+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-6b+30) & (10-2b) & (3b-13) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & (3b-5) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ 4 & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-b) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 4 & (-7+b) \end{vmatrix} = (3-b) \cdot (8b-40) = -8b^2 + 64b - 120 > 0$$

В данном определители порядок преобразований следующий, при этом ни одно из данных элементарных преобразований не изменило определитель:

- Прибавили ко второй строке третью.
- Отняли от первого столбца третий.
- Прибавили к первой строке третью, домноженную на 2.
- Отняли от первой строки вторую, домноженную на 3.
- Отнимем от первого столбца второй, домноженый на 3.

$$\begin{aligned} &-8b^2 + 64b - 120 = 0 \\ &D = 4096 - 3840 = 256 = 16^2 \\ &b = \frac{-64 \pm 16}{-16} \\ &b_1 = 3, \ b_2 = 5. \end{aligned}$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_3 > 0$ при $3 < b < 5$.

Заметим, что $\frac{17}{3} > 1 + 2\sqrt{5}$. Заметим, что интервалы для Δ_2 и Δ_3 входят в интервал для Δ_1. При этом интервал для Δ_3 входит в интервал для Δ_2.

Тогда форма является положительно определённой при $3 < b < 5$.

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно опеределённой, нужно чтобы угловые миноры ётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны. Тогда:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b + 17) < 0 \Rightarrow b > \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 > 0 \text{ при } 1 - 2\sqrt{5} < b < 1 + 2\sqrt{5}.$$

$$\Delta_3 < 0 \text{ при } b < 3, b > 5$$

Интервал для Δ_2 не входит в интервал для Δ_1. Значит нет b, при которых форма является отрицательно определённой.