Лист 1

Задача 1

(1)
Доказать, что $[A, B] = -[B, A]\ \forall A, B \in L$;
$[A, B] = AB - BA$.
$[B, A] = BA - AB$.
$-[B, A] = AB - BA = [A, B]$.
(2)
Доказать, что $[A, [B, C]] = [[A, B], C] + [B, [A, C]]$.

$[A, [B, C]] = [A, BC - CB] = ABC - ACB - BCA + CBA$.

$[[A, B], C] + [B, [A, C]] = [AB - BA, C] + [B, AC - CA] = (ABC - BAC - CAB + CBA) + (BAC - BCA - ACB + CAB) = ABC + CBA - BCA - ACB = [A, [B, C]]$.

Задача 2

Множество кососиметрических матриц непусто и входит в M_n. Тогда докажем, что множество кососиметрических матриц удовлетворяет трем условиям:
(1) $A + B \in L\ \forall A, B \in L$.
(2) $\lambda A \in L\ \forall A \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $[A, B] \in L\ \forall A, B \in L$.
Доказательства:
(1)
Пусть $A + B = C$.
В кососиметрических матрицах $a_{ij} = -a_{ji}$, тогда и $b_{ij} = -b_{ji}$.
Тогда:
$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = -a_{ji} - b_{ji}$.
$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = -c_{ij}$.
(2)
$a_{ij} = -a_{ji}$.
$\lambda \cdot a_{ij} = \lambda \cdot -a_{ji}$
Т.е. $\lambda \cdot a_{ij} = -\lambda \cdot a_{ji}$, а значит матрица домноженая на λ тоже кососиметричная и тоже принадлежит L.

(3)
$[A, B] = AB - BA$. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$ По определению $A^T = -A, B^T = -B$.
Тогда $BA = (-B)^T \cdot (-A)^T = ((-A) \cdot (-B))^T = (AB)^T$
Значит $[A, B] = AB - (AB)^T = E$.
Пусть $AB = C$ и $(AB)^T = D$.
Тогда $c_{ij} = d_{ji}$.
$e_{ij} = c_{ij} - d_{ij} = c_{ij} - c_{ji}$.
$e_{ji} = c_{ji} - d_{ji} = c_{ji} - c_{ij} = -e_{ji}$.

Задача 5

Докажем три свойства:
(1) $A + B \in I\ \forall A, B \in I$.
(2) $\lambda A \in I\ \forall A \in I$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $[A, B] \in I\ \forall A \in I, B \in L$.
(1)
Если A, B принадлежат центру L, то и A + B также принадлежат центру, а значит принадлежат и идеалу, поскольку $\forall X \in L \Rightarrow AX = 0, BX = 0 \Rightarrow (A + B)X = 0$.
(2)
Если A принадлежат центру L, то и λA также принадлежит центру, а значит принадлежит и идеалу, поскольку $\forall X \in L \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow \lambda AX = 0$.
(3)
Т.к. центр L составляют матрицы, произведение которых с любой другой матрицей из L равно нулю, то $AB = 0$, а значит принадлежит идеалу, т.к. $0 \in I$.

Задача 5

Докажем три свойства:
(1) $A + B \in I \; \forall A, B \in I$.
(2) $\lambda A \in I \; \forall A \in I$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $[A, B] \in I \; \forall A \in L, B \in I$.
(1)
Согласно определению коммутанта A представима в виде суммы конечного числа коммутаторов матриц из L, назовем эту сумму S_1. Точно так же B представима в виде суммы конечного числа коммутаторов матриц из L, назовем эту сумму S_2. Тогда A + B = $S_1 + S_2$ и, так как сумма двух конечнох чисел также конечна и все коммутаторы в $S1$ и $S2$ – это коммутаторы матриц из L, то и A + B также будет являть собой сумму конечного числа коммутаторов матриц из L, а значит входить в комутант данного L $\Rightarrow$ входить и в идеал.
(2)
Сумма, умноженная на некоторое $\lambda \in \mathbb{R}$ конечна, а также может быть представленна в виде суммы членов, составляющих первоначальную сумму. Достаточно просто взять каждый член λ раз. Значит новая сумма представима в виде конечного числа коммутаторов матриц из L, а значит входит в комутант данного L $\Rightarrow$ входит и в идеал.
(3)
$[S_1, S_2] = S_1 \cdot S_2 - S_2 \cdot S_1$.