Линейная Алгебра и Геометрия
Определения

28 ноября 2016 г.

1. **Совместные и несовместные СЛУ.**

   Совместная СЛУ – это СЛУ, которая имеет хотя бы одно решение.
   Несовместная СЛУ – не имеет решений.

2. **Эквивалентные СЛУ.**

   Это СЛУ, которые имеют одинакавое множества решений.

3. **Расширенная матрица системы линейных уравнений.**

   Матрица вида $(A|\vec{b})$. Где A – матрица коэффициентов, $\vec{b}$ – вектор свободных членов.

4. **Элементарные преобразования матриц.** –

   Это такие преобразования в результате которых не меняется эквивалентность матриц, т.е. множество решений СЛУ, которому соответствует данная матрица.

   (a) Прибавление к одной строке матрицы другой строки, домноженной на некоторый коэффициент.

   (b) Перестановка двух строк матрицы.

   (c) Умножение строки матрицы на некоторый коэффициент.

5. **Ступенчатый вид матрицы.**

   (a) Номера ведущих элементов(первый ненулевой) строк строго возрастают.

   (b) Все нулевые строки стоят в конце.

6. **Улучшенный ступенчатый вид матрицы.**

   (a) Имеет ступенчатый вид.

   (b) Все ведущие элементы строк равны 1 и во всех столбцах, содержащих ведущие элементы, все остальные элементы равны нулю

7. **Теорема о каноническом виде, к которому можно привести матрицу при помощи элементарных преобразований строк.**

   Теорема. *Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к каноническому виду.*

8. **Общее решение совместной системы уравнений.**

   Преамбула: Когда в матрице, соответствующей СЛУ ненулевых строк меньше, чем неизвестных.
   Тогда назовем главными те неизвестные, коэффициенты при которых являются лидерами строк, а остальные назовем свободными. Отбросив нулевые строки и перенеся члены со свободными неизвестными в правую часть, мы снова получим строго треугольную систему. Решая ее как в предыдущем случае, находим выражение главных неизвестных через свободные. Подставляя в свободные любые значения, получаем бесконечное количество решений — система будет неопределенной.
   Суть:
   Общее решение совместной СЛУ – это множество всех решений этой системы.

9. **Сколько может быть решений у СЛУ с действительными коэффициентами.**

   (a) Если система *несовместна*, то она не имеет решений.

   (b) Если система *совместна и определена*, то она имеет одно решение.

   (c) Если система *совместна и неопределена*, то она имеет бесконечно много решений.

10. **Однородная СЛУ. Что можно сказать про ее множество решений?** –

    это СЛУ вида $A\vec{x} = 0$, т.е. СЛУ у которой все правые части уравнений равны нулю.
    О ней можно сказать то, что она всегда совместна, т.к. всегда имеет как минимум одно решение: $\vec{x} = 0$.

    Теорема. *Пусть c — какое-то решение неоднородной системы, а L – множество всех решений связанной с ней однородной системы. Тогда $c+L$ есть множество всех решений неоднородной системы.*

11. **Свойство однородной СЛУ, у которой число неизвестных больше, чем число уравнений.**

    У такой СЛУ при приведении к ступенчатому виду будет хотя бы одна свободная неизвестная x_i. Значит СЛУ имеет бесконечно много решений, среди которых есть ненулевые.

12. **Сумма двух матриц и умножение матрицы на скаляр.**

    Замечание. *Говоря «матрица A размера $m \times n$» мы подразумеваем, что в матрице m строк и n столбцов. Это можно обозначить следующим образом: $A \in Mat_{m\times n}$.*

    Суммой двух матриц A и B размера $m \times n$ называется такая матрица C размера $m \times n$, в которой каждый элемент равен сумме соответствующих элементов матриц A и B, т.е.:

    $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

    Замечание. *Сложение двух матриц определено только в том случае, когда их размеры одинаковы*

    Свойства сложения матриц:

    (a) $\forall A, B, C \in Mat_{m\times n}$ $(A + B) + C = A + (B + C)$ – ассоциативность.

    (b) $\forall A, B \in Mat_{m\times n}$ $A + B = B + A$ – коммутативность.

    (c) $\exists\ 0 \in Mat_{m\times n}\ : \forall A \in Mat_{m\times n}$ $A + 0 = 0 + A = A$ – сложение с нулевой матрицей(существование нейтрального элемента по сложению)

    (d) $\forall A \in Mat_{m\times n}$ $\exists!\ (-A) = (-a_{ij})\ : A + (-A) = (-A) + A = 0$ – существование противоположной матрицы.

$\exists!$ – существует и притом только один.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на ***скаляр*** λ называется такая матрица B размера $m \times n$, в которой каждый элемент равен произведению соответствующего элемента матрицы A и скаляра λ, т.е.:

$$b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Свойства умножения матриц на скаляр:

(a) $\forall A \in Mat_{m\times n}$ $1 \cdot A = A$ – умножение на единичный скаляр.(существование нейтрального элемента по умножению)

(b) $\forall$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in Mat_{m\times n}$ $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$ – ассоциативность.

(c) $\forall$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, A \in Mat_{m\times n}$ $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ – дистрибутивность относительно скаляров.

(d) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A, B \in Mat_{m\times n}$ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ –дистрибутивность относительно матриц.

13. **Транспонированная матрица.** –

Это матрица, над которой проведено преобразование, при котором стобцы становятся строками и наоборот, т.е.:

$$(a_{ij})^T = a_{ji}$$

Обозначается A^T.
Свойства транспонирования:

(a) $(\lambda A)^T = \lambda(A)^T$ – связь с умножением на скаляр.

(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$ – связь со сложением матриц.

(c) $(AB)^T = B^T A^T$

14. **Произведение двух матриц.**

Произведением двух матриц $A \in Mat_{m\times l}$ и $B \in Mat_{l\times n}$ называется такая матрица $C \in Mat_{m\times n}$ размера $m \times n$, в которой каждый элемент $(_{ij})$ равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на элементы j-ый столбец матрицы B, т.е.:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{il}bnl.$$

Свойства произведения матриц:

(a) Некоммутативно в общем случае.

(b) $A(B + C) = AB + AC$ – левая дистрибутивность.

(c) $(A + B)C = AC + BC$ – правая дистрибутивность.

(d) $\lambda(A + B) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

(e) $A(BC) = A(BC)$ – ассоциативность.

15. **Диагональная матрица.** –

Квадратная матрица, элементы которой вне главной диагонали равны нулю. Обозначается как $diag(a_{11}, a_{22}, a33, a44 \ldots a_{nn})$.

16. **Единичная матрица, ее свойства.** –

    квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единицы, а остальные нулю, т.е. $E_n = diag(1{,}1{,}1\dots 1)$.

    Основное свойство:
    $\forall A \in Mat_{n\times n}\ AE = EA = A$.

    Еще:

    (a) $\forall A \in Mat_{n\times n}\ A^0 = E$.

    (b) $\forall A \in Mat_{n\times n}\ AA^1 = E$.

    (c) $det\ E = 1$

17. **След квадратной матрицы A.** –

    Это сумма всех стоящих на главной диагонали матрицы A элементов.
    Обозначается $tr\ A$ (от английского слова «trace» – след). Свойства следа:

    (a) $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$.

    (b) $tr(A+B)^T = trA + trB$

    (c) $tr(A)^T = trA$

18. **След произведения двух матриц.**
    $\forall A \in Mat_{m\times n}, B \in Mat_{n\times m} trAB = trBA$.

    Доказательство. Пусть $AB = X, BA = Y$, тогда:

    $$trX = \sum_{k=1}^{m} x_{kk} = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}b_{lk}\right) = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{lk}a_{kl}\right) = \sum_{l=1}^{n} y_{ll} = trY.$$

    □

19. **Перестановки и подстановки элементов множества {1, 2, … n}.**

    Перестановкой из n элементов множества {1, 2, … n} называется всякий упорядоченный набор, в котором каждый элемент присутствует ровно один раз.
    Подстановкой – биективное отображение из множества {1, 2, … n} в него же. Обозначение:

    $$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \dots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}$$

    Говорят, что x_1 переходит в $sigma(x_1)$, x_2 переходит в $sigma(x_2)$ и т.д.

20. **Инверсия в подстановке. Знак подстановки. Чётные и нечётные подстановки.**

    Инверсия – это такая пара индексов i и j, что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.
    Пусть число инверсий в подстановке $\sigma = N(\sigma)$. Тогда ***знак подстановки*** $(-1)^{N(\sigma)}$.
    Подстановка ***чётна***, если ее знак равен 1 и нечетна иначе.

21. **Произведение двух подстановок.** – это новая подстановка степени n, получившаяся в результате последовательного(справа налево!) применения двух перестановок степени n. Свойства произведения подстановок:

    (a) $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3 = \sigma_1(\sigma_2\sigma_3)$ – ассоциативность.

    (b) Подстановки степени больше двух некоммутативны.

    (c) $det\ E = 1$

22. **Тождественная подстановка, обратная подстановка.**

    Тождественная подстановка – переводит элементы сами в себя, обозначается id. Т.е. $id(x) = x, \forall x$.

    Свойство:
    $\forall \ \sigma \quad id \cdot \sigma = \sigma \cdot id = id$.

    Обратная подстановка – такая подстановка σ^{-1}, что $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = id$.
    Свойство:
    $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$. – Знак обратной подстановки равен знаку исходной.

23. **Транспозиция, элементарная транспозиция.**

    Транспозиция – это такая подстановка, которая меняет ровно два элемента местами.
    Элементарня транспозиция – это такая транспозиция, которая меняет местами два соседних элемента.

24. **Поведение знака подстановки при умножении справа на транспозицию. ??Знак транспозиции??.**

    Пусть τ – транспозиция, тогда $sgn(\sigma\tau) = -sgn(\sigma)$.

25. **Теорема о знаке произведения двух подстановок.**

    Теорема. *Знак произведения подстановок есть произведение знаков подстановок.* $\mathrm{sgn}(\sigma\rho) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\rho)$.