Индивидульное домашнее задание 5
Шумилкин Андрей. Группа 165
Вариант 38.

Задача 1

Для квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(-3b+17)+x_2^2(7-b)+4x_3^2+2x_1x_2(10-2b)+2x_1x_3(3b-13)+2x_2x_3(-7+b)$$

выясните при каких значениях параметра b она является положительно определённой, а при каких – отрицательно определённой.

Решение.
Составим матрицу квадратичной формы. Она будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была положительно опеределённой нужно чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны. Найдем данные миноры:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b+17) > 0 \Rightarrow b < \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) \\ (10-2b) & (7-b) \end{vmatrix} > 0$$

$$(-3b+17)(7-b) - (10-2b)^2 = (-21b+119+3b^2-17b)-$$
$$-(100-40b+4b^2) = -b^2+2b+19.$$

$$-b^2+2b+19 = 0$$
$$D = 4+76 = 4\sqrt{5}$$
$$b = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{-2}$$
$$b_1 = 1+2\sqrt{5},\ b_2 = 1-2\sqrt{5}.$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_2 > 0$ при $1-2\sqrt{5} < b < 1+2\sqrt{5}$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (-3+b) & 0 & (-3+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-6b+30) & (10-2b) & (3b-13) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & (3b-5) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ 4 & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-b) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 4 & (-7+b) \end{vmatrix} = (3-b)\cdot(8b-40) = -8b^2+64b-120 > 0$$

В данном определители порядок преобразований следующий, при этом ни одно из данных элементарных преобразований не изменило определитель:

- Прибавили ко второй строке третью.
- Отняли от первого столбца третий.
- Прибавили к первой строке третью, домноженную на 2.
- Отняли от первой строки вторую, домноженную на 3.
- Отнимем от первого столбца второй, домноженый на 3.

$$\begin{aligned} &-8b^2+64b-120 = 0 \\ &D = 4096-3840 = 256 = 16^2 \\ &b = \frac{-64 \pm 16}{-16} \\ &b_1 = 3,\ b_2 = 5. \end{aligned}$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_3 > 0$ при $3 < b < 5$.

Заметим, что $\frac{17}{3} > 1+2\sqrt{5}$. Заметим, что интервалы для Δ_2 и Δ_3 входят в интервал для Δ_1. При этом интервал для Δ_3 входит в интервал для Δ_2.

Тогда форма является положительно определённой при $3 < b < 5$.

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно опеределённой, нужно чтобы угловые миноры ётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны. Тогда:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b + 17) < 0 \Rightarrow b > \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 > 0 \text{ при } 1 - 2\sqrt{5} < b < 1 + 2\sqrt{5}.$$

$$\Delta_3 < 0 \text{ при } b < 3, b > 5$$

Интервал для Δ_2 не входит в интервал для Δ_1. Значит нет b, при которых форма является отрицательно определённой.

Задача 2

Подпространство U евклидова пространства в $\mathbb{R}^4$ задано уравнением $3x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.
(а) Постройте в U ортонормированный базис.
(б) Для вектора $u = (0, 2, 1, 0)$ найдите его проекцию на U, его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

Решение.
(а) Запишем уравнение в виде $x_3 = 3x_1 + 5x_2 + 3x_4$ и найдем ФСР. Количество решений в ней будет равно 3.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	3	0
0	1	5	0
0	0	3	1

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Где столбцы ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 образуют ФСР и заданное подпространоство будет являться линейной оболочкой данных столбцов, поскольку они линейно-независимы(легко заметить, так как в трех строках в одном месте единица, а в остальных нули).

Для наглядности запишем векторы, которые образуют подпространство:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Теперь с помощью метода Грама-Шмидта ортогонализируем и нормируем данные векторы.
$(\vec{u}, \vec{v})$ – скалярное произведение векторов.

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{x}_2 - \frac{(\vec{x}_2, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 0\end{pmatrix} - \frac{15}{10} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1,5 & 1 & 0,5 & 0\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{x}_3 - \frac{(\vec{x}_3, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \cdot \vec{b}_1 - \frac{(\vec{x}_3, \vec{b}_2)}{(\vec{b}_2, \vec{b}_2)} \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \frac{9}{10} \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} -$$
$$- \frac{1,5}{3,5} \begin{pmatrix}-1,5 & 1 & 0,5 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3,15}{3,5} & 0 & \frac{1,05}{3,5} & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\frac{2,25}{3,5} & \frac{1,5}{3,5} & \frac{0,75}{3,5} & 0\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3,5} \begin{pmatrix}-0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5\end{pmatrix}$$

Нормируем их по формуле

$$\vec{e}_j = \frac{\vec{b}_j}{||\vec{b}_j||}, \text{ где} ||\vec{b}_j|| = \sqrt{(b_j, b_j)}.$$

$$e_1 = \frac{\vec{b}_1}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0\end{pmatrix}$$
$$e_2 = \frac{\vec{b}_2}{\sqrt{3,5}} = \begin{pmatrix}-\frac{1,5}{\sqrt{3,5}} & \frac{1}{\sqrt{3,5}} & \frac{0,5}{\sqrt{3,5}} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0\end{pmatrix}$$
$$e_3 = \frac{\vec{b}_3}{\sqrt{\frac{44}{35}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{44}{35}} \cdot 3,5} \begin{pmatrix}-0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15,4}} \begin{pmatrix}-0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5\end{pmatrix}$$

(e_1, e_2, e_3) – искомый ортонормированный базис.

(б) Ортонормированный базис U

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$$
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{15,4}} \begin{pmatrix} -0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix}$$

вектор $u = (0, 2, 1, 0)$.

Учитывая, что у мы нашли ортонормированный базис U ортогональная проекция будет иметь вид:

$$pr_U u = \sum_{i=1}^{3} (u, e_i) e_i$$

$$pr_U u = \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix} -$$
$$- \frac{2,7}{15,4} \begin{pmatrix} -0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{15}{14} & \frac{5}{7} & \frac{5}{14} & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{2{,}43}{15{,}4} & \frac{4{,}05}{15{,}4} & -\frac{0{,}81}{15{,}4} & -\frac{9.45}{15{,}4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{44} & \frac{43}{44} & \frac{53}{44} & -\frac{27}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -27 & 43 & 53 & -27 \end{pmatrix}$$

Тогда найдем ортогональную составляющую:

$$ort_U u = \begin{pmatrix} \frac{27}{44} & \frac{45}{44} & -\frac{9}{44} & \frac{27}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 & 27 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $(pr_U u, ort_U u) = 0$, значит они найдены правильно.

Расстояние от $\vec{u}$ до подпространства U равно $|ort_U u| = \frac{9}{\sqrt{44}}$.

Задача 3

Составьте уравнение прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости $-2x + 4y + 2z = 0$, проходящей через точку $(2, 3, 2)$ и пересекающей прямую $x = 2t + 1,\ y = 4t - 2, z = 3t + 1$.

Решение.

Заметим, что искомая прямая будет лежать в некой плоскости, которая должна быть параллельна плоскости, заданной уравнением $-2x + 4y + 2z = 0$, и при этом проходящей через точку $(2, 3, 2)$.

Тогда данная плоскость будет задана уравнением $-2(x-2)+3(y-3)+2(z-2)=0$.

Теперь рассмотрим прямую:

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = 4t-2 \\ z = 3t+1 \end{cases}$$

или:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3y - 4z = -10 \end{cases}$$

Тогда найдем точку пересечения заданной прямой и плоскости и нам останется просто записать уравнение прямой, проходящей через две точки. Из уравнения плоскости: $-2x+4+3y-9+2z-4=0 \Rightarrow -2x+3y+2z=9$.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 3y - 4z = -10 \\ -2x+3y+2z=9 \end{cases}$$

Решим данную систему с помощью метода Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 3 & -4 & | & -10 \\ -2 & 3 & 2 & | & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 3 & -4 & | & -10 \\ 0 & 6 & 6 & | & 39 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 3 & -4 & | & -10 \\ 0 & 0 & 14 & | & 59 \end{pmatrix}$$

$$z = \frac{59}{14}.$$
$$y = \frac{\frac{59\cdot 4}{14} - 10}{3} = \frac{16}{7}.$$
$$x = \frac{\frac{16}{7}+4}{2} = \frac{22}{7}.$$

Теперь у нас есть две точки, через которые проходит прямая, уравнение которой мы ищем: $A=(2,3,2)$ и $B=(\frac{22}{7},\frac{16}{7},\frac{59}{14})$.

Направляющим вектором данной прямой будет являться $\overrightarrow{AB}=(\frac{8}{7},-\frac{5}{7},\frac{31}{14})$, тогда параметрическое уравнение прямой будет иметь вид:

$$\begin{cases} x = \frac{8}{7}t+2 \\ y = -\frac{5}{7}t+3 \\ z = \frac{31}{14}t+2 \end{cases}$$

Задача 4

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 3. Точка F – середина ребра BB', а точка E лежит на ребре BB', причём $BE : EB' = 5 : 6$. Найдите угол и расстояние между прямыми AE и $D'F$.

Решение.
Расположим наш куб в декартовой системе координат следующим образом:

$$
\begin{aligned}
A &= (0,0,0)\\
B &= (0,3,0)\\
C &= (3,3,0)\\
D &= (3,0,0)\\
A' &= (0,0,3)\\
B' &= (0,3,3)\\
C' &= (3,3,3)\\
D' &= (3,0,3)
\end{aligned}
$$

Тогда точка F будет иметь координаты $(0,3,1.5)$, а точка E – $(0,3,\frac{18}{11})$.

Найдем уравнение прямых AE и $D'F$:
Точка на прямой AE – $A(0,0,0)$ и направляющий вектор $11\overrightarrow{AE} = (0,33,18)$.
Точка на прямой $D'F$ – $F(0,3,1.5)$ и направляющий вектор $\overrightarrow{D'F} = (-3,3,-1.5)$.

Найдем угол между данными прямыми по формуле:

$$cos\ \phi = \frac{(11\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{D'F})}{\sqrt{|11\overrightarrow{AE}| \cdot \sqrt{\overrightarrow{D'F}}|}} = \frac{72}{\sqrt{1413} \cdot \sqrt{20,25}} = \frac{16}{\sqrt{1413}}.$$

$$\phi = arccos\left(\frac{16}{\sqrt{1413}}\right).$$

Теперь найдем расстояние между данными скрещивающимися прямыми.
Возьмем точку $A(0,0,0)$ на прямой AE и найдем расстояние от нее до некоторой плоскости λ, которая проходит через прямую $D'F$ параллельно прямой AE.

Теперь нам нужно построить уравнение плоскости λ. Ее направляющий вектор a, чтобы удовлетворять вышеназванным условиям, должен быть перпендикулярен как направляющему вектору прямой AE, так и направляющему вектору прямой $D'F$, а это значит, что в качестве него мы можем взять векторное произведение направляющих векторов прямых: $11\overrightarrow{AE} = (0, 33, 18)$ и $\overrightarrow{D'F} = (-3, 3, -1.5)$. Вычислим его:

$$\vec{a} = [11\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{D'F}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 33 & 18 \\ -3 & 3 & -1.5 \end{vmatrix} = (-49,5-54)\vec{i}+(-54)\vec{j}+(99)\vec{k} = -103,.5\vec{i}-54\vec{j}+99\vec{k}.$$

Значит $\vec{a} = (-103.5, -54, 99)$.

Раз плоскость проходит через прямую $D'F$, то она проходит и через точку $F(0, 3, 1.5)$ и тогда ее уравнение будет иметь вид:

$$-103,5(x) - 54(y+3) + 99(z-1.5) \Rightarrow -103,5x - 54y + 99z - 310.5 = 0.$$

Нормируем данное уравнение, чтобы получить нормальное уравнение плоскости, нормирующий множитель равен $\frac{1}{\sqrt{23429,25}}$:

$$-\frac{103,5}{\sqrt{23429,25}}x - \frac{54}{\sqrt{23429,25}}y + \frac{99}{\sqrt{23429,25}}z - \frac{310,5}{\sqrt{23429,25}}$$

Остается только подставить координаты точки $A(0, 0, 0)$ в данное уравнение и модуль полученной величины и будет искомым расстоянием(заметим, что раз все три координаты равны нулю, то нам достаточно просто взять модуль свободного члена нормального уравнения плоскости):

$$\frac{310,5}{\sqrt{23429,25}}.$$