Индивидульное домашнее задание 5
Шумилкин Андрей. Группа 165
Вариант 38.

Задача 1

Для квадратичной формы

$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(-3b+17)+x_2^2(7-b)+4x_3^2+2x_1x_2(10-2b)+2x_1x_3(3b-13)+2x_2x_3(-7+b)$

выясните при каких значениях параметра b она является положительно определённой, а при каких – отрицательно определённой.

Решение.

Составим матрицу квадратичной формы. Она будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{pmatrix}$$

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была положительно опеределённой нужно чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны. Найдем данные миноры:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b+17) > 0 \Rightarrow b < \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) \\ (10-2b) & (7-b) \end{vmatrix} > 0$$

$$(-3b+17)(7-b) - (10-2b)^2 = (-21b+119+3b^2-17b)-$$
$$-(100-40b+4b^2) = -b^2+2b+19.$$

$$-b^2+2b+19 = 0$$
$$D = 4+76 = 4\sqrt{5}$$
$$b = \frac{-2 \pm 4\sqrt{5}}{-2}$$
$$b_1 = 1+2\sqrt{5},\ b_2 = 1-2\sqrt{5}.$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_2 > 0$ при $1-2\sqrt{5} < b < 1+2\sqrt{5}$.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (10-2b) & (7-b) & (-7+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-3b+17) & (10-2b) & (3b-13) \\ (-3+b) & 0 & (-3+b) \\ (3b-13) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (-6b+30) & (10-2b) & (3b-13) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -4 & (3b-5) \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ (3b-17) & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & (-3+b) \\ 4 & (-7+b) & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (3-b) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 4 & (-7+b) \end{vmatrix} = (3-b)\cdot(8b-40) = -8b^2+64b-120 > 0$$

В данном определители порядок преобразований следующий, при этом ни одно из данных элементарных преобразований не изменило определитель:

- Прибавили ко второй строке третью.
- Отняли от первого столбца третий.
- Прибавили к первой строке третью, домноженную на 2.
- Отняли от первой строки вторую, домноженную на 3.
- Отнимем от первого столбца второй, домноженый на 3.

$$\begin{aligned} &-8b^2+64b-120=0 \\ &D = 4096-3840 = 256 = 16^2 \\ &b = \frac{-64 \pm 16}{-16} \\ &b_1 = 3,\ b_2 = 5. \end{aligned}$$

Тогда, так как парабола смотрит вниз, $\Delta_3 > 0$ при $3 < b < 5$.

Заметим, что $\frac{17}{3} > 1+2\sqrt{5}$. Заметим, что интервалы для Δ_2 и Δ_3 входят в интервал для Δ_1. При этом интервал для Δ_3 входит в интервал для Δ_2.

Тогда форма является положительно определённой при $3 < b < 5$.

По критерию Сильвестра для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно опеределённой, нужно чтобы угловые миноры ётного порядка её матрицы были положительны, а нечётного порядка — отрицательны. Тогда:

$$\Delta_1 = a_{11} = (-3b + 17) < 0 \Rightarrow b > \frac{17}{3}$$

$$\Delta_2 > 0 \text{ при } 1 - 2\sqrt{5} < b < 1 + 2\sqrt{5}.$$

$$\Delta_3 < 0 \text{ при } b < 3, b > 5$$

Интервал для Δ_2 не входит в интервал для Δ_1. Значит нет b, при которых форма является отрицательно определённой.

Задача 2

Подпространство U евклидова пространства в $\mathbb{R}^4$ задано уравнением $3x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$.
(а) Постройте в U ортонормированный базис.
(б) Для вектора $u = (0, 2, 1, 0)$ найдите его проекцию на U, его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

Решение.
(а) Запишем уравнение в виде $x_3 = 3x_1 + 5x_2 + 3x_4$ и найдем ФСР. Количество решений в ней будет равно 3.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	3	0
0	1	5	0
0	0	3	1

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Где столбцы ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 образуют ФСР и заданное подпространоство будет являться линейной оболочкой данных столбцов, поскольку они линейно-независимы(легко заметить, так как в трех строках в одном месте единица, а в остальных нули).

Для наглядности запишем векторы, которые образуют подпространство:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_2 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

Теперь с помощью метода Грама-Шмидта ортогонализируем и нормируем данные векторы.
$(\vec{u}, \vec{v})$ – скалярное произведение векторов.

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{b}_2 = \vec{x}_2 - \frac{(\vec{x}_2, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 0\end{pmatrix} - \frac{15}{10} \cdot \begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1,5 & 1 & 0,5 & 0\end{pmatrix}$$
$$\vec{b}_3 = \vec{x}_3 - \frac{(\vec{x}_3, \vec{b}_1)}{(\vec{b}_1, \vec{b}_1)} \cdot \vec{b}_1 - \frac{(\vec{x}_3, \vec{b}_2)}{(\vec{b}_2, \vec{b}_2)} \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 3 & 1\end{pmatrix} - \frac{9}{10}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 0\end{pmatrix} -$$
$$- \frac{1,5}{3,5}\begin{pmatrix}-1,5 & 1 & 0,5 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3,15}{3,5} & 0 & \frac{1,05}{3,5} & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\frac{2,25}{3,5} & \frac{1,5}{3,5} & \frac{0,75}{3,5} & 0\end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{3,5}\begin{pmatrix}-0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5\end{pmatrix}$$

Нормируем их по формуле

$$\vec{e}_j = \frac{\vec{b}_j}{||\vec{b}_j||}, \text{ где} ||\vec{b}_j|| = \sqrt{(b_j, b_j)}.$$

$$e_1 = \frac{\vec{b}_1}{\sqrt{10}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0\end{pmatrix}$$
$$e_2 = \frac{\vec{b}_2}{\sqrt{3,5}} = \begin{pmatrix}-\frac{1,5}{\sqrt{3,5}} & \frac{1}{\sqrt{3,5}} & \frac{0,5}{\sqrt{3,5}} & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0\end{pmatrix}$$
$$e_3 = \frac{\vec{b}_3}{\sqrt{\frac{44}{35}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{44}{35}} \cdot 3,5}\begin{pmatrix}-0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15,4}}\begin{pmatrix}-0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5\end{pmatrix}$$

(e_1, e_2, e_3) – искомый ортонормированный базис.

(б) Ортонормированный базис U

$$e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix}$$
$$e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix}$$
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{15,4}} \begin{pmatrix} -0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix}$$

вектор $u = (0, 2, 1, 0)$.

Учитывая, что у мы нашли ортонормированный базис U ортогональная проекция будет иметь вид:

$$pr_U u = \sum_{i=1}^{3} (u, e_i) e_i$$

$$pr_U u = \frac{3}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{14}} & \sqrt{\frac{2}{7}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & 0 \end{pmatrix} -$$
$$- \frac{2,7}{15,4} \begin{pmatrix} -0,9 & -1,5 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 & 0,9 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{15}{14} & \frac{5}{7} & \frac{5}{14} & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \frac{2,43}{15,4} & \frac{4,05}{15,4} & -\frac{0,81}{15,4} & -\frac{9.45}{15,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{27}{44} & \frac{43}{44} & \frac{53}{44} & -\frac{27}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} -27 & 43 & 53 & -27 \end{pmatrix}$$

Тогда найдем ортогональную составляющую:

$$ort_U u = \begin{pmatrix} \frac{27}{44} & \frac{45}{44} & -\frac{9}{44} & \frac{27}{44} \end{pmatrix} = \frac{1}{44} \begin{pmatrix} 27 & 45 & -9 & 27 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $(pr_U u, ort_U u) = 0$, значит они найдены правильно.

Расстояние от $\vec{u}$ до подпространства U равно $|ort_U u| = \frac{9}{\sqrt{44}}$.

Задача 3

Составьте уравнение прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости $-2x + 4y + 2z = 0$, проходящей через точку $(2, 3, 2)$ и пересекающей прямую $x = 2t + 1,\ y = 4t - 2, z = 3t + 1$.

Решение.

Задача 4

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 3. Точка F – середина ребра BB', а точка E лежит на ребре BB', причём $BE : EB' = 5 : 6$. Найдите угол и расстояние между прямыми AE и $D'F$.

Решение.