Индивидульное домашнее задание 2
Шумилкин Андрей. Группа 163
Вариант 43.

Задача 1

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 8 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = (4632581)(7)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 1 & 3 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (528431)(76)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 2 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Тогда(т.к. lcm(7,1) = 7): $A^7 = id = A^{14} \Rightarrow A^{19} = A^5$

$$A^{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 8 & 3 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 8 & 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$D = A^{19} \cdot B^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 8 & 2 & 5 & 7 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (4238671)(5)$$

Тогда $D^7 = id = D^{140} \Rightarrow D^{145} = D^5$.

$$D^{145} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 1 & 4 & 7 & 5 & 3 & 8 & 2 \end{pmatrix} = F$$

$F \cdot X = C$
$F^{-1} \cdot F \cdot X = F^{-1} \cdot C$
$X = F^{-1} \cdot C$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 6 & 3 & 5 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} = X$$

$$\text{Ответ :}\ \ X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 8 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Будем смотреть сколько чисел меньше рассматриваемого числа находится правее него. Сумма этих значений будет равна числу инверсий и с помощью его четности мы и определим четность подстановки. Видно, что для любого $\sigma(i)$ из $i = 1 \dots 187$ все $\sigma(j) > \sigma(i), j = (i+1) \dots 188$ и все $\sigma(t) < \sigma(i), t = 189 \dots 235$. Последнее условие также выполняется для i = 188.
Значит каждый элемент $i = 1 \dots 188$ дает (235 - 189 + 1 = 47) инверсий.
188(четн.) $\cdot$ 47(нечетн.) = четное число.
Ответ: Подстановка четна.

Задача 3

Раскроем определитель по первому столбцу:

$$D = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Раскроем оба этих определителя по последнему столбцу:

$$D = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 12 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Заметим, что второй определитель равен четвертому. Тогда:

$$D = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

В каждом из определителей отнимем последний столбец от предпоследнего. Эта операция не меняет определитель.

$$D = -3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 10 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Раскроем каждый определитель по первой строке:

$$D = 9 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 30 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

В первом определителе прибавим последний столбец к первому с коэффициентом (3) и ко второму с коэффициентом (6).
Во втором прибавим первую строку ко второй и третьей с коэффициентами (-1) и (-2) соответственно.
В третьем прибавим вторую строку к третьей с коэффициентом (-2).

$$D = 9 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 15 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 19 & 29 & 4 \end{vmatrix} - 30 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -7 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Раскроем первый определитель по последнему столбцу.
Второй – по второму столбцу.
Третий – по второму столбцу.

$$D = 9 \cdot \begin{vmatrix} 10 & 15 \\ 19 & 29 \end{vmatrix} + 90 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -7 & 1 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$D = 9 \cdot 5 + 90 \cdot 20 - 9 \cdot 15 = 1710$$

Ответ: 1710.

Задача 4

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 & x & 5 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & x & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & x & 3 & 2 & 10 & 1 & 7 \\ x & 9 & 2 & 7 & 4 & 6 & x \\ 5 & 6 & 10 & 4 & 2 & x & 10 \\ 7 & 8 & 1 & 6 & x & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & x & 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 7-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & x & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 9 & x & 3 & 2 & 10 & 1 & 7 \\ x & 9 & 2 & 7 & 4 & 6 & x \\ 5 & 6 & 10 & 4 & 2 & x & 10 \\ 7 & 8 & 1 & 6 & x & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & x & 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ому столбцу 7-ый, домноженный на -1:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ -1 & 3 & x & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & x & 3 & 2 & 10 & 1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 & 7 & 4 & 6 & x \\ -5 & 6 & 10 & 4 & 2 & x & 10 \\ 5 & 8 & 1 & 6 & x & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & x & 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами вторую и четвертую, а затем третью и пятую строчки. Далее поменяем третью с шестой и пятую и с седьмой. Т.к. у нас 4 обмена местами, то определитель не изменится($(-1)^4 = 1$).

$$D = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 & 0 & -5 & 5 & -1 \\ 0 & 9 & 2 & 7 & 4 & 6 & x \\ -5 & 6 & 10 & 4 & 2 & x & 10 \\ 5 & 8 & 1 & 6 & x & 7 & 2 \\ -1 & 3 & 7 & x & 10 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & x & 9 & 6 & 8 & 3 \\ 2 & x & 3 & 2 & 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Раскроем определитель по первому столбцу:

$$D = 6\cdot\begin{pmatrix}9&2&7&4&6&x\\6&10&4&2&x&10\\8&1&6&x&7&2\\3&7&x&10&2&3\\3&x&9&6&8&3\\x&3&2&10&1&7\end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix}-1&2&0&-5&5&-1\\9&2&7&4&6&x\\8&1&6&x&7&2\\3&7&x&10&2&3\\3&x&9&6&8&3\\x&3&2&10&1&7\end{pmatrix} - 5\cdot\begin{pmatrix}-1&2&0&-5&5&-1\\9&2&7&4&6&x\\6&10&4&2&x&10\\3&7&x&10&2&3\\3&x&9&6&8&3\\x&3&2&10&1&7\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}-1&2&0&-5&5&-1\\9&2&7&4&6&x\\6&10&4&2&x&10\\8&1&6&x&7&2\\3&x&9&6&8&3\\x&3&2&10&1&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&0&-5&5&-1\\9&2&7&4&6&x\\6&10&4&2&x&10\\8&1&6&x&7&2\\3&7&x&10&2&3\\x&3&2&10&1&7\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}-1&2&0&-5&5&-1\\9&2&7&4&6&x\\6&10&4&2&x&10\\8&1&6&x&7&2\\3&7&x&10&2&3\\3&x&9&6&8&3\end{pmatrix}$$

В первый определитель вообще не даст x^5, так как все х на главной диагонали. То есть, если мы берем множитель x^5, то определению определителя(через перестановки) положение последнего элемента, который войдет в этот член определителя уже однозначно определено и это будет еще один x. Сразу отметим, что в остальных определителях положение последнего элемента входящего в член определителя так же определено(только там это уже некий коэффициент, а не x), что и позволит нам его легко посчитать. Пронумеруем все определители, кроме первого, слева направо.

Для определителя под номером n назовем член определителя, котором содержится x^5 – m_n. Тогда:

$m_1 = 5x^5$

$m_2 = -5x^5$

$m_3 = 0$

$m_4 = 2x^5$

$m_5 = -x^5$.

Теперь посмотрим на число инверсий в перестановках, соответствующих данным членам. Перестановку для элемента m_n обозначим $\sigma(m_n)$, а число инверсий в ней $N(\sigma(m_n))$.

$$\sigma(m_1) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&3&1&2\end{pmatrix}.\ N(\sigma(m_1)) = 5+4+3+2 = 14.$$

$$\sigma(m_2) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&4&1&3&2\end{pmatrix}.\ N(\sigma(m_2)) = 5+4+3+1 = 13.$$

$$\sigma(m_3) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&1&4&3&2\end{pmatrix}.\ N(\sigma(m_4)) = 5+4+2+1 = 12.$$

$$\sigma(m_4) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&1&5&4&3&2\end{pmatrix}.\ N(\sigma(m_4)) = 5+3+2+1 = 11.$$

$$\sigma(m_5) = \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&6&5&4&3&2\end{pmatrix}.\ N(\sigma(m_5)) = 4+3+2+1 = 10.$$

Тогда, учитывая знаки под которыми входят данные члены в свои определители и вынеся их из них и домножив на коэффициенты, стоящие перед данными определителями в выражении определителя начальной матрицы, получаем для x^5, входящего в определитель начальной матрицы, следующее выражение:

$-5\cdot(5x^5) - 5\cdot(5x^5) + (-2x^5) + 2\cdot(-x^5) = -54x^5$.

Ответ: -54.