Индивидульное домашнее задание 1
Шумилкин Андрей. Группа 163
Вариант 34.

Задача 1

*Программу, которую использовал при решении данной задачи прикрепил к письму с названием class Matrix solve.cpp. Она не полностью автоматическая, то есть очередное преобразование матрицы надо вводить вручную. Решает функция do_elementary_operations(). Ввод для этой программы к каждой задаче прикрепил к письму в файлах "*номер задачи* in". Выводит программа ответ сразу в формате кода latex.*
Так же эта программа решает и третью задачу с помощью реализованных в классе арифметических операцй для матриц. В функции main записан код, который решает третью задачу.

Запишем расширенную матрицу системы и попытаемся привести ее к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} 78 & 81 & 153 & -318 & 240 \\ 18 & 96 & -42 & -228 & 210 \\ -40 & -39 & -81 & 158 & -118 \\ -62 & 66 & -252 & -8 & 70 \end{pmatrix}$$

Разделим 2-ую строку на 2:

$$\begin{pmatrix} 78 & 81 & 153 & -318 & 240 \\ 9 & 48 & -21 & -114 & 105 \\ -40 & -39 & -81 & 158 & -118 \\ -62 & 66 & -252 & -8 & 70 \end{pmatrix}$$

Разделим 1-ую строку на 3:

$$\begin{pmatrix} 26 & 27 & 51 & -106 & 80 \\ 9 & 48 & -21 & -114 & 105 \\ -40 & -39 & -81 & 158 & -118 \\ -62 & 66 & -252 & -8 & 70 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} -1 & -117 & 114 & 236 & -235 \\ 9 & 48 & -21 & -114 & 105 \\ -40 & -39 & -81 & 158 & -118 \\ -62 & 66 & -252 & -8 & 70 \end{pmatrix}$$

Домножим 1-ую строку на -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 117 & -114 & -236 & 235 \\ 9 & 48 & -21 & -114 & 105 \\ -40 & -39 & -81 & 158 & -118 \\ -62 & 66 & -252 & -8 & 70 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на -9:

$$\begin{pmatrix} 1 & 117 & -114 & -236 & 235 \\ 0 & -1005 & 1005 & 2010 & -2010 \\ -40 & -39 & -81 & 158 & -118 \\ -62 & 66 & -252 & -8 & 70 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на 40:

$$\begin{pmatrix} 1 & 117 & -114 & -236 & 235 \\ 0 & -1005 & 1005 & 2010 & -2010 \\ 0 & 4641 & -4641 & -9282 & 9282 \\ -62 & 66 & -252 & -8 & 70 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на 62:

$$\begin{pmatrix} 1 & 117 & -114 & -236 & 235 \\ 0 & -1005 & 1005 & 2010 & -2010 \\ 0 & 4641 & -4641 & -9282 & 9282 \\ 0 & 7320 & -7320 & -14640 & 14640 \end{pmatrix}$$

Разделим 2-ую строку на -1005:

$$\begin{pmatrix} 1 & 117 & -114 & -236 & 235 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4641 & -4641 & -9282 & 9282 \\ 0 & 7320 & -7320 & -14640 & 14640 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на -4641:

$$\begin{pmatrix} 1 & 117 & -114 & -236 & 235 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7320 & -7320 & -14640 & 14640 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на -7320:

$$\begin{pmatrix} 1 & 117 & -114 & -236 & 235 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 2-ую, домноженную на -117:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

У нас получилось две ненулевых строки. Запишем получившиеся уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3x_3 + 2x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 + 2x_4 + 2 \end{cases}$$

Тогда общее решение системы линейных уравнений примет вид:

$$\begin{pmatrix} -3x_3 + 2x_4 + 1 \\ x_3 + 2x_4 + 2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Найдем одно частное решение. К примеру, возьмем $x_3 = 1$ и $x_4 = -1$:

$$\begin{pmatrix} -3 - 2 + 1 = -4 \\ 3 - 2 + 2 = 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Запишем расширенную матрицу системы и попытаемся привести ее к каноническому виду:

$$\begin{pmatrix} 32 & 54 & 13 & 112 & 607 \\ 21 & 18 & 20 & 79 & 415 \\ -3 & 16 & 59 & 131 & 702 \\ -5 & 2 & 12 & 21 & 143 \end{pmatrix}$$

Поменяем местами 1-ую и 2-ую строку:

$$\begin{pmatrix} 21 & 18 & 20 & 79 & 415 \\ 32 & 54 & 13 & 112 & 607 \\ -3 & 16 & 59 & 131 & 702 \\ -5 & 2 & 12 & 21 & 143 \end{pmatrix}$$

Добавим к 1-ой строке 4-ую, домноженную на 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 32 & 54 & 13 & 112 & 607 \\ -3 & 16 & 59 & 131 & 702 \\ -5 & 2 & 12 & 21 & 143 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 1-ую, домноженную на -32:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -778 & -2163 & -5104 & -30977 \\ -3 & 16 & 59 & 131 & 702 \\ -5 & 2 & 12 & 21 & 143 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 1-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -778 & -2163 & -5104 & -30977 \\ 0 & 94 & 263 & 620 & 3663 \\ -5 & 2 & 12 & 21 & 143 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 1-ую, домноженную на 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -778 & -2163 & -5104 & -30977 \\ 0 & 94 & 263 & 620 & 3663 \\ 0 & 132 & 352 & 836 & 5078 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 8:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -26 & -59 & -144 & -1673 \\ 0 & 94 & 263 & 620 & 3663 \\ 0 & 132 & 352 & 836 & 5078 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -26 & -59 & -144 & -1673 \\ 0 & 16 & 86 & 188 & -1356 \\ 0 & 132 & 352 & 836 & 5078 \end{pmatrix}$$

Разделим 3-ую строку на 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -26 & -59 & -144 & -1673 \\ 0 & 8 & 43 & 94 & -678 \\ 0 & 132 & 352 & 836 & 5078 \end{pmatrix}$$

Добавим к 2-ой строке 3-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707 \\ 0 & 8 & 43 & 94 & -678 \\ 0 & 132 & 352 & 836 & 5078 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 2-ую, домноженную на 4:

$$\begin{pmatrix}1 & 26 & 68 & 163 & 987\\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707\\ 0 & 0 & 323 & 646 & -15506\\ 0 & 132 & 352 & 836 & 5078\end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 2-ую, домноженную на 66:

$$\begin{pmatrix}1 & 26 & 68 & 163 & 987\\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707\\ 0 & 0 & 323 & 646 & -15506\\ 0 & 0 & 4972 & 9944 & -239584\end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на -15:

$$\begin{pmatrix}1 & 26 & 68 & 163 & 987\\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707\\ 0 & 0 & 323 & 646 & -15506\\ 0 & 0 & 127 & 254 & -6994\end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на -2:

$$\begin{pmatrix}1 & 26 & 68 & 163 & 987\\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707\\ 0 & 0 & 69 & 138 & -1518\\ 0 & 0 & 127 & 254 & -6994\end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix}1 & 26 & 68 & 163 & 987\\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707\\ 0 & 0 & 69 & 138 & -1518\\ 0 & 0 & 58 & 116 & -5476\end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на -1:

$$\begin{pmatrix}1 & 26 & 68 & 163 & 987\\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707\\ 0 & 0 & 11 & 22 & 3958\\ 0 & 0 & 58 & 116 & -5476\end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707 \\ 0 & 0 & 11 & 22 & 3958 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -25266 \end{pmatrix}$$

Добавим к 3-ой строке 4-ую, домноженную на -4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 105022 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & -25266 \end{pmatrix}$$

Добавим к 4-ой строке 3-ую, домноженную на 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 68 & 163 & 987 \\ 0 & -2 & 70 & 138 & -3707 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 105022 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 289800 \end{pmatrix}$$

Данная система уравнений несовместна, т.к. $0 \neq 289800$.

Задача 3

Примем:
$A = \begin{pmatrix} 7 & 14 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.
$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$.
$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.
$D = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда можем переписать данное выражение в виде:
$A \cdot B \cdot C - \left[C \cdot A^T \right]^T \cdot C + A \cdot D \cdot C - B^T \cdot A^T \cdot A + A \cdot \left[A^T \cdot C \right]^T - D^T \cdot A^T \cdot A$
$= A \cdot B \cdot C - A \cdot C^T \cdot C + A \cdot D \cdot C - B^T \cdot A^T \cdot A + A \cdot C^T \cdot A - D^T \cdot A^T \cdot A.$
$= A \cdot (B - C^T + D) \cdot C + (-B^T \cdot A^T + A \cdot C^T - D^T \cdot A^T) \cdot A$

Это равно:

$$\begin{pmatrix} -609 & -2989 \\ -453 & -2213 \end{pmatrix}$$

Задача 4

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Заметим, что четыре элемента в любой степени будут равны нулю. Обозначим следующую степень элемента как a^{n+1}:

$a_{12}^{n+1} = a_{11}^n \cdot a_{12} + a_{12}^n \cdot a_{22} + a_{13}^n \cdot a_{32} = a_{11}^n \cdot 0 + 0 \cdot a_{22} + a_{13}^n \cdot 0 = 0$
$a_{32}^{n+1} = a_{31}^n \cdot a_{12} + a_{32}^n \cdot a_{22} + a_{33}^n \cdot a_{32} = 0 \cdot a_{12} + 0 \cdot a_{22} + a_{33}^n \cdot 0 = 0.$
$a_{21}^{n+1} = a_{21}^n \cdot a_{11} + a_{22}^n \cdot a_{21} + a_{23}^n \cdot a_{31} = 0 \cdot a_{11} + a_{22}^n \cdot 0 + a_{23}^n \cdot 0 = 0.$
$a_{31}^{n+1} = a_{31}^n \cdot a_{11} + a_{32}^n \cdot a_{21} + a_{33}^n \cdot a_{31} = 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{21} + a_{33}^n \cdot 0 = 0.$

Тогда:
$a_{11}^{n+1} = a_{11}^n \cdot a_{11} + a_{12}^n \cdot a_{21} + a_{13}^n \cdot a_{31} = a_{11}^n \cdot 3 + 0 \cdot 0 + a_{13}^n \cdot 0 = 3 \cdot a_{11}^n.$
$a_{22}^{n+1} = a_{21}^n \cdot a_{12} + a_{22}^n \cdot a_{22} + a_{23}^n \cdot a_{32} = 0 \cdot 0 + a_{22}^n \cdot a_{22} + a_{23}^n \cdot 0 = 9 \cdot a_{22}^n.$
$a_{33}^{n+1} = a_{31}^n \cdot a_{13} + a_{32}^n \cdot a_{23} + a_{33}^n \cdot a_{33} = 0 \cdot a_{13} + 0 \cdot a_{23} + a_{33}^n \cdot a_{33} = 3 \cdot a_{33}^n.$

И наконец:
$a_{13}^{n+1} = a_{11}^n \cdot a_{13} + a_{12}^n \cdot a_{23} + a_{13}^n \cdot a_{33} = a_{11}^n \cdot 1 + 0 \cdot 1 + a_{13}^n \cdot 3 = a_{11}^n + 3 \cdot a_{13}^n.$
$a_{23}^{n+1} = a_{21}^n \cdot a_{13} + a_{22}^n \cdot a_{23} + a_{23}^n \cdot a_{33} = 0 \cdot a_{13} + a_{22}^n \cdot 1 + a_{23}^n \cdot 3 = a_{22}^n + 3 \cdot a_{23}^n.$

В итоге имеем:
$a_{12}^n = 0.$
$a_{21}^n = 0.$
$a_{31}^n = 0.$
$a_{32}^n = 0.$
$a_{11}^n = 3^n.$
$a_{22}^n = 9^n.$
$a_{33}^n = 3^n.$
$a_{13}^n = n \cdot 3^{n-1}.$
$a_{23}^n = \frac{3^{n-1} \cdot (3^n - 1)}{2}.$

$$\begin{pmatrix} 3^n & 0 & n \cdot 3^{n-1} \\ 0 & 9^n & \frac{3^{n-1} \cdot (3^n - 1)}{2} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$